



**Uma Análise da Dinâmica do Pêndulo
Eletromecânico utilizando
a Teoria de Perturbações**

João Paulo Martins dos Santos

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

João Paulo Martins dos Santos

**Uma Análise da Dinâmica do Pêndulo Eletromecânico utilizando a Teoria de
Perturbações**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Geometria e Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

São José do Rio Preto

2009

Santos, João Paulo Martins dos.

Uma análise da dinâmica do pêndulo eletromecânico utilizando a teoria de perturbações/João Paulo Martins dos Santos. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2009.

138 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Masayoshi Tsuchida

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Equações diferenciais não-lineares-Soluções analíticas aproximadas. 3. Sistema não-ideal. 4. Teoria de Perturbações. 5. Método da média. 6. Método das múltiplas escalas. 7. Método da expansão direta. 8. Ressonancia (Matemática). I. Tsuchida, Masayoshi. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

JOÃO PAULO MARTINS DOS SANTOS

Uma Análise da Dinâmica do Pêndulo Eletromecânico utilizando a Teoria de Perturbações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Geometria e Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Professor Titular
UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 16 de Fevereiro de 2009.

“Para descobrir todos os
fenômenos que deseja,
basta ao sábio três coisas:
pensar, pensar, pensar.”

Isaac Newton

*A Deus, Pai todo poderoso
que me deu forças para caminhar,
amigo sincero de todas
as horas. Dedico*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por guiar e iluminar meu caminho.

Ao Prof. Masayoshi, pela sabedoria, compreensão e atenção, presteza e paciência.

A todos os professores do departamento e a todos os funcionários.

Aos meus estimados pais Paulo Roberto e Creuza, por tudo que fizeram por mim, e pelo apoio nas horas mais difíceis.

Aos meus irmãos Pedro e André, por serem mãos firmes sempre que precisei.

À Rita, que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, pelo carinho, paciência, pela força sempre presente, enfim, por tudo.

Ao Sr. José Sydnei e Sr. Maria Eugênia pelo apoio sempre presente, os quais considero como segundos pais.

Aos meus amigos, companheiros e todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação vamos fazer uma análise do sistema pêndulo eletromecânico utilizando a teoria de perturbações através dos métodos da média e múltiplas escalas. Nosso objetivo é obter soluções analíticas aproximadas para o sistema e fazer análise dos casos de ressonâncias internas, além de estudar a estabilidade dos estados estacionários.

O sistema pêndulo eletromecânico tem uma dinâmica muito rica, pois apresenta curvas características dos efeitos de histerese, fenômenos de saltos nas amplitudes dos movimentos realizáveis, curvas com características mole e dura ("softening e hardening") e, além disso, diversas ressonâncias internas.

Devido a complexidade das equações do sistema pêndulo eletromecânico, elas são difíceis de serem tratadas analiticamente, já que existe interação ressonante entre as três partes (bloco, motor e pêndulo), e não podemos restringir o estudo das interações ressonantes à apenas duas partes e desprezar a outra parte.

Neste trabalho analisamos o caso em que existe interação ressonante entre o bloco e o motor, mas sem interação ressonante com o pêndulo, mas, no entanto, sem desprezar os efeitos do movimento do pêndulo. Em seguida, discutimos a possibilidade de efeitos de saltos nas amplitudes dos movimentos realizáveis, apresentamos alguns pontos onde o sistema perde a estabilidade, já que a discussão sobre comportamento geral do sistema é restrito a variedade central, e analisamos a estabilidade dos pontos fixos tomando como exemplo o estudo feito por Kononenko.

A estabilidade dos pontos fixos do sistema é feita pela utilização do critério R-H, juntamente com a teoria da variedade central já que, no caso analisado, existe auto valor zero.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, sistemas dinâmicos não ideais, efeito Sommerfeld, histerese, método da média, método das múltiplas escalas, teoria de perturbações.

Abstract

In this work we study the eletromechanical pendulum system with pertubation theory. We use the average method and the multiple scales method to get a approximate analytic solution for the problem, and analyse the various internal resonances and the stationary states stability.

The eletromechanical pendulum is a very complex dynamical system and it shows very interesting effects such as histeresis, jump phenomenon, curves of hardening and softening type and, also, various kinds of internal resonances.

The equations of the system are very complicated and so they are very hardy to study in an analytic way, because there is resonant interaction between the three components parts of the system and we can't restrict our study to interactions of just two parts of the system. In this work we analyse the case of resonant interaction between the block and the load without resonant interaction between the block and pendulum, but taking in account the pendulum effects.

We treat the possibility of jump phenomenon, some points where the system loose stability are localized, and we analyse the stability of the stationary states as done by Kononenko.

The analysis of stability of the stationary states is done by Routh-Hurwtiz criterion(R-H criterion) and center manifold, because the Jacobian matrix has an eigenvalue with zero real part.

Keywords: *Dynamical systems, nonlinear dynamical systems, Sommerfeld effect, histeresis effects, average method, multiple escales method.*

Lista de Figuras

2.1	<i>Uma curva característica do efeito de histerese</i>	13
2.2	<i>Região de instabilidade</i>	14
2.3	<i>Região de instabilidade para pequena alteração na fonte de energia</i>	14
2.4	<i>Saltos nas amplitudes de movimentos realizáveis</i>	15
4.1	<i>Sistema pêndulo eletromecânico</i>	19
4.2	<i>Variação de a_1 com τ calculado numericamente das equações médias</i>	38
4.3	<i>Variação de β_1 com τ calculado numericamente</i>	38
4.4	<i>Variação de Ω com τ calculado numericamente</i>	39
4.5	<i>Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle e $b=0.12$</i>	49
4.6	<i>Curva resposta de frequência e o fenômeno de histerese</i>	49
4.7	<i>Pontos instáveis e estáveis para $b=0.07$</i>	51
4.8	<i>Pontos instáveis e estáveis para $b=0.02$</i>	51
4.9	<i>Intersecção entre as curvas de $S(\Omega)$ e torque linear $M_1(\Omega)$</i>	53
4.10	<i>Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle σ_Ω com $\delta > 0$</i>	53
4.11	<i>Curva resposta de frequência com $\delta > 0$ e $\Omega = 10.725$</i>	55
4.12	<i>Curva resposta de frequência com $\delta > 0$ e $\Omega = 9.75$</i>	56
4.13	<i>Curva resposta de frequência com $\delta > 0$ e $\Omega = 12.725$</i>	56
4.14	<i>Intersecções entre as curvas $S(\sigma_\Omega)$ e M_1 constante para $\Omega = 10.725$</i>	56
4.15	<i>Intersecções entre as $S(\sigma_\Omega)$ e M_1 constante para $\Omega = 9.75$</i>	57
4.16	<i>Intersecções entre as curvas $S(\sigma_\Omega)$ e M_1 constante para $\Omega = 12.725$</i>	57
4.17	<i>Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 25.3$</i>	58
4.18	<i>Curva de resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 13.0$</i>	59
4.19	<i>Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 18.0$</i>	59

4.20	<i>Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 17.0$</i>	59
4.21	<i>Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 17.50$</i>	61
4.22	<i>Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle c_1, $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$</i>	62
4.23	<i>Curva de oscilações forçadas em função do parâmetro de controle c_1 com $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$</i>	62
4.24	<i>Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle m_2 com $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$</i>	64
4.25	<i>Variação de a_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$</i>	67
4.26	<i>Variação de β_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$</i>	68
4.27	<i>Variação de Ω em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$</i>	68
4.28	<i>Variação de a_3 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$</i>	68
4.29	<i>Variação de β_3 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$</i>	69
4.30	<i>Variação de a_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 3$</i>	72
4.31	<i>Variação de β_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 3$</i>	72
4.32	<i>Variação de Ω em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 3$</i>	72

Lista de Tabelas

4.1	<i>Descrição dos parâmetros do sistema pêndulo eletromecânico</i>	20
4.2	<i>Valores dos parâmetros para estados estacionários sem ressonância</i>	39
4.3	<i>Condições de Routh</i>	46
4.4	<i>Valores dos parâmetros e constantes para o fenômeno de histerese</i>	52
4.5	<i>Valores dos parâmetros e constantes utilizados no caso σ_Ω e $\delta > 0$</i>	55
4.6	<i>Regiões de instabilidade no caso $\delta > 0$</i>	58
4.7	<i>Valores dos parâmetros e constantes utilizados no caso σ_Ω e $\delta < 0$</i>	60
4.8	<i>Tabela das regiões instáveis no caso σ_Ω como parâmetro e $\delta < 0$</i>	60
4.9	<i>Valores dos parâmetros utilizados para c_1 como parâmetro de controle, $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$</i>	63
4.10	<i>Valores dos parâmetros para m_2 como parâmetro de controle, $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$</i>	65
4.11	<i>Valores dos parâmetros e constantes utilizados para $\omega_3 \approx 0$</i>	70
4.12	<i>Valores dos parâmetros e constantes utilizados para $\omega_3 \approx 3$</i>	73

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos do trabalho	3
1.2	Descrição dos Capítulos	4
2	Introdução aos sistemas dinâmicos	6
2.1	Conceitos Preliminares	6
2.2	Sistemas dinâmicos não ideais	11
3	Métodos de perturbação	16
3.1	Método da média	16
3.2	Método das múltiplas escalas	17
4	Sistema Pêndulo Eléctro-mecânico	19
4.1	Modelagem Matemática	19
4.2	Método da variação dos parâmetros	25
4.3	Caso sem ressonância	35
4.4	Análise dos estados estacionários. Critério R-H	41
4.4.1	O critério Routh - Hurwitz	45
4.4.2	Análise dos estados estacionários	48
4.4.3	Parâmetro de controle: frequência Ω da rotação do motor	48
4.4.4	Parâmetro de controle: parâmetro de sintonia σ_Ω , e $\delta > 0$	53
4.4.5	Parâmetro de controle: parâmetro de sintonia σ_Ω e $\delta < 0$	58
4.4.6	Outros parâmetros de controle	61
4.5	Ressonâncias secundárias	66
4.5.1	$\omega_3 \approx 0$	66
4.5.2	$\omega_3 \approx 3$	69

4.5.3	$\omega_3 \approx \frac{1}{3}$	75
5	Método das múltiplas escalas	77
5.1	Método da expansão direta	77
5.2	Método das múltiplas escalas	85
5.2.1	Considerações sobre a equação do motor	89
5.3	Estudo das ressonancias	90
5.3.1	Sistema sem ressonancia	91
5.3.2	Variação dos parâmetros para o método das múltiplas escalas . . .	91
5.3.3	Solução particular para a equação do bloco	92
5.3.4	Solução da equação do pêndulo	92
5.4	Ressonancias secundárias	96
5.4.1	$\omega_3 \approx 3$	96
5.4.2	$\omega_3 \approx \frac{1}{3}$	100
6	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	104
6.1	Conclusões	104
6.2	Trabalhos Futuros	106
	Referências Bibliográficas	107
A	Programas em Matlab[®]	111
A.1	Parâmetro de controle: frequência Ω da rotação do motor	111

Capítulo 1

Introdução

Desde as origens o homem tem procurado descrever os fenômenos que o cercam. Basicamente, este processo de busca de explicações tem origem na Grécia antiga, juntamente com a filosofia e as hipóteses da criação.

Aristóteles foi o precursor desta tentativa, mas, no entanto, estava baseada apenas em especulações filosóficas e não em explicações científicas. Apesar das idéias aristotélicas serem consideradas incoerentes com o pensamento atual, elas perduraram por mais de dois séculos e serviram de base para C. Ptolomeu (III-II a.C.) propor o modelo matemático geocêntrico para explicar o movimento dos corpos celestes ([28]).

A adoção do modelo ptolomáico devido às conseqüências da expansão da religião cristã, deixou um grande vazio de produção científica até a invenção da imprensa e a publicação de *De Revolutionibus Orbitum Coelestium* de Nicolau Copérnico (1473-1543) ([24],[28]), no qual propunha o modelo heliocêntrico postulado por Aristarco de Samos (310-230 a. C) mas, mantinha preservadas as raízes do pensamento aristotélico. A terra não era o centro do universo, mas no entanto, os planetas ainda mantinham órbitas circulares em torno do sol.

Com base na teoria heliocêntrica, e de posse das observações de Tycho Brahe, J.Kepler conseguiu adequar matematicamente o movimento dos planetas em torno do sol, sendo que o modelo geométrico no qual os dados se adequavam era a elipse.

Como os resultados obtidos por Kepler eram baseados em dados empíricos, coube a Galileu Galilei semear as sementes para a formulação das leis que governam o movimento dos corpos por Isaac Newton. Galileu fez estudos com o pêndulo, planos inclinados, e formulou o princípio(galileano) da relatividade ([24]).

Com a invenção do cálculo diferencial e integral, Isaac Newton lançou luz sobre os processos que variam com o tempo, pois a taxa de variação, ou o fluxo, era uma quantidade que fluía e, portanto, resolver esse problema é equivalente a resolver a equação diferencial associada. Assim, abriram-se as portas para uma nova linha de pesquisas, que se mostrou promissora e, posteriormente, seria chamada Sistemas Dinâmicos.

Com a abordagem newtoniana, a ciência sofreu um grande impulso e viveu uma época de grande euforia, o que levou a afirmação de que bastava a alguma inteligência, suficientemente avançada, ter as equações que governavam os processos do universo para ter o presente, passado e futuro em mãos([34]).

No entanto, em fins do século XIX, **Henri Poincaré**, enquanto estudava o problema da dinâmica dos três corpos, visualizou o Caos ([28]). Poincaré, basicamente, deparou-se com a sensibilidade as condições iniciais e deu uma descrição de como os sistemas podem ter comportamentos diversos apenas pela alteração de uma quantidade diminuta ([34]). Komogorov(1903-1987), V.I. Arnold e J. Moser realizaram trabalhos sobre a dinâmica dos três corpos e demonstraram que este sistema pode ou não ser caótico.

Ao mesmo tempo Sommerfeld observava a interação entre a fonte de excitação e o sistema oscilante, e que esse processo conduz a dependência das coordenadas do movimento e do tempo. Posteriormente, as observações de Sommerfeld foram confirmadas em outros sistemas dinâmicos.

Cerca de um século mais tarde, **Edward Lorenz**(1916-2008), enquanto estudava problemas meteorológicos ([34]), constatou que é possível a ocorrência de Caos em sistemas determinísticos e chamou tal constatação de *efeito borboleta*, ou seja, diferenças diminutas causam grandes conseqüências ([34],[28]). Essas causas diminutas são pequenas perturbações introduzidas com o objetivo de verificar o comportamento do sistema ou são inerentes ao sistema e não podem ser eliminadas.

As equações não lineares têm sido exploradas mais intensivamente desde o advento do Caos, pois muitas áreas do conhecimento têm se deparado com o Caos ([34]). A teoria das perturbações tem sido grandemente explorada nestes estudos, pois soluções analíticas são muito raras, para não dizer impossíveis.

Nayfeh, ([29]) explora a teoria das perturbações aplicada a problemas não lineares através dos métodos da média, múltiplas escalas, expansão direta, técnica de Lindstead - Poincaré e método da renormalização, mas dá atenção especial aos métodos da média e

múltiplas escalas, os quais serão objetivos de nosso trabalho.

Nos anos 50 e 60 Kononenko ([26]) utilizou métodos de perturbações para estudar sistemas dinâmicos não ideais. Balthazar e colaboradores ([3]-[13]) apresentaram uma revisão completa dos sistemas dinâmicos com formulações não-ideais e diversas contribuições no estudo de sistemas dinâmicos com formulações não-ideais.

Sistemas dinâmicos não ideais apresentam grande variedade de comportamentos, tais como fenômenos de salto ('jump') e histerese na região de ressonância. Além disso, sistemas modelados matematicamente como sendo não ideais são mais realistas, pois levam em conta a dependência da fonte de energia em relação ao sistema.

1.1 Objetivos do trabalho

O papel que o estudo de sistemas dinâmicos desempenha no avanço das ciências em geral, é bastante importante, pois uma parcela significativa de problemas reais pode ser modelada através de sistemas dinâmicos.

Nas últimas décadas essa importância tem aumentado, em virtude dos estudos de sistemas dinâmicos ditos não-ideais, onde o agente excitador possui energia limitada e, portanto, o seu comportamento é afetado pelo próprio comportamento do sistema dinâmico.

O principal objetivo desta dissertação é dar seqüência aos estudos sobre pêndulo eletro-mecânico com excitação horizontal. Estudos preliminares desse sistema dinâmico já foram desenvolvidos por Dias em ([15]-[22]), mas existe uma grande variedade de estudos a serem feitos de modo que possamos entender completamente o comportamento dinâmico do pêndulo eletro-mecânico. Assim, nesta dissertação, inicialmente vamos analisar a influência da fonte de potência no movimento do sistema, e as condições sob as quais ocorrem a instabilidade do movimento na vizinhança da ressonância. Esse fenômeno é conhecido como efeito Sommerfeld.

Outras fontes de instabilidade são as bifurcações. Além desses estudos serão analisadas as ressonâncias internas, com o objetivo de identificar eventuais combinações que levam a soluções caóticas do sistema dinâmico.

Neste trabalho aplicamos o método da média e o método das múltiplas escalas para encontrar soluções analíticas aproximadas e fazer um estudo dos casos de ressonância secundária, bem como as condições em que elas ocorrem.

Os casos de ressonância secundária serão determinados através da expansão direta da solução em série de potências.

O método da média é aplicado utilizando a técnica descrita por Nayfeh ([29]), para obter uma solução analítica aproximada. O método das múltiplas escalas é aplicado com o objetivo de obter uma solução analítica aproximada livre de termos seculares mistos e pequenos divisores.

1.2 Descrição dos Capítulos

Objetivando clareza na exposição dos assuntos, dividimos este trabalho em seis capítulos.

O primeiro capítulo é dedicado para a introdução. Nesta parte apresentamos um breve esboço da evolução histórica do estudo de sistemas dinâmicos com alguns fatos e personagens mais citados na literatura encontrada. Em seguida apresentamos os objetivos do trabalho.

No segundo capítulo, sucintamente, expomos alguns conceitos principais da teoria dos sistemas dinâmicos e sistemas dinâmicos não ideais.

O terceiro capítulo é dedicado a discussão dos métodos de perturbações, com ênfase nos métodos da média e múltiplas escalas, os quais são objetos de nosso trabalho.

O quarto capítulo é dedicado a obtenção das equações do movimento do sistema pêndulo elétrico-mecânico, à aplicação do método da média e à análise dos estados estacionários. Nesta parte descrevemos como obter as equações do movimento através do formalismo Lagrangeano, aplicamos o método da média e obtemos as equações médias do sistema.

Em seguida, analisamos os estados estacionários através do critério de Routh - Hurwitz (critério R-H) associado à teoria da variedade central pois, no caso considerado, verificamos que um dos autovalores da matriz Jacobiana é nulo e, portanto, o teorema de Hartman-Grobmann não pode ser aplicado.

Para a aplicação do critério R-H, tomamos vários parâmetros do problema como sendo parâmetro de controle, e obtemos as curvas de resposta de frequência, as curvas de oscilações forçadas e fazemos a análise dos regimes permanentes. Nesta parte a forte interação entre a fonte de energia e o pêndulo ficam evidentes.

O quinto capítulo refere-se à aplicação do método das múltiplas escalas. Nesta parte,

primeiramente, fazemos a expansão direta da solução para obter os termos seculares e pequenos divisores. Em seguida, utilizamos o método das múltiplas escalas para obter uma solução analítica aproximada, livre de termos seculares mistos e pequenos divisores para os diferentes casos de ressonancias internas do sistema. A análise dos estacionárias é feita a partir das condições de eliminação de termos seculares.

O sexto capítulo é deixado para as conclusões do trabalho juntamente com apresentação de sugestões para trabalhos futuros.

No apêndice colocamos os programas, executados em Matlab®, utilizados na realização deste trabalho. Na obtenção dos estados estacionárias utilizamos um método de Runge - Kutta de ordens 4 e 5 implementado em FORTRAN (RK(4,5)), que temos à disposição.

Capítulo 2

Introdução aos sistemas dinâmicos

O objetivo deste capítulo é apresentar uma breve explanação dos principais conceitos dos sistemas dinâmicos e sistemas dinâmicos não ideais.

2.1 Conceitos Preliminares

A noção de sistemas dinâmicos aqui apresentada segue o ponto de vista de Kuznetsov ([27]) e é caracterizada como a formalização matemática de processos determinísticos. Essas noções incluem um conjunto de possibilidades e uma lei de evolução no tempo.

A lei de evolução que governa o sistema pode ser um conjunto de regras, mas não necessariamente equações, que especifica o estado do sistema no tempo.

Todos os possíveis estados do sistema são caracterizados por um conjunto X e é chamado de espaço de estados. A evolução de um sistema significa mudanças no estado do sistema com o tempo $t \in T$, onde T é um conjunto numérico \mathbb{R} ou \mathbb{Z} .

No caso de $T = \mathbb{R}$ chamamos sistema de tempo contínuo e caso contrário chamamos sistema de tempo discreto.

Especificamente, um sistema dinâmico pode ser definido como uma tripla $\{T, X, \varphi^t\}$; onde T é um conjunto numérico, X é o espaço de estados e $\varphi^t : X \rightarrow X$ é uma família de operadores parametrizados pelo tempo t e tais que

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= id \quad \forall x \in X \\ \varphi^{t+s} &= \varphi^t \circ \varphi^s \quad \forall x \in X; \quad \forall t, s \in T.\end{aligned}\tag{2.1}$$

As propriedades acima significam que o sistema não muda de estado espontaneamente

e a lei que governa seu comportamento não é alterada com o tempo.

Uma órbita começando em x_0 é um conjunto do espaço de estados X e é definida matematicamente por

$$O_r(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0; \quad \forall t \in T / \varphi^t x_0 \text{ exista}\} \quad (2.2)$$

Órbitas podem ser tanto discretas quanto contínuas. Órbitas de tempo contínuo com operador contínuo são curvas no espaço de estados X parametrizadas pelo tempo e orientadas na direção de crescimento do tempo.

As órbitas mais simples que existem são os pontos de equilíbrio e os ciclos. Um ponto de equilíbrio x^* é tal que

$$\varphi^t x^* = x^* \quad \forall t \in T \text{ e } x^* \in X \quad (2.3)$$

Um ciclo é uma órbita periódica L_0 tal que para cada $x_0 \in L_0$ temos $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ para algum $T_0 > 0$, $\forall t \in T$. Se não existe nenhum ciclo próximo a um ciclo dado então chamamos tal ciclo de *ciclo limite*.

Uma partição do espaço de fases em órbitas é chamado retrato de fases.

Uma das maneiras mais comuns de definir um sistema dinâmico é através de equações diferenciais. Sistemas de equações diferenciais podem ser autônomo ou não autônomo. Sistemas não autônomo podem ser transformados em sistemas autônomo através da introdução de uma nova variável. Assim, resumidamente, podemos considerar que um sistema de equações diferenciais pode ser dado por

$$\dot{x} = F(x, M) \quad (2.4)$$

com $M \in \mathbb{R}^m$ sendo o vetor dos parâmetros de controle e $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor posição. Formalmente, temos

$$\dot{x} = F(x, M) \quad (2.5)$$

com $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

A formulação matemática de sistemas em termos de equações diferenciais é devida a Newton, e uma das maiores questões é conhecer e analisar o comportamento de um sistema definido por equações diferenciais. Para isso existem duas abordagens: abordagem qualitativa e abordagem quantitativa.

Um dos principais pontos na análise de sistemas dinâmicos são os pontos de equilíbrio.

Pontos de equilíbrio são os subconjuntos invariantes mais simples que existem. Um subconjunto S é invariante para um sistema dinâmico $\{T, X, \varphi^t\}$, se $x_0 \in S$ então $\varphi^t x_0 \in S \quad \forall t \in T$.

A análise do comportamento dos pontos de equilíbrio é um dos objetos da análise de sistemas dinâmicos. A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser determinada através da expansão em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio, sempre que F for pelo menos de classe C^2 . Dessa maneira a análise dos pontos de equilíbrio fica reduzida a análise da parte real dos autovalores associados à matriz Jacobiana obtida na expansão em torno do ponto de equilíbrio.

Se todos os autovalores da matriz Jacobiana tem parte real não nula, então o ponto de equilíbrio é dito ser hiperbólico. Pontos hiperbólicos podem ser fontes, sumidouros ou selas.

Para pontos hiperbólicos o teorema de Hartman - Grobman garante que o sistema linear obtido considerando apenas os termos até primeira ordem na expansão em série de Taylor é qualitativamente equivalente ao sistema não linear em torno do ponto de equilíbrio, ou seja, as mudanças qualitativas no sistema não linear podem ser detectadas pelo exame do sistema linear associado.

Matematicamente, este conceito pode ser expresso por uma conjugação topológica entre o sistema linear e o sistema não linear em torno do ponto de equilíbrio.

Um sistema dinâmico $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ é topologicamente equivalente ao sistema dinâmico $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que leva órbitas do primeiro em órbitas do segundo, preservando o sentido das mesmas.

A noção de equivalência topológica não fica restrita ao espaço \mathbb{R}^n e pode ser estendida a outros espaços mais gerais.

Apesar da linearização determinar a estabilidade dos pontos, ela não fornece informações sobre o domínio em torno do ponto de equilíbrio no qual a conclusão é válida. Uma maneira de obter tais informações é através da construção de uma função de Lyapunov. No entanto, a construção de uma função de Lyapunov não é trivial e os procedimentos para tal construção só existem em alguns casos especiais.

Quando o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, ou seja, existe auto-valor com parte real nula, então não podemos usar o teorema de Hartman-Grobmann. Neste caso é

necessário usar uma ferramenta mais sofisticada para o estudo de tais pontos.

Consideremos que a matriz Jacobiana associada ao sistema não linear autônomo n -dimensional tenha s, u e c autovalores com parte real negativa, positiva e nula, respectivamente. Assim, podemos escrever \mathbb{R}^n como sendo soma direta dos subespaços definidos por esses vetores generalizados, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c, \quad (2.6)$$

com

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_s\} \\ E^u &= \text{span}\{v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_{s+u}\} \\ E^c &= \text{span}\{v_{s+u+1}, v_{s+u+2}, \dots, v_n\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde os v_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$ são os autovetores generalizados correspondentes aos s, u e c autovalores.

Os espaços E^s , E^u e E^c são subespaços invariantes do sistema linear determinado pela matriz Jacobiana, ou seja, $x \in E^k$, $k = s, u, c$ então $\varphi^t x \in E^k$, $\forall t \in T$.

Considerando que a função F do sistema não linear é C^r , $r \geq 2$, então existem teoremas de existência que afirmam que se o sistema linear associado ao sistema

$$\dot{x} = F(x; M) \quad (2.8)$$

possui variedades invariantes s -dimensional, u -dimensional e c -dimensional, então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear também possui variedades invariantes s -dimensional, u -dimensional e c -dimensional em uma certa vizinhança. No ponto de equilíbrio, essas variedades invariantes se interceptam e são tangentes com seus respectivos subespaços. Como esses teoremas garantem a existência das variedades apenas para uma vizinhança em torno do ponto de equilíbrio, elas são chamadas variedades invariantes locais.

Essas variedades invariantes são rotuladas por W^s , W^u e W^c , e são chamadas, respectivamente, variedade estável, variedade instável e variedade central.

As variedades estáveis e instáveis possuem a mesma dimensão que E^s e E^u , respectivamente, são de classe C^r , únicas e, além disso, possuem mesmo comportamento que

os subespaços invariantes. A variedade central tem a mesma dimensão de E^c , é de classe C^{r-1} e não é, necessariamente, única ([28]).

Consideremos que o sistema de equações diferenciais dado por

$$\dot{x} = F(x; \alpha) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad (2.9)$$

possui um ponto de equilíbrio não hiperbólico com n_c auto-valores no eixo imaginário e $(n - n_c)$ auto - valores com parte real não nula. Então esse sistema tem uma variedade invariante local, dependente do parâmetro e além disso, se $n_u = 0$, ou seja, o número de auto-valores com parte real positiva é nulo, então esta variedade central é atrativa ([27]).

O teorema de Shoshitaishvili [1975], afirma que todos os eventos essenciais próximos do valor do parâmetro de bifurcação ocorrem na variedade central W^c , associada ao ponto de equilíbrio.

A condição $n_u = 0$ é simplesmente pelo fato de que se o sistema possui auto-valor com parte real positiva então este sistema é instável e independe da variedade central associada.

Até agora verificamos que pontos hiperbólicos ou pontos não hiperbólicos são detectados a partir do conhecimento dos autovalores associados a matriz Jacobiana.

Os autovalores da matriz Jacobiana J são as raízes do polinômio característico dado por

$$\det(J - \lambda I) = 0 \equiv \det(\lambda I - J) = 0 \equiv \lambda^n - S'_1 \lambda^{n-1} + S'_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n S'_n = 0 \quad (2.10)$$

onde S'_k , $k = 1, 2, \dots, n$ é a soma dos menores principais de ordem k .

Como precisamos apenas conhecer os sinais da parte real dos autovalores λ_j , então não precisamos calcular explicitamente os valores λ_j . Basta conhecer o sinal da parte real dos λ_j .

O problema de descobrir se todas as raízes de um polinômio de grau n tem parte real negativa, sem calcular explicitamente essas raízes foi solucionado por E. J. Routh (1831-1919). Em 1895, A. Hurwitz (1859-1919) encontrou, independentemente, uma solução ([28]).

O critério de Hurwitz dá condições necessárias e suficientes para que os autovalores associados à matriz Jacobiana tenham parte real negativa. No entanto, não dá nenhuma informação sobre a existência ou não de autovalores com parte real positiva ou nula.

Esse problema é contornado pelo critério de Routh. O critério de Routh fornece condições necessárias e suficientes para a existência de todos os autovalores com parte real negativa e, além disso, fornece informações a respeito das raízes com parte real positiva ou nula.

O critério de Routh juntamente com o critério de Hurwitz é chamado critério Routh - Hurwitz (critério R-H). Apresentamos a descrição do critério R-H no desenvolvimento do trabalho com o pêndulo eletromecânico. Nesta dissertação utilizamos a versão do critério R-H apresentada por Monteiro ([28]).

A análise dos estados estacionários através do critério R-H possibilita verificar a ocorrência de bifurcações, já que se o critério R-H é satisfeito então todas as raízes tem parte real negativa, e caso contrário, fornece condições para a determinação da quantidade de raízes com parte real positiva. Dessa forma, se o sistema era estável e passa a ser instável ou vice-versa. Logo, temos encontrado um ponto de bifurcação.

Bifurcações são fenômenos interessantes que ocorrem nos sistemas e são caracterizadas pelo aparecimento de um retrato de fases que não é topologicamente equivalente, sob a variação dos parâmetros. Referem-se à mudança qualitativa no retrato de fases de um sistema dinâmico, conforme algum parâmetro do sistema passa por um valor crítico.

As bifurcações podem ser locais ou globais. Sucintamente, as bifurcações mais simples que existem são as bifurcações do tipo sela-nó, bifurcação transcritical, bifurcação de forquilha e bifurcação de Hopf.

2.2 Sistemas dinâmicos não ideais

É muito comum, durante a modelagem matemática de sistemas supor que a fonte excitadora é ideal, ou seja, em geral, supomos que a fonte e o sistema não interagem e que a frequência de excitação é governada por uma lei específica do sistema oscilatório e seus parâmetros não dependem do movimento do sistema ([26]). Esse tipo de sistema é chamado sistema com fonte ideal. Fontes ideais tem potência ilimitada e não sofrem influência do sistema.

Sistemas com fontes não ideais possuem uma natureza mais complexa, já que o agente excitador é influenciado pelo sistema. As fontes não ideais, diferentemente das fontes ideais, não possuem leis específicas para a variação da força excitadora, e suas condições de atuação no sistema são impossíveis de serem especificadas como uma relação simples de dependência do tempo ([26]).

Um dos primeiros registros relacionados ao estudo de problemas não ideais data de 1902, quando Sommerfeld realizou um experimento, no qual observou interações entre um motor e a estrutura que o suportava. Através da variação de potência elétrica fornecida ao motor e o monitoramento das frequências e amplitudes da resposta do sistema, observou-se regiões de instabilidade da rotação para certos valores de potência, em regiões próximas à ressonância. Tal descontinuidade na frequência de rotação foi denominado efeito Sommerfeld ([8]).

Sistemas dinâmicos com fontes não ideais geram grande variedade de comportamentos, tais como variações bruscas na amplitude de oscilações em função de variações suaves do parâmetro de controle (efeito Sommerfeld), influência do perfil da curva nas características do movimento quando se altera o parâmetro de controle, e caos.

As variações bruscas na amplitude de oscilações podem ser detectadas pela análise da curva de amplitude versus parâmetro de controle.

A influência do perfil da curva quando se altera o parâmetro de controle é chamado de histerese. Segundo Nayfeh ([29]), as características da curva de resposta de frequência são suficientes para caracterizar o efeito de histerese. Abaixo apresentamos uma curva para variação de amplitude versus um parâmetro de controle k , característica do efeito de histerese.

Devidos às características da curva, se o experimento é conduzido de modo que o parâmetro de controle é alterado de forma crescente, então variações suaves no parâmetro de controle implicam variações suaves na amplitude até atingir o ponto 3, depois disso o sistema experimenta um salto para o ponto 1, e novamente, variações suaves correspondem a alterações suaves nas amplitudes dos movimentos. Se por outro lado, conduzimos o experimento de forma que o parâmetro de controle é alterado de forma decrescente, então variações suaves no parâmetro de controle implicam variações suaves na amplitude até o sistema atingir o ponto 2, a partir do qual o sistema sofre um salto para o ponto 4, e novamente, variações suaves no parâmetro de controle correspondem a variações suaves

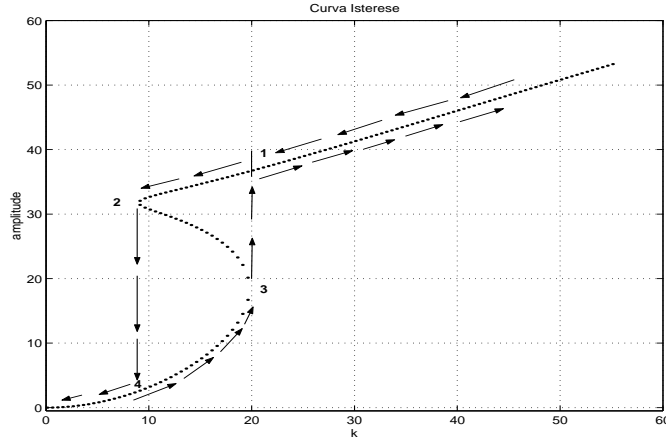


Figura 2.1: *Uma curva característica do efeito de histerese*

nas amplitudes dos movimentos.

Kononenko ([26]) obtém curvas características com acréscimos e decréscimos sucessivos do parâmetro de controle, e pela análise da estabilidade dos estados estacionários juntamente com a análise da curva de oscilações forçadas.

Um estado estacionário instável determina, na curva de oscilações forçadas, uma condição de oscilações forçadas não realizável. Assim, uma região de estados estacionários instáveis determina uma região de oscilações forçadas não realizáveis. A análise da intersecção da curva que dá as características da fonte, com as fronteiras dos pontos da região de estabilidade determina a parte da curva que é realizada conforme o parâmetro de controle é alterado de forma crescente ou decrescente.

Segundo Kononenko ([26]), além das características da curva de movimentos realizáveis depender das propriedades constitutivas do sistema, ela também pode depender do método de controle do parâmetro que está sendo utilizado, sendo que pode desaparecer totalmente se trocarmos o método de controle do parâmetro.

Além disso, quando a fonte é não ideal, Kononenko ([26]) obtém curvas distintas para determinação da amplitude de oscilações forçadas, para um caso particular por ele tratado. Essas curvas, do tipo mole e dura ("softening e hardening"), implicam menor e maior torque líquido, respectivamente, para manter oscilações próximas da máxima amplitude ressonante do sistema.

Para sistemas com fontes não ideais, Kononenko encontrou uma forte dependência das características da fonte de energia, ou seja, pequenas alterações nas características da fonte implicam perda de estabilidade de uma região que era estável e estabilidade de

uma região que antes era instável. A figura (2.2), mostra pontos instáveis para certos parâmetros do problema, enquanto que a figura (2.4), mostra a mesma curva com uma pequena alteração nas características da fonte de energia.

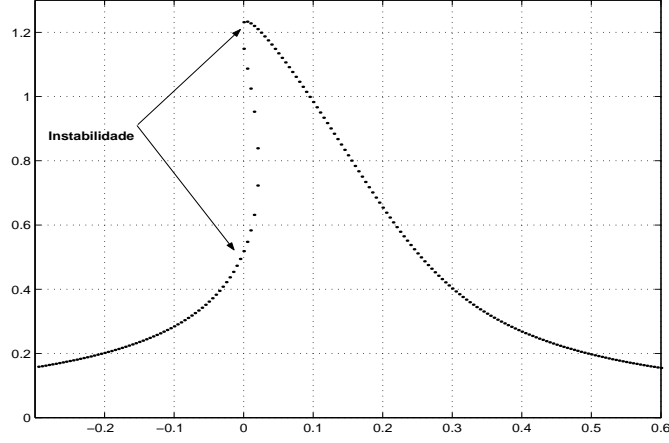


Figura 2.2: *Região de instabilidade*

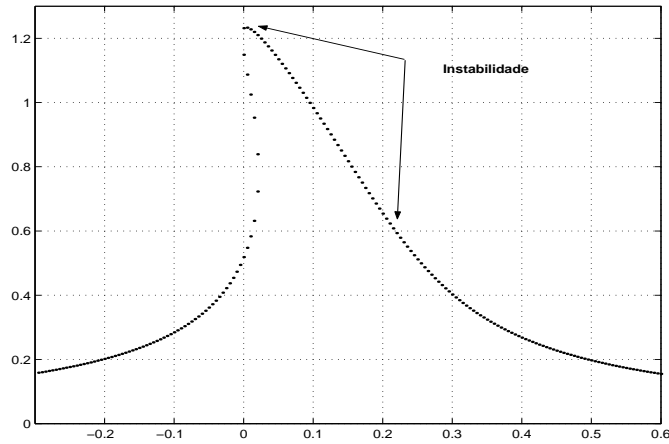


Figura 2.3: *Região de instabilidade para pequena alteração na fonte de energia*

A ocorrência de saltos nas amplitudes de movimentos realizáveis não ocorrem próximas da vertical, o que evidencia os efeitos da fonte não ideal sobre o sistema. A figura abaixo é característica e ilustra esse fato. Saltos na oscilação ocorrem de T para H, e de R para P conforme o parâmetro de controle é variado de forma crescente ou decrescente, respectivamente.

No entanto, Kononenko obtém esses resultados para sistemas com poucos graus de liberdade (1 ou 2). Sistemas com muitos graus de liberdade são tratados de maneira similar. Nesse caso são necessárias as suposições para a aplicação do método da média e, além disso, o estudo é confinado às interações ressonantes de duas partes integrantes do

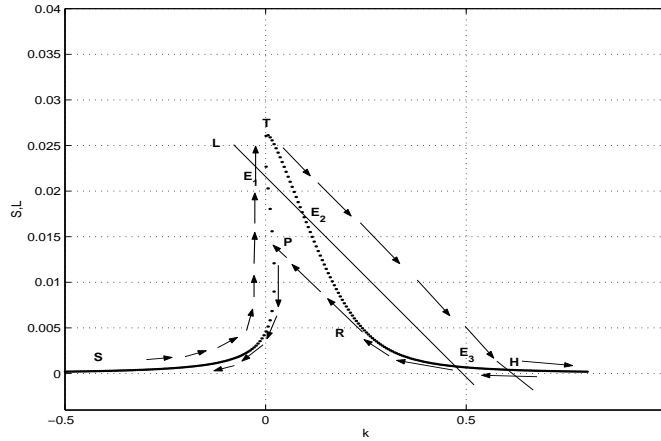


Figura 2.4: *Salto nas amplitudes de movimentos realizáveis*

sistema, ou seja, as oscilações das outras partes do sistema são consideradas pequenas em relação as oscilações das partes ressonantes.

Quando as regiões de ressonâncias não são distintas e, conseqüentemente, não podem ser consideradas separadamente devemos levar em conta outras equações para análise do movimento. Essa forte dependência das outras partes do sistema fica evidenciada no fato de que as soluções, em primeira aproximação, estão conectadas de algum modo e, portanto, mesmo que apenas duas partes da estrutura estejam em ressonância não podemos, e não conseguimos considerar apenas essas duas partes. Isso evidencia que sistemas apresentados dessa maneira devem ter comportamento complexo, e suas partes constituintes devem estar firmemente atreladas.

Como cada parte componente possui uma frequência de vibração natural, então sistemas apresentados desse modo, certamente, possuem interação ressonante entre mais que duas partes componentes e, conseqüentemente, conduzem à grande dificuldade de obtenção de resultados analíticos.

O sistema pêndulo eletromecânico é um desses sistemas, que apesar de todas as simplificações introduzidas, ainda temos um sistema de equações diferenciais não lineares e de difícil abordagem analítica sendo, portanto, necessário uma abordagem numérica ou por métodos de perturbação.

Capítulo 3

Métodos de perturbação

O que caracteriza um método de perturbação é a escolha "a priori" da representação da solução, que é procurada como sendo série de potências de um pequeno parâmetro ϵ , ou seja, $x(t) \approx \sum \epsilon^k \Phi_k(t)$ ([2]). Em geral, as funções $\phi_k(t)$ são soluções de equações diferenciais e quanto maior for o número de termos da série, melhor será a aproximação da solução.

Nayfeh e colaboradores ([30], [31], [32]) apresentam uma descrição dos principais métodos de perturbação: método da expansão direta, técnica de Lindstead-Poincaré, método da renormalização, método da média e média generalizada e método das múltiplas escalas. Todos esses métodos são caracterizados pela presença do pequeno parâmetro ϵ , o qual aparece naturalmente ou é introduzido na equação com a finalidade de obter solução analítica aproximada.

Um aspecto prático importante do método de perturbação consiste na substituição de um problema não linear por uma seqüência de problemas lineares, que na verdade, constituem um único problema linear com dados recursivos ([2]).

Nas próximas seções apresentamos uma breve discussão sobre os métodos da média e das múltiplas escalas, sendo que o desenvolvimento de tais métodos é deixado para os capítulos posteriores.

3.1 Método da média

Dependendo das características dos sistemas dinâmicos, eles podem ser considerados como sendo fracamente não lineares. Sistemas fracamente não lineares são da forma

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}) + E \quad (3.1)$$

onde $\epsilon \ll 1$, f é uma função não linear em u e \dot{u} e E é uma força externa generalizada chamada excitação. Existem, basicamente, dois tipos de excitação, a saber

- i) $E = E(t)$, ou seja, E não é uma função do estado do sistema. Neste caso E é chamada fonte ideal de energia;
- ii) $E = E(u, \dot{u}, \ddot{u})$, ou seja, E é uma função do estado do sistema. Neste caso E é chamada fonte não ideal de energia.

Logo, a resposta do sistema depende do tipo de excitação, da ordem da não linearidade e do tipo de mecanismo de atrito ([32]). O método da média é aplicado juntamente com o método da variação dos parâmetros. Nesse caso, quando o pequeno parâmetro ϵ é nulo a solução de (3.1) é conhecida. Quando $\epsilon \neq 0$, pelo método da variação dos parâmetros, supomos que a solução e sua derivada permanecem com a mesma forma, mas que as constantes de integração, agora, são funções que variam suavemente com o tempo. Impondo essas condições encontramos, pela aplicação do método da média, as equações que descrevem essas funções.

Devido à presença do pequeno parâmetro e fazendo algumas considerações, a estrutura das equações mostra que a maior parte dessas funções variam suavemente no tempo, ou seja, as equações são da ordem de ϵ e, portanto, podemos aproveitar este fato tanto analiticamente quanto numericamente.

No próximo capítulo utilizamos o método da média e descrevemos o procedimento para a aplicação. No nosso caso adotamos a técnica utilizada por Nayfeh ([29]) para considerações das ressonâncias internas do sistema.

3.2 Método das múltiplas escalas

O método das múltiplas escalas é um método de perturbação no qual introduzimos diferentes escalas de tempo como se fossem variáveis independentes distintas. Isso transforma o estudo do sistema de equações diferenciais ordinárias no estudo de um sistema de equações diferenciais parciais.

Essa aparente complexidade que o sistema ganha devido a introdução das transformações é compensada pelos fatos de conseguirmos encontrar uma solução livre de termos seculares mistos e propiciar a análise dos vários fenômenos de ressonância ([29]).

Da mesma forma que os termos seculares mistos, os fenômenos de ressonâncias internas são determinados pela expansão direta da solução do sistema. Termos ressonantes são também chamados pequenos divisores e podem ser primários ou secundários, dependendo da ordem da potência de ϵ em que aparecem na solução da expansão direta.

No método das múltiplas escalas, termos com pequenos divisores são transformados em termos seculares mistos através da introdução do parâmetro de sintonia e, consequentemente, podem ser eliminados através da imposição das condições de eliminação de termos seculares. Essas condições fornecem as equações diferenciais que dão as funções que tornam a solução livre de termos seculares mistos. Como, em geral, as equações obtidas também são não lineares, então a resolução dessas equações diferenciais pode ser tão difícil quanto a resolução das equações originais. No entanto, para os estados estacionários precisamos resolver e analisar um sistema de equações algébricas e, portanto, teoricamente, mais fácil de obter conclusões analíticas.

Capítulo 4

Sistema Pêndulo Elétro-mecânico

O objetivo deste capítulo é a dedução das equações do sistema pêndulo elétrico-mecânico e a utilização do método da média para obtenção de uma solução analítica aproximada do sistema. Além disso, vamos analisar o caso de interação ressonante de primeira ordem entre o bloco e o motor, mas sem interação ressonante entre bloco e pêndulo e estudar a estabilidade dos estados estacionários através da aplicação do critério de Routh-Hurwitz juntamente com a teoria da variedade central.

Um estudo preliminar do sistema pêndulo eletromecânico foi feito por Dias ([22]).

4.1 Modelagem Matemática

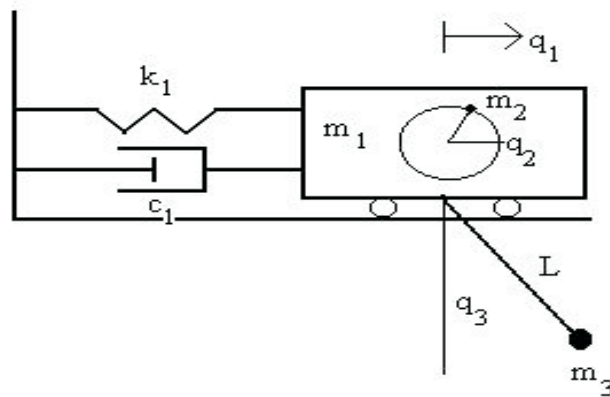


Figura 4.1: *Sistema pêndulo eletromecânico*

O sistema pêndulo eletromecânico com excitação horizontal consiste de um bloco de massa m_1 , que oscila horizontalmente devido à rotação de uma massa m_2 acionada por um motor.

Como o motor DC possui energia limitada e a modelagem matemática leva em conta o acoplamento das equações, então o sistema dinâmico é não ideal.

O bloco está conectado a uma parede por uma mola e um amortecedor, cujos coeficientes de elasticidade e amortecimento são, respectivamente, k_1 e c_1 , e um pêndulo de massa m_3 e comprimento l é acoplado ao bloco.

Tabela 4.1: *Descrição dos parâmetros do sistema pêndulo eletromecânico*

coeficiente	nome
k_1	coeficiente de elasticidade linear da mola
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco
m_1	massa do bloco
m_2	massa excêntrica de perturbação
m_3	massa do pêndulo
l	comprimento do pêndulo
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor
g	aceleração da gravidade
J_2	momento de inércia do rotor
$M(q'_2)$	torque líquido do motor
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo
q_1	vibração horizontal do bloco
q_2	deslocamento angular da massa m_2
q_3	deslocamento angular do pêndulo

A descrição matemática do sistema pêndulo não ideal é feita através da formulação de Lagrange. A formulação de Lagrange consiste na definição de um funcional L cujos extremos (pontos estacionários) coincidem com as soluções do sistema dinâmico ([14]).

O Lagrangeano L é definido como a diferença entre as energias cinética e potencial do

sistema.

Definindo as coordenadas generalizadas do movimento por $q_i, i = 1, 2, 3$, e as forças dissipativas por $N_i, i = 1, 2, 3$, então as equações do sistema dinâmico são dadas pelas equações de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i, i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Assumimos que o bloco, o motor e o pêndulo possuem as posições iniciais dadas por (\bar{x}_1, \bar{y}_1) , (\bar{x}_2, \bar{y}_2) e (\bar{x}_3, \bar{y}_3) , respectivamente. Com o acionamento do motor, as partes componentes do sistema passam a ocupar novas posições.

A nova posição do bloco é dada por $x_1 = \bar{x}_1 + q_1$ e $y_1 = \bar{y}_1$. Da geometria do sistema concluímos que a massa m_2 tem posição dada por $x_2 = \bar{x}_2 + q_1 + R \cos q_2$ e $y_2 = \bar{y}_2 + R \sin q_2$.

Fazendo a mesma análise para o pêndulo, segue que a posição da massa m_3 é dada por $x_3 = \bar{x}_3 + q_1 + l \sin q_3$ e $y_3 = \bar{y}_3 - l(1 - \cos q_3)$.

As coordenadas do movimento do sistema dinâmico são funções do tempo e as respectivas velocidades são obtidas por derivação. Assim, colocando o momento de inércia do rotor como sendo J_2 , podemos escrever a energia cinética do sistema como segue

$$T = \frac{1}{2} \{ m \dot{q}_1^2 - 2m_2 R \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 + (m_2 R^2 + J_2) \dot{q}_2^2 + 2m_3 l \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos q_3 + m_3 l^2 \dot{q}_3^2 \}, \quad (4.2)$$

com $m_1 + m_2 + m_3 = m$.

A energia de deformação da mola é dada por

$$U = \frac{1}{2} k_1 q_1^2, \quad (4.3)$$

enquanto o trabalho da força peso é dado por

$$W_c = -g[m_2 R \sin q_2 + m_3 l(1 - \cos q_3)] \quad (4.4)$$

Assim a energia potencial do sistema é dada por $V = U - W_c$, ou seja,

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + g[m_2 R \sin q_2 + m_3 l(1 - \cos q_3)] \quad (4.5)$$

As forças externas que atuam no sistema são as forças de atrito do bloco, o torque líquido do motor e a força de atrito no pêndulo. Essas forças são dadas, respectivamente, por

$$N_1 = -c_1 q_1', \quad N_2 = M(q_2') = a - b q_2' \text{ e } N_3 = -c_3 q_3', \quad (4.6)$$

com a e b constantes.

Com as funções para as energias cinética (4.2) e potencial (4.5), definimos o Lagrangeano do sistema,

$$L = T - V. \quad (4.7)$$

Usamos as equações de Euler-Lagrange (4.1) para derivar as equações do movimento do sistema. Logo, temos

i=1 - Equação do bloco

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_1'} \right) = m q_1'' - m_2 R (q_2'' \sin q_2 + q_2'^2 \cos q_2) + m_3 l (q_3'' \cos q_3 - q_3'^2 \sin q_3) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -k_1 q_1 \quad (4.9)$$

$$N_1 = -c_1 q_1' \quad (4.10)$$

A equação que descreve o movimento do bloco é dada por

$$m q_1'' - m_2 R (q_2'' \sin q_2 + q_2'^2 \cos q_2) + m_3 l (q_3' \cos q_3 - q_3'^2 \sin q_3) + k_1 q_1 = -c_1 q_1'. \quad (4.11)$$

i=2 - Equação do motor

$$\frac{\partial L}{\partial q_2'} = -m_2 R q_1' \sin q_2 + (m_2 R^2 + J_2) q_2'' \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_2'} \right) = -m_2 R (q_1'' \sin q_2 + q_1' q_2' \cos q_2) + (m_2 R^2 + J_2) q_2'' \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 R q_1' q_2' \cos q_2 - g m_2 R \cos q_2 \quad (4.14)$$

$$N_2 = M(q_2') = a - b q_2' \quad (4.15)$$

A equação que descreve o movimento do motor é dada por

$$I q_2'' - m_2 R (q_1' \sin q_2 + q_1' q_2' \cos q_2) + m_2 R q_1' q_2' \cos q_2 + g m_2 R \cos q_2 = M(q_2'), \quad (4.16)$$

onde $I = m_2 R^2 + J_2$.

i=3 - Equação do pêndulo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_3'} \right) = m_3 l (q_1'' \cos q_3 - q_1' q_3' \sin q_3) + m_3 l^2 q_3'' \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} = -m_3 l q_1' q_2' \sin q_3 - g m_3 l \sin q_3 \quad (4.18)$$

$$N_3 = -c_3 q_3' \quad (4.19)$$

A equação que descreve o movimento do pêndulo é dada por

$$m_3 l^2 q_3'' + m_3 l q_1'' \cos q_3 + g m_3 l \sin q_3 = -c_3 q_3'. \quad (4.20)$$

Escrevendo as equações que governam o sistema, temos

$$m q_1'' - m_2 R (q_2'' \sin q_2 + q_2'^2 \cos q_2) + m_3 l (q_3'' \cos q_3 - q_3'^2 \sin q_3) + k_1 q_1 = -c_1 q_1' \quad (4.21)$$

$$I q_2'' - m_2 R (q_1' \sin q_2 + q_1' q_2' \cos q_2) + m_2 R q_1' q_2' \cos q_2 + g m_2 R \cos q_2 = M (q_2') \quad (4.22)$$

$$m_3 l^2 q_3'' + m_3 l q_1'' \cos q_3 + g m_3 l \sin q_3 = -c_3 q_3' \quad (4.23)$$

As equações acima descrevem o comportamento do sistema pêndulo eletromecânico, e para efetuar estudos diversos se faz necessário decidir a ordem de magnitude dos diversos elementos do sistema ([29]). O processo de adimensionamento das equações é o mais indicado, então introduzimos as variáveis adimensionais,

$$\tau = \omega t, \quad u(\tau) = \frac{q_1(t)}{l}, \quad q_2(t) = \varphi(\tau) \text{ e } q_3(t) = \theta(\tau), \quad (4.24)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$.

As derivadas em t e as derivadas em τ satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \omega \frac{d}{d\tau} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Usando as relações dadas em (4.25), temos

$$q_1' = l \frac{du}{dt} = l \omega \dot{u} \quad q_1'' = l \omega^2 \ddot{u} \quad (4.26)$$

$$q_2' = \omega \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega \dot{\varphi} \quad q_2'' = \omega^2 \ddot{\varphi} \quad (4.27)$$

$$q_3' = \omega \frac{d\theta}{d\tau} = \omega \dot{\theta} \quad q_3'' = \omega^2 \ddot{\theta}, \quad (4.28)$$

onde (') denota a derivada em t e (.) denota a derivada em τ .

Substituindo (4.26), (4.27) e (4.28) em (4.21), (4.22) e (4.23) temos o sistema de equações adimensionais.

$$\ddot{u} + \frac{c_1}{m\omega} \dot{u} + u = \frac{m_2 R}{ml} [\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] + \frac{m_3}{m} [\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta] \quad (4.29)$$

$$I \ddot{\varphi} = \hat{M}(\dot{\varphi}) + m_2 R l \ddot{u} \sin \varphi - m_2 R \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi \quad (4.30)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{c_3}{m_3 l^2 \omega} \dot{\theta} + \frac{g}{l \omega^2} \sin \theta = -\ddot{u} \cos \theta \quad (4.31)$$

com

$$\hat{M}(\dot{\varphi}) = \frac{1}{\omega^2} M(\omega \dot{\varphi}).$$

Introduzindo as constantes

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{m_2 R}{ml} & \mu_1 &= \frac{c_1}{m\omega} & \mu_3 &= \frac{c_3}{m_3 l^2 \omega} \\ p_3 &= \frac{m_2 R l}{I} & p_4 &= \frac{m_2 R}{I} \end{aligned} \quad (4.32)$$

podemos reescrever o sistema de equações como

$$\ddot{u} + \mu_1 \dot{u} + u = p_2 [\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] + \frac{m_3}{m} [\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta] \quad (4.33)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\hat{M}(\dot{\varphi})}{I} + p_3 \ddot{u} \sin \varphi - p_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi \quad (4.34)$$

$$\ddot{\theta} + \mu_3 \dot{\theta} + \frac{g}{l \omega^2} \sin \theta = -\ddot{u} \cos \theta \quad (4.35)$$

Vamos considerar que as oscilações são próximas da ressonância fundamental, ou seja, vamos assumir que a diferença entre as frequências do bloco e do motor $\Omega = d\varphi/dt$ seja da forma $\omega_1 - \Omega = \epsilon \sigma_\Omega$, onde σ_Ω é o parâmetro de sintonia. Consideramos também que

$$\frac{m_2}{I} \ll 1, \quad \frac{m_2}{m} \ll 1, \quad \frac{m_3}{m} \ll 1.$$

Logo, podemos fazer

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \epsilon \hat{p}_2 & p_3 &= \epsilon \hat{p}_3 \\
 p_4 &= \epsilon \hat{p}_4 & \hat{M}(\dot{\varphi})/I &= \epsilon M_1(\dot{\varphi}) \\
 \mu_1 &= \epsilon \hat{\mu}_1 & \mu_3 &= \epsilon \hat{\mu}_3 \\
 m_3/m &= \epsilon \hat{m}_3
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Além disso confinamos nossas observações aos movimentos aproximadamente estacionários, o que implica que a variação da aceleração será pequena e que o ângulo de oscilação do pêndulo é pequeno. Dessa forma podemos fazer a aproximação de $\sin \theta$ e $\cos \theta$ por série de Taylor em torno de $\theta = 0$, obtendo, em primeira aproximação, $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$.

Com essas suposições, as equações que descrevem sistema dinâmico não ideal podem ser escritas da seguinte maneira

$$\ddot{u} + \epsilon \hat{\mu}_1 \dot{u} + u = \epsilon [\hat{p}_2 \ddot{\varphi} \sin \varphi + \hat{p}_2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] - \epsilon \hat{m}_3 [\dot{\theta}^2 \theta - \ddot{\theta}] \tag{4.37}$$

$$\ddot{\varphi} = \epsilon \left[M_1(\dot{\varphi}) + \hat{p}_3 \ddot{u} \sin \varphi - \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi \right] \tag{4.38}$$

$$\ddot{\theta} + \epsilon \hat{\mu}_3 \dot{\theta} + \omega_3^2 \theta = -\ddot{u} \tag{4.39}$$

$$\text{com } \omega_3^2 = \frac{g}{l\omega^2}.$$

As equações acima, com as simplificações introduzidas, são não-lineares e funções do pequeno parâmetro ϵ , que foi introduzido de modo que para a consideração que $\epsilon = 0$ temos uma solução analítica. Quando $\epsilon \neq 0$, utilizamos o método da variação dos parâmetros, apresentado na seção seguinte, para conseguir as equações variacionais que descrevem as amplitudes e fases de oscilações do sistema.

4.2 Método da variação dos parâmetros

O método de variação dos parâmetros ([1]) consiste em considerar que a solução e sua derivada de uma equação diferencial, quando $\epsilon \neq 0$, possui a mesma forma da solução para $\epsilon = 0$, mas que as constantes de integração tornam-se funções do tempo.

Assim, quando $\epsilon = 0$, o sistema de equações é dado por

$$\begin{aligned}
\ddot{u} + u &= 0 \\
\ddot{\varphi} &= 0 \\
\ddot{\theta} + \omega_3^2 \theta &= -\ddot{u}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

No nosso caso, quando $\epsilon = 0$, as equações descrevem um movimento harmônico do bloco com frequência $\omega_1 = 1$ e uma rotação constante do motor com frequência $\dot{\varphi} = \Omega$, constante e um movimento forçado do pêndulo com uma força de excitação com frequência ω_1 , que é a frequência do movimento do bloco. As equações do bloco e do motor tornam-se desacopladas

A solução deste sistema de equações é dada por

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= a_1 \cos(\omega_1 \tau + \beta_1) \\
\varphi(\tau) &= \Omega \tau \\
\theta(\tau) &= a_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \delta \cos(\omega_1 \tau + \beta_1)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\text{com } \delta = \frac{1}{\omega_3^2 - 1}.$$

Quando $\epsilon \neq 0$, é natural esperar que a frequência de oscilação do bloco seja aproximadamente harmônica, e a frequência de rotação $\dot{\varphi}$ seja aproximadamente constante, ou seja, são funções que variam suavemente no tempo. Agora a oscilação do bloco é governada pela rotação do motor. Além disso, espera-se que o movimento do pêndulo seja forçado com a presença de termos dissipativos. Logo, espera-se que a solução em θ varie suavemente e dependa da amplitude de oscilações e da fase do movimento do bloco.

Assim, introduzimos as substituições

$$u = a_1 \cos(\varphi + \beta_1); \quad \dot{u} = -a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1) \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \Omega \tau; & \dot{\varphi} &= \Omega \\
\theta &= a_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \delta \cos(\varphi + \beta_1)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\dot{\theta} = -a_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) - a_1 \delta \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)$$

Para $\epsilon \neq 0$ admitimos que $a_i = a_i(\tau)$, $\beta_i = \beta_i(\tau)$, $i = 1, 3$ e $\Omega = \Omega(\tau)$.

As novas variáveis $a_1, \beta_1, a_3, \beta_3$ e Ω representam os parâmetros essenciais do sistema ([26]) e variam suavemente com τ . Levando em consideração a dependência em τ das equações, obtemos as derivadas

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{a}_1 \cos(\varphi + \beta_1) - a_1(\Omega + \dot{\beta}_1) \sin(\varphi + \beta_1) \\ \dot{\varphi} &= \Omega \\ \dot{\theta} &= \dot{a}_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) - a_3(\omega_3 + \dot{\beta}_3) \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) + \dot{a}_1 \delta \cos(\varphi + \beta_1) \\ &\quad - a_1 \delta (\Omega + \dot{\beta}_1) \sin(\varphi + \beta_1).\end{aligned}\tag{4.44}$$

Impondo as condições do método da variação dos parâmetros obtemos

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 \cos(\varphi + \beta_1) - a_1 \dot{\beta}_1 \sin(\varphi + \beta_1) &= (\Omega - \omega_1) a_1 \sin(\varphi + \beta_1) \\ \dot{a}_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) - a_3 \dot{\beta}_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) &= 0 \\ \dot{\varphi} &= \Omega\end{aligned}\tag{4.45}$$

Derivando novamente sob as condições citadas, obtemos

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= -\dot{a}_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1) - a_1 \omega_1 (\Omega + \dot{\beta}_1) \cos(\varphi + \beta_1) \\ \ddot{\varphi} &= \dot{\Omega} \\ \ddot{\theta} &= -\dot{a}_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) - a_3 \omega_3 (\omega_3 + \dot{\beta}_3) \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) \\ &\quad - \dot{a}_1 \delta \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1) - a_1 \delta \omega_1 (\Omega + \dot{\beta}_1) \cos(\varphi + \beta_1).\end{aligned}\tag{4.46}$$

Levando esses resultados nos lados esquerdos das equações do sistema e observando que $\Omega = \dot{\varphi}$ temos o conjunto de equações diferenciais descrevendo as amplitudes e fases do sistema

EQUAÇÕES DO BLOCO

$$\dot{a}_1 \cos(\varphi + \beta_1) - a_1 \dot{\beta}_1 \sin(\varphi + \beta_1) = (\Omega - \omega_1) a_1 \sin(\varphi + \beta_1)\tag{4.47}$$

$$-\dot{a}_1 \gamma \sin(\varphi + \beta_1) - a_1 \dot{\beta}_1 \gamma_1 \cos(\varphi + \beta_1) + (\omega_1^2 - \gamma_1 \Omega) a_1 \cos(\varphi + \beta_1) = \epsilon[H]\tag{4.48}$$

com $[H]$ e γ_1 dados por

$$[H] = [\hat{p}_2 \dot{\Omega} \sin \varphi + \hat{p}_2 \Omega^2 \cos \varphi + \hat{\mu}_1 a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] + \hat{m}_3 [G] \quad (4.49)$$

$$\gamma_1 = (1 + \epsilon \hat{m}_3 \delta) \omega_1^2 \quad (4.50)$$

com

$$\begin{aligned} [G] = & (a_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \delta \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1))^2 (a_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) \\ & + a_1 \delta \cos(\varphi + \beta_1)) + \dot{a}_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_3 \omega_3 \dot{\beta}_3 \cos(\varphi + \beta_1) \\ & + a_3 \omega_3^2 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) \end{aligned} \quad (4.51)$$

EQUAÇÃO DO MOTOR

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = & \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 [\dot{a}_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1) \\ & + a_1 \dot{\beta}_1 \omega_1 \cos(\varphi + \beta_1) + a_1 \omega_1 \Omega \cos(\varphi + \beta_1)] \sin \varphi - \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi] \end{aligned} \quad (4.52)$$

EQUAÇÕES DO PÊNDULO

$$\dot{a}_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) - a_3 \dot{\beta}_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) = 0 \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} -\dot{a}_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) - a_3 \omega_3 \dot{\beta}_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) = & -a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1) \\ -a_1 \dot{\beta}_1 \omega_1 \cos(\varphi + \beta_1) + \epsilon \hat{\mu}_3 [a_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \delta \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \\ & + \delta \omega_1 [\dot{a}_1 \sin(\varphi + \beta_1) + a_1 \dot{\beta}_1 \cos(\varphi + \beta_1)] + a_1 \delta [\omega_1 \Omega - \omega_3^2] \cos(\varphi + \beta_1) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Reescrevendo as equações variacionais, as modulações de amplitude e fase do sistema são dadas por

EQUAÇÕES DO BLOCO

$$\begin{aligned} \gamma \dot{a}_1 &= -\epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2 a_1}{2} \sin(2\varphi + \beta_1) - \epsilon [H] \sin(\varphi + \beta_1) \\ -a_1 \gamma_1 \dot{\beta}_1 &= a_1 \gamma_1 \Omega - a_1 \omega_1^2 - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \omega_1^2 a_1 \sin^2(\varphi + \beta_1) + \epsilon [H] \cos(\varphi + \beta_1) \end{aligned} \quad (4.55)$$

ou

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -\epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2 a_1}{2\gamma_1} \sin(2(\varphi + \beta_1)) - \frac{\epsilon}{\gamma_1} [H] \sin(\varphi + \beta_1) \\
\dot{\beta}_1 &= -\Omega + \frac{\omega_1^2}{\gamma_1} + \frac{\epsilon}{2\gamma_1} \hat{m}_3 \delta \omega_1^2 [1 - \cos(2(\varphi + \beta_1))] - \frac{\epsilon}{a_1 \gamma_1} [H] \cos(\varphi + \beta_1)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

EQUAÇÃO DO MOTOR

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega} &= \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 [\dot{a}_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1) + a_1 \dot{\beta}_1 \omega_1 \cos(\varphi + \beta_1) \\
&\quad + a_1 \omega_1 \Omega \cos(\varphi + \beta_1)] \sin \varphi - \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi]
\end{aligned} \tag{4.57}$$

EQUAÇÕES DO PÊNDULO

$$\dot{a}_3 \omega_3 = [J] \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) \tag{4.58}$$

$$-a_3 \omega_3 \dot{\beta}_3 = -[J] \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) \tag{4.59}$$

ou

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{\omega_3} [J] \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) \tag{4.60}$$

$$\dot{\beta}_3 = \frac{1}{a_3 \omega_3} [J] \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) \tag{4.61}$$

com $[J]$ sendo dada por

$$\begin{aligned}
[J] &= a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1) + a_1 \dot{\beta}_1 \omega_1 \cos(\varphi + \beta_1) + a_1 \omega_1 \Omega \cos(\varphi + \beta_1) \\
&\quad - \epsilon \hat{\mu}_3 [a_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \delta \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \sin(\omega_3 + \beta_3) \\
&\quad - \delta \omega_1 [\dot{a}_1 \sin(\varphi + \beta_1) + a_1 \dot{\beta}_1 \cos(\varphi + \beta_1)] - a_1 \delta [\omega_1 \Omega - \omega_3^2] \cos(\varphi + \beta_1)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Substituindo a função $[H]$ nas equações (4.56), e notando que os termos \dot{a}_1 , $\dot{\beta}_1$ e $\dot{\Omega}$ são termos de ordem ϵ , então podemos reescrever as equações como segue

EQUAÇÕES DO BLOCO:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -\epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2 a_1}{2\gamma_1} \sin(2(\varphi + \beta_1)) - \frac{\epsilon}{\gamma_1} [\hat{p}_2 \Omega^2 \cos \varphi + \hat{\mu} a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \sin(\varphi + \beta_1) \\
&\quad - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma_1} [G] \sin(\varphi + \beta_1) + O(\epsilon^2) \\
\dot{\beta}_1 &= -\Omega + \frac{\omega_1}{\gamma_1} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2}{2\gamma_1} [1 - \cos(2(\varphi + \beta_1))] \\
&\quad - \epsilon \frac{1}{\gamma_1 a_1} [\hat{p}_2 \Omega^2 \cos \varphi + \hat{\mu} a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \cos(\varphi + \beta_1) - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma_1 a_1} [G] \cos(\varphi + \beta_1) + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{4.63}$$

EQUAÇÃO DO MOTOR:

$$\dot{\Omega} = \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 a_1 \omega_1 \Omega \cos(\varphi + \beta_1) \sin \varphi - \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi] + O(\epsilon^2) \tag{4.64}$$

EQUAÇÕES DO PÊNDULO

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{\omega_3} [J] \sin(\omega_3 \tau + \beta_3) \tag{4.65}$$

$$\dot{\beta}_3 = \frac{1}{a_3 \omega_3} [J] \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) \tag{4.66}$$

Para prosseguir na aplicação do método da média, precisamos calcular as funções definidas anteriormente por $[G] \cos(\varphi + \beta_1)$, $[G] \sin(\varphi + \beta_1)$, $(1/\omega_3)[J] \cos(\omega_3 \tau + \beta_3)$ e $(1/\omega_3 a_3)[J] \sin(\omega_3 \tau + \beta_3)$.

Para isso utilizaremos as identidades trigonométricas de transformação de produto em arcos múltiplos.

i) Cálculo de $(1/\omega_3)[J] \sin(\omega_3 \tau + \beta_3)$

Colocando

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\dot{a}_1 \omega_1}{2\omega_3} [\cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3)) - \cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3))] \\
J_2 &= \frac{a_1 \dot{\beta}_1 \omega_1}{2\omega_3} [\sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
J_3 &= -\frac{\hat{\mu}_3 a_3}{2} [1 - \cos(2\omega_3 \tau + 2\beta_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= -\epsilon \frac{\dot{\mu}_3 a_1 \delta \omega_1}{2\omega_3} [\cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3)) - \cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3))] \\
J_5 &= -\frac{\delta \omega_1 \dot{a}_1}{2} [\cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3)) - \cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3))] \\
J_6 &= -\frac{\delta \omega_1 a_1 \dot{\beta}_1}{2} [\sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
J_7 &= -\frac{a_1 \delta}{2} [\omega_1 \Omega - \Omega_3^2] [\sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))]
\end{aligned} \tag{4.67}$$

a função $(1/\omega_3)[J] \sin(\omega_3\tau + \beta_3)$ pode ser escrita como

$$(1/\omega_3)[J] \sin(\omega_3\tau + \beta_3) = \sum_{i=1}^7 J_i \tag{4.68}$$

ii) Cálculo de $1/a_3\omega_3[\mathbf{J}] \cos(\omega_3\tau + \beta_3)$.

Colocando

$$\begin{aligned}
J'_1 &= \frac{\dot{a}_1 \omega_1}{2a_3\omega_3} [\sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) - \cos((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))] \\
J'_2 &= \frac{a_1 \dot{\beta}_1 \omega_1}{2a_3\omega_3} [\cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) + \cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
J'_3 &= \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2a_3\omega_3} [\cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) + \cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
J'_4 &= -\epsilon \frac{\dot{\mu}_3}{2} \sin(2(\omega_3\tau + \beta_3)) \\
J'_5 &= -\frac{\epsilon \dot{\mu}_3 \delta \omega_1 \dot{a}_1}{2a_3\omega_3} [\sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))] \\
J'_6 &= -\frac{\delta \omega_1 \dot{a}_1}{2a_3\omega_3} [\sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))] \\
J'_7 &= -\frac{a_1 \delta \omega_1 \dot{\beta}_1}{2a_3\omega_3} [\cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) + \sin((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
J'_8 &= -\frac{a_1 \delta}{2a_3\omega_3} [\omega_1 \Omega - \omega_3^2] [\cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) + \cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))]
\end{aligned} \tag{4.69}$$

a função $1/(a_3\omega_3)[J] \cos(\omega_3\tau + \beta_3)$ pode ser escrita como segue

$$1/(a_3\omega_3)[J] \cos(\omega_3\tau + \beta_3) = \sum_{k=1}^8 J'_k \tag{4.70}$$

iii) Cálculo de $[\mathbf{G}] \sin(\varphi + \beta_1)$ e $[\mathbf{G}] \cos(\varphi + \beta_1)$

Colocando

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left[\frac{a_3^2 \omega_3^2}{2} + \frac{a_1^2 \delta^2 a_3}{4} \right] [\sin((2\omega_3 + 2\Omega)\tau + (3\beta_3 + \beta_1)) - \sin((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))] \\
G_2 &= \left[-\frac{a_3^2 \omega_3^2}{2} \right] [\sin((3\omega_3 + \Omega)\tau + (3\beta_3 + \beta_1)) - \sin((3\omega_3 - \Omega)\tau + (3\beta_3 - \beta_1))] \\
G_3 &= -\left[\frac{a_3^2 \omega_3 a_1 \delta}{4} \right] [\sin((2\omega_3 + 2\Omega)\tau + (2\beta_3 + 2\beta_1)) - \sin(2\omega_3 \tau + 2\beta_3)] \\
G_4 &= -\left[\frac{a_1^2 \delta_3}{8} \right] [\sin((3\Omega + \omega_3)\tau + (3\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3))] \\
G_5 &= -\left[\frac{a_1^2 \delta^2 a_3}{8} \right] [\sin((3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)) - \sin((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
G_6 &= \left[\frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta}{4} + \frac{a_3^2 \delta^2}{2} - \frac{a_1^3 \delta^3}{8} \right] [\sin(2\Omega \tau + 2\beta_1)] \\
G_7 &= -\left[\frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta}{8} \right] [\sin((2\omega_3 + 2\Omega)\tau + (2\beta_3 + 2\beta_1)) - \sin(2\omega_3 \tau + 2\beta_3)] \\
G_8 &= -\left[\frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta}{8} \right] [\sin(2\omega_3 \tau + 2\beta_3) - \sin((2\omega_3 - 2\Omega)\tau + (2\beta_3 - 2\beta_1))] \\
G_9 &= \left[\frac{a_3 \omega_3 a_1^2 \delta}{4} \right] [\sin((3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)) - \sin((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
G_{10} &= -\left[\frac{a_3 \omega_3 a_1^2 \delta}{4} \right] [\sin((3\Omega + \omega_3)\tau + (3\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3))] \\
G_{11} &= \left[\frac{a_3 \omega_3 a_1 \delta}{8} \right] [\sin(4\Omega \tau + 4\beta_1) - \sin(2\Omega \tau + 2\beta_1)] \\
G_{12} &= \left[\frac{\dot{a}_3 \omega_3}{2} \right] [\cos((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1)) - \sin((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))] \\
G_{13} &= \left[\frac{a_3 \omega_3 \dot{\beta}_3}{2} \right] [\sin((\omega_3 + \Omega)\tau + (\beta_3 + \beta_1)) - \sin((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))] \\
G_{14} &= \left[\frac{a_3 \omega_3^2}{2} \right] [\sin((\omega_3 + \Omega)\tau + (\beta_3 + \beta_1)) - \sin((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))]
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
G'_1 &= \left[\frac{a_3^3 \omega_3^2}{4} - \frac{a_3^3 \omega_3^3}{8} + \frac{a_1^2 \delta^2 \omega_1^2 a_3}{4} \right] [\cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3))] \\
G'_2 &= \left[-\frac{a_3^3 \omega_3^2}{4} \right] [\cos((3\omega_3 + \Omega)\tau + (3\beta_3 + \beta_1)) + \cos((3\omega_3 - \Omega)\tau + (3\beta_3 - \beta_1))] \\
G'_3 &= \left[\frac{a_3^2 \omega_3 a_1 \delta}{4} \right] [(\cos(2\omega_3\tau) + \cos(2\omega_3 - 2\Omega)\tau + (2\beta_3 - 2\beta_1)) \\
&\quad - (\cos((2\omega_3 + 2\Omega)\tau + (2\beta_3 + 2\beta_1)) + \cos(2\omega_3\tau + 2\beta_3))] \\
G'_4 &= -\left[\frac{a_1^2 \delta^2 \omega_1^3 a_3}{8} \right] [(\cos((3\Omega + \omega_3)\tau + (3\beta_1 + \beta_3)) + \cos((\Omega + \omega_3)\tau)) \\
&\quad + (\cos((3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)) + \cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3)))] \\
G'_5 &= \left[\frac{a_3^2 \omega_3 a_1 \delta}{4} + \frac{a_3^3 \delta^3 \omega_1^2}{4} - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{8} \right] [(1 - \cos(2\Omega\tau + 2\beta_1))] \\
G'_6 &= \left[-\frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta}{8} \right] [(\cos((2\Omega + 2\omega_3)\tau + (2\beta_1 + 2\beta_3)) + \cos(2\omega_3\tau + 2\beta_3)) \\
&\quad + (\cos(2\omega_3\tau + 2\beta_3) + \cos((2\omega_3 - 2\Omega)\tau + (2\beta_3 - 2\beta_1)))] \\
G'_7 &= \left[\frac{a_3 \omega_3^2 a_1^2 \delta}{4} \right] [(\cos((3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)) + \cos((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))) \\
&\quad - (\cos(3(\Omega + \omega_3)\tau + (3\beta_1 + \beta_3)) + \cos((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3))] \\
G'_8 &= \left[-\frac{a_3^3 \delta^3 \omega_1^2}{8} \right] [\cos(4\Omega\tau + 4\beta_1) + \cos(2\Omega\tau + 2\beta_1)] \\
&\quad + \left[\frac{\dot{a}_3 \omega_3}{2} \right] [\sin((\Omega + \omega_3)\tau + (\beta_1 + \beta_3)) - \sin((\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3))] \\
G'_9 &= \left[\frac{a_3 \omega_3 \dot{\beta}_3}{2} \right] [\cos((\omega_3 + \Omega)\tau + (\beta_3 + \beta_1)) + \cos((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))] \\
G'_{10} &= \left[\frac{a_3 \omega_3^2}{2} \right] [\cos((\omega_3 + \Omega)\tau + (\beta_3 + \beta_1)) + \cos((\omega_3 - \Omega)\tau + (\beta_3 - \beta_1))]
\end{aligned} \tag{4.72}$$

podemos escrever $[G] \cos(\varphi + \beta_1)$ e $[G] \sin(\varphi + \beta_1)$ da seguinte forma

$$[G] \sin(\varphi + \beta_1) = \sum_{i=1}^{14} G_i \tag{4.73}$$

$$[G] \cos(\varphi + \beta_1) = \sum_{i=1}^{10} G'_i \tag{4.74}$$

Deste modo, podemos reescrever as equações para amplitude e fase do sistema como segue

EQUAÇÕES DO BLOCO:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2 a_1}{2\gamma} \sin(2(\varphi + \beta_1)) - \frac{\epsilon}{\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \cos \varphi + \hat{\mu}_1 a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \sin(\varphi + \beta_1) \\ &\quad - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \sum_{i=1}^{14} G_i + O(\epsilon^2) \\ \dot{\beta}_1 &= -\Omega + \frac{\omega_1^2}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2}{2\gamma} [1 - \cos(2(\varphi + \beta_1))] \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$-\epsilon \frac{1}{\gamma a_1} [\hat{p}_2 \Omega^2 \cos \varphi + \hat{\mu}_1 a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \cos(\varphi + \beta_1) - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma a_1} \sum_{k=1}^{10} G'_k + O(\epsilon^2)$$

EQUAÇÃO DO MOTOR:

$$\dot{\Omega} = \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 a_1 \omega_1 \Omega \cos(\varphi + \beta_1) \sin \varphi - \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi] + O(\epsilon^2) \quad (4.76)$$

EQUAÇÕES DO PÊNDULO

$$\begin{aligned} \dot{a}_3 &= \sum_{i=1}^7 J_i \\ \dot{\beta}_3 &= \sum_{k=1}^8 J_k \end{aligned} \quad (4.77)$$

Introduzindo o parâmetro de sintonia para expressar a proximidade da frequência de rotação do motor com a frequência de oscilação do bloco, temos $\Omega = 1 + \epsilon \sigma_\Omega$. Logo,

$$-\Omega + \frac{\omega_1^2}{\gamma} = -\frac{\epsilon(\sigma_\Omega + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma_1} + O(\epsilon^2) \quad (4.78)$$

Como seno e cosseno são funções limitadas e $\dot{a}_1, \dot{\beta}_1, \dot{a}_3, \dot{\beta}_3, \Omega$ são funções da ordem de ϵ se as respectivas funções são limitadas então, a maior parte destas funções são de variação lenta de τ se ϵ é pequeno. Portanto, elas variam suavemente durante um intervalo igual a um período e, em primeira aproximação, podem ser consideradas constantes no intervalo $[0, 2\pi]$ ([29]).

Segundo Nayfeh ([29]) temos duas maneiras de fazer o cálculo da média. Primeiro, podemos calcular a média das equações (4.75) a (4.77) sobre um período das funções

circulares, para determinar uma primeira aproximação. Segundo, podemos dividir os termos em dois grupos: os termos de escala de variação lenta e os termos de escala de variação rápida e, em primeira aproximação, a média das equações é igual aos termos de variação lenta.

Como adotamos a segunda maneira de calcular a média, então precisamos diferenciar entre os termos de variação lenta e os termos de variação rápida. Os termos de variação lenta são os termos nos quais os coeficientes de τ são pequenas quantidades de ϵ .

Como a existência de termos de variação lenta depende da diferença das frequências do sistema, então precisamos decidir entre as diferentes frequências e tratar cada caso separadamente.

Termos de variação lenta ocorrem quando a frequência de oscilação do pêndulo é próxima de 0, 1, $1/3$ ou 3. O caso $\omega_3 \approx 1$ precisa ser tratado separadamente já que pequenos divisores ocorrem na solução da equação homogênea e a solução particular domina o comportamento da solução depois de um certo tempo τ .

4.3 Caso sem ressonancia

Consideremos inicialmente o caso sem ressonancia entre o bloco e o pêndulo. Neste caso, a frequência ω_3 está longe de 0, 1, $1/3$ e 3.

Como estamos considerando o sistema longe da ressonancia, então haverá interação ressonante apenas entre o bloco e o motor. Os sistemas de equações que descrevem as modulações de amplitude e fase do bloco e do pêndulo são os sistemas (4.75) e (4.77) respectivamente.

Primeiramente calculemos a média das equações do bloco. Colocando

$$\dot{a}_1^{(1)} = -\epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2 a_1}{2\gamma} \sin(2(\varphi + \beta_1)) - \frac{\epsilon}{\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \cos \varphi + \hat{\mu} a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \sin(\varphi + \beta_1), \quad (4.79)$$

e

$$\dot{a}_1^{(2)} = \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \sum_{i=1}^{14} G_i, \quad (4.80)$$

escrevemos

$$\dot{a}_1 = \dot{a}_1^{(1)} + \dot{a}_1^{(2)}. \quad (4.81)$$

Logo, a média da equação acima pode ser calculada como a soma de duas médias.

Usando algumas identidades trigonométricas para a transformação de produto de seno e cosseno em soma de arcos múltiplos, temos

$$\langle \dot{a}_1^{(1)} \rangle = -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] \quad (4.82)$$

Para o cálculo da média de $\dot{a}_1^{(2)}$ precisamos verificar quais funções $G_i, i = 1, \dots, 14$ possuem termos de variação lenta. Como estamos considerando que o sistema está longe da ressonancia, então quase todos os termos são de variação rápida, exceto G_{13} e G_{14} , já que as diferenças nos argumentos sempre são estritamente diferentes de zero. As funções G_{13} e G_{14} possuem \dot{a}_3 e $\dot{\beta}_3$ como coeficientes, os quais são funções que variam lentamente. No entanto, as funções seno e cosseno são funções que variam rapidamente e, portanto, estas funções também são de variação rápida. Portanto, segue que $\langle \dot{a}_1^{(2)} \rangle = 0$.

Logo, a equação média para a amplitude de oscilações do bloco é dada por

$$\langle \dot{a}_1^{(1)} \rangle = -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] \quad (4.83)$$

Para o cálculo da média da equação que governa a fase do bloco, aplicamos o mesmo raciocínio, ou seja, colocamos

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1^{(1)} = & -\epsilon \frac{(\sigma_\Omega + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2}{2\gamma} [1 - \cos(2(\varphi + \beta_1))] \\ & - \epsilon \frac{1}{\gamma a_1} [\hat{p}_2 \Omega^2 \cos \varphi + \hat{\mu}_1 a_1 \omega_1 \sin(\varphi + \beta_1)] \cos(\varphi + \beta_1) \end{aligned} \quad (4.84)$$

e

$$\dot{\beta}_1^{(2)} = -\epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma a_1} \sum_{k=1}^{10} G'_k, \quad (4.85)$$

e escrevemos

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_1^{(1)} + \dot{\beta}_1^{(2)}$$

Calculando separadamente as médias das equações (4.84) e (4.85), obtemos

$$\langle \dot{\beta}_1^{(1)} \rangle = -\epsilon \frac{\sigma_\Omega + \hat{m}_3 \delta}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma} + \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2a_1 \gamma} \cos \beta_1 \quad (4.86)$$

Analisando quais das funções G'_k possuem termos de variação lenta obtemos

$$\langle \dot{\beta}_1^{(2)} \rangle = \langle -\epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma a_1} G'_5 \rangle = -\epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma a_1} \left[\frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta}{4} + \frac{a_3^3 \delta^3}{4} - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^1}{8} \right] \quad (4.87)$$

Logo, a equação média para a modulação de fase é dada por

$$\begin{aligned} \langle \dot{\beta}_1 \rangle = & -\epsilon \frac{\sigma_\Omega + \hat{m}_3 \delta}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma} + \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2a_1 \gamma} \cos \beta_1 \\ & -\epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma a_1} \left[\frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta}{4} + \frac{a_3^3 \delta^3}{4} - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^1}{8} \right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

Aplicando o mesmo raciocínio na equação do motor, temos

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 a_1 \omega_1 \Omega \frac{1}{2} \sin(-\beta_1)]. \quad (4.89)$$

Para as equações do pêndulo, verificando as funções $J_i, i = 1, \dots, 7$ e $J_k, k = 1, \dots, 8$ que possuem termos de variação lenta, obtemos

$$\langle \dot{a}_3 \rangle = -\epsilon \frac{a_3}{2} \quad (4.90)$$

$$\langle \dot{\beta}_3 \rangle = 0. \quad (4.91)$$

Assim, as equações médias que descrevem o comportamento do sistema longe da ressonância são dadas por

$$\begin{aligned} \langle \dot{a}_1 \rangle &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] \\ \langle \dot{\beta}_1 \rangle &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2\gamma_1 a_1} \hat{m}_3 \left[\frac{a_3^2 \omega_3 a_1 \delta}{2} + \frac{a_3^3 \delta^3 \omega_1^2}{2} - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{4} \right] \\ \langle \dot{\Omega} \rangle &= \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 a_1 \omega_1 \Omega \frac{1}{2} \sin(-\beta_1)] \\ \langle \dot{a}_3 \rangle &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 \\ \langle \dot{\beta}_3 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

As figuras (4.2), (4.3) e (4.4) mostram respectivamente as variações de a_1, β_1, Ω em relação ao tempo τ , obtidas por integração numérica. Na fase transiente a_1, β_1 e Ω oscilam com τ mas, à medida que τ cresce esses elementos tendem a valores contantes.

Quanto as equações para a amplitude e fase do pêndulo, podemos verificar diretamente que estas equações atingem estados estacionários, já que a amplitude decresce exponencialmente e a fase tem valor constante no tempo τ . Esses valores constantes atingidos são chamados **estados estacionários** e podem ser nulos ou não nulos. Quando esses valores constantes são não nulos, as oscilações livres são periódicas ([29]).

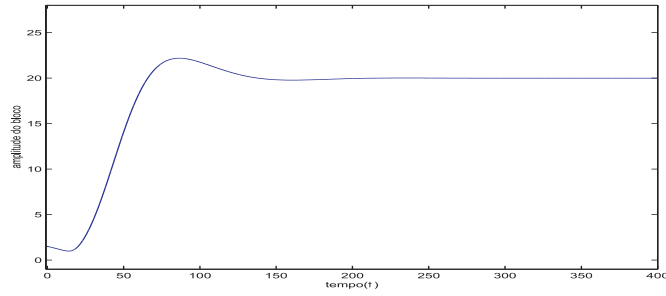


Figura 4.2: Variação de a_1 com τ calculado numericamente das equações médias

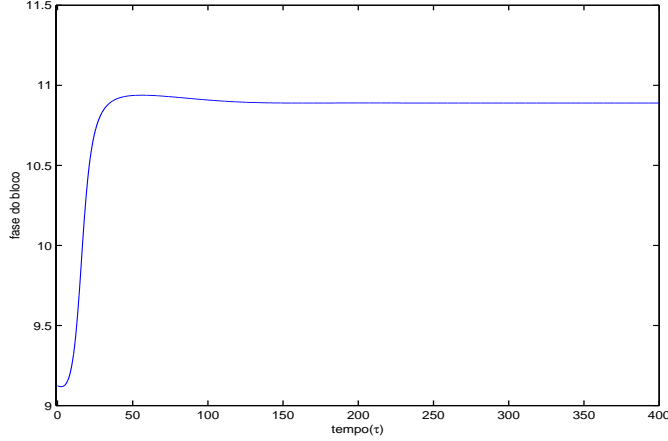


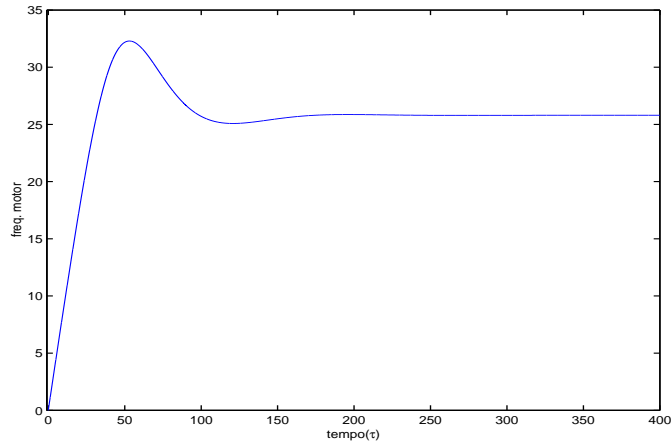
Figura 4.3: Variação de β_1 com τ calculado numericamente

Os dados utilizados no cálculo dos estados estacionários foram os seguintes.

Condições iniciais. $a_1(0) = 1.51234$; $\beta_1(0) = 2.8398$ $\Omega(0) = 0.0$; $a_3(0) = 0.1$; $\beta_3(0) = 3.5$.

Os valores dos parâmetros e constantes utilizados na integração numérica estão dados na tabela (4.2).

Para determinar as respostas aos estados estacionários, não precisamos integrar numericamente o conjunto de equações médias descrevendo as amplitudes e fases do sistema

Figura 4.4: *Variação de Ω com τ calculado numericamente*Tabela 4.2: *Valores dos parâmetros para estados estacionários sem ressonância*

parâmetro	nome	valor
a	coeficiente do torque	0.0239
b	coeficiente do torque	0.0001
σ_{Ω}	parâmetro de sintonia	0.0019123
m_1	massa do bloco	1.5670
m_2	massa de perturbação	0.0123
m_3	massa do pêndulo	0.3
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco	0.09
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	0.03234
k_1	coeficiente linear da mola	1.35
l	comprimento do pêndulo	0.19174
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor	0.05
J_2	momento de inércia do disco	0.037
a_3	amplitude do pêndulo	0.009

([29]). Ao invés disso, usamos o fato que $a_1, \beta_1, \Omega, a_3$ e β_3 são constantes no estado estacionário e, portanto, as derivadas que descrevem as modulações de amplitude e fase são nulas. Deste modo obtemos um conjunto de equações algébricas dado por

$$-\frac{\epsilon}{2\gamma}[\hat{p}_2\Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] = 0 \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} & -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3\delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3\delta\omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2\Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \\ & - \frac{\epsilon}{2\gamma_1 a_1} \hat{m}_3 \left[\frac{a_3^2 \omega_3 a_1 \delta}{2} + \frac{a_3^3 \delta^3 \omega_1^2}{2} - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{4} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 a_1 \omega_1 \Omega \frac{1}{2} \sin(-\beta_1)] = 0 \quad (4.95)$$

$$-\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2\omega_3} a_3 \omega_3 = 0 \quad (4.96)$$

Resolvendo as equações (4.93) a (4.96) acima temos as equações que descrevem as amplitudes e fases do sistema no estado estacionário são dadas por

$$\left[\mu_1^2 + \left((2\sigma_\Omega + \hat{m}_3\delta) - \frac{\hat{m}_3}{4} \delta^3 a_1^2 \right)^2 \right] a_1^2 = (\hat{p}_2 \Omega^2)^2 \quad (4.97)$$

$$\tan \beta_1 = - \frac{\hat{\mu}_1}{2 \left(\frac{\hat{m}_3}{8} \delta^3 a_1^2 - (2\sigma_\Omega + \hat{m}_3\delta) \right)} \quad (4.98)$$

e a equação para as frequências de oscilações forçadas é dada por

$$M_1(\Omega) - S(\Omega) = 0 \quad (4.99)$$

com

$$S(\Omega) = \frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2 \Omega} a_1^2. \quad (4.100)$$

A equação (4.97) é uma equação implícita para a amplitude de resposta a_1 como função da frequência de rotação Ω do motor e do parâmetro de sintonia σ_Ω , desde que se considera os demais parâmetros fixos. Essa equação é conhecida como equação resposta de frequência.

A equação (4.99) é chamada equação de oscilações forçadas. As intersecções dos gráficos das curvas definidas por $M_1(\Omega)$ e (4.100) são as raízes de (4.99). Como facilmente verificamos, essa curva pode não ter raízes, ter uma raíz, duas ou três raízes.

A análise da equação resposta de frequência (4.97) conduz à determinação das regiões onde são possíveis os estados estacionários. No entanto, a abordagem analítica dessa equação não é trivial já que é uma equação implícita para a frequência de rotação do motor, desde que considerando os outros parâmetros fixos. A equação (4.97) é semelhante a equação obtida e analisada por Nayfeh e Balachandran ([30]) com a aplicação do método das múltiplas escalas.

Na próxima secção utilizamos o critério R-H para analisar os estados estacionários do sistema pêndulo eletromecânico.

4.4 Análise dos estados estacionários. Critério R-H

Nesta parte vamos analisar numericamente os estados estacionários aplicando o critério $R - H$.

Consideremos o sistema dado por (4.92), ou seja,

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} &= \epsilon[M_1(\Omega) - \hat{p}_3 a_1 \omega_1 \Omega \frac{1}{2} \sin(-\beta_1)] = \Phi_1 \\
 \dot{a}_1 &= -\frac{\epsilon}{2\gamma}[\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] = \Phi_2 \\
 \dot{\beta}_1 &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \\
 &\quad - \frac{\epsilon}{2\gamma_1 a_1} \hat{m}_3 \left[\frac{a_3^2 \omega_3 a_1 \delta}{2} + \frac{a_3^3 \delta^3 \omega_1^2}{2} - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{4} \right] = \Phi_3 \\
 \dot{a}_3 &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 = \Phi_4 \\
 \dot{\beta}_3 &= 0 = \Phi_5
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Para determinar a estabilidade dos estados estacionários, que indicaremos por Ω_c , a_{1c} , β_{1c} , a_{3c} e β_{3c} , determinados pelas equações (4.93) a (4.96), utilizamos como exemplo o estudo feito por Kononenko ([26]). Para isso, introduzimos uma pequena perturbação da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \Omega_c + \epsilon \Omega_1; \quad a_1 = a_{1c} + \epsilon A_1; \quad \beta_1 = \beta_{1c} + \epsilon B_1; \\
 a_3 &= a_{3c} + \epsilon A_3; \quad \beta_3 = \beta_{3c} + \epsilon B_3 \quad .
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Substituindo no sistema e expandindo em *Série de Taylor* em torno dos estados estacionários, retendo apenas os termos lineares da expansão, obtemos o sistema de equações

diferenciais dado por

$$\dot{Y} = J|_{Y^*} Y \quad (4.103)$$

onde $Y = \begin{bmatrix} \Omega_1 & A_1 & B_1 & A_3 & B_3 \end{bmatrix}^T$, $Y^* = \begin{bmatrix} \Omega_c & a_{1c} & \beta_{1c} & a_{3c} & \beta_{3c} \end{bmatrix}^T$, $J = [b_{i,j}]$ é a matriz Jacobiana e o símbolo $(*)$ denota que os $b_{i,j}$ devem ser calculados nos estados estacionários Y^* .

Os elementos da matriz Jacobiana são dados por

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_1(Y) \Big|_{Y^*} = \epsilon \left[N + \frac{\hat{p}_3}{2} a_{1c} \sin \beta_{1c} \right] \Big|_{Y^*} = \epsilon \left[N - \frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2 \hat{p}_2 \Omega_c^2} a_{1c}^2 \right] \\ b_{12} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \Phi_1(Y) \Big|_{Y^*} = \epsilon \left[\frac{p_3}{2} \Omega_c \sin \beta_{1c} \right] \Big|_{Y^*} = -\epsilon \left[\frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2 \hat{p}_2 \Omega_c} a_{1c} \right] \\ b_{13} &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \Phi_1(Y) \Big|_{Y^*} = \epsilon \left[\frac{\hat{p}_3}{2} \Omega_c a_{1c} \cos \beta_{1c} \right] \Big|_{Y^*} = \\ &= -\epsilon \frac{\hat{p}_3 a_{1c}}{\hat{p}_2} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) \frac{a_1}{\Omega} + \frac{\hat{m}_3}{2 \Omega_c} \delta_2 \right] \\ b_{14} &= \frac{\partial}{\partial a_3} \Phi_1(Y) \Big|_{Y^*} = 0 \\ b_{15} &= \frac{\partial}{\partial \beta_3} \Phi_1(Y) \Big|_{Y^*} = 0 \\ b_{21} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_2(Y) \Big|_{Y^*} = -\frac{\epsilon}{\gamma} [\hat{p}_2 \Omega_c \sin \beta_{1c}] \Big|_{Y^*} = \frac{\epsilon}{\gamma} \frac{\hat{\mu}_1 a_{1c}}{\Omega_c} \\ b_{22} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \Phi_2(Y) \Big|_{Y^*} = -\frac{\epsilon}{\gamma} \left[\frac{\hat{\mu}_1}{2} \right] = -\epsilon \frac{\hat{\mu}_1}{2\gamma} \\ b_{23} &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \Phi_2(Y) \Big|_{Y^*} = -\frac{\epsilon}{\gamma} \left[\frac{\hat{p}_2}{2} \Omega_c^2 \cos \beta_1 \right] \Big|_{Y^*} = \frac{\epsilon}{\gamma} a_{1c} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2 a_{1c}} \delta_2 \right] \\ b_{24} &= \frac{\partial}{\partial a_3} \Phi_2(Y) \Big|_{Y^*} = 0; \quad b_{25} = \frac{\partial}{\partial \beta_3} \Phi_2(Y) \Big|_{Y^*} = 0 \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned}
b_{31} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = -\epsilon \left[\frac{p_2}{a_{1c}\gamma} \Omega_c \cos \beta_{1c} \right] \Big|_{Y^*} = \frac{2\epsilon}{\gamma a_{1c}} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) \frac{a_{1c}}{\Omega_c} + \frac{\hat{m}_3}{2\Omega_c} \delta_2 \right] \\
b_{32} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = \frac{\epsilon}{a_{1c}} \left[- \left(-\frac{\hat{p}_2 \Omega_c^2}{2a_{1c}\gamma} \Omega_c^2 \cos \beta_{1c} \right) - \frac{\hat{m}_3}{2\gamma a_{1c}} \delta_2 \right] \\
-\epsilon \frac{\hat{m}_3}{2a_{1c}\gamma} \frac{\partial}{\partial a_{1c}} \delta_2 &= -\epsilon \frac{1}{\gamma a_{1c}} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2} \frac{\partial}{\partial a_{1c}} (\delta_2) \right] \\
b_{33} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = \epsilon \left[\frac{p_2}{2a_{1c}\gamma} \Omega_c^2 \sin \beta_{1c} \right] \Big|_{Y^*} = -\epsilon \frac{\hat{\mu}_1}{2\gamma} \\
b_{34} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) = -\epsilon \frac{\hat{m}_3}{2\gamma a_{1c}} \left[a_{3c} \omega_3 \delta a_{1c} + \frac{3a_{3c}^2 \delta^3}{2} \right] \\
b_{35} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0;
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}
b_{41} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 & b_{51} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 \\
b_{42} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 & b_{52} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 \\
b_{43} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 & b_{53} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 \\
b_{44} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} & b_{54} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 \\
b_{45} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0 & b_{55} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(Y) \Big|_{Y^*} = 0
\end{aligned} \tag{4.106}$$

com

$$N = \frac{d}{d\Omega} (M_1(\Omega)) \text{ e } \delta_2 = \left[\frac{a_{3c}^2 \omega_3 a_{1c} \delta}{2} + \frac{a_{3c}^3 \delta^3}{2} - \frac{a_{1c}^3 \delta^3}{4} \right].$$

O polinômio característico é dado por $\det(J - \lambda I_5) = 0$, com

$$J - \lambda I_5 = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda & b_{34} & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - \lambda. \end{bmatrix} \tag{4.107}$$

Desenvolvendo o determinante pela última linha temos

$$\det(J - \lambda I_5) = (-\lambda)(-1)^{5+5} \det(J_1 - \lambda I_4), \quad (4.108)$$

onde

$$J_1 = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

Logo, desenvolvendo novamente pela última linha temos

$$\det(J - \lambda I_5) = (-\lambda)(-\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} - \lambda)(-1)^{4+4} \det(J_2 - \lambda I_3), \quad (4.110)$$

com

$$J_2 = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\det(J - \lambda I_5) = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)(-\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} - \lambda) \det(J_2 - \lambda I_3) = 0. \quad (4.111)$$

Mas temos

$$\det(J_2 - \lambda I_3) = (-1)^3 \det(\lambda I_3 - J_2) = (-1)^3 (\lambda^3 - S_1 \lambda^2 + S_2 \lambda - S_3), \quad (4.112)$$

onde S_i , $i = 1, 2, 3$ são os menores principais de ordem i , ou seja,

$$S_1 = b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

$$S_2 = J_{11} + J_{22} + J_{33}$$

$$S_3 = \det J_2.$$

Logo

$$\det(J - \lambda I_5) = 0 \Leftrightarrow (\lambda)(\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} + \lambda)(\lambda^3 - S_1 \lambda^2 + S_2 \lambda - S_3) = 0. \quad (4.113)$$

Para determinar a estabilidade dos pontos estacionários do sistema pêndulo eletromecânico precisamos determinar as raízes do polinômio característico. Como já sabemos que duas das raízes são $\lambda = 0$ e $\lambda = -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2}$, então resta verificar as propriedades das outras raízes, ou seja, quais delas têm parte real negativa, positiva ou nula.

Os pontos fixos do sistema de equações do pêndulo eletromecânico são não-hiperbólicos, pois existe um auto valor nulo e, portanto, não podemos ter estabilidade assintótica para tais pontos.

Logo, não podemos usar o critério R-H para um estudo global do sistema, no entanto já conhecemos duas raízes, precisamos determinar as características das outras raízes dadas por

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3. \quad (4.114)$$

Neste caso podemos ter uma raiz real e duas complexas conjugadas, ou três raízes reais. Logo, nosso estudo das raízes do polinômio característico pode ser confinado a análise da estabilidade das raízes do polinômio (4.114). Assim sendo, vamos aplicar o critério R-H ao polinômio p_3 .

4.4.1 O critério Routh - Hurwitz

Usando o polinômio dado por p_3 construímos a matriz de Hurwitz, H , dada por

$$H = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_3 & 0 \\ 1 & S_2 & 0 \\ 0 & -S_1 & -S_3 \end{bmatrix}. \quad (4.115)$$

Assim, as condições de Hurwitz a serem satisfeitas são dadas por

$$-S_1 > 0; \quad S_2 > 0; \quad -S_3 > 0; \quad -S_1S_2 + S_3 > 0; \quad -S_3(-S_1S_2 + S_3) > 0. \quad (4.116)$$

Colocando $-S_1 = B_1$; $S_2 = B_2$; $-S_3 = B_3$ e observando que as três primeiras condições implicam imediatamente a quarta condição, as condições dadas em (4.116) podem ser substituídas por

$$B_1 > 0; \ B_2 > 0; \ B_3 > 0; \ B_1 B_2 - B_3 > 0, \quad (4.117)$$

com

$$\begin{aligned} B_1 &= b_{11} + b_{22} + b_{33} \\ B_2 &= J_{11} + J_{22} + J_{33} \ . \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$B_3 = -\det J_2$$

As condições acima são as condições de Hurwitz para que todas as raízes de um polinômio tenham parte real negativa. Suponha que $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $B_3 > 0$, segundo Routh, as condições adicionais são dadas por

	1	B_2
	B_1	B_3
	e_1	
	f_1	

Tabela 4.3: *Condições de Routh*

onde

$$e_1 = -\frac{1}{B_1} \det \begin{vmatrix} 1 & B_2 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \quad f_1 = -\frac{1}{e_1} \det \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ e_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Segundo Routh, todos os autovalores possuem parte real negativa se todos os elementos da primeira coluna são positivos. Se há troca de sinal na primeira coluna, então o número de troca de sinais corresponde ao número de raízes com parte real positiva ([28]).

As condições de Routh acima são $e_1 = (1/B_1)(B_1 B_2 - B_3) > 0$ e $f_1 = B_3$, as quais são idênticas às condições de Hurwitz, exceto pela divisão por B_1 . Usamos esses resultados para obter informações a respeito da quantidade de autovalores com parte real positiva quando efetuamos a análise dos estados estacionários, já que a diferença entre os dois critérios é apenas uma divisão por B_1 , que pode ser suprimida pois $B_1 > 0$ para $\gamma > 0$.

Assim, sempre que o critério R-H não for satisfeito basta verificar quais elementos do critério trocam de sinal. Dependendo de quais deles trocam de sinal, obtemos o número de raízes de p_3 com parte real positiva.

Os menores cofatores de ordens $i = 1, 2, 3$., necessários para o cálculo do critério R-H, são dados por

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \left(\frac{\epsilon \hat{\mu}_1}{2\gamma} \right)^2 + \frac{\epsilon}{\gamma^2} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2a_{1c}} \delta_2 \right] \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2} \frac{\partial}{\partial a_1} (\delta_2) \right] \\
J_{22} &= \epsilon^2 \left[\frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2 \Omega_c^2} a_{1c}^2 - N \right] \frac{\hat{\mu}_1}{2\gamma} + \epsilon^2 \frac{2\hat{p}_3}{\gamma \hat{p}_2} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) \frac{a_{1c}}{\Omega_c} + \frac{\hat{m}_3}{2\Omega_c} \delta_2 \right]^2 \\
J_{33} &= \epsilon \left[\frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2 \Omega_c^2} a_{1c}^2 - N \right] \left[\frac{\epsilon \hat{\mu}_1}{2\gamma} \right] + \left[\frac{\epsilon \hat{\mu}_1 a_{1c}}{\gamma \Omega_c} \right] \left[\frac{\epsilon \hat{p}_3 a_{1c} \hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2 \Omega_c} \right] \\
d_1 &= b_{11} b_{22} b_{33} = \epsilon \left[\frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2 \Omega_c^2} a_{1c}^2 - N \right] \left[\frac{\epsilon \hat{\mu}_1}{2\gamma} \right] \left[-\frac{\epsilon \hat{\mu}_1}{2\gamma} \right] \\
d_2 &= b_{12} b_{23} b_{31} = \left[-\epsilon \frac{\hat{p}_3 a_{1c} \hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2 \Omega_c} \right] \left[\frac{\epsilon a_1}{\gamma} \left[\frac{\epsilon a_1}{\gamma} \left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2a_{1c}} \delta_2 \right] \right] \times \\
&\times \left[\frac{2\epsilon}{\gamma a_{1c}} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) \frac{a_{1c}}{\Omega_c} + \frac{\hat{m}_3}{2\Omega_c} \delta_2 \right] \right] \\
d_3 &= b_{13} b_{32} b_{21} = \left[-\epsilon \frac{\hat{p}_3 a_{1c}}{\hat{p}_2} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) \frac{a_1}{\Omega} + \frac{\hat{m}_3}{2\Omega_c} \delta_2 \right] \right] \times \\
&\times \left[-\epsilon \frac{1}{\gamma a_{1c}} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2} \frac{\partial}{\partial a_{1c}} (\delta_2) \right] \right] \left[\epsilon \frac{\hat{\mu}_1 a_{1c}}{\gamma \Omega_c} \right] \\
d_4 &= b_{13} b_{22} b_{31} = -\epsilon \left[\frac{p_3 a_{1c}}{p_2} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) \frac{a_{1c}}{\Omega_c} + \frac{\hat{m}_3}{2\Omega_c} \delta_2 \right] \right] \times \\
&\times \left[-\frac{\epsilon \hat{\mu}_1}{2\gamma} \right] \left[\frac{2\epsilon}{a_{1c} \gamma} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2\Omega_c} \delta_2 \right] \right] \\
d_5 &= b_{12} b_{21} b_{33} = -\epsilon \left[\frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1 a_{1c}}{\hat{p}_2 \Omega_c} \right] \left[\frac{\epsilon \hat{\mu}_1 a_{1c}}{\gamma \Omega_c} \right] \left[-\frac{\epsilon \hat{\mu}_1}{2\gamma} \right] \\
d_6 &= b_{11} b_{32} b_{23} = \epsilon \left[\frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2 \Omega_c^2} a_{1c}^2 - N \right] \left[\frac{\epsilon}{a_{1c} \gamma} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2} \frac{\partial}{\partial a_1} (\delta_2) \right] \right] \times \\
&\times \left[\frac{\epsilon a_{1c}}{\gamma} \left[\left(\sigma_\Omega + \frac{\hat{m}_3}{2} \delta \right) + \frac{\hat{m}_3}{2a_{1c}} \delta_2 \right] \right].
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Assim temos

$$B_1 = \epsilon \left[\frac{\hat{p}_3 \hat{\mu}_1}{2 \hat{p}_2 \Omega_c^2} a_{1c}^2 - N \right] + \epsilon \frac{\hat{\mu}_1}{\gamma}$$

$$B_2 = J_{11} + J_{22} + J_{33} \quad (4.120)$$

$$B_3 = -(d_1 + d_2 + d_3 - d_4 - d_4 - d_5).$$

Notamos que com base nas condições do critério R-H (4.117), podemos verificar que as características do sistema influenciam no comportamento dos pontos de equilíbrio.

Desde que $N < 0$, pois estamos considerando que o torque é dado por $M_1(\Omega) = a - b\Omega$, então o critério $B_1 > 0$ é sempre satisfeito quando $\gamma > 0$. No caso em que $\gamma < 0$, precisamos verificar as regiões em que o critério $B_1 > 0$ falha.

Na avaliação do critério R-H necessitamos apenas do sinal de B_1 , B_2 , B_3 e $B_1 B_2 - B_3$. Assim sendo, formulamos um programa para cálculo desses valores, em Matlab[®] ([25]), de modo que apenas decidimos a cada passo se os valores são negativos, positivos ou nulos.

Na próxima seção apresentamos os resultados das simulações numéricas, juntamente com os coeficientes, as constantes e os diversos parâmetros de controle utilizados.

4.4.2 Análise dos estados estacionários

Nesta seção vamos analisar o sistema dinâmico usando diversos parâmetros de controle. Aqui, sempre fixamos todos os demais parâmetros do problema e obtivemos diversos resultados tais como efeitos de histerese, curvas com características "softening" e "hardening", e saltos nas amplitudes realizáveis dos movimentos. Além disso, verificamos a forte dependência do sistema às alterações, e a influência do movimento do pêndulo no sistema.

4.4.3 Parâmetro de controle: frequência Ω da rotação do motor

Quando Ω é tomado como parâmetro de controle, a equação resposta de frequência (4.97) é uma equação implícita para a amplitude de resposta a_1 como função da frequência de rotação Ω , desde que se considera os demais parâmetros fixos. A determinação da região onde são possíveis estados estacionários é feita pela resolução dessa equação, o que não é trivial, já que é uma equação implícita.

A figura (4.5) mostra uma curva característica da amplitude de resposta versus a frequência de rotação do motor Ω , e estudamos a estabilidade do sistema para o torque

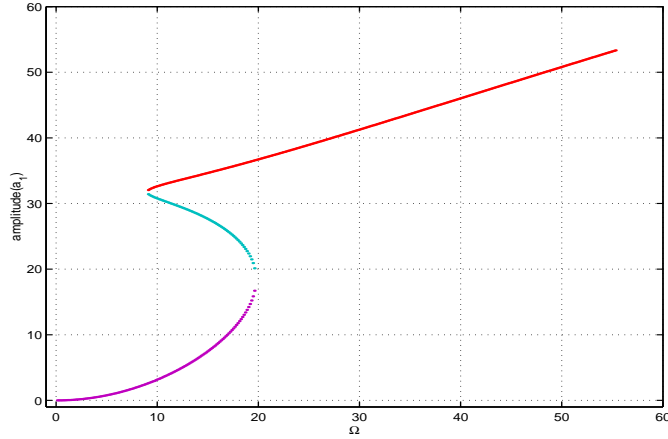


Figura 4.5: Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle e $b=0.12$

linear com $a = 0.05$ e diversos valores para b . Começamos com $b = 0.12$ e variamos até $b = 0.03$. Os dados utilizados estão na tabela (4.4).

Considerando o torque linear com $a = 0.05$ e $b = 0.12$, o polinômio p_3 possui zeros $\Omega_1 = 19.72$, $\Omega_2 = 8.97$ e $\Omega_3 = 45.16$, e o critério R-H mostra que no intervalo $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ e para $\Omega > \Omega_3$ são instáveis, e os demais pontos são estáveis. Conforme observamos na seção anterior, as condições de Routh garantem que existe um autovalor com parte real positiva para $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ e dois autovalores com parte real positiva para $\Omega > \Omega_3$.

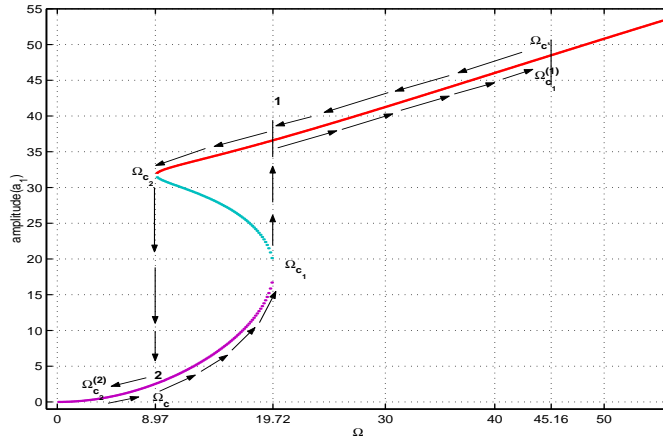


Figura 4.6: Curva resposta de frequência e o fenômeno de histerese

Logo, na suposição de que a variedade central de dimensão um seja estável, o sistema pêndulo eletromecânico é instável para $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ e $\Omega > \Omega_3$, e segundo Nayfeh ([29]), as características da curva resposta de frequência são suficientes para caracterizar um efeito de salto, ou seja, nos pontos onde a tangente à curva torna-se vertical ocorre um salto na amplitude dos movimentos. Mais precisamente, à medida que o parâmetro de controle Ω

crece, a amplitude de oscilações do bloco aumenta suavemente até atingir um valor crítico Ω_{c_1} mostrado na figura (4.6), e para $\Omega > \Omega_1$ o sistema experimenta um salto na amplitude de oscilações para o ponto 1 e, depois disso, continua a crescer suavemente até atingir o ponto Ω_3 . Por outro lado, se fizermos Ω decrescer, então a amplitude de oscilações é instável para $\Omega > \Omega_3$, e para $\Omega < \Omega_3$ a amplitude de oscilações do bloco decresce suavemente até atingir um valor Ω_{c_2} e no ponto Ω_2 o sistema experimenta um novo salto para o ponto 2 mostrado na figura (4.6) e, depois disso, continua a decrescer suavemente até o ponto de parada. Caso contrário, ou seja, se a variedade central é instável, então o sistema pêndulo eletromecânico é instável para qualquer valor do parâmetro no intervalo.

Para $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$, a curva resposta depende do sentido de variação do parâmetro de controle. Este fenômeno de dependência quanto ao sentido em que o parâmetro de controle é variado é chamado histerese ([29]).

Nos pontos Ω_1, Ω_2 e Ω_3 temos um e dois autovalores com parte real zero. Logo, existem variedades centrais de dimensões dois e três que governam o sistema nestes pontos, respectivamente.

Verificamos que os pontos de estabilidade ou instabilidade do sistema possuem uma forte dependência da fonte de energia, pois uma pequena alteração do coeficiente para $b = 0.11$, o ponto no qual surgem dois autovalores com parte real positiva é deslocado para $\Omega_3 = 41.58$.

Prosseguindo desta maneira, esse ponto é alterado cada vez mais para a esquerda e, a figura (4.7) ilustra esse caso, quando $b = 0.07$

Neste caso a análise da estabilidade, restrita a p_3 , implica que pontos tais que $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ e $\Omega > 27.61$ são instáveis.

Deste modo, podemos usar as mesmas conclusões do caso anterior quanto a estabilidade, instabilidade e os efeitos de saltos mas, os estados estáveis, se existirem, não podem ser tais que $\Omega > \Omega_3 = 27.61$. Assim, para acréscimos sucessivos do parâmetro de controle, podemos esperar salto no ponto Ω_{c_1} , mas se Ω continua a crescer, então o movimento torna-se instável a partir de $\Omega = 27.61$. Para decréscimos sucessivos do parâmetro de controle, o movimento é instável para $\Omega > \Omega_3$ e torna-se estável entre Ω_3 e Ω_2 , onde o sistema experimenta um salto, na suposição de que a variedade central seja estável.

Quando diminuimos ainda mais o parâmetro b para $b = 0.02$, o ponto Ω_3 é alterado para $\Omega_3 = 13.19$, e a região de $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ ainda é instável (figura 4.8).

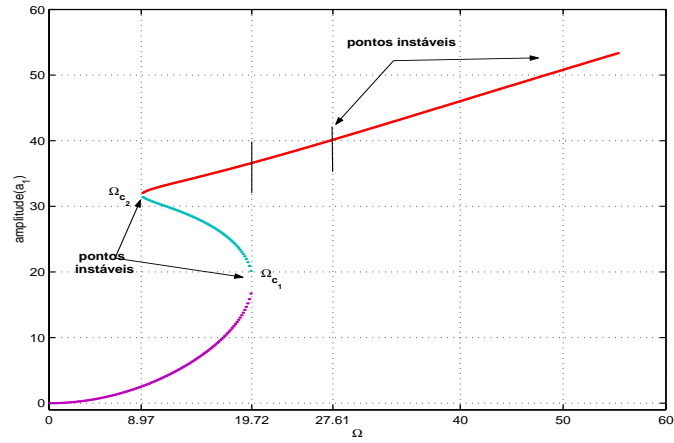


Figura 4.7: Pontos instáveis e estáveis para $b=0.07$

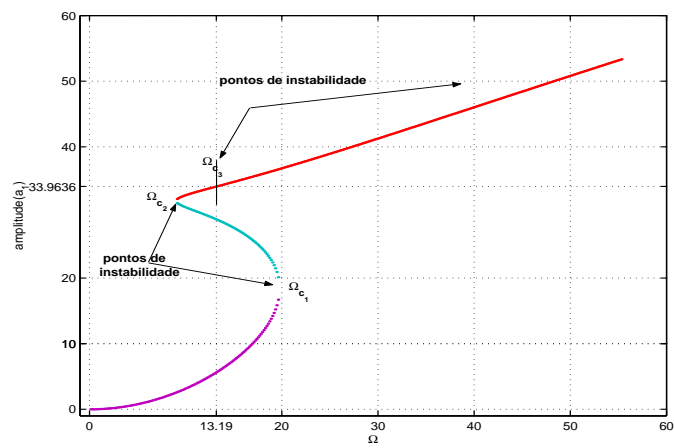


Figura 4.8: Pontos instáveis e estáveis para $b=0.02$

Tabela 4.4: Valores dos parâmetros e constantes para o fenômeno de histerese

parâmetro	nome	valor
m_1	massa do bloco	3.850
m_2	massa de perturbação	0.008532
m_3	massa do pêndulo	0.5
l	comprimento do pêndulo	1.19
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor	0.075
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco	0.0008622
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	0.3234
k_1	coeficiente linear da mola	1.75
σ	parâmetro de sintonia	-0.00099
Ω_1	frequência inicial	0.1
Ω_f	frequência final	55.4
a_3	amplitude do pêndulo	0.009
J_2	momento de inércia do disco	0.37

Oscilações forçadas são possíveis somente se a equação de oscilações forçadas (4.99) é satisfeita, e podemos ter uma, duas, três ou nenhuma raiz. A determinação das raízes pode ser feita através da análise gráfica da intersecção entre a curva S e o torque linear M_1 . A figura (4.9) ilustra o fato

Nos casos apresentados, $b=0.12$, $b=0.07$ e $b=0.02$, temos uma única raiz e, como esta raiz está compreendida na região de não instabilidade, podemos concluir que a frequência de oscilações forçadas é não instável e, portanto, depende da variedade central associada ao sistema dinâmico.

Conforme alteramos ainda mais as características da fonte, juntamente com o coeficiente a do torque, por exemplo, $a = 0.03$ e $b = 0.001$, a análise torna-se complexa e, portanto, este assunto requer mais estudos.

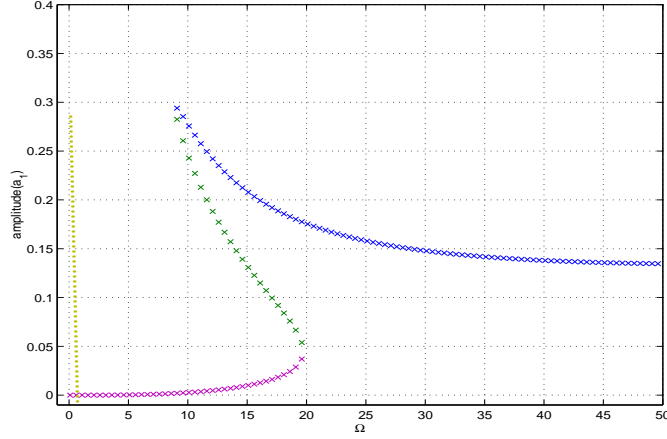


Figura 4.9: Intersecção entre as curvas de $S(\Omega)$ e torque linear $M_1(\Omega)$

4.4.4 Parâmetro de controle: parâmetro de sintonia σ_Ω , e $\delta > 0$

Quando tomamos σ_Ω como parâmetro de controle e fixamos os demais parâmetros do sistema, inclusive a frequência Ω de rotação do motor, obtemos as curvas com características mole e dura ("softening e hardening"), as quais dependem do sinal de δ . Se $\delta > 0$ a curva é do tipo dura e, caso contrário, a curva é do tipo mole.

Na figura (4.10) apresentamos uma curva característica de quando σ_Ω é tomado como parâmetro de controle e os dados utilizados estão na tabela (4.5).

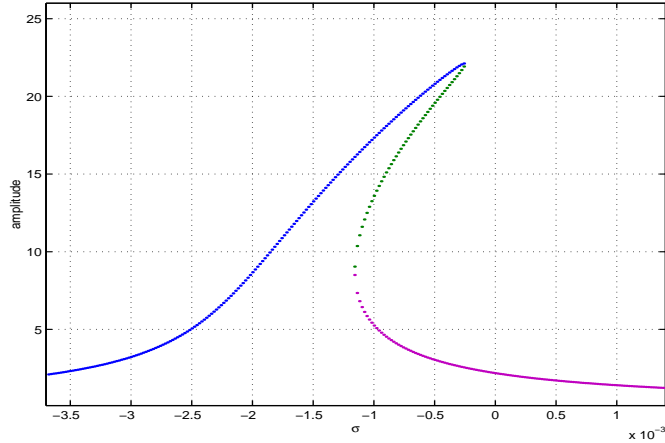


Figura 4.10: Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle σ_Ω com $\delta > 0$

As equações do sistema são idênticas às equações (4.97), (4.98) e (4.99), mas no entanto, as equações que determinam as amplitudes de oscilações, a_1 , e as frequências de oscilações forçadas, são funções de σ_Ω , ou seja, $a_1 = a_1(\sigma_\Omega)$ e $S = S(\sigma_\Omega)$. Assim, temos

$$\left[\mu_1^2 + \left((2\sigma_\Omega + \hat{m}_3\delta) - \frac{\hat{m}_3}{4}\delta^3 a_1^2 \right)^2 \right] a_1^2 = (\hat{p}_2\Omega^2)^2 \quad (4.121)$$

$$\tan \beta_1 = -\frac{\hat{\mu}_1}{2 \left(\frac{\hat{m}_3}{8}\delta^3 a_1^2 - (2\sigma_\Omega + \hat{m}_3)\delta \right)} \quad (4.122)$$

e a equação de frequências de oscilações forçadas é dada por

$$M_1(\Omega) - S(\sigma_\Omega) = 0, \quad (4.123)$$

com

$$S(\sigma_\Omega) = \frac{\hat{p}_3\hat{\mu}_1}{2\hat{p}_2\Omega} a_1^2(\sigma_\Omega) \quad (4.124)$$

e $M_1(\Omega) = \text{constante}$, já que Ω é fixado.

Consideramos o torque linear com os coeficientes dados por $a = 0.01$ e $b = 0.0009$, a cada Ω fixado, verificamos a estabilidade dos pontos da curva. Primeiramente começamos com $\Omega = 1.725$, e depois incrementamos uma unidade até $\Omega = 12.725$.

Com as condições acima, verificamos que o critério R-H é satisfeito para $\Omega = \{1.725; 2.725; 3.725; \dots; 9.725\}$ e, portanto, a estabilidade dos pontos fixos depende da variedade central de dimensão um associada ao sistema. Para pontos tais que $\Omega \geq 10.725$ existem regiões nas quais o critério R-H não é satisfeito e, portanto, regiões de instabilidade. Essas regiões de instabilidade ocorrem devido ao surgimento de um autovalor com parte real positiva. A tabela (4.6) apresenta os resultados obtidos com alguns valores de Ω .

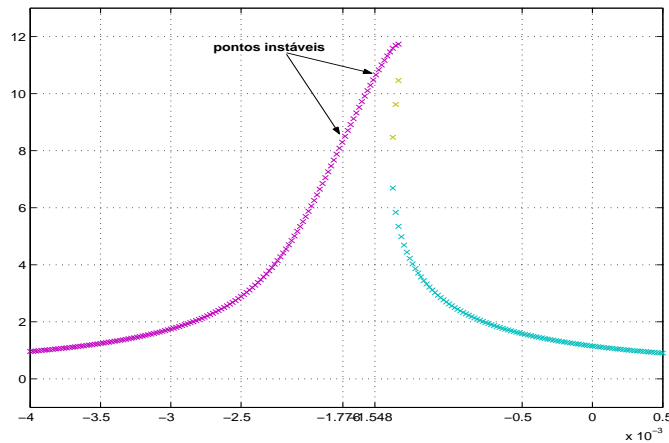
As figuras (4.11), (4.12) e (4.13) apresentam três casos analisados. A segunda curva é característica do efeito de salto, isto é, existem frequências que não são possíveis para certos valores do parâmetro de controle. Para estes valores as frequências não são estáveis nem instáveis, elas simplesmente não existem.

Analogamente ao caso de Ω como parâmetro de controle, aqui obtemos oscilações forçadas quando a equação para oscilações forçadas for satisfeita. Como o torque é constante, então a equação para oscilações forçadas pode ter uma raiz simples, uma raiz dupla ou nenhuma raiz.

As figuras (4.14), (4.15) e (4.16) mostram três casos estudados, respectivamente pra $\Omega = 10.725$, $\Omega = 9.75$ e $\Omega = 12.725$.

Tabela 4.5: Valores dos parâmetros e constantes utilizados no caso σ_Ω e $\delta > 0$

parâmetro	nome	valor
m_1	massa do bloco	3.30
m_2	massa de perturbação	0.002
m_3	massa do pêndulo	0.15
l	comprimento do pêndulo	1.19
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor	0.075
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco	0.00098622
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	0.234
k_1	coeficiente linear da mola	2.2
σ_{Ω_0}	parâmetro de sintonia inicial	-0.004
σ_{Ω_f}	parâmetro de sintonia final	0.0015
a_3	amplitude do pêndulo	0.09
a	coeficiente do torque	0.01
b	coeficiente do torque	0.0009
J_2	momento de inércia do disco	0.37

Figura 4.11: Curva resposta de frequência com $\delta > 0$ e $\Omega = 10.725$

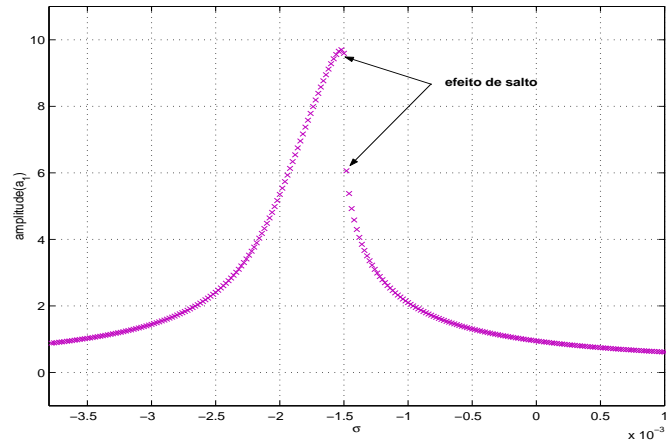


Figura 4.12: Curva resposta de frequência com $\delta > 0$ e $\Omega = 9.75$

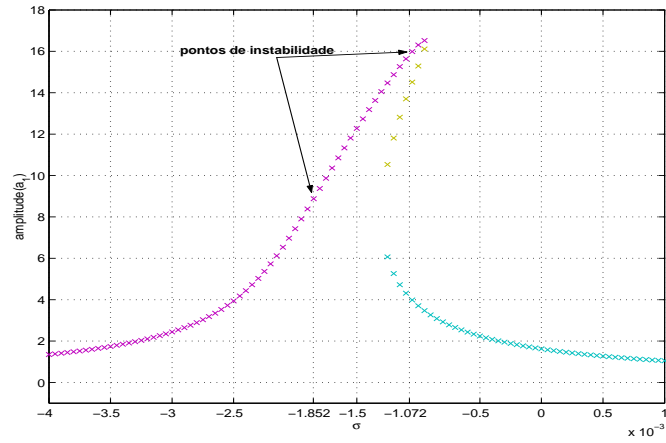


Figura 4.13: Curva resposta de frequência com $\delta > 0$ e $\Omega = 12.725$

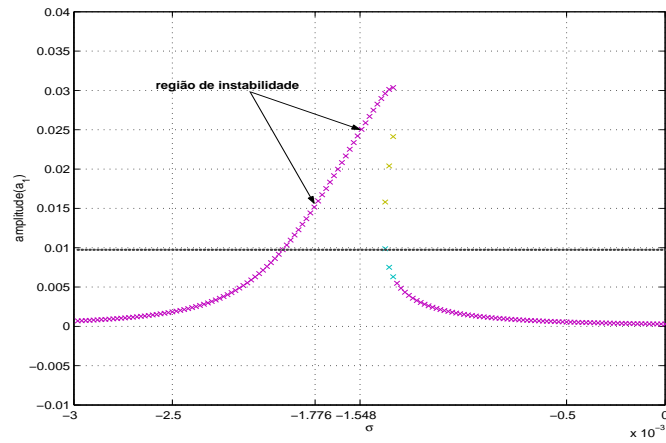


Figura 4.14: Intersecções entre as curvas $S(\sigma_\Omega)$ e M_1 constante para $\Omega = 10.725$

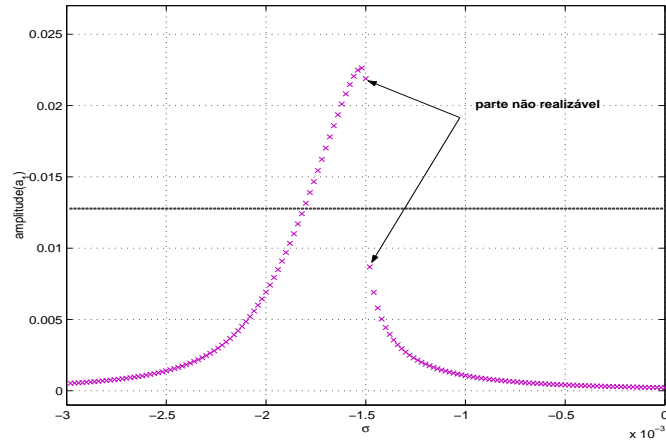


Figura 4.15: *Intersecções entre as $S(\sigma_\Omega)$ e M_1 constante para $\Omega = 9.75$*

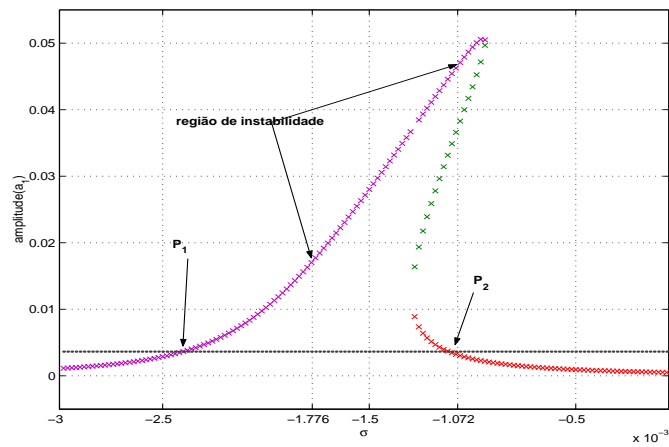


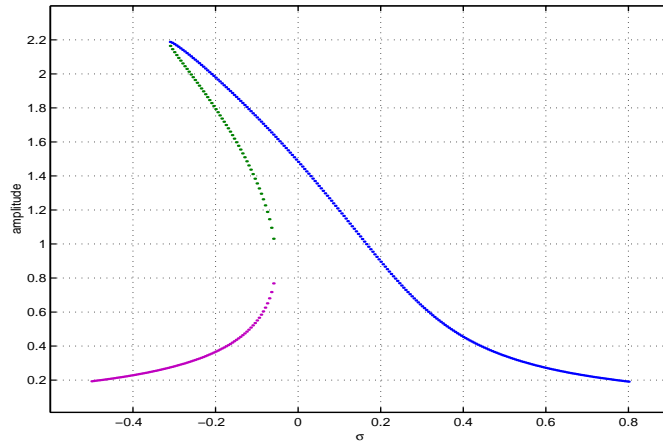
Figura 4.16: *Intersecções entre as curvas $S(\sigma_\Omega)$ e M_1 constante para $\Omega = 12.725$*

Tabela 4.6: Regiões de instabilidade no caso $\delta > 0$

Ω	intervalo em σ_Ω
10.7250	$-0.001776 < \sigma_\Omega < -0.001548$
11.75	$-0.00182 < \sigma_\Omega < -0.00156$
12.75	$-0.001852 < \sigma_\Omega < -0.001072$

4.4.5 Parâmetro de controle: parâmetro de sintonia σ_Ω e $\delta < 0$

Apresentamos o caso em que σ_Ω continua sendo o parâmetro de controle, mas agora tomamos $\delta < 0$. A figura (4.17) representa uma curva característica do sistema com essas hipóteses, com os dados apresentados na tabela (4.7).

Figura 4.17: Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 25.3$

Consideramos o torque linear com os coeficientes dados por $a = 0.19$ e $b = 0.00051$, e a cada Ω fixado, verificamos a estabilidade dos pontos da curva. Primeiramente começamos com $\Omega = 1.0$, e depois incrementamos uma unidade até $\Omega = 18.0$.

O critério R - H é sempre satisfeito para $\Omega = \{1.0; 2.0; 3.0; \dots; 13.0\}$ e, portanto, a estabilidade dos pontos fixos depende da variedade central de dimensão um associada ao sistema dinâmico. Para $\Omega \geq 13.0$, existem regiões nas quais o critério R-H não é satisfeito e, portanto regiões de instabilidade. A tabela (4.8) mostra as regiões de instabilidade para alguns valores de Ω calculados numericamente e o respectivo número de autovalores com parte real positiva.

As figuras (4.18) e (4.19) ilustram o fato acima e as figuras (4.20) e (4.21) são características do efeito de salto nas amplitudes de movimentos realizáveis.

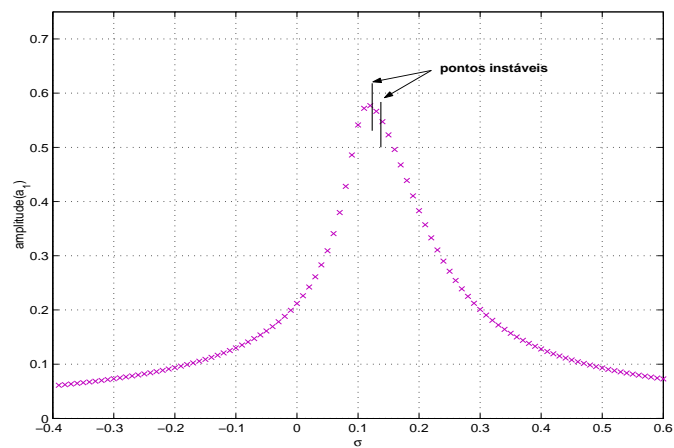


Figura 4.18: Curva de resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 13.0$

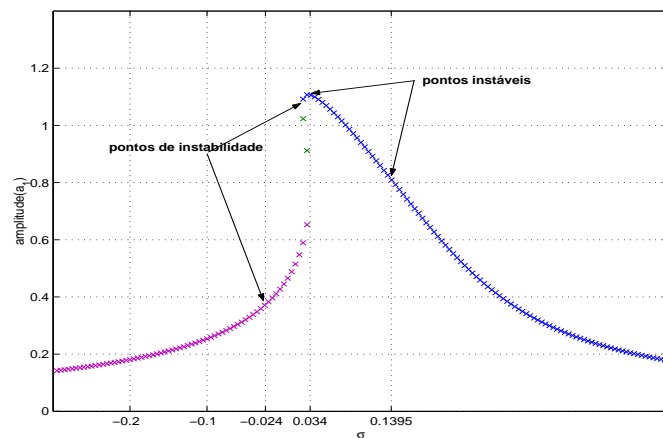


Figura 4.19: Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 18.0$

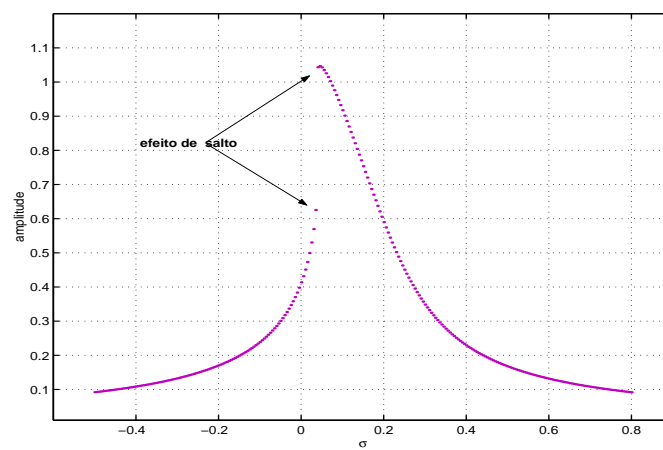


Figura 4.20: Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 17.0$

Tabela 4.7: Valores dos parâmetros e constantes utilizados no caso σ_Ω e $\delta < 0$

parâmetros	nome	valor
m_1	massa do bloco	1.30
m_2	massa de perturbação	0.01
m_3	massa do pêndulo	0.3
l	comprimento do pêndulo	1.19
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor	0.075
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco	0.8622
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	1.3234
k_1	coeficiente linear da mola	35.2
σ_0	parâmetro de sintonia inicial	-0.5
σ_f	parâmetro de sintonia final	0.80000
a_3	amplitude de oscilações do pêndulo	0.09
J_2	momento de inércia do disco	0.4

Tabela 4.8: Tabela das regiões instáveis no caso σ_Ω como parâmetro e $\delta < 0$

Ω	intervalo em σ_Ω	$\text{Re}(\lambda) > 0$
13.0	$0.124 < \sigma_\Omega < 0.1375$	1
14.0	$0.111 < \sigma_\Omega < 0.139$	1
15.0	$0.0965 < \sigma_\Omega < 0.139$	1
16.0	$0.079 < \sigma_\Omega < 0.139$	1
17.0	$0.0585 < \sigma_\Omega < 0.1395$	1
18.0	$-0.024 < \sigma_\Omega < 0.0330 \cup 0.034 < \sigma_\Omega < 0.1395$	2 e 1
19.0	$-0.0025 < \sigma_\Omega < 0.1390$	2

Oscilações forçadas só são possíveis se a equação para oscilações forçadas for satisfeita. Assim, como no caso anterior, a equação de oscilações forçadas pode ter uma raiz, duas

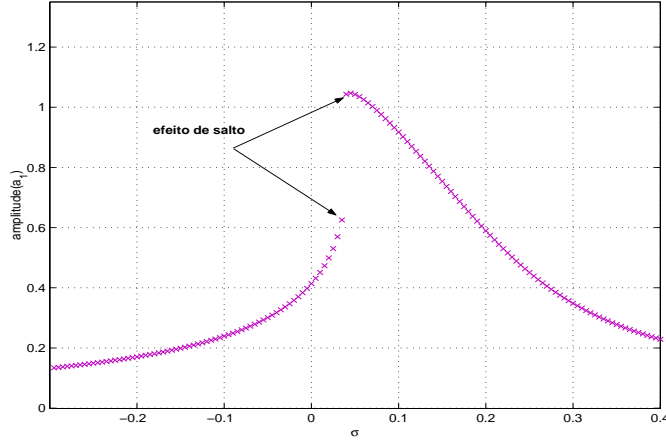


Figura 4.21: Curva resposta de frequência com $\delta < 0$ e $\Omega = 17.50$

raízes ou nenhuma. Nos casos estudados, as equações tem duas ou nenhuma solução, pois estamos considerando Ω constante. Dentre os casos apresentados nas figuras, o primeiro caso (figura 4.18) não possui raízes e o segundo caso (figura 4.19) possui uma raiz, sendo que a frequência de oscilações forçadas é instável já que se encontra dentro da região de instabilidade determinada pela aplicação do critério R-H. A intersecção da curva S e do torque linear são semelhantes ao caso anterior.

4.4.6 Outros parâmetros de controle

Parâmetro de controle: amortecimento do bloco c_1

Quando c_1 é tomado como parâmetro de controle, e mantendo todos os demais parâmetros do problema fixos, verificamos um comportamento interessante. A curva de resposta de frequência obtida é a curva refletida de resposta de frequência com Ω como parâmetro de controle. A figura (4.22) representa uma curva característica para c_1 como parâmetro de controle e os dados utilizados estão na tabela (4.9).

Da mesma forma que os outros casos, oscilações forçadas só existem se a equação de oscilações forçadas S for satisfeita. A figura (4.23) apresenta apenas uma curva característica S .

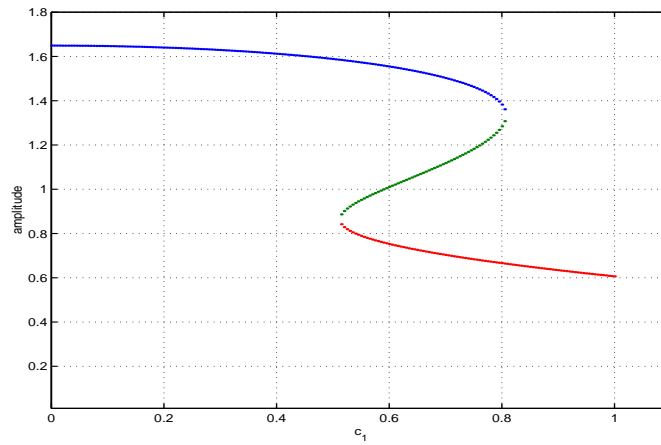


Figura 4.22: *Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle c_1 , $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$*

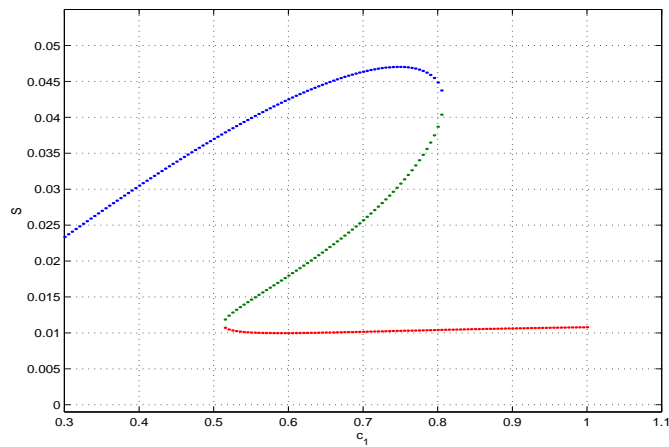


Figura 4.23: *Curva de oscilações forçadas em função do parâmetro de controle c_1 com $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$*

Tabela 4.9: Valores dos parâmetros utilizados para c_1 como parâmetro de controle, $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$

parâmetro	nome	valor
m_1	massa do bloco	0.9635
m_2	massa de perturbação	0.01
m_3	massa do pêndulo	0.135
l	comprimento do pêndulo	1.319
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor	0.09
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	0.0083234
k_1	coeficiente linear da mola	17.2
Ω	frequência Ω de rotação	20.3420
σ_Ω	parâmetro de sintonia	-0.0987601
c_{10}	coeficiente de amortecimento inicial do bloco	0.0
c_{1f}	coeficiente de amortecimento final do bloco	1.0
a_3	amplitude de oscilação do pêndulo	0.09
a	coeficiente do torque	0.2
J_2	momento de inércia do disco	0.37

Parâmetro de controle: massa perturbadora m_2

Para o caso em que m_2 é tomado como parâmetro de controle, obtemos uma curva idêntica àquela quando se considera Ω como parâmetro de controle. A figura (4.24) representa uma curva característica e os dados utilizados estão na tabela (4.10).

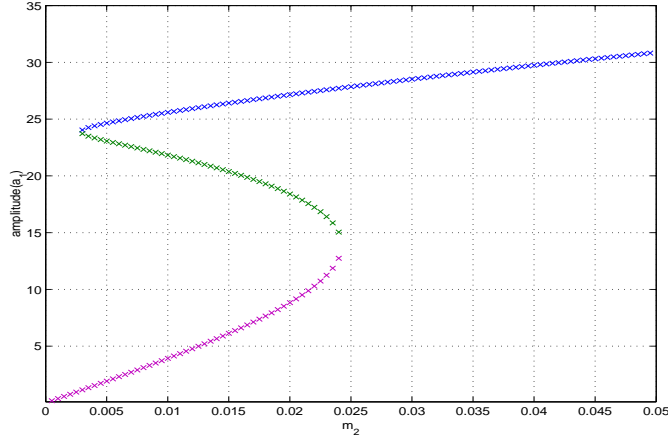


Figura 4.24: Curva resposta de frequência em função do parâmetro de controle m_2 com $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$

Nas seções acima desenvolvemos o estudo do sistema nos estados estacionários para a condição sem ressonância entre o pêndulo e o bloco, mas com ressonância primária entre o motor e o bloco. Notamos que o sistema é rico em efeitos dinâmicos, o que possibilita estudos mais aprofundados do assunto com uso de ferramentas mais poderosas como, teoria de perturbações e abordagens numéricas das condições não estacionárias, utilizando as equações médias seguindo o exemplo do estudo feito por Kononenko ([26]), a simulação direta das equações do sistema e o cálculo da variedade central associada, assim como cálculos de termos de ordem superior para aproximação da solução analítica. Nesta dissertação estudamos apenas um dos casos encontrados, já que o estudo de todos os outros casos demanda um tempo muito grande, mas pode ser continuado em estudos posteriores. Além disso, o método da média proporciona subsídios para simulações do sistema original de equações do pêndulo eletromecânico e, portanto, podemos abordar numericamente o problema baseando-se nos resultados das equações médias aqui obtidas.

A seguir apresentamos as equações médias com as outras ressonâncias internas do sistema, ou seja, apresentamos os casos em que o sistema apresenta ressonâncias primárias entre o bloco e o motor, e ressonâncias secundárias entre o bloco e o pêndulo.

Tabela 4.10: Valores dos parâmetros para m_2 como parâmetro de controle, $\delta < 0$ e $\sigma_\Omega < 0$

parâmetro	nome	valor
m_1	massa do bloco	2.850
m_3	massa do pêndulo	0.15
l	comprimento do pêndulo	1.19
R	raio de rotação do motor	0.075
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco	0.0009986
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	0.3234
k_1	coeficiente linear da mola	1.75
σ_Ω	parâmetro de sintonia	-0.000990122
Ω	frequência Ω rotação	13.1
m_{20}	massa de perturbação inicial	0.00001
m_{2f}	massa de perturbação final	0.099
J_2	momento de inércia do disco	0.37
a_3	amplitude do pêndulo	0.009

4.5 Ressonancias secundárias

4.5.1 $\omega_3 \approx 0$

Considerando o sistema de equações (4.75) a (4.77) que descrevem as modulações de amplitude e fase, precisamos verificar quais termos são de variação lenta e quais termos são de variação rápida. Para isso precisamos expressar a proximidade entre a frequência ω_3 e zero introduzindo o parâmetro de sintonia $\omega_3 = \epsilon\sigma_3$.

Procedendo igualmente no caso sem ressonancia, ou seja, analisando quais funções são de variação lenta, obtemos que a média das equações, em primeira aproximação, é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \dot{a}_1 \rangle &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{4\gamma} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta] \sin(2\epsilon\sigma_3\tau + 2\beta_3) \\
\langle \dot{\beta}_1 \rangle &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2}{2\gamma} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma a_1} \cos \beta_1 \\
&\quad - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{4\gamma} [[a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^2 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] - a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta \cos(2\epsilon\sigma_3\tau + 2\beta_3)] \\
\langle \dot{\Omega} \rangle &= \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2} \sin(-\beta_1)] \\
\langle \dot{a}_3 \rangle &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 [1 - \cos(2\epsilon\sigma_3\tau + 2\beta_3)] \\
\langle \dot{\beta}_3 \rangle &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} \sin(2\epsilon\sigma_3\tau + 2\beta_3)
\end{aligned} \tag{4.125}$$

Nas equações médias acima, o tempo τ aparece explicitamente, e portanto o sistema é não autônomo. Para transformá-lo em sistema autônomo, introduzimos uma nova variável dependente v_3 definida por

$$v_3 = 2\epsilon\sigma_3\tau + 2\beta_3 \tag{4.126}$$

Assim

$$\dot{v}_3 = 2\epsilon\sigma_3 + 2\dot{\beta}_3 \tag{4.127}$$

Logo, podemos reescrever o sistema de equações como segue

$$\begin{aligned}
\langle \dot{a}_1 \rangle &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{4\gamma} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta] \sin v_3 \\
\langle \dot{\beta}_1 \rangle &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1^2}{2\gamma} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma a_1} \cos \beta_1 \\
&\quad - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{4\gamma} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^2 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] - a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta \cos v_3 \\
\langle \dot{\Omega} \rangle &= \epsilon [M_1(\Omega) + \hat{p}_3 \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2} \sin \beta_1] \\
\langle \dot{a}_3 \rangle &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 [1 - \cos v_3] \\
\langle \dot{v}_3 \rangle &= 2\epsilon \sigma_3 - \epsilon \hat{\mu}_3 \sin v_3
\end{aligned} \tag{4.128}$$

As figuras (4.25) a (4.29) mostram as variações de amplitudes e fases do sistema pêndulo eletromecânico com condição de ressonância $\omega_3 \approx 0$ obtidas por integração numérica. Inicialmente, a_1 , β_1 e Ω oscilam com τ , mas à medida que τ cresce esses elementos tendem a valores contantes.

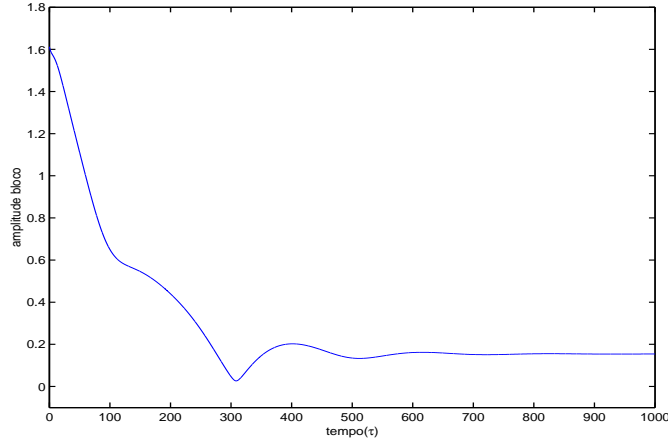


Figura 4.25: Variação de a_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$

Quando esses valores constantes são não nulos, as oscilações livres são periódicas. Os estados estacionários foram obtidos usando as seguintes condições iniciais

$$a_1(0) = 1.61270; \quad \beta_1(0) = 0.030; \quad \Omega(0) = 0.0; \quad a_3(0) = 2.310; \quad \beta_3(0) = 0.0.$$

Os parâmetros utilizados na integração numérica estão dados na tabela (4.11).

Como $a_1, \beta_1, \Omega, a_3$ e β_3 são constantes no estado estacionário, então as derivadas que descrevem as modulações de amplitude e fase são nulas, e portanto transformamos o sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas não lineares dado por

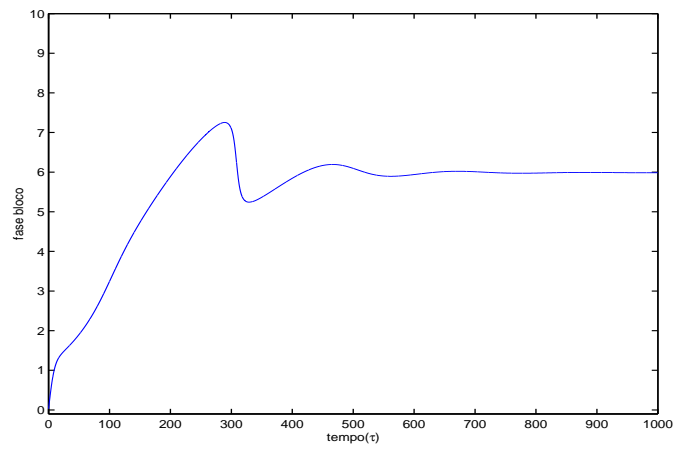


Figura 4.26: Variação de β_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$

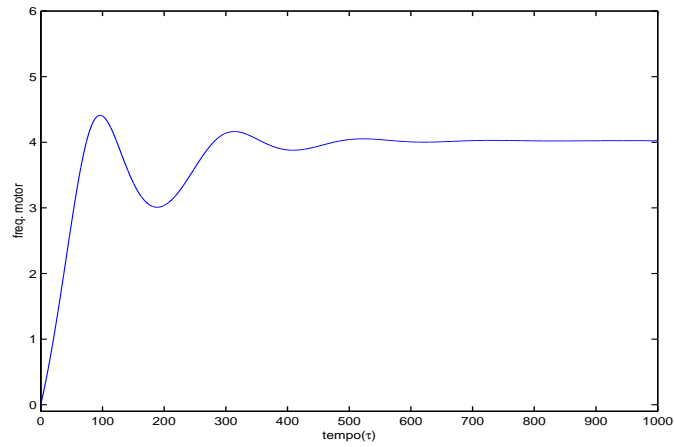


Figura 4.27: Variação de Ω em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$

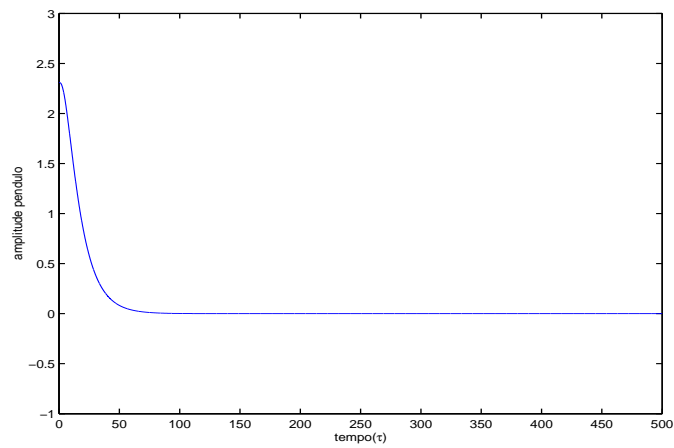


Figura 4.28: Variação de a_3 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$

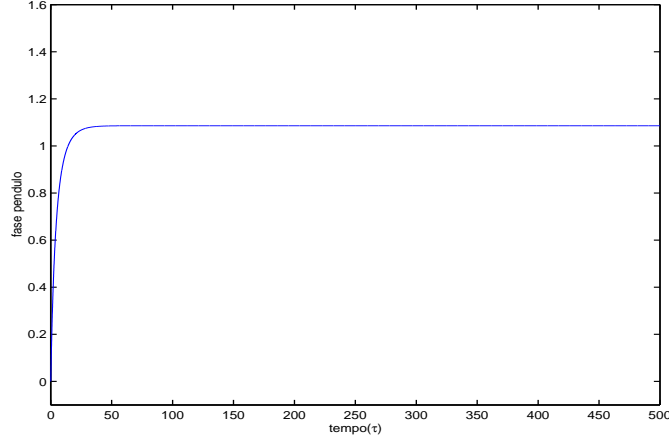


Figura 4.29: Variação de β_3 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 0$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\epsilon}{2\gamma}[\hat{p}_2\Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{4\gamma}[a_3^2 \omega_3 a_1 \delta] \sin v_3 = 0 \\
 & -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \\
 & -\epsilon \frac{\hat{m}_3}{4\gamma}[[a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^2 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] - a_3^2 \omega_3^2 a_1 \delta \cos v_3] = 0 \\
 & \epsilon[M_1(\Omega) + \hat{p}_3 \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2} \sin \beta_1] = 0 \\
 & -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 [1 - \cos v_3] = 0 \\
 & 2w_3 - \epsilon \hat{\mu}_3 \sin v_3 = 0
 \end{aligned} \tag{4.129}$$

Resolvendo o sistema de equações (4.129) obtemos as regiões onde são possíveis os estados estacionários.

4.5.2 $\omega_3 \approx 3$

Neste caso estamos considerando que $\omega_3 \approx 3$. Introduzindo o parâmetro de sintonia, temos

$$\omega_3 = 3 + \epsilon \sigma_3$$

Como $\Omega = 1 + \epsilon \sigma_\Omega$, então $\omega_3 - 3\Omega = \epsilon(3\sigma_\Omega - \sigma_3)$ é pequeno. Logo, os termos de variação lenta são aqueles cujo argumento são dados pela diferença $\omega_3 - 3\Omega$. Portanto, as equações que descrevem as modulações de amplitude e fase, em primeira aproximação, são dados por

Tabela 4.11: *Valores dos parâmetros e constantes utilizados para $\omega_3 \approx 0$*

parâmetro	nome	valor
a	coeficiente do torque	0.9409
b	coeficiente do torque	0.00987655
σ_Ω	parâmetro de sintonia	0.0001999
m_1	massa do bloco	1.80398
m_2	massa de perturbação	0.013
m_3	massa do pêndulo	0.1
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco	0.6781
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	0.896
k_1	coeficiente linear da mola	940
l	comprimento do pêndulo	1.170
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor	0.09
J_2	momento de inércia do disco	0.043975
a_3	amplitude do pêndulo	0.009

$$\begin{aligned}
\langle \dot{a}_1 \rangle &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[\frac{a_1^2 \delta^2 a_3}{8} \sin((3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3 \omega_3 a_1^2 \delta}{4} \sin((3\Omega - \omega_3)\tau + (\beta_1 - \beta_3)) \right] \\
\langle \dot{\beta}_1 \rangle &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \\
&\quad - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[-\frac{a_1^2 \delta^2 \omega_1^3 a_3}{8} \cos((3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^3 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] + [\frac{a_3 \omega_3^2 a_1^2 \delta}{4}] \cos((3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)) \right]
\end{aligned} \tag{4.130}$$

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = \epsilon [M_1(\Omega) + \hat{p}_3 \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2} \sin \beta_1]$$

$$\langle \dot{a}_3 \rangle = -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 \tag{4.131}$$

$$\langle \dot{\beta}_3 \rangle = 0$$

As figuras (4.30) a (4.32) mostram as variações de amplitudes e fases do sistema pêndulo eletromecânico, na ressonância $\omega_3 \approx 3$, com condições iniciais dadas por

$a_1(0) = 1.7640$; $\beta_1(0) = 3.8052$; $\Omega(0) = 0.0$; $a_3(0) = 4.01$; $\beta_3(0) = .0340$. Os parâmetros de integração utilizados estão dados na tabela (4.12).

Inicialmente, conforme o tempo τ cresce as amplitudes e fases do sistema decrescem e oscilam, mas à medida que o tempo τ aumenta esses elementos tendem a valores constantes.

Quanto a frequência de rotação do motor, ela cresce rapidamente com o aumento do tempo, mas logo em seguida começa a oscilar e tende a um valor constante. Além disso, verificamos diretamente que a amplitude e fase do pêndulo atingem valores estacionários.

Nas equações acima, o tempo τ aparece explicitamente, e portanto o sistema é não autônomo. Para transformá-lo em sistema autônomo, introduzimos uma nova variável dependente v_3 definida por

$$v_3 = (3\Omega - \omega_3)\tau + (3\beta_1 - \beta_3)$$

Assim,

$$\dot{v}_3 = -\epsilon(\sigma_3 - 3\sigma_\Omega) + 3\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_3$$

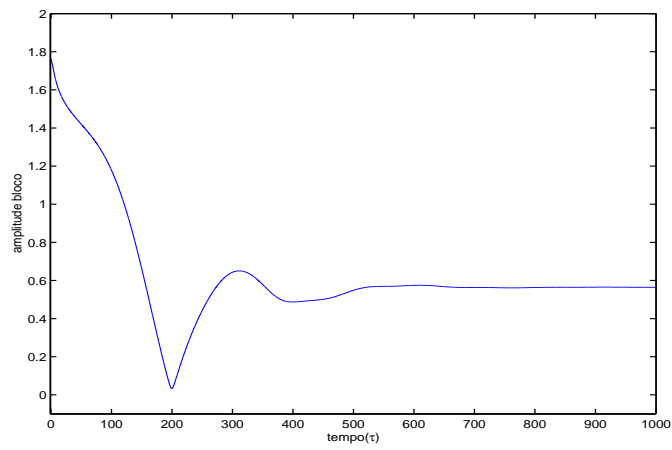


Figura 4.30: Variação de a_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 3$

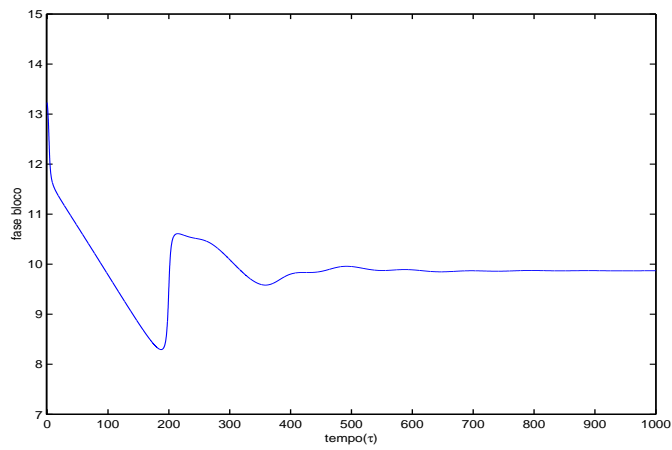


Figura 4.31: Variação de β_1 em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 3$

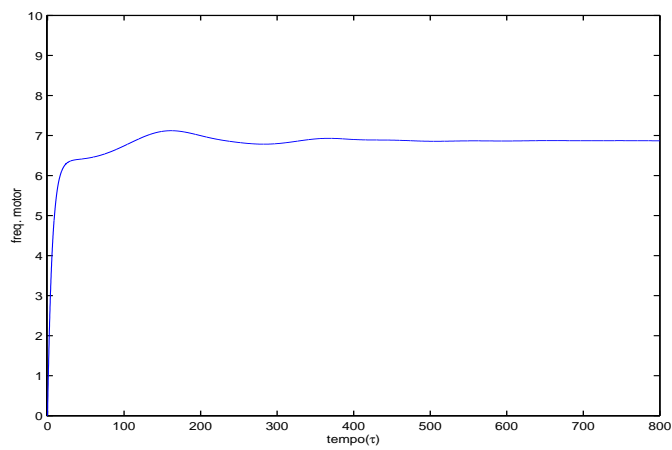


Figura 4.32: Variação de Ω em função de τ na ressonância $\omega_3 \approx 3$

Tabela 4.12: Valores dos parâmetros e constantes utilizados para $\omega_3 \approx 3$

parâmetro	nome	valor
a	coeficiente do torque	0.0994012
b	coeficiente do torque	0.00897655
σ_Ω	parâmetro de sintonia	0.01234
m_1	massa do bloco	6.09370
m_2	massa de perturbação	0.02
m_3	massa do pêndulo	0.73
c_1	coeficiente de amortecimento do bloco	0.1987
c_3	coeficiente de atrito do pêndulo	0.003123
k_1	coeficiente linear da mola	17.45
l	comprimento do pêndulo	0.4350
R	distância da massa m_2 ao eixo do motor	0.07543
J_2	momento de inércia do disco	0.0375
a_3	amplitude do pêndulo	0.009

Logo, as equações médias podem ser escritas como segue

$$\begin{aligned}
\langle \dot{a}_1 \rangle &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[\frac{a_1^2 \delta^2 a_3}{8} \sin v_3 + \frac{a_3 \omega_3 a_1^2 \delta}{4} \sin v_3 \right] \\
\langle \dot{\beta}_1 \rangle &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[-\frac{a_1^2 \delta^2 \omega_1^3 a_3}{8} \cos v_3 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^3 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] + [\frac{a_3 \omega_3^2 a_1^2 \delta}{4}] \cos v_3 \right] \\
\langle \dot{\Omega} \rangle &= \epsilon [M_1(\Omega) + \hat{p}_3 \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2} \sin \beta_1]
\end{aligned} \tag{4.132}$$

$$\begin{aligned}
\langle \dot{a}_3 \rangle &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 \\
\langle \dot{\beta}_3 \rangle &= -\epsilon (\sigma_3 - 3\sigma_\Omega) + 3 \left[-\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \right. \\
&\quad \left. - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[-\frac{a_1^2 \delta^2 \omega_1^3 a_3}{8} \cos v_3 + \frac{1}{4} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^3 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] + [\frac{a_3 \omega_3^2 a_1^2 \delta}{4}] \cos v_3 \right] \right]
\end{aligned}$$

Levando em consideração que as derivadas são nulas para os estados estacionários temos o seguinte conjunto de equações algébricas

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[\frac{a_1^2 \delta^2 a_3}{8} \sin v_3 + \frac{a_3 \omega_3 a_1^2 \delta}{4} \sin v_3 \right] \\
0 &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[-\frac{a_1^2 \delta^2 \omega_1^3 a_3}{8} \cos v_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^3 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] + [\frac{a_3 \omega_3^2 a_1^2 \delta}{4}] \cos v_3 \right] \\
0 &= \epsilon [M_1(\Omega) + \hat{p}_3 \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2} \sin \beta_1] \\
0 &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 \\
0 &= -\epsilon (\sigma_3 - 3\sigma_\Omega) + 3 \left[-\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \right. \\
&\quad \left. - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[-\frac{a_1^2 \delta^2 \omega_1^3 a_3}{8} \cos v_3 + \frac{1}{4} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^3 \delta^3 \omega_1^2 - \frac{a_1^3 \delta^3 \omega_1^2}{2}] + [\frac{a_3 \omega_3^2 a_1^2 \delta}{4}] \cos v_3 \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.133}$$

Analogamente aos casos anteriores o estudo dos estados estacionários pode ser confinado ao estudo do conjunto de equações algébricas definido acima.

4.5.3 $\omega_3 \approx \frac{1}{3}$

Para expressar a proximidade de ω_3 com $1/3$, introduzimos o parâmetro de sintonia

$$3\omega_3 = 1 + \epsilon\sigma_3$$

Logo os termos que possuem argumento na forma $3\omega_3 - \Omega = \epsilon(\sigma_3 - \sigma_\Omega)$ ou $\Omega - 3\omega_3 = \epsilon(\sigma_\Omega - \sigma_3)$ são pequenas quantidades de ϵ , e portanto variam lentamente. Deste modo, temos as equações médias descrevendo as variações de amplitudes e fases do sistema, e dadas por

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{\epsilon}{2\gamma}[\hat{p}_2\Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{2\gamma} \sin((3\omega_3 - \Omega)\tau + (3\beta_3 - \beta_1)) \\ \langle \dot{\beta}_1 \rangle &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3\delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3\delta\omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2\Omega^2}{2\gamma_1 a_1} \cos \beta_1 \\ &\quad - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{a_1\gamma} \left[-\frac{a_3^3\omega_3^2}{4} \cos((3\omega_3 - \Omega)\tau + (3\beta_3 - \beta_1)) + \frac{1}{4}[a_3^2\omega_3 a_1\delta + a_3^2\delta^3\omega_1 - \frac{a_1^2\delta^3\omega_1^2}{2}] \right] \\ \langle \dot{\Omega} \rangle &= \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 \frac{a_1\omega_1\Omega}{2} \sin(-\beta_1)] \\ \langle \dot{a}_3 \rangle &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 \\ \langle \dot{\beta}_3 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.134)$$

Nas equações médias (4.134) acima, o tempo τ aparece explicitamente, e portanto o sistema é não autônomo. Para transformá-lo em sistema autônomo, introduzimos uma nova variável dependente v_3 definida por

$$v_3 = (3\omega_3 - \Omega)\tau + (3\beta_3 - \beta_1) \quad (4.135)$$

Assim

$$\dot{v}_3 = (3\omega_3 - \Omega) + 3\dot{\beta}_3 - \dot{\beta}_1 = \epsilon(\sigma_3 - \sigma_\Omega) + 3\dot{\beta}_3 - \dot{\beta}_1 \quad (4.136)$$

Logo, as equações podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\langle \dot{a}_1 \rangle &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} [\hat{p}_2 \Omega^2 \sin \beta_1 + \hat{\mu}_1 a_1] - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{2\gamma} \sin v_3 \\
\langle \dot{\beta}_1 \rangle &= -\epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} + \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} - \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma a_1} \cos \beta_1 \\
&\quad - \epsilon \frac{\hat{m}_3}{a_1 \gamma} \left[-\frac{a_3^3 \omega_3^2}{4} \cos v_3 + \frac{1}{4} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^2 \delta^3 \omega_1 - \frac{a_1^2 \delta^3 \omega_1^2}{2}] \right] \\
\langle \dot{\Omega} \rangle &= \epsilon [M_1(\Omega) - \hat{p}_3 \frac{a_1 \omega_1 \Omega}{2} \sin(-\beta_1)] \\
\langle \dot{a}_3 \rangle &= -\epsilon \frac{\hat{\mu}_3}{2} a_3 \\
\langle \dot{v}_3 \rangle &= \epsilon (\sigma_3 - \sigma_\Omega) + \epsilon \frac{(\alpha_1 + \hat{m}_3 \delta)}{\gamma} - \epsilon \frac{\hat{m}_3 \delta \omega_1}{2\gamma_1} + \epsilon \frac{\hat{p}_2 \Omega^2}{2\gamma a_1} \cos \beta_1 \\
&\quad + \epsilon \frac{\hat{m}_3}{\gamma} \left[-\frac{a_3^3 \omega_3^2}{4} \cos v_3 + \frac{1}{4} [a_3^2 \omega_3 a_1 \delta + a_3^2 \delta^3 \omega_1 - \frac{a_1^2 \delta^3 \omega_1^2}{2}] \right].
\end{aligned} \tag{4.137}$$

Analogamente aos outros casos podemos procurar as equações que descrevem os estados estacionários, obter gráficos e efetuar a análise da estabilidade dos pontos fixos. Para estados não estacionários precisamos integrar o conjunto de equações médias obtidas.

Capítulo 5

Método das múltiplas escalas

Neste capítulo, vamos aplicar o método das múltiplas escalas nas equações do sistema pêndulo eletromecânico para obter uma solução analítica aproximada livre de termos seculares mistos e pequenos divisores. O método das múltiplas escalas tem a vantagem de que podemos trabalhar com notação complexa, o que torna mais claro e concisa as manipulações algébricas associado ao fato de possibilitar fazer a análise dos casos de ressonâncias internas que ocorrem no sistema.

Na aplicação do método das múltiplas escalas vamos precisar analisar os diversos casos de ressonâncias existentes no sistema e, por isso, precisamos determinar os termos seculares e os termos que geram pequenos divisores. Termos que geram pequenos divisores dominam a solução do sistema e termos seculares tornam as soluções inválidas depois de um certo intervalo de tempo. Para a determinação de termos seculares e pequenos divisores encontramos a expansão direta da solução em série de potências de ϵ .

5.1 Método da expansão direta

Na aplicação do método da expansão direta, assim como no método das múltiplas escalas vamos considerar os mesmos parâmetros utilizados na aplicação do método da média, exceto o torque $\hat{M}(\dot{\varphi}) = \frac{1}{I\omega^2}(\alpha - b\omega\Omega)$, com $I = (m_2R^2 + J_2)$, que não será considerado como uma pequena perturbação. Então as equações de movimento ficam

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \epsilon \hat{\mu}_1 \dot{u} + u &= \epsilon [\hat{p}_2 \ddot{\varphi} \sin \varphi + \hat{p}_2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] + \epsilon \hat{m}_3 [\dot{\theta}^2 \theta - \ddot{\theta}] \\ \ddot{\varphi} &= \hat{M}(\dot{\varphi}) + \epsilon \hat{p}_3 \ddot{u} \sin \varphi - \epsilon \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\ddot{\theta} + \epsilon \hat{\mu}_3 \dot{\theta} + \omega_3^2 \theta = -\ddot{u}$$

Consideramos que u_0 , φ_0 e θ_0 são as soluções do sistema quando $\epsilon = 0$. Quando $\epsilon \neq 0$ mas $\epsilon \ll 1$ as soluções devem ser aproximadamente as mesmas de u_0, φ_0 e θ_0 , mas correções devem ser adicionadas. Portanto escrevemos as soluções como séries de potências de ϵ , isto é,

$$\begin{aligned} u(\tau; \epsilon) &= u_0(\tau) + \epsilon u_1(\tau) + O(\epsilon^2) \\ \varphi(\tau; \epsilon) &= \varphi_0(\tau) + \epsilon \varphi_1(\tau) + O(\epsilon^2) \\ \theta(\tau; \epsilon) &= \theta_0(\tau) + \epsilon \theta_1(\tau) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Assim, as derivadas são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{u}(\tau; \epsilon) &= \dot{u}_0(\tau) + \epsilon \dot{u}_1(\tau) + O(\epsilon^2) \\ \dot{\varphi}(\tau) &= \dot{\varphi}_0(\tau) + \epsilon \dot{\varphi}_1(\tau) + O(\epsilon^2) \\ \dot{\theta}(\tau; \epsilon) &= \dot{\theta}_0(\tau) + \epsilon \dot{\theta}_1(\tau) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\tau; \epsilon) &= \ddot{u}_0(\tau) + \epsilon \ddot{u}_1(\tau) + O(\epsilon^2) \\ \ddot{\varphi}(\tau; \epsilon) &= \ddot{\varphi}_0(\tau) + \epsilon \ddot{\varphi}_1(\tau) + O(\epsilon^2) \\ \ddot{\theta}(\tau; \epsilon) &= \ddot{\theta}_0(\tau) + \epsilon \ddot{\theta}_1(\tau) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Substituindo (5.2), (5.3) e (5.4) em (5.1), expandindo seno e cosseno em torno de $\epsilon = 0$, e agrupando termos de mesma ordem de grandeza de ϵ , temos

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + u_0 &= 0 \\ \epsilon^0 : \ddot{\varphi}_0 + \frac{b}{I\omega} \varphi_0 &= \frac{\alpha}{I\omega^2} \\ \ddot{\theta}_0 + \omega_3^2 \theta_0 &= -\ddot{u}_0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 &= Q_2 - \hat{\mu}_1 \dot{u}_0 + \hat{m}_3 [\dot{\theta}_0^2 \theta_0 - \ddot{\theta}_0] \\ \epsilon^1 : \quad \ddot{\varphi}_1 + \frac{b}{I\omega} \dot{\varphi}_1 &= \hat{p}_3 \ddot{u}_0 \sin \varphi_0 - \hat{p}_4 \frac{g}{w^2} \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_3^2 \theta_1 = -\ddot{u}_1 - \hat{\mu}_3 \dot{\theta}_0$$

com

$$Q_2 = Q_2(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0) = \hat{p}_2 \ddot{\varphi}_0 \sin \varphi_0 + \hat{p}_2 \dot{\varphi}_0^2 \cos \varphi_0. \quad (5.7)$$

Resolvendo o sistema (5.5) temos

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= a_1 \cos(\tau + \beta_1) \\ \varphi_0(\tau) &= A_2 + B_2 \exp\left(-\frac{b}{I\omega}\tau\right) + \frac{\alpha}{b\omega}\tau \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\theta_0(\tau) = a_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \Lambda \cos(\tau + \beta_1)$$

com $\Lambda = 1/(\omega_3^2 - 1)$ e $a_1, \beta_1, A_2, B_2, a_3, \beta_3$ constantes arbitrárias. Para obter uma solução aproximada de ordem ϵ^1 , precisamos resolver o sistema dado em (5.6), então seguimos o exemplo de Nayfeh ([29]) e desconsideramos as soluções homogêneas de todas as ordens exceto ϵ^0 e consideramos as constantes arbitrárias determinadas na aproximação de ordem ϵ^0 pelas condições iniciais.

Levando (5.8) em (5.6), e tratando cada equação separadamente, temos

Equação do bloco

$$\ddot{u}_1 + u_1 = Q_2(\tau) - \hat{\mu}_1 \dot{u}_0 + \hat{m}_3 [\dot{\theta}_0^2 \theta_0 - \ddot{\theta}_0] \quad (5.9)$$

Substituindo u_0, φ_0 e θ_0 , juntamente com suas respectivas derivadas, temos

$$\begin{aligned} Q_2(\tau) &= \hat{p}_2 \left[B_2 \left(\frac{b}{I\omega} \right)^2 \exp\left(-\frac{b}{I\omega}\tau\right) \sin\left(A_2 + B_2 \exp\left(-\frac{b}{I\omega}\tau\right) + \frac{\alpha}{I\omega}\tau\right) \right] \\ &+ \left(B_2 \frac{b}{I\omega} \exp\left(-\frac{b}{I\omega}\tau\right) + \frac{\alpha}{b\omega} \right)^2 \cos\left(A_2 + B_2 \exp\left(-\frac{b}{I\omega}\tau\right) + \frac{\alpha}{I\omega}\tau\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

e

$$\begin{aligned}
-\hat{\mu}_1 \dot{u}_0 + \hat{m}_3 \left[\dot{\theta}_0^2 \theta_0 - \ddot{\theta}_0 \right] = & F_1 \cos \phi_3 + F_2 \cos 3\phi_3 + F_3 \cos(2\phi_3 - \phi_1) + \\
& F_4 \cos(2\phi_3 + \phi_1) + F_5 \cos(2\phi_1 + \phi_3) + F_6 \cos(2\phi_1 - \phi_3) + F_7 \cos \phi_1 + \\
& F_8 \cos(2\phi_3 + \phi_1) + F_9 \cos(2\phi_3 - \phi_1) + F_{10} \cos(2\phi_1 - \phi_3) + \\
& F_{11} \cos(2\phi_1 + \phi_3) + F_{12} \cos 3\phi_1 + F_{13} \cos \phi_1 + F_{14} \sin \phi_1 + F_{15} \cos \phi_1
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
F_1 &= \hat{m}_3 \left[\frac{a_3^3 \omega_3^2}{4} + \frac{a_1^2 \Lambda^2 \omega_1^2 a_3}{2} \right] & F_2 &= -\hat{m}_3 \frac{a_3^3 \omega_3^2}{4} \\
F_3 &= \hat{m}_3 \frac{a_3^2 \omega_3 a_1 \Lambda}{2} & F_4 &= -F_3 \\
F_5 &= -\hat{m}_3 \frac{a_1 \Lambda^2 \omega_1 a_3}{4} & F_6 &= F_5 \\
F_7 &= \hat{m}_3 \left[\frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \Lambda}{2} + \frac{a_1^3 \Lambda^3 \omega_1^2}{2} \right] & F_8 &= -\hat{m}_3 \frac{a_3^2 \omega_3^2 a_1 \Lambda}{4} \\
F_9 &= F_8 & F_{10} &= \hat{m}_3 \frac{a_3 \omega_3 a_1^2 \Lambda}{2} \\
F_{11} &= -F_{10} & F_{12} &= -\hat{m}_3 \frac{a_1^3 \Lambda^3 \omega_1}{4} \\
F_{13} &= \hat{m}_3 a_3 \omega_3^2 & F_{14} &= \hat{m}_3 a_1 \Lambda \\
F_{15} &= \hat{\mu}_1 a_1 \\
\phi_1 &= \tau + \beta_1 & \phi_3 &= \omega_3 + \beta_3
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Como a equação (5.9) é linear, podemos aplicar o princípio da superposição e determinar uma solução particular como soma de soluções correspondentes aos termos não homogêneos.

Uma solução particular de (5.9) é dada por

$$u_{1p} = \sum_{j=1}^{16} u_{1pj} \tag{5.12}$$

com

$$\begin{aligned}
u_{1p1} &= \frac{F_1}{1 - \omega_3^2} \cos \phi_3 \\
u_{1p2} &= \frac{F_2}{1 - (3\omega_3^2)} \cos(3\phi_3) \\
u_{1p3} &= \frac{F_3}{1 - (2\omega_3 - 1)^2} \cos(2\phi_3 - \phi_1) \\
u_{1p4} &= \frac{F_4}{1 - (2\omega_3 + 1)^2} \cos(2\phi_3 + \phi_1) \\
u_{1p5} &= \frac{F_5}{1 - (2 + \omega_3)^2} \cos(2\phi + \phi_3) \\
u_{1p6} &= \frac{F_6}{1 - (2 - \omega_3)^2} \cos(2\phi_1 - \phi_3) \\
u_{1p7} &= \frac{F_7}{2} \tau \sin(\phi_1) \\
u_{1p8} &= \frac{F_8}{1 - (2\omega_3 + 1)^2} \cos(2\phi_3 + \phi_1) \\
u_{1p9} &= \frac{F_9}{1 - (2\omega_3 - 1)^2} \cos(2\phi_3 - \phi_1) \\
u_{1p10} &= \frac{F_{10}}{1 - (2 - \omega_3)^2} \cos(2\phi_1 - \phi_3) \\
u_{1p11} &= \frac{F_{11}}{1 - (2 + \omega_3)^2} \cos(2\phi_1 + \phi_3) \\
u_{1p12} &= \frac{F_{12}}{1 - 3^2} \cos(3\phi_1) \\
u_{1p13} &= \frac{F_{13}}{1 - \omega_3^2} \cos \phi_3 \\
u_{1p14} &= \frac{F_{14}}{2} \tau \sin \phi_1 \\
u_{1p15} &= -\frac{F_{15}}{2} \tau \cos \phi_1 \\
u_{1p16} &= v_1(\tau) \cos(\tau + v_2(\tau))
\end{aligned} \tag{5.13}$$

com v_1 e v_2 obtidos pela aplicação do método da variação dos parâmetros e dados por

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= -Q_2(\tau) \sin(\tau + v_2(\tau)) \\
v_1 \dot{v}_2 &= -Q_2(\tau) \cos(\tau + v_2(\tau))
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Equação do motor

Vamos resolver a equação do motor

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{b}{I\omega} \dot{\varphi}_1 = \hat{p}_3 \ddot{u}_0 \sin \varphi_0 - \hat{p}_4 \frac{g}{w^2} \cos \varphi_0 \quad (5.15)$$

Substituindo as soluções u_0 e φ_0 dadas em (5.8) na equação (5.15), temos

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{I\omega} \dot{\varphi}_1 = -\hat{p}_3 a_1 \cos \phi_1 \sin \varphi_0 - \hat{p}_4 \frac{g}{w^2} \cos \varphi_0. \quad (5.16)$$

Para determinar uma solução particular utilizaremos o método da variação dos parâmetros ([1]). Um conjunto fundamental para a equação homogênea é dado por $\{1, \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau)\}$ e, portanto, a solução da equação não - homogênea é da forma

$$\varphi_{1p} = C_2 + D_2 \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau), \quad (5.17)$$

com a derivada dada por

$$\dot{\varphi}_{1p} = -D_2 \frac{b}{I\omega} \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau). \quad (5.18)$$

Logo uma solução da equação não homogênea é dada por

$$\varphi_{1p} = C_2(\tau) + D_2(\tau) \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau), \quad (5.19)$$

onde $C_2(\tau)$ e $D_2(\tau)$ são funções a serem determinadas. Derivando a equação acima e levando em conta a dependência de τ , as condições do método da variação dos parâmetros nos leva a

$$\dot{C}_2(\tau) + \dot{D}_2(\tau) \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau) = 0. \quad (5.20)$$

Derivando novamente e substituindo na equação obtemos

$$\begin{aligned} \dot{C}_2(\tau) + \dot{D}_2(\tau) \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau) &= 0; \\ \dot{D}_2(\tau) &= \frac{I\omega}{b} \exp(\frac{b}{I\omega}\tau) [\hat{p}_2 a_1 \cos(\tau + \beta_1) \sin(A_2 + B_2 \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau) + \frac{\alpha}{b\omega}\tau) \\ &+ \frac{\hat{p}_4 g}{\omega^2} \cos(A_2 + B_2 \exp(-\frac{b}{I\omega}\tau) + \frac{\alpha}{b\omega}\tau)]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Equação do pêndulo

Vamos resolver a equação do pêndulo

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_3^2 \theta_1 = -\ddot{u}_1 - \hat{\mu}_3 \dot{\theta}_0 = -\sum_{j=1}^{16} \ddot{u}_{1_{pj}} - F_{17} \sin \phi_3 - F_{18} \sin \phi_1 \quad (5.22)$$

com $F_{17} = \hat{\mu}_3 a_3 \omega_3$ e $F_{18} = \hat{\mu}_3 a_1 \Lambda$.

Analogamente ao caso da equação do bloco, podemos utilizar o princípio da superposição para encontrar uma solução da equação não homogênea. Assim, uma solução da equação não homogênea é dada por

$$\theta_{1_p} = \sum_{k=1}^{18} \theta_{1_{pk}} \quad (5.23)$$

com

$$\begin{aligned} \theta_{1_{p1}} &= \frac{F_1 \omega_3^2}{2\omega_3(1 - \omega_3^2)} \tau \sin \phi_3 \\ \theta_{1_{p2}} &= -\frac{9}{8} \frac{F_2}{(1 - (3\omega_3)^2)} \cos 3\phi_3 \\ \theta_{1_{p3}} &= \frac{\frac{F_3(2\omega_3^2 - 1)}{1 - (2\omega_3 - 1)^2}}{\omega_3^2 - (2\omega_3 - 1)^2} \cos(2\phi_3 - \phi_1) \\ \theta_{1_{p4}} &= \frac{\frac{F_4(2\omega_3 + 1)^2}{1 - (2\omega_3 + 1)^2}}{\omega_3^2 - (2\omega_3 + 1)^2} \cos(2\phi_3 + \phi_1) \\ \theta_{1_{p5}} &= \frac{\frac{F_5(2 + \omega_3)^2}{1 - (2 + \omega_3)^2}}{\omega_3^2 - (2 + \omega_3)^2} \cos(2\phi_1 + \phi_3) \\ \theta_{1_{p6}} &= \frac{\frac{F_6(2 - \omega_3)^2}{1 - (2 - \omega_3)^2}}{\omega_3^2 - (2 - \omega_3)^2} \cos(2\phi_1 - \phi_3) \\ \theta_{1_{p7}} &= -\frac{F_7}{\omega_3^2 - 1} \cos(\phi_1) + \frac{F_7}{2(\omega_3^2 - 1)} \tau \sin \phi - \frac{F_7}{(\omega_3^2 - 1)^2} \cos \phi_1 \\ \theta_{1_{p8}} &= \frac{\frac{F_8(2\omega_3 + 1)^2}{1 - (2\omega_3 - 1)^2}}{\omega_3^2 - (2\omega_3 + 1)^2} \cos(2\phi_3 - \phi_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{1p9} &= \frac{F_9(2\omega_3 - 1)^2}{\omega_3 - (2\omega_3 - 1)^2} \cos(2\phi_3 - \phi_1) \\
\theta_{1p10} &= \frac{F_{10}(2 - \omega_3)^2}{\omega_3^2 - (2 - \omega_3)^2} \cos(2\phi_1 - \phi_3) \\
\theta_{1p11} &= \frac{F_{11}(2 + \omega_3)^2}{\omega_3^2 - (2 + \omega_3)^2} \cos(2\phi_1 - \phi_3) \\
\theta_{1p12} &= \frac{\frac{9}{8}F_{12}}{1 - 3^2} \sin 3\phi_1 \\
\theta_{1p13} &= \frac{F_{13}\omega_3^2}{2\omega_3} \tau \sin \phi_3 \\
\theta_{1p14} &= -\frac{F_{14}}{\omega_3^2 - 1} \cos \phi_1 + \frac{F_{14}}{2(\omega_3^2 - 1)} \tau \cos \phi_1 + \frac{F_{14}}{(\omega^2 - 1)^2} \sin \phi_1 \\
\theta_{1p15} &= -\frac{F_{15}}{2(\omega_3^2 - 1)} \sin \phi_1 - \frac{F_{15}}{2(\omega_3^2 - 1)} \tau \cos \phi_1 - \frac{F_{15}}{\omega_3^2 - 1} \sin \phi_1 \\
\theta_{1p16} &= a_{3p} \cos(\tau + \beta_{3p}) \\
\theta_{1p17} &= -\frac{F_{17}}{2\omega_3} \tau \cos \phi_3 \\
\theta_{1p18} &= \frac{F_{17}}{\omega_3 - 1} \sin \phi_1
\end{aligned} \tag{5.24}$$

onde a_{3p} e β_{3p} são determinados pelo método da variação dos parâmetros.

Substituindo as soluções para as aproximações de ordens ϵ^0 e ϵ^1 em (5.2), obtemos que a expansão em série de potências, até ordem ϵ^1 , que dá a solução geral do sistema de equações do pêndulo eletromecânico é dada por

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= a_1 \cos(\tau + \beta_1) + \epsilon \sum_{j=1}^{16} u_{pj} \\
\varphi(\tau) &= A_2 + B_2 \exp\left(-\frac{b}{I\omega} \tau\right) + \frac{\alpha}{b\omega} \tau + \epsilon(C_2(\tau) + D_2(\tau) \exp\left(-\frac{b}{I\omega} \tau\right)) \\
\theta(\tau) &= a_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \Lambda \cos(\tau + \beta_1) + \epsilon \sum_{k=1}^{18} \theta_{pk}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

com as constantes arbitrárias a_1 , β_1 , A_2 , B_2 , a_3 e β_3 determinadas pelas condições ini-

ciais

$$\begin{aligned}
 u(0) &= u_0 & \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 \\
 \varphi(0) &= 0 & \dot{\varphi}(0) &= 0 \\
 \theta(0) &= \theta_0 & \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

na aproximação de ϵ^0 . Logo as constantes arbitrárias são dadas por

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (u_0^2 + \dot{u}_0^2)^{\frac{1}{2}} \\
 \beta_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{u_0}{(u_0^2 + \dot{u}_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
 A_2 &= -\frac{\alpha I}{b^2} \\
 B_2 &= \frac{\alpha I}{b^2} \\
 a_3 &= ((\theta_0 - a_1 \Lambda \cos \beta_1)^2 + (\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_3} - \frac{a_1 \Lambda}{\omega_3} \sin \beta_3)^2)^{\frac{1}{2}} \\
 \beta_3 &= \cos^{-1}\left(\frac{\theta_0 - a_1 \Lambda \cos \beta_1}{((\theta_0 - a_1 \Lambda \cos \beta_1)^2 + (\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_3} - \frac{a_1 \Lambda}{\omega_3} \sin \beta_3)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

A solução (5.25) torna-se inválida quando $\tau \rightarrow \infty$, devido a presença de termos seculares e pequenos divisores. Pequenos divisores ou temos ressonantes ocorrem quando a frequência de oscilações do pêndulo é $\omega_3 \approx 0$, $\omega_3 \approx 1/3$, $\omega_3 \approx 1$, $\omega_3 \approx 3$. Esses termos ressonantes do sistema são classificados de acordo com a ordem da potência de ϵ com que ocorrem na solução aproximada das equações.

Na próxima seção vamos tratar dos casos de ressonancias secundárias, ou seja, quando pequenos divisores ocorrem na aproximação de ordem ϵ^1 . Ressonancias primárias também ocorrem, mas esse caso deve ser tratado separadamente, pois o termo proveniente da solução particular domina a solução da equação depois de um certo tempo τ , e deve ser reordenado de modo a tornar-se de ordem de ϵ .

5.2 Método das múltiplas escalas

Nesta seção vamos aplicar o método das múltiplas escalas para obter uma solução analítica aproximada livre de termos seculares e pequenos divisores. Vamos considerar o sistema

de equações dado em (5.1).

O método das múltiplas escalas consiste em assumir diferentes escalas de tempo T_0, T_1, \dots que aparecem naturalmente na expansão direta. Desse modo, consideramos que u , φ e θ são funções dessas novas escalas, e não apenas de τ , e as representamos por uma expansão tendo a seguinte forma

$$\begin{aligned} u(\tau, \epsilon) &= \hat{u}(T_0, T_1, T_2, \dots; \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_i \\ \varphi(\tau, \epsilon) &= \hat{\varphi}(T_0, T_1, T_2, \dots; \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \varphi_i \\ \theta(\tau, \epsilon) &= \hat{\theta}(T_0, T_1, T_2, \dots; \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \theta_i \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde

$T_j = \epsilon^j \tau$ são as diferentes escalas de tempo e ϵ é um pequeno parâmetro.

Logo, as derivadas são relacionadas pelo operador dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.29)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= D_0 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Para prosseguir na aplicação do método das múltiplas escalas, vamos limitar a apenas duas escalas e escrevemos as soluções na seguinte forma

$$\begin{aligned} u(T_0, T_1) &= u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \\ \varphi(T_0, T_1) &= \varphi_0(T_0, T_1) + \epsilon \varphi_1(T_0, T_1) + \dots \\ \theta(T_0, T_1) &= \theta_0(T_0, T_1) + \epsilon \theta_1(T_0, T_1) + \dots \end{aligned} \quad (5.31)$$

Aplicando o operador dado em (5.30) às funções u, φ e θ temos

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= D_0 u_0 + \epsilon(D_0 u_1 + D_1 u_0) + O(\epsilon^2) \\
 \dot{\varphi} &= D_0 \varphi_0 + \epsilon(D_0 \varphi_1 + D_1 \varphi_0) + O(\epsilon^2) \\
 \dot{\theta} &= D_0 \theta_0 + \epsilon(D_0 \theta_1 + D_1 \theta_0) + O(\epsilon^2) \\
 \ddot{u} &= D_0^2 u_0 + \epsilon(D_0^2 u_1 + 2D_0 D_1 u_0) + O(\epsilon^2) \\
 \ddot{\varphi} &= D_0^2 \varphi_0 + \epsilon(D_0^2 \varphi_1 + 2D_0 D_1 \varphi_0) + O(\epsilon^2) \\
 \ddot{\theta} &= D_0^2 \theta_0 + \epsilon(D_0^2 \theta_1 + 2D_0 D_1 \theta_0) + O(\epsilon^2)
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Substituindo em (5.1), agrupando os termos de mesma ordem de ϵ e retendo apenas os termos até ordem ϵ^1 , obtemos os sistemas de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned}
 D_0^2 u_0 + u_0 &= 0 \\
 \epsilon^0 : \quad D_0^2 \varphi_0 + \frac{b}{I\omega} D_0 \varphi_0 &= \frac{1}{I\omega^2} \alpha \\
 D_0^2 \theta_0 + \omega_3^2 \theta_0 &= -D_0^2 u_0.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 u_1 + u_1 &= -2D_0 D_1 u_0 + Q_2(\varphi_0) - \hat{\mu} D_0 u_0 + \hat{m}_3[(D_0 \theta_0)^2 \theta_0 - D_0^2 \theta_0] \\
 \epsilon^1 : \quad D_0^2 \varphi_1 + \frac{b}{I\omega} D_0 \varphi_1 &= -2D_0 D_1 \varphi_0 - \frac{b}{I\omega} D_1 \varphi_0 + \hat{p}_3 D_0^2 u_0 \sin \varphi_0 - \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi_0 \\
 D_0^2 \theta_1 + \omega_3^2 \theta_1 &= -D_0^2 u_1 - 2D_0 D_1 u_0 - \hat{\mu}_3 D_0 \theta_0 - 2D_0 D_1 \theta_0.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Resolvendo as equações dadas em (5.33) obtemos

$$\begin{aligned}
 u_0(T_0, T_1) &= a_1(T_1) \cos(T_0 + \beta_1(T_1)) \\
 \varphi_0(T_0, T_1) &= A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp\left(-\frac{b}{I\omega} T_0\right) + \frac{\alpha}{b\omega} T_0
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\theta_0(T_0, T_1) = -a_3(T_1) \cos(\omega_3 T_0 + \beta_3(T_1)) + a_1(T_1) \Lambda \cos(T_0 + \beta_1(T_1))$$

com $\Lambda = 1/(\omega_3^2 - 1)$ e $a_1, \beta_1, A_2, B_2, a_3, \beta_3$ funções da escala T_1 , pois u, φ, θ são funções das escalas T_0 e T_1 e suas derivadas em (5.33) são com respeito a escala T_0 . A dependencia funcional de $a_1, \beta_1, A_2, B_2, a_3, \beta_3$, seguindo o exemplo de ([29]), são determinadas no próximo nível de aproximação pela eliminação dos termos seculares.

Para o método das múltiplas escalas é conveniente escrever as soluções (5.35) em notação complexa. Logo

$$\begin{aligned} u_0(T_0, T_1) &= A_1(T_1) \exp(iT_0) + \bar{A}_1 \exp(-iT_0) \\ \varphi_0(T_0, T_1) &= A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp(-\frac{b}{I\omega}T_0) + \frac{\alpha}{b\omega}T_0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\theta_0(T_0, T_1) = A_3(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) + A_1(T_1) \Lambda \exp(iT_0) + c.c$$

onde $c.c$ denota os termos complexos conjugados e

$$A_j = \frac{1}{2}a_j \exp(i\beta_j), \quad \bar{A}_j = \frac{1}{2}a_j \exp(-i\beta_j), \quad j = 1 \text{ e } 3, \quad (5.37)$$

Utilizando (5.36), efetuando as operações de derivação e substituindo nas equações dadas em (5.34) obtemos

$$D_0^2 u_1 + u_1 = Q'_2(\tau) + \sum_{j=0}^7 F_1 \exp(i\bar{\omega}_j T_0) + \sum_{j=0}^7 \bar{F}_1 \exp(-i\bar{\omega}_j T_0) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 \varphi_1 + \frac{b}{I\omega} D_0 \varphi_1 &= \frac{b}{I\omega} \frac{\partial B_2}{\partial T_1} \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0) - \frac{b}{I\omega} \frac{\partial A_2}{\partial T_1} \\ &+ \hat{p}_3 (B_2(T_1) (\frac{b}{I\omega})^2) \sin(A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0) + \frac{\alpha}{b\omega} T_0) \\ &- \hat{p}_4 \frac{g}{\omega^2} \cos(A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0) + \frac{\alpha}{b\omega} T_0) \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 \theta_1 + \omega_3^2 \theta_1 &= -D_0^2 u_1 + [-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} \Lambda] \exp(iT_0) + \\ &+ [-\hat{\mu}_3 i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1}] \exp(i\omega_3 T_0) + c.c \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde

$$\begin{aligned} Q'_2(T_0, T_1) &= \hat{p}_2 D_0^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 + \hat{p}_2 (D_0 \varphi_0)^2 \cos \varphi_0 = \\ &\hat{p}_2 \left(B_2(T_1) \left(\frac{b}{b\omega} \right)^2 \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0) \right) \sin \left(A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0) + \frac{\alpha}{b\omega} T_0 \right) + \\ &\hat{p}_2 \left(-B_2(T_1) \frac{b}{I\omega} \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0 + \frac{\alpha}{I\omega}) \right)^2 \cos \left(A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0) + \frac{\alpha}{b\omega} T_0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= -2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + \hat{m}_3 [(2\omega_3^2 \bar{A}_3 A_3 + 2\bar{A}_1 A_1 \Lambda^2) A_1 \Lambda - (A_1 \Lambda)^2 \bar{A}_1 \Lambda] - \hat{\mu}_1 i A_1 + m_3 \Lambda A_1 \\
F_1 &= \hat{m}_3 [2\omega_3 A_3 (\bar{A}_1 \Lambda)^2 - (\bar{A}_1 \Lambda)^2 A_3] \\
F_2 &= \hat{m}_3 [(2\omega_3^2 \bar{A}_3 A_3 + 2\bar{A}_1 A_1 \Lambda^2) A_3 - \omega_3^2 A_3 \bar{A}_3 + \hat{m}_3 \omega_3^2 A_3] \\
F_3 &= \hat{m}_3 [-\omega_3^2 A_3^3] \\
F_4 &= \hat{m}_3 [-\omega_3^2 A_3^2 A_1 \Lambda - 2\omega_3 A_3^2 A_1 \Lambda] \\
F_5 &= \hat{m}_3 [2\omega_3 A_3^2 \bar{A}_1 - \omega_3^2 A_3^2 \bar{A}_1 \Lambda] \\
F_6 &= \hat{m}_3 [-2\omega_3 A_3 (A_1 \Lambda)^2 - (A_1 \Lambda)^2 A_3] \\
F_7 &= \hat{m}_3 [-(A_1 \Lambda)^3]
\end{aligned}$$

com os \bar{F}_j os complexos conjugados dos F_j , e

$$\begin{aligned}
iT_0 &= i\varpi T_0 & i(\omega_3 - 2)T_0 &= i\varpi_1 T_0 \\
i\omega_3 T_0 &= i\varpi_2 T_0 & i3\omega_3 T_0 &= i\varpi_3 T_0 \\
i(2\omega_3 + 1)T_0 &= i\varpi_4 T_0 & i(2\omega_3 - 1)T_0 &= i\varpi_5 T_0 \\
i(\omega_3 + 2)T_0 &= i\varpi_6 T_0 & 3iT_0 &= i\varpi_7 T_0.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Para prosseguir nossos estudos precisamos resolver o sistema de equações (5.38) a (5.40), e impor condições para eliminar os termos seculares mistos e os pequenos divisores.

A resolução do conjunto de equações de ordem ϵ para o pêndulo, implica que precisamos conhecer a solução da equação do bloco para a mesma ordem, para depois resolvermos a equação do pêndulo da mesma ordem de ϵ . Para a resolução da equação do bloco precisamos conhecer os termos que dão origem a termos seculares mistos e pequenos divisores. Como sabemos, tais termos foram obtidos pela expansão direta do sistema e dependem do valor da frequência ω_3 . Por isso, dependendo do valor da frequência de ω_3 teremos um caso de ressonância e, portanto, diferentes casos, que devem serem tratados separadamente.

5.2.1 Considerações sobre a equação do motor

Como verificamos pelo método da expansão direta, a equação do motor não possui termos geradores de termos seculares mistos e nem pequenos divisores e, por isso, não necessita-

mos resolver a equação para ordem ϵ^1 para impor as condições de eliminação de termos seculares mistos. Assim sendo, vamos utilizar o mesmo raciocínio utilizado no método da expansão direta, para obter as constantes de integração A_2 e B_2 , ou seja, vamos utilizar que as condições iniciais são dadas por

$$\varphi(0, T_1) = 0, \quad D_0\varphi(0, T_1) = 0$$

na aproximação de ordem ϵ^0 da equação do motor do sistema (5.33). Logo temos

$$A_2(T_1) = -\frac{\alpha I}{b^2} \text{ e } B_2(T_1) = \frac{\alpha I}{b^2} \quad (5.42)$$

e, portanto, a solução de ordem ϵ^0 da equação do motor é dada por

$$\varphi(T_0, T_1) = A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp\left(-\frac{b}{I\omega}T_0\right) + \frac{\alpha}{b\omega}T_0 + O(\epsilon) \quad (5.43)$$

Na próxima seção vamos analisar as diferentes ressonancias existentes e também considerar o caso sem ressonancia.

Observamos que quando dizemos sem ressonancia, estamos dizendo que não existe interação ressonante entre o pêndulo e o bloco, mas existe interação ressonante entre o bloco e o motor.

Primeiramente vamos analisar o caso sem ressonancia, e depois trataremos os casos em que $\omega_3 \approx 3$ e $\omega_3 \approx 1/3$. Os casos de ressonancia secundária $\omega_3 \approx 0$ e ressonancia primária $\omega_3 \approx 1$ devem ser tratados separadamente e deixamos para estudos posteriores.

5.3 Estudo das ressonancias

As freqüências ressonantes são obtidas pela expansão direta do sistema, que também apresenta os inconvenientes termos seculares mistos. Os termos ressonantes estão associados aos pequenos divisores que são gerados quando $\omega_3 \approx 0$, $\omega_3 \approx \frac{1}{3}$, $\omega_3 \approx 1$, $\omega_3 \approx 3$. No caso em que $\omega_3 \approx 1$ temos ressonancia primária, e os demais são chamados termos ressonantes secundários. O método das múltiplas escalas é usado para conseguir uma solução livre de termos seculares e pequenos divisores.

Primeiramente, vamos considerar o caso em que a freqüência ω_3 está longe da ressonancia.

5.3.1 Sistema sem ressonancia

Neste caso assumimos que ω_3 está longe de 0, $1/3$, 3 , 1 .

A resolução das equações (5.38) a (5.40) implica que precisamos conhecer a solução da equação do bloco para, depois, conseguirmos resolver a equação do pêndulo.

Para a resolução da equação do bloco precisamos conhecer os termos que dão origem a termos seculares mistos e impor a condição de eliminação de tais termos. Observamos que $a_1 \cos(T_0 + \beta_1)$ é solução da equação homogênea do bloco, e portanto segue que os termos em T_0 geram termos seculares. Impondo a condição de eliminação dos termos seculares, temos

$$F_0 = -2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + \hat{m}_3 [(2\omega_3^2 \bar{A}_3 A_3 + 2\bar{A}_1 A_1 \Lambda^2) A_1 \Lambda - (A_1 \Lambda)^2 \bar{A}_1 \Lambda] - \hat{\mu}_1 i A_1 + \hat{m}_3 \Lambda A_1 = 0. \quad (5.44)$$

Agora, podemos reescrever a equação do bloco como

$$D_0^2 u_1 + u_1 = Q'_2(T_0, T_1) + \sum_{j=1}^7 F_j \exp(i\varpi_j T_0) + \sum_{j=1}^7 \bar{F}_j \exp(-i\varpi_j T_0). \quad (5.45)$$

Como a equação diferencial acima é linear, podemos utilizar o princípio da superposição para obter solução.

5.3.2 Variação dos parâmetros para o método das múltiplas escalas

Primeiramente, vamos utilizar o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular u_{1p} da equação

$$D_0^2 u_1 + u_1 = \hat{p}_2 [D_0^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 + (D_0 \varphi_0)^2 \cos \varphi_0] = Q'_2(T_0, T_1) \quad (5.46)$$

Um conjunto de soluções fundamentais para a equação homogênea é $\{y_1 = \cos(T_0), y_2 = \sin(T_0)\}$, e portanto a solução da equação homogênea é dada por

$$u_{1h} = v_1(T_1) \cos(T_0 + v_2(T_1)) \quad (5.47)$$

Supomos que a solução particular seja da seguinte forma

$$\tilde{u}_{1p} = v_1(T_0, T_1) \cos(T_0 + v_2(T_0, T_1)). \quad (5.48)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} D_0 v_1 \cos(T_0 + v_2) - v_1 D_0 v_2 \sin(T_0 + v_2) &= 0 \\ -D_0 v_1 \sin(T_0 + v_2) - v_1 D_0 v_2 \cos(T_0 + v_2) &= Q'_2(T_0, T_1) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} D_0 v_1 &= -Q'_2(T_0, T_1) \sin(T_0 + v_2) \\ -v_1 D_0 v_2 &= Q'_2(T_0, T_1) \cos(T_0 + v_2). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Logo, uma solução particular é dada por (5.48) com v_1 e v_2 dados pela solução do sistema (5.50).

5.3.3 Solução particular para a equação do bloco

Uma solução particular para a equação do bloco

$$D_0^2 u_1 + u_1 = Q'_2(T_0, T_1) + \sum_{j=1}^7 F_j \exp(i\varpi_j T_0) + \sum_{j=1}^7 \overline{F_j} \exp(-i\varpi_j T_0). \quad (5.51)$$

é

$$u_{1p} = \tilde{u}_{1p} + \sum_{j=1}^7 \frac{F_j}{1 - \varpi_j^2} \exp(i\varpi_j T_0) + \sum_{j=1}^7 \frac{\overline{F_j}}{1 - \varpi_j^2} \exp(-i\varpi_j T_0) \quad (5.52)$$

5.3.4 Solução da equação do pêndulo

Da equação do pêndulo (5.40), temos

$$\begin{aligned} D_0^2 \theta_1 + \omega_3^2 \theta_1 &= -D_0^2 u_1 + [-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} \Lambda] \exp(iT_0) \\ &+ [-\hat{\mu}_3 i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1}] \exp(i\omega_3 T_0) + c.c \end{aligned} \quad (5.53)$$

Assim, derivando duas vezes em relação a T_0 a solução dada em (5.52), levando na equação (5.53), temos

$$\begin{aligned}
D_0^2 \theta_1 + \omega_3^2 \theta_1 = & -[D_0^2 u_{1p} - \sum_{j=1}^7 \varpi_j^2 \frac{F_j}{1 - \varpi_j^2} \exp(i\varpi_j T_0) - \sum_{j=1}^7 \varpi_j^2 \frac{\bar{F}_j}{1 - \varpi_j^2} \exp(-i\varpi_j T_0)] \\
& + [-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} \Lambda] \exp(iT_0) + [-\hat{\mu}_3 i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1}] \exp(i\omega_3 T_0) + c.c
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Agora, precisamos verificar quais termos geram termos seculares, ou seja, quais termos possuem frequência ω_3 . Como a função $D_0^2 u_{1p}$ não produz termos seculares, então basta verificar os termos no somatório.

Como temos

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \omega_3 - 2 & \varpi_5 &= 2\omega_3 - 1 \\
\varpi_2 &= \omega_3 & \varpi_6 &= \omega_3 + 2 \\
\varpi_3 &= 3\omega_3 & \varpi_7 &= 3
\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\varpi_4 = 2\omega_3 + 1$$

e $\exp(i\varpi_2 T_0) = \exp(i\omega_3 T_0)$, então a condição de eliminação de termos seculares implica que

$$-\hat{\mu}_3 i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1} + \omega_3^2 \frac{F_2}{1 - \omega_3^2} = 0. \tag{5.56}$$

Assim, verificamos que as condições de eliminação dos termos seculares são dadas por (5.44) e (5.56), ou seja,

$$\begin{aligned}
-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + \hat{m}_3 [(2\omega_3^2 \bar{A}_3 A_3 + 2\bar{A}_1 A_1 \Lambda^2) A_1 \Lambda - (A_1 \Lambda)^2 \bar{A}_1 \Lambda] - \hat{\mu}_1 i A_1 + \hat{m}_3 \Lambda A_1 &= 0 \\
-\hat{\mu}_3 i \omega_3 A_3 (1 - \omega_3^2) - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1} (1 - \omega_3^2) + F_2 \omega_3^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Lembramos que

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{a_1}{2} \exp(i\beta_1) & \bar{A}_1 &= \frac{a_1}{2} \exp(-i\beta_1) \\
A_3 &= \frac{a_3}{2} \exp(i\beta_3) & \bar{A}_3 &= \frac{a_3}{2} \exp(-i\beta_3) \\
A_1 \bar{A}_1 &= \frac{a_1^2}{4} & A_3 \bar{A}_3 &= \frac{a_3^2}{4} \\
\frac{\partial A_1}{\partial T_1} &= \frac{1}{2}(\dot{a}_1 + ia_1\dot{\beta}_1) \exp(i\beta_1) & \frac{\partial A_3}{\partial T_1} &= \frac{1}{2}(\dot{a}_3 + ia_3\dot{\beta}_3) \exp(i\beta_3)
\end{aligned} \tag{5.58}$$

e $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

Resolvendo (5.44) e (5.56) separadamente, obtemos as equações que descrevendo as modulações de amplitude e fase do sistema, e dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -\frac{\hat{\mu}_1 a_1}{2} \\
\dot{\beta}_1 &= -\frac{\hat{m}_3}{4} [\omega_3^2 a_3^2 + a_1^2 \Lambda^2 - \frac{a_1^2 \Lambda^3}{2}] - \frac{\hat{m}_3 \Lambda}{2} \\
\dot{a}_3 &= -\frac{\hat{\mu}_3 a_3}{2} + \frac{\hat{m}_3 \omega_3^3 a_3^2}{4(1 - \omega_3^2)} \sin \beta_3 \\
\dot{\beta}_3 &= \frac{\hat{m}_3 \omega_3^2}{2(\omega_3^3 - \omega_3)} \left[\frac{1}{2}(\omega_3^2 a_3^2 + a_1 \Lambda^2) + \omega_3^2 - \frac{\hat{m}_3 \omega_3^2}{2} \cos \beta_3 \right].
\end{aligned} \tag{5.59}$$

As soluções para o sistema pêndulo eletromecânico, em termos das variáveis originais, são dadas por

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= a_1 \cos(\tau + \beta_1) + O(\epsilon) \\
\varphi(\tau) &= A_2 + B_2 \exp\left(-\frac{b}{I\omega} \tau\right) + \frac{\alpha}{b\omega} \tau + O(\epsilon) \\
\theta(\tau) &= a_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

com a_1, β_1, a_3 e β_3 soluções das equações dadas em (5.59).

Segundo Nayfeh ([29]), para determinar os estados estacionários, não precisamos integrar as equações descrevendo as modulações de amplitudes e fases do sistema. Ao invés disso, usamos o fato de que as amplitudes e fases são constantes nos estados estacionários, e portanto, devemos tornar nulas essas equações. Deste modo, temos um sistema de equações algébricas, dado por

$$\begin{aligned}
-\frac{\hat{\mu}_1 a_1}{2} &= 0 \\
-\frac{\hat{m}_3}{4}[(\omega_3^2 a_3^2 + a_1^2 \Lambda^2) - \frac{a_1^2 \Lambda^3}{2}] - \frac{\hat{m}_3 \Lambda}{2} &= 0 \\
-\frac{\hat{\mu}_3 a_3}{2} + \frac{\hat{m}_3 \omega_3^4 a_3^2}{4(\omega_3 - \omega_3^3)} \sin \beta_3 & \\
\frac{\hat{m}_3}{2(\omega_3^2 - 1)} \left[\frac{1}{2}(\omega_3^2 a_3^2 + a_1^2 \Lambda^2) + \omega_3^2 \omega_3 - \frac{\hat{m}_3 \omega_3^3}{4(\omega_3^2 - 1)} \cos \beta_3 \right] &= 0
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Resolvendo (5.61), temos

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_3^2 \omega_3^2 &= -2\Lambda \quad \text{se } \Lambda < 0 \\
\cos \beta_3 &= a_3^2 + 2 \\
\sin \beta_3 &= -2 \frac{\hat{\mu}_3(\omega_3^2 - 1)}{\hat{m}_3 \omega_3^3 a_3}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Como estamos considerando o caso sem interação ressonante entre o pêndulo e o bloco, e $\Lambda < 0$, a frequência ω_3 de oscilação do pêndulo deve ser tal que

$$\omega_3 < 1 \text{ e } \epsilon < \omega_3 < \frac{1}{3} - \epsilon \frac{\sigma}{3} \text{ e } \frac{1}{3} + \epsilon \frac{\sigma}{3} < \omega_3 < 1 - \epsilon \sigma \tag{5.63}$$

Nestas faixas os estados estacionários podem existir e fora destas faixas as equações devem levar em conta o fenômeno da ressonancia. As faixas nas quais existem interações ressonantes e satisfazem a condição $\omega_3 < 1$ são dadas por

$$0 < \omega_3 < \epsilon \text{ e } \frac{1}{3} - \epsilon \frac{\sigma}{3} < \omega_3 < \frac{1}{3} + \epsilon \frac{\sigma}{3} \text{ e } 1 - \epsilon < \omega_3 < 1 \tag{5.64}$$

De (5.62), e de $\cos^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_1 = 1$, segue que

$$\left(-2 \frac{\hat{\mu}_3(\omega_3^2 - 1)}{\hat{m}_3 \omega_3^3 a_3} \right)^2 + (a_3^2 + 2)^2 = 1 \tag{5.65}$$

Levando em conta $\Lambda = 1/(\omega_3^2 - 1)$, temos que $a_3^2 = -2/\omega_3^2(\omega_3^2 - 1)$. Assim, a equação dada em (5.65) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&-4\hat{\mu}_3^2 \omega_3^{10} + (6\hat{m}_3^2 + 20\hat{\mu}_3^2) \omega_3^8 + (-12\hat{m}_3^2 - 40\hat{\mu}_3^2) \omega_3^6 \\
&+ (-10\hat{m}_3^2 + 40\hat{\mu}_3^2) \omega_3^4 + (16\hat{m}_3^2 - 20\hat{\mu}_3^2) \omega_3^2 + (8\hat{m}_3^2 + 4\hat{\mu}_3^2) = 0
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Logo, as frequências de oscilações para os quais ocorrem estados estacionários devem satisfazer o polinômio (5.66), observando as condições dadas em (5.63). Calculamos o polinômio (5.66) para c_3 e m_3 como parâmetros de controle e diversos valores das massas m_1, m_2 e m_3 , mas os resultados obtidos não determinaram regiões de frequências onde existem estados estacionários, pois as frequências determinadas pelo polinômio de grau dez são tais que estão fora das faixas previstas. Isso apenas implica que não conseguimos obter valores das massas tais que os estados estacionários existem.

5.4 Ressonancias secundárias

Ressonancias secundárias ocorrem quando $\omega_3 \approx 3$ e $\omega_3 \approx \frac{1}{3}$. Vamos analisar cada caso separadamente, começando pelo caso $\omega_3 \approx 3$.

5.4.1 $\omega_3 \approx 3$

Introduzindo o parâmetro de sintonia, temos

$$\omega_3 = 3 + \epsilon\sigma, \quad (5.67)$$

Logo, as frequências dadas em (5.68) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \varpi_1 T_0 &= T_0 + \sigma T_1 &= \varpi'_1 T_0 + \sigma T_1 \\ \varpi_2 T_0 &= 3T_0 + \sigma T_1 &= \varpi'_2 T_0 + \sigma T_1 \\ \varpi_3 T_0 &= 9T_0 + 3\sigma T_1 &= \varpi'_3 T_0 + 3\sigma T_1 \\ \varpi_4 T_0 &= 7T_0 + 2\sigma T_1 &= \varpi'_4 T_0 + 2\sigma T_1 \\ \varpi_5 T_0 &= 5T_0 + 2\sigma T_1 &= \varpi'_5 T_0 + 2\sigma T_1 \\ \varpi_6 T_0 &= 5T_0 + \sigma T_1 &= \varpi'_6 T_0 + \sigma T_1 \\ \varpi_7 T_0 &= \omega_3 T_0 - \sigma T_1 &= \varpi'_7 T_0 - \sigma T_1 \end{aligned} \quad (5.68)$$

Segundo Nayfeh ([29]), enquanto a escala T_0 é uma escala de variação rápida, a combinação ϵT_0 é escala de variação lenta e precisa ser expressada em termos da escala lenta, ou seja, $\epsilon T_0 = T_1$. Com essa mudança, os termos que geram pequenos divisores são trans-

formados em termos que geram termos seculares mistos e, conseqüentemente, podemos eliminá-los. Assim, a equação do bloco (5.38) é reescrita como

$$D_0^2 u_1 + u_1 = Q'_2(T_0, T_1) + \sum_{j=0}^7 F'_j \exp(i\varpi'_j T_0) + \sum_{j=0}^7 \overline{F}'_j \exp(-i\varpi'_j T_0), \quad (5.69)$$

com

$$\begin{aligned} F'_0 &= F_0 & F'_1 &= F_1 \exp(i\sigma T_1) \\ F'_2 &= F_2 \exp(i\sigma T_1) & F'_3 &= F_3 \exp(i3\sigma T_1) \\ F'_4 &= F_4 \exp(i2\sigma T_1) & F'_5 &= F_5 \exp(i2\sigma T_1) \\ F'_6 &= F_6 \exp(i\sigma T_1) & F'_7 &= F_7 \exp(-\sigma T_1) \end{aligned} \quad (5.70)$$

A condição de eliminação de termos seculares na primeira equação implica que devemos tornar nulos os coeficientes dos termos iT_0 .

$$F_0 + F_1 \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (5.71)$$

Logo, a equação do bloco fica

$$D_0^2 u_1 + u_1 = Q'_2(T_0, T_1) + \sum_{j=2}^7 F'_j \exp(i\varpi'_j T_0) + \sum_{j=2}^7 \overline{F}'_j \exp(-i\varpi'_j T_0). \quad (5.72)$$

Uma solução particular dessa equação é dada por

$$u_{1p} = \tilde{u}_p + \sum_{j=2}^7 \frac{F'_j}{1 - \varpi_j'^2} \exp(i\varpi'_j T_0) + \sum_{j=2}^7 \frac{\overline{F}'_j}{1 - \varpi_j'^2} \exp(-i\varpi'_j T_0), \quad (5.73)$$

onde \tilde{u}_p é a solução particular dada em (5.48).

Derivando duas vezes em relação a T_0 obtemos

$$D_0^2 u_{1p} = D_0^2 \tilde{u}_p - \sum_{j=2}^7 \varpi_j'^2 \frac{F'_j}{1 - \varpi_j'^2} \exp(i\varpi'_j T_0) - \sum_{j=2}^7 \varpi_j'^2 \frac{\overline{F}'_j}{1 - \varpi_j'^2} \exp(-i\varpi'_j T_0). \quad (5.74)$$

Levando na equação do pêndulo, temos

$$\begin{aligned}
D_0^2 \theta_1 + \omega_3^2 \theta_1 = & -D_0^2 \tilde{u}_{1p} + \sum_{j=2}^7 \varpi_j'^2 \frac{F_j'}{1 - \varpi_j'^2} \exp(i\varpi_j' T_0) \\
& + \sum_{j=2}^7 \varpi_j'^2 \frac{\overline{F_j'}}{1 - \varpi_j'^2} \exp(-i\varpi_j' T_0) + [-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} \Lambda] \exp(iT_0) \\
& + [-\hat{\mu} i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1}] \exp(i\omega_3 T_0) + c.c.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Como as funções geradoras de termos seculares no pêndulo são aquelas cuja frequência é ω_3 , e acima introduzimos o parâmetro de sintonia para expressar a proximidade entre a frequência de oscilações do pêndulo e do bloco ($\omega_3 \approx 3$), então devemos verificar quais termos possuem frequência ω_3 ou diferem de ω_3 por uma pequena quantidade de ϵ .

As frequências ϖ_j' são tais que satisfazem as relações, conforme definido anteriormente em (5.68)

e, portanto, segue que

$$\begin{aligned}
F_2' \exp(i\varpi_2' T_0) &= F_2 \exp(i\omega_3 T_0) \\
F_3' \exp(i\varpi_3' T_0) &= F_3 \exp(i3\omega_3 T_0) \\
F_4' \exp(i\varpi_4' T_0) &= F_4 \exp(i(2\omega_3 + 1)T_0) \\
F_5' \exp(i\varpi_5' T_0) &= F_5 \exp(i(2\omega_3 - 1)T_0) \\
F_6' \exp(i\varpi_6' T_0) &= F_6 \exp(i(\omega_3 + 2)T_0) \\
F_7' \exp(i\varpi_7' T_0) &= F_7 \exp(-i\sigma T_1) \exp(i\omega_3 T_0)
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Logo as frequências geradoras de termos seculares para o movimento do pêndulo são ϖ_2' e ϖ_7' . Impondo a condição de eliminação de termos seculares, temos

$$-\hat{\mu}_3 i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1} + \frac{\varpi_2'^2}{1 - \varpi_2'^2} F_2 + \frac{\varpi_7'^2}{1 - \varpi_7'^2} F_7 \exp(-i\sigma T_1) = 0 \tag{5.77}$$

Podemos reescrever a equação do pêndulo como segue

$$\begin{aligned}
D_0^2 \theta_1 + \omega_3^2 \theta_1 = & -D_0^2 \tilde{u}_p + \sum_{j=3}^6 \varpi_j'^2 \frac{F_j'}{1 - \varpi_j'^2} \exp(i\varpi_j' T_0) + \sum_{j=3}^6 \varpi_j'^2 \frac{\overline{F_j'}}{1 - \varpi_j'^2} \exp(-i\varpi_j' T_0) \\
& + [-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} \Lambda] \exp(iT_0) + [-\hat{\mu} i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1}] \exp(i\omega_3 T_0) + c.c
\end{aligned} \tag{5.78}$$

onde $c.c$ denota o complexo conjugado dos termos daquela linha.

Assim, as condições de eliminação dos termos seculares são dadas por

$$\begin{aligned}
F_0 + F_1 \exp(i\sigma T_1) = & 0 \\
-\hat{\mu}_3 i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1} - \frac{9}{8} F_2 + \frac{\omega_3^2}{1 - \omega_3^2} F_7 \exp(-i\sigma T_1) = & 0
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Aqui cabe uma observação: devemos utilizar os valores que as frequências tinham antes do processo de eliminação de termos seculares, já que essas frequências foram obtidas antes do processo de "volta" (expressar em termos de ω_3). Por este motivo

$$\begin{aligned}
\frac{\varpi_2'^2}{1 - \varpi_2'^2} &= -\frac{9}{8} \\
\frac{\varpi_7'}{1 - \varpi_7'^2} &= \frac{\omega_3^2}{1 - \omega_3^2}.
\end{aligned}$$

Resolvendo as equações (5.79) obtemos as equações descrevendo as modulações de amplitudes e fases do bloco e do pêndulo

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 = & -\frac{\hat{\mu}_1 a_1}{2} + \frac{\hat{m}_3}{4} [\omega_3 a_3 a_1^2 \Lambda^2 - \frac{a_1^2 a_3}{2}] \cos(\sigma T_1 + \beta_3 - 3\beta_1) \\
a_1 \dot{\beta}_1 = & -\frac{\hat{m}_3}{4} [(\omega_3^2 a_3 + a_1 \Lambda^2) a_1 \Lambda - \frac{a_1^3 \Lambda^3}{2}] - \frac{\hat{m}_3}{4} [\omega_3 a_3 a_1^2 \Lambda^2 - \frac{a_1^2 a_3}{2}] \sin(\sigma T_1 + \beta_3 - 3\beta_1) \\
\dot{a}_3 = & -\hat{\mu}_3 a_3 + \frac{9\hat{\mu}_3 \omega_3 a_3^2}{32} \sin(-\beta_3) + \frac{\hat{m}_3 \omega_3 a_1^3 \Lambda^3}{8(1 - \omega_3^2)} \sin(3\beta_1 - \sigma T_1 - \beta_3) \\
a_3 \dot{\beta}_3 = & \frac{9\hat{m}_3}{8\omega_3} [(\omega_3^2 a_3 + a_1^2 \Lambda^2) \frac{a_3}{4} + \frac{\omega_3^2 a_3}{2}] - \frac{9\hat{m}_3 \omega_3^4 a_3}{32} \cos(-\beta_3) \\
& - \frac{\omega_3 a_3^2 \hat{m}_3}{8(1 - \omega_3^2)} [-a_1^3 \Lambda^3] \cos(3\beta_1 - \sigma T_1 - \beta_3).
\end{aligned} \tag{5.80}$$

As equações acima possuem dependência explícita da escala T_1 , ou seja, o sistema de equações é não autônomo. Para transformá-lo em um sistema autônomo, introduzimos as substituições

$$v_1 = \sigma T_1 - 3\beta_1 \quad (5.81)$$

Logo, temos

$$\dot{v}_1 = \sigma - 3\dot{\beta}_1 \quad (5.82)$$

Substituindo em (5.80) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{\hat{\mu}_1 a_1}{2} + \frac{\hat{m}_3}{4} [\omega_3 a_3 a_1^2 \Lambda^2 - \frac{a_1^2 a_3}{2}] \cos(v_1 + \beta_3) \\ a_1 \dot{v}_1 &= a_1 \sigma - 3 \left[\frac{\hat{m}_3}{4} [(\omega_3^2 a_3 + a_1 \Lambda^2) a_1 \Lambda - \frac{a_1^3 \Lambda^3}{2}] - \frac{\hat{m}_3}{4} [\omega_3 a_3 a_1^2 \Lambda^2 - \frac{a_1^2 a_3}{2}] \sin(v_1 + \beta_3) \right] \\ \dot{a}_3 &= -\hat{\mu}_3 a_3 - \frac{9\hat{\mu}_3 \omega_3 a_3^2}{32} \sin(\beta_3) - \frac{\hat{m}_3 \omega_3 a_1^3 \Lambda^3}{8(1 - \omega_3^2)} \sin(v_1 + \beta_3) \\ \dot{\beta}_3 &= \frac{9\hat{m}_3}{8\omega_3} [(\omega_3^2 a_3 + a_1^2 \Lambda^2) \frac{1}{4} + \frac{\omega_3^2 a_3}{2}] - \frac{9\hat{m}_3 \omega_3^4}{32} \cos(\beta_3) \\ &\quad - \frac{\omega_3 a_3 \hat{m}_3}{8(1 - \omega_3^2)} [-a_1^3 \Lambda^3] \cos(v_1 + \beta_3). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Segue de (5.81) que

$$\beta_1 = \frac{1}{3} \sigma T_1 - \frac{1}{3} v_1 = \frac{1}{3} \epsilon \sigma \tau - \frac{1}{3} v_1. \quad (5.84)$$

Assim, as soluções podem ser escritas como

$$\begin{aligned} u(\tau) &= a_1 \cos\left(\frac{1}{3} \omega_3 \tau - \frac{1}{3} v_1\right) + O(\epsilon) \\ \varphi(\tau) &= A_2 + B_2 \exp\left(-\frac{b}{I\omega} \tau\right) + \frac{\alpha}{\beta\omega} \tau + O(\epsilon) \\ \theta(\tau) &= a_3 \cos(\omega_3 \tau + \beta_3) + a_1 \Lambda \cos\left(\frac{1}{3} \omega_3 \tau - \frac{1}{3} v_1\right) + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (5.85)$$

com as modulações de amplitudes e fases dadas em (5.83).

5.4.2 $\omega_3 \approx \frac{1}{3}$

Introduzindo o parâmetro de sintonia,

$$3\omega_3 = 1 + \epsilon\sigma, \quad (5.86)$$

e procedendo da mesma forma que no caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \omega_3 - 2 = -\frac{5}{3} + \epsilon \frac{\sigma}{3} = \varpi'_1 + \epsilon \frac{\sigma}{3} \\
\varpi_2 &= \omega_3 = \frac{1}{3} + \epsilon \frac{\sigma}{3} = \varpi'_2 + \epsilon \frac{\sigma}{3} \\
\varpi_3 &= 3\omega_3 = 1 + \epsilon\sigma = \varpi'_3 + \epsilon\sigma \\
\varpi_4 &= 2\omega_3 + 1 = \frac{5}{3} + \epsilon \frac{2\sigma}{3} = \varpi'_4 + \epsilon \frac{2\sigma}{3} \\
\varpi_5 &= 2\omega_3 - 1 = -\omega_3 + \epsilon\sigma = \varpi'_5 + \epsilon\sigma \\
\varpi_6 &= \omega_3 + 2 = \frac{7}{6} + \epsilon \frac{\sigma}{3} = \varpi'_6 + \epsilon \frac{\sigma}{3} \\
\varpi_7 &= 3 = 9\omega_3 - 3\epsilon\sigma = \varpi'_7 - 3\epsilon\sigma
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Seguindo as mesmas considerações do caso anterior, podemos escrever a equação que governa o movimento do bloco como

$$D_0^2 u_1 + u_1 = Q'_2(T_0, T_1) + \sum_{j=0}^7 F'_j \exp(i\varpi'_j T_0) + \sum_{j=0}^7 \overline{F}'_j \exp(-i\varpi'_j T_0), \tag{5.88}$$

com

$$\begin{aligned}
F'_0 &= F_0 & F'_4 &= F_4 \exp(i\frac{2\sigma}{3}T_1) \\
F'_1 &= F_1 \exp(i\frac{\sigma}{3}T_1) & F'_5 &= F_5 \exp(i\sigma T_1) \\
F'_2 &= F_2 \exp(i\frac{\sigma}{3}T_1) & F'_6 &= F_6 \exp(i\sigma T_1) \\
F'_3 &= F_3 \exp(i\sigma T_1) & F'_7 &= F_7 \exp(-3\sigma T_1).
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Impondo a condição de eliminação de termos seculares, temos

$$F_0 + F_3 \exp(i\sigma T_1) = 0 \tag{5.90}$$

Assim, temos que a equação do bloco pode ser escrita como

$$D_0^2 u_1 + u_1 = Q'_2(T_0, T_1) + \sum_{j=1, j \neq 3}^7 F'_j \exp(i\varpi'_j T_0) + \sum_{j=1, j \neq 3}^7 \overline{F}'_j \exp(-i\varpi'_j T_0). \tag{5.91}$$

Resolvendo a equação (5.91) acima, obtemos que uma solução particular é dada por

$$u_{1p} = \tilde{u}_p + \sum_{j=1, j \neq 3}^7 \frac{F'_j}{1 - \varpi_j'^2} \exp(i\varpi_j' T_0) + \sum_{j=1, j \neq 3}^7 \frac{\overline{F'_j}}{1 - \varpi_j'^2} \exp(-i\varpi_j' T_0). \quad (5.92)$$

onde \tilde{u}_p é dada por (5.48). Derivando duas vezes em relação a T_0 , levando na equação do pêndulo, temos

$$\begin{aligned} D_0^2 \theta_1 + \omega_3^2 \theta_1 = & -D_0^2 \tilde{u}_p + \sum_{j=1, j \neq 3}^7 \frac{\varpi_j'^2 F'_j}{1 - \varpi_j'^2} \exp(i\varpi_j' T_0) + \sum_{j=1, j \neq 3}^7 \frac{\varpi_j'^2 \overline{F'_j}}{1 - \varpi_j'^2} \exp(-i\varpi_j' T_0) \\ & + [-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1}] \exp(iT_0) + [-\hat{\mu} i \omega_3 A_3 - 2i \omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial T_1}] \exp(i\omega_3 T_0) + c.c.. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Procedendo analogamente ao caso $\omega_3 \approx 3$ e observando que se

$$2\omega_3 - 1 = -\omega_3 T_0 + \sigma T_1, \quad (5.94)$$

então o complexo conjugado do número $-i\omega_3 T_0 + i\sigma T_1$ é dado por $i\omega_3 T_0 - i\sigma T_1$, e portanto, este termo é gerador de termo secular. Assim, a condição de eliminação de termos seculares implica que

$$-2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + F_2 \frac{\omega_3^2}{1 - \omega_3^2} + \frac{\overline{F_5} \omega_3^2}{1 - \omega_3^2} \exp(-i\sigma T_1) = 0 \quad (5.95)$$

Logo, as condições de eliminação de termos seculares são dadas por

$$\begin{aligned} F_0 + F_3 \exp(i\sigma T_1) = 0 \\ -2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \hat{\mu}_3 i A_1 \Lambda - 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + F_2 \frac{\omega_3^2}{1 - \omega_3^2} + \frac{\overline{F_5} \omega_3^2}{1 - \omega_3^2} \exp(-i\sigma T_1) = 0. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Resolvendo as equações acima obtemos as equações que descrevendo as modulações de amplitudes e fases do sistema, na condição de ressonância 1 : 3, e dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -\frac{\hat{\mu}_1 a_1}{2} - \frac{\hat{m}_3 \omega_3^2 a_3^3}{8} \sin(\sigma T_1 + 3\beta_3 - \beta_1) \\
-a_1 \dot{\beta}_1 &= -\frac{\hat{m}_3 (\omega_3^2 a_3^2 + a_1^2 \Lambda^2)}{4} + \frac{\hat{m}_3 a_1^3 \Lambda^3}{8} \\
&\quad - \frac{\hat{m}_3 a_1 \Lambda}{2} - \frac{\hat{m}_3 a_3^3 \omega_3^2}{8} \cos(\sigma T_1 + 3\beta_3 - \beta_1) \\
\dot{a}_3 &= -\frac{\hat{\mu}_3 a_3}{2} + \frac{\hat{m}_3 \omega_3^3 a_3^2}{4(1 - \omega_3^2)} \sin \beta_3 + \frac{\hat{m}_3}{4\omega_3(1 - \omega_3^2)} [\omega_2^2 a_3 a_1 \Lambda \\
&\quad - \frac{\omega_3^2 a_3^2 a_1 \Lambda}{2}] \sin(\beta_3 - \beta_1 - \sigma T_1) \\
a_3 \dot{\beta}_3 &= \frac{1}{\omega_3^2 (\omega_3^2 - 1)} [\hat{m}_3 \omega_3^2 [(\omega_3^2 a_3 + a_1^2 \Lambda^2) \frac{a_3}{4} + \frac{\omega_3^2 a_3}{2}] - \frac{\hat{m}_3 \omega_3^4 a_3^2}{4} \cos(\beta_3) \\
&\quad + \hat{m}_3 [\frac{\omega_3 a_3^2 a_1 \Lambda}{4} - \frac{\omega_3^2 a_3^2 a_1 \Lambda}{8}] \cos(\beta_3 - \beta_1 - \sigma T_1)]
\end{aligned} \tag{5.97}$$

Assim, as soluções podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
u_0(T_0, T_1) &= a_1(T_1) \cos(T_0 + \beta_1(T_1)) \\
\varphi_0(T_0, T_1) &= A_2(T_1) + B_2(T_1) \exp(-\frac{b}{I\omega} T_0) + \frac{\alpha}{\beta\omega} T_0 \\
\theta_0(T_0, T_1) &= a_3(T_1) \cos(\omega_3 T_0 + \beta_3(T_1)) + a_1(T_1) \Lambda \cos(\frac{1}{3} \omega_3 T_0 + \beta_3(T_1))
\end{aligned} \tag{5.98}$$

onde

a_1 , β_1 , a_3 e β_3 são dados pelas soluções de (5.97).

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

O objetivo deste trabalho foi investigar o sistema pêndulo elétrico-mecânico, o qual é composto de um bloco que vibra horizontalmente devido ao acionamento de um motor DC que possui uma massa desbalanceada e um pêndulo acoplado ao bloco que dissipa energia na forma de vibrações mecânicas.

Primeiramente obtivemos as equações que descrevem o sistema pêndulo elétrico-mecânico através das equações de Euler - Lagrange. Devido ao fato do sistema de equações não apresentar solução analítica, introduzimos algumas simplificações e fizemos algumas considerações de modo a possibilitar a utilização dos métodos da média e das múltiplas escalas.

Na aplicação do método da média verificamos a existência de diversas ressonâncias internas secundárias entre o bloco e o pêndulo, sob a consideração de interação ressonante primária entre o bloco e o motor. Assim, para cada caso obtivemos um conjunto de equações médias que possibilitam o estudo da estabilidade dos estados estacionários pela aplicação do critério R-H. Devido ao grande número de parâmetros, não linearidades e o acoplamento das equações do sistema, a obtenção de resultados analíticos, pela aplicação do critério R-H, mostrou-se infrutífera e então optamos por uma abordagem numérica para o cálculo das condições do critério R-H. Essa abordagem possibilitou maiores condições para obter gráficos e fazer as análises da estabilidade dos estados estacionários.

As várias curvas obtidas pela resolução da equação de resposta de frequência utilizando diversos parâmetros de controle mostram que o sistema pêndulo elétrico-mecânico é um sistema rico em efeitos dinâmicos, já que conseguimos uma boa parte das curvas disponíveis na literatura pesquisada e, além disso, determinamos outras curvas interessantes tais como quando tomamos o amortecimento do bloco como parâmetro de controle e a massa perturbativa.

A determinação da equação de resposta de frequência possibilitou o estudo da estabilidade dos estados estacionários através da análise da parte real dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema. Verificamos a existência de um autovalor nulo, o que implica a existência de uma variedade central associada ao sistema, e, portanto, o critério R-H teve que ser aplicado em conjunto com a variedade central para a obtenção das conclusões. A variedade central não foi calculada, mas fizemos algumas suposições de estabilidade ou não estabilidade de modo a possibilitar a utilização dos resultados obtidos na literatura disponível juntamente com os resultados obtidos pelo critério R-H. Nos pontos onde o sistema perde a estabilidade calculamos o número de autovalores com parte real positiva utilizando as condições de Routh.

Na aplicação do método das múltiplas escalas encontramos, primeiramente, termos seculares mistos e pequenos divisores através do método da expansão direta. Com a determinação dos termos seculares mistos e pequenos divisores foi possível considerar as diversas ressonâncias internas existentes no sistema pêndulo elétrico-mecânico e obter as equações que descrevem as modulações de amplitudes e fases para os movimentos do bloco e do pêndulo, que tornam a solução analítica aproximada livre de termos seculares mistos.

A análise das regiões onde são possíveis estados estacionários é feita, simplesmente, impondo as condições de que as equações diferenciais ordinárias que descrevem as modulações de amplitude e fase do sistema são nulas nos estados estacionários. Neste caso, não fizemos a análise da estabilidade, mas apenas determinamos algumas regiões onde são possíveis estados estacionários. As condições de ressonâncias para a frequência $\omega_3 \approx 0$ e $\omega_3 \approx 1$ foram deixadas para estudos posteriores devido ao fato de que são necessárias considerações adicionais, e toda a álgebra efetuada na utilização do método da média precisa ser refeita.

6.2 Trabalhos Futuros

Em estudos posteriores pretendemos dar continuidade aos estudos do sistema pêndulo elétrico-mecânico. Um ponto importante a ser tratado são as outras ressonâncias internas e a análise da estabilidade dos estados estacionários, que exceto no caso $\omega_3 \approx 0$, já sabemos que será necessário a utilização da teoria da variedade central. Além disso, o cálculo das variedades centrais associadas ao sistema pode determinar completamente o comportamento do sistema, juntamente com a aplicação do critério R-H. Um estudo das bifurcações que ocorrem, quais tipos e mecanismos de transição para o caos, além da análise de fenômenos de sincronização também pode ser realizado.

Além disso, podemos efetuar simulações numéricas com o sistema de equações, sendo que as equações médias e os estudos preliminares servirão de suporte e guias na realização destas simulações. Por outro lado, podemos usar teoria de perturbações para as coordenadas generalizadas e a formulação Hamiltoniana do sistema pêndulo elétrico-mecânico.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, E. W.; DIPRIMA, R. C.; **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [2] BASSANEZI, R.C.; FERREIRA JR, W. C.; **Equações diferenciais com aplicações**, São Paulo: Harbra, 1998.
- [3] BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T., REYOLANDO, M. L. R. F., WEBER, H. I., FENILI, A., BELATO, D., FELIX, J. L. P.; **Recent results on vibrating problems with limited power supply**. In. 6th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Łódź, Polonia. Proceedings 6th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, 2001, v. , pp. .
- [4] BALTHAZAR, J. M.; BELATO, D.; DE MATTOS, M. C., WIECZOREK, S.; **On vibrating systems with a Limited Power Supply and Their Applications to Engineering Sciences**. In. Seminário Brasileiro de Análise, Campinas, SP, Brasil. Anais do Seminário Brasileiro de Análise, 1999, pp.137-227.
- [5] BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T., WEBER, H. I.; REYOLANDO, M. L. R. F.; FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, J. L. P.; **An overview on non-ideal vibrations**. Meccanica, aceito.
- [6] BALTHAZAR, J. M.; REYOLANDO, M. L. R. F.; WEBER, H. I., FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, J. L. P.; GARZELLI, F. J. **A review of new vibrating issues due to non-ideal energy sources**. Dynamical Systems and Control, Taylor, Francis Group, edited by: F. Udwadia, H. I. Weber, G. Leimann. ISBN: 0415309972.
- [7] BALTHAZAR, J. M.; PONTES, B. R.; **On friction induced non-linear and non-ideal (regular and chaotic) vibrations: a source of fatigue**. Dynamical

Systems and Control, Taylor, Francis Group, edited by: F. Udwadia, H. Weber, G. Leitmann. ISBN: 0415309972.

- [8] BALTHAZAR, J. M.; JUNIOR, E. B. R.; MATTOS, M. C.; **A Dinâmica do Acoplamento de um Motor de Corrente Contínua e sua Estrutura de Suporte**, 4º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, 6-10 de Junho de 2005, UNESP - Campus de Bauru.
- [9] KLEBER A. L. C.; FELIX, J. L. P.; BALTHAZAR, J.M.; PONTES JR., B.R.; **On a dynamics responses of a nonlinear oscillator with dry friction and driven by a non-ideal source**, 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, May 21-25, 2007, UNESP- Campus São José do Rio Preto, SP, Brazil.
- [10] FELIX, J.L.P.; BALTHAZAR, J.M.; BRASIL, R.M.L.R.F.; ABREU, C.L.; SILVA, SABRINA.; SOUZA, ELEMAR.; **Analytical aproximations of a non-ideal beam modeled with nonlinear damping and stiffness**, 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, May 21-25, 2007, UNESP- Campus São José do Rio Preto, SP, Brazil.
- [11] PICCIRILLO, V.; BALTHAZAR, J.M.; PONTES JR, B. R.; **On the dynamics of a shape memory oscillator, under superharmonic excitation**, 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, May 21-25, 2007, UNESP- Campus São José do Rio Preto, SP, Brazil.
- [12] FELIX, J.L.P.; BALTHAZAR, J.M.; **On a control strategy for a non-ideal vibrating system, by using electro-magneto and magneto-rheological dampers like device**. 7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, May 07-09, 2008, FCT-UNESP at Presidente Prudente, SP, Brazil.
- [13] IOSSAQUI, J.G.; BALTHAZAR, J.M.; JUNIOR, B.R.P.; FELIX, J.L.P.; **Om a passive control in a nonlinear nonideal system**. 7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, May 07-09, 2008, FCT-UNESP at Presidente Prudente, SP, Brazil.
- [14] BELATO, D.; **Análise Não Linear de Sistemas Dinâmicos Holonômos Não Ideais** Tese de Doutorado, Campinas, SP:[s.n], 2002.

-
- [15] DIAS, A. O.; TSUCHIDA, M.; **Obtenção das equações de movimento e o estudo do pêndulo mecânico**. XXV CNMAC, Nova Friburgo, 2002.
- [16] DIAS, A. O.; TSUCHIDA, M.; **Dinâmica do sistema pêndulo mecânico não ideal nas principais ressonâncias**. I Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON 2002), São José do Rio Preto, 2002.
- [17] DIAS, A. O.; TSUCHIDA, M.; BRASIL, R. M. L. R. F.; BALTHAZAR, J. M.; **Modelagem matemática de um pêndulo excitado horizontalmente**. XXVI CNMAC, São José do Rio Preto, 2003.
- [18] DIAS, A. O.; TSUCHIDA, M.; BRASIL, R. M. L. R. F.; BALTHAZAR, J. M.; **Análise de um pêndulo com vibração horizontal**. II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON 2003), São José dos Campos, 2003.
- [19] DIAS, A. O.; TSUCHIDA, M.; **Estudo de um pêndulo mecânico não ideal**. XXVII CNMAC, Porto Alegre, 2004.
- [20] DIAS, A. O.; TSUCHIDA, M.; BRASIL, R. M. L. R. F.; **Estudo de um pêndulo mecânico não ideal**. IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON 2005), Bauru, 2005.
- [21] DIAS, A. O.; TSUCHIDA, M.; BRASIL, R. M. L. R. F.; **Análise de um pêndulo mecânico não ideal nas principais ressonâncias**. XXVIII CNMAC, São Paulo, 2005.
- [22] DIAS, A. O.; **Estudo de um sistema mecânico com pêndulo sob excitação não ideal**. Dissertação de Mestrado, IBILCE/UNESP, São José do Rio Preto, 2006.
- [23] FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C.P.C.; **Caos, uma introdução**, São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1994.
- [24] GAMOW, George.; **Biografia da Física**. Rio de Janeiro. Zahar Editores. 1963.
- [25] HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B.; **Matlab 6 Curso Completo**, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- [26] KONONENKO, V.O.; **Vibrating Systems with a Limited Power Suply**, London Iliffe Books Ltda., 1969.

-
- [27] KUZNETSOV, Y.A.; **Elements of Applied Bifurcation Theory Series: Applied Mathematical Sciences**, Vol.112, 2.ed., New York: Springer Verlag,1994.
- [28] MONTEIRO, L. H. A.; **Sistemas Dinâmicos**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
- [29] NAYFEH, A. H.; **Introduction to Perturbation Techniques**, New York: John Wiley & Sons Inc., 1981.
- [30] NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B.; **Applied Nonlinear Dynamics**, New York: John Wiley & Sons Inc., 1981.
- [31] NAYFEH, A.H.; **Perturbation Methods**, New York: John Wiley & Sons Inc., 1993.
- [32] NAYFEH, A.H.; MOOK, D.T.; **Nonlinear Oscillations**, New York: John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [33] PICCIRILLO, V.; BALTHAZAR, J.M.; JUNIOR, B.R.P.; FELIX, J.L.P.; **On Sommerfeld Effect in a non-ideal vibrating system, with(SMA), using an averaging method**, Euromech 498 colloquium Books of Abstracts, pp.-© 2008, Lublin University of Technology.
- [34] SAVI, M.A.; **Caos em sistemas mecânicos**, Anais do I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, Vol. 1,(2002),1-27.

Apêndice A

Programas em Matlab[®]

Neste apêndice descrevemos um programa utilizando o Matlab[®] [25]. Todos os outros programas diferem apenas pelo parâmetro de controle e as respectivas alterações que a mudança no parâmetro de controle acarreta.

A.1 Parâmetro de controle: frequência Ω da rotação do motor

```
% arquivo M $dis_sem_bloco_duascurvas.m
% Aqui vou calcular como a amplitude de oscilações do bloco varia
% com a freq\{"u\}ência do motor.
% Os coeficientes definidos abaixo são os mesmos utilizados
% em linguagem FORTRAN para simular o sistema dinâmico pêndulo nao ideal
% na condição longe da ressonância.
% Coeficientes-(em FORTRAN isto aqui são parâmetros);
% PARÂMETROS UTILIZADOS
g = 9.80665; m1=3.850; m2=0.008532; m3=0.5; l=1.19; r=0.075;
c1=0.0008622064717919948; c3=0.3234; k1=1.75;$

% PARÂMETRO DE SINTONIA
sigma=-0.000990122059442;

% COEFICIENTES, INTERVALO, TAMANHO DO PASSO, QUANTIDADE DE ITERAÇÕES
```

```

Omega(1)=0.1;Omegaf=55.4; h=0.5; x1=abs(Omega(1)); x2=abs(Omegaf);
n=floor((x2-x1)/h);

% DEFINIÇÃO DOS COEFICIENTES PARA O CÁLCULO DO POLINOMIO
a3=0.009; a1=0.05; b1=0.02; m=m1+m2+m3; Ic=m2*(r^2)+0.37;
w=sqrt(k1/m); epsm3=m3/m; w3=sqrt(g/(1*(w^2))); del=1.0/(w3^2-1.0);
gam=1.0+epsm3*del; p2=(m2*r)/(m*1); p3=(m2*r*1)/Ic; p4=(m2*r)/Ic;
mu1=c1/(m*w); mu3=c3/(m3*(1^2)*w);peq1=a1*(1.0/(Ic*w^2));
peq2=b1*(1.0/(Ic*w^2));&N=-peq2*w

% POLINÔMIO EM (a - amplitude do bloco) SER CALCULADO
% a^2*mu1^2+4*a^2*sigma^2+4*a^2*sigma*m3*del-
% a^4*sigma*m3*del^3+a^2*m3^2*del^2-1/2*a^4*m3^2*del^4+1/16*a^6*m3^2*del^6

% DEFINIÇÃO DOS COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA CÁLCULO COM O MATLAB
coef6=(1/16)*(epsm3^2)*(del^6); coef5=0; coef4=-(sigma*epsm3*del^3+
0.5*(epsm3^2)*(del^4)); coef3=0;
coef2=mu1^2+4*sigma^2+4*sigma*epsm3*del+(epsm3^2)*(del^2); coef1=0;
coef0=-(p2*Omega(1)^2)^2;

% COEFICIENTES PARA O CÁLCULO DA EQUAÇÃO DE OSCILAÇÕES FORÇADAS
coef(1)=((p3*mu1)/(2*p2*Omega(1)));

% DEFINIÇÃO DO POLINÔMIO A SER CALCULADO
p=[coef6 coef5 coef4 coef3 coef2 coef1 coef0];

% RAÍZES DE P NO PRIMEIRO PASSO
z=roots(p);

s(1)=z(1); t(1)=z(2);u(1)=z(3);v(1)=z(4);x(1)=z(5);y(1)=z(6);

% estrutura de decisão:

```

decidir quais raízes são interessantes para o estudo do sistema pêndulo mecânico, ou seja, raízes maiores ou iguais a zero(Reais)

```

if (imag(s(1))~=0|s(1)<0)
    s1(1)=-3; f1(1)=-3;
    b11=0; b12=0; b13=0; b14=0; b15=0;
    b21=0; b22=0; b23=0; b24=0; b25=0;
    b31=0; b32=0; b33=0; b34=0; b35=0;
    b41=0; b42=0; b43=0; b44=0; b45=0;
    b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
    J11=0; J22=0; J33=0;
    B11(1)=-3; B21(1)=-3; B31(1)=-3; Crit31(1)=-3;
else
    s1(1)=s(1); f1(1)=coef(1)*(s1(1)^2);

% COEFICIENTES DO CRITÉRIO R-H
delta2=0.5*(a3^2)*w3*s1(1)*del+0.5*(a3^3)*(del^3)-0.25*(s1(1)^3)*(del^3);
partiala1delta2=0.5*(a3^2)*w3*del-(3/4)*(s1(1)^2)*(del^3);

b11= N-((p3*mu1)/(2*p2*(Omega(1)^2)))*(s1(1)^2);
b12=-((p3*mu1)/(2*p2*Omega(1)))*s1(1);
b13=-((s1(1)*p3)/p2)*(sigma+(epsm3*del/2))*(s1(1)/Omega(1))
-((s1(1)*p3)/p2)*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2 ;
b14=0; b15=0;

b21=(mu1/(gam*Omega(1)))*s1(1);
b22=-(mu1/(2*gam));
b23=(s1(1)/gam)*(sigma+(epsm3/2)*del)
+(s1(1)/gam)*(epsm3/(2*s1(1)))*delta2;
b24=0; b25=0;

```

```

b31=( 2/(s1(1)*gam))*((sigma+(epsm3*del/2))
+(2/(s1(1)*gam))*(epsm3/(2*0mega(1)))*delta2);
b32=-(1/(s1(1)*gam))*(sigma+epsm3*del/2)
-((epsm3)/(2*s1(1)*gam))*partiala1delta2;
b33=-(mu1/(2*gam));
b34=-(epsm3/(2*s1(1)*gam))*((a3^2)*w3*del*s1(1)
+(3/2)*(a3^2)*(del^3));
b35=0;

b41=0; b42=0; b43=0; b44=-0.5*mu3; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;

J11=b22*b33-b32*b23;
J22=b11*b33-b13*b31;
J33=b11*b22-b12*b21;
d1=b11*b22*b33; d2=b12*b23*b31;
d3=b13*b32*b21; d4=b13*b22*b31;
d5=b12*b21*b33; d6=b11*b32*b23;

B11(1)=-(b11+b22+b33); B21(1)=J11+J22+J33;
B31(1)=-(d1+d2+d3-d4-d5-d6); Crit31(1)=B11(1)*B21(1)-B31(1);
end

if (imag (t(1))~=0|t(1)<0)
    t1(1)=-3; f2(1)=-3;$

b11=0; b12=0; b13=0; b14=0; b15=0;
b21=0; b22=0; b23=0; b24=0; b25=0;
b31=0; b32=0; b33=0; b34=0; b35=0;
b41=0; b42=0; b43=0; b44=0; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
J11=0; J22=0; J33=0;

```



```

    B12(1)=-3; B22(1)=-3; B32(1)=-3; Crit32(1)=-3;
else
t1(1)=t(1); f2(1)=coef(1)*(t1(1)^2);

% COEFICIENTES DO CRITÉRIO R-H
delta2=0.5*(a3^2)*w3*t1(1)*del+0.5*(a3^3)*(del^3)-0.25*(t1(1)^3)*(del^3);
partiala1delta2=0.5*(a3^2)*w3*del-(3/4)*(t1(1)^2)*(del^3);
b11=N-((p3*mu1)/(2*p2*(Omega(1)^2)))*(t1(1)^2);
b12=-((p3*mu1)/(2*p2*Omega(1)))*t1(1);
b13=-((t1(1)*p3)/p2)*(sigma+(epsm3*del/2))*(t1(1)/Omega(1))-
((t1(1)*p3)/p2)*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2 ;
b14=0; b15=0;

b21=(mu1/(gam*Omega(1)))*t1(1);
b22=-(mu1/(2*gam));
b23=(t1(1)/gam)*(sigma+(epsm3/2)*del)+(t1(1)/gam)*(epsm3/(2*t1(1)))*delta2;
b24=0; b25=0;

b31=(2/(t1(1)*gam))*((sigma+(epsm3*del/2))
+(2/(t1(1)*gam))*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2);
b32=-(1/(t1(1)*gam))*(sigma+epsm3*del/2)
-((epsm3)/(2*t1(1)*gam))*partiala1delta2;
b33=-(mu1/(2*gam)); b34=-(epsm3/(2*t1(1)*gam))*(
(a3^2)*w3*del*t1(1)+(3/2)*(a3^2)*(del^3)); b35=0;
b41=0; b42=0; b43=0; b44=-0.5*mu3; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
J11=b22*b33-b32*b23;
J22=b11*b33-b13*b31;
J33=b11*b22-b12*b21;
d1=b11*b22*b33; d2=b12*b23*b31;
d3=b13*b32*b21; d4=b13*b22*b31;
d5=b12*b21*b33; d6=b11*b32*b23;

```

```

B12(1)=-(b11+b22+b33);
B22(1)=J11+J22+J33;
B32(1)=-(d1+d2+d3-d4-d5-d6); Crit32(1)=B12(1)*B22(1)-B32(1);\end{array}
end

if (imag(u(1))~=0|u(1)<0)

u1(1)=-3;f3(1)=-3;
    b11=0; b12=0; b13=0; b14=0; b15=0;
    b21=0; b22=0; b23=0; b24=0; b25=0;
    b31=0; b32=0; b33=0; b34=0; b35=0;
    b41=0; b42=0; b43=0; b44=0; b45=0;
    b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
    J11=0; J22=0; J33=0;
    B13(1)=-3; B23(1)=-3; B33(1)=-3; Crit33(1)=-3;
else
    u1(1)=u(1); f3(1)=coef(1)*(u1(1)^2);

%COEFICIENTES DO CRITÉRIO R-H
    delta2=0.5*(a3^2)*w3*u1(1)*del+0.5*(a3^3)*(del^3)-0.25*(u1(1)^3)*(del^3);
    partiala1delta2=0.5*(a3^2)*w3*del-(3/4)*(u1(1)^2)*(del^3);
    b11= N-((p3*mu1)/(2*p2*(Omega(1)^2)))*(u1(1)^2);
    b12=-((p3*mu1)/(2*p2*Omega(1)))*u1(1);
    b13=-((u1(1)*p3)/p2)*(sigma+(epsm3*del/2))*(u1(1)/Omega(1))-
    ((u1(1)*p3)/p2)*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2 ;
    b14=0; b15=0;

    b21=(mu1/(gam*Omega(1)))*u1(1);
    b22=-(mu1/(2*gam));
    b23=(u1(1)/gam)*(sigma+(epsm3/2)*del)+(u1(1)/gam)*(epsm3/(2*u1(1)))*delta2;
    b24=0; b25=0;

```

```

b31=( 2/(u1(1)*gam))*((sigma+(epsm3*del/2))
+(2/(u1(1)*gam))*(epsm3/(2*0mega(1)))*delta2);
b32=-(1/(u1(1)*gam))*(sigma+epsm3*del/2)
-((epsm3)/(2*u1(1)*gam))*partiala1delta2;
b33=-(mu1/(2*gam));
b34=-(epsm3/(2*u1(1)*gam))*((a3^2)*w3*del*u1(1)+(3/2)*(a3^2)*(del^3));
b35=0;
b41=0; b42=0; b43=0; b44=-0.5*mu3; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0;b55=0;
J11=b22*b33-b32*b23;
J22=b11*b33-b13*b31;
J33=b11*b22-b12*b21;
d1=b11*b22*b33; d2=b12*b23*b31; d3=b13*b32*b21;
d4=b13*b22*b31; d5=b12*b21*b33; d6=b11*b32*b23;

B13(1)=-(b11+b22+b33); B23(1)=J11+J22+J33;
B33(1)=-(d1+d2+d3-d4-d5-d6); Crit33(1)=B13(1)*B23(1)-B33(1);
end

if (imag(v(1))~=0|v(1)<0) v1(1)=-3; f4(1)=-3;

b11=0; b12=0; b13=0; b14=0; b15=0;
b21=0; b22=0; b23=0; b24=0; b25=0;
b31=0; b32=0; b33=0; b34=0; b35=0;
b41=0; b42=0; b43=0; b44=0; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
J11=0; J22=0; J33=0;
B14(1)=-3; B24(1)=-3; B34(1)=-3; Crit34(1)=-3;
else
v1(1)=v(1); f4(1)=coef(1)*(v1(1)^2);

% COEFICIENTES DO CRITÉRIO R-H

```

```

delta2=0.5*(a3^2)*w3*v1(1)*del+0.5*(a3^3)*(del^3)-0.25*(v1(1)^3)*(del^3);
partiala1delta2=0.5*(a3^2)*w3*del-(3/4)*(v1(1)^2)*(del^3);
b11= N-((p3*mu1)/(2*p2*(Omega(1)^2)))*(v1(1)^2);
b12=-((p3*mu1)/(2*p2*Omega(1)))*v1(1);
b13=-((v1(1)*p3)/p2)*(sigma+(epsm3*del/2))*(v1(1)/Omega(1))-
((v1(1)*p3)/p2)*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2;
b14=0; b15=0;

b21=(mu1/(gam*Omega(1)))*v1(1);
b22=-(mu1/(2*gam));
b23=(v1(1)/gam)*(sigma+(epsm3/2)*del)
+(v1(1)/gam)*(epsm3/(2*v1(1)))*delta2;
b24=0; b25=0;

b31=( 2/(v1(1)*gam))*((sigma+(epsm3*del/2))
+(2/(v1(1)*gam))*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2);
b32=-(1/(v1(1)*gam))*(sigma+epsm3*del/2)
-((epsm3)/(2*v1(1)*gam))*partiala1delta2;
b33=-(mu1/(2*gam));
b34=-(epsm3/(2*v1(1)*gam))*((a3^2)*w3*del*v1(1)+(3/2)*(a3^2)*(del^3));
b35=0;

b41=0; b42=0; b43=0; b44=-0.5*mu3; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
J11=b22*b33-b32*b23;
J22=b11*b33-b13*b31;
J33=b11*b22-b12*b21;
d1=b11*b22*b33; d2=b12*b23*b31;
d3=b13*b32*b21; d4=b13*b22*b31;
d5=b12*b21*b33; d6=b11*b32*b23;
B14(1)=-(b11+b22+b33); B24(1)=J11+J22+J33;
B34(1)=-(d1+d2+d3-d4-d5-d6); Crit34(1)=B14(1)*B24(1)-B34(1);

```

end

```
if imag(x(1))~=0|x(1)<0
```

```
    x1(1)=-3; f5(1)=-3;
```

```
    b11=0; b12=0; b13=0; b14=0; b15=0;
```

```
    b21=0; b22=0; b23=0; b24=0; b25=0;
```

```
    b31=0; b32=0; b33=0; b34=0; b35=0;
```

```
    b41=0; b42=0; b43=0; b44=0; b45=0;
```

```
    b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
```

```
    J11=0; J22=0; J33=0;
```

```
    B15(1)=-3; B25(1)=-3;
```

```
    B35(1)=-3; Crit35(1)=-3;
```

```
else x1(1)=x(1); f5(1)=coef(1)*(x1(1)^2);
```

```
% COEFICIENTES DO CRITÉRIO R-H
```

```
    delta2=0.5*(a3^2)*w3*x1(1)*del+0.5*(a3^3)*(del^3)-0.25*(x1(1)^3)*(del^3);
```

```
    partiala1delta2=0.5*(a3^2)*w3*del-(3/4)*(x1(1)^2)*(del^3);
```

```
    b11=N-((p3*mu1)/(2*p2*(Omega(1)^2)))*(x1(1)^2);
```

```
    b12=-((p3*mu1)/(2*p2*Omega(1)))*x1(1);
```

```
    b13=-((x1(1)*p3)/p2)*(sigma+(epsm3*del/2))*(x1(1)/Omega(1))
```

```
    -((x1(1)*p3)/p2)*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2 ;
```

```
    b14=0; b15=0;
```

```
    b21=(mu1/(gam*Omega(1)))*x1(1);
```

```
    b22=-(mu1/(2*gam));
```

```
    b23=(x1(1)/gam)*(sigma+(epsm3/2)*del)+(x1(1)/gam)*(epsm3/(2*x1(1)))*delta2;
```

```
    b24=0; b25=0;
```

```
    b31=(2/(x1(1)*gam))*((sigma+(epsm3*del/2))
```

```
    +(2/(x1(1)*gam))*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2);
```

```
    b32=-(1/(x1(1)*gam))*(sigma+epsm3*del/2)
```

```
    -((epsm3)/(2*x1(1)*gam))*partiala1delta2;
```

```

b33=-(mu1/(2*gam));
b34=-(epsm3/(2*x1(1)*gam))*((a3^2)*w3*del*x1(1)+(3/2)*(a3^2)*(del^3));
b35=0; b41=0; b42=0; b43=0; b44=-0.5*mu3; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
J11=b22*b33-b32*b23;
J22=b11*b33-b13*b31;
J3=b11*b22-b12*b21;
d1=b11*b22*b33; d2=b12*b23*b31;
d3=b13*b32*b21; d4=b13*b22*b31;
d5=b12*b21*b33; d6=b11*b32*b23;
B15(1)=-(b11+b22+b33);
B25(1)=J11+J22+J33;
B35(1)=-(d1+d2+d3-d4-d5-d6);
Crit35(1)=B15(1)*B25(1)-B35(1);
end

```

```

if (imag(y(1))~=0|y(1)<0) y1(1)=-3; f6(1)=-3;

```

```

b11=0; b12=0; b13=0; b14=0; b15=0;
b21=0; b22=0; b23=0; b24=0; b25=0;
b31=0; b32=0; b33=0; b34=0; b35=0;
b41=0; b42=0; b43=0; b44=0; b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
J11=0; J22=0; J33=0;
B16(1)=-3; B26(1)=-3; B36(1)=-3; Crit36(1)=-3;
else
y1(1)=y(1); f6(1)=coef(1)*(y1(1)^2);

```

```

% COEFICIENTES DO CRITÉRIO R-H

```

```

delta2=0.5*(a3^2)*w3*y1(1)*del+0.5*(a3^3)*(del^3)-0.25*(y1(1)^3)*(del^3);
partiala1delta2=0.5*(a3^2)*w3*del-(3/4)*(y1(1)^2)*(del^3);
b11= N-((p3*mu1)/(2*p2*(Omega(1)^2)))*(y1(1)^2);

```

```

b12=-((p3*mu1)/(2*p2*Omega(1)))*y1(1);
b13=-((y1(1)*p3)/p2)*(sigma+(epsm3*del/2))*(y1(1)/Omega(1))-
((y1(1)*p3)/p2)*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2 ;
b14=0;b15=0;

b21=(mu1/(gam*Omega(1)))*y1(1);
b22=-(mu1/(2*gam));
b23=(y1(1)/gam)*(sigma+(epsm3/2)*del)
+(y1(1)/gam)*(epsm3/(2*y1(1)))*delta2;
b24=0;\hspace{0.2cm} b25=0;

b31=(2/(y1(1)*gam))*((sigma+(epsm3*del/2))
+(2/(y1(1)*gam))*(epsm3/(2*Omega(1)))*delta2);
b32=-(1/(y1(1)*gam))*(sigma+epsm3*del/2)
-((epsm3)/(2*y1(1)*gam))*partiala1delta2;
b33=-(mu1/(2*gam));
b34=-(epsm3/(2*y1(1)*gam))*((a3^2)*w3*del*y1(1)+(3/2)*(a3^2)*(del^3));
b35=0;

b41=0; b42=0; b43=0; b44=-0.5*mu3;b45=0;
b51=0; b52=0; b53=0; b54=0; b55=0;
J11=b22*b33-b32*b23;
J22=b11*b33-b13*b31;
J33=b11*b22-b12*b21;
d1=b11*b22*b33; d2=b12*b23*b31;
d3=b13*b32*b21; d4=b13*b22*b31;
d5=b12*b21*b33; d6=b11*b32*b23;
B16(1)=-(b11+b22+b33); B26(1)=J11+J22+J33;
B36(1)=-(d1+d2+d3-d4-d5-d6); Crit36(1)=B16(1)*B26(1)-B36(1);
end

% LOOP

```

```

for i=1:n
% INCREMENTO EM OMEGA
Omega(i+1)=Omega(i)+h;

% CÁLCULO DOS COEFICIENTES QUE VARIAM
coef0=-(p2*(Omega(i+1))^2)^2;
coef(i+1)=((p3*mu1)/(2*p2*Omega(i+1)));
p=[coef6 coef5 coef4 coef3 coef2 coef1 coef0];
z=roots(p);

s(i+1)=z(1); t(i+1)=z(2); u(i+1)=z(3); v(i+1)=z(4); x(i+1)=z(5); y(i+1)=z(6);

ESTRUTURA DE DECISÃO DENTRO DO LOOP
A partir deste ponto a estrutura de decisão se repete,
levando em conta que estamos dentro do loop, e
por isso devemos trocar 1 por
i+1 em todos os itens.
end %(FIM DO LOOP)

% DEFINIÇÃO DAS MATRIZES CALCULADAS NO PROGRAMA ACIMA
A1=[s1',t1',u1',v1',x1',y1'];
F1=[f1',f2',f3',f4',f5',f6'];
B1=[B11',B12',B13',B14',B15',B16'];
B2=[B21',B22',B23',B24',B25',B26'];
B3=[B31',B32',B33',B34',B35',B36'];
Crit3=[Crit31',Crit32',Crit33',Crit34',Crit35',Crit36'];
Crit31=[Crit31;Crit32;Crit33;Crit34;Crit35;Crit36];

% EXEMPLO PARA GRÁFICOS: plot(Omega,A1,'x');

% ESTRUTURA DE DECISÃO NÚMERO 2: DECIDIR QUANDO OS COEFICIENTES
DO CRITÉRIO R-H SÃO POSITIVOS, NEGATIVOS OU NULOS

```


% CRITÉRIO RH(ESTRUTURA DE DECISÃO 2)

```
for i=1:(n+1)
    for j=1:6
        if (B1(i,j)< 0 & B1(i,j)~-3)\\
            B1v(i,j)=-1.10;
        elseif B1(i,j) > 0
            B1v(i,j)=0.1;
        elseif (B1(i,j)==0)
            B1v(i,j)=0;
        else
            B1v(i,j)=-2.1;
        end
    end
end
```

```
for i=1:(n+1)
    for j=1:6
        if B2(i,j)$>$0
            B2v(i,j)=0.20;
        elseif (B2(i,j)<0 & $B2(i,j)~-3)
            B2v(i,j)=-1.2;
        elseif (B2(i,j)==0)
            B2v(i,j)=0;
        else
            B2v(i,j)=-2.2;\\
        end
    end
end
```

```
for i=1:(n+1)
    for j=1:6
```

```

        if B3(i,j)>0
            B3v(i,j)=0.3;
            B3v1(i,j)=0.5;
        elseif( B3(i,j)<0 & B3(i,j)~=-3)
            B3v(i,j)=-1.3;
            elseif (B3(i,j)==0)
                B3v(i,j)=0;
                else
                    B3v(i,j)=-2.4;
                    B3v1(i,j)=-0.05;
            end
        end
    end
end

for i=1:(n+1)
    for j=1:6
        if Crit3(i,j)>0
            Crit3v(i,j)=0.5;
            Crit3v1(i,j)=0.05;
        elseif (Crit3(i,j)<0 & Crit3(i,j)~=-3)
            Crit3v(i,j)=-1.4;
            elseif (Crit3(i,j)==0)
                Crit3vv(i,j)=0;
                else
                    Crit3v(i,j)=-2.4;
                    Crit3v1(i,j)=-0.1;
            end
        end
    end
end
end

```