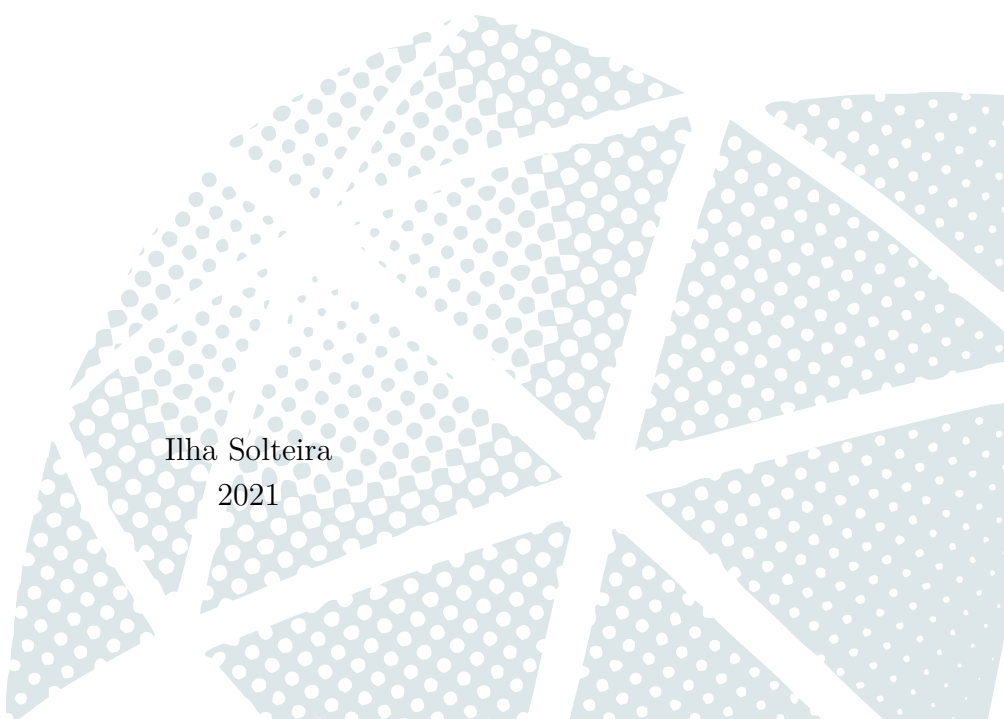


Fabrício Ely Gossler

**Projeto de Bancos de Filtros Wavelet
Quase-Ortogonais Simétricos e de Suporte Compacto
Baseado no Processo de Ortogonalização Wavelet**

Ilha Solteira
2021



Fabrício Ely Gossler

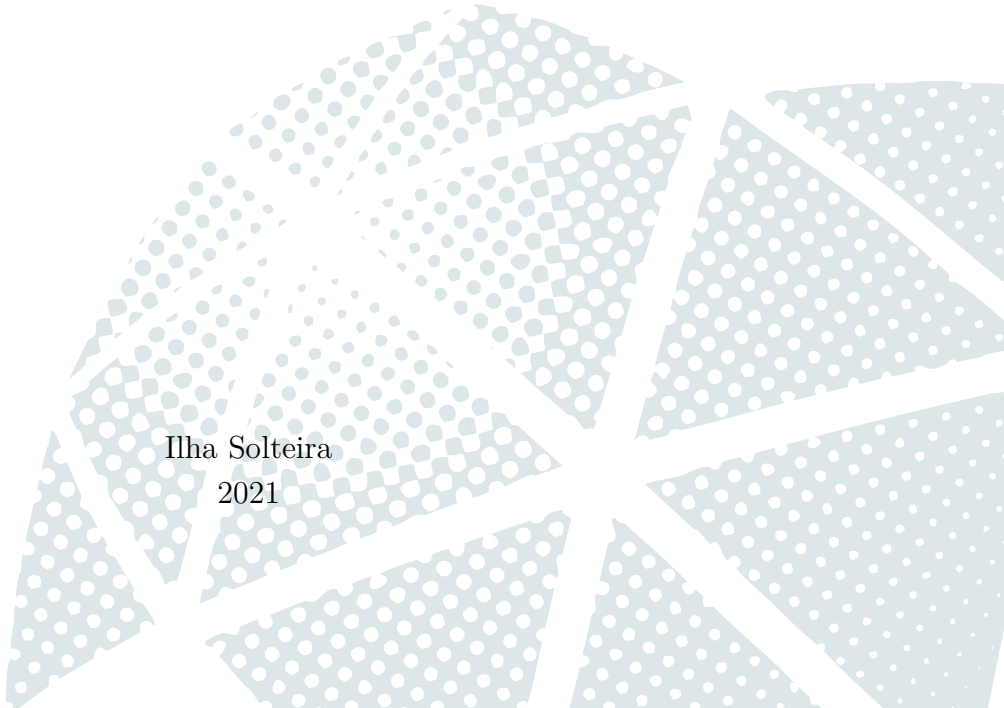
**Projeto de Bancos de Filtros Wavelet
Quase-Ortogonais Simétricos e de Suporte Compacto
Baseado no Processo de Ortogonalização Wavelet**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de
Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Doutor em Engenharia
Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

Orientador: Dr. Francisco Villarreal Alvarado

Ilha Solteira
2021



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

G679p Gossler, Fabrício Ely.
Projeto de bancos de filtros wavelet quase-ortogonais simétricos e de suporte compacto baseado no processo de ortogonalização wavelet / Fabrício Ely Gossler. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
117 f. : il.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2021

Orientador: Francisco Villarreal Alvarado
Inclui bibliografia

1. Banco de filtros wavelet. 2. Filtros wavelet simétricos. 3. Transformada wavelet rápida. 4. Wavelets de suporte compacto. 5. Wavelets quase-ortogonais.

Raiane da Silva Santos

Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção

Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

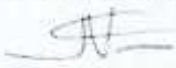
TÍTULO DA TESE: Projeto de Bancos de Filtros Wavelet Quase-Ortogonais Simétricos e de Suporte Compacto Baseado no Processo de Ortogonalização Wavelet

AUTOR: FABRÍCIO ELY GOSSLER

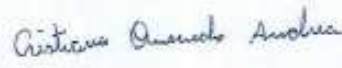
ORIENTADOR: FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO

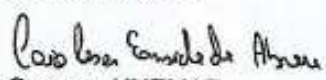
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. JOZUE VIEIRA FILHO (Participação Virtual)
Coordenadoria Executiva / Câmpus Experimental de São João da Boa Vista - UNESP


Prof. Dr. RICARDO TOKIO HIGUTI (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA (Participação Virtual)
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul


Prof. Dr. CAIO CESAR ENSIDE DE ABREU (Participação Virtual)
Curso de Ciências da Computação / Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT

Ilha Solteira, 09 de fevereiro de 2021

*À minha querida mãe, uma verdadeira guerreira.
Ao meu irmão.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus, em sua absoluta expressão Jesus Cristo, pela vida e a força dada até aqui. Agradeço a Ele também por me rodear de pessoas incríveis, a quem agradeço sinceramente:

- professor Dr. Francisco Villarreal, pela orientação, contribuição, incentivo e apoio das ideias propostas neste trabalho. Agradeço também pela oportunidade e confiança;
- professor Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte que, como grande incentivador deste estudo, também me orientou dedicadamente neste trabalho. Acompanhou e contribuiu imensamente ao longo de toda a jornada, sempre incentivando o desenvolvimento de novas ideias;
- membros da banca examinadora, professores Drs. Jozue Vieira Filho, Ricardo Tokio Higuti, Cristiano Quevedo Andrea e Caio Cesar Enside de Abreu, pelas sugestões valiosas;
- laboratório de processamento de sinais e instrumentação (LabPSI - FEIS - UNESP), por ter fornecido os sinais utilizados em uma das aplicações exploradas neste trabalho;
- todos os professores e funcionários do PPGEE e da biblioteca FEIS;
- amigos e colegas do PPGEE, Bruno, Julio, Natalia, Patrícia e Monara e todos os outros, cuja amizade foi tão significativa quanto os nomes citados;
- amigos que fiz em Ilha Solteira - SP, João Batista, André, Alan, Rafael e Lucas, pela colaboração e momentos de descontração igualmente importante para a realização deste trabalho;
- todos os amigos que, independentemente de terem sido citados, direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho;
- minha família, pelo incentivo e apoio, especialmente à minha mãe e ao meu irmão.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro concedido.

*Uma única chance é uma galáxia de esperança.
Star wars: a guerra dos clones*

RESUMO

A análise wavelet baseada em um banco de filtros de dois canais tem sido usada com frequência em várias aplicações. O algoritmo utilizado para tal propósito é a transformada wavelet rápida, que permite obter os coeficientes wavelet a partir da decomposição de um sinal de tempo discreto. Neste caso, o resultado dessa decomposição depende diretamente dos filtros wavelet escolhidos para tal análise. Geralmente, os filtros ortogonais e biortogonais, de suporte compacto, são os mais utilizados para esse fim, pois fornecem a propriedade de perfeita reconstrução. Entretanto, as propriedades de ortogonalidade e biortogonalidade podem implicar em distorções de fase e ganho, respectivamente. Dessa forma, utilizando-se tais bases, a análise wavelet de um sinal pode ser comprometida devido a essas distorções. Por meio das wavelets quase-ortogonais, as distorções de fase e ganho podem ser praticamente anuladas. Entretanto, para obter tal vantagem é preciso permitir que tais bases apresentem desvios de ortogonalidade, o que implica em erros no processo de reconstrução do sinal. Neste trabalho é proposto um novo método para projetar bancos de filtros wavelet quase-ortogonais, simétricos e de suporte compacto, sendo baseado na metodologia proposta para extrair filtros semi-conjugados a partir de uma wavelet não-ortogonal. Ao contrário das estratégias adotadas pelos projetos clássicos, o método proposto permite projetar filtros wavelet de acordo com as especificações desejadas no domínio da frequência, satisfazendo tolerâncias mínimas de desvios de ortogonalidade. Isso é possível por meio da função de Ely que pode ser vista como um filtro particular de Butterworth. As wavelets obtidas a partir dessa função podem ser caracterizadas como versões relaxadas da wavelet ideal, conhecida como wavelet de Shannon. Para os filtros wavelet obtidos, os desvios de ortogonalidade podem ser minimizados em função do aumento da ordem dos seus coeficientes. A fim de testar as wavelets propostas, três aplicações diferentes são exploradas neste trabalho. Tais aplicações envolvem os temas de monitoramento de integridade estrutural, compressão de imagens e classificação de distúrbios de tensão em sistemas elétricos de potência. Para essa última aplicação, é apresentado um novo método para construir vetores wavelet característicos utilizando a transformada wavelet contínua. Tal método implica melhores resultados quando comparado com outras técnicas utilizadas na literatura especializada. Os resultados obtidos pelas wavelets de Ely são significativos quando comparados com os resultados de outras wavelets clássicas.

Palavras-chave: Banco de filtros wavelet. Filtros wavelet simétricos. Transformada wavelet rápida. Wavelets de suporte compacto. Wavelets quase-ortogonais.

ABSTRACT

Wavelet analysis based on a two-channel filter bank has been frequently used in several applications. The algorithm used for this purpose is the fast wavelet transform, which allows to obtain the wavelet coefficients from a discrete time signal decomposition. In this case, the result of this decomposition depends directly on the choices of wavelet filters for such analysis. Generally, orthogonal and biorthogonal compactly support wavelet filters are the most used for this purpose, since they provide the perfect reconstruction property. However, orthogonality and biorthogonality properties can result in phase and gain distortions, respectively. Thus, using such bases, the signal analysis in the wavelet domain can be compromised due to these distortions. Through nearly-orthogonal wavelet filters, phase and gain distortions can be practically eliminated. However, to obtain such an advantage it is necessary to allow such bases to present orthogonality deviations, which imply errors in the signal reconstruction process. In this work, a new method is proposed to design symmetrical and compactly support nearly-orthogonal wavelet filter banks, which is based on the proposed methodology to extract semi-conjugate filters from a non-orthogonal wavelet. Unlike the classical design methods, the proposed method allows the design of wavelet filters according to the desired specifications in frequency domain, satisfying minimum orthogonality deviations tolerances. This is possible through the Ely function that can be seen as a particular Butterworth filter. The wavelets obtained from this function can be characterized as relaxed versions of the ideal wavelet, known as Shannon wavelet. For the obtained wavelet filters, the orthogonality deviations can be minimized due to the increase in their coefficients. In order to test the proposed wavelets, three different applications are explored in this work. Such applications involve the topics of structural health monitoring, image compression and voltage disturbances classification in electrical power systems. For this last application, a new method to construct wavelet feature vectors using the continuous wavelet transform is presented. Such a method implies better results when compared to other ones proposed in the specialized literature. Results obtained by Ely wavelets are significant when compared to the results of other classical wavelets.

Keywords: Wavelet filter bank. Symmetrical wavelet filters. Fast wavelet transform. Compactly support wavelets. Nearly-orthogonal wavelets.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Formas de onda das wavelets de (a) Haar; (b) Morlet; (c) Mexican hat e (d) Shannon	26
Figura 2 – Representação em diagrama de blocos da FWT	33
Figura 3 – Resultados obtidos pelo filtro semi-conjugado OQB. (a) Espectro de magnitude. (b) Desvio de ortogonalidade. Função escala. (d) Função wavelet	40
Figura 4 – Resultados obtidos pelo filtro semi-conjugado NO5b. (a) Espectro de magnitude. (b) Desvio de ortogonalidade. (c) Função escala. (d) Função wavelet	42
Figura 5 – Resultados obtidos pelo filtro semi-conjugado ER3. (a) Espectro de magnitude. (b) Desvio de ortogonalidade. (c) Função escala. (d) Função wavelet	43
Figura 6 – Atraso de grupo dos filtros wavelet ortogonais passa-baixa de decomposição: db10, db30, sym10, sym30, coif2 e coif5	45
Figura 7 – Espectro de magnitude dos filtros wavelet biortogonais passa-baixa (linha contínua) e passa-alta (linha tracejada) de decomposição: bior2.2, bior2.4, bior3.3, bior3.9, bior4.4, bior6.8	46
Figura 8 – Processo de quase-ortogonalização wavelet	49
Figura 9 – Mexican hat quase-ortogonalizada no domínio do (a) tempo e da (b) frequência. Mexican hat no domínio do (c) tempo e da (d) frequência.	51
Figura 10 – Wavelets Meyer (traço preto), Battle-Lemarié (traço azul) e Mexican hat quase-ortogonalizada (traço vermelho) nos domínios (a) tempo e (b) frequência	52
Figura 11 – Resultados obtidos pelo filtro Mexican hat. (a) ODF para $L = 69$. (b) MOD para cada valor de L considerado $9 \leq L \leq 97$	54
Figura 12 – Espectros de magnitude dos filtros OQB , NO5b e ER3. Magnitudes em dB. (a) Faixa de passagem. (b) Faixa de rejeição	55
Figura 13 – Especificações do filtro semi-conjugado	56
Figura 14 – Wavelets Gaussianas quase-ortogonais $\psi_{gs}^{\#N}(t)$ para $N = 1, \dots, 16$. As amplitudes foram normalizadas	60
Figura 15 – Gráficos de (a) $\Theta_{gs}^N(\Omega)$ e (b) dos respectivos espectros de magnitudes dos filtros semi-conjugados $H^{gsN}(\omega)$ para $N = 1, \dots, 16$	60
Figura 16 – Função de distribuição de probabilidade contínua	62
Figura 17 – Espectro de potência de um filtro de Butterworth	63
Figura 18 – Gráficos de (a) $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$ e (b) dos respectivos espectros de magnitude dos filtros semi-conjugados $H^{ely\alpha}(\omega)$ para $0,5 \leq \alpha \leq 5$	65
Figura 19 – Espectro de magnitude do filtro $ely_{3,0}L$ para $L = 45, 65, 89$	66
Figura 20 – Formas de onda das wavelets de Ely de acordo com α (amplitudes normalizadas)	67
Figura 21 – (a) Formas de onda das wavelets $ely_{0,5}29$ (linha preta) e db1/Haar (linha tracejada vermelha) e (b) seus respectivos espectros de magnitude	68
Figura 22 – Resultados do MIOD apresentado pelo filtro semi-conjugado e do MIOD estimado para $0,5 \leq \alpha \leq 1,5$. Valores dados em dB	71
Figura 23 – Fluxograma da metodologia proposta para o projeto de um BFWQO	73
Figura 24 – Sinal discreto	74

Figura 25 – Sinal original (preto) e o sinal de aproximação via SWT (vermelho) por $\text{ely}_{1,57425}$ (primeira linha), coif4 (segunda linha), db10 (terceira linha), sym10 (quarta linha) and bior3.9 (última linha).	76
Figura 26 – Comparação entre as wavelets de Coiflets e de Ely	79
Figura 27 – Circuito elétrico para medir a tensão de resposta do PZT	81
Figura 28 – Esquema PZT/estrutura usada no procedimento experimental. Medidas dadas em milímetro (mm)	83
Figura 29 – Resposta temporal da estrutura íntegra (preto) e com dano simulado (vermelho)	84
Figura 30 – Impedância do PZT referente a estrutura íntegra (preto) e com dano simulado (vermelho)	84
Figura 31 – Resultados do CCDM obtido pelas wavelets (a) $\text{db}N$, $\text{sym}N$ e $\text{coif}N$ e (b) $\text{ely}_\alpha L$ para cada valor de N , α e L_δ^λ considerado. A linha tracejada indica o valor do CCDM calculado no domínio do tempo	87
Figura 32 – Processo de decomposição da FWT-2D	89
Figura 33 – Formas de onda da operação normal e dos distúrbios explorados neste trabalho	93
Figura 34 – Escalogramas da operação normal e dos distúrbios de tensão explorados neste trabalho	95
Figura 35 – Coeficientes normalizados da CWT nas escalas $s_1 = 208$ (coluna esquerda), $s_2 = 69,33$ (coluna central) e $s_3 = 41,60$ (coluna direita)	96
Figura 36 – Metodologia proposta para a construção de vetores característicos	98
Figura 37 – Intervalos dos sinais de distúrbios	100
Figura 38 – Projeção bidimensional de $F2_{v_i}$ considerando (a) sinais puros e (b) sinais ruidosos (20 dB)	106

Lista de tabelas

Tabela 1	– Filtro semi-conjugado de uma wavelet OQB.	39
Tabela 2	– Coeficientes do filtro semi-conjugado referente a NO5b.	41
Tabela 3	– Coeficientes do filtro $h^{mh}[k]$ para $h^{mh}[k] > 10^{-3}$	51
Tabela 4	– Desvios de ortogonalidade dos filtros semi-conjugados das wavelets OQB, NO5b e ER3.	54
Tabela 5	– Características de banda dos filtros conjugados e semi-conjugados referentes a algumas wavelets ortogonais e quase-ortogonais.	56
Tabela 6	– Caracterização do filtro semi-conjugado Mexican hat $h_L^{mh}[k]$	57
Tabela 7	– Resultados dos filtros semi-conjugados $gs_N L$ para $N = 1, \dots, 16$	59
Tabela 8	– Valores de dispersões de $\Theta_{gs}^N(\Omega)$	62
Tabela 9	– Resultados obtidos pelos filtros semi-conjugados para diferentes valores de γ	64
Tabela 10	– Resultados dos filtros semi-conjugados de Ely para diferentes valores de α . O símbolo ∞ é referente a um valor consideravelmente grande (não necessariamente infinito).	66
Tabela 11	– Resoluções de tempo e frequência das wavelets de Ely.	69
Tabela 12	– Resoluções de tempo e frequência referente a wavelet $ely_{1,0} L$ para diferentes valores de L	69
Tabela 13	– MSE entre o sinal original e o sinal filtrado.	77
Tabela 14	– MSE entre o sinal original e o sinal reconstruído utilizando os filtros $ely_{1,574} L$	77
Tabela 15	– Coeficientes de alguns filtros semi-conjugados $ely_{\alpha} L$ em comparação com os filtros conjugados $coif_N$, para $N = 1, 2, 3, 4$	78
Tabela 16	– Faixas de frequência relativas aos coeficientes de detalhes para cada nível de decomposição.	85
Tabela 17	– Valores do CCDDM para as wavelets com melhores desempenho em cada família considerada.	86
Tabela 18	– Valores médios da PSNR para cinco imagens de 512x512 pixels com suas respectivas taxas de compressão.	91
Tabela 19	– Desvios de ortogonalidade das wavelets quase-ortogonais.	91
Tabela 20	– Modelo matemático dos distúrbios de tensão.	99
Tabela 21	– Resultados da classificação em termos de porcentagem usando diferentes famílias de wavelets.	102
Tabela 22	– Comparação de desempenho de resultados de classificação.	103
Tabela 23	– Resultados obtidos pelas wavelets de Ely para diferentes tamanhos de suporte.	104
Tabela 24	– Resultados da classificação considerando sinais ruidosos.	105

Lista de abreviaturas e siglas

BWFB	Banco de filtros wavelet biortogonal - <i>Biorthogonal wavelet filter bank</i>
CCDM	Métrica de desvio do coeficiente de correlação - <i>Correlation coefficient deviation metric</i>
CMF	Filtros conjugados espelhados - <i>Conjugate mirror filter</i>
CWT	Transformada wavelet contínua - <i>Continuous wavelet transform</i>
dB	Decibels
DTFT	Transformada de Fourier de tempo discreto - <i>Discrete time Fourier transform</i>
DWT	Transformada wavelet discreta - <i>Discrete wavelet transform</i>
EMI	Impedância eletromecânica - <i>Electromechanical impedance</i>
ER3	Wavelet quase-ortogonal com 3 momentos nulos
FIR	Resposta ao impulso com duração finita - <i>Finite impulse response</i>
FRF	Função de resposta em frequência - <i>Frequency response function</i>
FT	Transformada de Fourier - <i>Fourier transform</i>
FWT	Transformada wavelet rápida - <i>Fast wavelet transform</i>
IIR	Resposta ao impulso com duração infinita - <i>Infinite impulse response</i>
JPEG	<i>Joint photographic experts group</i>
MIOD	Mínimo desvio de ortogonalidade - <i>Minimum orthogonality deviation</i>
MOD	Máximo desvio de ortogonalidade - <i>Maximum orthogonality deviation</i>
MRA	Análise de multirresolução - <i>Multiresolution analysis</i>
MSE	Erro médio quadrático - <i>Mean squared error</i>
$\text{NO}\beta$	Wavelet quase-ortogonal com β momentos nulos
NOWFB	Banco de filtros wavelet quase-ortogonal - <i>Nearly-orthogonal wavelet filter bank</i>
ODF	Função desvio de ortogonalidade - <i>Orthogonality deviation function</i>
OQB	<i>Optimum quasi-biorthogonal wavelets</i>
OWFB	Banco de filtros wavelet ortogonal - <i>Orthogonal wavelet filter bank</i>
PCC	Condição complementar de potência - <i>Power complementary condition</i>
PSNR	Relação sinal-ruído de pico - <i>Peak signal noise ratio</i>

PZT	Titanato zirconato de chumbo - <i>Pb-lead zirconate titanate</i>
QEE	Qualidade de energia elétrica
QMF	Filtros de quadratura espelhada - <i>Quadrature mirror filters</i>
SHM	Monitoramento de integridade estrutural - <i>Structural health monitoring</i>
STFT	Transformada de Fourier para tempo curto - <i>Short time Fourier transform</i>
SWT	Transformada wavelet estacionária - <i>Stationary wavelet transform</i>
WPT	Transformada wavelet packet - <i>Wavelet packet transform</i>
WQOP	Processo de quase-ortogonalização wavelet - <i>Wavelet quasi-orthogonalization process</i>

Lista de símbolos

$\psi(t)$	Função wavelet
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$L^2(\mathbb{R})$	Espaço das funções contínuas de energia finita
c_ψ	Valor da condição de admissibilidade de ψ
$\Psi(\Omega)$	Transformada de Fourier da função wavelet
ψ^{ha}	Wavelet de Haar
ψ^{mo}	Wavelet de Morlet
ψ^{mh}	Wavelet Mexican hat
ψ^{sh}	Wavelet de Shannon
$\psi_{s,\tau}(t)$	Função wavelet escalonada por s e transladada por τ
s	Parâmetro de escala
τ	Parâmetro de translação
$x_c(t)$	Sinal de tempo contínuo
$W_{x_c}^\psi(s, \tau)$	Transformada wavelet contínua de $x_c(t)$
f_s	Frequência associada a escala s
η	Frequência central de uma wavelet
T_s	Período de amostragem
$W_{x_c}^\psi[m, k]$	Transformada wavelet discreta de $x_c(t)$
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
V_m	Espaço vetorial do conjunto de todas as aproximações na resolução m
$\theta(t)$	Função escala não-ortogonal
$\phi(t)$	Função escala ortogonal
$P_{V_m}(x_c)$	Projeção ortogonal de x_c no espaço V_m
$a_m[k]$	Coefficiente de aproximação no nível m
$\Theta(\Omega)$	Transformada de Fourier da função escala não-ortogonal
$\Phi(\Omega)$	Transformada de Fourier da função escala ortogonal
$h[k]$	Filtro conjugado
$H(\omega)$	Transformada de Fourier de tempo discreto do filtro conjugado

W_m	Espaço vetorial do conjunto de todas os detalhes na resolução m
H^*	Complexo conjugado de H
$G(\omega)$	Transformada de Fourier de tempo discreto do g
$d_m[k]$	Coefficiente de detalhe no nível m
$g[k]$	Filtro passa-alta no domínio do tempo
$\downarrow 2$	Operador <i>downsampling</i>
$\uparrow 2$	Operador <i>upsampling</i>
$x[n]$	Sinal de tempo discreto
$\ell^2(\mathbb{Z})$	Espaço de sinais discretos de energia finita
N	Número de momentos nulos de uma wavelet
db N	Wavelet de Daubechies com N momentos nulos
sym N	Wavelet de Symmlets com N momentos nulos
coif N	Wavelet de Coiflets com $2N$ momentos nulos
bior $Nr.Nd$	Wavelet Splines com Nr e Nd momentos nulos para a decomposição e reconstrução, respectivamente
$\delta[n]$	Impulso unitário
$H(z)$	Transformada z do filtro conjugado
$\Gamma_h(\omega)$	Atraso de grupo do filtro h
$\psi^\#$	Versão quase-ortogonalizada de ψ
$h_L[k]$	Filtro semi-conjugado de ordem L
$D_{H_L}(\omega)$	Função desvio de ortogonalidade
$\delta_H[L]$	Máximo desvio de ortogonalidade apresentado pelo filtro h_L
δ_{min}^H	Mínimo desvio de ortogonalidade apresentado pelo filtro semi-conjugado h
ω_p	Frequência de passagem
A_p	Ganho mínimo da banda passante
ω_s	Frequência de rejeição
A_s	Ganho máximo na banda de rejeição
$\Delta\omega$	Largura na faixa de transição
ϵ_δ	Tolerância do MOD permitido

L_λ^δ	Comprimento mínimo que satisfaz a tolerância ϵ_δ
ϵ_π	Tolerância do máximo valor permitido em $H(\pi)$
L_λ^π	Comprimento mínimo que satisfaz a tolerância ϵ_π
$\text{gaus}N$	Wavelet Gaussiana com N momentos nulos
$\text{gs}_N L$	Filtro semi-conjugado de comprimento L obtido a partir de $\text{gaus}N$
σ^2	Variância
Ω_i	Ponto de inflexão
$\Theta^{\text{ely}}(\alpha, \Omega)$	Função de Ely
α	Parâmetro que controla a largura na faixa de transição do filtro semi-conjugado de Ely
$\text{ely}_\alpha L$	Filtro semi-conjugado de comprimento L obtido pela função de Ely
μ	Localização no tempo
ϑ	Localização na frequência
σ_t	Dispersão no tempo
σ_Ω	Dispersão na frequência
w	Coefficientes wavelet
$X[n, p]$	Sinal discreto bidimensional (imagem)
ζ	Limiar universal
ρ	Perfil de ruído na imagem
P_k	Máximo valor possível de um pixel
f_N	Frequência natural da tensão elétrica
$E_v(s_k)$	Energia dos coeficientes da CWT
F_v	Vetor wavelet característico

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	22
1.2	OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA TESE	23
2	ANÁLISE WAVELET	25
2.1	WAVELETS	25
2.2	TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA	27
2.3	TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA	27
2.4	ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO	29
3	BANCO DE FILTROS WAVELET	33
3.1	FILTROS WAVELET ORTOGONAIS	34
3.2	FILTROS WAVELET BIORTOGONAIS	36
3.3	FILTROS WAVELET QUASE-ORTOGONAIS	38
3.3.1	Exemplos de wavelets quase-ortogonais	38
3.4	DISTORÇÕES DOS FILTROS WAVELET	43
4	PROCESSO DE QUASE-ORTOGONALIZAÇÃO WAVELET	47
4.1	MÉTODO PROPOSTO	47
4.1.1	Versão quase-ortogonalizada da wavelet Mexican hat	49
4.2	CARACTERIZAÇÃO DOS FILTROS SEMI-CONJUGADOS	51
4.2.1	Quantificação dos desvios de ortogonalidade	53
4.2.2	Especificações da resposta em frequência	55
4.2.3	Tolerâncias de desvios de ortogonalidade	57
4.3	FILTROS SEMI-CONJUGADOS A PARTIR DAS GAUSSIANAS	58
5	PROJETO DE BANCOS DE FILTROS WAVELET QUASE-ORTOGONAIS	61
5.1	WAVELETS DE ELY	61
5.1.1	Função de Ely	61
5.1.2	Resultados obtidos a partir da função de Ely	64
5.1.3	Resolução tempo-frequência das wavelets de Ely	68
5.2	MÉTODO PROPOSTO	69
5.2.1	Exemplo: transformada wavelet estacionária	74
5.3	COMPARAÇÕES COM AS WAVELETS COIFLETS	77
6	APLICAÇÕES	80
6.1	SISTEMAS SHM E WAVELETS	80
6.1.1	Método explorado	82
6.1.1.1	Contexto dos sinais analisados	82
6.1.1.2	Resultados e Discussões	85
6.2	COMPRESSÃO DE IMAGENS E WAVELETS	88
6.2.1	Método explorado	89
6.2.1.1	Métrica de avaliação	90
6.2.1.2	Resultados e Discussões	90

7	CLASSIFICAÇÃO DE DISTÚRBIOS DE TENSÃO	92
7.1	EXTRAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS NO DOMÍNIO WAVELET .	92
7.2	MÉTODO PROPOSTO	94
7.3	SIMULAÇÃO E ANÁLISES	98
7.3.1	Geração dos sinais	99
7.3.2	Construção dos vetores característicos	100
7.3.3	Estágio da Classificação	101
7.3.4	Resultados e Discussões	101
7.4	COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO	102
7.5	RESULTADOS CONSIDERANDO RUÍDOS	105
8	CONCLUSÕES	107
8.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	109
	 REFERÊNCIAS	 110

1 INTRODUÇÃO

A análise do conteúdo de informação de um sinal no domínio do tempo não é uma tarefa fácil, uma vez que características como singularidades e transitórios podem ser confundidos como componentes de alta frequência do mesmo. No entanto, no contexto de processamento de sinais, existem várias ferramentas práticas que podem ser utilizadas na análise de sinais. Tais ferramentas implicam na representação destes sinais em outros domínios, por meio de transformações matemáticas específicas (VETTERLI; KOVAČEVIĆ, 1995).

Uma ferramenta clássica na análise de sinais é a transformada de Fourier (FT - *Fourier Transform*). Tal ferramenta é muito eficiente para a obtenção do conteúdo de frequência de um sinal (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989). Historicamente, a série de Fourier é o primeiro exemplo de expansão de sinais periódicos, e começou a ser desenvolvida no início do século XIX por Jean Baptiste Joseph Fourier, tendo seu método publicado em 1822 no tratado *Théorie Analytique de la Chaleur* (FOURIER, 1822). Nesse trabalho, Fourier mostrou que uma ampla classe de sinais, incluindo todos os sinais com energia finita, podem ser representados como uma combinação de exponenciais complexas. Entretanto, tal ferramenta possui algumas limitações, ao ser utilizada para representar sinais não-estacionários ou sinais com descontinuidades e transitórios, como os descritos pelo fenômeno de Gibbs (HEWITT; HEWITT, 1979).

Apenas com a análise de Fourier clássica não se pode determinar quando uma frequência particular ocorreu em um dado instante de tempo. Uma forma de localizar a ocorrência de frequências em um sinal é a utilização da transformada de Fourier para tempo curto (STFT - *Short Time Fourier Transform*) (GABOR, 1946). Essa transformada é uma modificação da FT, que introduz uma função janela que se desloca ao longo do sinal, analisando cada parte separadamente. Desse modo, o resultado depende da escolha do tipo e do tamanho da janela utilizada. Para uma resolução boa no domínio do tempo é preciso uma janela estreita, e para obter uma boa resolução no domínio da frequência é preciso uma janela larga. Assim, a STFT é eficaz em sinais que não incluem estruturas com diferentes resoluções de tempo-frequência, ou seja, alguns sendo muito localizados no tempo e outros muito localizados na frequência (DAUBECHIES, 1992).

Muitos sinais requerem uma abordagem mais versátil do que a STFT, onde é preciso variar o tamanho da janela para determinar com precisão as características distintas do sinal. Logo, a deficiência da STFT está no fato de que ela é dependente da resolução fornecida pela janela, ou seja, da escala usada. A transformada wavelet (WT - *Wavelet Transform*) é uma alternativa de escolha para a STFT, e que de modo similar, permite decompor sinais em diferentes componentes de frequência associados a uma escala, por meio de suas funções básicas denominadas wavelets (MORLET *et al.*, 1982; MORLET,

1983; GROSSMANN; MORLET, 1984).

O termo wavelet significa “pequena onda” (*small wave* em inglês ou *ondelette* em francês). Tal ferramenta foi se inserindo de forma independente em diversas áreas: matemática (CALDERÓN, 1964), física (ASLAKSEN; KLAUDER, 1968) e engenharia (ESTEBAN; GALAND, 1977; SMITH; BARNWELL, 1984; VETTERLI, 1986). Uma das primeiras aplicações das wavelets foi na análise de sinais sísmicos por Morlet (1983). Desde então, as wavelets ganharam espaço em diversas áreas (ARNEODO; GRASSEAU; HOLSCHNEIDER, 1988; ANTONINI *et al.*, 1992; GRINSTED; MOORE; JEVREJEVA, 2004; BANERJEE; MITRA, 2013; SHARMA; SUNKARIA, 2018).

O conceito de wavelet em sua forma teórica atual foi proposto por Grossmann e Morlet em 1984 (GROSSMANN; MORLET, 1984). Os métodos de análise wavelet foram desenvolvidos principalmente por Yves Meyer, que garantiu sua disseminação (MEYER, 1985-1986). Por meio da formulação da análise de multirresolução (MRA - *Multiresolution Analysis*), a teoria wavelet se desenvolveu no entendimento e construção de novas bases wavelets (MEYER, 1986; MALLAT, 1989a). Em 1989, Mallat apresenta um algoritmo prático para analisar sinais de tempo discreto no domínio wavelet (MALLAT, 1989b). Tal algoritmo foi denominado mais tarde transformada wavelet rápida (FWT - *Fast Wavelet Transform*), constituindo a base para a implementação da transformada wavelet discreta (DWT - *Discrete Wavelet Transform*).

A FWT representa os coeficientes wavelet ortogonais de um sinal medido em uma resolução finita. Tal ferramenta consiste em um banco de filtros digitais de dois canais que decompõe sinais em componentes de baixa e alta frequências, sendo ambos os resultados subamostrados por um fator de ordem dois. Bancos de filtros com tal estrutura foram estudados inicialmente por Croisier, Esteban e Galand em 1976, motivados pela compressão de sinais de voz (CROISIER; ESTEBAN; GALAND, 1976). Naquele trabalho, os autores mostraram que é possível recuperar o sinal original utilizando uma classe específica de filtros chamados filtros de quadratura espelhada (QMF - *Quadrature Mirror Filters*). Mais tarde, em 1984, Smith, Barnwell e Mintzer encontraram condições necessárias e suficientes para obter filtros de resposta ao impulso com duração finita (FIR - *Finite Impulse Response*) que também implicam em perfeita reconstrução, sendo chamados de filtros conjugados espelhados (CMF - *Conjugate Mirror Filters*) (SMITH; BARNWELL, 1984; MINTZER, 1985).

Da teoria da MRA prova-se que qualquer conjunto de filtros CMF (filtros wavelet) caracteriza uma wavelet ortogonal e que a FWT pode ser implementada por estes filtros (MALLAT, 1989b). Assim, se estabelece a relação entre wavelets, banco de filtros e MRA (VETTERLI; HERLEY, 1992). Na prática, os filtros wavelet são obtidos a partir de um filtro de tempo discreto que é denominado na literatura como filtro conjugado (MALLAT, 1999). Assim, por meio deste filtro é possível obter uma wavelet ortogonal que pode ser

utilizada na análise de um sinal via FWT ou pela transformada wavelet contínua (CWT - *Continuous Wavelet Transform*).

A forma de onda da wavelet e o resultado da decomposição de um sinal via FWT dependem diretamente da escolha dos filtros wavelet. Existem vários que podem ser escolhidos para uma determinada análise. Do ponto de vista da teoria de banco de filtros wavelet, as propriedades mais interessantes são ortogonalidade, simetria e suporte compacto (o que implica filtros do tipo FIR). Ortogonalidade implica na propriedade de perfeita reconstrução e preservação da energia dos coeficientes wavelet. A simetria da resposta impulsiva implica filtros com fase linear, ou seja, que não resultam em distorção de fase na decomposição. A propriedade de suporte compacto implica filtros do tipo FIR que têm a vantagem de baixa complexidade de implementação.

Em 1988, Daubechies construiu o mais usado conjunto de bases wavelets ortogonais de suporte compacto (DAUBECHIES, 1988). A construção das wavelets de Daubechies é baseada nos clássicos filtros digitais MAXFLAT (HERRMANN, 1971), e que estão relacionados com interpoladores Lagrangeanos (SHENSA, 1992). Uma das desvantagens de se utilizar os filtros de Daubechies é que eles são altamente assimétricos. De fato, considerando wavelets ortogonais, não se pode obter propriedades de simetria e suporte compacto ao mesmo tempo (exceto para os filtros wavelets de Haar).

Embora não seja possível obter filtros wavelet FIR ortogonais e simétricos, é possível construir filtros wavelet ortogonais de suporte compacto que sejam aproximadamente simétricos. Por exemplo, os filtros Symmlets são quase simétricos e são obtidos por meio de modificações da metodologia utilizada na obtenção dos filtros de Daubechies (DAUBECHIES, 1993). Outro exemplo clássico de filtros wavelet quase simétricos são os filtros Coiflets, que também são frequentemente utilizados em diversas aplicações (HUANG; HSIEH, 2002; RODNEY TAN; LUM; MOK, 2006; HUGENSCHMIDT; KALOGEROPOULOS, 2009; DIXIT; MAJUMDAR, 2013; ZHANG *et al.*, 2016; JAVADI; GHASEMZADEH, 2017). Outros exemplos (não tão populares) podem ser encontrados em Selesnick, Odegard e Burrus (1996), Abdelnour e Selesnick (2001), Murugesan e Tay (2012), Murugesan e Tay (2014).

Filtros wavelet biortogonais são uma alternativa para o problema de simetria dos filtros ortogonais (COHEN; DAUBECHIES; FEAUVEAU, 1992; VETTERLI; HERLEY, 1992). As wavelets biortogonais Splines são uma das mais utilizadas na literatura (COHEN; DAUBECHIES; FEAUVEAU, 1992). Para essa classe de filtros, é possível obter a propriedade de simetria que também implica perfeita reconstrução. Para o caso biortogonal, as condições necessárias e suficientes foram estabelecidas por Vetterli (1986). Entretanto, uma das desvantagens é que os filtros de decomposição e reconstrução são diferentes. Assim, é necessário projetar dois filtros diferentes para um banco de filtros wavelet biortogonal. Outra desvantagem desses filtros é que eles não preservam a energia

dos coeficientes wavelet. Isso pode ser interpretado como ganhos variados nas faixas de passagem.

De fato, os filtros wavelet ortogonais e biortogonais são os mais usados na literatura. Entretanto, existe uma outra classe de filtros wavelet que não é muito explorada: filtros wavelet quase-ortogonais. Geralmente, estes filtros são projetados a partir de um filtro que satisfaz aproximadamente a condição de um filtro conjugado (condição que caracteriza um banco de filtros wavelet ortogonal). Nete trabalho, tal filtro é denominado semi-conjugado. Por meio deste, é possível obter filtros wavelet com propriedades de simetria e ganho aproximadamente constante na faixa de passagem.

Em 1996, Jin, Luo e Wong projetaram o primeiro conjunto de filtros wavelet quase-ortogonais (JIN; LUO; WONG, 1996). Esses filtros foram utilizados no problema de cancelamento de eco, e os resultados obtidos foram superiores aos apresentados pelos filtros de Daubechies. Posteriormente, alguns desses filtros foram usados em aplicações que envolviam simulações em salas acústicas e medição de tempo de vôo de ecos de pulso ultrassônico (WYK; VIROLLEAU, 1998; GRIMALDI, 2006). Zhao e Swamy (2000) propuseram uma metodologia para projetar filtros wavelet quase-ortogonais e simétricos. Mais tarde, um filtro projetado em Zhao e Swamy (2000) foi usado para diminuir ruídos de sinais de eletrocardiogramas (CHEN *et al.*, 2008). A ortogonalidade e correlação para algumas bases wavelet quase-ortogonais são estudadas em Chen *et al.* (2009). Recentemente, Edavoor e Rahulkar (2019) apresentam uma abordagem para projetar um filtro wavelet quase-ortogonal simétrico de ordem seis com coeficientes racionais. Este filtro foi utilizado na compressão de imagens, sistema de reconhecimento de íris e multiplexação por divisão ortogonal de frequência.

1.1 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

É extremamente importante ter uma representação mais precisa do sinal em suas respectivas bandas. Para filtros FIR wavelet ortogonais, a limitação referente é a não linearidade da fase. Se as respostas ao impulso dos filtros são simétricas/anti-simétricas, então elas levam a uma resposta de fase linear (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989). Consequentemente, os filtros wavelet ortogonais podem implicar distorção de fase. Por outro lado, a principal desvantagem dos filtros FIR wavelet biortogonais é que muitos deles mostram variações consideráveis em sua faixa de ganho na resposta em frequência. Assim, no processo de análise do sinal decomposto, os filtros biortogonais podem comprometer sua avaliação, devido ao fato de que os ganhos de amplitudes devem variar para diferentes frequências.

Em muitas aplicações a linearidade da fase é desejada, e por isso, filtros simétricos são bastante requisitados. Estes filtros são preferíveis em processamento de imagens,

uma vez que linhas e bordas são particularmente suscetíveis a distorção de fase (MURUGESAN; TAY, 2014). Em análises de séries temporais, a simetria possui a vantagem de permitir o alinhamento dos coeficientes wavelet (PERCIVAL; WALDENR, 2006). Uma outra vantagem na utilização de filtros simétricos é o menor uso de memória, devido à simetria, e a maior rapidez na implementação. Em aplicações onde se deseja fazer algum tipo de processamento relacionado a energia dos coeficientes wavelets, os filtros biortogonais podem prejudicar a análise, uma vez que não preservam a energia dos mesmos. Desta forma, pode ser interessante explorar as bases wavelets do tipo quase-ortogonais que não impliquem em distorções de fase ou de ganho variado.

De fato, os filtros wavelet quase-ortogonais não atendem a propriedade de perfeita reconstrução. Essa característica, pode ser um dos principais motivos para um uso menos frequente desse tipo de filtros em aplicações envolvendo a FWT. Quanto maior for o desvio de ortogonalidade, maior será o erro de reconstrução do sinal. Entretanto, para muitos filtros desse tipo, é possível minimizar os desvios de ortogonalidade conforme a ordem dos mesmos aumenta. Pode-se chegar então em uma ordem ótima para que um filtro wavelet quase-ortogonal satisfaça uma tolerância mínima de desvio de ortogonalidade. Além do mais, muitas aplicações utilizam apenas o processo de decomposição da FWT, conforme mostrado em uma das aplicações exploradas neste trabalho. Dessa forma, não é necessária uma precisão extrema de reconstrução.

1.2 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA TESE

Esta Tese de doutorado tem por objetivos e contribuições:

1. **Propor um método de projeto de bancos de filtros wavelet quase-ortogonais.** O objetivo principal desta Tese de Doutorado é propor um novo método que permite o projeto de bancos de filtros wavelet quase-ortogonais. Tal método é baseado na metodologia descrita no próximo item.
2. **Apresentar uma metodologia para obter versões quase-ortogonalizadas de uma wavelet.** Sabe-se que algumas wavelets como Mexican hat, Gaussianas e outras do tipo não podem ser utilizadas na decomposição de sinais via FWT, uma vez que não possuem filtros conjugados associados. No presente trabalho é apresentado um método para extrair filtros semi-conjugados a partir de uma wavelet não-ortogonal, obtendo-se assim, sua versão quase-ortogonalizada para ser utilizada em aplicações que envolvem a FWT.
3. **Apresentar uma metodologia para a classificação de distúrbios de tensão.** Uma das aplicações exploradas nesse trabalho é a classificação de distúrbios de tensão em sistemas elétricos de potência. Utilizando a CWT, apresenta-se um

método para a construção de vetores wavelet característicos para serem utilizados na classificação de distúrbios de tensão.

Este trabalho está dividido em oito capítulos, incluindo esta introdução. O restante do texto é organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 2.** Uma revisão dos conceitos básicos da análise wavelet é apresentada, com os diferentes tipos da transformada wavelet e também com uma revisão sobre a MRA.
- **Capítulo 3.** Este capítulo trata da estrutura da FWT, dos filtros wavelet ortogonais e biortogonais mais utilizados na literatura, bem como as estratégias utilizadas para obter tais filtros. Também são apresentadas as estratégias utilizadas no projeto de alguns filtros wavelet quase-ortogonais.
- **Capítulo 4.** Aqui apresenta-se o método para extrair filtros semi-conjugados a partir de wavelets. Tal método é aplicado na wavelet Mexican hat e em algumas wavelets Gaussianas. A caracterização dos filtros semi-conjugados projetados neste trabalho é estabelecida neste capítulo.
- **Capítulo 5.** O principal objetivo desta Tese de doutorado é apresentado neste capítulo, onde uma nova metodologia para projetar filtros semi-conjugados de acordo com especificações desejadas é proposta como ponto de partida para projetar os bancos de filtros wavelet quase-ortogonais.
- **Capítulo 6.** Duas aplicações envolvendo a FWT são apresentadas neste capítulo: monitoramento de integridade estrutural e compressão de imagens.
- **Capítulo 7.** A aplicação explorada neste capítulo envolve a classificação de distúrbios de tensão em sistemas elétricos de potência. Uma nova metodologia para construir vetores wavelet característicos baseada na CWT é proposta.
- **Capítulo 8.** Considerações finais e perspectivas para trabalhos futuros.

2 ANÁLISE WAVELET

Neste capítulo é apresentada uma introdução a análise wavelet. Existem muitas semelhanças entre a análise de Fourier e análise wavelet pois, em ambos os casos, sinais são analisados por expansões em termos de funções básicas elementares. A base de Fourier são funções senoidais que oscilam indefinidamente, já a base da análise wavelet consiste em funções wavelets, que são localizadas no tempo e por isso duram apenas um ou poucos ciclos.

2.1 WAVELETS

Wavelets são funções, geralmente denotadas por $\psi(t)$, que satisfazem certas condições e propriedades. Uma wavelet real é uma função $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})^1$ e que satisfaz a condição de admissibilidade (GROSSMANN; MORLET, 1984):

$$c_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega} d\Omega < +\infty, \quad (1)$$

onde,

$$\Psi(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (2)$$

é a FT de $\psi(t)$. A condição de admissibilidade implica que

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (3)$$

o que significa que as wavelets têm valor médio nulo.

As formas de onda das wavelets se assemelham a ondas de curta duração. Na Figura 1 são exibidas formas de ondas das wavelets de Haar, Morlet (parte real da versão reduzida), Mexican hat e Shannon, sendo definidas respectivamente:

$$\text{Haar: } \psi^{ha}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{se } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4)$$

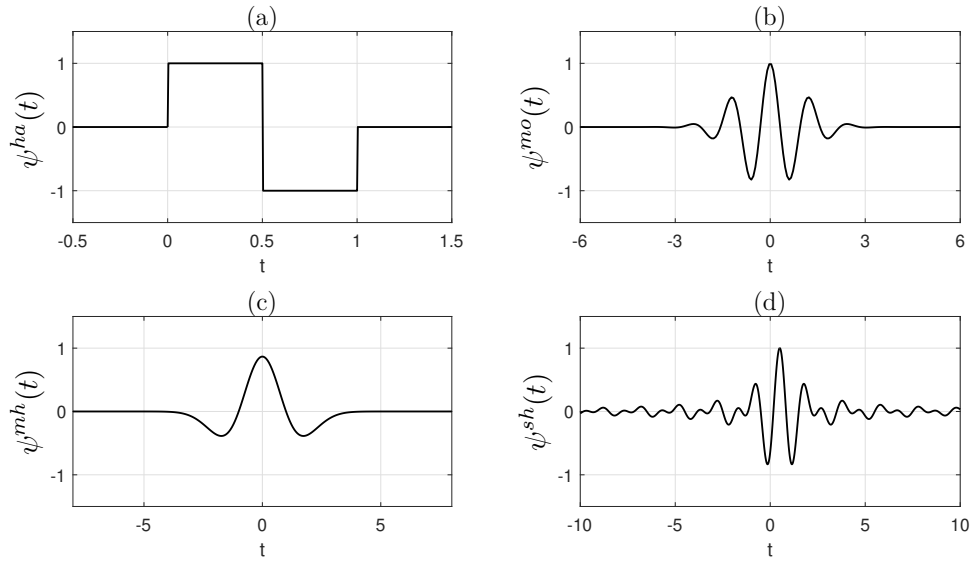
$$\text{Morlet: } \psi^{mo}(t) = e^{-j5t} e^{-t^2/2}, \quad (5)$$

$$\text{Mexican hat: } \psi^{mh}(t) = (1 - t^2) e^{-t^2/2}, \quad (6)$$

$$\text{Shannon: } \psi^{sh}(t) = (\pi t)^{-1} (\text{sen } 2\pi t - \text{sen } \pi t). \quad (7)$$

¹ Espaço das funções contínuas de energia finita.

Figura 1 – Formas de onda das wavelets de (a) Haar; (b) Morlet; (c) Mexican hat e (d) Shannon.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Historicamente, a wavelet de Haar é o exemplo mais simples e antigo de uma wavelet. Note que tal wavelet é descontínua no domínio do tempo e, além do mais, não possui uma boa localização no domínio da frequência (DAUBECHIES, 1992). A wavelet de Shannon apresenta propriedades tempo-frequência complementares a wavelet de Haar, ou seja, tal wavelet possui suporte compacto no domínio da frequência com descontinuidade em $\Omega = \pm\pi$ e $\Omega = \pm 2\pi$ (MALLAT, 1999).

A essência da análise wavelet é a representação de sinais em diferentes resoluções de frequência. Para isso, utilizam-se famílias de funções wavelets do tipo

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad s, \tau \in \mathbb{R}, \quad s > 0, \quad (8)$$

geradas por uma função wavelet e pelos operadores de escala s e de translação τ . Utilizando essa estratégia, a análise wavelet pode ser dividida em dois tipos principais (DAUBECHIES, 1992):

1. Transformada wavelet contínua (CWT);
2. Transformada wavelet discreta (DWT).

A escolha do tipo da transformada depende da aplicação. A CWT é mais indicada na exploração de características a fim de extrair informações de variações em certas bandas de frequência. Por outro lado, a DWT é usada para obter uma representação mais esparsa possível, sendo aplicada, entre outros, em compressão, redução de ruído ou transmissão de sinal (MALLAT, 1999).

2.2 TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA

A CWT é definida pelo produto interno de um sinal com versões transladadas e dilatadas de uma wavelet, resultando em coeficientes que carregam informações associadas a certas bandas de frequência. Isso é feito pelos parâmetros s e τ , conforme indicado em (8). Escolhendo-se uma wavelet real $\psi(t)$, e considerando $s, s > 0$, a CWT de um sinal de tempo contínuo $x_c(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é definida como (DAUBECHIES, 1992):

$$W_{x_c}^\psi(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t) \psi_{s,\tau}(t) dt. \quad (9)$$

Para uma wavelet real, qualquer $x_c(t) \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaz (GROSSMANN; MORLET, 1984):

$$x_c(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} W_{x_c}^\psi(s, \tau) \psi_{s,\tau}(t) d\tau ds. \quad (10)$$

Assim, a CWT inversa pode ser definida pela resolução de identidade definida em (10). De (9), pode-se dizer que os coeficientes wavelet $W_{x_c}^\psi(s, \tau)$ não são afetados apenas pelos valores de s e τ , mas também pela escolha de $\psi(t)$. Desse modo, a escolha da wavelet deve ser feita de acordo com a natureza e características do sinal a ser analisado. Por exemplo, para medir a regularidade local de um sinal deve-se escolher uma wavelet com um número de momentos nulos apropriado (MALLAT, 1999).

Note que $W_{x_c}^\psi(s, \tau)$ representa as flutuações de $x_c(t)$ em torno de τ para uma escala de decomposição s . Quando s aumenta, $\psi(t)$ é expandida e seu conteúdo de frequência se move para as bandas de frequência mais baixas. Por outro lado, diminuir s implica na compressão da wavelet e seu conteúdo de frequência se move para as bandas mais altas. Para relacionar escala e frequência, a seguinte relação é usada (ABRY, 1997):

$$f_s = \frac{\eta}{T_s s}, \quad (11)$$

onde T_s é o período de amostragem do sinal analisado, η é a frequência central da wavelet em Hz e f_s é a pseudo-frequência correspondente à escala s , em Hz.

Na prática a CWT é implementada discretizando os parâmetros de escala e de translação. Dependendo da função wavelet utilizada, tal discretização pode implicar em dois tipos de bases wavelets: *frames* e ortogonais (DAUBECHIES, 1992). Na próxima seção será discutida a DWT.

2.3 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

As wavelets discretas não são transladadas nem escalonadas continuamente, mas sim em intervalos discretos. Isto pode ser feito com uma pequena modificação dos parâmetros da CWT:

- $s = s_0^m$, $s_0 > 1$;
- $\tau = k \tau_0 s_0^m$, $\tau_0 > 1$;
- s_0 e τ_0 são valores fixos;
- m e k são inteiros.

Para o parâmetro de escala é escolhido um valor inteiro m cuja operação de escalonamento é multiplicativa. Assim, diferentes valores de m correspondem a wavelets de diferentes comprimentos. Dessa forma, conforme m aumenta, o suporte da wavelet para representar o sinal na escala s_0^m também aumenta em comparação com a escala anterior s_0^{m-1} . Assim, são necessários menos translados para cobrir todo o sinal. Por este motivo, o parâmetro τ é discretizado também na dependência de m (DAUBECHIES, 1992). Desse modo, a wavelet discretizada é expressa como:

$$\psi_{m,k}(t) = s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m}t - k\tau_0). \quad (12)$$

Logo, supondo que ψ seja real, a versão discretizada de (9), denominada DWT, toma a seguinte forma:

$$W_{x_c}^\psi[m, k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t) \psi_{m,k}(t) dt. \quad (13)$$

O processo de reconstrução da DWT não é similiar ao caso da CWT, onde se tem uma resolução de identidade. A reconstrução irá depender de $\psi_{m,k}(t)$, desde que existam duas constantes positivas C_1 e C_2 , que satisfaçam a seguinte condição:

$$C_1 \|x_c\|^2 \leq \sum_{m,k \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{m,k}, x_c \rangle|^2 \leq C_2 \|x_c\|^2, \quad (14)$$

onde

$$\|x_c\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_c(t)|^2 dt, \quad (15)$$

e $\langle \psi_{m,k}, x_c \rangle$ denota o produto interno entre $\psi_{m,k}$ e x_c . Se a condição (14) é satisfeita, então $\{\psi_{m,k}; m, k \in \mathbb{Z}\}$ é chamado de *frame*. Assim, pode-se reconstruir o sinal a partir dos coeficientes wavelet $\langle \psi_{m,k}, x_c \rangle$

$$x_c(t) \cong \frac{2}{C_1 + C_2} \sum_{m,k \in \mathbb{Z}} \psi_{m,k}(t) \langle \psi_{m,k}, x_c \rangle. \quad (16)$$

A exatidão da reconstrução de $x_c(t)$ depende das cotas (limites) C_1 e C_2 do *frame*. Quanto mais próximos de um valor, mais exata será a reconstrução. Para uma escolha apropriada de $\psi(t)$, e fazendo $s_0 = 2$ e $\tau_0 = 1$, têm-se que

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m}t - k), \quad (17)$$

constitui uma base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ (DAUBECHIES, 1992). Neste caso, toda a redundância é removida na representação wavelet, e a reconstrução pode ser obtida de forma exata, o que implica $C_1 = C_2 = 1$.

Bases de wavelets ortogonais estão relacionadas com a MRA (MALLAT, 1989a). De fato, wavelets ortogonais, bancos de filtros e MRA foram utilizados de forma independente nas áreas da matemática aplicada, processamento de sinais e visão computacional. Entretanto, tais teorias convergiram mais tarde para formar uma única teoria (VETTERLI; HERLEY, 1992). A expressão máxima dessa relação é dada pela FWT, que pode ser vista como um algoritmo rápido para o cálculo da DWT.

2.4 ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO

Novas possibilidades de construção de bases wavelets ortogonais foram exploradas com o surgimento da MRA. Formulada por Meyer e Mallat (MEYER, 1986; MALLAT, 1989a), a MRA mostra que as bases wavelets são uma ferramenta matemática para o incremento de informação necessária. Assim, partindo de uma aproximação de baixa resolução pode-se chegar em uma aproximação de resolução mais alta. De acordo com Mallat (1989a), uma MRA em $L^2(\mathbb{R})$ é uma sequência de subespaços fechados V_m , $m \in \mathbb{Z}$, de $L^2(\mathbb{R})$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(M1) \quad \forall (m, k) \in \mathbb{Z}^2, x_c(t) \in V_m \Leftrightarrow x_c(t - 2^m k) \in V_m,$$

$$(M2) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, V_{m+1} \subset V_m,$$

$$(M3) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, x_c(t) \in V_m \Leftrightarrow x_c\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{m+1},$$

$$(M4) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} V_m = \bigcap_{m=-\infty}^{+\infty} V_m = \{0\},$$

$$(M5) \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} V_m = \overline{\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} V_m} = L^2(\mathbb{R}),$$

$$(M6) \quad \text{Existe uma função } \theta \in V_0 \text{ tal que } \{\theta(t - k); k \in \mathbb{Z}\} \text{ é uma base de Riesz de } V_0.$$

Cada espaço V_m pode ser visto como o espaço de todas as aproximações possíveis na resolução 2^{-m} das funções em $L^2(\mathbb{R})$. A demonstração das propriedades (M1) - (M6) também podem ser encontradas em Daubechies (1992). A propriedade (M1) significa que o espaço V_m é invariante por qualquer translação proporcional à escala 2^m . (M2) é uma propriedade de causalidade que prova que uma aproximação em uma resolução 2^{-m} contém todas as informações necessárias para calcular uma aproximação em um resolução menor 2^{-m-1} . Na propriedade (M3) têm-se que os detalhes que aparecem em

uma escala 2^m também aparecem na escala 2^{m-1} . A propriedade **(M4)** significa que a função identicamente nula é a única que pode ser representada em qualquer escala, sendo uma consequência das demais propriedades. A propriedade **(M5)** afirma que $L^2(\mathbb{R})$ contém todas as escalas possíveis (MALLAT, 1999).

A aproximação de $x_c(t)$ na resolução 2^{-m} pode ser obtida pela projeção ortogonal

$$P_{V_m}(x_c) = \sum_k \langle x_c, \phi_{m,k} \rangle \phi_{m,k}. \quad (18)$$

onde $\{2^{-m/2}\phi(2^{-m}t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortogonal de V_m . Assim, tendo uma base ortogonal de V_m , pode-se aproximar um sinal (ou uma função) $x_c(t)$ na escala 2^m . O produto interno

$$a_m[k] = \langle x_c, \phi_{m,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t) \frac{1}{\sqrt{2^m}} \phi(2^{-m}t - k) dt, \quad (19)$$

fornece uma aproximação discreta na escala 2^m . Uma vez que $\phi(t)$ pode ser visto como um filtro passa-baixa, $a_m[k]$ pode ser interpretado como uma filtragem de $x_c(t)$ seguida de uma amostragem uniforme a uma taxa de 2^m (MALLAT, 1999).

No contexto da MRA, $\phi(t)$ é obtida a partir da base de Riesz conforme **(M6)**. Desse modo, para que $\{\theta(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ seja considerada uma base de Riesz, basta que existam constantes A e B tais que

$$0 < A \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Theta(\Omega - 2\pi k)|^2 \leq B < \infty, \quad (20)$$

onde $\Theta(\Omega)$ é a FT de $\theta(t)$ (MALLAT, 1999). Dessa forma, se a condição (20) é verificada, $\phi(t)$ pode ser obtida no domínio da frequência por

$$\Phi(\Omega) = \frac{\Theta(\Omega)}{(\sum_k |\Theta(\Omega - 2\pi k)|^2)^{1/2}}. \quad (21)$$

Assim, a família

$$\phi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \phi(2^{-m}t - k) \quad (22)$$

é uma base ortogonal de V_m , $\forall m \in \mathbb{Z}$. A função $\phi(t)$ é denominada função escala.

Uma vez que $\phi(t) \in V_0 \subset V_{-1}$ e que $\phi_{-1,k}(t)$ é uma base ortonormal em V_{-1} , pode-se escrever

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h[k] \phi(2t - k), \quad (23)$$

onde

$$h[k] = \langle \phi, \phi_{-1,k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (24)$$

A sequência discreta $h[k]$ é um filtro discreto do tipo passa-baixa. Assim, qualquer função escala é especificada por um filtro discreto que satisfaz (23) e (24). A transformada

de Fourier para tempo discreto (DTFT - *Discrete Time Fourier Transform*) do filtro $h[k]$ pode ser obtida por (MALLAT, 1989b):

$$H(\omega) = \sqrt{2} \frac{\Phi(2\omega)}{\Phi(\omega)}, \quad (25)$$

e que satisfaz a condição complementar de potência (PCC - *Power Complementary Condition*), ou seja,

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2. \quad (26)$$

Filtros que satisfazem (26) são chamados filtros conjugados (MALLAT, 1989b).

As aproximações de um sinal $x_c(t)$ nas escalas 2^m e 2^{m-1} são, respectivamente, iguais às suas projeções ortogonais em V_m e V_{m-1} . Se W_m é o complemento ortogonal de V_m em V_{m-1} , então, a projeção ortogonal de $x_c(t)$ em V_{m-1} pode ser decomposta como a soma das projeções ortogonais em V_m e W_m :

$$P_{V_{m-1}}(x_c) = P_{V_m}(x_c) + P_{W_m}(x_c). \quad (27)$$

Logo, o complemento $P_{W_m}(x_c)$ fornece os detalhes de $x_c(t)$ que aparecem na escala 2^{m-1} , mas que desaparecem na escala de menor resolução 2^m .

Conforme demonstrado em Mallat (1989b), uma base do espaço W_m é uma base wavelet ortogonal do tipo (17). De $\Phi(\Omega)$ e $H(\omega)$, tal base pode ser obtida a partir da wavelet definida por

$$\Psi(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G(\Omega/2) \Phi(\Omega/2), \quad (28)$$

onde

$$G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi), \quad (29)$$

e $*$ denota o complexo conjugado (MALLAT, 1989b).²

Dessa forma, a projeção ortogonal de um sinal $x_c(t)$ em um espaço de “detalhe” W_m é obtida com uma expansão parcial em sua base de wavelets:

$$P_{W_m}(x_c) = \sum_k \langle x_c, \psi_{m,k} \rangle \psi_{m,k}, \quad (30)$$

onde o produto interno

$$d_m[k] = \langle x_c, \psi_{m,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t) \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m}t - k) dt, \quad (31)$$

fornece os detalhes na escala 2^m .

Na prática, a construção de novas bases wavelets ortogonais parte do filtro $H(\omega)$ definido em (25). As wavelets de Daubechies, por exemplo, são construídas dessa forma

² Note que ω é usado como o parâmetro de frequência de um sinal de tempo discreto, em contraste com o parâmetro de frequência do sinal de tempo contínuo, onde Ω é a notação referente. Portanto, é necessário ajustar as Equações (25) e (28) para a notação correta.

(DAUBECHIES, 1992). Assim, uma wavelet ortogonal é completamente caracterizada pelo filtro conjugado associado, que pode ser definida no domínio do tempo por

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g[k] \phi(2t - k), \quad (32)$$

onde

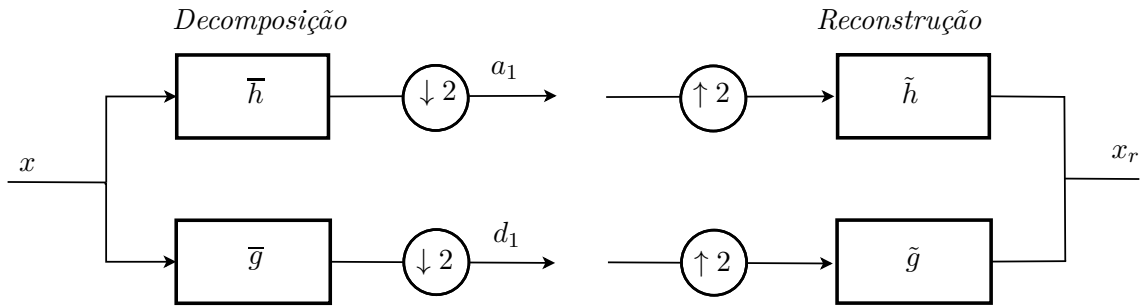
$$g[k] = (-1)^{1-k} h[1 - k]. \quad (33)$$

No próximo capítulo, será mostrado como os filtros h e g são as bases para o algoritmo da FWT. De fato, esse algoritmo é um padrão clássico na comunidade de processamento de sinais, conhecido como codificador de sub-banda de dois canais. Assim, a FWT é implementada utilizando um banco de filtros wavelet de dois canais, cujo projeto é baseado no filtro conjugado.

3 BANCO DE FILTROS WAVELET

Conforme visto no Capítulo 2, como $\{\phi_{m,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{\psi_{m,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ são bases ortogonais dos espaços V_m e W_m , a projeção ortogonal de um sinal nestes espaços é caracterizada por a_m e d_m , conforme (19) e (31), respectivamente. Mallat mostrou que tais coeficientes podem ser obtidos por um banco de filtros wavelet de dois canais (FWT) baseado nos filtros h e g definidos por (24) e (33), respectivamente (MALLAT, 1989b). Na Figura 2 é mostrada a estrutura da FWT tanto no processo de decomposição como no processo de reconstrução.

Figura 2 – Representação em diagrama de blocos da FWT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, a representação wavelet de um sinal de tempo discreto $x[n] \in \ell^2(\mathbb{Z})^1$ utilizando a FWT pode ser obtida pela decomposição do mesmo por meio dos filtros passa-baixa $\bar{h}$ e passa-alta $\bar{g}$, sendo que após o processo de filtragem, o operador *downsampling* ($\downarrow 2$) remove as amostras de forma alternada dos sinais filtrados. Os resultados obtidos são os coeficientes wavelet de aproximação a_1 e detalhe d_1 .

Na Figura 2 mostra-se a decomposição da FWT em apenas um nível. Entretanto, o processo de decomposição pode ser realizado em vários níveis, onde cada nível considera o sinal de aproximação do nível anterior como ponto de partida para a decomposição. Assim, para calcular os coeficientes de aproximação e detalhe no nível $m + 1$, pode-se utilizar a_m como ponto de partida:

$$a_{m+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{h}[2k - n]a_m[n], \quad (34)$$

$$d_{m+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{g}[2k - n]a_m[n], \quad (35)$$

sendo $\bar{h}[k] = h[-k]$ e $\bar{g}[k] = g[-k]$ (MALLAT, 1989b).

¹ Espaço de sinais discretos de energia finita

No processo de reconstrução, os coeficientes wavelet passam pelo operador de *up-sampling* ($\uparrow 2$) que insere um zero entre as amostras, e posteriormente são novamente filtrados pelos respectivos filtros passa-baixa $\tilde{h}$ e passa-alta $\tilde{g}$, e então, a soma destes resultados fornece o sinal reconstruído. No caso da Figura 2, onde se considera apenas o primeiro nível de decomposição, o sinal reconstruído x_r é obtido por:

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}[n-2k]a_1[k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}[n-2k]d_1[k]. \quad (36)$$

No contexto da FWT, os filtros passa-altas são definidos em função dos filtros passa-baixas:

$$g[k] = (-1)^{1-k}\tilde{h}[1-k], \text{ e } \tilde{g}[k] = (-1)^{1-k}h[1-k].$$

Desse modo, a propriedade de perfeita reconstrução se resume em satisfazer (MALLAT, 1999):

$$H^*(\omega)\tilde{H}(\omega) + H^*(\omega + \pi)\tilde{H}(\omega + \pi) = 2. \quad (37)$$

Assim, o projeto de um banco de filtros wavelet se resume em projetar os filtros $H(\omega)$ e $\tilde{H}(\omega)$ que satisfazem (37).

Os bancos de filtros wavelet clássicos são do tipo ortogonal ou biortogonal. De fato, a maioria das aplicações que utilizam a FWT, a implementam por meio de um banco de filtros wavelet ortogonal (OWFB - *Orthogonal Wavelet Filter Bank*) ou por um banco de filtros wavelet biortogonal (BWFB - *Biorthogonal Wavelet Filter Bank*). Nas Seções 3.1 e 3.2 são apresentados os principais filtros wavelet utilizados nos casos ortogonal e biortogonal. Outra possibilidade de banco de filtros wavelet, que é o foco deste trabalho, é o banco de filtros wavelet quase-ortogonal (NOWFB - *Nearly-Orthogonal Wavelet Filter Bank*). Uma descrição sobre os NOWFBs é realizada na Seção 3.3.

3.1 FILTROS WAVELET ORTOGONAIS

Para o caso ortogonal, $\tilde{h}[k] = h[k]$, onde $h[k]$ é a resposta impulsiva do filtro conjugado $H(\omega)$ definido em (25). Logo, para um OWFB tem-se que $H(\omega) = \tilde{H}(\omega)$, implicando que a condição de perfeita reconstrução se resume na condição complementar de potência dada em (26). Portanto, os filtros de decomposição e reconstrução de um OWFB são definidos a partir de $h[k]$:

- Filtro passa-baixa de decomposição: $\bar{h}[k] = h[-k]$;
- Filtro passa-alta de decomposição: $\bar{g}[k] = (-1)^{1+k}h[1+k]$;
- Filtro passa-baixa de reconstrução: $\tilde{h}[k] = h[k]$;
- Filtro passa-alta de reconstrução: $\tilde{g}[k] = (-1)^{1-k}h[1-k]$.

As wavelets ortogonais mais conhecidas e utilizadas são as de Daubechies, as Symmlets e as Coiflets:

Daubechies

Em 1988, Daubechies apresentou um método utilizado para construir bases ortogonais de wavelets com suporte compacto e regularidade arbitrariamente alta (DAUBECHIES, 1988). Os filtros wavelet associados a tais wavelets são do tipo FIR, com comprimentos determinados pelo número N de momentos nulos. A construção das wavelets de Daubechies é baseada na seguinte identidade para obter o filtro conjugado:

$$H(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-j\omega}}{2} \right)^N R(e^{-j\omega}), \quad (38)$$

em que $P(\sin^2 \omega/2) = |R(e^{-j\omega})|^2$ pode ser escrito como

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k, \quad (39)$$

com $P(y) \geq 1$ para $y \in [0, 1]$. Uma vez que os coeficientes de $R(e^{-j\omega})$ são reais, tem-se que $R^*(e^{-j\omega}) = R(e^{j\omega})$ e desse modo:

$$|R(e^{-j\omega})|^2 = R(e^{-j\omega})R(e^{j\omega}) = P\left(\frac{2 - e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{4}\right) = Q(e^{-j\omega}). \quad (40)$$

A fatoração em (40) é resolvida estendendo-a para todo o plano complexo $z = e^{-j\omega}$ (MALLAT, 1999):

$$Q(z) = 2^{N-1} \prod_k (1 - a_k z)(1 - a_k z^{-1}). \quad (41)$$

Na obtenção dos zeros de $Q(z)$, tem-se que, se a_k é um zero, então $1/a_k, a_k^*, 1/a_k^*$ também são zeros. Dessa forma, $R(e^{-j\omega})$ é obtido escolhendo-se um zero real do par $\{r_k, 1/r_k\}$ e um par dos zeros complexos do quadrúpulo $\{z_k, z_k^*, 1/z_k, 1/z_k^*\}$ para obter coeficientes reais. Para os filtros de Daubechies são escolhidos os zeros de tal forma que $|a_k| \leq 1$, ou seja, zeros que estão dentro do círculo de raio unitário (DAUBECHIES, 1988). Nesse caso, tal escolha implica em sistemas de fase mínima (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

Symmlets

As wavelets de Daubechies são muito assimétricas, pois são construídas a partir dos zeros que implicam em fase mínima de $R(e^{-j\omega})$. A única wavelet de Daubechies simétrica é a wavelet de Haar ($N = 1$). Em Daubechies (1993) são apresentadas as Symmlets, que

são uma adaptação das wavelets de Daubechies. Os filtros Symmlets são obtidos por meio da otimização da escolha dos zeros em $R(e^{-j\omega})$, a fim de obter-se filtros conjugados mais simétricos possíveis.

Coiflets

Assim como as Symmlets, Coiflets também foram apresentadas em Daubechies (1993). Tais wavelets foram projetadas para serem utilizadas em análise numérica. O diferencial destas wavelets é que as funções escalas associadas também possuem um número N de momentos nulos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \phi(t) dt = 0, \text{ para } 1 \leq k < N. \quad (42)$$

Dizer que uma wavelet ortogonal $\psi(t)$ possui N momentos nulos é equivalente dizer que seu filtro conjugado correspondente possui N zeros em $H(\omega)$ (ou N zeros em $z = -1$ no plano complexo) (DAUBECHIES, 1992). No caso das funções escalas de Coiflets, o número de momentos nulos também é preservado. Uma wavelet com um número alto de momentos nulos possui vantagens em detectar singularidades e transitórios (MALLAT, 1999). Nesse caso, em baixas escalas, os coeficientes de detalhes são nulos onde o sinal é suave, diferente do que acontece para os coeficientes de aproximação. A condição suplementar (42) implica no aumento do suporte da wavelet obtida. As wavelets de Coiflets possuem um suporte de comprimento $3N - 1$ em vez de $2N - 1$ como nas wavelets de Daubechies e Symmlets.

É muito comum encontrar na literatura nomes curtos para famílias de wavelets. Por exemplo, dbN e $symN$ são os nomes curtos para as wavelets Daubechies e Symmlets, respectivamente. Nesse caso, N indica o número de momentos nulos e também a metade do comprimento dos respectivos filtros wavelet. Geralmente, as Coiflets são denotadas por $coifN$, e, nesse caso, o respectivo filtro possui comprimento $6N$ e as funções wavelets e de escala possuem ambas $2N$ momentos nulos.

3.2 FILTROS WAVELET BIORTOGONAIS

É possível construir wavelets biortogonais suaves de suporte compacto, simétricas ou anti-simétricas. No caso das wavelets biortogonais o filtro conjugado h é diferente do filtro de reconstrução $\tilde{h}$. Assim, diferente do caso ortogonal, é necessário projetar o filtro $\tilde{h}$. Logo, para o caso biortogonal, são definidas duas funções escalas e duas funções wavelets. Desse modo, qualquer $x_c(t) \in L^2(\mathbb{R})$ possui duas possibilidades de decomposição nessas bases:

$$x_c(t) = \sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} \langle x_c, \psi_{m,k} \rangle \tilde{\psi}_{m,k}(t) = \sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} \langle x_c, \tilde{\psi}_{m,k} \rangle \psi_{m,k}(t). \quad (43)$$

Em Cohen, Daubechies e Feauveau (1992) é apresentada uma metodologia para projetar wavelets biortogonais que, assim como no caso ortogonal, os filtros h e $\tilde{h}$ são projetados considerando uma restrição do número de zeros em $z = -1$:

$$H(\omega) = \sqrt{2}e^{-j\epsilon\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^N A(\cos \omega), \quad (44)$$

$$\tilde{H}(\omega) = \sqrt{2}e^{-j\epsilon\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{\tilde{N}} \tilde{A}(\cos \omega), \quad (45)$$

com $\epsilon = 0$ para N e $\tilde{N}$ com valores pares e $\epsilon = 1$ para N e $\tilde{N}$ de valores ímpares. Dessa forma, a condição (37) implica

$$A(\cos \omega)\tilde{A}(\cos \omega) = P\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right), \quad (46)$$

onde o polinômio $P(y)$ é definido conforme (39)

$$P(y) = \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1+k}{k} y^k, \quad (47)$$

com $q = (N + \tilde{N})/2$.

Splines

As wavelets Splines biortogonais são projetadas considerando $A(\cos \omega) = 1$ em (44). Dessa forma, têm-se (MALLAT, 1999)

$$H(\omega) = \sqrt{2}e^{-j\epsilon\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^N. \quad (48)$$

e

$$\tilde{H}(\omega) = \sqrt{2}e^{-j\epsilon\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{\tilde{N}} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1+k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2k}. \quad (49)$$

O projeto de outras wavelets biortogonais com suporte compacto pode ser encontrado em Cohen, Daubechies e Feauveau (1992), Vetterli e Herley (1992). Entretanto, as wavelets Splines são as bases biortogonais mais utilizadas na literatura. Tais wavelets são comumente denotadas por $\text{bior}Nr.Nd$, onde Nr e Nd são respectivamente o número de momentos nulos das wavelets de decomposição e reconstrução.

Os respectivos filtros wavelet Splines de decomposição e reconstrução geralmente possuem comprimentos muito diferentes, o que pode ser uma desvantagem em algumas aplicações onde os comprimentos dos mesmos devem ser próximos (DAUBECHIES, 1992). Porém, alguns filtros wavelet $\text{bior}Nr.Nd$ possuem comprimentos próximos, como $\text{bior}4.4$, que corresponde aos filtros de decomposição e reconstrução de tamanhos 9 e 7, respectivamente.

3.3 FILTROS WAVELET QUASE-ORTOGONAIS

Como o nome já diz, wavelets quase-ortogonais satisfazem aproximadamente as condições de ortogonalidade. Logo, deve-se esperar que um banco de filtros wavelet quase-ortogonal (NOWFB) não implica na propriedade de perfeita reconstrução. Assim como no caso ortogonal, a maioria dos métodos de projetos de wavelets quase-ortogonais utiliza a condição (26) como base. Tal condição, também pode ser vista no domínio temporal da seguinte forma (STRANG; NGUYEN, 1996):

$$\sum_k h[k - 2n]h[k] = \delta[n], \quad (50)$$

onde $\delta[n]$ é a sequência de amostra unitária (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

Em resumo, a estratégia de projeto dos NOWFBs é similar a do caso ortogonal: primeiro projeta-se o filtro conjugado passa-baixa apropriado $h[k]$, e a partir deste, obtêm-se os filtros de decomposição e reconstrução do banco de filtros. Uma vez que o filtro $h[k]$ projetado no caso quase-ortogonal satisfaz aproximadamente a condição (26), chamaremos esse filtro de semi-conjugado. Na próxima seção serão apresentados alguns exemplos de bases wavelets quase-ortogonais. Considerando os principais trabalhos na literatura, será apresentado um resumo sobre o método de projeto dos mesmos.

3.3.1 Exemplos de wavelets quase-ortogonais

No que segue, os três principais exemplos de wavelets quase-ortogonais encontradas na literatura especializada são apresentados. Em 1996, as primeiras wavelets quase-ortogonais foram projetadas para serem utilizadas em algoritmos adaptativos para cancelamento de eco (JIN; LUO; WONG, 1996). A família de wavelets obtida para este propósito foi denominada OQB (*Optimum Quasi-Biorthogonal*). O segundo exemplo é referente as wavelets quase-ortogonais apresentada por Zhao e Swamy (2000). Tais wavelets são denotadas por $\text{NO}\beta$, onde β representa o número de momentos nulos e a variação de parâmetros no método de projeto considerado. O último exemplo é referente a uma wavelet quase-ortogonal projetada por Edavoor e Rahulkar (2019). Tal wavelet se baseia no método para projetar a wavelet db3, que por meio de algumas modificações, se obtém uma wavelet simétrica cujo filtro semi-conjugado possui coeficientes racionais. Para simplificar a notação, denotamos tal wavelet como ER3.

OQB

Em Jin, Luo e Wong (1996), a estratégia utilizada para projetar os filtros semi-conjugados se baseou em maximizar o conteúdo de energia dos mesmos na faixa de pas-

sagem, ou seja,

$$\max_{h[k]} E_p = \max_{h[k]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} |H(\omega)|^2 d\omega, \quad (51)$$

sujeito a condição (50). Para resolver esse problema de otimização os autores utilizaram um algoritmo de penalização.

Na Tabela 1 são apresentados os coeficientes de um filtro semi-conjugado referente a uma wavelet OQB. Note que este filtro não é simétrico, o que implica uma wavelet assimétrica. Utilizando tal filtro, pode-se obter os resultados mostrados na Figura 3, onde são exibidos o espectro de magnitude do filtro semi-conjugado (Figura 3-(a)), o resultado de $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2$ (Figura 3-(b)), e as formas de onda da função escala (Figura 3-(c)) e da wavelet (Figura 3-(d)). Observando a Figura 3-(b), pode-se notar a característica de um filtro semi-conjugado, onde $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2$ oscila em torno de 2.

Tabela 1 – Filtro semi-conjugado de uma wavelet OQB.

k	$h[k]$	k	$h[k]$	k	$h[k]$	k	$h[k]$
0	-0,0095	5	0,0664	10	0,4672	15	0,1760
1	-0,0059	6	0,0839	11	0,6233	16	0,0688
2	0,0212	7	-0,1775	12	0,3115	17	0,0116
3	0,0088	8	-0,4096	13	0,0998	18	0,0261
4	-0,0113	9	-0,1139	14	0,1574	19	0,0197

Fonte: (JIN; LUO; WONG, 1996).

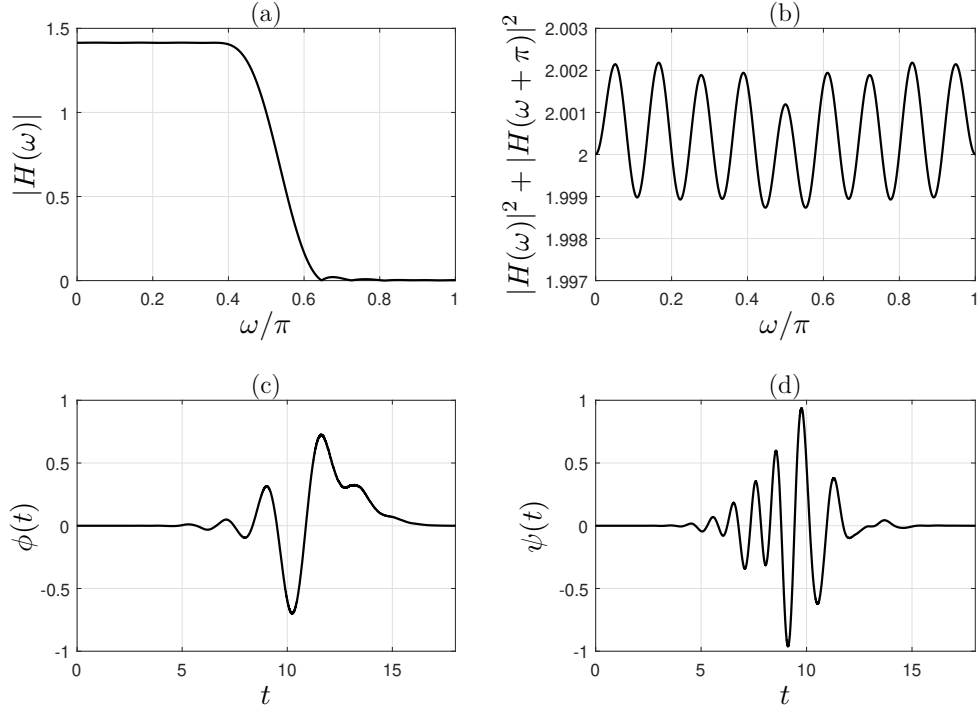
Os filtros wavelet OQB obtiveram melhores resultados que outros filtros ortogonais no problema de cancelamento de eco. Assim, embora que estes filtros não implicassem perfeita reconstrução, eles apresentaram resultados superiores a outras wavelets ortogonais utilizadas. Alguns dos filtros projetados por Jin, Luo e Wong (1996) também foram usados em aplicações que envolviam simulações em salas acústicas e medição de tempo de vôo de ecos de pulso ultrassônico (WYK; VIROLLEAU, 1998; GRIMALDI, 2006). Observa-se que nestes trabalhos as wavelets OQB foram mais eficientes que outras wavelets clássicas.

A estratégia de projeto das wavelets OQB não garante que $H(\pi) = 0$. Assim, a wavelet gerada pelo filtro semi-conjugado, não satisfaz a condição (1). Isso pode ser provado, uma vez que a partir de (2), (28) e (29) tem-se que

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} H^*(\pi). \quad (52)$$

Para a wavelet exibida na Figura 3-(d), $\Psi(0) \approx 0,0018$ que de fato é um valor relativamente próximo de zero. Embora possa parecer uma desvantagem, é comum utilizar wavelets que não satisfazem a condição de admissibilidade. A forma reduzida da wavelet de Morlet, conforme descrita pela Equação (5), $\psi^{mo}(t) = e^{j\Omega_0 t} e^{-t^2/2}$, onde Ω_0 denota a frequência central da wavelet, também não satisfaz a condição (1). No entanto, pode ser observado que $\Psi^{mo}(0)$ é suficientemente pequeno para $\Omega_0 \geq 5$, o que permite o uso dessa

Figura 3 – Resultados obtidos pelo filtro semi-conjugado OQB. (a) Espectro de magnitude. (b) Desvio de ortogonalidade. (c) Função escala. (d) Função wavelet.



Fonte: Elaborado pelo autor.

wavelet em diversas aplicações onde o processo de reconstrução não é necessário (LIN; QU, 2000; CHEN; CHU, 2017; AYAD *et al.*, 2014).

NO β

Uma das desvantagens das wavelets OQB é que as mesmas não são simétricas. Pensando nisso, Zhao e Swamy (ZHAO; SWAMY, 2000) propuseram uma metodologia para projetar filtros wavelet quase-ortogonais simétricos (ou anti-simétricos). O método de projeto apresentado pelos autores também utiliza a PCC como base, para medir os desvios de ortogonalidade. Além disso, tal método também se baseia na técnica de restringir zeros em $z = -1$ para o filtro semi-conjugado. Assim, o filtro semi-conjugado proposto por Zhao e Swamy (2000) é baseado na seguinte identidade:

$$H(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-j\omega}}{2} \right)^N S(\omega), \quad (53)$$

onde $S(\omega)$ é um filtro FIR simétrico. Tal metodologia utiliza o critério de erro

$$E = \int_0^{+\pi} (|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 - 2)^2 d\omega \quad (54)$$

para minimizar os desvios de ortogonalidade. Nesse caso, os autores utilizaram o algoritmo simplex de otimização não linear padrão, para o qual as informações do gradiente não são necessárias.

Em Zhao e Swamy (2000) foram apresentados resultados de 6 wavelets quase-ortogonais com 4 e 5 momentos nulos. Na Tabela 2 são apresentados os coeficientes de um filtro semi-conjugado de uma dessas wavelets. Tal wavelet possui 5 momentos nulos e é nomeada NO5b. Note que o filtro possui 32 coeficientes e é simétrico. Na Figura 4 são exibidos os resultados obtidos pelo filtro NO5b. Observando as Figuras 3-(b) e 4-(b), pode-se notar que os desvios de ortogonalidade de NO5b são menores do que os de OQB.

Tabela 2 – Coeficientes do filtro semi-conjugado referente a NO5b.

k	$h[k]$	k	k	$h[k]$	k
0	-0,00007292034375	31	8	0,00055422390625	23
1	-0,00001310115625	30	9	-0,02015219500000	22
2	-0,00002274962500	29	10	0,00490765875000	21
3	0,00037446578125	28	11	0,04529840187500	20
4	0,00058140968750	27	12	-0,02690016234375	19
5	-0,00238138846875	26	13	-0,09894403390625	18
6	-0,00114585725000	25	14	0,11772493578125	17
7	0,00786055584375	24	15	0,47230872546875	16

Fonte: (ZHAO; SWAMY, 2000)

A wavelet NO5b foi utilizada em uma aplicação de compressão de imagens. Os resultados obtidos não foram comparados com outras wavelets ortogonais ou biortogonais. De fato, os resultados obtidos pela NO5b foram comparados com os resultados de um banco de filtros QMF proposto por Sriram e Marcellin (1995), e que também foi utilizado com êxito no problema de compressão de imagens. Os resultados obtidos pela NO5b foram levemente superiores a este banco de filtros (ZHAO; SWAMY, 2000). Um filtro projetado em Zhao e Swamy (2000) também foi usado em uma metodologia para remover ruídos em sinais de eletrocardiograma (CHEN *et al.*, 2008). Nesse caso a comparação dos resultados se deu pela wavelet sym8, e verificou-se que a wavelet quase-ortogonal foi mais eficiente.

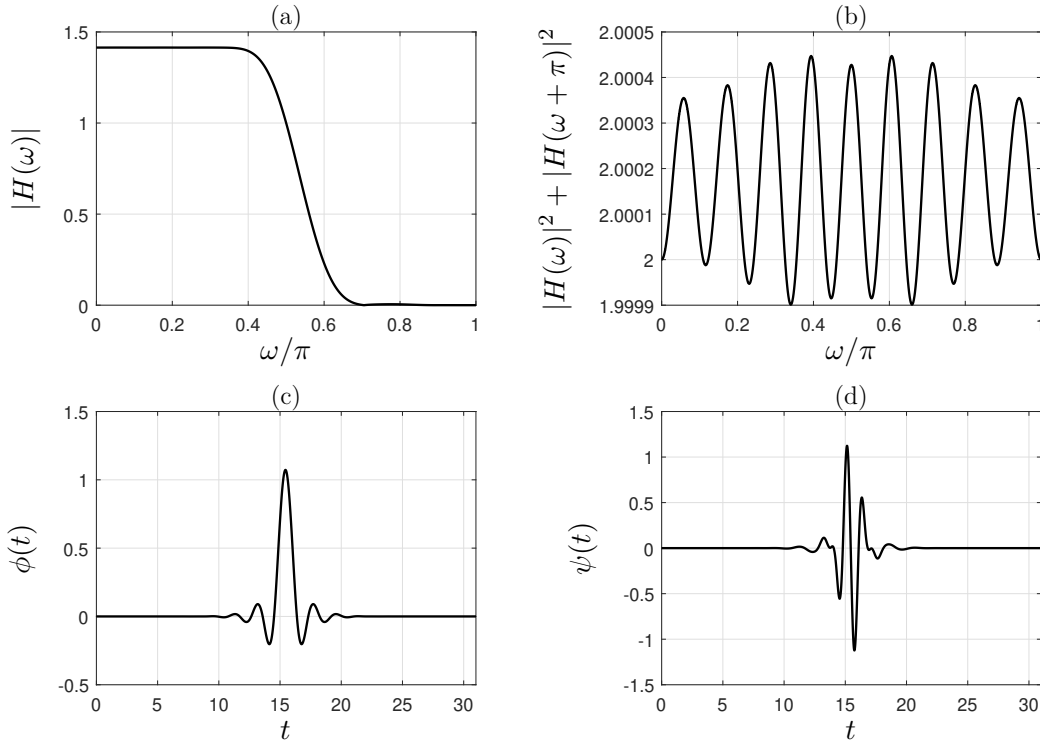
ER3

Recentemente, Edavoor e Rahulkar (2019) apresentaram uma abordagem para projetar um NOWFB simétrico com coeficientes racionais. Nesse caso, os autores apresentaram um filtro semi-conjugado com 6 coeficientes, onde a estratégia para projetar tal filtro é baseada no projeto do filtro wavelet db3:

$$H(z) = (1 + z^{-1})^3(p_1 + z^{-1})(p_2 + z^{-1}), \quad (55)$$

sendo os parâmetros p_1 e p_2 (com $p_1 p_2 = 1$) obtidos de tal forma a obter um filtro simétrico. A partir de uma modificação da condição (50), e utilizando métodos de otimização, os

Figura 4 – Resultados obtidos pelo filtro semi-conjugado NO5b. (a) Espectro de magnitude. (b) Desvio de ortogonalidade. (c) Função escala. (d) Função wavelet.



Fonte: Adaptado de Zhao e Swamy (2000)

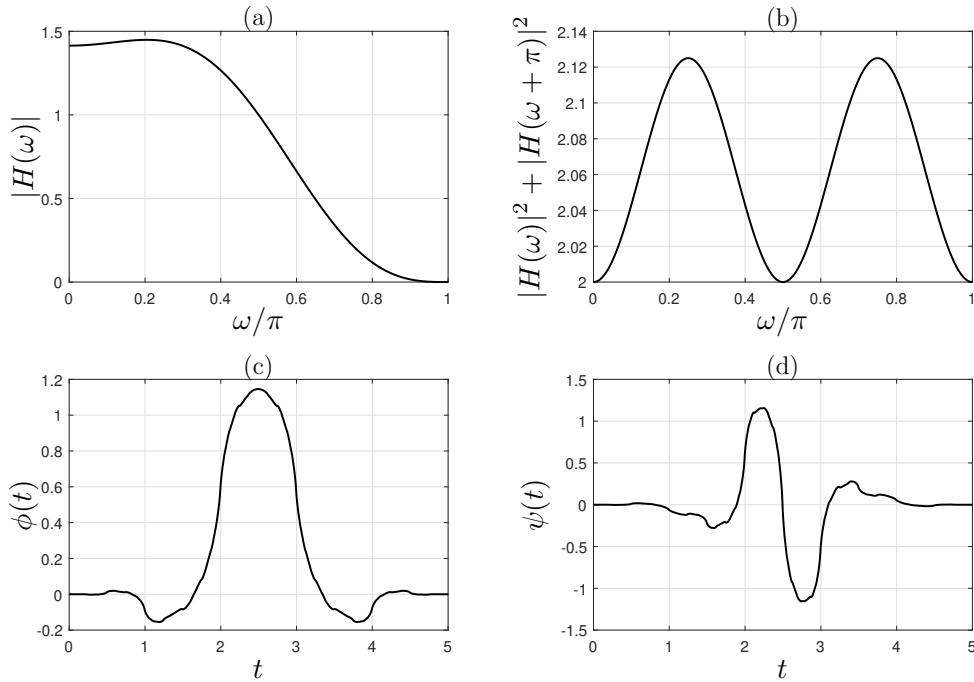
autores obtiveram o seguinte resultado:

$$H(z) = \frac{1}{16} (1 - z^{-1} - 8z^{-2} - 8z^{-3} - z^{-4} + z^{-5}). \quad (56)$$

Este filtro também foi utilizado em compressão de imagens, sistema de reconhecimento de íris e multiplexação por divisão ortogonal de frequência, obtendo resultados significativos em relação a outros filtros wavelet clássicos. Na Figura 5 são exibidos os resultados obtidos por tal filtro. Note que, comparando os desvios de ortogonalidades com os das wavelets OQB e NO5b, pode-se concluir que os mesmos são consideravelmente maiores do que os destas wavelets. Outra característica que se destingue é que a largura na faixa de transição do filtro em questão é maior do que os filtros de OQB e NO5b.

Apesar da wavelet ER3 implicar maiores desvios de ortogonalidade, os resultados das aplicações exploradas pelos autores (exceto compressão de imagens), mostram que, tal wavelet atinge melhores resultados do que os demais filtros wavelet ortogonais explorados. Assim, para algumas aplicações, como as apresentadas pelos autores, os desvios de ortogonalidade podem ser irrelevantes e não interferem nas análises feitas a partir dos resultados obtidos por um NOWFB.

Figura 5 – Resultados obtidos pelo filtro semi-conjugado ER3. (a) Espectro de magnitude. (b) Desvio de ortogonalidade. (c) Função escala. (d) Função wavelet.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Seção 3.4, serão discutidas as distorções que filtros wavelet ortogonais, biortogonais e quase-ortogonais podem causar quando utilizadas em aplicações que envolvem o processo de decomposição da FWT.

3.4 DISTORÇÕES DOS FILTROS WAVELET

No processo de análise da FWT, os filtros influenciam diretamente no resultado dos coeficientes wavelet. Em várias aplicações que utilizam tal ferramenta, é conveniente analisar os resultados dos respectivos coeficientes de aproximação e detalhe a cada banda de decomposição. Assim, é extremamente importante utilizar filtros que implicam uma boa representação do sinal, evitando assim qualquer tipo de distorção após o processo de convolução.

No contexto de processamento de sinais, a resposta ao impulso do sistema (filtro) $h[k]$ pode ser caracterizada por sua resposta em frequência (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989)

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}. \quad (57)$$

Em geral, $H(\omega)$ assume valores complexos, podendo ser reescrito em termos de suas partes

real $H_R(\omega)$ e imaginária $H_I(\omega)$:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega), \quad (58)$$

ou em termos de magnitude e fase

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi_h(\omega)}, \quad (59)$$

onde

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega), \quad (60)$$

e

$$\varphi_h(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}. \quad (61)$$

Fisicamente, $H(\omega)$ fornece a interpretação de como o sistema modifica o sinal de entrada, em termos de magnitude e fase, para cada componente de frequência. O atraso de grupo também é uma função importante na avaliação da distorção de fase:

$$\Gamma_h(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\varphi_h(\omega). \quad (62)$$

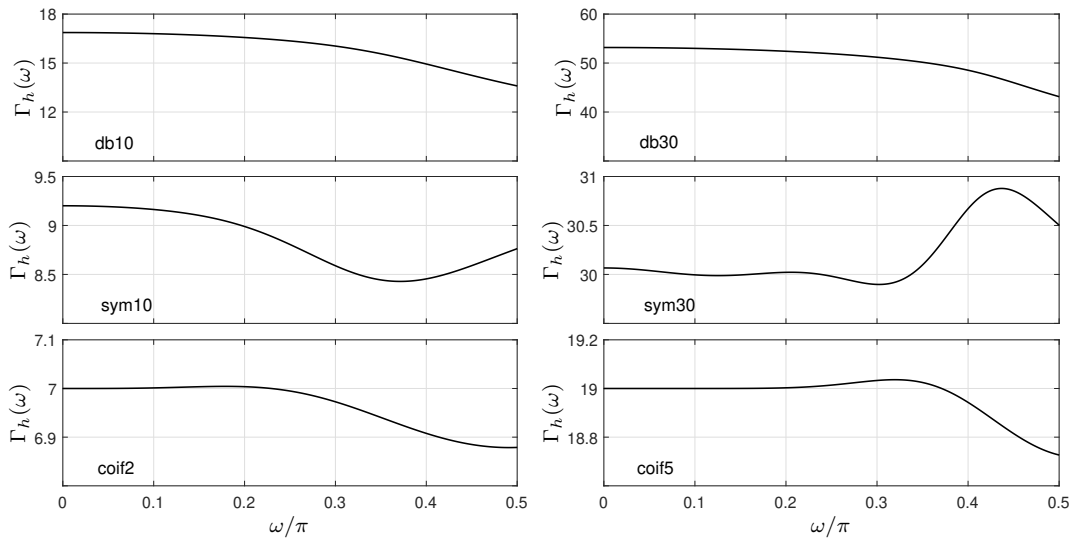
Os desvios de Γ_h em torno de uma constante indica o grau de não linearidade da fase (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

Uma das propriedades de interesse da resposta impulsiva de um sistema é a causalidade, uma vez que essa propriedade permite que o mesmo seja implementado em tempo real (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989). Como os filtros wavelet podem ser vistos como sistemas lineares e invariantes no tempo, a propriedade de causalidade dos mesmos é obtida quando $h[k] = g[k] = 0$ para $k < 0$. Além disso, dependendo do comprimento de $h[k]$, os filtros digitais podem ser classificados em dois tipos: FIR ou filtros de resposta ao impulso com duração infinita (IIR - *Infinite Impulse Response*).

Filtros FIR podem ser implementados de forma não-recursiva a partir de sua resposta impulsiva. Além do mais, é possível obter fase linear por meio destes filtros, que é uma propriedade de interesse em muitas aplicações. Isso ocorre, uma vez que é possível projetar filtros FIR com resposta impulsiva satisfazendo propriedades de simetria, o que garante a linearidade da fase (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

Para os filtros wavelet ortogonais do tipo FIR, o principal problema é a simetria. É provado que o filtro de Haar é o único simétrico e ortogonal ao mesmo tempo (DAUBECHIES, 1992). Assim, devido a não-linearidade da fase destes filtros, a análise de um sinal pode ser comprometida durante a decomposição devido às distorções de fase. Na Figura 6 são mostrados os atrasos de grupo para algumas wavelets ortogonais discutidas anteriormente. Note que a variação de $\Gamma_h(\omega)$ é menor para as $\text{sym}N$ e $\text{coif}N$, pois as mesmas são quase simétricas.

Figura 6 – Atraso de grupo dos filtros wavelet ortogonais passa-baixa de decomposição: db10, db30, sym10, sym30, coif2 e coif5.



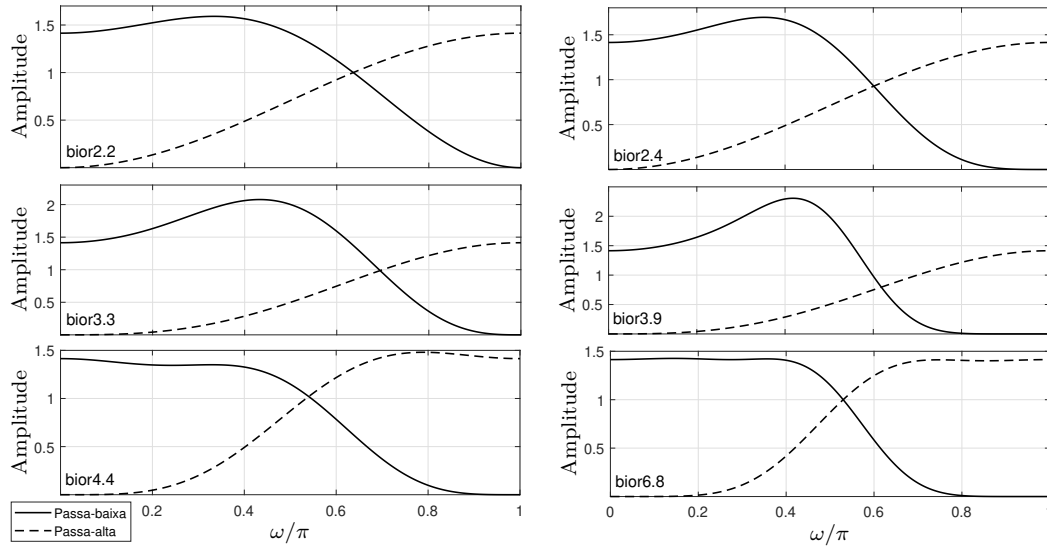
Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso das wavelets biortogonais tipo FIR é possível obter filtros wavelet simétricos. No entanto, diferentemente do caso ortogonal, muitos desses filtros apresentam variações consideráveis na faixa de ganho de sua resposta em frequência. Assim, no processo de análise de sinais, os filtros biortogonais podem comprometer sua avaliação, devido ao fato de que o ganho pode ser diferente para as frequências pertencentes a faixa de passagem. Na Figura 7 são mostrados os espectros de magnitude para alguns filtros biorNr.Nd. Em linha contínua mostra-se o espectro de magnitude do filtro passa-baixa de decomposição, e em linha tracejada é mostrado o espectro de magnitude do filtro passa-alta da decomposição. Note que, exceto para bior6.8, a variação do ganho na faixa de passagem é significativa.

Portanto, utilizando a decomposição de um sinal via FWT, podemos dizer que filtros wavelet ortogonais e biortogonais podem implicar distorções de fase e de ganho, respectivamente. Consequentemente, em aplicações onde se deseja obter uma representação mais precisa do sinal em um determinado nível de resolução, pode ser que, utilizando estes filtros, não se tenha uma boa representação (veja o exemplo da Seção 5.2.1).

Conforme pode ser visto em Zhao e Swamy (2000), pode-se obter filtros wavelet quase-ortogonais do tipo FIR com fase linear e ganho praticamente constante na faixa de passagem. Por isso, justifica-se o estudo de bases wavelets quase-ortogonais onde se pode ativar tais propriedades. Dependendo da aplicação, um NOWFB pode ser mais indicado do que um OWFB ou BWFB. De fato, a vantagem de se optar por um NOWFB que não implique em distorção de fase e consideráveis distorções de ganho está no processo de decomposição da FWT.

Figura 7 – Espectro de magnitude dos filtros wavelet biortogonais passa-baixa (linha contínua) e passa-alta (linha tracejada) de decomposição: bior2.2, bior2.4, bior3.3, bior3.9, bior4.4, bior6.8.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste trabalho, propõe-se uma nova metodologia de projeto de filtros wavelet quase-ortogonais do tipo FIR. Tais filtros possuem resposta ao impulso simétrica e podem implicar ganhos aproximadamente constantes na faixa de passagem. No próximo capítulo será apresentado um método que possibilita obter filtros semi-conjugados simétricos a partir de uma wavelet não-ortogonal. Tal método é baseado em dois resultados da literatura: cálculo da função escala associada a wavelet e o processo de ortogonalização da função escala. A partir dessa metodologia, pode-se calcular uma versão quase-ortogonalizada de uma função wavelet e utilizá-la em aplicações que envolvam a FWT.

4 PROCESSO DE QUASE-ORTOGONALIZAÇÃO WAVELET

Conforme visto no Capítulo 3, o projeto de um OWFB se resume em projetar um filtro conjugado apropriado. De forma semelhante, o projeto de um NOWFB pode ser resumido em projetar um filtro semi-conjugado. Neste capítulo, propõe-se uma nova metodologia para extrair um filtro semi-conjugado a partir de uma wavelet não-ortogonal e que, a partir deste filtro, pode-se obter uma versão quase-ortogonalizada da wavelet associada. Como será visto, o método proposto não restringe um número específico de zeros em $z = -1$. Isso permite uma flexibilização para o projeto de filtros semi-conjugados de acordo com as especificações desejadas conforme será descrito no Capítulo 5.

4.1 MÉTODO PROPOSTO

Wavelets não-ortogonais não possuem filtros conjugados associados e, por isso, não podem ser utilizadas em aplicações envolvendo a FWT. Entretanto, por meio da metodologia proposta, pode-se extrair filtros semi-conjugados a partir dessas wavelets. Desse modo, por meio destes filtros, é possível obter uma versão quase-ortogonalizada da wavelet não-ortogonal, o que possibilita a utilizações das mesmas em aplicações que envolvem a FWT.

O método proposto tem como ponto de partida o cálculo da função escala associada:

$$|\Theta(\Omega)| = \sqrt{\int_{\Omega}^{+\infty} \frac{|\Psi(\xi)|^2}{\xi} d\xi}. \quad (63)$$

Conforme descrito em Mallat (1999), se a CWT for calculada para um número finito de escalas, é necessário usar um complemento de informação para recuperar o sinal decomposto. Isso é possível calculando uma função escala associada $\theta(t)$ conforme Equação (63), onde o espectro de fase de $\theta(t)$ pode ser escolhido arbitrariamente (MALLAT, 1999).

A função escala calculada em (63) não é ortogonal, uma vez que é obtida a partir de uma wavelet não-ortogonal. Entretanto, existe uma estratégia para ortogonalizá-la. Com base nos resultados da MRA, em Daubechies (1992) é fornecida um procedimento para a construção de bases wavelets ortogonais partindo de uma função escala não-ortogonal. Para isso, é necessário que $\{\theta(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ seja uma base Riesz, e que $\theta(t)$ satisfaça

$$\theta(t) = \sum_n c[n] \theta(2t - n), \quad (64)$$

sendo $c[n]$ uma sequência discreta que satisfaz $\sum_n |c[n]|^2 < \infty$. Logo, $\theta(t)$ pode ser ortogonalizada utilizando (21). Dessa forma, a base wavelet ortogonal pode ser obtida por meio de (28).

A estratégia descrita acima foi utilizada em Battle (1987) e em Lemarié (1988) para obter as wavelets da família Battle-Lemarié. Nos dois trabalhos, as funções Splines são definidas como as funções escala não-ortogonais. Esse procedimento também foi apresentado como exemplos em Mallat (1989b) e Daubechies (1992). Entretanto, nem sempre é fácil construir funções básicas que satisfazem a condição (64), cuja definição de $\theta(t)$ é recursiva.

Uma vez que o interesse neste trabalho está em se obter filtros semi-conjugados, definimos uma estratégia semelhante a utilizada em Daubechies (1992), mas que desconsidera a necessidade de verificar a condição (64). Assim, para o método proposto, se a função obtida em (63) satisfaz (20), então, sem verificar a condição (64), aplica-se o processo de ortogonalização (21) para obter uma função escala quase-ortogonal. A estratégia pode ser resumida utilizando os seguintes passos:

PASSO 1: Calcular a FT da wavelet $\psi(t)$ não-ortogonal:

$$\Psi(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-j\Omega t} dt.$$

PASSO 2: Obter a FT da função escala associada, considerando que a fase seja nula:

$$\Theta(\Omega) = \sqrt{\int_{\Omega}^{+\infty} \frac{|\Psi(\xi)|^2}{\xi} d\xi}.$$

PASSO 3: Verificar se

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Theta(\Omega - 2\pi k)|^2 < \infty.$$

PASSO 4: Se o PASSO 3 se verifica, aplicar o processo de ortogonalização:

$$\Phi(\Omega) = \frac{\Theta(\Omega)}{(\sum_k |\Theta(\Omega - 2\pi k)|^2)^{1/2}}.$$

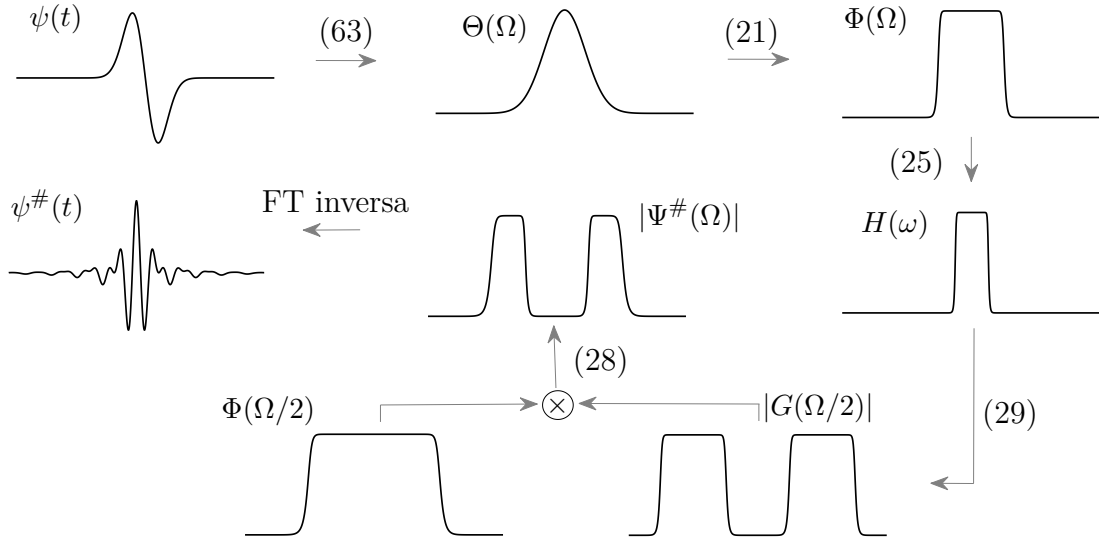
PASSO 5: Calcular o filtro semi-conjugado:

$$H(\omega) = \sqrt{2} \frac{\Phi(2\omega)}{\Phi(\omega)}.$$

PASSO 6: Obter a versão quase-ortogonalizada da wavelet:

$$\Psi^\#(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega/2} H^*(\omega/2 + \pi) \Phi(\Omega/2).$$

Assim, diferente da estratégia adotada para obter as wavelets Battle-Lemarié por exemplo, esta metodologia utiliza como ponto de partida uma função escala associada a uma wavelet não-ortogonal. Além disso, uma vez que a condição (64) não é verificada, define-se o filtro $H(\omega)$ obtido no PASSO 5 como sendo um filtro semi-conjugado. Na

Figura 8 – Processo de quase-ortogonalização wavelet.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 é mostrado o resumo do método proposta, fornecendo a estratégia para se obter uma versão quase-ortogonalizada de uma wavelet, denotada por $\psi^\#(t)$. O método proposto é chamado de processo de quase-ortogonalização wavelet (WQOP - *Wavelet Quasi-Orthogonalization Process*).

O método WQOP fornece uma maneira simples de obter uma versão quase-ortogonalizada de uma wavelet, utilizando apenas manipulações algébricas e, possivelmente, soluções numéricas para o cálculo de integrais. Observe que o método é modelado utilizando apenas resultados clássicos da MRA e da teoria wavelet.

Aplicando o método WQOP é possível obter um filtro semi-conjugado associado a uma wavelet não-ortogonal. Como será visto no próximo capítulo, tal filtro pode ser utilizado para projetar um NOWFB que, de certo modo, pode representar a implementação discreta da versão quase-ortogonalizada de uma wavelet. Na Seção 4.1.1, será mostrado um exemplo onde o método proposto foi aplicado em uma wavelet clássica.

4.1.1 Versão quase-ortogonalizada da wavelet Mexican hat

Como exemplo, o método proposto WQOP é aplicado para obter uma versão quase-ortogonalizada da wavelet Mexican hat definida em (6), conforme cada passo a ser considerado:

PASSO 1: Calculando a FT da Mexican hat obtém-se

$$\Psi^{mh}(\Omega) = \frac{\sqrt{8} \pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \Omega^2 e^{-\Omega^2/2}. \quad (65)$$

PASSO 2: Substituindo (65) em (63), obtém-se a seguinte função escala:

$$\Theta^{mh}(\Omega) = \frac{2 \pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \sqrt{\Omega^2 + 1} e^{-\Omega^2/2}. \quad (66)$$

PASSO 3: Neste caso, não é possível obter uma expressão fechada para

$$\sum_k |\Theta^{mh}(\Omega - 2\pi k)|^2.$$

Entretanto, pode ser verificado que $\Theta^{mh}(\Omega) \in L^2(\mathbb{R})$ possui um decaimento razoável e é estritamente positiva. Isso implica que

$$0 < \sum_k |\Theta^{mh}(\Omega - 2\pi k)|^2 < \infty.$$

Portanto, $\Theta^{mh}(\Omega)$ satisfaz a condição (20).

PASSO 4: Considerando $k = -1, 0, 1$ em (21), obtém-se a seguinte expressão para a função escala quase-ortogonal:

$$\Phi^{mh}(\Omega) = \frac{e^{-\Omega^2/2} \sqrt{\Omega^2 + 1}}{\sqrt{e^{-(\Omega+2\pi)^2} (e^{4\pi(\Omega+\pi)} (\Omega^2 + 1) + (\Omega + 2\pi)^2 + e^{8\pi\Omega} ((\Omega - 2\pi)^2 + 1) + 1)}}. \quad (67)$$

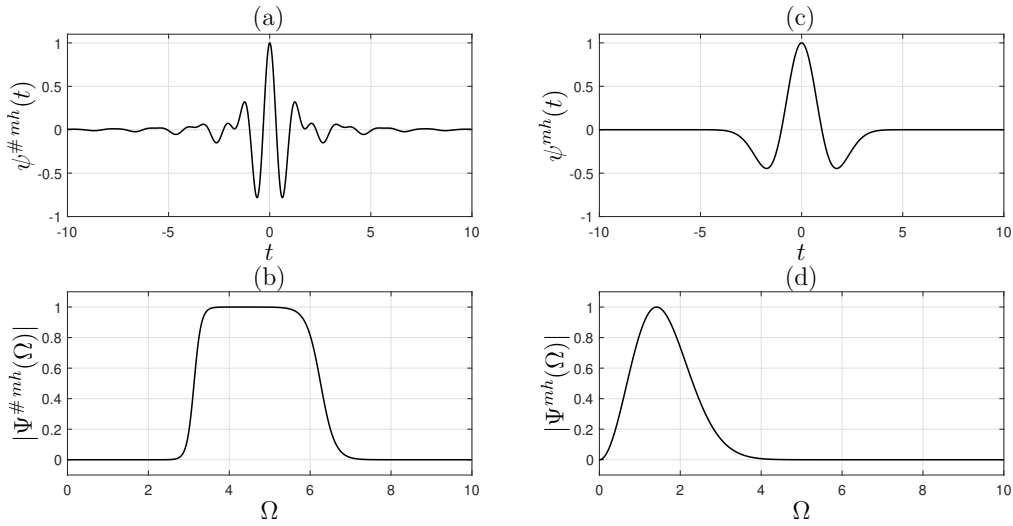
PASSO 5: Substituindo (67) em (25) obtém-se o filtro semi-conjugado $H^{mh}(\omega)$ associado a wavelet Mexican hat. Na Tabela 3 são fornecidos os coeficientes do filtro semi-conjugado da Mexican hat para valores de k tais que $h^{mh}[k] > 10^{-3}$. Observando o comportamento destes coeficientes, nota-se que $h^{mh}[k] \rightarrow 0$ quando $|k| \rightarrow \infty$. Note também que este filtro é simétrico em torno de $k = 0$. Tal característica também pode ser observada para alguns filtros wavelet de Battle-Lemarié (MALLAT, 1999).

PASSO 6: Por fim, a partir de $H^{mh}(\omega)$ e $\Phi^{mh}(\Omega)$ obtém-se a versão quase-ortogonalizada da wavelet Mexican hat $\Psi^{\#mh}(\Omega)$ por meio de (28). Na Figura 9, são exibidas as formas de onda das wavelets Mexican hat e de sua versão quase-ortogonalizada nos domínios do tempo e da frequência. Conforme pode ser observado, o WQOP implicou uma mudança considerável no formato de onda original. A forma de onda da wavelet $\Psi^{\#mh}(\Omega)$ exibida na Figura 9-(a) foi obtida por meio do algoritmo em cascata, que é o mesmo processo utilizado para obter outras formas de onda de wavelets que não possuem expressões analíticas, como as wavelets de Daubechies por exemplo (DAUBECHIES, 1992).

Tabela 3 – Coeficientes do filtro $h^{mh}[k]$ para $h^{mh}[k] > 10^{-3}$.

k	$h^{mh}[k]$	k	$h^{mh}[k]$	k	$h^{mh}[k]$	k	$h^{mh}[k]$
0	0,73446609	7,-7	-0,04539885	14,-14	-0,00689057	21,-21	0,00324572
1,-1	0,44650585	8,-8	0,01562461	15,-15	-0,00918078	22,-22	-0,00207958
2,-2	-0,02626839	9,-9	0,02927792	16,-16	0,00512947	23,-23	-0,00233034
3,-3	-0,13970634	10,-10	-0,01210267	17,-17	0,00643124	24,-24	0,00153707
4,-4	0,02337827	11,-11	-0,01949882	18,-18	-0,00380280	25,-25	0,00168220
5,-5	0,07451062	12,-12	0,00918870	19,-19	-0,00455044	26,-26	-0,00113650
6,-6	-0,01955379	13,-13	0,01327179	20,-20	0,00281335	27,-27	-0,00121980

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 – Mexican hat quase-ortogonalizada no domínio do (a) tempo e da (b) frequência. Mexican hat no domínio do (c) tempo e da (d) frequência.

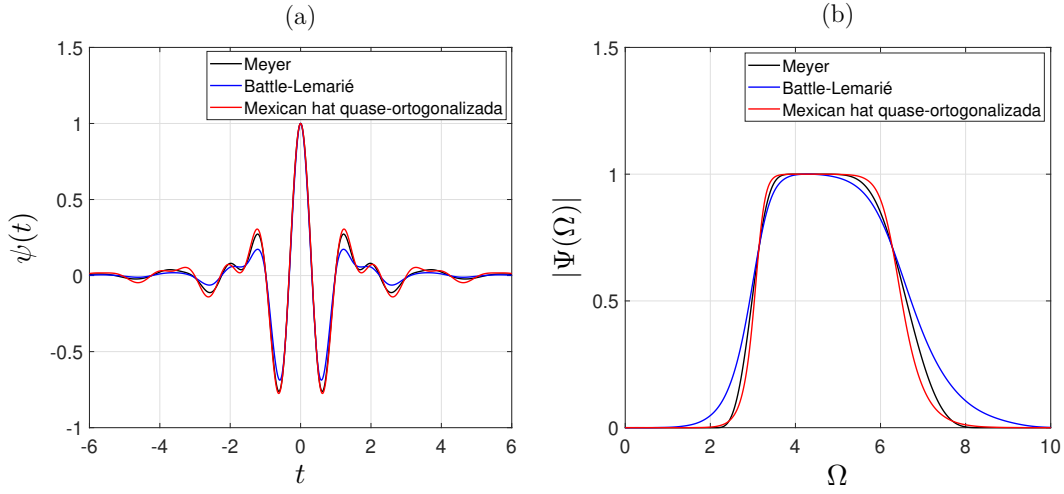
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando a Figura 9-(b), pode ser verificado que a energia da wavelet Mexican hat quase-ortogonalizada é aproximadamente concentrada no intervalo $(-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Existem outras wavelets ortogonais onde $\Psi(\Omega)$ possui energia concentrada neste mesmo intervalo, como a wavelet de Meyer e algumas wavelets de Battle-Lemarié (MALLAT, 1999; DAUBECHIES, 1992). Na Figura 10 mostra-se as formas de onda destas wavelets e da wavelet Mexican hat quase-ortogonalizada, nos domínios do tempo e da frequência. Verifica-se grande similiaridade entre estas wavelets nos respectivos domínios.

4.2 CARACTERIZAÇÃO DOS FILTROS SEMI-CONJUGADOS

Conforme pode ser observado, o filtro semi-conjugado obtido a partir da wavelet Mexican hat possui um comprimento relativamente longo (possivelmente IIR). De fato, tal comportamento pode ser verificado para outros filtros semi-conjugados obtidos pelo

Figura 10 – Wavelets Meyer (traço preto), Battle-Lemarié (traço azul) e Mexican hat quase-ortogonalizada (traço vermelho) nos domínios (a) tempo e (b) frequência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

WQOP. Entretanto, pode ser observado para estes filtros que $h[k] \rightarrow 0$ para $|k| \rightarrow \infty$. Assim, tais filtros podem ser truncados a fim de reduzir o número de coeficientes. Verificou-se que dependendo da ordem do truncamento, a condição (26) não é consideravelmente comprometida, mantendo-se assim, a característica de um filtro semi-conjugado.

Dessa forma, a partir do filtro semi-conjugado $h[k]$ e tomando $L = M + 1$ amostras é possível obter um filtro FIR causal e simétrico $h_L[k]$:

$$h_L[k] = \begin{cases} h[k - M/2] & \text{se } 0 \leq k \leq M = L - 1. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad (68)$$

onde $h_L[k] = h_L[M - k]$ para $0 \leq k \leq M = L - 1$, com M par. Isso implica em filtros FIR simétricos de ordem ímpar e com atraso de grupo constante e inteiro. Assim, no contexto de processamento de sinais, o filtro truncado $h_L[k]$ é um filtro FIR do tipo 1 (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

De fato, o truncamento em (68) implica em desvios nas faixas de passagem e rejeição, contribuindo para um maior desvio de ortogonalidade. Nas próximas seções, os filtros semi-conjugados obtidos pelo WQOP serão caracterizados de acordo com os desvios de ortogonalidade e características de banda. Na Seção 4.2.1 será definida uma métrica que permite quantificar os desvios de ortogonalidade de maneira simples. As frequências de passagem e de rejeição serão definidas na 4.2.2. Na Seção 4.2.3 serão definidas tolerâncias de desvios de ortogonalidade, que servirão como referência para obter o comprimento apropriado do filtro semi-conjugado.

4.2.1 Quantificação dos desvios de ortogonalidade

Para quantificar os desvios de ortogonalidade dos filtros semi-conjugados é necessário definir uma métrica que deve ser baseada na condição (26). Em Zhao e Swamy (2000) os autores utilizaram a condição (54) para minimizar os desvios de ortogonalidade. Neste trabalho será definida uma métrica mais simples e prática, que não dependa de um processo de integração. Para este propósito, definimos uma função que representa os desvios de ortogonalidade como sendo

$$D_{H_L}(\omega) = ||H_L(\omega)|^2 + |H_L(\omega + \pi)|^2 - 2|, \quad (69)$$

onde $H_L(\omega)$ é a DTFT de $h_L[k]$. Tal função é denominada de função desvio de ortogonalidade (*Orthogonality Deviation Function* - ODF), uma vez que ela caracteriza os desvios da PCC.

A partir da ODF define-se uma métrica que irá quantificar os desvios de ortogonalidade dos filtros semi-conjugados obtidos pelo método WQOP. Uma vez que os desvios de ortogonalidade dependem diretamente da ordem do truncamento, define-se

$$\delta_H[L] = \max_{0 \leq \omega < \pi} \{D_{H_L}(\omega)\}, \quad (70)$$

como sendo o máximo desvio de ortogonalidade (*Maximum Orthogonality Deviation* - MOD) apresentado pelo filtro $H_L(\omega)$.

É de se esperar que quanto maior for L , menor será o MOD apresentado pelo filtro semi-conjugado. Como exemplo, na Figura 11-(a) é mostrado o resultado da ODF relativo ao truncamento de $h^{mh}[k]$ considerando $L = 69$. Tal truncamento implica aproximadamente $\delta_{H^{mh}}[69] \approx 0,007$. A Figura 11-(b) exhibe o MOD do filtro Mexican hat, para cada comprimento do truncamento considerado. Observe que quanto maior for este valor, menor será o desvio de ortogonalidade.

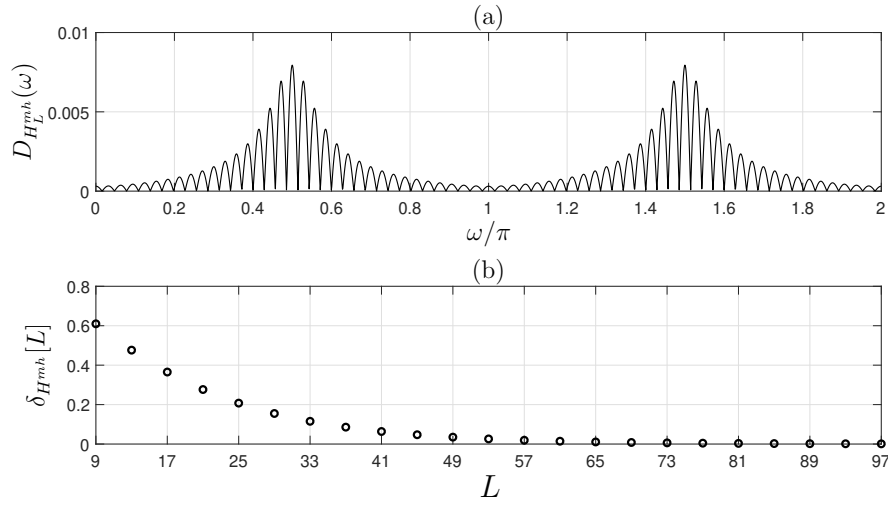
De fato, utilizando o método proposto, o filtro semi-conjugado obtido não se anula em $z = -1$. Para a Mexican hat, por exemplo, observa-se que $H^{mh}(\pi) \approx 3,4 \times 10^{-8}$. Portanto, é de se esperar que filtros obtidos pela metodologia proposta impliquem

$$\delta_{min}^H \leq \delta_H[L], \quad (71)$$

onde δ_{min}^H denota o mínimo desvio de ortogonalidade (*Minimum Orthogonality Deviation* - MIOD) possível do filtro semi-conjugado. Como discutido na Seção 3.3.1, este resultado não apenas compromete a condição de ortogonalidade, mas também a condição de admissibilidade. Como será visto na Seção 4.3, o valor de δ_{min}^H depende da função escala associada.

Na Tabela 4 são exibidos os desvios de ortogonalidade dos filtros semi-conjugados das wavelets OQB, NO5b e ER3. Em tal Tabela são fornecidos o comprimento L dos

Figura 11 – Resultados obtidos pelo filtro Mexican hat. (a) ODF para $L = 69$. (b) MOD para cada valor de L considerado $9 \leq L \leq 97$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

respectivos filtros e os valores de $\delta_h[L]$ e $H_L(\pi)$. Note que a wavelet OQB é a única que apresenta $H_L(\pi) \neq 0$, uma vez que as wavelets NO5b e ER3 são projetadas restringindo um número de zeros em $z = -1$. Note que a NO5b foi a que apresentou menor $\delta_h[L]$, enquanto que ER3 apresentou um valor consideravelmente grande. OQB apresentou um MOD relativamente pequeno, mostrando que, apesar de não implicar $H_L(\pi) = 0$, é possível obter desvios de ortogonalidade relativamente pequenos.

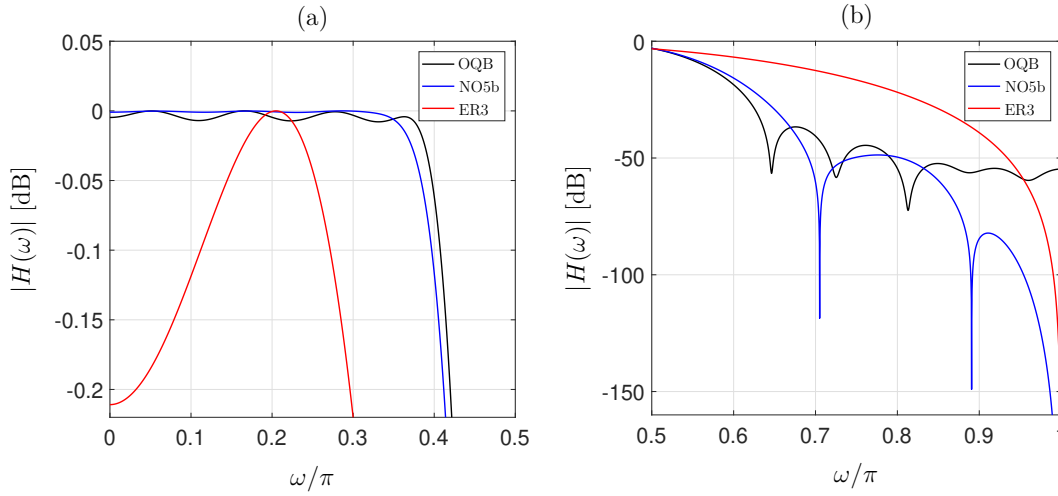
Tabela 4 – Desvios de ortogonalidade dos filtros semi-conjugados das wavelets OQB, NO5b e ER3.

Wavelet	L	$\delta_h[L]$	$H_L(\pi)$
OQB	20	0,0021	0,0026
NO5b	32	0,0004	0
ER3	6	0,1250	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

A fim de verificar os ganhos dos filtros OQB, NO5b e ER3 nas faixas de passagem e de rejeição, na Figura 12 são exibidos os espectros de magnitude (em dB) dos mesmos nas respectivas faixas. Conforme pode ser observado, as distorções de ganho apresentadas pelos filtros OQB e NO5b são praticamente irrelevantes. Por isso, pode-se dizer que estes filtros possuem ganho praticamente constante na faixa de passagem. Por outro lado, a distorção de ganho apresentada pelo filtro ER3 é considerável na faixa de passagem. Desse modo, a distorção de ganho dos filtros wavelet quase-ortogonais está diretamente relacionada com o valor de $\delta_h[L]$, quanto maior ele for, maior será a distorção de ganho.

Figura 12 – Espectros de magnitude dos filtros OQB, NO5b e ER3. Magnitudes em dB.
(a) Faixa de passagem. (b) Faixa de rejeição.



Fonte: Elaborado pelo autor.

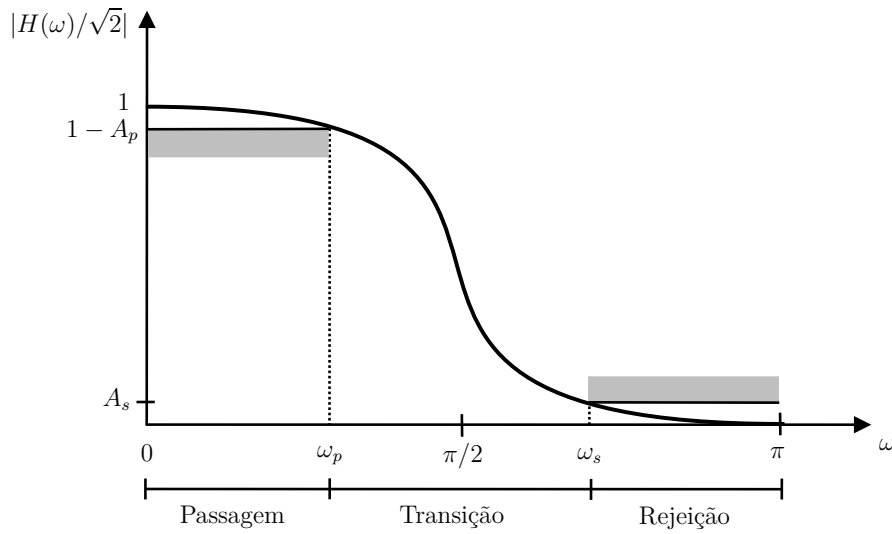
4.2.2 Especificações da resposta em frequência

Com o intuito de determinar as características de banda para cada filtro semi-conjugado obtido, a frequência de passagem ω_p é definida como sendo a maior frequência tal que $|H(\omega_p)|/\sqrt{2} = 1 - A_p$, onde A_p é o ganho mínimo da banda passante. A frequência de rejeição ω_s é definida como sendo a menor frequência que satisfaz $|H(\omega_s)|/\sqrt{2} = A_s$, sendo A_s o ganho máximo na banda de rejeição. Portanto, a largura da faixa de transição do filtro pode ser definida como $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$.

Na Figura 13 é mostrado o diagrama de tolerâncias de acordo com as especificações, sendo os limites das faixas de passagem e de rejeição indicados pelas linhas horizontais hachuradas. Note que $\Delta\omega$ depende das especificações de A_p e A_s , uma vez que ω_p e ω_s dependem desses valores.

Utilizando essas definições de bandas, pode-se caracterizar os filtros wavelets explorados no Capítulo 3. Na Tabela 5 são exibidos os resultados das características de bandas para alguns filtros conjugados e semi-conjugados, considerando como referências $A_p = A_s = 0,01$. Para cada filtro considerado, também são exibidos os resultados da energia da banda passante relativa E_p utilizando (51).

Considerando a Tabela 5, observe que as características de banda dos filtros conjugados dbN e symN são as mesmas. Note que para os filtros conjugados quanto maior o número de momentos nulos da wavelet associada, menor é a largura da faixa de transição e, conseqüentemente, maior é a concentração de energia E_p . Note que OQB apresenta a menor largura na faixa de transição entre os filtros semi-conjugados, sendo próxima a do

Figura 13 – Especificações do filtro semi-conjugado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 5 – Características de banda dos filtros conjugados e semi-conjugados referentes a algumas wavelets ortogonais e quase-ortogonais.

Filtro	ω_p	ω_s	$\Delta\omega$	E_p
db1/Haar	0,0903	0,9937	0,9034	0,8178
db2/sym2	0,1870	0,9517	0,7647	0,8709
db3/sym3	0,2397	0,9050	0,6653	0,8947
db4/sym4	0,2725	0,8687	0,5962	0,9090
db5/sym5	0,2959	0,8384	0,5425	0,9186
db10/sym10	0,3541	0,7529	0,3988	0,9425
db20/sym20	0,3965	0,6831	0,2866	0,9593
db30/sym30	0,4155	0,6504	0,2349	0,9667
db40/sym40	0,4268	0,6309	0,2041	0,9711
coif1	0,1909	0,9507	0,7598	0,8732
coif2	0,2778	0,8647	0,5869	0,9116
coif3	0,3184	0,8105	0,4921	0,9284
coif4	0,3428	0,7739	0,4311	0,9382
coif5	0,3599	0,7471	0,3872	0,9449
Meyer	0,4229	0,6245	0,2016	0,9691
OQB	0,4061	0,6389	0,2328	0,9619
NO5b	0,3944	0,6759	0,2815	0,9582
ER3	0,3136	0,9041	0,5905	0,9293

Fonte: Elaborado pelo autor.

filtro db30/sym30. De fato, OQB é um filtro obtido de forma a maximizar E_p . Por isso, é de se esperar que tal filtro tenha uma largura na faixa de transição mais estreita.

4.2.3 Tolerâncias de desvios de ortogonalidade

Com as especificações de banda determinadas, o próximo passo é definir as especificações de tolerâncias mínimas permitidas para os desvios de ortogonalidade. Tais especificações irão determinar o comprimento apropriado para a escolha do filtro semi-conjugado. Assim, o comprimento apropriado pode ser determinado a partir do MOD permitido ϵ_δ :

$$\delta_H[L] \leq \epsilon_\delta.$$

Também pode ser útil definir uma tolerância máxima ϵ_π tal que

$$H_L(\pi) \leq \epsilon_\pi,$$

pois tal valor está diretamente relacionado com os desvios da condição de admissibilidade.

Para simplificar a notação, denotamos os comprimentos L_λ^δ e L_λ^π como sendo os comprimentos mínimos que satisfazem

$$\delta_H[L_\lambda^\delta] \leq 10^{-\lambda}, \quad H_{L_\lambda^\pi}(\pi) \leq 10^{-\lambda}. \quad (72)$$

Na Tabela 6 são exibidas as características de banda do filtro $h_L^{mh}[k]$. Os desvios de ortogonalidade $\delta_{min}^{H^{mh}}$ e $H^{mh}(\pi)$ estão dados em notação científica, usando abreviação conveniente, por exemplo E-01 = 0,1. Considerando $A_p = A_s = 0,01$, os respectivos valores das frequências de passagem, rejeição e largura da faixa de transição também são exibidos. Os valores L_λ^π e L_λ^δ para $\lambda = 2, 3, 4$ também são fornecidos.

Tabela 6 – Caracterização do filtro semi-conjugado Mexican hat $h_L^{mh}[k]$.

$\delta_{min}^{H^{mh}}$	$H^{mh}(\pi)$	E_p	ω_p/π	ω_s/π	$\Delta\omega/\pi$	L_2^π	L_2^δ	L_3^π	L_3^δ	L_4^π	L_4^δ
3,58E-08	3,40E-08	0,9806	0,4456	0,6290	0,1834	37	69	65	101	97	133

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que o valor de $\Delta\omega$ para o filtro $h_L^{mh}[k]$ é relativamente pequeno, sendo até menor do que as larguras da faixa de transição apresentadas pelos filtros conjugado de Meyer, db40, e sym40, conforme pode ser observado na Tabela 5. Isso explica porque o comprimento do filtro é relativamente longo para tolerâncias grandes, como por exemplo $\epsilon_\delta = 0,01$. Como esperado, os valores de L_λ^δ e L_λ^π aumentam à medida que λ também aumenta. De fato, foi observado que conforme $L \rightarrow \infty$:

$$\delta_H[L] \rightarrow \delta_{min}^H \text{ e } H_L(\pi) \rightarrow H(\pi). \quad (73)$$

Portanto, os valores dos desvios mínimos de ortogonalidade devem ser levados em consideração para o projeto de filtros semi-conjugados, onde se deseja satisfazer tolerâncias especificadas. Na Seção 4.3 o método proposto é aplicado nas wavelets da família Gaussiana a fim de estudar as características dos filtros semi-conjugados obtidos.

4.3 FILTROS SEMI-CONJUGADOS A PARTIR DAS GAUSSIANAS

As wavelets da família Gaussiana são obtidas pela N -ésima derivada da função $g(t) = e^{-t^2/2}$ (TORRENCE; COMPO, 1998). A wavelet Mexican hat é uma wavelet Gaussiana obtida pela derivada de ordem 2 dessa função. Na literatura especializada, é comum se referenciar as wavelets Gaussianas como sendo $\text{gaus}N$, onde N denota a ordem da derivada e o número de momentos nulos da respectiva wavelet. Dessa forma, uma wavelet Gaussiana com N momentos nulos é definida como sendo

$$\psi_{gs}^N(t) = C_N(-1)^{N+1} \frac{d^N}{dt^N} g(t), \quad (74)$$

onde C_N é uma constante de normalização.

Das propriedades da FT, as FTs das wavelets Gaussianas são dadas por

$$\Psi_{gs}^N(\Omega) = (j\Omega)^N G(\Omega), \quad (75)$$

onde $G(\Omega)$ é a FT de $g(t)$. Substituindo (75) em (63), e fazendo as devidas manipulações algébricas, pode-se chegar na função escala associada a uma wavelet $\text{gaus}N$:

$$\Theta_{gs}^N(\Omega) = K_N \sqrt{\int_{\Omega}^{\infty} \xi^{2N-1} e^{-\xi^2} d\xi}, \quad (76)$$

sendo K_N uma constante de normalização tal que $\|\Theta_{gs}^N(\Omega)\|^2 = 2\pi$.

A partir de $\Theta_{gs}^N(\Omega)$, pode-se obter filtros semi-conjugados utilizando o método proposto WQOP, uma vez que tal função apresenta decaimento razoável e é estritamente positiva para qualquer N . Para simplificar a notação, $\text{gs}_N L$ se refere a um filtro semi-conjugado de comprimento L , obtido pelo WQOP aplicado a $\text{gaus}N$. Na Tabela 7 são mostrados os resultados obtidos pelos filtros $\text{gs}_N L$ para $N = 1, \dots, 16$. Assim como na Tabela 6, as respectivas características de banda também são obtidas considerando $A_p = A_s = 0,01$.

Conforme pode ser observado na Tabela 7, os valores δ_{min}^{HgsN} e $H^{gsN}(\pi)$ são menores para filtros com faixas de transição mais estreitas. Além disso, quanto maior for N maior será a largura da faixa de transição do filtro semi-conjugado obtido. Note também que, quanto maior for $\Delta\omega$, menor é o comprimento do filtro para uma mesma tolerância dada. Esse comportamento é esperado, uma vez que números maiores de coeficientes são necessários para filtros com menores larguras na faixa de transição (ver Tabela 6).

Para $N > 11$, note que os filtros $\text{gs}_N L$ implicam $\delta_{min}^{HgsN} > 0,01$, o que impossibilita encontrar um comprimento de filtro mínimo L_2^δ . Uma vez que $\Delta\omega$ dos filtros $\text{gs}_N L$ são diferentes para cada valor de N , é de se esperar que a forma de onda gerada também seja diferente. Na Figura 14 são exibidas as formas de onda das wavelets Gaussianas quase-ortogonalizadas $\psi_{gs}^{\#N}(t)$. Note que, quanto maior for o valor de N , menor será a suavidade

Tabela 7 – Resultados dos filtros semi-conjugados $gs_N L$ para $N = 1, \dots, 16$.

Filtro	$\delta_{min}^{H^{gsN}}$	$H^{gsN}(\pi)$	E_p	ω_p/π	ω_s/π	$\Delta\omega/\pi$	L_2^π	L_2^δ
$gs_1 L$	5,35E-09	5,35E-09	0,9824	0,4507	0,6162	0,1655	41	73
$gs_2 L$	3,58E-08	3,40E-08	0,9806	0,4456	0,6290	0,1834	37	69
$gs_3 L$	2,21E-07	1,53E-07	0,9785	0,4393	0,6430	0,2037	33	61
$gs_4 L$	1,24E-06	5,63E-07	0,9759	0,4319	0,6602	0,2283	33	53
$gs_5 L$	6,19E-06	1,79E-06	0,9727	0,4230	0,6812	0,2582	29	49
$gs_6 L$	2,70E-05	5,10E-06	0,9686	0,4116	0,7070	0,2954	29	41
$gs_7 L$	1,02E-04	1,32E-05	0,9634	0,3966	0,7356	0,3390	25	37
$gs_8 L$	3,42E-04	3,20E-05	0,9568	0,3788	0,7624	0,3836	21	29
$gs_9 L$	1,00E-03	7,22E-05	0,9483	0,3568	0,7900	0,4332	17	25
$gs_{10} L$	2,64E-03	1,53E-04	0,9376	0,3333	0,8165	0,4832	17	17
$gs_{11} L$	6,29E-03	3,10E-04	0,9247	0,3091	0,8435	0,5344	13	13
$gs_{12} L$	1,41E-02	5,97E-04	0,9098	0,2858	0,8699	0,5841	9	
$gs_{13} L$	3,06E-02	1,10E-03	0,8933	0,2645	0,8948	0,6303	17	
$gs_{14} L$	6,11E-02	1,95E-03	0,8760	0,2422	0,9174	0,6752	17	
$gs_{15} L$	1,10E-01	3,34E-03	0,8587	0,2209	0,9390	0,7181	17	
$gs_{16} L$	1,82E-01	5,52E-03	0,8421	0,2012	0,9603	0,7591	21	

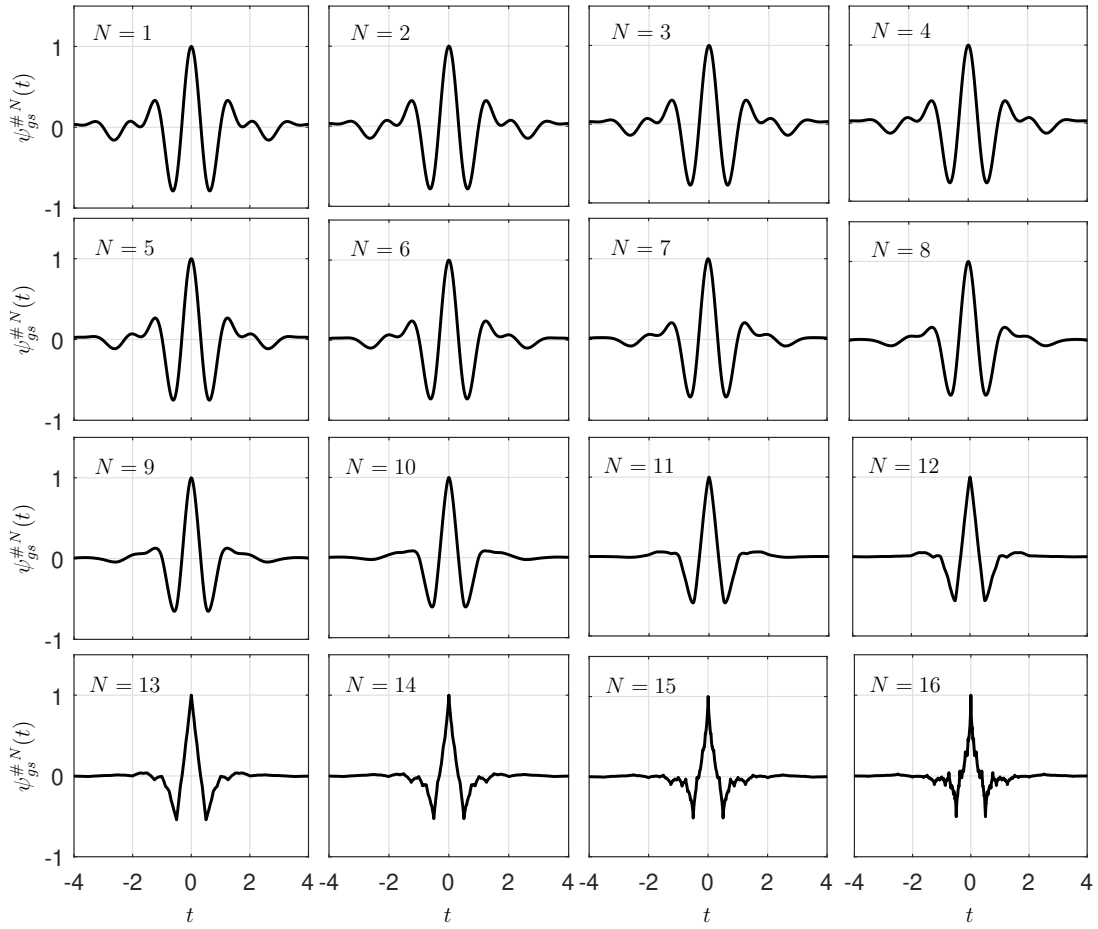
Fonte: Elaborado pelo autor.

da wavelet obtida. Para as wavelets Gaussianas pode ser verificado um comportamento contrário a isso, uma vez que, conforme N aumenta, mais suave é a forma de onda da wavelet $gausN$.

Para compreender melhor os resultados obtidos pelos diferentes filtros $gs_N L$, deve-se olhar para a função escala $\Theta_{gs}^N(\Omega)$. Na Figura 15 têm-se os resultados das funções escalas e dos filtros semi-conjugados $H^{gsN}(\omega)$ referentes as wavelets mostradas na Figura 14. O sentido da seta indica o crescimento de N . Pela Figura 15-(a) pode ser verificado que, quanto maior for o valor de N , menos localizada é a função $\Theta_{gs}^N(\Omega)$. De acordo com a Figura 15-(b) pode-se dizer que, quanto maior for N , menos estreita será a faixa de transição do filtro semi-conjugado obtido.

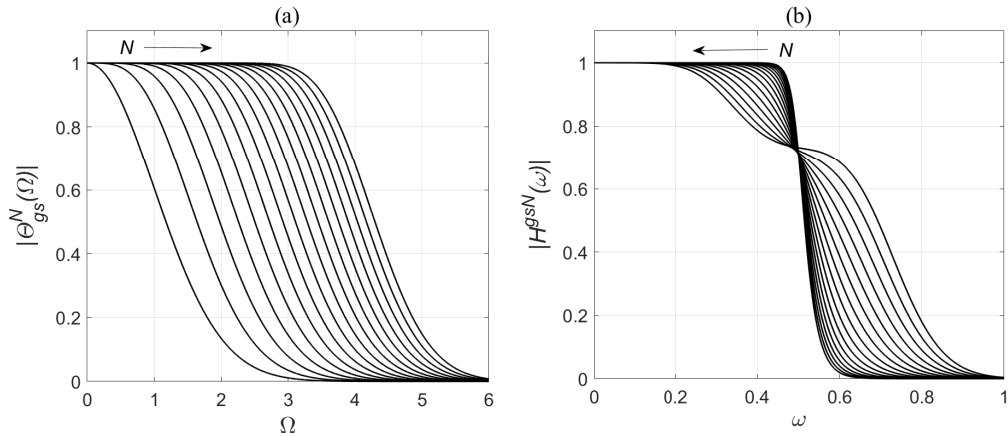
A partir dos resultados obtidos pelo método WQOP, pode-se concluir que quanto mais localizada for a função escala no domínio da frequência, menor será a largura da faixa de transição do filtro semi-conjugado obtido e, conseqüentemente, menores serão os MIODs. Tal comportamento também foi observado para outros filtros semi-conjugados obtidos por outras famílias de wavelets. No Capítulo 5 será mostrado que é possível projetar NOWFBs a partir dos filtros semi-conjugados obtidos pelo método WQOP.

Figura 14 – Wavelets Gaussianas quase-ortogonais $\psi_{gs}^{\#N}(t)$ para $N = 1, \dots, 16$. As amplitudes foram normalizadas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Gráficos de (a) $\Theta_{gs}^N(\Omega)$ e (b) dos respectivos espectros de magnitudes dos filtros semi-conjugados $H^{gsN}(\omega)$ para $N = 1, \dots, 16$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 PROJETO DE BANCOS DE FILTROS WAVELET QUASE-ORTOGONAIS

Como visto no Capítulo 4, as wavelets Gaussianas são exemplos de wavelets que, utilizando o WQOP, podem gerar filtros semi-conjugados. Tais wavelets podem ser definidas analiticamente e, além do mais, pode-se calcular a função escala $\Theta(\Omega)$ associada por meio da Equação (63). Tanto os mínimos desvios de ortogonalidade como as características de banda do filtro semi-conjugado dependem da característica dessa função escala. Tais características são exploradas neste capítulo para a formulação da metodologia proposta do projeto de NOWFBs.

5.1 WAVELETS DE ELY

Um comportamento relevante que pode ser observado da função $\Theta_{gs}^N(\Omega)$, é que, quanto menor for a dispersão da mesma, menores serão os mínimos desvios de ortogonalidade e a largura da faixa de transição dos filtros semi-conjugados obtidos. Por isso, pode-se utilizar esse comportamento para definir uma função apropriada para o projeto de filtros semi-conjugados de acordo com especificações desejadas. Na Seção 5.1.1 tal função é definida de forma intuitiva.

5.1.1 Função de Ely

Graficamente, pode ser observado que $\Theta(\Omega)$ possui a forma de uma função de distribuição de probabilidade contínua. Assim, pode-se associar os desvios de ortogonalidade e a largura da faixa de transição dos filtros obtidos, por meio das características estatísticas da função escala. Uma função de distribuição de probabilidade contínua, simétrica em relação a origem, possui dois pontos de inflexão cujas abscissas valem $-\Omega_i$ e Ω_i , conforme mostrados na Figura 16.

Uma vez que

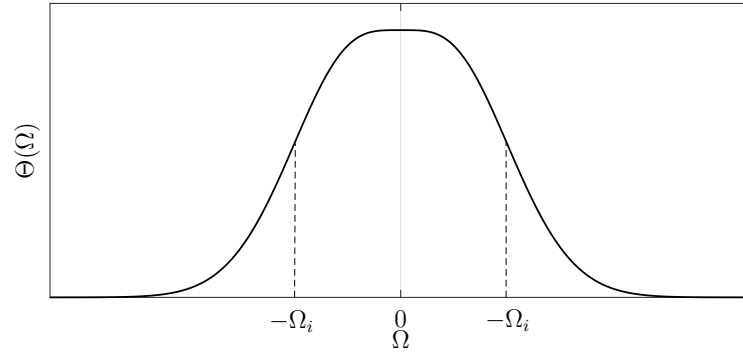
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Theta(\Omega)|^2 d\Omega = 1,$$

a dispersão de $\Theta(\Omega)$ pode ser calculada pela variância (MALLAT, 1999):

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 |\Theta(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (77)$$

Assim, quanto maior for σ^2 , menos localizada é a função escala no domínio da frequência.

Na Tabela 8 são exibidos os valores de σ^2 e Ω_i referentes a função escala $\Theta_{gs}^N(\Omega)$ para cada valor de N considerado na Tabelas 7. Conforme constatado no Capítulo 4 de forma qualitativa, os resultados obtidos indicam que quanto menor for a dispersão da

Figura 16 – Função de distribuição de probabilidade contínua.

Fonte: Elaborado pelo autor.

função escala, menor será a largura da faixa de transição do filtro semi-conjugado obtido. Na Tabela 8 tal comportamento é descrito de forma quantitativa por meio dos valores de σ^2 e Ω_i , que conforme a dispersão da função escala aumenta, o valor Ω_i também aumenta.

Tabela 8 – Valores de dispersões de $\Theta_{gs}^N(\Omega)$

N	σ^2	Ω_i
1	0,50	1,00
2	0,83	1,51
3	1,17	1,87
4	1,50	2,16
5	1,83	2,41
6	2,17	2,64
7	2,50	2,84
8	2,83	3,03
9	3,17	3,21
10	3,50	3,37
11	3,83	3,53
12	4,17	3,68
13	4,50	3,83
14	4,83	3,97
15	5,17	4,10
16	5,50	4,23

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme pode ser observado na Tabela 7, não foi possível obter filtros com $\Delta\omega > 0,5311$ que satisfazem $\delta_{min}^H < 0,01$. Assim, considerando $A_p = A_s = 0,01$ e utilizando a função $\Theta_{gs}^N(\Omega)$, não se pode obter filtros semi-conjugados com maiores larguras na faixa de transição que satisfazem L_δ^2 . Por isso, devem ser investigadas outras funções escalas, que impliquem filtros semi-conjugados com maiores larguras na faixa de transição e com menores desvios de ortogonalidade.

Note que, além de $\Theta(\Omega)$ poder ser vista como uma função de distribuição de probabilidade contínua, uma função escala também pode ser interpretada como um filtro analógico do tipo passa-baixa. O filtro passa-baixa de Butterworth é um dos filtros ana-

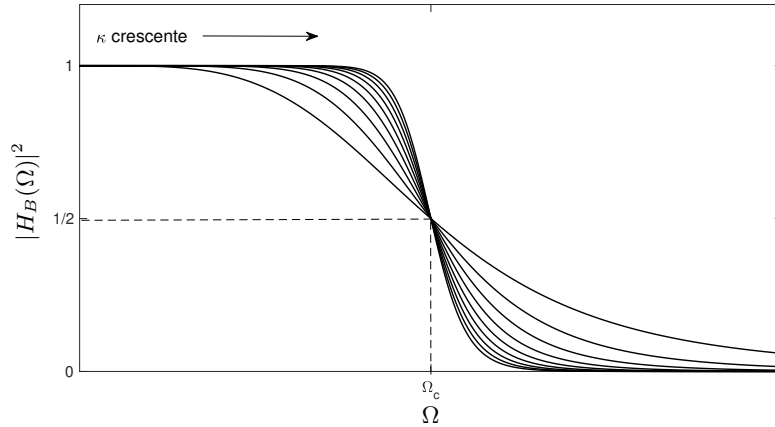
lógicos mais conhecidos na literatura, podendo ser definido em função de seu espectro de potência como

$$|H_B(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2\kappa}}, \quad (78)$$

sendo Ω_c a frequência de corte de -3 dB, e κ a ordem do filtro (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

A resposta em frequência de $|H_B(\Omega)|^2$ decresce monotonicamente à medida que Ω cresce, e a faixa de transição torna-se mais estreita conforme a ordem do filtro também aumenta. A Figura 17 ilustra esse fato. Note, que fixando uma frequência de corte Ω_c , a largura da faixa de transição da resposta do filtro diminui conforme κ cresce. Devido a essas características, é possível, a partir de $|H_B(\Omega)|^2$, projetar filtros IIR discretos por meio de métodos clássicos de projeto de filtros, como o da invariância da resposta impulsiva (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

Figura 17 – Espectro de potência de um filtro de Butterworth.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Baseado na definição do filtro de Butterworth, define-se de forma intuitiva a seguinte função escala:

$$\Theta^{ely}(\Omega) = \frac{1}{\gamma\Omega^2 + 1}, \quad \gamma > 0. \quad (79)$$

A função definida em (79) é obtida fazendo $\kappa = 1$ e $\Omega_c = \gamma^{-1}$ em (78). O único termo que envolve a variável independente $\gamma\Omega^2$ garante que $\Theta^{ely}(\Omega)$ esteja bem localizada na frequência (ver Figura 18-(a)). Uma vez que tal função é estritamente positiva para $\gamma > 0$, espera-se que o filtro semi-conjugado obtido por tal base tenha características diferentes dos filtros semi-conjugados obtidos pelas bases Gaussianas.

Na Tabela 9 têm-se os resultados dos filtros semi-conjugados obtidos para certos valores de γ , sendo obtidos pelo método WQOP aplicado em (79), e considerando

$A_p = A_s = 0,01$. Note que, variando γ , as características de banda dos filtros semi-conjugados obtidos são praticamente as mesmas. No entanto, os valores dos mínimos desvios de ortogonalidade diminuem à medida que γ aumenta. Entretanto, pode-se observar que para $\gamma \geq 10^8$ o valor de δ_{min}^H praticamente não se altera. Desse modo, para os próximos resultados será adotado $\gamma = 10^8$.

Tabela 9 – Resultados obtidos pelos filtros semi-conjugados para diferentes valores de γ .

γ	δ_{min}^H	$H(\pi)$	E_p	ω_p	ω_s	$\Delta\omega$
10^1	1,61E-03	5,09E-03	0,9134	0,2657	0,9340	0,6683
10^2	1,59E-04	5,10E-04	0,9141	0,2680	0,9191	0,6511
10^3	1,60E-05	5,10E-05	0,9142	0,2683	0,9177	0,6494
10^4	2,13E-06	5,10E-06	0,9142	0,2684	0,9176	0,6492
10^5	5,10E-07	7,00E-07	0,9142	0,2669	0,9176	0,6507
10^6	5,57E-07	5,10E-08	0,9142	0,2683	0,9176	0,6493
10^7	5,43E-07	5,10E-09	0,9142	0,2683	0,9176	0,6493
10^8	5,41E-07	5,10E-10	0,9142	0,2685	0,9176	0,6491
10^9	5,41E-07	5,10E-11	0,9142	0,2683	0,9176	0,6493
10^{10}	5,41E-07	5,10E-12	0,9142	0,2683	0,9176	0,6493

Fonte: Elaborado pelo autor.

Comparando os resultados dos filtros semi-conjugados obtidos por (79) com os resultados obtidos pelo filtro $gs_{13}L$, note que os MIODs apresentados são consideravelmente menores do que os daquele filtro. Estes filtros apresentam aproximadamente a mesma largura na faixa de transição. Note que, ao contrário de $gs_{13}L$, é possível obter um comprimento mínimo L_λ^δ para $\lambda = 2$ utilizando os filtros semi-conjugados obtidos a partir de $\Theta^{ely}(\Omega)$. Logo, pode-se dizer que tal base é mais vantajosa do que a Gaussiana, uma vez que esta implica menores desvios de ortogonalidade.

Observando os dados da Tabela 9, nota-se que apenas a variação do valor de γ não garante que os filtros gerados tenham diferenças significativas. Por isso, fixando $\gamma = 10^8$ e verificando que, por meio de uma modificação da função definida em (79), pode-se obter diferentes filtros semi-conjugados. Isso pode ser feito adicionando o parâmetro α , de tal forma que define-se a seguinte variação da função:

$$\Theta^{ely}(\alpha, \Omega) = \frac{1}{(10^8 \Omega^2 + 1)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (80)$$

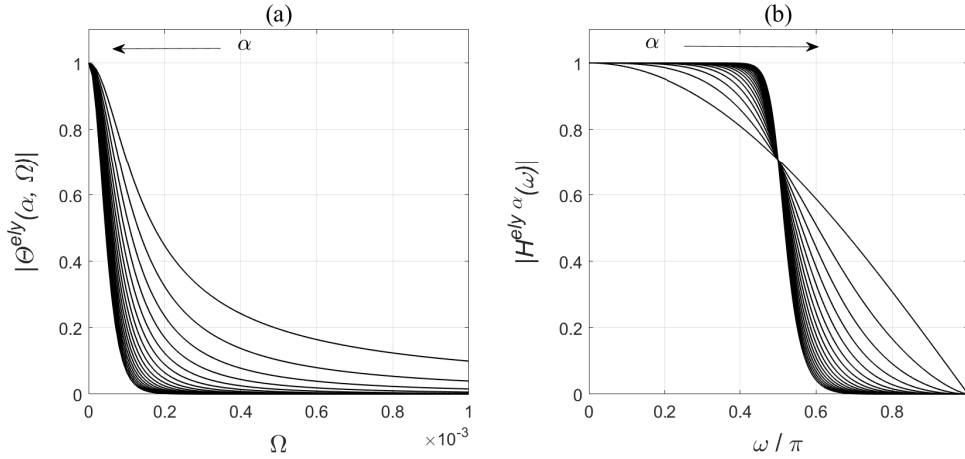
Para simplificar a notação, $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$ será chamada de função de Ely.

5.1.2 Resultados obtidos a partir da função de Ely

Aplicando o método WQOP, na Figura 18-(a) têm-se os resultados obtidos pela função $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$ para $0,5 \leq \alpha \leq 5$. O sentido da seta indica o crescimento de α . É possível notar que, conforme α diminui, a função de Ely se torna menos localizada. Assim, diminuir α implica no aumento de $\Delta\omega$ para o filtro semi-conjugado obtido. Tal comportamento pode

ser confirmado na Figura 18-(b), onde são mostrados os espectros de magnitude dos filtros obtidos por $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$ para os valores de α considerados. Desse modo, pode ser concluído que uma variedade de filtros semi-conjugados pode ser obtida por meio de $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$, uma vez que α pode variar de forma contínua.

Figura 18 – Gráficos de (a) $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$ e (b) dos respectivos espectros de magnitude dos filtros semi-conjugados $H^{ely\alpha}(\omega)$ para $0,5 \leq \alpha \leq 5$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 10 estão os resultados dos filtros semi-conjugados obtidos a partir de $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$ para diferentes valores de α . Assim como no Capítulo 4, as características de banda são obtidas considerando $A_p = A_s = 0,01$. Para simplificar a notação, denotamos $ely_{\alpha}L$ como sendo o filtro semi-conjugado de Ely, obtido pelo WQOP aplicado em $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$ utilizando um truncamento de ordem L . Conforme pode ser observado na Tabela 10 e na Figura 18, diminuir α implica no aumento de $\Delta\omega$ e $\delta_{min}^{H^{ely}}$. Como nos filtros semi-conjugados das Gaussianas, quanto maior for $\Delta\omega$, menor é o comprimento do filtro para uma mesma tolerância de desvio de ortogonalidade estabelecida.

Observe também que, para tolerâncias de desvio de ortogonalidade equivalentes, verifica-se um aumento significativo do comprimento do filtro. Isso pode ser observado considerando $\alpha < 1$, onde é possível notar maiores valores dos MIODs. Na verdade, para algumas escolhas de α , não é possível obter um comprimento mínimo de filtro que satisfaça certas tolerâncias (ver $\alpha < 0,8$ de acordo com a Tabela 10). Isso ocorre para filtros em que a tolerância ϵ_{δ} é menor do que o MIOD apresentado.

As tolerâncias ϵ_{δ} e ϵ_{π} também definem os desvios na faixa de passagem apresentados pelo filtro semi-conjugado. Verificou-se que filtros com $\delta_h[L] < 0,01$ são suficientes para garantir um ganho aproximadamente constante na faixa de passagem. Como exemplo, na Figura 19 são exibidos os espectros de magnitude de $ely_{3,0}L$ em dB, para $L = 45, 65, 89$ (tais valores são descritos na Tabela 10). Observe que as distorções de ganho são consi-

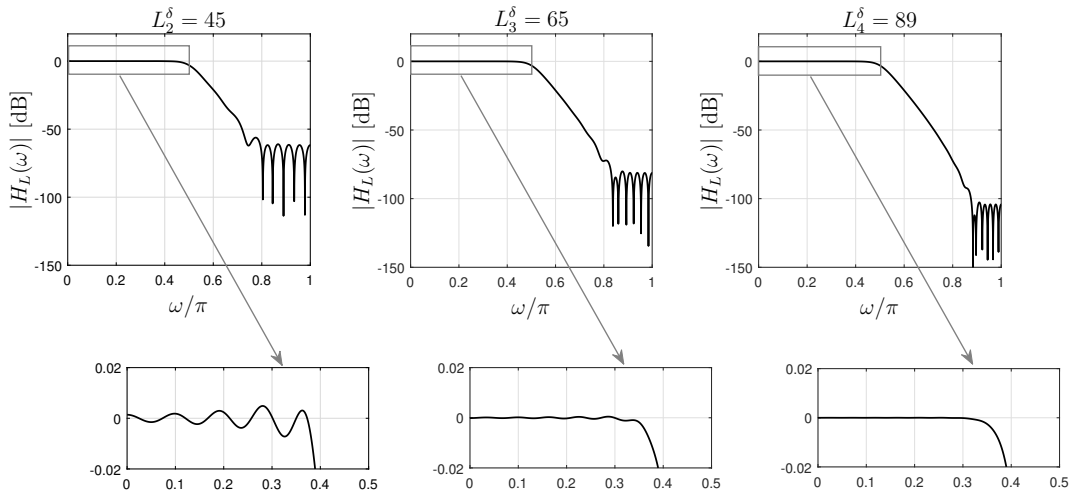
Tabela 10 – Resultados dos filtros semi-conjugados de Ely para diferentes valores de α . O símbolo ∞ é referente a um valor consideravelmente grande (não necessariamente infinito).

Filtro	$\delta_{min}^{H^{ely}}$	$H^{ely}(\pi)$	E_p	ω_p/π	ω_s/π	$\Delta\omega/\pi$	L_2^π	L_2^δ	L_3^π	L_3^δ	L_4^π	L_4^δ
ely _{0,5} L	5,03E-03	3,53E-05	0,8195	0,0906	0,9934	0,9028	91	29	∞	∞	∞	∞
ely _{0,6} L	8,43E-04	3,70E-06	0,8528	0,1371	0,9545	0,8174	35	17	231	93	∞	∞
ely _{0,7} L	1,36E-04	3,96E-07	0,8758	0,1791	0,9714	0,7923	17	13	85	29	∞	∞
ely _{0,8} L	2,17E-05	4,29E-08	0,8924	0,2148	0,9552	0,7404	13	13	39	21	159	53
ely _{0,9} L	3,43E-06	4,67E-09	0,9049	0,2441	0,9370	0,6929	13	13	19	21	63	29
ely _{1,0} L	5,41E-07	5,10E-10	0,9142	0,2685	0,9176	0,6491	13	13	19	21	23	29
ely _{1,1} L	8,58E-08	5,58E-11	0,9225	0,2883	0,8976	0,6093	13	17	19	25	31	33
ely _{1,2} L	1,37E-08	6,12E-12	0,9290	0,3052	0,8782	0,5730	15	17	23	25	31	33
ely _{1,3} L	2,22E-09	6,71E-13	0,9344	0,3195	0,8594	0,5399	15	21	21	29	31	37
ely _{1,4} L	3,81E-10	7,36E-14	0,9391	0,3319	0,8419	0,5100	15	21	23	29	31	41
ely _{1,5} L	7,91E-11	8,07E-15	0,9431	0,3424	0,8253	0,4829	15	21	27	33	37	45
ely _{1,6} L	2,49E-11	8,85E-16	0,9466	0,3520	0,8100	0,4580	15	25	27	37	39	45
ely _{1,7} L	1,23E-11	9,71E-17	0,9496	0,3603	0,7960	0,4357	19	25	27	37	39	49
ely _{1,8} L	7,59E-12	1,07E-17	0,9524	0,3679	0,7830	0,4151	19	29	31	41	43	53
ely _{1,9} L	5,01E-12	1,17E-18	0,9549	0,3746	0,7712	0,3966	19	29	34	41	43	57
ely _{2,0} L	3,36E-12	1,28E-19	0,9571	0,3806	0,7601	0,3795	19	29	31	45	47	57
ely _{3,0} L	6,13E-14	3,25E-29	0,9712	0,4195	0,6827	0,2632	27	45	47	65	67	89
ely _{4,0} L	1,78E-15	8,23E-39	0,9784	0,4392	0,6401	0,2009	31	61	59	89	87	117
ely _{5,0} L	8,88E-16	2,09E-48	0,9827	0,4513	0,6130	0,1617	45	77	71	109	103	145
ely _{6,0} L	8,88E-16	5,28E-58	0,9856	0,4593	0,5945	0,1352	43	89	79	133	123	177
ely _{7,0} L	8,88E-16	1,34E-67	0,9876	0,4650	0,5815	0,1165	47	105	91	153	139	205

Fonte: Elaborado pelo autor.

deravelmente pequenas para esses comprimentos utilizados.

Figura 19 – Espectro de magnitude do filtro ely_{3,0} L para $L = 45, 65, 89$.

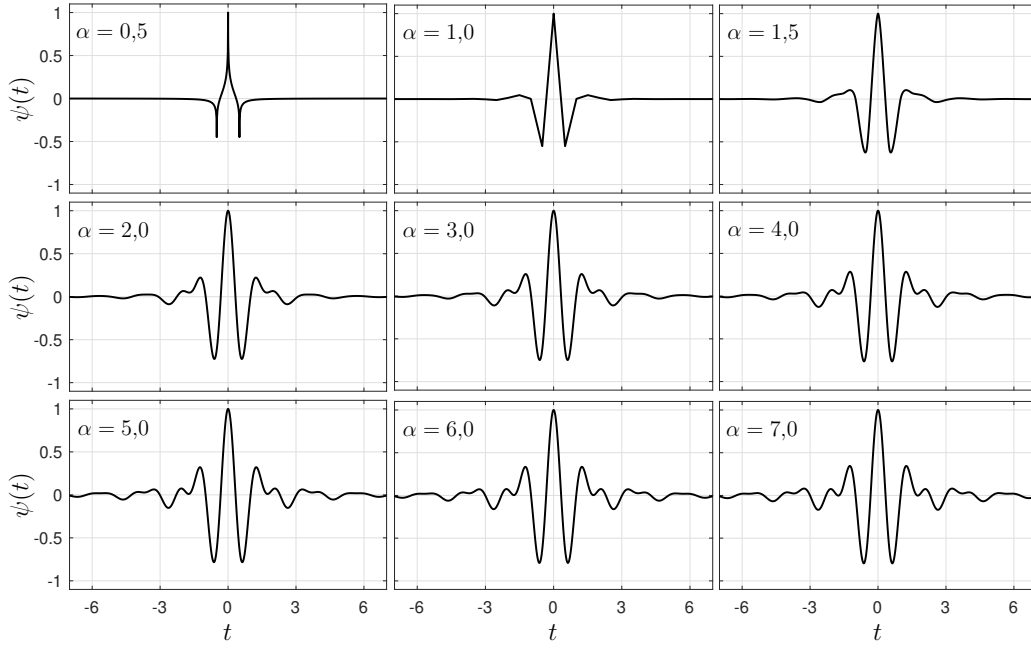


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 20 exhibe as formas de onda das wavelets de Ely obtidas pelos filtros ely _{α} L para diferentes valores de α . Observando as formas de onda destas wavelets, é possível

notar que quanto menor for α , menos suave é a forma de onda da wavelet. Esse fato está de acordo com o comportamento da regularidade dos filtros wavelet, pois quanto menor a largura da faixa de transição do filtro conjugado, maior é o número de momentos nulos e mais suave é a forma de onda da wavelet associada.

Figura 20 – Formas de onda das wavelets de Ely de acordo com α (amplitudes normalizadas).



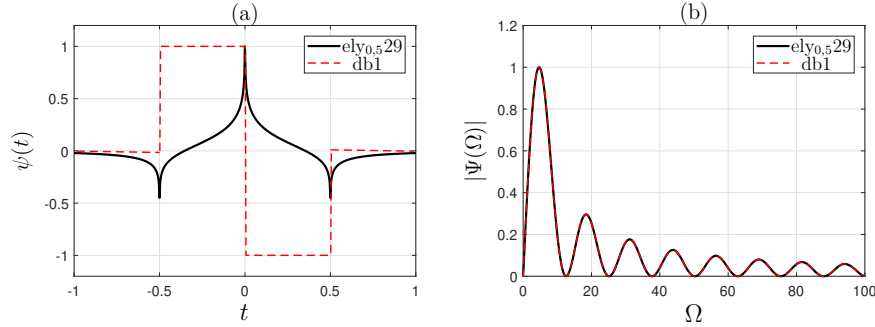
Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode ser verificado que, conforme α aumenta, a energia das wavelets de Ely tende a se concentrar aproximadamente no intervalo $(-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ no domínio da frequência. Pode ser verificado que se $\alpha \rightarrow +\infty$ então $\Delta\omega \rightarrow 0$, implicando um filtro próximo ao filtro passa-baixa ideal, ou seja, filtro conjugado da wavelet de Shannon (MALLAT, 1999). Desta forma, podemos dizer que o projeto das wavelets de Ely implica no projeto de filtros semi-conjugados, onde a especificação de $\Delta\omega$ pode indicar o desvio desejado da resposta ideal do filtro passa-baixa. De fato, quanto menor for $\Delta\omega$ mais a wavelet de Ely se aproxima da wavelet de Shannon.

Também pode ser observado que, conforme α diminui, o valor de $\Delta\omega$ se aproxima do valor apresentado pelo filtro de Haar. Conforme já discutido, a wavelet de Haar é considerada a mais simples possível, pois seu comprimento de filtro é $L = 2$. Conforme pode ser observado nas Tabelas 5 e 10, a largura da faixa de transição de $\text{ely}_{0,529}$ é muito próxima a do filtro Haar. Na Figura 21-(a) são apresentadas as formas de onda $\text{ely}_{0,529}$ (traço preto) e Haar (traço vermelho) centradas em $t = 0$. A Figura 21-(b) exibe o espectro

de magnitude das wavelets $\text{ely}_{0,5}29$ e Haar. Observe que os espectros de magnitude dessas wavelets são muito próximos qualitativamente.

Figura 21 – (a) Formas de onda das wavelets $\text{ely}_{0,5}29$ (linha preta) e db1/Haar (linha tracejada vermelha) e (b) seus respectivos espectros de magnitude.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, as wavelets de Ely também podem cobrir larguras da faixa de transição próximas da menor largura possível (wavelet de Haar), e também larguras próximas da maior possível (wavelet de Shannon). Porém, conforme discutido anteriormente, quanto menor o suporte efetivo da wavelet de Ely, maior o valor $\Psi(0)$ e, conseqüentemente, maior será o mínimo desvio de ortogonalidade obtido. Tal wavelet, portanto, deve ser utilizada em aplicações onde se permitem desvios de ortogonalidade com essas proporções.

5.1.3 Resolução tempo-frequência das wavelets de Ely

A fim de apresentar propriedades quantitativas das wavelets de Ely, dispersões de tempo e frequência serão calculadas. De acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg, as concentrações de energia de tempo e frequência são restritas (GABOR, 1946). Especificamente, para uma wavelet $\psi(t)$ localizada no tempo em $t = \mu$, e na frequência em $\Omega = \vartheta$, sua resolução de tempo-frequência é limitada por

$$\sigma_t \sigma_\Omega \geq \frac{1}{2},$$

onde

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t - \mu|^2 |\psi(t)|^2 dt \text{ e } \sigma_\Omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega - \vartheta|^2 |\Psi(\Omega)|^2 d\Omega.$$

Geometricamente, o princípio da incerteza de Heisenberg pode ser interpretado como um retângulo de área $\sigma_t \sigma_\Omega$ centrado em (μ, ϑ) . Assim, quanto maior for σ_t , menos localizada é $\psi(t)$ e, conseqüentemente, maior é a incerteza dessa localização. Por outro lado, quanto maior for σ_Ω , maior a incerteza quanto à sua localização no domínio da frequência.

Considerando $\mu = 0$ para todas as wavelets, na Tabela 11 têm-se os respectivos valores de ϑ , σ_t , σ_Ω e $\sigma_t \sigma_\Omega$ para cada wavelet Ely exibida na Figura 20. Nesse caso, a frequência central ϑ é calculada considerando apenas as frequências positivas. Os resultados apresentados na Tabela 11 atestam o que pode ser visto qualitativamente na Figura 20, ou seja, que o suporte efetivo das wavelets de Ely é diretamente proporcional a α . Por outro lado, conforme α aumenta, σ_Ω diminui, e a wavelet obtida é mais localizada no domínio da frequência.

Tabela 11 – Resoluções de tempo e frequência das wavelets de Ely.

Wavelet	ely _{0,5} 29	ely _{1,0} 13	ely _{1,5} 17	ely _{2,0} 29	ely _{3,0} 45	ely _{4,0} 61	ely _{5,0} 77	ely _{6,0} 89	ely _{7,0} 105
ϑ	13,36	5,05	4,82	4,77	4,73	4,72	4,72	4,71	4,71
σ_t	0,28	0,39	0,48	0,55	0,67	0,78	0,87	0,95	1,03
σ_Ω	46,24	3,84	2,21	1,59	1,16	1,03	0,97	0,96	0,93
$\sigma_t \sigma_\Omega$	13,21	1,51	1,06	0,88	0,79	0,80	0,85	0,91	0,96

Fonte: Elaborado pelo autor.

Numericamente, foi verificado que $\vartheta \rightarrow 3\pi/2$ conforme $\alpha \rightarrow \infty$. Esse valor pode ser visto como a frequência central da wavelet de Shannon, uma vez que o filtro passa-banda ideal é definido compactamente em $\pi \leq |\Omega| \leq 2\pi$. Os resultados de $\sigma_t \sigma_\Omega$ calculados para cada wavelet na Tabela 11 mostram que a resolução tempo-frequência varia consideravelmente. Observe que, embora ely_{0,5}29 tenha uma boa resolução de tempo, no domínio da frequência a resolução é ruim.

Os resultados mostrados na Tabela 11 podem variar de acordo com o comprimento L utilizado. Na Tabela 12 são exibidos os resultados de resolução para a wavelet ely_{1,0} L considerando diferentes valores de L . Note como a resolução na frequência sofre alterações conforme L varia. Logo, tal variação implica diferentes resultados da resolução tempo-frequência. Entretanto, foi verificado que para as wavelets obtidas a partir de filtros semi-conjugados de ordem L_λ^δ com $\lambda \geq 3$, não se obtém variações significativas de σ_t e σ_Ω .

Tabela 12 – Resoluções de tempo e frequência referente a wavelet ely_{1,0} L para diferentes valores de L .

L	13	17	21	25	29	33
ϑ	5,05	5,04	5,03	5,03	5,03	5,03
σ_t	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39
σ_Ω	3,84	2,44	2,30	2,30	2,29	2,29
$\sigma_t \sigma_\Omega$	1,51	0,96	0,90	0,90	0,90	0,90

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 MÉTODO PROPOSTO

Conforme visto na Seção 5.1.2, utilizando o WQOP a partir da função de Ely, é possível obter filtros semi-conjugados com fase linear e ganho aproximadamente constante

na faixa de passagem. Uma vez que a partir da função de Ely é possível obter filtros semi-conjugados com diferentes características de banda, pode-se então utiliza-la para projetar NOWFBs de acordo com determinadas especificações. No caso dos filtros obtidos pela função de Ely, o parâmetro α controla a largura da faixa de transição do filtro, e a ordem do janelamento L determina os desvios de ortogonalidade. Logo, o método de projeto proposto, deve considerar em se obter valores apropriados de α e L . Assim, o método proposto inicia-se a partir do projeto de um filtro semi-conjugado apropriado, que pode ser resumido em duas fases:

Fase 1: Determinar o parâmetro α apropriado que mais se aproxima das especificações desejadas no domínio da frequência.

Fase 2: Determinar o comprimento mínimo do filtro L que satisfaça as tolerâncias ϵ_δ e/ou ϵ_π .

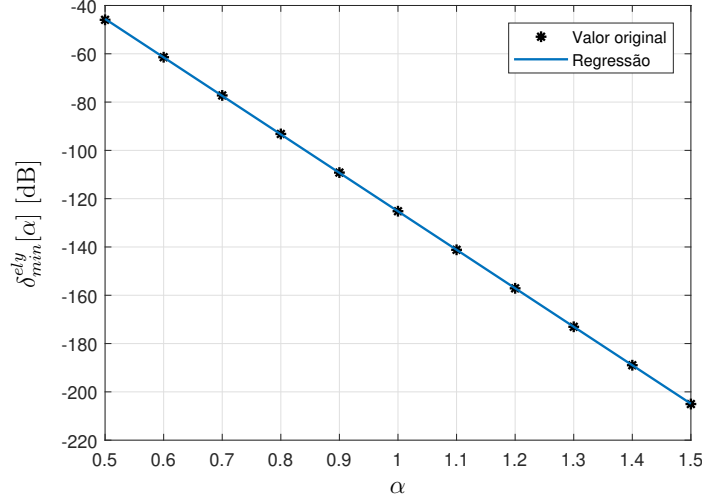
A variação de α implica em variações das frequências de passagem e de rejeição e, conseqüentemente, na variação da largura da faixa de transição. Por esta razão, pode ser possível que um α específico possa satisfazer a frequência de passagem desejada ω_p , mas, ao mesmo tempo, não pode satisfazer a frequência de rejeição ω_s . Do mesmo modo, uma vez que α satisfaça $H(\omega_s) \leq A_s$, pode ser que o valor de ω_p não seja o especificado. Nesse caso, o ideal é encontrar α que satisfaça primeiro a frequência de passagem, e depois verificar se o valor de α encontrado também satisfaz $H(\omega_s) \leq A_s$. Caso α não satisfaça essa condição, deve-se então, aumentar seu valor até que $H(\omega_s) \leq A_s$ se verifique.

Os mínimos desvios de ortogonalidade devem ser levados em consideração para o projeto, a fim de verificar se as tolerâncias especificadas não são menores do que estes. Entretanto, conforme pode ser observado pela Tabela 10, os valores de $H^{ely}(\pi)$ são relativamente pequenos para $\alpha \geq 0,5$. Como o interesse aqui é projetar filtros wavelet quase-ortogonais, desvios de ortogonalidade serão uma realidade. Assim, não será muito prático projetar filtros semi-conjugados que satisfazem tolerâncias muito pequenas, pois o comprimento do filtro se torna relativamente grande, com elevado custo computacional.

Conforme pode ser observado na Tabela 10, diferentes dos valores apresentados por $H^{ely}(\pi)$, os mínimos desvios de ortogonalidade apresentados por $\delta_{min}^{H^{ely}}$ são relativamente grandes, principalmente para $\alpha < 0,8$. Assim, deve-se definir uma função que estima o valor de $\delta_{min}^{H^{ely}}$ no domínio α . A função definida pela Equação (81) pode estimar tal valor considerando $0,5 \leq \alpha \leq 1,5$. Tal função foi obtida empiricamente. Na Figura 22 são plotados os valores de $\delta_{min}^{H^{ely}}$ e $\delta_{min}^{ely}[\alpha]$, ambos em dB, para mostrar que o modelo é fiel ao comportamento real.

$$\delta_{min}^{ely}[\alpha] = 50,8416 \times e^{-18,3465\alpha}. \quad (81)$$

Figura 22 – Resultados do MIOD apresentado pelo filtro semi-conjugado e do MIOD estimado para $0,5 \leq \alpha \leq 1,5$. Valores dados em dB.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As tolerâncias ϵ_δ e ϵ_π podem ser escolhidas aleatoriamente, desde que satisfaçam $\epsilon_\delta \geq \delta_{min}^{ely}[\alpha]$ e $\epsilon_\pi \geq H^{ely}(\pi)$. Entretanto, conforme observado na Tabela 10, dependendo do valor de α e das tolerâncias ϵ_δ e ϵ_π , o comprimento do filtro pode aumentar consideravelmente. Por isso, o filtro semi-conjugado deve ser projetado de acordo com os máximos desvios de ortogonalidade permitidos, porém, considerando um comprimento de filtro razoável.

Uma vez que o filtro semi-conjugado $h_L^{ely}[k]$ apropriado é projetado, é possível obter os filtros de decomposição e reconstrução para o projeto do NOWFB, conforme descrito no Capítulo 2. Na Figura 23 é exibido o fluxograma da metodologia proposta. As etapas necessárias para o projeto de um NOWFB usando o método proposto são:

PASSO 1: Especificar o ganho mínimo da faixa de passagem (A_p), ganho máximo da faixa de rejeição (A_s), frequência de passagem (ω_p), frequência de rejeição (ω_s) e as tolerâncias dos desvios de ortogonalidade (ϵ_π , ϵ_δ).

PASSO 2: Escolha um valor inicial para o parâmetro que controla a faixa de transição (α) e do comprimento do filtro (L). Também indique o incremento do parâmetro da faixa de transição ($\Delta\alpha$) e a tolerância do erro (ϵ_p);

PASSO 3: Faça $L_\epsilon = \alpha_p = 0$;

PASSO 4: Calcule $\Theta^{ely}(\alpha, \Omega)$;

PASSO 5A: Se $\alpha_p = 0$ então o valor ótimo de α que satisfaz a frequência de passagem desejada ω_p deve ser calculado.

a) se $|H(\omega_p) - (1 - A_p)| > \varepsilon_p$ então α pode ser modificado de duas maneiras:

i) se $H(\omega_p) > (1 - A_p)$ então $\alpha \leftarrow \alpha - \Delta\alpha$;

ii) caso contrário $\alpha \leftarrow \alpha + \Delta\alpha$;

Volte para o passo **PASSO 4**;

b) caso contrário, $\alpha_p = 1$. Vá para o **PASSO 5B**;

PASSO 5B: Caso contrário, verifique $H(\omega_s) \leq A_s$:

a) se $H(\omega_s) > A_s$ então $\alpha \leftarrow \alpha + \Delta\alpha$. Volte para o **PASSO 4**;

b) caso contrário, α é o valor ótimo;

PASSO 6: Calcule o MIOD apresentado pelo filtro obtido por α ;

PASSO 7A: Se $\delta_{min}^{ely}[\alpha] > \epsilon_\delta$ então não é possível projetar um filtro semi-conjugado que satisfaz tal tolerância;

PASSO 7B: Caso contrário, vá para o **PASSO 8**;

PASSO 8: Calcule $h_L^{ely}[k]$:

$$h_L^{ely}[k] = \begin{cases} h^{ely}[k - M/2] & \text{se } 0 \leq k \leq L - 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

PASSO 9A: se $\delta_{H^{ely}}[L] > \epsilon_\delta$ então $L \leftarrow L + 2$;

a) se $L_\epsilon = 0$ volte ao **PASSO 8**;

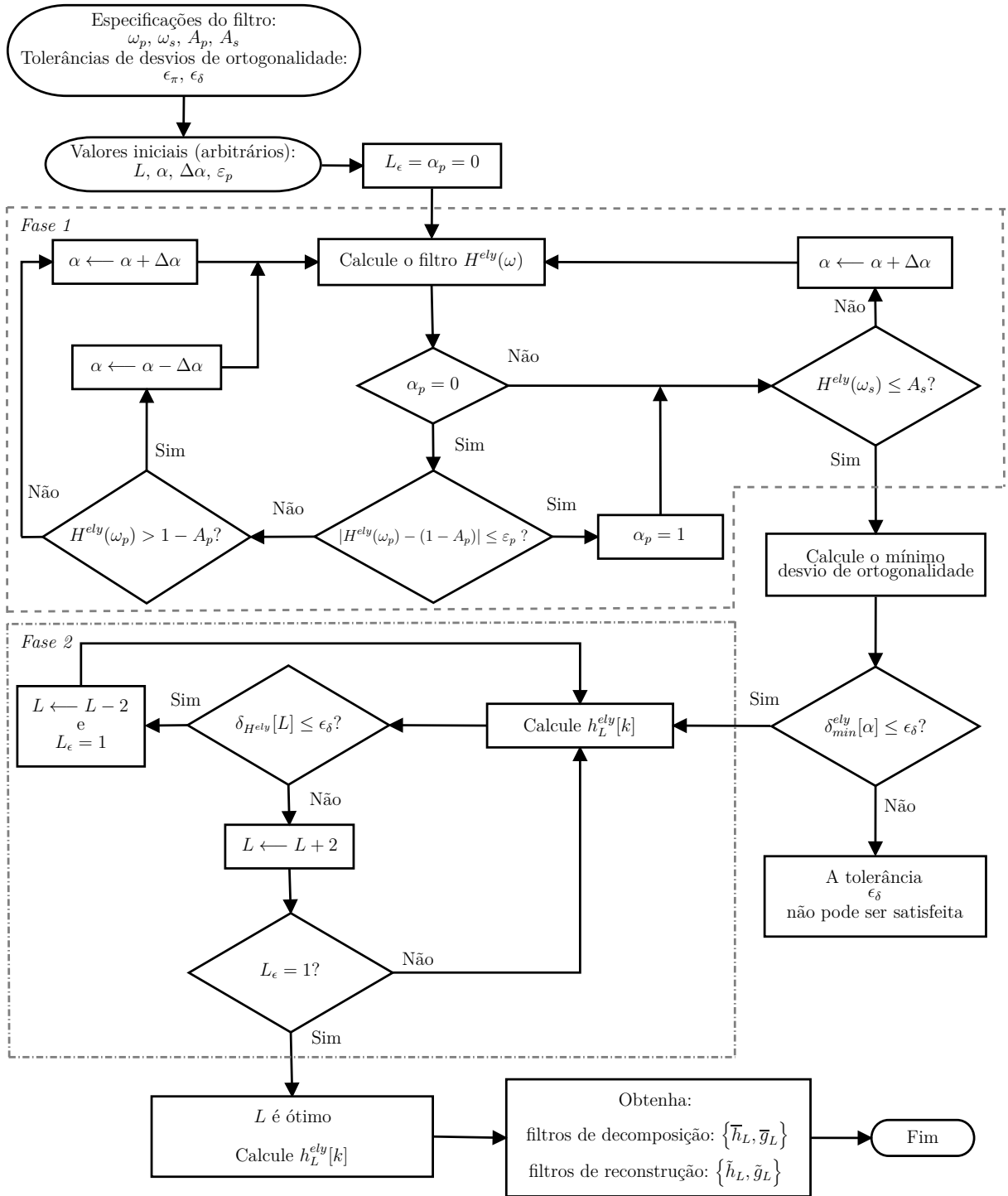
b) caso contrário, L é o valor ótimo. Prossiga para o **PASSO 10**;

PASSO 9B: caso contrário, $L \leftarrow L - 2$ e $L_\epsilon = 1$. Retorne ao **PASSO 8**;

PASSO 10: Calcule o filtro semi-conjugado $h_L^{ely}[k]$ para o L ótimo;

PASSO 11: Projete os filtros de decomposição e reconstrução a partir de $h_L^{ely}[k]$:

- $\bar{h}_L[k] = h_L^{ely}[-k]$,
 - $\bar{g}_L[k] = g_L[-k]$,
 - $\tilde{h}_L[k] = h_L^{ely}[k]$,
 - $\tilde{g}_L[k] = g[k]$,
- onde $g_L[k] = (-1)^{1-k} h_L^{ely}[1 - k]$.

Figura 23 – Fluxograma da metodologia proposta para o projeto de um NOWFB.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Diferente dos métodos clássicos que obtêm filtros conjugados ou semi-conjugados (exceto para as wavelets OQB), o método proposto não leva em consideração uma restrição de N zeros em $z = -1$. O problema dos métodos clássicos, é que, tal restrição não permite obter um controle das frequências de passagem e rejeição. O que se espera para métodos

desse tipo, é que, quanto maior for N , maior é a frequência de passagem e menor é a frequência de rejeição, o que, conseqüentemente, implica em menor largura da faixa de transição. Isso pode ser verificado na Tabela 5. O método proposto, diferente dos métodos clássicos, permite determinar, a priori, as frequências de passagem e de rejeição desejáveis. Além disso, ele não utiliza técnicas avançadas de cálculo ou métodos de otimização para obter o banco de filtros desejado.

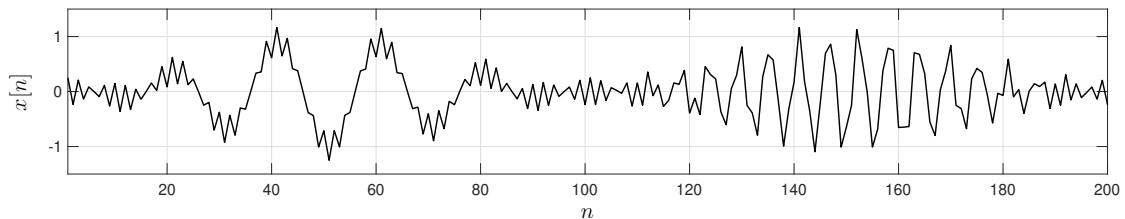
Na Seção 5.2.1 é mostrada a principal vantagem que NOWFBs podem ter sobre OWFBs e BWFBs. Como os filtros wavelet Ely possuem fase linear e podem apresentar ganho aproximadamente constante na faixa de passagem (para $\delta_H[L] < 0,01$), espera-se que os mesmos forneçam uma representação melhor do que os filtros ortogonais e biortogonais no domínio wavelet. Assim, os filtros wavelet propostos podem ser mais adequados em aplicações envolvendo uma representação redundante, como a chamada transformada wavelet estacionária (SWT - Stationary Wavelet Transform).

5.2.1 Exemplo: transformada wavelet estacionária

Nesta seção é mostrado um exemplo de aplicação do método proposto por meio da SWT, que pode ser vista como uma modificação da FWT para restaurar a propriedade de invariância no tempo (PESQUET; KRIM; CARFANTAN, 1996). O algoritmo da SWT pode ser ativado substituindo o operador *downsampling* da FWT pelo operador de *upsampling*, e pode ser útil em problemas de sinais não-estacionários para identificações de certas propriedades, como mudanças rápidas e transitórias (YE; WANG; DING, 2004; MORSI; EL-HAWARY, 2008; SABER; JAMES; HAYES, 2019; PESQUET; KRIM; CARFANTAN, 1996).

Considere o sinal $x[n]$ mostrado na Figura 24. Este sinal possui 200 amostras, e contém três frequências distintas $\omega_1 = 0,1\pi$ rad, $\omega_2 = 0,35\pi$ rad e $\omega_3 = 0,9\pi$ rad. As frequências ω_1 e ω_2 estão localizadas nos intervalos $0 \leq n < 100$ e $100 \leq n < 200$, respectivamente. Já a frequência ω_3 está distribuída em toda a faixa do sinal.

Figura 24 – Sinal discreto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma simples, se o sinal $x[n]$ for decomposto pela SWT com um filtro wavelet apropriado, espera-se que os coeficientes de aproximação no primeiro nível forneçam uma representação fiel do sinal nas frequências baixas ω_1 e ω_2 . Utilizando a metodologia proposta, pode-se projetar um filtro semi-conjugado que atenda esse propósito. O filtro semi-conjugado é obtido com os seguintes valores estabelecidos:

- $\omega_p = 0,35\pi$;
- $\omega_s = 0,9\pi$;
- $A_p = A_s = \epsilon_\delta = 0,01$;
- $L_0 = 21$;
- $\alpha_0 = 1,5$;
- $\Delta\alpha = 0,001$;
- $\varepsilon_p = 0,0001$.

Desse modo, pretende-se projetar um filtro semi-conjugado com frequência de passagem $\omega_p = 0,35\pi$, que corresponde a segunda componente de baixa frequência ω_2 do sinal $x[n]$. Os valores $A_p = A_s = 0,01$ foram escolhidos para caracterizarem o mínimo ganho na faixa de passagem e o máximo ganho na faixa de rejeição, respectivamente. Lembrando que, tais valores foram utilizados como referência para caracterizarem os filtros wavelet explorados neste trabalho. Para o filtro projetado, define-se $\epsilon_\delta = 0,01$ como a tolerância máxima do desvio de ortogonalidade.

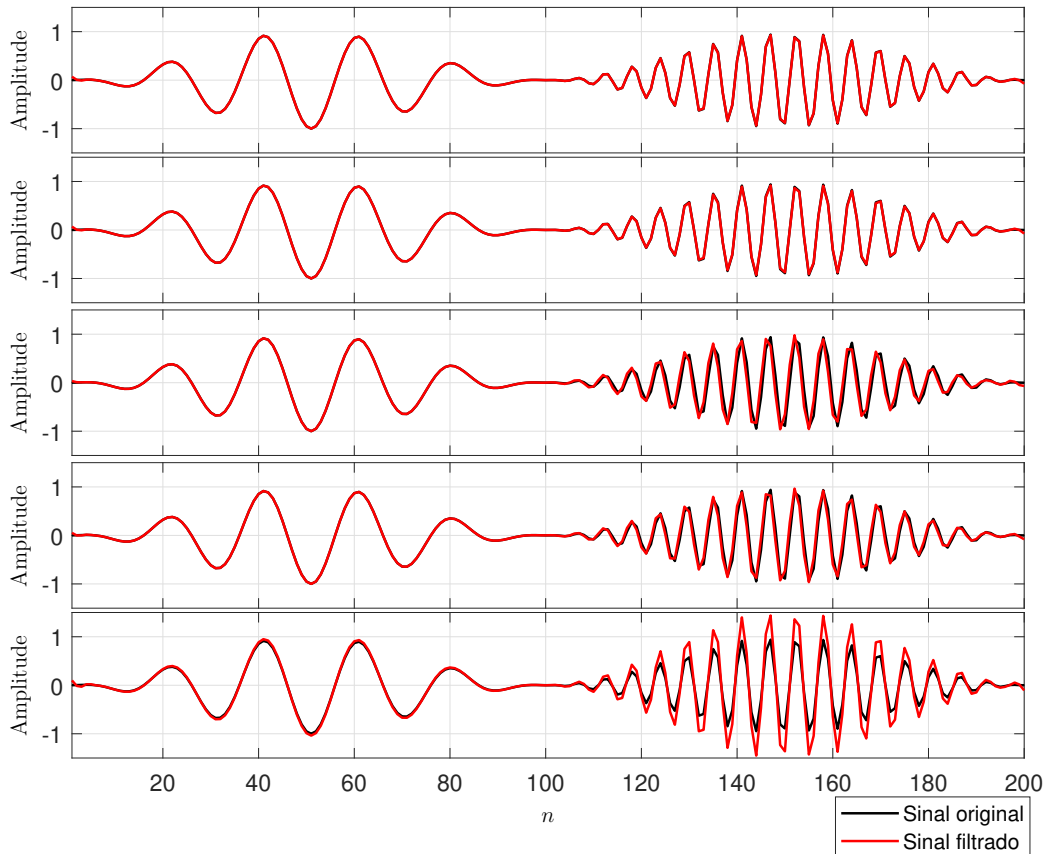
Na Tabela 5 nota-se que os filtros conjugados db10 e sym10 implicam $\omega_p = 0,3541\pi$, que é aproximadamente a frequência de passagem desejada. Assim, como valor inicial do comprimento do filtro, escolhe-se $L_0 = 21$, que é próximo do comprimento relativo dos filtros db10 e sym10. Na Tabela 10 pode-se notar que o valor de α que corresponde a $\omega_p = 0,35\pi$ deve pertencer ao intervalo $1,5 < \alpha < 1,6$. Assim, como ponto de partida, escolhe-se $\alpha = 1,51$. O incremento de α é definido como sendo um valor relativamente pequeno $\Delta\alpha = 0,001$, assim como o valor de $\varepsilon_p = 0,0001$, que garante que $0,99 - \varepsilon_p \leq H(\omega_p) \leq 0,99 + \varepsilon_p$.

O filtro semi-conjugado obtido de acordo com as especificações foi o filtro $\text{ely}_{1,574}25$. Assim, tal filtro será utilizado para obter a representação de $x[n]$ em frequências baixas. Além deste filtro, para comparar os resultados obtidos por diferentes filtros wavelet, também serão utilizados coif4, db10, sym10 e bior3.9. Os filtros conjugados db10, sym10 e coif4 possuem frequências de passagem próximas a $\omega_p = 0,35\pi$. O filtro biortogonal

bior3.9 foi escolhido, por ser um filtro de decomposição de ordem 20, ou seja, mesma ordem que db10 e sym10. Assim, todos os filtros wavelet utilizados nesse exemplo possuem comprimento $L = 20$, exceto $\text{ely}_{1,574}25$ e coif4 cujas ordens são 25 e 24, respectivamente.

Na Figura 25 são mostrados os coeficientes de aproximação $a_1[n]$ (linha vermelha) da decomposição de $x[n]$ utilizando a SWT para cada filtro utilizado. Tais resultados foram normalizados por $\sqrt{2}$ a fim de se obter uma comparação com as amplitudes do sinal original. Note que para os resultados obtidos pelas wavelets $\text{ely}_{1,574}25$ e coif4 a diferença entre o sinal original (linha preta) e o sinal de aproximação $a_1[n]$ é qualitativamente imperceptível. Naturalmente, podem ser observadas as distorções de fase e de ganho referentes aos wavelets db10, sym10 e bior3.9.

Figura 25 – Sinal original (preto) e o sinal de aproximação via SWT (vermelho) por $\text{ely}_{1,575}25$ (primeira linha), coif4 (segunda linha), db10 (terceira linha), sym10 (quarta linha) and bior3.9 (última linha).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O exemplo explorado nesta seção aponta as possíveis desvantagens dos filtros wavelet ortogonais e biortogonais no processo de decomposição do sinal. Dependendo do sinal analisado e das escolhas do filtro, pode-se observar maior ou menor distorção no sinal decomposto. A Tabela 13 exibe os resultados do erro quadrático médio (MSE - *Mean Squared Error*) entre o sinal original e o sinal de aproximação exibidos na Figura 25.

Observe que $\text{ely}_{1,574}25$ implica no melhor resultado quando comparado com os resultados dos demais filtros wavelet utilizados. De fato, tal filtro não implica distorção de fase e considerável distorção de ganho (este filtro satisfaz L_δ^2 como pode ser visto na Tabela 10).

Tabela 13 – MSE entre o sinal original e o sinal filtrado.

Filter	$\text{ely}_{1,574}25$	coif4	db10	sym10	bior3.9
MSE	6,91E-05	1,12E-04	1,38E-02	6,80E-03	2,69E-02

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para NOWFB a desvantagem está no processo de reconstrução do sinal. A Tabela 14 fornece os resultados de MSE entre o sinal $x[n]$ e o sinal reconstruído pelos filtros $\text{ely}_{1,574}L$ para alguns valores de L . Observe que quanto maior L , menor é o erro de reconstrução. Esse erro também dependerá do tipo e tamanho do sinal analisado. Portanto, pode-se dizer que o comprimento adequado do filtro dependerá das circunstâncias do sinal a ser analisado. Em certas aplicações, esse erro pode ser insignificante em comparação aos outros resultados de filtros ortogonais ou biortogonais, conforme será mostrado no Capítulo 7.

Tabela 14 – MSE entre o sinal original e o sinal reconstruído utilizando os filtros $\text{ely}_{1,574}L$.

L	13	21	25	29	33	37	45
MSE	1,60E-04	2,24E-06	5,87E-07	8,59E-08	6,61E-09	1,89E-09	5,70E-11

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.3 COMPARAÇÕES COM AS WAVELETS COIFLETS

Conforme descrito em Cohen, Daubechies e Feauveau (1992), existem filtros wavelet biortogonais próximos aos filtros wavelet de Coiflets. Como os filtros de Coiflets são aproximadamente simétricos como um filtro de ordem ímpar, também é natural esperar que haja filtros wavelet de Ely próximos a estes filtros. A Tabela 15 mostra este fato, onde são exibidos os coeficientes de alguns filtros semi-conjugados $\text{ely}_\alpha L$ em comparação com os filtros conjugados $\text{coif}N$, para $N = 1, 2, 3, 4$. Observe a proximidade entre os coeficientes de $\text{ely}_\alpha L$ e $\text{coif}N$ para cada α e N considerado.

Para $\text{coif}5$, um filtro de Ely próximo a este é $\text{ely}_{1,75}L$. Na Figura 26 têm-se as formas de onda das wavelets de Ely (resultados em vermelho) e das wavelets de Coiflets (em preto), sendo plotadas em um mesmo plano para facilitar a comparação. Para cada α e N considerados, na primeira e na segunda coluna da Figura 26 são exibidas as formas de onda da wavelet e do espectro de magnitude, respectivamente. Já na terceira coluna são exibidos os espectros de magnitude dos filtros semi-conjugados e conjugados associados.

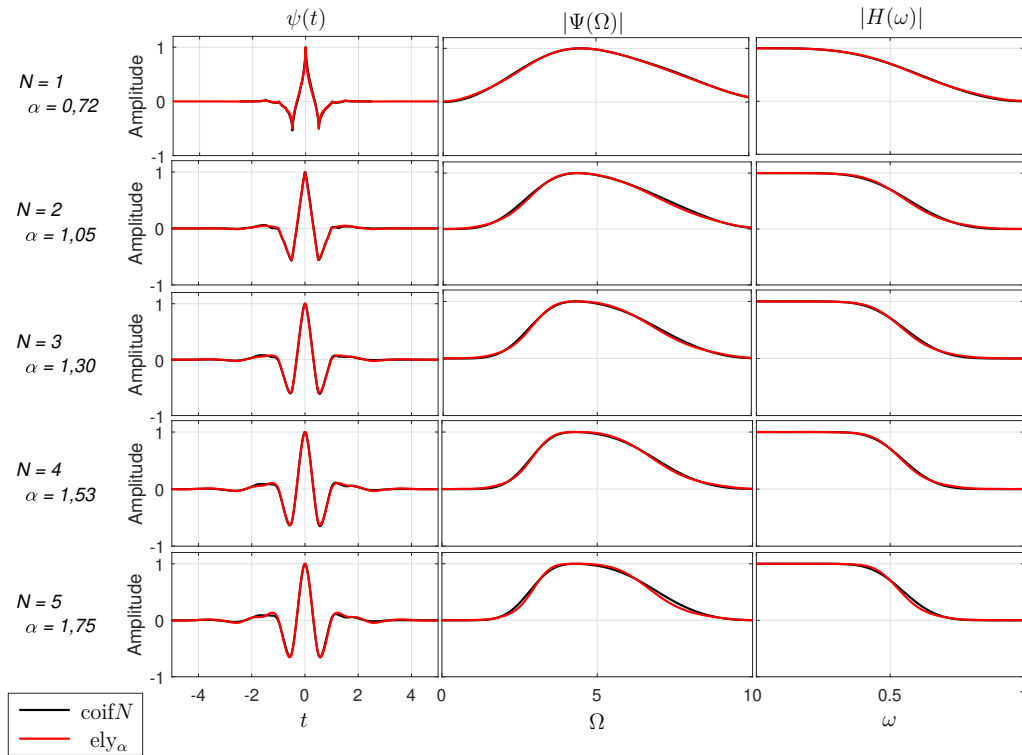
Tabela 15 – Coeficientes de alguns filtros semi-conjugados $\text{ely}_\alpha L$ em comparação com os filtros conjugados $\text{coif}N$, para $N = 1, 2, 3, 4$.

α	N	k	$(h[k])_{\text{ely}_\alpha}$	$(h[k]/\sqrt{2})_{\text{coif}N}$
0,72	1	0	0,8524574188	0,8525720202
		-1,1	0,3625900321	0,3378976624
		-2,2	-0,0700817834	-0,0727326195
		-3,3	-0,0159851994	0
		-3,3	-0,0159851994	-0,0156557281
1,05	2	0	0,8130259024	0,8127236354
		-1,1	0,4013098557	0,3861100668
		-2,2	-0,0683388266	-0,0673725547
		-3,3	-0,0570192788	-0,0414649367
		-4,4	0,0189391372	0,0163873364
		-5,5	0,0115718841	0
		-6,6	-0,0045766419	0
		-7,7	-0,0028021679	0
		-7,7	-0,0028021679	-0,0007205494
1,30	3	0	0,7947149356	0,7937772226
		1,-1	0,4158440190	0,4284834763
		2,-2	-0,0636235204	-0,0717998216
		3,-3	-0,0776377345	-0,0823019271
		4,-4	0,0260580790	0,0345550275
		5,-5	0,0201849160	0,0158805448
		6,-6	-0,0085026891	-0,0090079761
		7,-7	-0,0062701982	-0,0025745176
		8,-8	0,0029469072	0,0011175187
		9,-9	0,0019756464	0,0004662169
		10,-10	-0,0009724612	-0,0000709833
		11,-11	-0,0006857328	-0,0000345997
		11,-11	-0,0006857328	0
1,53	4	0	0,7827011207	0,7822389309
		-1,1	0,4241554974	0,4153084070
		-2,2	-0,0589297497	-0,0560773133
		-3,3	-0,0913974199	-0,0812666996
		-4,4	0,0296445266	0,0266823001
		-5,5	0,0280968423	0,0160689439
		-6,6	-0,0119776822	-0,0073461663
		-7,7	-0,0099737654	-0,0016294920
		-8,8	0,0048237815	0,0008923136
		-9,9	0,0037318475	0
		-10,10	-0,0019289212	0
		-11,11	-0,0014647692	0
		-12,12	0,0007928773	0
		-13,13	0,0005778344	0
		-14,14	-0,0003213265	0
		-15,15	-0,0002367963	0
		-15,15	-0,0002367963	-0,0000017849

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que as similiaridades entre as wavelets $\text{ely}_\alpha L$ e $\text{coif}N$ também se verificam nas forma de onda das mesmas.

Conforme descrito no Capítulo 3, as wavelets Coiflets foram propostas por Daube-

Figura 26 – Comparação entre as wavelets de Coiflets e de Ely.

Fonte: Elaborado pelo autor.

chies (1993). Nesse mesmo trabalho, os autores fornecem os coeficientes dos filtros conjugados $\text{coif}N$ para $N = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim, muitos trabalhos na literatura que utilizam tais wavelets, se limitam em utilizá-las considerando apenas esses valores de N . Por isso, a utilização das Coiflets limitam-se a aplicações onde é preciso utilizar filtros com larguras na faixa de transição inferiores a faixa apresentada por $\text{coif}5$.

Uma vez que algumas wavelets de Ely possuem semelhanças com as Coiflets, pode-se dizer que elas também podem ser vistas como uma escolha alternativa para as wavelets Coiflets. De fato, na literatura, podem ser encontrados diversos trabalhos que utilizaram as Coiflets em diferentes áreas (HUANG; HSIEH, 2002; RODNEY TAN; LUM; MOK, 2006; HUGENSCHMIDT; KALOGEROPOULOS, 2009; DIXIT; MAJUMDAR, 2013; ZHANG *et al.*, 2016; JAVADI; GHASEMZADEH, 2017).

Como mostrado na Seção 5.2.1, uma das vantagens das wavelets de Ely em relação as wavelets clássicas ortogonais e biortogonais está no processo de decomposição, onde se deseja ter uma representação mais próxima do sinal original para cada nível de resolução. Como visto no exemplo explorado, a wavelet de Ely foi mais eficiente na representação quando comparada com outras wavelets de Daubechies, Symmlets, Coiflets e Splines. Nos Capítulos 6 e 7 serão exploradas três aplicações diferentes, com comparações de resultados obtidos pelas wavelets de Ely e por wavelets clássicas.

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo, os filtros wavelet de Ely serão utilizados em duas aplicações diferentes. A primeira aplicação envolve o monitoramento de integridade estrutural (SHM - *Structural Health Monitoring*). O objetivo desta aplicação é quantificar a diferença entre o sinal que representa uma estrutura íntegra e o sinal que representa a mesma danificada. Para isso, será utilizado apenas o processo de decomposição da FWT. Na segunda aplicação, é mostrado que os filtros wavelet propostos também podem ser utilizados no processo de reconstrução da FWT, a compressão de imagens é explorada. Desse modo, por meio do problema explorado, pode-se avaliar o quanto os desvios de ortogonalidade afetam o processo de reconstrução de sinais que envolvem certo tipo de processamento. Para ambas as aplicações, os resultados obtidos serão comparados com outros filtros wavelet ortogonais e biortogonais. As duas implementações computacionais foram feitas no MATLAB®.

6.1 SISTEMAS SHM E WAVELETS

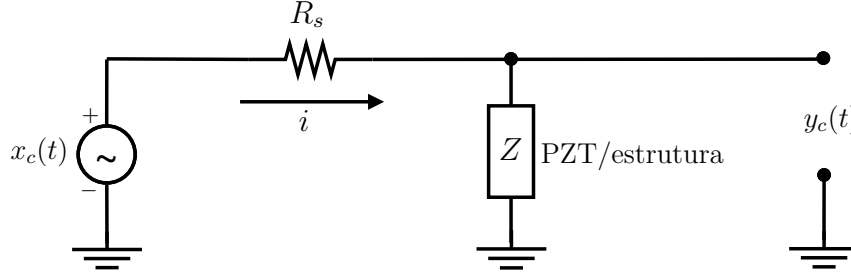
O objetivo principal de um sistema SHM é monitorar a integridade de uma estrutura para minimizar custos de manutenção e também de proporcionar maior nível de segurança aos usuários, evitando assim, possíveis falhas catastróficas (FARRAR; WORDEN, 2012). Existem diversas técnicas que podem ser exploradas em SHM. O método baseado na impedância eletromecânica (EMI - *Electromechanical Impedance*) tem sido considerado como um dos mais promissores desde sua proposta (LIANG; SUN; ROGERS, 1994). Tal método é um tipo de avaliação não destrutiva, que consiste no monitoramento da variação da impedância mecânica da estrutura causada pela presença de um dano.

Sistemas SHM baseados no princípio da EMI se destacam por sua simplicidade e também por utilizar componentes de baixo custo, tais como os transdutores de PZT (*Pb-lead Zirconate Titanate* – Titanato Zirconato de Chumbo). Tal técnica exige que a estrutura seja excitada em uma faixa de frequência apropriada por meio dos transdutores de PZT colados na mesma. Assim, para detectar e localizar as falhas em uma estrutura empregam-se atuadores/sensores piezelétricos para excitar/medir a impedância elétrica em altas faixas de frequência. A identificação do dano é feita comparando-se a impedância elétrica da estrutura íntegra com a impedância medida após a estrutura ter sofrido um possível dano.

Geralmente, a análise dos sinais obtidos por um sistema SHM é baseada na função de resposta em frequência (FRF - *Frequency Response Function*) que por sua vez, exige um sistema de medição da impedância. Entretanto, em Vieira Filho *et al.* (2011) foi mostrado que a resposta do sensor PZT no domínio do tempo é suficiente para fornecer informações sobre a variação da impedância eletromecânica quando a estrutura sofre um

dano. Assim, é possível detectar o dano sem a dependência de sistemas de medição da impedância. Para mostrar esse fato, Vieira Filho *et al.* (2011) utilizaram o circuito elétrico mostrado na Figura 27 para medir a tensão elétrica no transdutor $y_c(t)$ após ser excitado por um sinal do tipo *chirp* $x_c(t)$. Tal circuito foi proposto por Baptista e Vieira Filho (2009) para medição da impedância elétrica no domínio da frequência.

Figura 27 – Circuito elétrico para medir a tensão de resposta do PZT.



Fonte: Adaptado de Vieira Filho *et al.* (2011)

Considerando o circuito da Figura 27, a partir de $x_c(t)$, a tensão elétrica no transdutor $y_c(t)$ pode ser obtida usando a FT inversa de acordo com a seguinte relação:

$$Y_c(\Omega) = X_c(\Omega) \frac{Z(\Omega)}{Z(\Omega) + R_s}, \quad (82)$$

sendo R_s um resistor usado para limitar a intensidade de corrente i por meio do transdutor e Z representa a impedância da união PZT/estrutura (VIEIRA FILHO *et al.*, 2011).

Para regime permanente, considerando que a tensão de excitação é fixa em amplitude para cada frequência, pode-se inferir que a tensão Y_c irá mudar somente se a impedância Z mudar, o que ocorre quando a estrutura sofre qualquer tipo de dano. Assim, qualquer variação na impedância da união PZT/estrutura resultará em alteração na amplitude e na fase da tensão Y_c . Portanto, o sinal Y_c pode ser diretamente relacionado com a integridade da estrutura monitorada.

Uma vez que monitorar as variações da tensão elétrica do transdutor no domínio do tempo é o suficiente para detectar um possível dano, aplicar a transformada wavelet em tais sinais pode ser ainda mais vantajoso. Em Vieira Filho, Baptista e Inman (2011) foi mostrado que a detecção do dano pode ser mais sensível no domínio wavelet do que no domínio da frequência. Outros trabalhos também mostram que a comparação no domínio wavelet pode ser mais eficiente (STASZEWSKI, 1998; AMARAVADI *et al.*, 2001; KOLAKOWSKI; MUJICA; VEHI, 2006; LI; ZHANG; ZHU, 2007; AMEZQUITA-SANCHEZ; ADELI, 2016; XUE *et al.*, 2019; PAN *et al.*, 2019).

Em Vieira Filho, Baptista e Inman (2011), a FWT foi utilizada para decompor o sinal de tensão $y_c(t)$. Assim, os coeficientes wavelet obtidos pela estrutura considerada

íntegra são comparados com os coeficientes wavelet referentes a estrutura com dano simulado. Os resultados experimentais mostram que no domínio wavelet possui uma maior sensibilidade para detecção de danos do que no domínio da frequência. Assim, pode ser muito mais prático utilizar o domínio wavelet para definir um limiar na detecção de um possível dano.

Uma das métricas utilizadas por Vieira Filho, Baptista e Inman (2011) para quantificar a diferença entre os sinais de tensão foi o índice estatístico de desvio do coeficiente de correlação (CCDM - Correlation Coefficient Deviation Metric):

$$\text{CCDM} = 1 - \left| \frac{\sum_n (w_B[n] - \bar{w}_B)(w_D[n] - \bar{w}_D)}{\sqrt{\sum_n (w_B[n] - \bar{w}_B)^2} \sqrt{\sum_n (w_D[n] - \bar{w}_D)^2}} \right|, \quad (83)$$

sendo $w_B[n]$ e $w_D[n]$ os coeficientes wavelet obtidos a partir da estrutura íntegra e com dano simulado, respectivamente, e os valores de $\bar{w}_B$ e $\bar{w}_D$ são as médias de $w_B[n]$ e $w_D[n]$, respectivamente.

O CCDM dado em (83) varia entre 0 e 1. Logo, se $\text{CCDM} \rightarrow 0$, não há dano. No entanto, se $\text{CCDM} \rightarrow 1$, existe uma grande possibilidade de que a estrutura esteja danificada. Assim o valor máximo esperado para o CCDM é 1, no entanto, os danos podem ser facilmente detectados para valores pequenos de CCDM (VIEIRA FILHO; BAPTISTA; INMAN, 2011).

6.1.1 Método explorado

6.1.1.1 Contexto dos sinais analisados

Os sinais utilizados neste trabalho foram fornecidos pelo Laboratório de Processamento de Sinais e Instrumentação (LabPSI) - FEIS - UNESP. Tais sinais foram utilizados para validar a metodologia proposta por Cortez (2012), que é baseada no método proposto por Baptista e Vieira Filho (2009) e Vieira Filho *et al.* (2011).

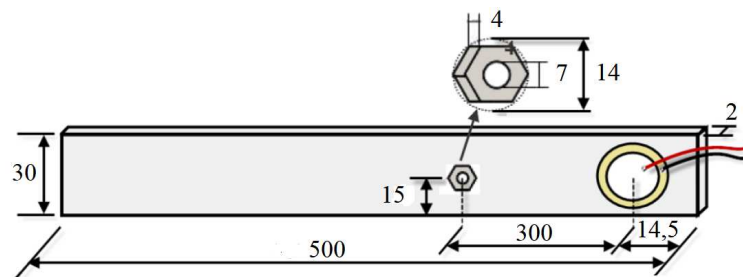
A estrutura utilizada para avaliar o método proposto por Cortez (2012) foi uma barra de alumínio com dimensões de 500 x 30 x 2 mm. Na Figura 28 é mostrado o esquema PZT/estrutura usado no procedimento experimental. Nesse caso, o dano foi simulado a uma distância de 300 mm da cápsula PZT, colando-se sobre a barra de alumínio uma porca de aço de 14 x 4 mm de 2 gramas, e as medições foram feitas com a estrutura suspensa por elásticos a uma temperatura ambiente.

No contexto estudado, o sinal de excitação $x_c(t)$ é um sinal do tipo *chirp* contendo as seguintes características:

- Frequência inicial: 1 kHz;

- Frequência final: 125 kHz;
- Amplitude: 2,1 V;
- Taxa de amostragem: 1 M amostras/s;
- Número de amostras: 262144;
- Resolução de frequência: 4 Hz.

Figura 28 – Esquema PZT/estrutura usada no procedimento experimental. Medidas dadas em milímetro (mm).



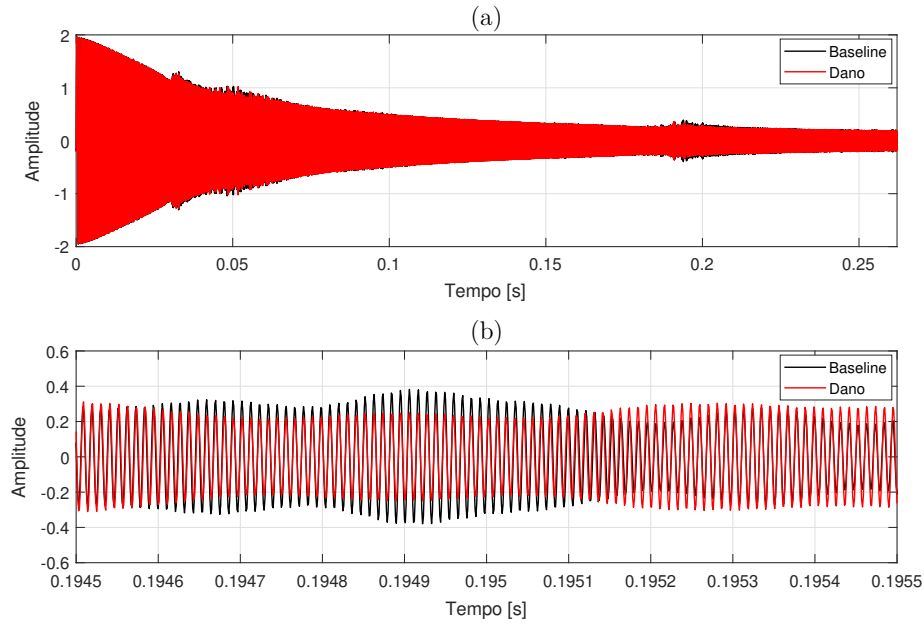
Fonte: Adaptado de Cortez (2012)

Na Figura 29-(a) têm-se as respostas no domínio do tempo referentes a estrutura íntegra (*baseline*) e com dano simulado. Qualitativamente já é possível perceber algumas diferenças de amplitudes entre os sinais, conforme pode ser observado na Figura 29-(b) que mostra um trecho dos sinais analisados.

Em sistemas SHM, a melhor faixa de frequência para a detecção de danos depende das características da estrutura e do dano. De fato, a seleção da faixa de frequência apropriada para a detecção do dano é crucial em sistemas baseados na técnica da EMI. Para o caso da estrutura mostrada na Figura 28, a faixa de frequência considerada como mais sensível ao dano é a faixa de 17 a 33 kHz (CORTEZ, 2012). Essa faixa está de acordo com a obtida por Moura Jr e Steffen Jr (2003), que determinou por tentativa e erro, que a melhor faixa de frequência para esse tipo de estrutura é de 15 a 33 kHz. Na Figura 30 é mostrado o resultado da impedância do PZT obtida pela estrutura mostrada na Figura 28, considerada íntegra e com o dano simulado para tal faixa de frequência. Note como a resposta no domínio da frequência é diferente para ambos os sinais considerando tal faixa.

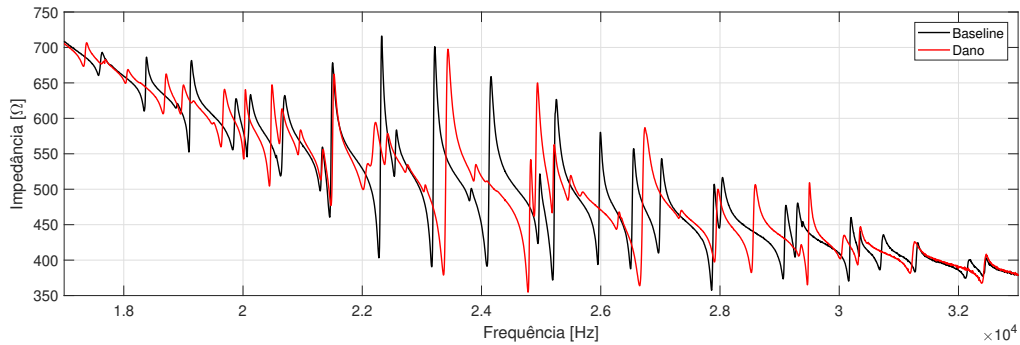
Utilizando os mesmos sinais obtidos por Cortez (2012), em Vieira (2016) foi proposta uma metodologia para seleção da faixa de frequência mais apropriada para detectar o dano. Tal metodologia foi baseada na transformada wavelet packet (WPT - *Wavelet Packet Transform*), que pode ser vista como uma variação da FWT, onde os coeficientes de detalhes também são considerados para a decomposição do sinal em outros níveis.

Figura 29 – Resposta temporal da estrutura íntegra (preto) e com dano simulado (vermelho).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30 – Impedância do PZT referente a estrutura íntegra (preto) e com dano simulado (vermelho).



Fonte: Adaptado de Cortez (2012)

Dessa forma, a WPT implica uma representação mais refinada. Os resultados obtidos por Vieira (2016) mostraram que a faixa de frequência mais sensível ao dano concentrava-se entre 10 e 30 kHz, que cobre justamente a faixa considerada mais sensível ao dano.

A fim de verificar o desempenho dos filtros wavelet de Ely em comparação com outros filtros wavelet ortogonais, na próxima seção serão apresentados os resultados obtidos por tais filtros quando aplicados no sistema SHM proposto por Cortez (2012).

6.1.1.2 Resultados e Discussões

Cada conjunto de coeficientes wavelet em determinado nível de decomposição representa uma faixa de frequência específica. Dessa forma, os sinais de tensão que representam a estrutura íntegra $y_c^B[n]$ e com dano $y_c^D[n]$ podem ser analisados por meio da FWT para verificar as distinções entre ambos em cada nível de resolução.

Como na circunstância estudada, a faixa de frequência mais sensível ao dano já foi determinada, então, pode-se utilizar essa informação para analisar os coeficientes wavelet apenas nos níveis de decomposição que representa tal faixa. Considerando as características de amostragem dos sinais obtidos em Cortez (2012), na Tabela 16 são exibidas as faixas de frequências relativas para cada nível de decomposição da FWT. Note que o nível 5 cobre justamente a faixa de frequência considerada como a mais sensível ao dano (17 - 33 kHz). Portanto, para verificar o desempenho das wavelets utilizadas nesse trabalho, apenas os coeficientes de detalhes no nível 5 serão considerados.

Tabela 16 – Faixas de frequência relativas aos coeficientes de detalhes para cada nível de decomposição.

Nível de decomposição	Faixa relativa [kHz]
1	250 - 500
2	125 - 250
3	62,5 - 125
4	31,25 - 62,6
5	15,625 - 31,25

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para avaliar o desempenho das wavelets, os seguintes procedimentos foram adotados:

1. Os sinais $y_c^B[n]$ e $y_c^D[n]$ serão decompostos por meio da FWT em 5 níveis;
2. O CCDM entre $w_B^{d5}[n]$ e $w_D^{d5}[n]$ será calculado, onde $w_B^{d5}[n]$ e $w_D^{d5}[n]$ denotam os coeficientes de detalhes no nível 5 dos sinais $y_c^B[n]$ e $y_c^D[n]$, respectivamente.

Diversos filtros wavelet de Ely, Daubechies, Symmlets e Coiflets foram utilizados para avaliar os sinais $y_c^B[n]$ e $y_c^D[n]$ no domínio wavelet. Na metodologia proposta por Vieira Filho, Baptista e Inman (2011), os autores obtiveram resultados significativos utilizando as wavelets Coiflets. Por isso, tais wavelets servirão como referência para analisar o desempenho das demais wavelets utilizadas.

Na Tabela 17 são fornecidos os maiores resultados do CCDM obtido em cada família de wavelets ortogonais considerada: dbN ($1 \leq N \leq 40$), symN ($2 \leq N \leq 40$) e coifN ($1 \leq N \leq 5$). Também são fornecidos os resultados obtidos pelos filtros wavelet de Ely, sendo exibidos os melhores resultados obtidos por diferentes filtros de comprimento

mínimo L_δ^λ para $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Para fins de comparações, também é fornecido o resultado do CCDM obtido no domínio do tempo.

Tabela 17 – Valores do CCDM para as wavelets com melhores desempenho em cada família considerada.

Wavelet	CCDM
db37	0,005466
sym39	0,005469
coif5	0,004975
ely _{3,0} 25 ($\lambda = 1$)	0,005481
ely _{6,0} 89 ($\lambda = 2$)	0,005528
ely _{7,0} 153 ($\lambda = 3$)	0,005532
ely _{5,5} 161 ($\lambda = 4$)	0,005492
Domínio do tempo	0,001514

Fonte: Elaborado pelo autor.

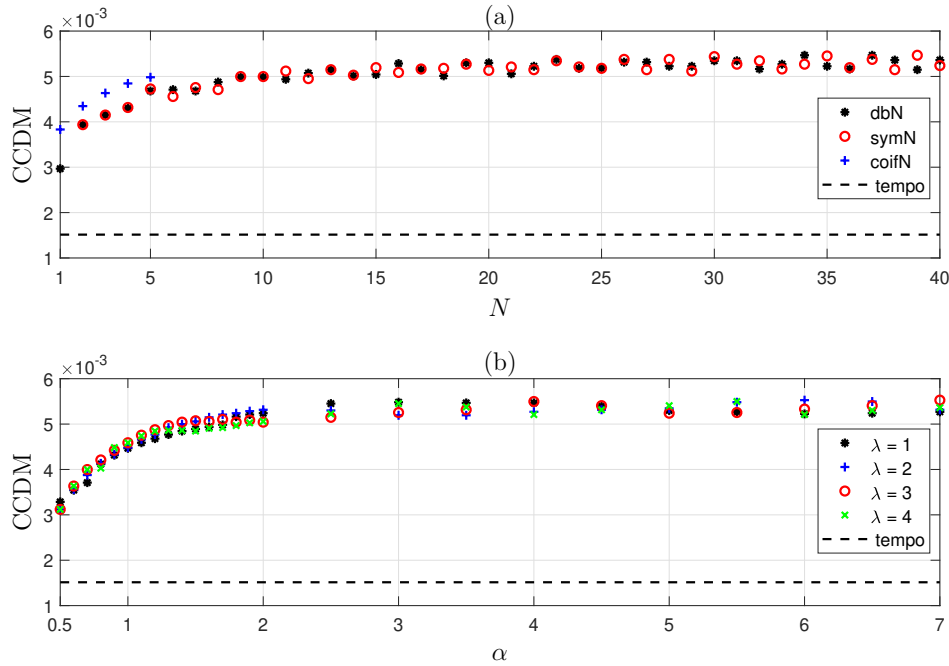
Conforme pode ser observado na Tabela 17, os valores dos CCDMs calculados no domínio wavelet são maiores que o triplo do CCDM obtido no domínio do tempo. Isso mostra como o domínio wavelet pode ser significativamente mais sensível à detecção de danos do que o domínio do tempo. Desse modo, o domínio wavelet pode ser mais apropriado na definição de um limiar para classificar a estrutura como íntegra ou danificada, conforme descrito por Vieira Filho, Baptista e Inman (2011).

Note que os resultados de maior CCDM obtido no domínio wavelet para cada família considerada são muito próximos. Entretanto, note que as wavelets propostas implicaram em CCDMs um pouco superiores do que as wavelets clássicas. Observando as características das wavelets ortogonais que implicaram no melhor resultado, pode-se notar que as mesmas possuem um número de momentos nulos relativamente alto. No caso das wavelets de Ely, desconsiderando ely_{3,0}25, os melhores resultados foram obtidos por wavelets que possuem filtros com larguras na faixa de transição relativamente pequenas. De fato, ely_{3,0}25 possui uma largura na faixa de transição mediana, mas foi o melhor resultado obtido entre as wavelets de Ely que apresentam os maiores desvios de ortogonalidade.

Na Figura 31 mostram-se os resultados obtidos por todas as wavelets utilizadas. No total foram utilizadas 40 wavelets Daubechies, 39 wavelets Symmlets e 5 Coiflets. Na Figura 31-(a) mostram-se os resultados obtidos pelas wavelets db N , sym N e coif N , para cada valor de N considerado. Para as wavelets de Ely foram utilizadas 26 wavelets, considerando $0,5 \leq \alpha \leq 7$ e L_δ^λ para $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Os resultados obtidos pelas wavelets de Ely são exibidos na Figura 31-(b) para cada α e L_δ^λ considerados. Desse modo, no total foram 84 wavelets ortogonais e 104 wavelets quase-ortogonais utilizadas. A linha tracejada nas Figuras 31-(a) e 31-(b) indica o valor de referência do CCDM calculado no domínio do tempo.

Analisando os resultados a partir da Figura 31-(a) pode-se observar que, conforme o número de momentos nulos das wavelets ortogonais aumenta, o CCDM tende também

Figura 31 – Resultados do CCDM obtido pelas wavelets (a) dbN , $symN$ e $coifN$ e (b) $ely_\alpha L$ para cada valor de N , α e L_δ^λ considerado. A linha tracejada indica o valor do CCDM calculado no domínio do tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

a crescer. Para os resultados obtidos pelas wavelets de Ely, pode-se dizer que o resultado do CCDM não depende apenas de α mas também do comprimento adotado. Nesse caso, optou-se pelos comprimentos que satisfazem L_δ^λ , a fim de verificar se diferentes desvios de ortogonalidade implicariam em mudanças significativas no comportamento geral dos resultados. Como pode ser verificado na Figura 31-(b) o comportamento geral dos resultados se mantém: o valor do CCDM tende a aumentar conforme diminui a largura da faixa de transição dos respectivos filtros wavelets.

Considerando as wavelets de Ely foi possível obter bons resultados com filtros que implicam em desvios de ortogonalidade relativamente grande. A wavelet $ely_{3,0}25$ implicou em um CCDM maior do que $db37$ e $sym39$, que foram os filtros wavelet ortogonais que obtiveram os melhores resultados. A vantagem de $ely_{3,0}25$ em relação a $db37$ e $sym39$, não está apenas na superioridade do resultado obtido, mas também no custo computacional, uma vez que $ely_{3,0}25$ é um filtro de ordem 25, enquanto que $db37$ e $sym39$ são filtros de ordem 74 e 78, respectivamente. Portanto, pode-se concluir que, para a aplicação explorada, as wavelets quase-ortogonais propostas são mais vantajosas do que as wavelets ortogonais exploradas.

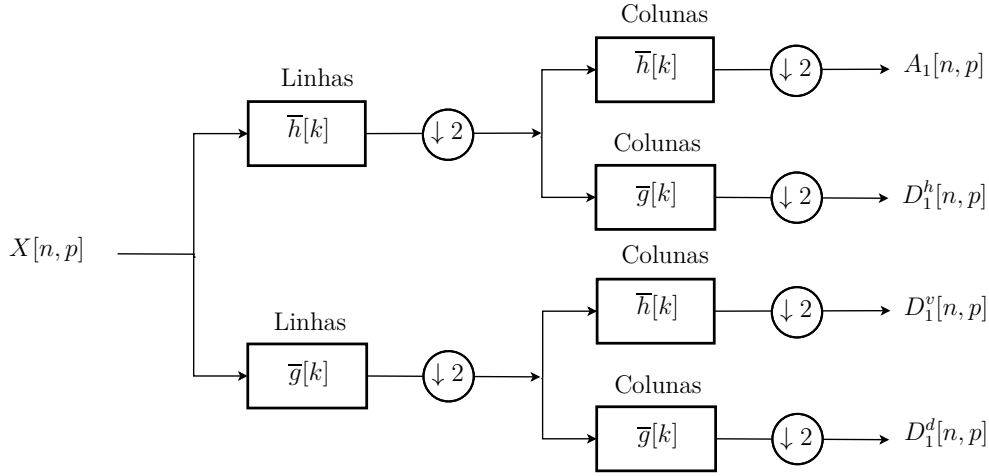
6.2 COMPRESSÃO DE IMAGENS E WAVELETS

O objetivo de uma técnica de compressão de imagens é reduzir a redundância dos dados da imagem para poder armazenar ou transmitir dados de forma eficiente. Isso resulta na redução do tamanho do arquivo e permite que mais imagens sejam armazenadas em uma determinada quantidade de espaço em memória. As técnicas de compressão podem ser categorizadas em dois tipos principais, dependendo da maneira de remoção de redundância, a saber: sem perdas (*lossless*) e com perdas (*lossy*) (WEINBERGER; SEROUSSI; SAPIRO, 2000).

Alguns métodos *lossless* mais comuns são os de Huffman, LZW, Aritmética e *Run-Length* (WU; OTOO; SHOSHANI, 2006). Aplicações práticas destes métodos envolvem programas computacionais de compressão populares, por exemplo programas que produzem arquivos do tipo “zip”. Por outro lado, a compressão *lossy* implica em imprecisões no sinal descomprimido. Porém, uma das vantagens dessa técnica sobre a *lossless* é que proporções de compressão muito mais elevadas podem ser obtidas. O arquivo de imagem JPEG, comumente usado para fotografias e outras imagens na *Web*, é uma imagem que utiliza o método *lossy* (MALIK; VERMA, 2012).

Muitos métodos eficientes de compressão de imagens utilizam a FWT como base. Por exemplo, o JPEG2000 é um padrão de compressão de imagens que utiliza a FWT como principal ferramenta, sendo considerado uma evolução do JPEG (LAWSON; ZHU, 2002). Depois disso, diversos trabalhos sobre compressão de imagens utilizando wavelets foram propostos (GRASEMANN; MIIKKULAINEN, 2005; KHASHMAN; DIMILILER, 2008; BLESSIE; NALINI; RAMESH, 2011; KABIR *et al.*, 2013; SELVI; NADARAJAN, 2017). Nesse caso, como as imagens são sinais bidimensionais, aplica-se a FWT bidimensional (FWT-2D) para decompô-las em diferentes níveis de resolução.

A FWT-2D é similar a FWT unidimensional já explorada nos capítulos anteriores. Na decomposição bidimensional, primeiro aplica-se a FWT em cada linha da imagem, e em seguida, ela é aplicada em cada coluna (MALLAT, 1989b). O processo de decomposição da FWT-2D é mostrado na Figura 32. Dado um sinal discreto bidimensional (imagem) $X[n, p]$, o resultado da decomposição no primeiro nível produz quatro sub-bandas: a de aproximação $A_1[n, p]$, e as de detalhes em três orientações, horizontal $D_1^h[n, p]$, vertical $D_1^v[n, p]$ e diagonal $D_1^d[n, p]$. Para o próximo nível de decomposição utiliza-se $A_1[n, p]$ como ponto de partida repetindo o procedimento anterior. O processo de reconstrução da FWT bidimensional também é semelhante ao caso unidimensional, onde os operadores de *upsampling* são utilizados.

Figura 32 – Processo de decomposição da FWT-2D.

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2.1 Método explorado

O método de compressão explorado é baseado no algoritmo proposto por Donoho e Johnstone (1994). Naquele trabalho, os autores utilizaram a técnica de limiar, sendo motivados pela ideia de que apenas poucos coeficientes no domínio wavelet contribuem com o sinal, considerando assim regras de limites que retêm apenas dados observados que excedem um múltiplo do nível de ruído. Nesse caso o limiar universal é definido por

$$\zeta = \rho \sqrt{2 \log_{10}(K)}, \quad (84)$$

sendo K a dimensão da imagem e ρ o perfil do ruído presente no sinal,

$$\rho = \frac{M_d(|w|)}{0.6745}, \quad (85)$$

onde M_d indica a mediana dos coeficientes wavelet w . Em Donoho e Johnstone (1994) foram apresentados dois tipos de limiares: limiar rígido (*hard thresholding*) e limiar suave (*soft thresholding*). Neste trabalho será utilizado o limiar rígido:

$$w_H = \begin{cases} w & \text{se } |w| > \zeta \\ 0 & \text{se } |w| \leq \zeta \end{cases}. \quad (86)$$

Conforme Equação (86), os coeficientes wavelet com valores absolutos menores que o limiar ζ são considerados componentes ruidosos, ficando o sinal bem descrito pelos coeficientes maiores que o limiar. Tal método é um dos mais utilizados na literatura especializada quando se trata de compressão de imagens (SILVA, 2008; SILVA; DUARTE; VILLARREAL, 2011; TRAVASSOS, 2016).

6.2.1.1 Métrica de avaliação

Para avaliar os resultados obtidos, será utilizada a relação sinal-ruído de pico (PSNR - *Peak Signal Noise Ratio*). Essa métrica é utilizada como referência para representar a relação entre a entrada e a saída em um processo de compressão com perdas, avaliando como a compressão introduziu distorções na imagem original. Matematicamente, a PSNR entre uma imagem $X[n, p]$ e sua aproximação $\hat{X}[n, p]$ pode ser calculada por

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_k^2}{\text{MSE}_{X, \hat{X}}} \right), \quad (87)$$

onde P_k representa o máximo valor possível de um pixel e $\text{MSE}_{X, \hat{X}}$ é o MSE entre $X[n, p]$ e $\hat{X}[n, p]$ (PEDRINI; SCHWARTZ, 2008).

Note que a PSNR é expressa em decibels (dB). Quanto maior for seu valor, melhor será a qualidade da imagem reconstruída. Em termos gerais os valores típicos para a PSNR estão entre 30 e 50 dB, sendo que, para valores $\text{PSNR} > 40$ dB qualifica-se uma compressão muito boa, e para $\text{PSNR} < 20$ dB estima-se uma compressão muito ruim (BULL, 2014).

6.2.1.2 Resultados e Discussões

As imagens de domínio público usadas nos testes foram obtidas em Petitcolas (2021). Tais imagens têm dimensões quadradas $K \times K$, com $K = 2^l$, onde l também é o número de níveis de decomposição da FWT-2D. Foram tomadas 5 imagens diferentes de 512x512 pixels.

Para comparar os resultados obtidos com os de wavelets ortogonais e biortogonais, algumas wavelets apresentadas no Capítulo 3 também serão utilizadas. As wavelets ortogonais utilizadas foram db6, db8, sym6, sym8, coif3 e coif4. Para as wavelets biortogonais foram escolhidas as wavelets bior2.2, bior2.8, bior3.9 e bior4.4. Várias wavelets de Ely foram testadas e a $\text{ely}_{0,915}$ foi a que apresentou melhores resultados. Os filtros wavelet gs_{1115} e NO5b também foram considerados.

Os valores médios da PSNR para as imagens consideradas são mostrados na Tabela 18. Cinco taxas de compressão diferentes foram consideradas e a média geral também foi calculada. Em geral, a wavelet bior4.4 obteve o melhor resultado entre as wavelets utilizadas. Como pode ser observado, para filtros ortogonais de comprimentos iguais, os filtros mais simétricos implicam melhores resultados. No caso biortogonal, os filtros com comprimentos menos dissimilares apresentaram melhores resultados. Como pode ser visto na Figura 7, os filtros bior2.2 e bior4.4 implicam menos distorções de ganho do que bior3.9. Na verdade, bior2.2 e bior4.4 são frequentemente usados em compressão de imagens e recomendados para JPEG-2000 (MALLAT, 1999).

Tabela 18 – Valores médios da PSNR para cinco imagens de 512x512 pixels com suas respectivas taxas de compressão.

Wavelet	Taxa de compressão (%)					Média geral
	50	60	70	80	90	
db6	50,90	47,11	43,82	40,32	35,98	43,63
db8	50,29	46,64	43,36	39,80	35,34	43,09
sym6	51,24	47,40	44,12	40,63	36,33	43,94
sym8	50,84	47,09	43,83	40,30	35,88	43,59
coif3	50,96	47,15	43,84	40,27	35,80	43,60
coif4	50,34	46,64	43,30	39,66	34,97	42,98
bior2.2	51,15	47,51	44,11	40,63	36,50	43,98
bior2.8	50,19	46,44	43,08	39,55	35,24	42,90
bior3.9	48,79	45,36	42,20	38,78	34,41	41,91
bior4.4	51,78	47,82	44,48	41,01	36,75	44,37
NO5b	49,34	45,92	42,56	38,82	33,88	42,10
gs ₁₁ 15	49,68	46,87	43,88	40,46	36,15	43,41
ely _{0,9} 9	15,84	15,84	15,84	15,83	15,80	15,83
ely _{0,9} 15	50,79	47,23	43,97	40,46	36,13	43,72
ely _{0,9} 21	48,78	46,17	43,27	39,83	35,39	42,69

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que é possível obter resultados satisfatórios usando wavelets quase-ortogonais. A wavelet ely_{0,9}15 foi a que obteve melhores resultados entre as wavelets quase-ortogonais. Tal wavelet também obteve melhores resultados médios gerais do que algumas wavelets ortogonais e biortogonais: db6, db8, sym8, coif3, coif4, bior2.8, bior3.9. Assim, embora não impliquem perfeita reconstrução, algumas wavelets quase-ortogonais também podem obter resultados significativos em aplicações que envolvam o processo de reconstrução.

A wavelet que apresentou o pior resultado foi ely_{0,9}9. Para melhor compreender os resultados obtidos, os valores de $H_L(\pi)$ e $\delta_H[L]$ para cada filtro wavelet quase-ortogonal utilizado são mostrados na Tabela 19. Observe que ely_{0,9}9 apresenta maiores desvios de ortogonalidade entre as wavelets quase-ortogonais utilizadas. Isso explica o fato de implicar menores valores de PSNR, uma vez que pode comprometer significativamente o processo de reconstrução.

Tabela 19 – Desvios de ortogonalidade das wavelets quase-ortogonais.

Métrica	ely _{0,9} 9	ely _{0,9} 15	ely _{0,9} 21	gs ₁₁ 15	NO5b
$H_L(\pi)$	0,018421	0,001386	0,000555	0,000571	0
$\delta_H[L]$	0,026112	0,004294	0,000164	0,009148	0,000275

Fonte: Elaborado pelo autor.

Embora NO5b e ely_{0,9}21 tenham menores desvios de ortogonalidade, tais filtros apresentaram resultados gerais inferiores a ely_{0,9}15 e gs₁₁15. Assim, no contexto de compressão de imagens usando NOWFBs, não apenas desvios de ortogonalidade devem ser considerados, mas também um comprimento de filtro apropriado. Isso também pode ser observado para as wavelets ortogonais.

7 CLASSIFICAÇÃO DE DISTÚRBIOS DE TENSÃO

Neste capítulo será apresentado um novo método para a classificação de distúrbios de tensão em sistemas elétricos de potência. Baseada na energia dos coeficientes da CWT, uma nova abordagem para extração de características no domínio wavelet é proposta. A estratégia consiste na obtenção da representação wavelet dos sinais de distúrbios em um conjunto apropriado e limitado de escalas. Para avaliar a metodologia proposta, serão utilizadas diversas funções wavelets ortogonais, biortogonais, quase-ortogonais e não-ortogonais. Assim, poderão ser determinadas as wavelets mais apropriadas para o método proposto. Para as wavelets quase-ortogonais, serão exploradas wavelets com diferentes desvios de ortogonalidade a fim de verificar os resultados associados.

7.1 EXTRAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS NO DOMÍNIO WAVELET

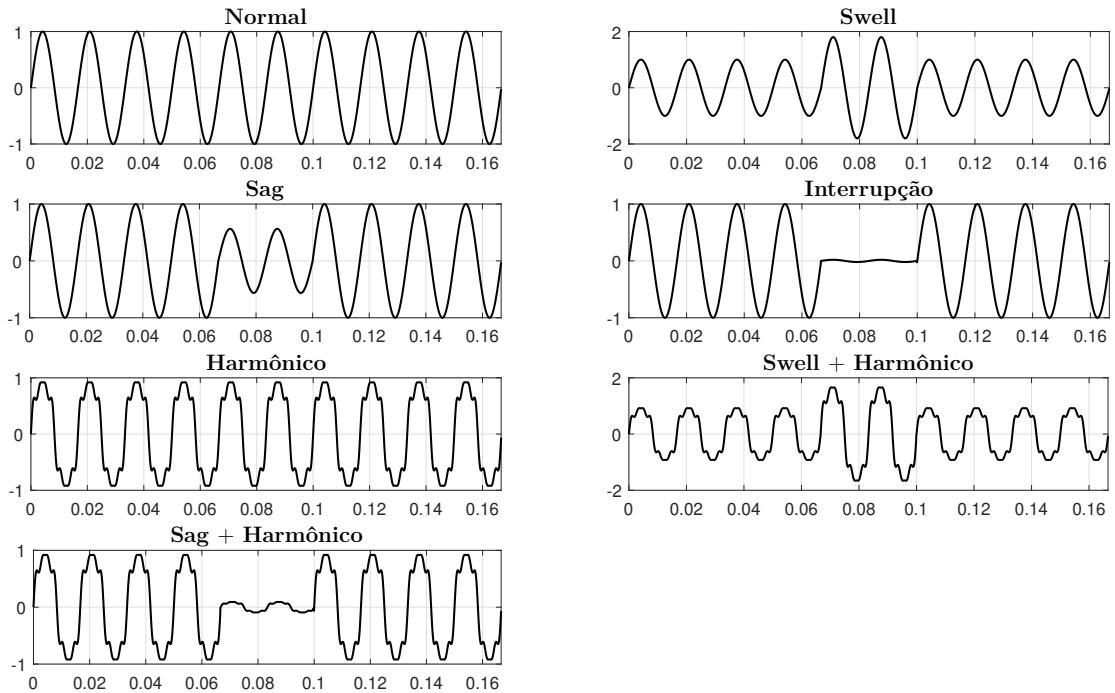
Distúrbios de tensão são fenômenos frequentes que podem ocorrer em sistemas de energia elétrica. Fatores como aumento de cargas não lineares e instalação de equipamentos de controle modernos requerem uma qualidade de energia alta nos sistemas de geração, transmissão e distribuição. As consequências dos distúrbios podem causar sérias perdas em diferentes segmentos da sociedade. O dano é claramente perceptível em grandes instalações públicas ou privadas, onde tais distúrbios podem causar o mau funcionamento ou a parada total de equipamentos. Nas piores situações, como em hospitais, os distúrbios podem representar uma ameaça à vida dos pacientes.

De modo geral, o termo qualidade de energia elétrica (QEE) compreende a qualidade das formas de onda de tensão e corrente em um sistema elétrico (DUGAN; MCGRANAGHAN; BEATY, 1996). Dependendo da magnitude e da forma de onda, os distúrbios de tensão, por exemplo, podem ser classificados como *swells* (elevação da tensão), *sags* (afundamento da tensão) ou interrupções e, dependendo de sua duração, podem ter duração instantânea, momentânea ou temporária (IEEE[...], 2019).

A distorção harmônica é outro exemplo de distúrbio de tensão que pode produzir distorção da forma de onda. Pode ocorrer também uma combinação de diferentes distúrbios, como *swell* com harmônico ou *sag* com harmônico. Na Figura 33 estão as formas de onda da operação normal (onde não há distúrbio) e dos distúrbios explorados neste trabalho: *swell*, *sag*, interrupção, harmônico, *swell* com harmônico e *sag* com harmônico.

A partir do monitoramento da forma de onda de tensão, a análise da QEE envolve duas etapas importantes: detecção e classificação dos distúrbios que aparecem durante o monitoramento. Assim, os sistemas de classificação devem ser eficientes para classificar os diferentes tipos de distúrbios presentes nas tensões.

Figura 33 – Formas de onda da operação normal e dos distúrbios explorados neste trabalho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A extração de características de um sinal de tensão com distúrbio fornece informações que ajudam a reconhecer as falhas responsáveis pelos distúrbios presentes. Consequentemente, a extração de características é o componente mais importante para o projeto de um sistema de classificação de distúrbios de tensão. Vários métodos de extração de características baseados na transformada wavelet têm sido propostos na literatura especializada.

As primeiras aplicações de wavelets em sinais de sistemas de energias foram baseadas na inspeção visual no plano tempo-frequência para análise de QEE (SANTOSO; POWERS; GRADY, 1994; SANTOSO *et al.*, 1996; PILLAY; BHATTACHARJEE, 1996). Três problemas principais surgem quando a transformada wavelet é usada para a classificação de distúrbios: a seleção da função wavelet, a eficiência da extração de características e a redução do tempo para a classificação (BARROS; DIEGO; APRAIZ, 2012).

Nos últimos anos, a FWT tem sido usada como uma ferramenta para construir vetores característicos para a classificação de distúrbios de tensão (ABDEL-GALIL *et al.*, 2004; HE; STARZYK, 2006; UYARA; YILDIRIMA; GENCOGLUB, 2008; MARKOVSKA; TAŠKOVSKI, 2018). No contexto das análises de QEE, a FWT é mais fre-

quentemente utilizada do que a CWT. A preferência pela FWT se dá pelo custo computacional, uma vez que, para a CWT ele pode aumentar quando muitas escalas são usadas para decomposição. No entanto, alguns trabalhos apresentam metodologias eficientes para análises de QEE usando tal transformada (HUANG; HSIEH; HUANG, 1998; ANGRISANI; DAPONTE; D'APUZZO, 2001; LIN; WANG, 2006; TSE; ZHOU; LAI, 2010).

Um modelo teórico para sete distúrbios de tensão foi proposto por Abdel-Galil *et al.* (2004). Desde então, muitos trabalhos têm usado essas equações algébricas em combinação com a FWT para apresentar métodos eficientes para análise de QEE (HE; STARZYK, 2006; UYARA; YILDIRIMA; GENCOGLUB, 2008; MARKOVSKA; TAŠKOVSKI, 2018; ERISTI AYSEGÜL UÇAR, 2010; DECANINI *et al.*, 2011; SAINI; BENIWAL, 2017).

Em Abdel-Galil *et al.* (2004), a FWT foi usada para o processo de extração de características, e um classificador do tipo árvore de decisão foi escolhido para a classificação dos distúrbios. Nesse caso, a construção dos vetores característicos foi baseada na energia dos coeficientes wavelet em cada nível de decomposição. Posteriormente, muitos trabalhos usaram uma estratégia semelhante proposta por Abdel-Galil *et al.* (2004) para projetar sistemas de classificação de distúrbios de tensão (HE; STARZYK, 2006; UYARA; YILDIRIMA; GENCOGLUB, 2008; MARKOVSKA; TAŠKOVSKI, 2018).

Na metodologia proposta por He e Starzyk (2006), um método de classificação denominado SOLAR foi usado e os resultados obtidos por este sistema também são comparados com outros resultados obtidos pela classificação com máquinas de vetores de suporte. Os autores também testaram o método apresentado com sinais ruidosos e mostraram que não há diferença estatisticamente significativa no desempenho quando wavelets diferentes são escolhidas.

Em Uyara, Yildirim e Gencoglu (2008), uma métrica baseada na entropia dos coeficientes wavelet é usada para o método de extração de características, e a classificação é realizada por redes neurais. Da mesma forma que He e Starzyk (2006), os autores exploraram sinais ruidosos e várias wavelets foram testadas. Em Markovska e Taškovski (2018) a extração de características foi baseada na entropia da energia dos coeficientes wavelet, e um classificador do tipo Floresta Aleatória foi usado no estágio de classificação.

7.2 MÉTODO PROPOSTO

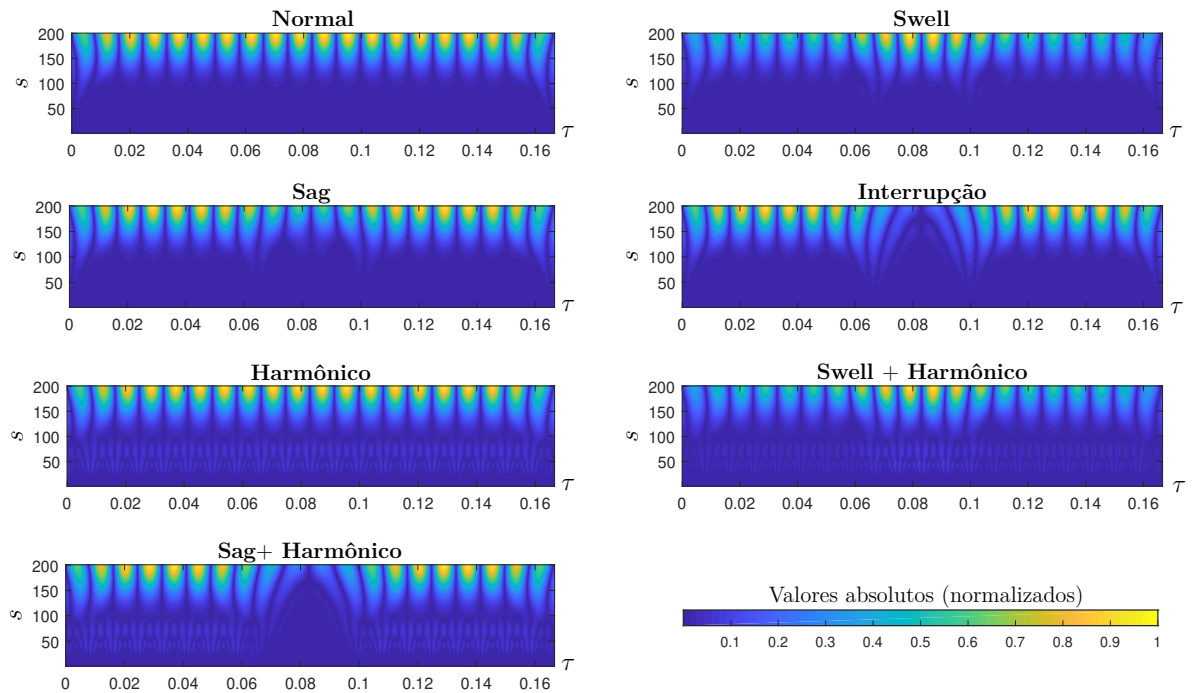
A construção de vetores característicos é o processo básico para a classificação dos distúrbios de tensão. Para os métodos que utilizam a FWT nesse propósito, os sinais de tensão são decompostos em vários níveis de resolução, sendo os coeficientes wavelet resultantes caracterizados por uma métrica de avaliação. Em Abdel-Galil *et al.* (2004) e

He e Starzyk (2006), por exemplo, os autores utilizaram a energia dos coeficientes wavelet, e em Uyara, Yildirima e Gencoglu (2008) e Markovska e Taškovski (2018), os autores utilizaram métricas de entropia para a construção dos vetores característicos.

Ao contrário dos métodos que utilizam a FWT, o método proposto se baseia na CWT para a construção de vetores característicos. Na metodologia proposta, as escalas escolhidas para a decomposição da CWT são aquelas que representam a frequência natural e suas harmônicas. A estratégia adotada foi deduzida de forma qualitativa explorando-se a redundância da transformada, conforme será descrito adiante.

Na Figura 34 são exibidos os escalogramas obtidos por meio da CWT aplicada aos sinais mostrados na Figura 33. Tais resultados foram obtidos pela wavelet Morlet considerando as escalas $1 \leq s \leq 200$. Os coeficientes da CWT mostrados na Figura 34 foram normalizados, sendo tomado os valores absolutos para melhor comparação.

Figura 34 – Escalogramas da operação normal e dos distúrbios de tensão explorados neste trabalho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

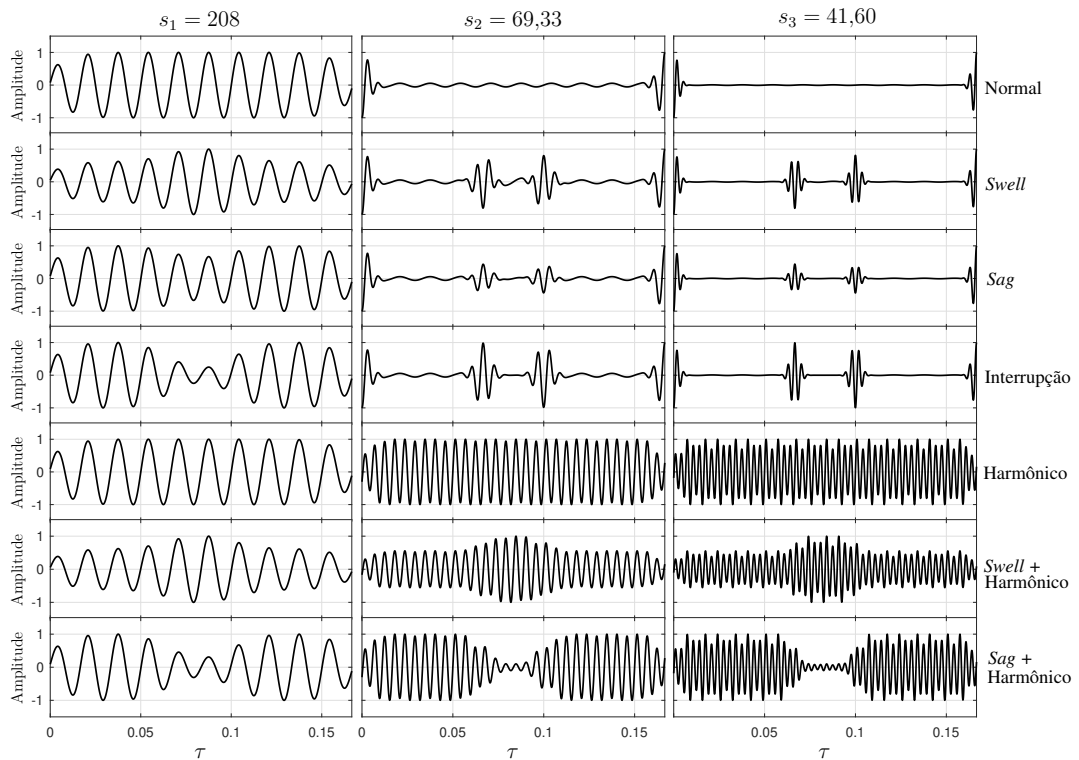
Observando os resultados dos escalogramas, note que a energia dos coeficientes wavelet está mais concentrada em regiões de escalas $s > 150$. Essas escalas representam, de certo modo, a componente de frequência natural oscilatória dos sinais. Para distúrbios com harmônicos, é possível notar uma pequena contribuição de energia em escalas intermediárias (aproximadamente $30 < s < 80$). Qualitativamente, é possível verificar resultados distintos para cada distúrbio no domínio wavelet. Assim, pode-se explorar essa

diferença para construir vetores característicos.

De fato, uma das desvantagens em se utilizar a CWT é que ela pode aumentar o custo computacional quando muitas escalas são consideradas no processo de decomposição. No entanto, como tal transformada é redundante, os vetores característicos podem ser construídos por meio de um conjunto de escalas adequado e limitado, permitindo assim, reduzir o custo computacional sem comprometer as análises.

Para mostrar um exemplo de representação wavelet em escalas específicas, na Figura 35 mostra-se os coeficientes da CWT dos resultados obtidos na Figura 34 nas escalas $s_1 = 208$, $s_2 = 69,33$ e $s_3 = 41,60$. Essas escalas foram obtidas por meio da relação escala-frequência descrita em (11) e representam a frequência natural (s_1) e suas duas primeiras harmônicas (s_2 e s_3). Como pode ser visto, é possível explorar um conjunto pequeno de escalas que destaca as diferenças entre os sinais de distúrbios no domínio wavelet.

Figura 35 – Coeficientes normalizados da CWT nas escalas $s_1 = 208$ (coluna esquerda), $s_2 = 69,33$ (coluna central) e $s_3 = 41,60$ (coluna direita).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando o comportamento dos coeficientes da CWT mostrados na Figura 35, é possível verificar alguns padrões:

Frequência fundamental - s_1 : a representação wavelet da operação normal e dos dis-

túrbios *swell*, *sag* e interrupção estão próximas do sinal no domínio do tempo, conforme pode ser observado na Figura 33. Observe também que, no domínio wavelet, os distúrbios harmônico, *swell* + harmônico e *sag* + harmônico estão muito próximos da operação normal, *swell* e interrupção, respectivamente.

Harmônicas - s_2 e s_3 : para os resultados obtidos pelas escalas que representam a primeira e a segunda harmônica, pode-se observar o comportamento esperado da CWT em escalas mais baixas, ou seja, a detecção e localização das mudanças bruscas dos sinais. Isso pode ser observado para os distúrbios onde isso ocorre: *swell*, *sag* e interrupção. Para os distúrbios contaminados com harmônicos, têm-se uma oscilação mais expressiva dos coeficientes wavelet do que os sinais que não estão contaminados com harmônicos. No entanto, existem diferenças de amplitudes no intervalo onde ocorre o *swell* (aumento das amplitudes dos coeficientes wavelet) e o *sag* (diminuição das amplitudes dos coeficientes wavelet).

Com base na distinção dos resultados apresentados, propõe-se um novo método de extração de características no domínio wavelet, usando um conjunto de escalas apropriado para calcular a CWT, onde as escalas escolhidas são aquelas que representam a frequência natural e suas harmônicas. Para tal propósito, pode-se utilizar a relação escala-frequência (11). Desta forma, a partir de um sinal de distúrbio de tensão $v(t)$, as escalas de decomposição são determinadas a partir da relação:

$$s_k = \frac{\eta}{T_s k f_N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, M, \quad (88)$$

onde, s_k é a escala relativa a componente de frequência $k f_N$, f_N é a frequência natural e M indica o último número multiplicativo da frequência natural.

Conforme pode ser observado na Figura 34, a componente de frequência natural é aquela que apresenta a maior parte da energia do sinal de tensão. Portanto, tal componente deve ser considerada para a construção dos vetores característicos. De acordo com a Figura 35, a exploração das componentes das frequências harmônicas é uma estratégia útil que permite distinguir melhor os distúrbios contaminados com harmônicos.

Diversas métricas podem ser usadas para caracterizar os coeficientes wavelet. Para o método proposto, assim como em Abdel-Galil *et al.* (2004) e He e Starzyk (2006), a energia será escolhida para tal propósito. Assim, a partir dos coeficientes wavelet $W_v^\psi(s_k, \tau)$ obtidos para cada escala s_k considerada, a energia dos mesmos $E_v(s_k)$ é calculada:

$$E_v(s_k) = \sum_{\tau} |W_v^\psi(s_k, \tau)|^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (89)$$

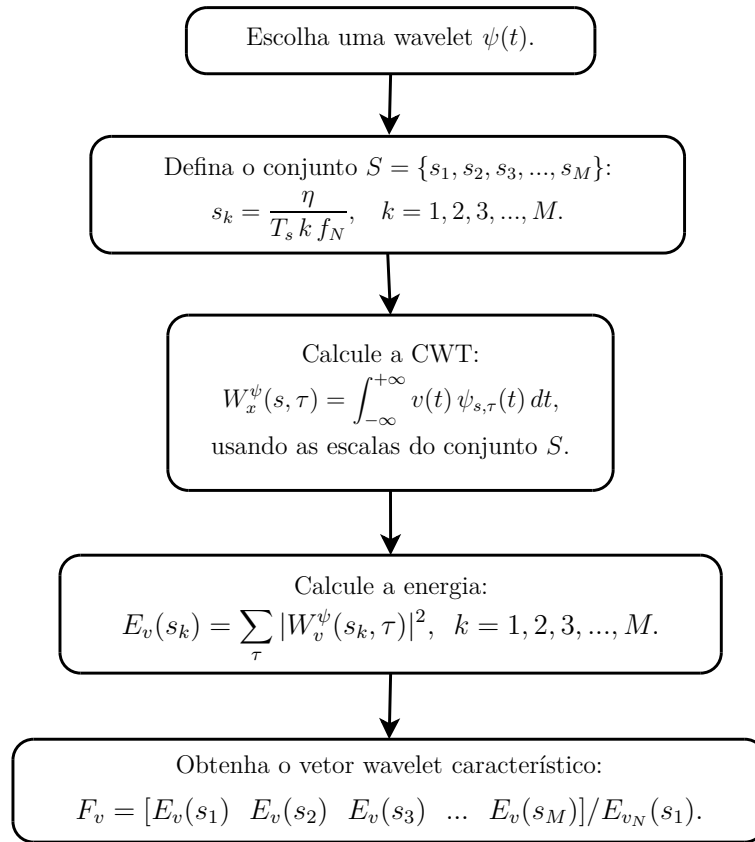
Após a obtenção de $E_v(s_k)$, tal valor é normalizado por $E_{v_N}(s_1)$, que representa a energia do vetor da operação normal. Desta forma, a construção dos vetores característicos

proposto é definida como (90):

$$F_v = [E_v(s_1) \ E_v(s_2) \ E_v(s_3) \ \dots \ E_v(s_M)]/E_{v_N}(s_1). \quad (90)$$

O processo de normalização utilizado é uma estratégia comum no processo de classificação de distúrbios de tensão. Por exemplo, em Abdel-Galil *et al.* (2004) os vetores característicos são normalizados por um coeficiente que também representa a energia da operação normal. Um resumo da metodologia proposta para a construção dos vetores característicos é apresentado na Figura 36.

Figura 36 – Metodologia proposta para a construção de vetores característicos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

7.3 SIMULAÇÃO E ANÁLISES

Antes que qualquer processo de classificação seja aplicado, é necessário detectar os distúrbios de tensão nos sistemas de energia elétrica. Neste trabalho, a metodologia proposta é aplicada na etapa de classificação e, portanto, assume-se que a detecção dos distúrbios já foi realizada. A geração dos sinais de tensão e a construção dos vetores característicos foram desenvolvidas no MATLAB[®]. A classificação foi realizada pelo *soft-*

ware WEKA 3.8.4, que possui diversos algoritmos de mineração e classificação de dados implementados em java (FRANK; HALL; WITTEN., 2016).

7.3.1 Geração dos sinais

Para avaliar o método proposto, serão considerados seis tipos de distúrbios de tensão de acordo com o modelo matemático proposto por Abdel-Galil *et al.* (2004). Na Tabela 20 são fornecidos os modelos de geração dos sinais com seus respectivos parâmetros de controle, sendo $u(t)$ a função degrau unitário.

Tabela 20 – Modelo matemático dos distúrbios de tensão.

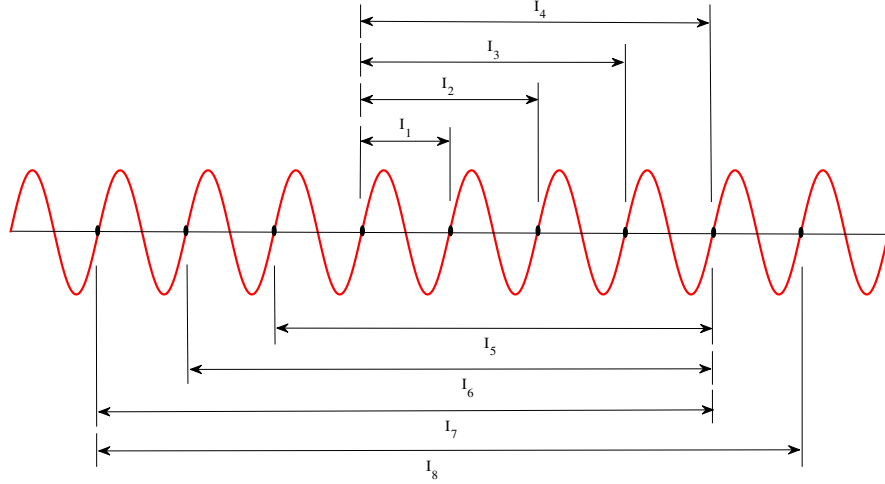
Distúrbio	Modelo	Parâmetro
Normal (C1)	$v_1(t) = \text{sen}(\varpi t)$	$f_N = 60 \text{ Hz}, \varpi = 2\pi f_N$
<i>Swell</i> (C2)	$v_2(t) = [1 + A_2(u(t - t_1) - u(t - t_2))] v_1(t)$	$0,1 \leq A_2 \leq 0,8$
<i>Sag</i> (C3)	$v_3(t) = [1 - A_3(u(t - t_1) - u(t - t_2))] v_1(t)$	$0,1 \leq A_3 \leq 0,9$
Interrupção (C4)	$v_4(t) = [1 - A_4(u(t - t_1) - u(t - t_2))] v_1(t)$	$0,9 < A_4 \leq 1$
Harmônico (C5)	$v_5(t) = \sum_{k=1,3,5,7} B_k \text{sen}(k \varpi t)$	$0,05 \leq B_3, B_5, B_7 \leq 0,15$
<i>Swell</i> + Harmônico (C6)	$v_6(t) = v_2(t) v_5(t)$	$\sum B_k^2 = 1$
<i>Sag</i> + Harmônico (C7)	$v_7(t) = v_3(t) v_5(t)$	$T \leq t_2 - t_1 \leq 9T$

Fonte: Adaptado de Abdel-Galil *et al.* (2004)

Neste trabalho, os sinais de distúrbios são amostrados a uma taxa de 256 amostras/ciclo e a frequência natural $f_N = 60 \text{ Hz}$. Para cada sinal, 10 ciclos de frequência de energia são considerados, totalizando assim 2560 amostras. Logo, a frequência de amostragem escolhida é $F_s = 15,36 \text{ kHz}$. Em Abdel-Galil *et al.* (2004), He e Starzyk (2006), Uyara, Yildirim e Gencoglu (2008) e Markovska e Taškovski (2018), esta mesma discretização foi realizada, sendo que em He e Starzyk (2006), Uyara, Yildirim e Gencoglu (2008) e Markovska e Taškovski (2018), a frequência natural adotada foi $f_N = 50$, e 16 ciclos de potência foram usados em Uyara, Yildirim e Gencoglu (2008).

Note que os distúrbios explorados neste trabalho ocorrem no intervalo $[t_1, t_2]$ onde $T \leq t_2 - t_1 \leq 9T$, com T denotando um ciclo de potência. A vantagem de usar um modelo matemático é que ele introduz flexibilidade cobrindo uma ampla gama de variações dos sinais de distúrbios a serem estudados.

Considerando diferentes parâmetros de acordo com a Tabela 20, foram gerados 200 sinais de cada tipo de distúrbio para treinamento e outros 200 para teste. Para a geração destes sinais, foram explorados oito intervalos de tamanhos diferentes. Os intervalos explorados I_m para $m = 1, 2, 3, \dots, 8$, onde m também indica os respectivos números de ciclos, são mostrados na Figura 37.

Figura 37 – Intervalos dos sinais de distúrbios.

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.3.2 Construção dos vetores característicos

Como pode ser visto na Tabela 20, os sinais do modelo matemático podem envolver quatro frequências essenciais: $k f_N$, para $k = 1, 3, 5, 7$. Assim, usando a Equação (88), define-se um conjunto de escalas $\{s_1, s_3, s_5, s_7\}$ que caracterizará cada uma das componentes de frequência dos sinais explorados. Para analisar os resultados da classificação para diferentes tamanhos de vetores característicos, quatro tipos diferentes serão explorados:

- $F1_{v_i} = E_{v_i}(s_1)/E_{v_1}(s_1);$
- $F2_{v_i} = [E_{v_i}(s_1) \ E_{v_i}(s_3)]/E_{v_1}(s_1);$
- $F3_{v_i} = [E_{v_i}(s_1) \ E_{v_i}(s_3) \ E_{v_i}(s_5)]/E_{v_1}(s_1);$
- $F4_{v_i} = [E_{v_i}(s_1) \ E_{v_i}(s_3) \ E_{v_i}(s_5) \ E_{v_i}(s_7)]/E_{v_1}(s_1);$

O vetor $F1_{v_i}$ é construído considerando apenas a decomposição na escala s_1 , que corresponde à representação wavelet na frequência normal f_N . Já o vetor $F2_{v_i}$ é construído utilizando as escalas s_1 e s_3 . Para o vetor $F3_{v_i}$ é considerado o conjunto de escalas $\{s_1, s_3, s_5\}$. Finalmente, $F4_{v_i}$ é o vetor característico que considera todas as escalas do conjunto $S = \{s_1, s_3, s_5, s_7\}$. Assim, será possível determinar qual tipo de vetor característico implica resultados eficientes, considerando precisão e fatores de custo computacional.

7.3.3 Estágio da Classificação

Nesta fase, o classificador do tipo árvore de decisão é escolhido para as classificações dos diferentes tipos de distúrbios de tensão. O algoritmo ID3 (QUINLAN, 1986) e sua extensão C4.5 (QUINLAN, 1993) são amplamente usados para projetar classificadores do tipo árvore de decisão. Aqui, o algoritmo selecionado para a classificação é o C4.5, que é o mesmo algoritmo usado por Abdel-Galil *et al.* (2004). Tal algoritmo usa um método de divisão e conquista para aumentar a capacidade preditiva das árvores de decisão. Assim, um problema é dividido em vários subproblemas, criando sub-árvores no caminho entre a raiz e as folhas da árvore de decisão (QUINLAN, 1993).

7.3.4 Resultados e Discussões

Algumas das famílias wavelet apresentadas nos Capítulos 2 e 3 serão usadas para decompor cada tipo de sinal com distúrbio (de C1 a C7, conforme na Tabela 20). Serão utilizadas as wavelets de Meyer, Morlet (parte real da forma reduzida), Mexican hat, gaus N , db N , sym N , coif N , bior $Nr.Nd$ e ely $_{\alpha}L$. Assim, diferentes wavelets serão consideradas para determinar aquelas com melhores e piores desempenho.

Na Tabela 21 são mostrados os resultados gerais de precisão da classificação para cada tipo de vetor característico considerado. Para cada família de wavelets, são exibidos os piores e os melhores resultados obtidos em cada tipo de vetor característico. Em negrito destaca-se o melhor resultado obtido para cada vetor característico.

Observe que, independentemente da função wavelet, os resultados da classificação obtidos de $F1_{v_i}$ implicam uma precisão abaixo de 72%. A wavelet ely $_{0,5}29$ nesse caso, foi a que apresentou pior resultado obtido. Pode-se dizer então que, não é indicado utilizar o vetor do tipo $F1_{v_i}$ na prática. Assim, utilizando apenas uma escala de decomposição não se obtém uma boa distinção entre os sinais. Isso pode ser verificado qualitativamente na Figura 35.

Por outro lado, exceto para as wavelets com baixos momentos nulos (Mexican hat, db1, coif1, bior1.3) e ely $_{0,5}29$, utilizando $F2_{v_i}$ foi possível obter bons resultados, sendo superiores a 90% na precisão geral de classificação. Note também que, para esse mesmo tipo de vetor característico, foi possível obter uma precisão acima de 99% utilizando wavelets que apresentam números de momentos nulos relativamente maiores: Meyer, gaus7, gaus8, db5, db20, sym5, sym20, coif5 e bior5.5. Também foi possível obter resultados com tal precisão utilizando as wavelets de Morlet, ely $_{1,2}17$, ely $_{1,9}29$ e ely $_{3,5}57$.

Considerando os resultados da classificação de $F3_{v_i}$ e $F4_{v_i}$, pode-se observar uma precisão superior a 99% para a maioria das wavelets utilizadas. Também é possível observar uma evolução significativa da precisão para wavelets com número de momentos nulos

Tabela 21 – Resultados da classificação em termos de porcentagem usando diferentes famílias de wavelets.

Wavelet	F1 _{v_i}	F2 _{v_i}	F3 _{v_i}	F4 _{v_i}
Morlet	69,21	99,21	99,21	99,43
Meyer	71,36	99,14	99,14	99,14
Mexican hat	70,57	79,57	99,00	99,43
gaus1	71,64	90,07	97,43	98,14
gaus7	70,14	99,43	99,57	99,57
gaus8	69,64	99,43	99,43	99,43
db1	71,07	73,21	92,36	97,29
db3	71,14	90,29	99,43	99,36
db5	70,93	99,43	99,29	99,29
db20	70,71	99,36	99,36	99,43
sym3	71,14	90,29	99,43	99,36
sym5	70,93	99,29	99,29	99,29
sym20	70,43	99,36	99,36	99,43
coif1	71,07	84,29	99,21	99,36
coif3	71,00	98,50	98,50	98,57
coif5	70,79	99,14	99,14	99,71
bior1.3	71,00	77,14	95,86	98,07
bior3.1	69,50	97,57	99,43	99,43
bior5.5	70,43	99,21	99,14	99,14
ely _{0,5} 29	58,21	82,21	96,50	98,43
ely _{1,2} 17	70,93	99,21	99,36	99,43
ely _{1,9} 29	70,71	99,50	99,50	99,50
ely _{3,0} 45	70,86	98,71	99,79	99,79
ely _{3,5} 57	70,79	99,29	99,29	99,36
ely _{7,0} 105	70,93	97,64	98,36	98,36

Fonte: Elaborado pelo autor.

baixos. Observando os resultados de classificação mostrados na Tabela 21, pode-se notar que ely_{3,0}45 apresenta a melhor precisão geral, 99,79%, usando F3_{v_i} e F4_{v_i}. Entretanto, também foi possível obter uma precisão muito próxima deste contexto, por meio de F2_{v_i} para algumas wavelets, sendo que ely_{1,9}29 nesse caso foi a wavelet que obteve o melhor resultado 99,50%.

Portanto, pode-se dizer que, utilizando o vetor característico F2_{v_i}, é possível obter bons resultados. Isso sugere que, utilizando apenas duas escalas para a decomposição dos sinais, pode-se extrair vetores característicos eficientes na classificação dos distúrbios de tensões.

7.4 COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO

Com o objetivo de comparar os resultados da metodologia proposta, na Tabela 22 apresentam-se os resultados das classificações obtidas em Abdel-Galil *et al.* (2004), He e Starzyk (2006), Uyara, Yildirim e Gencoglu (2008) e Markovska e Taškovski (2018). A precisão para cada classe de distúrbio e a precisão geral das classificações são exibidas.

Os métodos comparados incluem os mesmos sinais de distúrbios gerados pelo mo-

Tabela 22 – Comparação de desempenho de resultados de classificação.

Distúrbios	Método 2004	Método 2006	Método 2008	Método 2018	Método proposto
C1	100	100	100	100	100
C2	97	100	96,50	94,50	100
C3	76,50	87	88	100	98
C4	90	80,50	85,50	100	99
C5	100	100	100	99	100
C6	98	100	100	100	99,50
C7	71,50	97	100	99	100
Média geral	90,4	94,93	95,71	98,93	99,50

Fonte: Elaborado pelo autor.

delo matemático de Abdel-Galil *et al.* (2004), e com a mesma quantidade de sinais utilizados para treinamento e teste na etapa de classificação. Os resultados da metodologia proposta são referentes ao vetor característico $F2_{v_i}$ utilizando a wavelet $ely_{1,929}$. Comparando os resultados, pode-se dizer que o método proposto apresenta uma precisão maior do que os outros métodos.

O número de níveis de decomposição é importante, pois quanto maior esse número, mais cálculos são necessários, resultando em maior custo computacional. Na metodologia proposta por Abdel-Galil *et al.* (2004) os autores utilizaram a wavelet de Haar para 11 níveis de decomposição. Em He e Starzyk (2006) e Uyara, Yildirim e Gencoglu (2008) os resultados apresentados foram obtidos usando a wavelet db4 para 10 e 12 níveis de decomposição, respectivamente. Porém, em He e Starzyk (2006) os autores mostram que é possível obter uma boa precisão de classificação (em torno de 90%) usando apenas 6 níveis de decomposição. Em Markovska e Taškovski (2018) os autores também usaram 6 níveis de decomposição.

Pelo método proposto, embora seja utilizada a CWT, é possível obter alta precisão utilizando apenas duas escalas para decomposição. Desse modo, utilizando tal método para a construção de vetores característicos, tem-se um custo computacional relativamente baixo para este propósito.

A escolha da wavelet é outra etapa importante para o estágio de classificação. Para os métodos que utilizam a FWT, o custo computacional tende a ser maior para wavelets com altos números de momentos nulos, uma vez que o comprimento do filtro wavelet aumenta à medida que se aumenta o número de momentos nulos da wavelet associada. No caso da CWT, quanto maior for o suporte efetivo da wavelet, maior será também o custo computacional para a decomposição dos sinais.

Diferentes filtros wavelet também foram usados em He e Starzyk (2006) e Uyara, Yildirim e Gencoglu (2008) para testar o desempenho dos sistemas de classificação. Em He e Starzyk (2006) foi mostrado que não há diferença estatística significativa no desempenho da classificação para diferentes escolhas dos filtros wavelet. Assim, neste caso,

o filtro de Haar é mais indicado devido ao baixo custo computacional. Em Uyara, Yildirima e Gencoglu (2008), os filtros wavelet biortogonais bior4.4 e bior5.5 apresentaram precisão um pouco melhor que a wavelet db4. No entanto, os autores indicaram também db4 ou a db5 por apresentarem mais vantagens em termos de custo computacional. Filtros Daubechies também foram usados em Markovska e Taškovski (2018).

Utilizando $F2_{v_i}$, a wavelet que obteve melhor resultado foi a $ely_{1,9}29$, com precisão de 99,50%. Tal wavelet possui suporte de comprimento 29. Conforme pode ser observado na Tabela 10, o filtro wavelet associado implica $\delta_H[29] < 0,01$. Foi observado que é possível que os desempenhos das wavelets quase-ortogonais mudem caso os respectivos suportes também mudem. Isso também pode ser observado para wavelets que não possuem suporte compacto, como as wavelets Meyer, Morlet, Mexican hat e $gausN$.

Na Tabela 23 são exibidos os resultados da classificação obtidos pelas wavelets de Ely considerando diferentes comprimentos do tipo L_δ^λ . O valor de cada comprimento pode ser obtido na Tabela 9 de acordo com as tolerâncias de desvios de ortogonalidade.

Tabela 23 – Resultados obtidos pelas wavelets de Ely para diferentes tamanhos de suporte.

Wavelet	L_δ^2	L_δ^3	L_δ^4
$ely_{1,2}L$	99,21	98,40	99,14
$ely_{1,9}L$	99,50	99,50	99,43
$ely_{3,0}L$	98,71	98,80	99,43
$ely_{3,5}L$	99,29	99,20	99,21
$ely_{7,0}L$	97,64	98,40	98,36

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que aumentando o comprimento pode ocorrer uma melhora nos resultados da classificação, como foi o caso da wavelet $ely_{3,0}L$. Entretanto, isso não se verificou para outras wavelets, como é o caso da wavelet $ely_{1,9}L_\delta^4$, que resultou em uma precisão da classificação menor em relação a $ely_{1,9}L_\delta^2$ e $ely_{1,9}L_\delta^3$. Assim, nem sempre o aumento do suporte da wavelet implicará uma melhora de resultados. Nesse problema específico não é utilizado o processo de reconstrução. Logo, é preferível utilizar wavelets quase-ortogonais que possuam os menores suportes possíveis, que é o caso de $ely_{1,9}29$.

Note que, no geral, algumas wavelets de Ely obtiveram resultados um pouco melhores do que as wavelets ortogonais e biortogonais. Isso demonstra a eficiência das wavelets de Ely que, embora não satisfaçam a condição de admissibilidade, em aplicações reais podem implicar em resultados significativos em comparação com wavelets clássicas. Pode-se destacar as wavelets sym5 e db5 que, dentre as wavelets clássicas que obtiveram bons resultados na classificação utilizando $F2_{v_i}$, são as wavelets de menor suporte.

7.5 RESULTADOS CONSIDERANDO RUÍDOS

Para testar o método proposto com sinais ruidosos, ruído gaussiano branco foi adicionado aos sinais analisados. Este tipo de ruído é amplamente considerado em pesquisas que envolvem análise de QEE (HE; STARZYK, 2006; UYARA; YILDIRIMA; GENCOGLUB, 2008; MARKOVSKA; TAŠKOVSKI, 2018). Para testar o método proposto, serão considerados três níveis diferentes de ruído: 20 dB, 30 dB e 40 dB.

Considerando $F2_{v_i}$, a Tabela 24 mostra os resultados da classificação geral para algumas wavelets de Ely e para as wavelets db1, db5 e sym5. Os resultados apresentados por Uyara, Yildirima e Gencoglu (2008) também são exibidos para comparação. Conforme observado, a precisão é maior à medida que o relação sinal-ruído se torna menor. Em He e Starzyk (2006), sinais ruidosos também foram considerados e a precisão da classificação foi apresentada qualitativamente, com precisão aproximadamente de 90–94% considerando ruídos de 20–50 dB.

Tabela 24 – Resultados da classificação considerando sinais ruidosos.

wavelet	20 dB	30 dB	40 dB
ely _{0,5} 29	77,43	81,93	83,29
ely _{1,2} 17	95,57	99,21	99,29
ely _{1,9} 29	96,21	98,36	97,64
ely _{3,0} 45	94,79	97,86	98,43
ely _{3,5} 57	97,14	97,64	98,71
ely _{7,0} 105	91,43	96,64	97,86
db1	67,85	71,50	72,71
db5	96,36	99,07	99,07
sym5	96,71	99,14	99,00
Método 2008	89,92	91,85	93,64

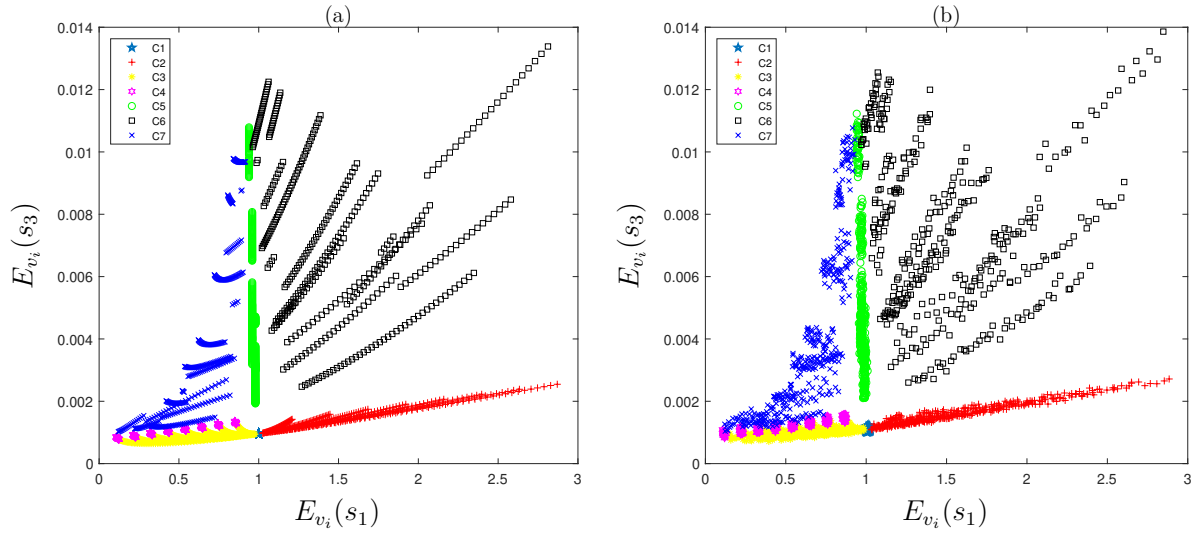
Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode ser visto na Tabela 24, dependendo da wavelet, os resultados obtidos com sinais ruidosos são bem precisos. Exceto para as wavelets db1 e ely_{0,5}29, a precisão de classificação para sinais com ruídos de 20 dB foi superior a 91%. De fato, para esse nível de ruído, a wavelet ely_{3,5}57 foi a que obteve melhor precisão, com mais de 97%. As wavelets db5 e sym5 também obtiveram bons resultados, com precisão acima de 96% para o mesmo nível de ruído, que também é superior aos resultados sem ruído obtidos em Abdel-Galil *et al.* (2004), He e Starzyk (2006), Uyara, Yildirima e Gencoglu (2008). Considerando os níveis de ruído 30 dB e 40 dB, foi possível obter uma precisão alta com mais de 99% utilizando as wavelets ely_{1,2}17, db5 e sym5.

Assim, com base nos resultados obtidos, pode-se concluir que o método proposto é robusto e possui alto desempenho na classificação de distúrbios mesmo em condições de ruído. Utilizando a wavelet ely_{1,9}29, as Figuras 38-(a) e 38-(b) mostram as projeções bidimensionais de $F2_{v_i}$ considerando sinais puros e ruidosos de 20 dB, respectivamente.

Observe que os dados são separados de forma eficiente usando o vetor característico proposto, mesmo se sinais ruidosos forem considerados.

Figura 38 – Projeção bidimensional de $F2_{v_i}$ considerando (a) sinais puros e (b) sinais ruidosos (20 dB).



Fonte: Elaborado pelo autor.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma nova metodologia para o projeto de bancos de filtros wavelet quase-ortogonais (NOWFBs). Tal metodologia se baseia no método de processo de quase-ortogonalização wavelet (WQOP), que permite extrair filtros semi-conjugados a partir de wavelets não-ortogonais.

As características de banda do filtro semi-conjugado, obtido pelo WQOP, depende diretamente da dispersão da função escala no domínio da frequência pois, quanto mais localizada for esta, menor será o mínimo desvio de ortogonalidade (MIOD) do filtro semi-conjugado obtido. Além disso, quanto menor for a largura da faixa de transição do filtro semi-conjugado, menor será também o MIOD e maior será o comprimento mínimo que satisfaça o máximo desvio de ortogonalidade (MOD) permitido.

As versões quase-ortogonalizadas das wavelets obtidas pelo método WQOP são simétricas e, de certa forma, representam uma aproximação da wavelet de Shannon, cujo espectro de magnitude pode ser visto como um filtro passa-banda ideal. Entretanto, tal aproximação depende da base wavelet utilizada, uma vez que, quanto menor for a largura na faixa de transição do filtro semi-conjugado obtido, maior será a similaridade entre a wavelet quase-ortogonal e a wavelet de Shannon. As wavelets propostas não satisfazem a condição de admissibilidade. Entretanto, pode-se obter wavelets que satisfazem aproximadamente tal condição, possibilitando sua utilização em aplicações que envolvem a transformada wavelet contínua (CWT).

A função de Ely foi projetada para representar uma função escala bem localizada no domínio da frequência. Assim, conforme pode ser visto no desenvolvimento deste trabalho, por meio dessa função pode-se obter filtros semi-conjugados com menores desvios de ortogonalidade do que outras bases wavelets clássicas. Além disso, utilizando a função de Ely é possível obter filtros com maiores larguras na faixa de transição para uma mesma tolerância de desvio de ortogonalidade especificada. Dessa forma, a função de Ely permite projetar filtros semi-conjugados com menores comprimentos de filtros.

Os filtros wavelet obtidos pelo método proposto possuem características importantes, como simetria, atraso de grupo constante, ganho aproximadamente constante na faixa de passagem e suporte compacto. Além disso, tais filtros possuem comprimento ímpar, diferentemente dos filtros conjugados clássicos que possuem ordem par, como é o caso dos filtros referentes as wavelets ortogonais de Daubechies, Symmlets e Coiflets. Assim, uma das vantagens dos NOWFBs propostos em relação aos do tipo ortogonais e biortogonais é que estes não implicam distorções de fase e consideráveis distorções de ganho na faixa de passagem. Outra vantagem na utilização dos filtros wavelet propostos é o menor uso de memória devido à simetria.

A principal desvantagem dos NOWFBs propostos se dá no processo de reconstrução, uma vez que um NOWFB não implica na propriedade de perfeita reconstrução. Porém, como o erro de reconstrução é diretamente proporcional aos desvios de ortogonalidade apresentados pelos filtros semi-conjugados, tal erro pode ser minimizado uma vez que estes desvios são menores à medida que a ordem dos mesmos aumenta.

Os NOWFBs propostos foram aplicados em três problemas diferentes: monitoramento de integridade estrutural (SHM), compressão de imagens e classificação de distúrbios de tensão. Para avaliar o desempenho das wavelets de Ely, os resultados obtidos foram comparados com outras wavelets clássicas, ortogonais e biortogonais.

No contexto de SHM, o objetivo foi de analisar o dano de uma estrutura utilizando a decomposição FWT. Os resultados obtidos por diferentes wavelets mostraram que os melhores desempenhos foram obtidos por filtros wavelet com menores larguras na faixa de transição. As wavelets de Ely levaram a resultados superiores que os das wavelets ortogonais utilizadas. Para a aplicação de compressão de imagens, o melhor desempenho foi obtido pelas wavelets biortogonais. Embora as wavelets de Ely não obtiveram melhores resultados para o problema de compressão de imagens, tais resultados foram próximos de algumas wavelets que são frequentemente utilizadas nesse tipo de problema. Assim, pode-se dizer que as wavelets de Ely também podem ser utilizados em aplicações que envolvem o processo de reconstrução da FWT, uma vez que podem apresentar resultados satisfatórios como os mostrados neste trabalho.

Um método proposto para a extração de características de sinais de distúrbios de tensão foi apresentado. Tal método consiste na decomposição wavelet dos sinais utilizando um conjunto adequado de escalas da CWT. As escalas exploradas representam a frequência natural e suas harmônicas calculadas a partir da relação escala-frequência. O vetor wavelet característico proposto é construído usando apenas a energia dos coeficientes da CWT e posteriormente é utilizado para treinar e testar o classificador. Os resultados da classificação obtidos pelo método proposto também foram comparados com alguns resultados publicados na literatura.

As comparações mostraram que, utilizando o método proposto para a classificação de distúrbios de tensão, foi possível obter maior precisão na classificação geral do que os demais métodos apresentados na literatura. O desempenho do método proposto, também foi testado na presença de ruído. Neste caso, diferentes níveis de ruído gaussiano branco foram adicionados aos sinais de tensão. Diante dessas circunstâncias, o método proposto também foi eficiente, com alta precisão na classificação. As wavelets de Ely também apresentaram resultados significativos em comparação com os das wavelets clássicas utilizadas.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros apresentam-se as seguintes propostas:

- Aplicar as wavelets de Ely em outros problemas que envolvem FWT, SWT, WPT e a CWT;
- Explorar outras funções para o projeto de filtros semi-conjugados a partir do método WQOP;
- Utilizar outros tipos de classificadores e explorar outros tipos de distúrbios para o método de classificação de distúrbios de tensão apresentado.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-GALIL, T. K. A.; KAMEL, M.; YOUSSEF, A. M.; EL-SAADANY, E. F. E.; SALAMA, M. M. A. Power quality disturbance classification using the inductive inference approach. *IEEE Transactions on power delivery*, New York, v. 19, n. 4, p. 1812–1818, 2004.
- ABDELNOUR, A. F.; SELESNICK, I. W. Design of 2-band orthogonal near-symmetric ccf. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, 6., 2001, Salt Lake City. *Anais [...]* Salt Lake City: IEEE, 2001. p. 3693–3696.
- ABRY, P. *Ondelettes et turbulences: multirésolutions, algorithmes de décomposition, invariance d'échelle et signaux de pression*. [S.l.]: Diderot multimédia, 1997. 289 p.
- AMARAVADI, V. K.; RAO, V. S.; KOVAL, L. R.; DERRISO, M. M. Structural health monitoring using wavelet transforms. In: SMART STRUCTURES AND MATERIALS: SMART STRUCTURES AND INTEGRATED SYSTEMS, 4327., 2001, Long Beach. *Anais [...]* Long Beach: International Society for Optics and Photonics, 2001. p. 258–269.
- AMEZQUITA-SANCHEZ, J. P.; ADELI, H. Signal processing techniques for vibration-based health monitoring of smart structures. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Barcelona, v. 23, n. 1, p. 1–15, 2016.
- ANGRISANI, L.; DAPONTE, P.; D'APUZZO. Wavelet network-based detection and classification of transients. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, New York, v. 50, n. 5, p. 1425–1435, 2001.
- ANTONINI, M.; BARLAUD, M.; MATHIEU, P.; DAUBECHIES, I. Image coding using wavelet transform. *IEEE Transactions on image processing*, New York, v. 1, n. 2, p. 205–220, 1992.
- ARNEODO, A.; GRASSEAU, G.; HOLSCHNEIDER, M. Wavelet transform of multifractals. *Physical review letters*, New York, v. 61, n. 20, p. 2281, 1988.
- ASLAKSEN, E. W.; KLAUDER, J. R. Unitary representations of the affine group. *Journal of Mathematical Physics*, [s.l.], v. 9, n. 2, p. 206–211, 1968.
- AYAD, M.; CHIKOUCHE, D.; BOUKAZZOULA, N.; REZKI, M. Search of a robust defect signature in gear systems across adaptive morlet wavelet of vibration signals. *Signal Processing*, [s.l.], v. 8, n. 9, p. 918–926, 2014.
- BANERJEE, S.; MITRA, M. Application of cross wavelet transform for ecg pattern analysis and classification. *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, New York, v. 63, n. 2, p. 326–333, 2013.
- BAPTISTA, F. G.; VIEIRA FILHO, J. A new impedance measurement system for pzt-based structural health monitoring. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, New York, v. 58, n. 10, p. 3602–3608, 2009.
- BARROS, J.; DIEGO, R. I.; APRAIZ, M. de. Applications of wavelets in electric power quality: voltage events. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 88, p. 130–136, 2012.

- BATTLE, G. A block spin construction of ondelettes. part i: Lemarié functions. *Communications in Mathematical Physics*, New York, v. 110, n. 4, p. 601–615, 1987.
- BLESSIE, A. A.; NALINI, J.; RAMESH, S. C. Image compression using wavelet transform based on the lifting scheme and its implementation. *International Journal of Computer Science Issues*, [s.l.], v. 8, n. 3, p. 449, 2011.
- BULL, D. R. *Communicating pictures: a course in image and video coding*. [S.l.]: Academic Press, 2014. 560 p.
- CALDERÓN, A. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Mathematica*, Warszawa, v. 24, n. 2, p. 113–190, 1964.
- CHEN, C.; CHU, X. Two-dimensional morlet wavelet transform and its application to wave recognition methodology of automatically extracting two-dimensional wave packets from lidar observations in antarctica. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, [s.l.], v. 162, p. 28–47, 2017.
- CHEN, T.; WU, Y.; ZHAO, Y.; WANG, X. The analysis and design of one-dimensional nearly-orthogonal symmetric wavelet filter banks. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NETWORKING AND DIGITAL SOCIETY, 2., 2009, Guiyang. *Anais [...]* Guiyang: IEEE, 2009. p. 247–250.
- CHEN, T.; ZHAO, Y.; YU, C.; SHEN, L. A new technique for ecg denoising using adaptive wavelet shrinkage. In: INTERNATIONAL COLLOQUIUM ON COMPUTING, COMMUNICATION, CONTROL, AND MANAGEMENT, 2., 2008, Guangzhou. *Anais [...]* Guiyang: IEEE, 2008. p. 256–259.
- COHEN, A.; DAUBECHIES, I.; FEAUVEAU, J.-C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on pure and applied mathematics*, New York, v. 45, n. 5, p. 485–560, 1992.
- CORTEZ, N. E. *Desenvolvimento e Implementação de um Sistema para Detecção de Falhas em Estruturas usando Microcontrolador*. 2012. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2012.
- CROISIER, A.; ESTEBAN, D.; GALAND, C. Perfect channel splitting by use of interpolation/decimation/tree decomposition techniques. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION SYSTEMS, 1976, Patras. *Anais [...]* Patras: [s.n.], 1976. p. 443–446.
- DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on pure and applied mathematics*, Hoboken, v. 41, n. 7, p. 909–996, 1988.
- DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 377 p.
- DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets ii. variations on a theme. *Journal on Mathematical Analysis*, Philadelphia, v. 24, n. 2, p. 499–519, 1993.
- DECANINI, J. G.; TONELLI-NETO, M. S.; MALANGE, F. C.; MINUSSI, C. R. Detection and classification of voltage disturbances using a fuzzy-artmap-wavelet network. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 81, p. 2057–2065, 2011.

- DIXIT, A.; MAJUMDAR, S. Comparative analysis of coiflet and daubechies wavelets using global threshold for image denoising. *International Journal of Advances in Engineering & Technology*, [s.l.], v. 6, n. 5, p. 2247, 2013.
- DONOHOO, D. L.; JOHNSTONE, J. M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, *Biometrika Trust*, London, v. 81, n. 3, p. 425–455, 1994.
- DUGAN, R. C.; MCGRANAGHAN, M. F.; BEATY, H. W. *Electrical power systems quality*. New York: McGraw-Hill, 1996. 265 p.
- EDAVOOR, P. J.; RAHULKAR, A. D. Design and implementation of a novel low complexity symmetric orthogonal wavelet filter-bank. *Image Processing*, [s.l.], v. 13, n. 5, p. 785–793, 2019.
- ERISTI AYSEGÜL UÇAR, Y. D. H. Wavelet-based feature extraction and selection for classification of power system disturbances using support vector machines. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 80, p. 743–752, 2010.
- ESTEBAN, D.; GALAND, C. Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, 2., 1977, Hartford. *Anais [...]* Hartford: IEEE, 1977. p. 191–195.
- FARRAR, C. R.; WORDEN, K. *Structural Health Monitoring.: A Machine Learning Perspective*. [s.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- FOURIER, J. B. J. *Théorie analytique de la chaleur*. [S.l.]: Firmin Didot, 1822.
- FRANK, E.; HALL, M. A.; WITTEN., I. H. *The WEKA workbench online appendix for “data mining: pratical machine learning tools and techniques”*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2016.
- GABOR, D. Theory of communication. part 1: The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering*, [s.l.], v. 93, n. 26, p. 429–457, 1946.
- GRASEMANN, U.; MIIKKULAINEN, R. Effective image compression using evolved wavelets. In: ANNUAL CONFERENCE ON GENETIC AND EVOLUTIONARY COMPUTATION, 2005, Washington. *Anais [...]* Washington: ACM, 2005. p. 1961–1968.
- GRIMALDI, D. Time-of-flight measurement of ultrasonic pulse echoes using wavelet networks. *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, [s.l.], v. 55, n. 1, p. 5–13, 2006.
- GRINSTED, A.; MOORE, J. C.; JEVREJEVA, S. Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series. *Nonlinear processes in geophysics*, [s.l.], v. 11, n. 5/6, p. 561–566, 2004.
- GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *Journal on mathematical analysis*, Philadelphia, v. 15, n. 4, p. 723–736, 1984.

- HE, H.; STARZYK, J. A. A self-organizing learning array system for power quality classification based on wavelet transform. *IEEE Transactions on power delivery*, New York, v. 21, n. 1, p. 286–295, 2006.
- HERRMANN, O. On the approximation problem in nonrecursive digital filter design. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, New York, v. 18, n. 3, p. 411–413, 1971.
- HEWITT, E.; HEWITT, R. E. The gibbs-wilbraham phenomenon: an episode in fourier analysis. *Archive for history of Exact Sciences*, Berlin, v. 21, n. 2, p. 129–160, 1979.
- HUANG, S.-J.; HSIEH, C.-T. Coiflet wavelet transform applied to inspect power system disturbance-generated signals. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, New York, v. 38, n. 1, p. 204–210, 2002.
- HUANG, S. J.; HSIEH, C. T.; HUANG, C. L. Application of wavelets to classify power system disturbances. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 47, p. 87–93, 1998.
- HUGENSCHMIDT, J.; KALOGEROPOULOS, A. The inspection of retaining walls using gpr. *Journal of Applied Geophysics*, Amsterdam, v. 67, n. 4, p. 335–344, 2009.
- IEEE Recommended Practice for Monitoring Electric Power Quality. [S.l.: s.n.], 2019. 1–98 p.
- JAVADI, M.; GHASEMZADEH, H. Wavelet analysis for ground penetrating radar applications: a case study. *Journal of Geophysics and Engineering*, [s.l.], v. 14, n. 5, p. 1189–1202, 2017.
- JIN, Q.; LUO, Z.-Q.; WONG, K. M. Optimum filter banks for signal decomposition and its application in adaptive echo cancellation. *IEEE Transactions on signal processing*, New York, v. 44, n. 7, p. 1669–1680, 1996.
- KABIR, M. A.; KHAN, M. M.; ISLAM, M. T.; HOSSAIN, M. L.; MITUL, A. F. Image compression using lifting based wavelet transform coupled with spiht algorithm. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS, ELECTRONICS AND VISION, 2013, Dhaka. *Anais [...]* Dhaka: IEEE, 2013. p. 1–4.
- KHASHMAN, A.; DIMILILER, K. Image compression using neural networks and haar wavelet. *Transactions on Signal Processing*, [s.l.], v. 4, n. 5, p. 330–339, 2008.
- KOLAKOWSKI, P.; MUJICA, L. E.; VEHI, J. Two approaches to structural damage identification: model updating versus soft computing. *Journal of intelligent material systems and structures*, Thousand Oaks, v. 17, n. 1, p. 63–79, 2006.
- LAWSON, S.; ZHU, J. Image compression using wavelets and jpeg2000: a tutorial. *Electronics & Communication Engineering Journal*, London, v. 14, n. 3, p. 112–121, 2002.
- LEMARIÉ, P.-G. Ondelettes à localisation exponentielle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, [s.l.], v. 67, p. 227–236, 1988.
- LI, J.; ZHANG, Y.; ZHU, S. A wavelet-based structural damage assessment approach with progressively downloaded sensor data. *Smart Materials and Structures*, New York, v. 17, n. 1, p. 015020, 2007.

- LIANG, C.; SUN, F. P.; ROGERS, C. A. Coupled electro-mechanical analysis of adaptive material systems-determination of the actuator power consumption and system energy transfer. *Journal of intelligent material systems and structures*, Lancaster, v. 8, n. 4, p. 335–343, 1994.
- LIN, C. H.; WANG, C. H. Adaptive wavelet networks for power quality detection and discrimination in a power system. *IEEE Transactions on Power Delivery*, New York, v. 21, p. 1106–1113, 2006.
- LIN, J.; QU, L. Feature extraction based on morlet wavelet and its application for mechanical fault diagnosis. *Journal of sound and vibration*, London, v. 234, n. 1, p. 135–148, 2000.
- MALIK, S.; VERMA, V. Comparative analysis of dct haar and daubechies wavelet for image compression. *International Journal of Applied Engineering Research*, [s.l.], v. 7, n. 11, p. 2012, 2012.
- MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*. Burlington: Academic, 1999. 832 p.
- MALLAT, S. G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *IEEE Transactions of the American mathematical society*, Providence, v. 315, n. 1, p. 69–87, 1989.
- MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, New York, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989.
- MARKOVSKA, M.; TAŠKOVSKI, D. Efficient feature extraction and classification of power quality disturbances. *Journal of Electrical Engineering and Information Technologies*, [s.l.], v. 3, p. 13–20, 2018.
- MEYER, Y. Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs. *Séminaire Bourbaki, Société Mathématique de France*, [s.l.], v. 28, n. 662, p. 209–223, 1985–1986.
- MEYER, Y. *Ondelettes, fonction splines, et analyses gradues*. Torino: [s.n.], 1986.
- MINTZER, F. Filters for distortion-free two-band multirate filter banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, [s.l.], v. 33, n. 3, p. 626–630, 1985.
- MORLET, J. Sampling theory and wave propagation. In: ACOUSTIC SIGNAL-IMAGE PROCESSING AND RECOGNITION, 1983, Berlin. *Anais [...]* Berlin: Springer, 1983. p. 233–261.
- MORLET, J.; ARENS, G.; FOURGEAU, E.; GIARD, D. Wave propagation and sampling theory—part ii: Sampling theory and complex waves. *Geophysics*, Tulsa, v. 47, n. 2, p. 222–236, 1982.
- MORSI, W. G.; EL-HAWARY, M. A new perspective for the ieee standard 1459-2000 via stationary wavelet transform in the presence of nonstationary power quality disturbance. *IEEE Transactions on Power Delivery*, New York, v. 23, n. 4, p. 2356–2365, 2008.

- MOURA JR, J. R. V.; STEFFEN JR, V. Avaliação das bandas de frequência para o método de monitoramento estrutural baseado em impedância. *In: SIMPÓSIO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA*, 13, 2003, Uberlândia. *Anais [...]* Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2003. p. 1–10.
- MURUGESAN, S.; TAY, D. B. Design of almost symmetric orthogonal wavelet filter bank via direct optimization. *IEEE Transactions on image processing*, New York, v. 21, n. 5, p. 2474–2480, 2012.
- MURUGESAN, S.; TAY, D. B. A new class of almost symmetric orthogonal hilbert pair of wavelets. *Signal Processing*, Amsterdam, v. 95, p. 76–87, 2014.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-time signal processing*. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.
- PAN, Y.; ZHANG, L.; WU, X.; ZHANG, K.; SKIBNIEWSKI, M. J. Structural health monitoring and assessment using wavelet packet energy spectrum. *Safety Science*, Amsterdam, v. 120, p. 652–665, 2019.
- PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R. *Análise de imagens digitais: princípios, algoritmos e aplicações*. [S.l.]: Thomson Learning, 2008. 528 p.
- PERCIVAL, D. B.; WALDENR, A. T. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. [S.l.]: Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2006.
- PESQUET, J.-C.; KRIM, H.; CARFANTAN, H. Time-invariant orthonormal wavelet representations. *IEEE Transactions on signal processing*, New York, v. 44, n. 8, p. 1964–1970, 1996.
- PETITCOLAS, F. A. P. Banco de dados: public-domain test images for homeworks and projects. [S.l.: s.n.], 2021. Disponível em: <https://homepages.cae.wisc.edu/~ece533/images>. Acesso em: 11 mar. 2021.
- PILLAY, P.; BHATTACHARJEE, A. Application of wavelets to model short-term power system disturbances. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 11, p. 2031–2037, 1996.
- QUINLAN, J. R. Induction of decision trees. *Machine learning*, Boston, v. 1, n. 1, p. 81–106, 1986.
- QUINLAN, J. R. *C4.5: Programs for machine learning*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 1993.
- RODNEY TAN, H. G.; LUM, K. M.; MOK, V. H. Performance evaluation of coifman wavelet for ecg signal denoising. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BIOMEDICAL ENGINEERING*, 2006, Berlin. *Anais [...]* Berlin: Springer, 2006. p. 419–422.
- SABER, A.; JAMES, D. E.; HAYES, D. F. Estimation of water quality profiles in deep lakes based on easily measurable constituents at the water surface using artificial neural networks coupled with stationary wavelet transform. *Science of The Total Environment*, Amsterdam, v. 694, p. 133690, 2019.

- SAINI, M. K.; BENIWAL, R. K. Optimum fractionally delayed wavelet design for pq event detection and classification. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, [s.l.], v. 27, n. 10, p. 1–15, 2017.
- SANTOSO, S.; POWERS, E. J.; GRADY, W. M. Electric power quality disturbance detection using wavelet transform analysis. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON TIME-FREQUENCY AND TIME-SCALE ANALYSIS, 1994, Philadelphia. *Anais [...]* Philadelphia: IEEE, 1994.
- SANTOSO, S.; POWERS, E. J.; GRADY, W. M.; HOFMANN, P. Power quality assessment via wavelet transform analysis. *IEEE Transactions on Power Delivery*, New York, v. 11, n. 2, p. 924–930, 1996.
- SELESNICK, I. W.; ODEGARD, J. E.; BURRUS, C. S. Nearly symmetric orthogonal wavelets with non-integer dc group delay. In: DIGITAL SIGNAL PROCESSING WORKSHOP PROCEEDINGS, 1996, Loen. *Anais [...]* Loen: IEEE, 1996. p. 431–434.
- SELVI, G. U. V.; NADARAJAN, R. Ct and mri image compression using wavelet-based contourlet transform and binary array technique. *Journal of Real-Time Image Processing*, [s.l.], v. 13, n. 2, p. 261–272, 2017.
- SHARMA, L. D.; SUNKARIA, R. K. Inferior myocardial infarction detection using stationary wavelet transform and machine learning approach. *Signal, Image and Video Processing*, [s.l.], v. 12, n. 2, p. 199–206, 2018.
- SHENSA, M. J. The discrete wavelet transform: wedding the a trous and mallat algorithms. *IEEE Transactions on signal processing*, New York, v. 40, n. 10, p. 2464–2482, 1992.
- SILVA, J. F. *Sistema de armazenamento de imagens comprimidas através da transformada wavelet*. 2008. 99 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista- UNESP, Ilha Solteira, 2008.
- SILVA, J. F.; DUARTE, M. A. Q.; VILLARREAL, F. Um método para codificação de imagens digitais no domínio wavelet. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES- DINCON, 10., 2011, Águas de Lindóia. *Anais [...]* Águas de Lindóia: SBMAC, 2011. p. 731–734.
- SMITH, M.; BARNWELL, T. A procedure for designing exact reconstruction filter banks for tree-structured subband coders. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, 9., 1984, San Diego. *Anais [...]* San Diego: IEEE, 1984. p. 421–424.
- SRIRAM, P.; MARCELLIN, M. W. Image coding using wavelet transforms and entropy-constrained trellis-coded quantization. *IEEE Transactions on Image Processing*, New York, v. 4, n. 6, p. 725–733, 1995.
- STASZEWSKI, W. Structural and mechanical damage detection using wavelets. *The Shock and Vibration Digest*, [s.l.], v. 30, n. 6, p. 457–472, 1998.
- STRANG, G.; NGUYEN, T. *Wavelets and filter banks*. Wellesley: Cambridge, 1996.

- TORRENCE, C.; COMPO, G. P. A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological society*, Boston, v. 79, n. 1, p. 61–78, 1998.
- TRAVASSOS, N. C. L. *Armazenamento e reconstrução de imagens comprimidas via codificação e decodificação*. 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2016.
- TSE, N. C. F.; ZHOU, L.; LAI, L. L. Wavelet-based algorithm for power quality analysis. *European transactions on electrical power*, [s.l.], v. 20, p. 952–964, 2010.
- UYARA, M.; YILDIRIMA, S.; GENCOGLUB, M. An effective wavelet-based feature extraction method for classification of power quality disturbance signals. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 78, n. 10, p. 1747–1755, 2008.
- VETTERLI, M. Filter banks allowing perfect reconstruction. *Signal processing*, Amsterdam, v. 10, n. 3, p. 219–244, 1986.
- VETTERLI, M.; HERLEY, C. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Transactions on signal processing*, New York, v. 40, n. 9, p. 2207–2232, 1992.
- VETTERLI, M.; KOVAČEVIĆ, J. *Wavelets and subband coding*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1995.
- VIEIRA FILHO, J.; BAPTISTA, F. G.; FARMER, J.; INMAN, D. J. Time-domain electromechanical impedance for structural health monitoring. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL DYNAMICS*, 8., 2011, Leuven. *Anais [...]* Leuven: [s.n.], 2011. p. 2043–2046.
- VIEIRA FILHO, J.; BAPTISTA, F. G.; INMAN, D. J. Time-domain analysis of piezoelectric impedance-based structural health monitoring using multilevel wavelet decomposition. *Mechanical Systems and Signal Processing*, London, v. 25, n. 5, p. 1550–1558, 2011.
- VIEIRA, P. G. *Seleção da faixa de frequência usando wavelets para detecção de danos em sistemas SHM baseados no princípio da EMI*. 2016. 69 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2016.
- WEINBERGER, M. J.; SEROUSSI, G.; SAPIRO, G. The loco-i lossless image compression algorithm: Principles and standardization into jpeg-ls. *IEEE Transactions on Image processing*, New York, v. 9, n. 8, p. 1309–1324, 2000.
- WU, K.; OTOO, E. J.; SHOSHANI, A. Optimizing bitmap indices with efficient compression. *ACM Transactions on Database Systems*, New York, v. 31, n. 1, p. 1–38, 2006.
- WYK, B. V.; VIROLLEAU, F. The application of optimum quasi bi-orthogonal wavelets to the simulation of room acoustics. *In: SYMPOSIUM ON COMMUNICATIONS AND SIGNAL PROCESSING*, 1998, Rondebosch. *Anais [...]* Rondebosch: IEEE, 1998. p. 181–186.

- XUE, X.; SUN, D.; GU, L.; WANG, Q. Application of synchrosqueezed wavelet transforms in lamb wave based structural health monitoring of wind turbine blades. *In: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE*, 2019, Nanchang. *Anais [...]* Nanchang: IEEE, 2019. p. 3190–3195.
- YE, H.; WANG, G.; DING, S. X. A new parity space approach for fault detection based on stationary wavelet transform. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 49, n. 2, p. 281–287, 2004.
- ZHANG, Z.; TELESFORD, Q. K.; GIUSTI, C.; LIM, K. O.; BASSETT, D. S. Choosing wavelet methods, filters, and lengths for functional brain network construction. *Plos one*, San Francisco, v. 11, n. 6, p. e0157243, 2016.
- ZHAO, Y.; SWAMY, M. New technique for designing nearly orthogonal wavelet filter banks with linear phase. *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, London, v. 147, n. 6, p. 527–533, 2000.