



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Contraexemplos em Análise

Michel Ferracini

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em
Matemática Universitária como requisito
parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

Coorientador

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento

Rio Claro
Junho - 2012

517 Ferracini, Michel
F368c Contraexemplos em Análise / Michel Ferracini. - Rio Claro
: [s.n.], 2012.
55 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Orientador: Ricardo Parreira da Silva

Coorientador: Vanderlei Marcos do Nascimento

1. Cálculo. 2. Análise Matemática. 3. Completude. 4.
Continuidade. 5. Números Reais. 6. Ordenação. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Michel Ferracini

CONTRAEXEMPLOS EM ANÁLISE

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva
Orientador

Prof. Dr. Thiago de Melo
IGCE - UNESP - Rio Claro/SP

Prof. Dr. Fábio José Bertoloto
FAMAT - UFU - Uberlândia/MG

Rio Claro, 06 de junho de 2012.

À minha amada Eve

Agradecimentos

A todos que me apoiaram na realização deste trabalho, sinceramente agradeço. Em particular, agradeço minha amada companheira Evelize, pelo apoio constante e incondicional; meus pais Euclides e Maria de Fátima, por incentivar todos meus passos; o Professor Ricardo, pela oportunidade e pelos (numerosos) ensinamentos; o Professor Vanderlei, pelas valiosas sugestões, paciência e amizade.

*A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.*

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho exploramos resultados não usuais da Análise Real que aparecem quando suas estruturas (usuais) são enfraquecidas. Também apresentamos exemplos de situações pouco conhecidas, mas consideradas no ambiente dos números reais.

Palavras-chave: Completude, Continuidade, Contraexemplos, Números Reais, Ordenação.

Abstract

In this work we explore nonstandard results in Real Analysis, which appears when the structure of the real numbers are weaken. We also present some nonstandard examples in the universe of the real numbers.

Keywords: Completeness, Continuity, Counterexamples, Real Numbers, Ordination.

Sumário

1	Introdução	8
2	Números Reais	9
2.1	Conceitos Básicos	9
2.2	Ordenação e Completude de Corpos	23
2.2.1	Importância da Completude de $\mathcal{R}$	38
3	Funções e Limites	42
	Referências	55

1 Introdução

A maioria dos conceitos aqui tratados fazem parte dos bons textos de Matemática direcionados à graduação. Nesses textos, em geral, os resultados interessantes a que cada conceito leva são o que, afinal, justificam a apresentação desse conceito. No primeiro capítulo deste trabalho, pretendemos explorar resultados não usuais que aparecem quando as estruturas (usuais) são enfraquecidas. Acreditamos que este contraste, além de mostrar grau de exigência numa definição, permite que vislumbremos novos tratamentos a serem dados.

Já no capítulo seguinte, apresentaremos exemplos de situações não tão conhecidas, mas consideradas no ambiente dos números reais.

Possivelmente, dentre as áreas da Matemática, seja na Análise onde se encontre maior dificuldade em realizar um trabalho no espírito deste. A razão seria a de que a estrutura dos números reais é rica o suficiente para ser objeto de todas as áreas, e os números reais são, por excelência, o objeto da Análise. Tentamos delimitar o máximo.

2 Números Reais

O conceito central neste capítulo é o de corpo ordenado completo (conjunto dos números reais), sobre o qual discutimos as principais propriedades, destacando a importância da completude para que certos resultados tenham validade.

2.1 Conceitos Básicos

Esta seção destina-se à apresentação da teoria básica necessária para o desenvolvimento de todo este trabalho.

Definição 2.1. *Dados dois conjuntos não vazios A e B , chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) , com $x \in A$ e $y \in B$.*

Indicamos o produto cartesiano de A por B com a notação $A \times B$ (lê-se “ A cartesiano B ”). Assim, temos:

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Definição 2.2. *Chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.*

Observação 2.1. Algumas vezes, indicaremos que (x, y) pertence à uma relação binária R com a notação xRy .

Definição 2.3. *Seja $R \subset A \times B$. Chama-se domínio de R o subconjunto $D(R)$ de A constituído pelos elementos x para cada um dos quais existe algum y em B tal que $(x, y) \in R$. Assim, temos:*

$$D(R) := \{x \in A \mid \text{para algum } y \in B, (x, y) \in R\}.$$

Chama-se imagem de R o subconjunto de B constituído pelos elementos y para cada um dos quais existe algum x em A tal que $(x, y) \in R$. Assim, temos:

$$Im(R) := \{y \in B \mid \text{para algum } x \in A, (x, y) \in R\}.$$

Definição 2.4. *Seja $R \subset A \times B$. Chama-se relação inversa de R , sendo indicada por R^{-1} , a seguinte relação de B em A :*

$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}.$$

Definição 2.5. *Seja $f \subset A \times B$. Dizemos que f é uma função (ou aplicação) de A em B quando*

- (i) $\forall x \in A, x \in D(f)$;
- (ii) $(x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z$.

Definição 2.6. *Seja $f \subset A \times B$ uma função. Dizemos que:*

- (i) f é injetiva quando $(x, y), (k, y) \in f$ implica $x = k$;
- (ii) f é sobrejetiva quando $B = \text{Im}(f)$;
- (iii) f é bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva.

Se tivermos $(x, y) \in f$, então, amparados pelo item (ii) da Definição 2.5, escreveremos $y = f(x)$ e diremos que y é a imagem de x . A função f de A em B será, algumas vezes, denotada por $f: A \rightarrow B$.

Definição 2.7. *Seja $f \subset A \times B$ uma função. Dado $S \subset A$, chama-se imagem direta de S , segundo f , e indica-se por $f(S)$, o seguinte subconjunto de B :*

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\},$$

isto é, $f(S)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de S .

Definição 2.8. *Seja $f \subset A \times B$ uma função. Dado $K \subset B$, chama-se imagem inversa de K , segundo f , e indica-se por $f^{-1}(K)$, o seguinte subconjunto de A :*

$$f^{-1}(K) := \{x \in A \mid f(x) \in K\},$$

isto é, $f^{-1}(K)$ é o conjunto dos elementos de A que têm imagem em K através de f .

Definição 2.9. *Seja $f \subset A \times B$ uma função. Se f for bijetiva, então a imagem inversa de B , segundo f , é chamada função inversa de f .*

Definição 2.10. *Sejam $f \subset A \times B$ e $g \subset D \times E$ duas funções, com $E \subset A$. Chama-se composta de g e f a função de D em B (indicada por $f \circ g$), definida do seguinte modo:*

$$(x, y) \in f \circ g \Leftrightarrow (g(x), y) \in f.$$

É usual a notação $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $x \in D$.

Definição 2.11. *Seja A um conjunto não vazio. Toda função $f: A \times A \rightarrow A$ recebe o nome de operação binária sobre A (ou em A).*

Dada uma operação binária $*$: $A \times A \rightarrow A$, qualquer, denotaremos $x * y := *(x, y)$, para todo $(x, y) \in A \times A$.

Para a operação binária $\cdot$: $A \times A \rightarrow A$, indicaremos $x \cdot y := \cdot(x, y)$ ou $xy := \cdot(x, y)$, para todo $(x, y) \in A \times A$.

Agora que temos definido o conceito de operação, já estamos em condições de definir os conceitos de corpo e de corpo ordenado.

Definição 2.12. *Sejam o conjunto $\mathcal{F}$ e operações binárias $+: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ e $\cdot: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, chamadas adição e multiplicação, respectivamente. Diremos que $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ é um corpo se forem verdadeiras as seguintes sentenças.*

Para a adição:

(A₁) (Associatividade) $\forall x, y, z \in \mathcal{F}, x + (y + z) = (x + y) + z$.

(A₂) (Existência de elemento neutro) $\exists 0 \in \mathcal{F} / \forall x \in \mathcal{F}, x + 0 = x$.

(A₃) (Existência de elemento oposto) $\forall x \in \mathcal{F}, \exists -x \in \mathcal{F} / x + (-x) = 0$.

(A₄) (Comutatividade) $\forall x, y \in \mathcal{F}, x + y = y + x$.

Para a multiplicação:

(M₁) (Associatividade) $\forall x, y, z \in \mathcal{F}, x(yz) = (xy)z$.

(M₂) (Existência de elemento neutro) $\exists 1 \in \mathcal{F} (1 \neq 0) / \forall x \in \mathcal{F}, x \cdot 1 = x$.

(M₃) (Existência de elemento oposto) $\forall x \in \mathcal{F} (x \neq 0), \exists x^{-1} \in \mathcal{F} / xx^{-1} = 1$.

(M₄) (Comutatividade) $\forall x, y \in \mathcal{F}, xy = yx$.

Da multiplicação com relação a adição:

(D) (Distributividade) $\forall x, y, z \in \mathcal{F}, x(y + z) = xy + xz$.

Quando não houver dúvida sobre (ou necessidade de especificar) quais operações se está utilizando, denotaremos um corpo $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ simplesmente por $\mathcal{F}$.

Na sentença (A₃), o símbolo $-x$ é uma notação para o elemento oposto da adição. Similarmente, na sentença (M₃), o símbolo x^{-1} é uma notação para o elemento oposto da multiplicação (outras notações para o oposto multiplicativo de x são $\frac{1}{x}$ e $1/x$).

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo. Se $x, y \in \mathcal{F}$ e $xy = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.*

Demonstração. Se tivermos $y \neq 0$, então $xy = 0 \Rightarrow xyy^{-1} = 0 \cdot y^{-1} \Rightarrow x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0$. Por outro lado, se tivermos $x \neq 0$, então $xy = 0 \Rightarrow x^{-1}xy = x^{-1} \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$. $\square$

Definição 2.13. *Quando $A = B$ e R é uma relação binária de A em B , diz-se que R é uma relação sobre A ou, ainda, R é uma relação em A .*

Definição 2.14. *Uma relação R sobre um conjunto A não vazio é chamada relação de equivalência sobre A quando tem as seguintes propriedades:*

(i) (Reflexividade) se $x \in A$, então $(x, x) \in R$;

(ii) (Simetria) se $x, y \in A$ e $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$;

(iii) (Transitividade) se $x, y, z \in A$ e $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.

Definição 2.15. *Seja R uma relação de equivalência sobre A . Dado $a \in A$, chama-se classe de equivalência determinada por a , módulo R , o subconjunto $\bar{a}$ de A constituído pelos elementos x tais que $(x, a) \in R$. Em símbolos:*

$$\bar{a} = \{x \in A \mid (x, a) \in R\}.$$

Definição 2.16. *O conjunto das classes de equivalência módulo R será indicado por A/R e chamado conjunto quociente de A por R .*

Definição 2.17. *Uma relação R sobre um conjunto A não vazio é chamada relação de ordem parcial sobre A quando tem as seguintes propriedades:*

- (i) (Reflexividade) *se $x \in A$, então $(x, x) \in R$;*
- (ii) (Antissimetria) *se $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$;*
- (iii) (Transitividade) *se $x, y, z \in A$, $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.*

Se R for uma relação de ordem parcial sobre A , para indicar que $(x, y) \in R$, usaremos a notação $x \leq y(R)$, que se lê “ x precede y na relação R ” ou a notação $y \geq x(R)$, que se lê “ y segue x na relação R ”. Quando tivermos $(x, y) \in R$ e $x \neq y$, usaremos a notação $x < y(R)$, que se lê “ x precede estritamente y na relação R ” ou $y > x(R)$, que se lê “ y segue estritamente x na relação R ”.

Pode-se usar as notações simplificadas $x \leq y$, $x < y$, $y \geq x$ e $y > x$ em lugar de $x \leq y(R)$, $x < y(R)$, $y \geq x(R)$ e $y > x(R)$, respectivamente. Para estas notações simplificadas, usaremos as leituras usuais, dizendo que: “ x é menor que ou igual a y ” para a notação $x \leq y$; “ x é menor que y ” para a notação $x < y$; “ y é maior que ou igual a x ” para a notação $y \geq x$; “ y é maior que x ” para a notação $y > x$. Porém, observamos que os símbolos “ $\leq$ ”, “ $<$ ”, “ $\geq$ ” e “ $>$ ” não necessariamente significam uma desigualdade numérica. O sentido destes símbolos é definido pelo contexto daquilo que se estuda.

Definição 2.18. *Diz-se que um conjunto é parcialmente ordenado, quando nele está definida uma certa relação de ordem parcial.*

Definição 2.19. *Seja R uma relação de ordem parcial sobre o conjunto A . Os elementos $x, y \in A$ se dizem comparáveis mediante R se $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Definição 2.20. *Se quaisquer dois elementos de um conjunto A forem comparáveis mediante R , então R será chamada relação de ordem total sobre A . Nesse caso, o conjunto A é dito conjunto totalmente ordenado por R .*

Definição 2.21. *Um corpo ordenado é um corpo $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ que possui uma ordem total, denotada por “ $<$ ”, tal que para todos $x, y \in \mathcal{F}$ tem-se*

- (i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$, para todo $z \in \mathcal{F}$;

- (ii) $x < y \Rightarrow \begin{cases} xz < yz, & \text{se } 0 < z \\ yz < xz, & \text{se } z < 0 \end{cases}$.

Teorema 2.1. *Seja $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ um corpo. Se $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ é ordenado com uma ordem total “<”, então o conjunto $\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{F} \mid 0 < x\}$ satisfaz as seguintes condições:*

- (a) $x + y \in \mathcal{P}$, para todo $x, y \in \mathcal{P}$;
- (b) $xy \in \mathcal{P}$, para todo $x, y \in \mathcal{P}$;
- (c) dado $x \in \mathcal{F}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: $x = 0$; $x \in \mathcal{P}$; $-x \in \mathcal{P}$.

Reciprocamente, se existe $\mathcal{P}$ satisfazendo as condições (a), (b) e (c) acima, então a ordem total “<”, definida por $x < y \Leftrightarrow y - x := y + (-x) \in \mathcal{P}$, torna $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ ordenado.

Demonstração. Suponhamos que $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ seja ordenado com uma ordem total “<”. Temos que:

- (a) se $x, y \in \mathcal{P}$, então $0 < x$ e $0 < y$. Daí, pelo item (i) da Definição 2.21, segue que $0 < 0 + y < x + y \Rightarrow x + y \in \mathcal{P}$;
- (b) se $x, y \in \mathcal{P}$, então $0 < x$ e $0 < y$. Daí, pelo item (ii) da Definição 2.21, segue que $0 = 0 \cdot y < xy \Rightarrow xy \in \mathcal{P}$;
- (c) se $0 \neq x \in \mathcal{F}$ e $x \notin \mathcal{P}$, então $x < 0$. Daí, pelo item (ii) da Definição 2.21, segue que $0 < -x \Rightarrow -x \in \mathcal{P}$.

Por outro lado, suponhamos que exista um conjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ que satisfaça as condições (a), (b) e (c) acima, e seja “<” definida por $x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{P}$. Temos que:

- (i) se $x, y, z \in \mathcal{F}$ e $x < y$, então $y - x \in \mathcal{P} \Rightarrow (y - x) + 0 \in \mathcal{P} \Rightarrow (y - x) + (z - z) \in \mathcal{P} \Rightarrow (y + z) - (x + z) \in \mathcal{P} \Rightarrow x + z < y + z$;
- (ii) se $x, y, z \in \mathcal{F}$, com $x < y$ e $0 < z$, então $y - x \in \mathcal{P}$ e $z = z - 0 \in \mathcal{P}$. Daí, pela condição (b), temos que $(y - x)z \in \mathcal{P} \Rightarrow yz - xz \in \mathcal{P} \Rightarrow xz < yz$. Da mesma forma, se $x, y, z \in \mathcal{F}$, com $x < y$ e $z < 0$, então $y - x \in \mathcal{P}$ e $-z = 0 - z \in \mathcal{P}$. Daí, pela condição (b), temos que $(y - x)(-z) \in \mathcal{P} \Rightarrow xz - yz \in \mathcal{P} \Rightarrow yz < xz$. $\square$

Quando existir um subconjunto $\mathcal{P}$ de um corpo $\mathcal{F}$ satisfazendo as condições (a), (b) e (c) do Teorema 2.1 acima, diremos que $\mathcal{P}$ ordena $\mathcal{F}$. Neste caso, $\mathcal{P}$ será chamado de conjunto dos números positivos de $\mathcal{F}$.

Definição 2.22. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo. Diremos que x é um quadrado em $\mathcal{F}$ se existir $y \in \mathcal{F}$ tal que $x = y \cdot y =: y^2$.*

Teorema 2.2. *Num corpo ordenado, todo quadrado é maior que ou igual a zero, ou seja, todo quadrado é um número positivo ou é igual a zero.*

Demonstração. Se $x = 0$, então $x^2 = 0$. Se $0 < x$, então $0 \cdot x < x \cdot x \Rightarrow 0 < x^2$. Se $x < 0$, então $x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0$. $\square$

Corolário 2.1. *Num corpo ordenado somente um dos dois elementos, x ou $-x$, é um quadrado, exceto o zero.*

Definição 2.23. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado. Uma função $f: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é chamada não crescente em $A \subset \mathcal{F}$ quando para todos $x, y \in A$ tais que $x < y$ tivermos $f(x) \geq$*

$f(y)$; f é crescente quando $x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; f é não decrescente quando $x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$; f é decrescente quando $x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$; f é uma função constante quando $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in A$.

Nestes casos, diremos que f é uma função monótona.

Definição 2.24. Se $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado e existe $u \in \mathcal{F}$ tal que $u \geq x$, para todo $x \in A \subset \mathcal{F}$, onde A é um conjunto não vazio, então u é um limitante superior (ou, cota superior) de A . Neste caso, dizemos que A é limitado superiormente.

Se s é limitante superior de A e não existe um limitante que seja menor que s , então dizemos que s é o supremo de A , e denotamos $s := \sup(A) = \sup A$.

As definições de limitante inferior (ou, cota inferior) e de ínfimo são análogas, e se m é ínfimo de um conjunto A , denotamos $m := \inf(A) = \inf A$.

Definição 2.25. Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado. Se existe supremo para todo conjunto limitado superiormente e não vazio $A \subset \mathcal{F}$, então dizemos que $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo.

Observação 2.2. A condição de todo subconjunto não vazio e limitado de um corpo ordenado possuir supremo, dada na Definição 2.25 acima, quando acatada, é conhecida como *Axioma do Supremo (AS)*.

Proposição 2.2. Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado. $\mathcal{F}$ é completo se, e somente se, todo conjunto limitado inferiormente e não vazio $A \subset \mathcal{F}$ tem ínfimo.

Demonstração. Seja $\emptyset \neq A \subset \mathcal{F}$ limitado inferiormente. Considere o conjunto $-A := \{-a \mid a \in A\} \subset \mathcal{F}$. É claro que $-A$ é limitado superiormente em $\mathcal{F}$, pois se existe $k \in \mathcal{F}$ tal que $k \leq a$, para todo $a \in A$, então $-k \geq -a$, para todo $-a \in -A$, de modo que $-k$ é um limitante superior para $-A$. De modo semelhante, verifica-se que se A é limitado superiormente, então $-A$ tem limitante inferior. Assim, como $-A$ é limitado superiormente e $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo, segue que existe $-m \in \mathcal{F}$ tal que $-m = \sup(-A) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists -a \in -A / -m - \varepsilon < -a \Rightarrow m + \varepsilon > a$, ou seja, existe $a \in A$ tal que $m + \varepsilon > a$, para todo $\varepsilon > 0$, de modo que $m = \inf A$. E isso prova a condição necessária.

Provemos agora a condição suficiente. Seja, então, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{F}$ limitado superiormente. Considere o conjunto $-A := \{-a \mid a \in A\} \subset \mathcal{F}$. Provamos acima que $-A$ é limitado inferiormente. Agora, por hipótese, existe $-s \in \mathcal{F}$ tal que $-s = \inf(-A) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists -a \in -A$ tal que $-s + \varepsilon > -a \Rightarrow s - \varepsilon < a$, ou seja, existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a$, para todo $\varepsilon > 0$, de modo que $s = \sup A$. Daí segue que $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo. $\square$

Definição 2.26. Um conjunto indutivo num corpo ordenado $\mathcal{F}$ é um subconjunto S que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $1 \in S$ (onde 1 é o elemento neutro da multiplicação em $\mathcal{F}$);
- (ii) se $x \in S$, então $x + 1 \in S$.

Definição 2.27. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado. $n \in \mathcal{F}$ é um número natural quando n é um elemento de todo conjunto indutivo de $\mathcal{F}$. O conjunto dos números naturais de um corpo ordenado $\mathcal{F}$ será denotado por $\mathcal{N}$.*

Observemos que o conjunto $\mathcal{N}$ de $\mathcal{F}$ consiste na interseção de todos os conjuntos indutivos de $\mathcal{F}$.

Desta última caracterização, segue um teorema importante, que enunciamos e demonstramos a seguir.

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental da Indução - TFI). *Se S é um conjunto indutivo de números naturais, então $S = \mathcal{N}$.*

Demonstração. Por hipótese, $S \subset \mathcal{N}$. Agora, como $\mathcal{N}$ é a interseção de todos os conjuntos indutivos de um corpo ordenado, e S é indutivo, segue que $\mathcal{N} \subset S$. Portanto, $S = \mathcal{N}$. $\square$

Definição 2.28. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado. $x \in \mathcal{F}$ é um número inteiro quando $x \in \mathcal{N}$, $x = 0$ ou $-x \in \mathcal{N}$. Denotaremos o conjunto dos números inteiros de um corpo ordenado $\mathcal{F}$ por $\mathcal{Z}$.*

Definição 2.29. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado. $x \in \mathcal{F}$ é um número racional quando existem m e n inteiros, com $n \neq 0$, tais que $x = \frac{m}{n}$ (onde $\frac{m}{n} := m \cdot \frac{1}{n}$). Denotaremos o conjunto dos números racionais por $\mathcal{Q}$.*

Observemos que o conjunto $\mathcal{Q}$ juntamente com as operações de adição e multiplicação e ordem do corpo ordenado $\mathcal{F}$, é também um corpo ordenado. Neste caso, diremos que as propriedades de corpo e ordenação de $\mathcal{Q}$ são induzidas de $\mathcal{F}$.

Definição 2.30. *Um corpo ordenado $\mathcal{F}$ é arquimediano se o conjunto $\mathcal{N}$ dos números naturais de $\mathcal{F}$ não é limitado superiormente em $\mathcal{F}$.*

Equivalentemente, dizemos que $\mathcal{F}$ é arquimediano quando para todos $a, b \in \mathcal{F}$, com $a > 0$ e $b > 0$, existir $n \in \mathcal{N}$ tal que $na > b$. De fato, se $\mathcal{F}$ é arquimediano, então existe $n \in \mathcal{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$ e, daí, $na > b \cdot \frac{1}{a} \cdot a \Rightarrow na > b$. Por outro lado, suponhamos que exista $n \in \mathcal{N}$ tal que para todos $a, b \in \mathcal{F}$, com $a > 0$ e $b > 0$, se tenha $na > b$. Daí, temos que $n > \frac{b}{a}$. Como sempre temos $n \in \mathcal{N}$ satisfazendo esta última desigualdade e a escolha de $a, b \in \mathcal{F}$, com $a > 0$ e $b > 0$, é arbitrária, segue que $\mathcal{N}$ é ilimitado superiormente em $\mathcal{F}$.

Observação 2.3. Diremos que um corpo ordenado $\mathcal{F}$ tem a *Propriedade Arquimediana (PA)* se $\mathcal{F}$ for arquimediano.

Teorema 2.4. *Se $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo, então $\mathcal{F}$ é arquimediano.*

Demonstração. Se $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ fosse limitado superiormente, existiria $c = \sup \mathcal{N}$. Então $c-1$ não seria cota superior de $\mathcal{N}$, isto é, existiria $n \in \mathcal{N}$ com $c-1 < n \Rightarrow c < n+1 \in \mathcal{N}$, resultando em um absurdo. Logo, $\mathcal{N}$ não admite cota superior. $\square$

Teorema 2.5. *Sejam $\mathcal{F}$ um corpo ordenado completo e o conjunto $\mathcal{P}$ dos números positivos de $\mathcal{F}$. Se $p \in \mathcal{P} \cup \{0\}$, então existe um único $x \in \mathcal{P} \cup \{0\}$ tal que $x^2 = p$.*

Demonstração. Seja $A := \{y \in \mathcal{F} \mid 0 \leq y, y^2 \leq p\}$. p é cota superior de A , pois, caso contrário, existiria um elemento $a \in A$ tal que $p < a$. Daí, teríamos $p^2 < a^2 < p$. Um absurdo.

Como $\mathcal{F}$ é completo e A é limitado superiormente, existe $x = \sup A$. Obviamente $0 \leq x$. Afirmamos que $x^2 = p$. Para provar esta afirmação, suponhamos o contrário: que seja $x^2 < p$ ou $p < x^2$. Se $x^2 < p$, seja $n \in \mathcal{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{p - x^2}{2x + 1}$ (*). Neste caso,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq x^2 + (2x + 1) \cdot \frac{1}{n} \\ &\stackrel{(*)}{<} x^2 + (2x + 1) \cdot \frac{(p - x^2)}{(2x + 1)} \\ &= x^2 + (p - x^2) = p, \end{aligned}$$

o que implica $x + \frac{1}{n} \in A$, contrariando o fato de que x é cota superior de A .

Por outro lado, se $p < x^2$, escolhemos $m \in \mathcal{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{x^2 - p}{2x}$, ou seja, $p < x^2 - \frac{2x}{m}$ (**). Como $x = \sup A$, existe um $a_0 \in A$ com $x - 1 < a_0 < ma_0 \Rightarrow \frac{x - 1}{m} < a_0$ (***)). Assim, temos

$$\begin{aligned} p &\stackrel{(**)}{<} x^2 - \frac{2x}{m} < x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} \\ &= \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 \\ &\stackrel{(***)}{<} a_0^2. \end{aligned}$$

Logo, $p < a_0^2$, contrariando o fato de que $a_0 \in A$. Como excluímos as possibilidades $x^2 < p$ e $p < x^2$, concluímos que $x^2 = p$.

Para provar a unicidade, suponhamos que exista um outro número $y \in \mathcal{P} \cup \{0\}$ tal que $y^2 = p$. Daí, teríamos $x^2 = p = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x + y) \cdot (x - y) = 0 \Rightarrow x + y = 0$ ou $x - y = 0$, ou seja, $x = -y$ ou $x = y$. Como $0 < x$ e $0 < y$, temos necessariamente $x = y$. $\square$

Definição 2.31. *Sejam $\mathcal{F}$ um corpo ordenado completo e o conjunto $\mathcal{P}$ dos números positivos de $\mathcal{F}$. A função $\sqrt{\cdot}: \mathcal{P} \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{F}$, definida por $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x$, é chamada raiz quadrada.*

O teorema seguinte mostra que se $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo, então $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ propriamente.

Teorema 2.6. *Não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Demonstração. Suponhamos que existam $p, q \in \mathcal{Z}$, $q \neq 0$, tais que $(p/q)^2 = 2$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que na decomposição de p e de q não existam fatores primos em comum, ou seja, que p e q sejam primos entre si (ou irredutíveis). Temos que $(p/q)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é par, e isso implica que p também é par. Assim, existe $k \in \mathcal{Z}$ tal que $p = 2k$; daí, $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ e, então, q^2 é par. Daí, segue que q é par. Portanto, p e q possuem o fator primo 2 em comum. Contradição. $\square$

O Teorema 2.6 acima diz, em outras palavras, que o número $\sqrt{2}$ não é racional. Assim, podemos dar a seguinte definição.

Definição 2.32. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado completo. Chamaremos os elementos do conjunto $\mathcal{F} \setminus \mathcal{Q}$ de números irracionais.*

Definição 2.33. *Sejam $\mathcal{F}$ um corpo ordenado e $x \in \mathcal{F}$. A função $| \cdot | : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ definida por*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é chamada de valor absoluto.

Agora destacaremos as principais propriedades de valor absoluto, cujas demonstrações podem ser encontradas em [6], páginas 72 e 73.

Propriedade 2.1. *Sejam $x, y \in \mathcal{F}$, temos:*

- (i) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- (iii) Seja $\varepsilon > 0$; $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$.
- (iv) (Desigualdade triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- (v) $|x| = \sqrt{x^2}$.
- (vi) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Definição 2.34. *Num corpo ordenado $\mathcal{F}$, dado $\varepsilon > 0$, dizemos que o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ é uma vizinhança do ponto $a \in \mathcal{F}$. Em termos de valor absoluto, temos:*

$$V(a, \varepsilon) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Dizemos que uma vizinhança é perfurada quando o ponto $a \in \mathcal{F}$ for excluído do intervalo. Em termos de valor absoluto, temos:

$$D(a, \varepsilon) := \{x \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Definição 2.35. As operações binárias $\max: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ e $\min: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ são definidas, respectivamente, por

$$\max(x, y) := \begin{cases} x, & \text{se } x \geq y \\ y, & \text{se } x < y \end{cases}$$

e

$$\min(x, y) := \begin{cases} y, & \text{se } x \geq y \\ x, & \text{se } x < y \end{cases}.$$

Definição 2.36. Sejam corpos $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ e $(\mathcal{K}, \oplus, \odot)$. Um homomorfismo entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{K}$ é uma função $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}$, que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{F}$;
- (ii) $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{K}$ são ordenados, um homomorfismo bijetivo $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}$ é chamado de isomorfismo entre corpos ordenados se preservar ordem, ou seja, se para todos $a, b \in \mathcal{F}$ tivermos que $a < b$ implica $f(a) < f(b)$. No caso de existir um tal isomorfismo, dizemos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{K}$ são isomorfos.

O próximo teorema nos permitirá estabelecer nosso “ambiente” de trabalho para o próximo capítulo, ou seja, estabeleceremos a partir dele o conceito de número real. Para tanto, iremos nos valer dos três lemas seguintes.

Sejam os corpos ordenados $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ e $(\tilde{\mathcal{F}}, \oplus, \odot)$. Escrevamos um elemento qualquer de $\tilde{\mathcal{F}}$ na forma $\tilde{x}$.

Lema 2.1. Se $\mathcal{N}$ e $\tilde{\mathcal{N}}$ são os naturais de $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$, respectivamente, então existe uma aplicação bijetiva de $\mathcal{N}$ em $\tilde{\mathcal{N}}$ que preserva a ordem e as operações induzidas de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{N}$ e de $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\tilde{\mathcal{N}}$.

Demonstração. Definamos $f: \mathcal{N} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$ fazendo $f(1) = \tilde{1}$ e, indutivamente, $f(n + 1) = f(n) \oplus \tilde{1} = \tilde{n} \oplus \tilde{1}$. Temos que $f(m + n) = f(m) \oplus f(n)$ e $f(m \cdot n) = f(m) \odot f(n)$, para todo $m, n \in \mathcal{N}$. Provemos isso por indução.

Assim, escolhamos $m \in \mathcal{N}$ arbitrariamente. Por definição, para $n = 1$, $f(m + 1) = f(m) \oplus \tilde{1} = f(m) \oplus f(1)$ e $f(m \cdot 1) = f(m) = f(m) \odot \tilde{1} = f(m) \odot f(1)$. Agora, suponhamos, para $k > 1$, que

$$f(m + k) = f(m) \oplus f(k) \text{ e } f(m \cdot k) = f(m) \odot f(k). \quad (H)$$

Então, usando a propriedade (A_1) da definição de corpo (Definição 2.12), temos para $k + 1$:

$$\begin{aligned} f(m + (k + 1)) &= f((m + k) + 1) \\ &= f(m + k) \oplus \tilde{1} \\ &\stackrel{(H)}{=} (f(m) \oplus f(k)) \oplus f(1) \\ &= f(m) \oplus (f(k) \oplus f(1)) \\ &= f(m) \oplus f(k + 1) \end{aligned}$$

e, das propriedades (M_1) e (D) da definição de corpo e pelo que acabamos de provar,

$$\begin{aligned}
 f(m \cdot (k+1)) &= f(m \cdot k + m) \\
 &= f(m \cdot k) \oplus f(m) \\
 &\stackrel{(H)}{=} (f(m) \odot f(k)) \oplus (f(m) \odot \tilde{1}) \\
 &= (f(m) \odot f(k)) \oplus (f(m) \odot f(1)) \\
 &= f(m) \odot (f(k) \oplus f(1)) \\
 &= f(m) \odot f(k+1).
 \end{aligned}$$

f é injetiva, pois se $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$ são tais que $f(n_1) = f(n_2)$, então, pela definição da função f , $n_1 = n_2$.

f é sobrejetiva, pois $\tilde{1} \in \text{Im}(f)$ e se $\tilde{k} \in \text{Im}(f)$, então existe $k \in \mathcal{N}$ tal que $\tilde{k} = f(k)$. Daí, como $\mathcal{N}$ é indutivo, $k+1 \in \mathcal{N}$ e, por definição, $f(k+1) = \tilde{k} \oplus \tilde{1} \in \tilde{\mathcal{N}} \Rightarrow \tilde{k} \oplus \tilde{1} \in \text{Im}(f)$. Logo, $\text{Im}(f) \subset \tilde{\mathcal{N}}$ é indutivo e, pelo TFI, segue que $\text{Im}(f) = \tilde{\mathcal{N}}$.

Assim, temos que f é bijetiva. E como é óbvio que a função f preserva a ordem de $\mathcal{N}$, concluímos a demonstração do teorema. $\square$

Lema 2.2. *Se $\mathcal{Z}$ e $\tilde{\mathcal{Z}}$ são os inteiros de $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$, respectivamente, então existe uma aplicação bijetiva de $\mathcal{Z}$ em $\tilde{\mathcal{Z}}$ que preserva a ordem e as operações induzidas de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{Z}$ e de $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\tilde{\mathcal{Z}}$.*

Demonstração. Basta estender a função $f: \mathcal{N} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$, definida no Lema 2.1, fazendo $f(0) = \tilde{0}$ e $f(-n) = -f(n)$, para todo $n \in \mathcal{N}$. $\square$

Lema 2.3. *Se $\mathcal{Q}$ e $\tilde{\mathcal{Q}}$ são os racionais de $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$, respectivamente, então $\mathcal{Q}$ e $\tilde{\mathcal{Q}}$ são isomorfos.*

Demonstração. Estendamos a função $f: \mathcal{Z} \rightarrow \tilde{\mathcal{Z}}$, definida no Lema 2.2, para o conjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$, obtendo um isomorfismo $f: \mathcal{Q} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$. Nesse sentido, observemos que para todo $0 \neq n \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q}$, existe $f(n)^{-1} = \tilde{n}^{-1}$. Então, escrevendo $f(n)^{-1} = \frac{1}{f(n)}$, ou ainda $\tilde{n}^{-1} = \frac{1}{\tilde{n}}$, façamos $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) \odot f(n)^{-1} = f(m) \odot \frac{1}{f(n)} = \frac{f(m)}{f(n)} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} \in \tilde{\mathcal{Q}}$, para todo $\frac{m}{n} \in \mathcal{Q}$, $n \neq 0$. Como $f: \mathcal{Q} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ é definida a partir da definição para o conjunto $\mathcal{Z}$, temos que f é um isomorfismo entre $\mathcal{Q}$ e $\tilde{\mathcal{Q}}$. $\square$

Teorema 2.7. *Dois corpos ordenados completos $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ são isomorfos.*

Demonstração. Estendamos a função $f: \mathcal{Q} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$, definida no Lema 2.3, para o conjunto $\mathcal{F}$, obtendo um isomorfismo $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$, como a seguir: para cada $a \in \mathcal{F}$, $a \geq 0$, consideremos o conjunto $X_a := \{f(x) \in \tilde{\mathcal{F}} \mid 0 \leq x \leq a, x \in \mathcal{Q}\}$, que é limitado superiormente por $f(r)$, onde $r \in \mathcal{Q}$ e $r \geq a$. Como $X_a \neq \emptyset$, já que f está definida em $\mathcal{Q}$, podemos definir

$$\varphi(a) = \sup X_a,$$

sendo que $\sup X_a$ existe, já que X_a é limitado superiormente, f preserva ordem e $\tilde{\mathcal{F}}$ é um corpo ordenado completo.

Por outro lado, para $a < 0$ consideremos o conjunto $X_a := \{f(x) \in \tilde{\mathcal{F}} \mid a \leq x < 0, x \in \mathcal{Q}\}$, e definamos

$$\varphi(a) = \inf X_a.$$

Concluiremos a demonstração apenas para o caso $a \geq 0$, pois para $a < 0$ a demonstração é análoga.

Observemos que se $a, b \in \mathcal{F}$, então

$$\begin{aligned} X_a \oplus X_b &= \{f(x) \oplus f(y) \in \tilde{\mathcal{F}} \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, x, y \in \mathcal{Q}\} = \\ &= \{f(x+y) \in \tilde{\mathcal{F}} \mid 0 \leq x+y \leq a+b, x+y \in \mathcal{Q}\} = X_{a+b} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_a \odot X_b &= \{f(x) \odot f(y) \in \tilde{\mathcal{F}} \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, x, y \in \mathcal{Q}\} = \\ &= \{f(x \cdot y) \in \tilde{\mathcal{F}} \mid 0 \leq x \cdot y \leq a \cdot b, x \cdot y \in \mathcal{Q}\} = X_{a \cdot b}. \end{aligned}$$

Daí,

$\varphi(a) \oplus \varphi(b) = \sup X_a \oplus \sup X_b = \sup (X_a \oplus X_b) = \sup X_{a+b} = \varphi(a+b)$ e
 $\varphi(a) \odot \varphi(b) = \sup X_a \odot \sup X_b = \sup (X_a \odot X_b) = \sup X_{a \cdot b} = \varphi(a \cdot b)$, ou seja, φ é um homomorfismo de $\mathcal{F}$ em $\tilde{\mathcal{F}}$.

φ é injetiva, pois se $a, b \in \mathcal{F}$ e $\varphi(a) = \varphi(b)$, então $\sup X_a = \sup X_b$ (*). Suponhamos que fosse $a < b$, então teríamos $X_a \subset X_b$. Agora, pela definição de X_a e X_b e considerando que f preserva ordem, vemos que há cotas superiores de X_a que pertencem a X_b , donde concluimos que a igualdade (*) é absurda para $a < b$. Se fosse $b < a$, também chegaríamos num absurdo. Logo, a única possibilidade é ser $a = b$.

Provemos agora que φ é sobrejetiva.

Assim, seja $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{F}}$. Se tivermos $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}$, então existe $b \in \mathcal{Q}$ tal que $\varphi(b) = f(b) = \tilde{y}$. Consideremos, então, que $\tilde{y} \in \tilde{F} \setminus \tilde{\mathcal{Q}}$, $\tilde{y} \geq 0$. Definamos o conjunto

$$\tilde{Y} = \{\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{Q}} \mid 0 \leq \tilde{p} < \tilde{y}\}.$$

Temos que $\tilde{p} = f(x)$ para algum $x \in \mathcal{Q}$, pois $f: \mathcal{Q} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ é um isomorfismo. Então seja

$$X := f^{-1}(\tilde{Y}) = \{x \in \mathcal{Q} \mid f(x) \in \tilde{Y}\}.$$

Observemos que $X \neq \emptyset$, pois f é um isomorfismo de $\mathcal{Q}$ em $\tilde{\mathcal{Q}}$, de modo que para todo $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{Q}}$, existe $x \in \mathcal{Q}$ tal que $f(x) = \tilde{p}$. Temos, também, que X é limitado superiormente. De fato, suponhamos o contrário: que para todo $k \in \mathcal{F}$ exista $x \in X$ tal que $x > k$. Em particular, consideremos $k \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ tal que $f(k) > \tilde{y}$; então, como

f preserva ordem, $f(x) > f(k) > \tilde{y}$, para algum $x \in X$, $x > k$. Ou seja, $f(x) > \tilde{y}$ com $x \in X$. Contradição.

Assim, como $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo, existe supremo para o conjunto X . Seja, então, $\sup X := a$ e consideremos o conjunto X_a . Temos que $\varphi(a) = \tilde{y}$. De fato, notemos que

$$\varphi(a) = \sup X_a = \sup \{f(x) \in \tilde{\mathcal{Q}} \mid 0 \leq x < a, x \in \mathcal{Q}\},$$

de modo que devemos verificar que $\tilde{y}$ é supremo de X_a .

É claro que $\tilde{y}$ é cota superior de X_a , pois se $0 \leq x < a$, então $f(x) < \tilde{y}$, uma vez que $a = \sup X$ implica $f(x) \in \tilde{Y}$, quando $0 \leq x < a$.

Temos, ainda, que $\tilde{y}$ é a menor cota superior de X_a . Para provar esta afirmação, consideremos $\hat{y} \in \tilde{\mathcal{F}}$ tal que $\hat{y} < \tilde{y}$. Como $\tilde{\mathcal{F}}$ é arquimediano (Teorema 2.4, página 15), temos que existe¹ $\tilde{r} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ tal que $\hat{y} < \tilde{r} < \tilde{y}$ e, daí, existe $r \in X$ tal que $f(r) = \tilde{r} > \hat{y}$. Logo, $\hat{y}$ não é cota superior de X_a .

Por último, provemos que $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ preserva ordem.

Sejam, então, $a, b \in \mathcal{F}$ tais que $a < b$. Temos que $\varphi(a) < \varphi(b)$. De fato, suponhamos o contrário. Então, como $\varphi(a) = \sup X_a$ e $\varphi(b) = \sup X_b$, temos que $\sup X_a \geq \sup X_b$. Mas, como f preserva ordem, $a < b \Rightarrow X_a \subset X_b$ e há cotas superiores de X_a que pertencem a X_b . Logo, não pode ser $\sup X_a \geq \sup X_b$. $\square$

Definição 2.37. *Todo corpo ordenado e completo é chamado um sistema de números reais e é denotado por $\mathcal{R}$.*

Passemos, agora, a definir conceitos básicos sobre funções, tais como continuidade e limite.

Definição 2.38. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado e seja $x_0 \in A \subset \mathcal{F}$. Uma função $f: A \rightarrow \mathcal{F}$ é contínua no ponto x_0 quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Usando a notação de vizinhança, definimos: f é contínua em $x_0 \in A$ quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / f(A \cap V(x_0, \delta)) \subset V(f(x_0), \varepsilon).$$

Definição 2.39. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado e $\emptyset \neq A \subset \mathcal{F}$. $x_0 \in \mathcal{F}$ é um ponto de acumulação de A quando qualquer vizinhança perfurada de x_0 contém algum ponto de A . O conjunto dos pontos de acumulação de A será denotado por A' .*

Em símbolos, escrevemos: $x_0 \in \mathcal{F}$ é um ponto de acumulação de A quando $\forall \varepsilon > 0$, $D(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

¹Provaremos este fato no Exemplo 2.7, página 29.

Definição 2.40. *Sejam $\mathcal{F}$ um corpo ordenado, $f: A \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ uma função, x_0 um ponto de acumulação de A e $b \in \mathcal{F}$. O limite de $f(x)$, quando x se aproxima de x_0 , existe e é igual a b se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(A \cap D(x_0, \delta)) \subset V(b, \varepsilon)$.*

Denotamos este limite, quando existe, por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Definição 2.41. *Sejam $\mathcal{F}$ um corpo ordenado e uma função $f: A \rightarrow \mathcal{F}$. Dizemos que f é uniformemente contínua em A quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x_1, x_2 \in A$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Definição 2.42. *Sejam $\mathcal{F}$ um corpo ordenado, $f: A \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ uma função e $x_0 \in A$. O Símbolo $f'(x_0)$ denota o elemento de $\mathcal{F}$ definido por*

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

desde que este limite exista.

A função f' definida por $x \mapsto f'(x)$, sempre que $f'(x)$ existir para $x \in A$, é chamada de derivada de f .

Definição 2.43. *Sejam $\mathcal{F}$ um corpo e $\mathcal{N}$ os naturais de $\mathcal{F}$. Uma sequência em $\mathcal{F}$ é uma função $s: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}$.*

$s(n)$ é usualmente escrito s_n e denotamos uma sequência por $(s_n)_{n \in \mathcal{N}}$ ou por (s_n) .

Definição 2.44. *Uma sequência (s_n) é convergente e tem limite igual a $b \in \mathcal{F}$ (ou, ainda, converge para $b \in \mathcal{F}$) quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |s_n - b| < \varepsilon$.*

Denotamos este limite por $\lim s_n = b$ ou $s_n \rightarrow b$.

Se uma sequência (s_n) não é convergente, dizemos então que é divergente.

Definição 2.45. *Uma sequência (s_n) é chamada sequência de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon$.*

Proposição 2.3. *Toda sequência convergente é de Cauchy, e se $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo, ou seja, se $\mathcal{F} = \mathcal{R}$, então toda sequência de Cauchy é convergente.*

Demonstração. Ver em [6], páginas 126 e 127. □

Definição 2.46. *O conjunto $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, dos pares ordenados (x, y) , onde $x, y \in \mathcal{R}$, com as operações*

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

e

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu),$$

é um corpo, chamado corpo dos números complexos, e denotamos $(\mathcal{R} \times \mathcal{R}, +, \cdot)$ por $\mathcal{C}$.

2.2 Ordenação e Completude de Corpos

Nesta seção, trataremos da estrutura dos corpos ordenados e dos corpos ordenados completos, com ênfase no completamento de corpos ordenados.

Começamos, então, por estabelecer uma característica para os corpos ordenados, através da seguinte

Proposição 2.4. *Todo corpo ordenado é infinito.*

Demonstração. Seja $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ um corpo ordenado, com uma ordem total “ $<$ ”. Seja $\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{F} \mid 0 < x\}$ um conjunto de números positivos em $\mathcal{F}$, proveniente da ordem “ $<$ ”. Agora, seja $x \in \mathcal{F}$, $x \neq 0$. Temos que $x \in \mathcal{P}$ ou $-x \in \mathcal{P}$. Se $x \in \mathcal{P}$, então $2x := x + x \in \mathcal{P}$, $3x := 2x + x \in \mathcal{P}$, $4x := 3x + x \in \mathcal{P}$, e assim por diante. Deste modo, definamos o conjunto $X := \{x, 2x, 3x, 4x, \dots\}$. Temos que X é infinito. De fato, $x \in \mathcal{P} \Rightarrow 0 < x$ e, daí, segue do item (i) da Definição 2.21, que $0 + x < x + x \Rightarrow x < 2x$, $x + x < 2x + x \Rightarrow 2x < 3x$, e assim por diante; ou seja, $x < 2x < 3x < 4x < \dots$. Como $X \subset \mathcal{F}$ e X é infinito, concluímos que $\mathcal{F}$ é infinito. Se, por outro lado, $-x \in \mathcal{P}$, então concluímos de modo análogo ao anterior que o conjunto $-X := \{-x, -2x, -3x, -4x, \dots\}$ é infinito, e como $-X$ está contido em $\mathcal{F}$, temos que $\mathcal{F}$ é infinito. $\square$

A contrapositiva da proposição acima, estabelece quando um corpo não pode ser ordenado, o que constitui uma informação bastante útil, já que evita busca por ordenação em corpos com estrutura finita.

O questionamento natural é, então, o de saber se todo corpo infinito pode ser ordenado. A resposta negativa é dada pelo exemplo seguinte.

Exemplo 2.1 (Um corpo infinito que não pode ser ordenado). O corpo infinito $\mathcal{C}$ dos números complexos não pode ser ordenado, pois escrevendo $i := (0, 1) \in \mathcal{C}$ observamos que $i^2 = (-1, 0)$ e $i^4 = (1, 0)$, ou seja, o quadrado i^4 é oposto aditivo do quadrado i^2 , o que é impossível, pelo Corolário 2.1, página 13.

O teorema seguinte diz que se um corpo é ordenado e completo, então a forma pela qual foi ordenado é a única possível.

Teorema 2.8. *$\mathcal{R}$ admite somente uma ordenação.*

Demonstração. Suponhamos que existam duas ordens distintas em $\mathcal{R}$, “ $<_1$ ” e “ $<_2$ ”. Sejam os conjuntos de números positivos de $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}_1 := \{x \in \mathcal{F} \mid 0 <_1 x\}$ e $\mathcal{P}_2 := \{x \in \mathcal{F} \mid 0 <_2 x\}$, provenientes das ordens “ $<_1$ ” e “ $<_2$ ”, respectivamente. É claro que $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, pois sendo “ $<_1$ ” e “ $<_2$ ” distintas, existe $x \in \mathcal{F}$ tal que $0 <_1 x$ e $x <_2 0$, ou seja, $x \in \mathcal{P}_1$ e $x \notin \mathcal{P}_2$.

Mas, seja $x \in \mathcal{P}_1$ qualquer. Temos, pelo Teorema 2.5, página 16, que existe y tal que $x = y^2$. Agora, pelo Teorema 2.2, página 13, $0 <_1 y^2 = x$ e $0 <_2 y^2 = x$, o que implica $x \in \mathcal{P}_2$. Daí, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ (I). Analogamente, verifica-se que $x \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow x \in \mathcal{P}_2$, ou seja, $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ (II). De (I) e (II), segue que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$. Contradição. $\square$

Observemos que a unicidade da forma de ordenar $\mathcal{R}$ se dá exatamente em decorrência da sua completude, uma vez que o Teorema 2.5 (usado na demonstração deste último teorema) exige em suas hipóteses um corpo completo, para garantir que todo número positivo seja um quadrado.

O próximo teorema estabelece que a única ordenação possível em $\mathcal{Q}$ é aquela induzida da ordenação de $\mathcal{R}$.

Teorema 2.9. *$\mathcal{Q}$ admite somente uma ordenação.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de números positivos de $\mathcal{Q}$, proveniente da única ordenação possível em $\mathcal{R}$. Suponhamos que exista um outro conjunto, que denotaremos por $\mathcal{P}'$, de números positivos em $\mathcal{Q}$. Temos que $1 \in \mathcal{P}$ e $1 \in \mathcal{P}'$, pois este número é um quadrado. Consequentemente, como soma de números positivos é positiva, concluímos que $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}$ e $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}'$, pois $2 = 1 + 1 \in \mathcal{P}$ e $2 = 1 + 1 \in \mathcal{P}'$, $3 = 2 + 1 \in \mathcal{P}$ e $3 = 2 + 1 \in \mathcal{P}'$, e assim por diante.

Dado $n \in \mathcal{N}$ qualquer, temos que seu oposto multiplicativo, $1/n$, também pertence a $\mathcal{P}$ e a $\mathcal{P}'$. De fato, se admitíssemos que $1/n \notin \mathcal{P}$, teríamos $-1/n \in \mathcal{P} \Rightarrow -1 = n \cdot (-1/n) \in \mathcal{P}$, o que é impossível. Analogamente, se admitíssemos $1/n \notin \mathcal{P}'$, chegaríamos na mesma impossibilidade. Logo, o conjunto $A := \{1/n \in \mathcal{Q} | n \in \mathcal{N}\}$ está contido em $\mathcal{P}$ e em $\mathcal{P}'$.

Assim, concluímos que todo número da forma m/n , onde $m, n \in \mathcal{N}$, pertence a $\mathcal{P}$ e a $\mathcal{P}'$, pois m/n é o produto do número positivo m com o número positivo $1/n$. Como os números da forma $-m/n$, onde $m, n \in \mathcal{N}$, não pertencem a $\mathcal{P}$ nem a $\mathcal{P}'$, temos que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$. $\square$

O próximo exemplo nos mostra que nem sempre há uma única forma de ordenar um corpo.

Exemplo 2.2 (Um corpo que é ordenável por duas ordens). Seja o conjunto $\mathcal{Q}(\sqrt{2}) := \{r + s\sqrt{2} | r, s \in \mathcal{Q}\}$. É fácil verificar que $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$, juntamente com as operações de adição e multiplicação usuais de $\mathcal{R}$, é um corpo. Consideremos o conjunto $\mathcal{P}$ dos números positivos de $\mathcal{R}$, e definamos o subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$, por

$$r + s\sqrt{2} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow r + s\sqrt{2} \in \mathcal{P}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{D} := \mathcal{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathcal{P}$. Assim, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$. Então, $\mathcal{D}$ ordena o conjunto $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$, com a ordenação induzida da ordenação de $\mathcal{R}$.

Um segundo caminho no qual o conjunto $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo ordenado é fornecido pelo subconjunto $\mathcal{B}$, que satisfaz:

$$r + s\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow r - s\sqrt{2} \in \mathcal{P}.$$

De fato, utilizando a recíproca do Teorema 2.1, verifiquemos as três condições de ordenação:

(a) Sejam $r_1 + s_1\sqrt{2}, r_2 + s_2\sqrt{2} \in \mathcal{B}$. Por definição, $r_1 + s_1\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow r_1 - s_1\sqrt{2} \in \mathcal{P}$ e $r_2 + s_2\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow r_2 - s_2\sqrt{2} \in \mathcal{P}$. Como $(r_1 - s_1\sqrt{2}) + (r_2 - s_2\sqrt{2}) = (r_1 + r_2) - (s_1 + s_2)\sqrt{2} \in \mathcal{P}$, temos por definição que $(r_1 + r_2) + (s_1 + s_2)\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Rightarrow (r_1 + s_1\sqrt{2}) + (r_2 + s_2\sqrt{2}) \in \mathcal{B}$.

(b) Sejam $r_1 + s_1\sqrt{2}, r_2 + s_2\sqrt{2} \in \mathcal{B}$. Por definição, $r_1 + s_1\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow r_1 - s_1\sqrt{2} \in \mathcal{P}$ e $r_2 + s_2\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow r_2 - s_2\sqrt{2} \in \mathcal{P}$. Como $(r_1 - s_1\sqrt{2}) \cdot (r_2 - s_2\sqrt{2}) = (r_1r_2 + 2s_1s_2) - (r_1s_2 + s_1r_2)\sqrt{2} \in \mathcal{P}$, temos por definição que $(r_1r_2 + 2s_1s_2) + (r_1s_2 + s_1r_2)\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Rightarrow (r_1 + s_1\sqrt{2}) \cdot (r_2 + s_2\sqrt{2}) \in \mathcal{B}$.

(c) Seja $0 \neq r + s\sqrt{2} \in \mathcal{Q}(\sqrt{2})$. Suponhamos que $r + s\sqrt{2} \notin \mathcal{B}$. Então, $r - s\sqrt{2} \notin \mathcal{P}$. Mas, como $\mathcal{P}$ ordena $\mathcal{R}$, temos que $-r + s\sqrt{2} = -(r - s\sqrt{2}) \in \mathcal{P}$, o que implica $-(r + s\sqrt{2}) \in \mathcal{B}$.

Por último, devemos verificar que $\mathcal{B}$ não é $\mathcal{P}$. Para tanto, observemos que $(-1) + (-2)\sqrt{2} \in \mathcal{B}$, pois $(-1) - (-2)\sqrt{2} = (-1) + 2\sqrt{2} \in \mathcal{P}$. Entretanto, $(-1) + (-2)\sqrt{2} \notin \mathcal{P}$, pois $-[(-1) + (-2)\sqrt{2}] = 1 + 2\sqrt{2} \in \mathcal{P}$.

Observação 2.4. Temos, pelo Teorema 2.8, que $\mathcal{R}$ admite somente uma ordenação. Como, pelo Teorema 2.2, num corpo ordenado todo quadrado é um número positivo e, pelo Teorema 2.5, num corpo ordenado completo todo número positivo é um quadrado, temos que um elemento x pertence ao (único) conjunto $\mathcal{P}$ que ordena $\mathcal{R}$ se, e somente se, x é um quadrado. Diríamos, então, o seguinte: no corpo $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$ há “relativamente” poucos quadrados e, conseqüentemente, este admite mais de uma ordem. Por outro lado, em $\mathcal{C}$ há quadrados em excesso para se estabelecer uma ordem.

Passaremos, agora, a discutir sobre a completude de corpos ordenados. Inicialmente, verifiquemos que nem todo corpo ordenado é completo, através do seguinte

Exemplo 2.3 (Um corpo ordenado que não é completo). Pela contrapositiva do Teorema 2.8, o corpo ordenado $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$ do Exemplo 2.2 acima não é completo, já que é ordenável por mais de uma ordem.

A recíproca do Teorema 2.8 não é válida, como vemos a seguir.

Exemplo 2.4 (Um corpo que admite somente uma ordenação mas não é completo). Vimos no Teorema 2.9 que o corpo $\mathcal{Q}$ admite somente uma ordenação, porém $\mathcal{Q}$ não é completo. Para provar isto, observemos que o conjunto

$$A := \{r \in \mathcal{Q} \mid r^2 < 2\}$$

é não vazio ($1 \in A$) e limitado superiormente pelo número 2, e suponhamos que $\mathcal{Q}$ seja completo. Então, existe $c > 0$, $c \in \mathcal{Q}$ tal que $c = \sup A$. Como, pelo Teorema 2.6, não

existe número racional cujo quadrado seja igual a 2, segue que $c^2 < 2$ (H_1) ou $c^2 > 2$ (H_2).

Suponhamos $c^2 < 2$, e consideremos o número positivo

$$d = \min \left(\frac{2 - c^2}{2(c+1)^2}, 1 \right).$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} (c+d)^2 &= c^2 + 2cd + d^2 = c^2 + d(2c+d) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} c^2 + d(2c+1) < c^2 + d(c^2 + 2c + 1) \\ &= c^2 + d(c+1)^2 \\ &\stackrel{(**)}{\leq} c^2 + \frac{2-c^2}{2(c+1)^2} \cdot (c+1)^2 \\ &= c^2 + \frac{2-c^2}{2} = \frac{2c^2 - c^2 + 2}{2} = \frac{c^2 + 2}{2} \\ &\stackrel{(H_1)}{<} \frac{2+2}{2} = 2. \end{aligned}$$

Assim, $c+d$ é um número racional positivo maior que c , cujo quadrado é menor que 2, ou seja, $c+d \in A$ e $c+d > c = \sup A$. Contradição. As desigualdades (*) e (**) são justificadas da seguinte forma:

(*) Se $d = 1$, então $c^2 + d(2c+d) = c^2 + d(2c+1)$;

e se $d = \frac{2-c^2}{2(c+1)^2}$, então $c^2 + d(2c+d) < c^2 + d(2c+1)$.

(**) Se $d = \frac{2-c^2}{2(c+1)^2}$, então $c^2 + d(c+1)^2 = c^2 + \left(\frac{2-c^2}{2(c+1)^2} \right) \cdot (c+1)^2$;

e se $d = 1$, então $c^2 + d(c+1)^2 < c^2 + \left(\frac{2-c^2}{2(c+1)^2} \right) \cdot (c+1)^2$.

Suponhamos, por outro lado, $c^2 > 2$, e consideremos o número positivo

$$d = \frac{c^2 - 2}{2(c+1)^2}.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} (c-d)^2 &= c^2 - 2cd + d^2 = c^2 - d(2c-d) \\ &\stackrel{(***)}{>} c^2 - d(2c+c^2+1) = c^2 - d(c+1)^2 \\ &= c^2 - \frac{c^2-2}{2(c+1)^2} \cdot (c+1)^2 = c^2 - \frac{c^2-2}{2} \\ &= \frac{2c^2 - c^2 + 2}{2} = \frac{c^2 + 2}{2} \\ &\stackrel{(H_2)}{>} \frac{2+2}{2} = 2. \end{aligned}$$

Assim, $c-d$ é um número racional positivo menor que c , cujo quadrado é maior que 2, ou seja, $c-d$ é um limitante superior de A menor que $c = \sup A$. Novamente uma

contradição. Observemos que a desigualdade $(**)$ é estrita porque $c^2 + 1 > -d$, uma vez que $d > 0 \Rightarrow -d < 0$, e $c^2 + 1 > 0$.

Em qualquer caso, concluímos que $A \subset \mathcal{Q}$ é um conjunto não vazio e limitado superiormente que não admite supremo e, portanto, $\mathcal{Q}$ não é um corpo ordenado completo.

Para os quatro próximos exemplos, nos quais continuamos a discutir sobre a completude de corpos ordenados, introduziremos o conceito de função racional e definiremos conjunto denso.

Definição 2.47. *Sejam uma função polinomial $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definida por*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k, \quad \alpha_k \in \mathcal{R}$$

e uma função polinomial não nula $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Dizemos que a função $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definida por

$$h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

é uma função racional, cujo domínio consiste em todos os números reais para os quais $g(x) \neq 0$.

Denotemos por $\mathcal{H}$ o conjunto de todas as funções racionais $\frac{f}{g}$, tais que os únicos fatores polinomiais comuns de f e g são constantes.

Definamos em $\mathcal{H}$ as seguintes operações de adição e multiplicação:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} := \frac{f(x)s(x) + g(x)r(x)}{g(x)s(x)}$$

e

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} := \frac{f(x) \cdot r(x)}{g(x) \cdot s(x)}.$$

Proposição 2.5. *Com as operações de adição e multiplicação acima definidas, $\mathcal{H}$ é um corpo.*

Demonstração. As propriedades (A_1) , (A_4) , (M_1) , (M_4) e (D) são de fácil verificação.

O elemento neutro da adição é a função racional constante $0_{\mathcal{H}}$, definida por $0_{\mathcal{H}}(x) := \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, onde $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathcal{R}$. O elemento oposto (oposto aditivo) de um elemento $\frac{f}{g} \in \mathcal{H}$, é a função racional $\frac{-f}{g} \in \mathcal{H}$. O elemento neutro da multiplicação é a função

racional constante $1_{\mathcal{H}}$, definida por $1_{\mathcal{H}}(x) := \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, onde $f(x) \equiv g(x), \forall x \in \mathcal{R}$.

O elemento oposto (oposto multiplicativo) de um elemento $0_{\mathcal{H}} \neq \frac{f}{g} \in \mathcal{H}$, é a função racional $\frac{g}{f} \in \mathcal{H}$. □

Proposição 2.6. $\mathcal{H}$ é um corpo ordenado.

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as funções racionais $\frac{f}{g} \in \mathcal{H}$, tais que $\frac{f}{g} \neq 0$ e que os coeficientes dos termos de maior grau de f e de g , respectivamente, tenham mesmo sinal.

$$\text{Consideremos } f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k, g(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k x^k, r(x) = \sum_{k=0}^d \gamma_k x^k \text{ e } s(x) = \sum_{k=0}^l \delta_k x^k,$$

tais que $\alpha_n, \beta_m, \gamma_d, \delta_l > 0$ (*); logo, $\frac{f}{g}, \frac{r}{s} \in \mathcal{P}$.

Assim, temos:

(a) $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{f(x) \cdot s(x) + g(x) \cdot r(x)}{g(x) \cdot s(x)}$. Como o termo de maior grau de $f(x) \cdot s(x)$ é $\alpha_n \delta_l x^{n+l}$, o de $g(x) \cdot r(x)$ é $\beta_m \gamma_d x^{m+d}$ e o de $g(x) \cdot s(x)$ é $\beta_m \delta_l x^{m+l}$ e, por (*), $\alpha_n \delta_l > 0$, $\beta_m \gamma_d > 0$ e $\beta_m \delta_l > 0$, temos que $\frac{f}{g} + \frac{r}{s} \in \mathcal{P}$, para todo x que satisfaz $g(x) \cdot s(x) \neq 0$.

Para os casos $\alpha_n, \beta_m > 0$ e $\gamma_d, \delta_l < 0$ (ou $\alpha_n, \beta_m < 0$ e $\gamma_d, \delta_l > 0$) e $\alpha_n, \beta_m, \gamma_d, \delta_l < 0$ verifica-se de modo análogo que $\frac{f}{g} + \frac{r}{s} \in \mathcal{P}$, para todo x que satisfaz $g(x) \cdot s(x) \neq 0$.

(b) De modo semelhante ao do item (a), verifica-se que $\frac{f}{g} \cdot \frac{r}{s} \in \mathcal{P}$, para todo x que satisfaz $g(x) \cdot s(x) \neq 0$.

(c) Seja $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k}{\sum_{k=0}^m \beta_k x^k} \in \mathcal{H}$. Se $h \neq 0$ e $h \notin \mathcal{P}$, então $\alpha_n > 0$ e $\beta_m < 0$ (ou

$\alpha_n < 0$ e $\beta_m > 0$). Daí, $-h \in \mathcal{P}$, pois $-h(x) = \frac{-f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{k=0}^n (-\alpha_k) x^k}{\sum_{k=0}^m \beta_k x^k}$, e com isso

$-\alpha_n < 0$ e $\beta_m < 0$ (ou $-\alpha_n > 0$ e $\beta_m > 0$).

Analogamente, se $-h \notin \mathcal{P}$, então $h \in \mathcal{P}$. □

Proposição 2.7. Os números naturais de $\mathcal{H}$ são as funções racionais constantes da forma $n/1$, onde n é a função polinomial constante cujos valores são todos iguais ao número $n \in \mathcal{N}$.

Demonstração. Denotemos por $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$ o conjunto dos números naturais de $\mathcal{H}$, e por $n_{\mathcal{H}}$ um elemento qualquer de $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$. Como $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$ é, pela Definição 2.27, página 15, um conjunto indutivo, segue que $1_{\mathcal{H}}(x) = 1 \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$. Suponhamos que para todo $x \in \mathcal{R}$ se tenha $n_{\mathcal{H}}(x) = n \in \mathcal{N}$ (*), ou seja, $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$, e provemos que $n+1$ também pertence a $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$. Como $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$ é indutivo, temos que $n_{\mathcal{H}} + 1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$. Mas, $(n_{\mathcal{H}} + 1_{\mathcal{H}})(x) = n_{\mathcal{H}}(x) + 1_{\mathcal{H}}(x) \stackrel{(*)}{=} n+1$, então $n+1 \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$.

Logo, o conjunto $X := \{n_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H} \mid n_{\mathcal{H}}(x) = n, \forall x \in \mathcal{R}\}$ está contido em $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$ e é um conjunto indutivo. Segue do TFI (Teorema 2.3, página 15) que $X = \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$. □

Observação 2.5. De acordo com a caracterização do conjunto $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$, dada na Proposição 2.7 acima, não faremos distinção entre os conjuntos $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$, de modo que para simplificar escreveremos $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$, apesar da natureza distinta destes conjuntos.

Exemplo 2.5 (Um corpo ordenado não arquimediano). O corpo ordenado das funções racionais, $\mathcal{H}$, não é arquimediano, pois qualquer função polinomial $f(x)$ não constante, vista em $\mathcal{H}$ por $\frac{f(x)}{1_{\mathcal{H}}(x)}$, cujo coeficiente do termo de maior grau é positivo, é um limitante superior para o conjunto $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$, dos naturais de $\mathcal{H}$. De fato, se $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$, então n é uma função polinomial de grau zero, e como o grau de qualquer função polinomial não constante f é sempre maior que ou igual a 1, segue que $n \leq f(x)$, para todo $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{H}}$.

Em particular, $f(x) = x$ é um limitante superior para $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$.

O Exemplo 2.3 nos mostrou que existe corpo que não é completo. Mas, se pensamos em algo que não é completo, é razoável que tenhamos a noção de completo em mente (e temos: a Definição 2.25 estabelece este conceito); e mais, é também razoável cogitarmos completar esse objeto não completo. Entretanto, isso nem sempre pode ser feito quando os objetos em estudo são corpos ordenados; isto é o que nos mostra o próximo exemplo. Mas, antes disso, definamos completamento de um corpo ordenado.

Definição 2.48. Dizemos que um corpo ordenado $\mathcal{F}$ pode ser completado se existir um corpo ordenado completo $\mathcal{R}$ o contendo ($\mathcal{R} \supset \mathcal{F}$), de tal modo que as operações de adição e multiplicação e a relação de ordem de $\mathcal{F}$ sejam consistentes com aquelas de $\mathcal{R}$, isto é, as operações e relação de ordem de $\mathcal{F}$ são induzidas das respectivas operações e relação de ordem de $\mathcal{R}$.

Exemplo 2.6 (Um corpo ordenado que não pode ser completado). O corpo ordenado $\mathcal{H}$ não pode ser completado no sentido da Definição 2.48. Em outras palavras, $\mathcal{H}$ não pode ser imerso num sistema de números reais $\mathcal{R}$. De fato, se $\mathcal{H}$ pudesse ser imerso em $\mathcal{R}$, então o conjunto $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$ dos números naturais de $\mathcal{H}$, seria ilimitado em $\mathcal{R}$ (já que $\mathcal{R}$ é arquimediano, como mostra o Teorema 2.4) e limitado em $\mathcal{H}$ (já que $\mathcal{H}$ não é arquimediano, como vimos no Exemplo 2.5), com $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Contradição.

Definição 2.49. Seja $D \subset \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado. Dizemos que D é denso em $\mathcal{F}$, se entre quaisquer dois elementos distintos de $\mathcal{F}$ existir um elemento de D .

Exemplo 2.7. Os conjuntos $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ são densos em $\mathcal{R}$.

De fato, sejam $a, b \in \mathcal{R}$, com $a < b$. Provemos que $(a, b) \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Se $0 \in (a, b)$, nada temos para demonstrar. Se $0 \notin (a, b)$, então $0 \leq a$ ou $b \leq 0$. Consideremos o caso $0 \leq a$ (o caso $b \leq 0$ é análogo). Como $\mathcal{R}$ é arquimediano, existe $n \in \mathcal{N}$ tal que $n > 1/(b - a)$. Seja $m \in \mathcal{N}$ o menor número natural tal que $m > na$, ou seja, $m \in \mathcal{N}$ satisfaz

$$m - 1 < na < m \Rightarrow \frac{m - 1}{n} < a < \frac{m}{n}.$$

Para concluir que $m/n \in (a, b) \cap \mathcal{Q}$, basta mostrar que $m/n < b$. Suponhamos o contrário: que $m/n > b$. Então,

$$\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n} \Rightarrow b-a < \frac{m}{n} - a < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n}$$

e, assim, $b-a < 1/n \Rightarrow n < 1/(b-a)$. Contradição. Portanto, $m/n \in (a, b) \cap \mathcal{Q}$, e concluimos que $\mathcal{Q}$ é denso em $\mathcal{R}$.

Seja $\xi \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, $\xi > 0$, e suponhamos $0 < x < y$. Temos $x/\xi < y/\xi$. Como $\mathcal{Q}$ é denso em $\mathcal{R}$, temos que existe $s \in \mathcal{Q}$ tal que $x/\xi < s < y/\xi \Rightarrow x < s\xi < y$. É claro que $s\xi \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$. Se fosse $s\xi = r$, com $r \in \mathcal{Q}$, teríamos

$$s\xi = r \Rightarrow \xi = r/s \in \mathcal{Q}.$$

Contradição. Portanto, $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ é denso em $\mathcal{R}$.

Proposição 2.8. *Qualquer corpo ordenado $\mathcal{F}$ em que o conjunto dos números racionais é denso é arquimediano.*

Demonstração. Consideremos $a \in \mathcal{F}$, $a > 0$, e seja $0 < \frac{m}{n} < \frac{1}{a}$, onde tomamos $m, n > 0$. Então,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} < \frac{1}{a}.$$

Logo, $\frac{1}{n} < \frac{1}{a}$ donde $n > a$ e, consequentemente, a não é um limitante superior do conjunto $\mathcal{N}$, dos números naturais de $\mathcal{F}$. E já que a é arbitrário, $\mathcal{N}$ não é limitado superiormente, o que prova que $\mathcal{F}$ é arquimediano. $\square$

A contrapositiva desta proposição estabelece que, num corpo ordenado não arquimediano, os números racionais não são densos. Usaremos esse fato no próximo exemplo.

Exemplo 2.8 (Um corpo ordenado onde os números racionais não são densos). O Exemplo 2.5 mostra que o corpo ordenado $\mathcal{H}$ não é arquimediano. Então, temos pela contrapositiva da Proposição 2.8, que o conjunto $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ dos números racionais de $\mathcal{H}$, não é denso em $\mathcal{H}$.

Exemplos de dois elementos distintos de $\mathcal{H}$ sem um número racional entre eles, são quaisquer duas funções polinomiais não constantes, cujos coeficientes dos respectivos termos de maior grau são positivos. Para provar isto, observemos inicialmente que, como $\mathcal{N}_{\mathcal{H}} = \mathcal{N}$, então $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}} = \mathcal{Q}$, onde $\mathcal{Q}$ é o conjunto dos números racionais de $\mathcal{R}$. Em seguida, vejamos que toda função polinomial não constante, cujo coeficiente do termo de maior grau é positivo, é uma cota superior para $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$. De fato, se f estiver nas condições acima descritas, então o grau de f é maior que ou igual a 1. Daí, como o grau de qualquer elemento $\frac{m}{n} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ é igual a zero, temos que $f(x) - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{m}{n}$. Portanto, se f e g atendem as condições acima e $g > f$, então para qualquer $\frac{m}{n} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$, temos $g > f > \frac{m}{n}$, de modo que não há número racional entre f e g .

Apresentaremos, agora, alguns outros conceitos e resultados importantes sobre completamento. Na Definição 2.25, página 14, estabelecemos o conceito de corpo ordenado completo, e com base naquele conceito, também estabelecemos (na Definição 2.48) um conceito de completamento. No entanto, essas definições não são as únicas possíveis. Nesse sentido, definiremos o conceito de completude (de um espaço métrico) estabelecido por Cauchy.

Definição 2.50. *Uma métrica num conjunto M é uma função $d: M \times M \rightarrow \mathcal{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

- (d_1) $d(x, x) = 0$;
- (d_2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- (d_3) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (d_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.51. *Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .*

Quando não houver dúvida sobre (ou, necessidade de especificar) qual métrica se está utilizando, denotaremos um espaço métrico (M, d) simplesmente por M .

Exemplo 2.9. Se $\mathcal{K}$ for um corpo ordenado, então $\mathcal{K}$ se tornará um espaço métrico por meio da definição $d(x, y) := |x - y|$. As condições (d_1) – (d_4) da definição de métrica, seguem imediatamente da Propriedade 2.1, página 17.

Definição 2.52. *Uma aplicação $f: M \rightarrow N$, de um espaço métrico M num espaço métrico N , chama-se uma imersão isométrica quando*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$.

Se, além disso, f for uma aplicação sobrejetiva, então diremos que f é uma isometria de M sobre N , ou uma isometria entre M e N .

A seguir, definimos conjunto denso de modo mais geral que aquele apresentado na Definição 2.49, para usar no próximo teorema.

Definição 2.53. *D é um conjunto denso no espaço métrico M quando cada ponto $x \in M$ é limite de uma sequência de pontos $x_n \in D$.*

Observação 2.6. A Definição 2.49 é um caso particular da Definição 2.53. De fato, suponhamos que o conjunto D seja denso no espaço métrico M , de acordo com a Definição 2.53. Sejam $x, y \in M$ quaisquer e $z = \frac{x+y}{2}$. Se $z \in D$, nada temos para provar. Por outro lado, se $z \notin D$, consideremos a sequência (z_n) em D tal que $z_n \rightarrow z$,

cuja existência é garantida por hipótese. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$. Em particular, para $\varepsilon \leq |z|$, existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < |z| = \left| \frac{x+y}{2} \right|$. Portanto, para algum $n \geq n_0$, $z_n \in (x, y)$.

Definição 2.54 (Espaço métrico completo no sentido estabelecido por Cauchy). *Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Em particular (pelo Exemplo 2.9), temos que um corpo ordenado em que toda sequência de Cauchy é uma sequência convergente é chamado corpo ordenado completo.

O próximo teorema, estabelece o conceito de completamento de um espaço métrico, no sentido da Definição 2.54. Ele nos diz que, dado um espaço métrico não completo M , é possível acrescentar-lhe novos pontos, de modo a obter um espaço completo $\widehat{M}$, sem alterar as distâncias dos pontos originais.

Lema 2.4. *Sejam M um espaço métrico e M_0 um subconjunto denso de M . Se toda sequência de Cauchy em M_0 converge em M , então M é completo.*

Demonstração. Seja (x_k) uma sequência de Cauchy em M . Para cada $k \in \mathcal{N}$, existe uma sequência (s_m^k) em M_0 tal que $\lim s_m^k = x_k$, pois M_0 é denso em M . Então (s_m^m) é sequência de Cauchy, pois

$$d(s_n^n, s_m^m) \leq d(s_n^n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, s_m^m) < \varepsilon$$

uma vez que, para algum $n_0 > 0$, $d(s_n^n, x_n) < \frac{1}{3}\varepsilon$, $d(x_n, x_m) < \frac{1}{3}\varepsilon$ e $d(x_m, s_m^m) < \frac{1}{3}\varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é dado. Portanto, como por hipótese toda sequência de Cauchy em M_0 converge em M , temos que existe $x = \lim s_n^n$. Mas, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} d(x, x_m) &\leq d(x, s_m^m) + d(s_m^m, x_m) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

para algum $n_0 > 0$.

Logo, $\lim x_m = x$, o que prova que (x_k) converge em M e, consequentemente, que M é completo. $\square$

Teorema 2.10. *Todo espaço métrico (M, d) possui um completamento.*

Demonstração. Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy (x_n) em M . Definamos em $\mathcal{M}$ a relação de equivalência

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0,$$

e seja $\widehat{M} = \mathcal{M} / \sim$. Indiquemos os elementos de $\widehat{M}$ por $\widehat{x}$.

Agora, definamos uma métrica $\widehat{d}$ em $\widehat{M}$ da seguinte maneira: se $\widehat{x} \in \widehat{M}$ e $\widehat{y} \in \widehat{M}$ coloquemos

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) := \lim d(x_m, y_m), \quad (2.1)$$

onde $(x_m) \in \widehat{x}$ e $(y_m) \in \widehat{y}$.

Para mostrar que $\widehat{d}$ está bem definida, verifiquemos inicialmente que $\lim d(x_m, y_m)$ existe. Para tanto, é suficiente mostrar que $d(x_m, y_m)$ é sequência de Cauchy em $\mathcal{R}$, pois toda sequência de Cauchy converge em $\mathcal{R}$, de acordo com a Proposição 2.3, página 22.

Como (x_m) e (y_m) são sequências de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $n, m \geq n_0$ implica $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$ e $d(y_n, y_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Então, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m) \\ &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) - d(x_m, y_m) \\ &= d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

se $n, m \geq n_0$. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) - d(x_n, y_n) \\ &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m) - d(x_n, y_n) \\ &= d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

se $n, m \geq n_0$. Portanto, $n, m \geq n_0$ implica

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

e, então, $(d(x_m, y_m))$ é sequência de Cauchy em $\mathcal{R}$.

Mostremos, agora, que a definição de $\widehat{d}$ independe do representante das classes de equivalência escolhido para calcular o limite dado em (2.1). Então, suponhamos

$$(x_m) \sim (x'_m) \text{ e } (y_m) \sim (y'_m).$$

Precisamos mostrar que

$$\lim d(x_m, y_m) = \lim d(x'_m, y'_m).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 > 0$ tal que $n \geq n_0$ implique $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ e $d(y_n, y'_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$. É claro que este tal $n_0 > 0$ existe, pois $(x_m) \sim (x'_m)$ e $(y_m) \sim (y'_m)$.

Então,

$$\begin{aligned}
 d(x'_m, y'_m) - d(x_m, y_m) &\leq d(x'_m, x_m) + d(x_m, y'_m) - d(x_m, y_m) \\
 &\leq d(x'_m, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y'_m) - d(x_m, y_m) \\
 &= d(x'_m, x_m) + d(y_m, y'_m) \\
 &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

se $m \geq n_0$. E, por simetria,

$$d(x_m, y_m) - d(x'_m, y'_m) < \varepsilon,$$

se $m \geq n_0$. Então

$$|d(x_m, y_m) - d(x'_m, y'_m)| < \varepsilon$$

se $m \geq n_0$ e, assim,

$$\lim d(x_m, y_m) = \lim d(x'_m, y'_m).$$

Verifiquemos, agora, que $\widehat{d}$ é métrica em $\widehat{M}$.

Temos que $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}) = \lim d(x_n, x_n) = \lim 0 = 0$, onde $\widehat{x} \in \widehat{M}$ e $(x_n) \in \mathcal{M}$ é um representante qualquer de $\widehat{x}$.

Sejam $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{M}$ tais que $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = 0$. Então,

$$\lim d(x_n, y_n) = 0,$$

sempre que $(x_n) \in \widehat{x}$ e $(y_n) \in \widehat{y}$ e, portanto, $(x_n) \sim (y_n)$, o que implica $\widehat{x} = \widehat{y}$. Em outras palavras, como $d(x_n, y_n) > 0$ para todas $(x_n), (y_n) \in \mathcal{M}$, quando $(x_n) \not\sim (y_n)$, segue que se $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, então $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) > 0$.

Se $(x_n) \in \widehat{x}$ e $(y_n) \in \widehat{y}$, então $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, x_n) = \widehat{d}(\widehat{y}, \widehat{x})$, de modo que $\widehat{d}$ é simétrica.

Se $(x_n) \in \widehat{x}$, $(y_n) \in \widehat{y}$ e $(z_n) \in \widehat{z}$, então

$$\begin{aligned}
 \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \lim d(x_n, y_n) \\
 &\leq \lim [d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)] \\
 &= \lim d(x_n, z_n) + \lim d(z_n, y_n) \\
 &= \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{z}) + \widehat{d}(\widehat{z}, \widehat{y}),
 \end{aligned}$$

o que prova a desigualdade triangular.

Portanto, $\widehat{d}$ é métrica sobre $\widehat{M}$.

Seja $\varphi : M \rightarrow \widehat{M}$ definida por $\varphi(x) = \widehat{(x_m)}$, onde $x_m = x$, para todo $m \in \mathcal{N}$, isto é, a cada $x \in M$, associamos a classe de equivalência que contém a sequência de Cauchy constante $(x, x, x, \dots)$ em M . Denotaremos por $\bar{x}$ a classe de equivalência que contém a sequência $(x, x, x, \dots)$. Assim, temos que

$$\widehat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = \widehat{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim d(x, y) = d(x, y)$$

e, então, $\varphi : M \rightarrow M_0 := \varphi(M)$ é uma isometria.

Nosso próximo passo, consiste em provar que M_0 é denso em $\widehat{M}$. Assim, seja $\widehat{x} \in \widehat{M}$ e $(x_n) \in \widehat{x}$, e consideremos a sequência $(\widehat{x}^k)$ em M_0 , onde para cada $k = 1, 2, 3, \dots$, colocamos $\widehat{x}^k := \bar{x}_k$. Como (x_n) é sequência de Cauchy em M , dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Isto implica que

$$\widehat{d}(\widehat{x}^k, \widehat{x}) = \widehat{d}(\bar{x}_k, \widehat{x}) = \lim d(x_k, x_n) < \varepsilon,$$

quando $k > n_0$.

Então, $\lim \widehat{d}(\widehat{x}^k, \widehat{x}) = 0$, isto é, $\lim \widehat{x}^k = \widehat{x}$ em $\widehat{M}$, mostrando que M_0 é denso em $\widehat{M}$.

Finalmente, provemos que $\widehat{M}$ é completo. Pelo Lema 2.4, basta mostrar que toda sequência de Cauchy em M_0 converge em M . Seja, então, $(\widehat{x}^m)$ uma sequência de Cauchy em M_0 . Observemos que para cada $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\widehat{x}^m = \bar{c}_m,$$

onde c_m são constantes.

Verifiquemos que (c_m) é uma sequência de Cauchy em M . Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\lim d(c_n, c_m) = \widehat{d}(\bar{c}_n, \bar{c}_m) = \widehat{d}(\widehat{x}^n, \widehat{x}^m) < \varepsilon,$$

se $n, m \geq n_0$, pois $(\widehat{x}^m)$ é sequência de Cauchy.

Agora, seja $\widehat{x}$ a classe de equivalência de (c_m) . Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 > 0$ tal que se $m, n \geq n_0$, então

$$\lim d(c_n, c_m) < \varepsilon.$$

Portanto, se $m \geq n_0$, então

$$\widehat{d}(\widehat{x}^m, \widehat{x}) = \lim d(c_m, c_k) < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim \widehat{x}^m = \widehat{x} \in \widehat{M}$.

Com isto, fica provado que todo espaço métrico admite completamento. $\square$

O corolário seguinte estabelece a unicidade (a menos de isometria) do completamento.

Corolário 2.2. *Sejam $\widehat{M}$ e $\widetilde{M}$ completamentos do mesmo espaço métrico M , com imersões isométricas f e g , respectivamente. Existe uma única isometria $\varphi : \widehat{M} \rightarrow \widetilde{M}$ tal que $\varphi \circ f = g$.*

Demonstração. Existência. Definamos $\varphi_0 : f(M) \rightarrow \widetilde{M}$ pondo $\varphi_0(f(x)) = g(x)$, $x \in M$.

Como f e g são imersões isométricas, temos que φ_0 é também uma imersão isométrica, de $f(M)$ em $\widetilde{M}$. Agora, do fato óbvio de que toda imersão isométrica é uma aplicação

uniformemente contínua, temos (ver em [7]: Proposição 8, página 157) que existe uma única aplicação contínua $\varphi: \widehat{M} \rightarrow \widetilde{M}$ que estende φ_0 . Dados, $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{M}$, existem seqüências de pontos $x_n, y_n \in f(M)$ tais que $x_n \rightarrow \widehat{x}$ e $y_n \rightarrow \widehat{y}$, já que $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$, como vimos na demonstração do Teorema 2.10. Agora, como φ_0 é imersão isométrica, temos que

$$\widetilde{d}(\varphi(\widehat{x}), \varphi(\widehat{y})) = \lim \widetilde{d}(\varphi_0(x_n), \varphi_0(y_n)) = \lim \widehat{d}(x_n, y_n) = \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}).$$

Logo, φ é uma imersão isométrica de $\widehat{M}$ em $\widetilde{M}$.

Como $\widehat{M}$ é completo, $\varphi(\widehat{M})$ também o é. Assim, $\varphi(\widehat{M})$ é fechado em $\widetilde{M}$. Como φ estende φ_0 , temos que $\varphi(\widehat{M}) \supset \varphi_0(\widehat{M}) = g(M)$ e, portanto, $\varphi(\widehat{M})$ é denso em $\widetilde{M}$, pois $g(M)$ é denso.

Sendo ao mesmo tempo fechado e denso em $\widetilde{M}$, $\varphi(\widehat{M}) = \widetilde{M}$.

Unicidade. Se $\xi: \widehat{M} \rightarrow \widetilde{M}$ e $\varphi: \widehat{M} \rightarrow \widetilde{M}$ são contínuas e $\varphi \circ f = g = \xi \circ f$, então $\varphi|_{f(M)} = \xi|_{f(M)}$. Como $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$, segue-se que $\varphi = \xi$. $\square$

A Proposição 2.3, página 22, mostra que se $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo ($\mathcal{F} = \mathcal{R}$), então toda seqüência de Cauchy em $\mathcal{F}$ é convergente. Por outro lado, o próximo exemplo deixa claro que a recíproca não é válida, como vemos a seguir.

Exemplo 2.10 (Um corpo ordenado que é completo por Cauchy mas não é completo). Se o corpo ordenado $\mathcal{H}$ é completado de acordo com o Teorema 2.10, a estrutura resultante (que chamaremos de E) é um corpo ordenado em que toda seqüência de Cauchy converge. Entretanto, pelo Exemplo 2.6, o corpo ordenado E não é completo no sentido da Definição 2.25 (página 14), em termos de supremo.

Este último exemplo mostrou que um corpo ordenado ser completo por Cauchy não implica ser completo, ou seja, não implica o Axioma do Supremo (AS). Então, a partir de agora, daremos condições para que isto aconteça. Para tanto, seguem alguns conceitos e resultados preliminares.

Definição 2.55 (Propriedade dos Intervalos Encaixantes - PIE). *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado qualquer. Se, dada uma seqüência $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, existir pelo menos um elemento $c \in \mathcal{F}$ tal que $c \in I_n$, para todo $n \in \mathcal{N}$, então diremos que $\mathcal{F}$ possui a propriedade dos intervalos encaixantes.*

Teorema 2.11. *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado para o qual vale a propriedade dos intervalos encaixantes. Seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma seqüência de intervalos encaixados, com $b_n - a_n \rightarrow 0$. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ contém um único elemento.*

Demonstração. Suponhamos o contrário: que existam elementos $a, b \in \mathcal{F}$, $a \neq b$, tais que $\{a, b\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Logo, para todo $n \in \mathcal{N}$ temos $[a, b] \subset [a_n, b_n]$, daí, para todo $n \in \mathcal{N}$, $b_n - a_n \geq b - a > 0$, contrariando $b_n - a_n \rightarrow 0$. $\square$

Teorema 2.12 (Teorema do Sanduíche). *Seja $\mathcal{F}$ um corpo ordenado qualquer. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para n suficientemente grande, então $\lim z_n = a$.*

Demonstração. Como $x_n, y_n \rightarrow a$, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$ tais que $n \geq n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e $n \geq n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Seja $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Então $n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Logo, $\lim z_n = a$. $\square$

Lema 2.5. *A propriedade arquimediana (PA) implica que a sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge para zero.*

Demonstração. Temos que $n \leq 2^n \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathcal{N}$. Logo, se provarmos que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, concluiremos pelo Teorema do Sanduíche que $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$.

Assim, seja $\varepsilon > 0$. Então $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Como, por hipótese, vale a PA, temos que existe $n_0 \in \mathcal{N}^*$ tal que

$$n_0 \cdot 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Daí, se $n \geq n_0$, então $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$. Logo, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. $\square$

Teorema 2.13. *A propriedade dos intervalos encaixantes juntamente com a propriedade arquimediana implicam o axioma do supremo.*

Demonstração. Seja um conjunto limitado superiormente e não vazio $C \subset \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado qualquer. Como C é limitado superiormente, podemos tomar $b_1 \notin C$ de modo que seja uma cota superior de C ; tomemos também $a_1 \in C$ ($a_1 < b_1$).

Seja $a = \frac{a_1 + b_1}{2}$ o ponto médio do intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Temos que a determina os intervalos $[a_1, a]$ e $[a, b_1]$. Seja $I_2 = [a_2, b_2]$ aquele dentre estes dois intervalos com a seguinte propriedade: $a_2 \in C$ e $b_2 \notin C$ e b_2 é cota superior de C . Notemos que $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$.

Executando este mesmo procedimento, determinamos o intervalo $I_n = [a_n, b_n]$, onde $a_n \in C$ e $b_n \notin C$ e b_n é cota superior de C . Assim, $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$. Dessa forma, $I_{n+1} \subset I_n$ e, como $\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$ (pelo Lema 2.5), temos que existe, de acordo com o

Teorema 2.11, um único c tal que $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Afirmamos que c é cota superior de C . Para provar esta afirmação, suponhamos o contrário: que c não seja cota superior. Daí, existe $x \in C$ tal que $x > c$. Pela construção dos intervalos I_n , temos que $c < x < b_n$, para todo $n \in \mathcal{N}$. Como $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, temos que $c \in I_n$, para todo $n \in \mathcal{N}$, e então $c \geq a_n$.

Assim, $a_n \leq c < x < b_n$. Portanto, $[c, x] \subset I_n$, para todo $n \in \mathcal{N}$. Como $x > c$, concluímos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{c\}$, o que é uma contradição. Assim, c é cota superior de C .

Afirmamos, agora, que c é a menor das cotas superiores de C . Para provar isto suponhamos o contrário. Então existe uma cota superior t de C tal que $t < c$, de modo que para todo $x \in C$, $a_n \leq x \leq t < c \leq b_n$, para todo $n \in \mathcal{N}$. Logo, $[t, c] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, para todo $n \in \mathcal{N}$, o que implica $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{c\}$; novamente uma contradição. Portanto, $c = \sup C$. $\square$

Teorema 2.14. *Se $\mathcal{F}$ é um corpo ordenado completo por Cauchy então vale em $\mathcal{F}$ a propriedade dos intervalos encaixantes.*

Demonstração. Dada (I_n) , uma sequência de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ encaixantes, basta observar que as sequências (a_n) e (b_n) são monótonas e limitadas, logo são sequências de Cauchy e, portanto, convergentes para a e b respectivamente. É fácil ver que $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. $\square$

O Teorema 2.13 juntamente com o Teorema 2.14, estabelecem que um corpo ordenado completo por Cauchy que possui a propriedade arquimediana admite o axioma do supremo, ou seja, é completo.

2.2.1 Importância da Completude de $\mathcal{R}$

Nesta subseção, mostraremos que resultados consagrados na Análise Real podem não ter validade quando a hipótese de completude não é suposta.

Nos exemplos seguintes definiremos funções num intervalo fechado $[a, b] \subset \mathcal{Q}$ (que denotaremos por $[a, b]_{\mathcal{Q}}$) e tendo valores em $\mathcal{Q}$.

Começemos com o exemplo de uma função contínua num intervalo fechado, que não é limitada nem uniformemente contínua nele.

Exemplo 2.11. Seja $f: [0, 2]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$, definida por

$$f(x) := \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Temos que f é contínua no intervalo $[0, 2]_{\mathcal{Q}}$, pois f é uma função racional.

f não é limitada, pois se (x_n) é uma sequência de números racionais no intervalo $[0, 2]_{\mathcal{Q}}$, tal que $x_n^2 \rightarrow 2$, então $x_n^2 - 2 \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Agora, sabemos que se $f: X \rightarrow \mathcal{R}$ é uniformemente contínua e X é limitado, então f é limitada em X (pode-se ver este resultado em [6], página 245). Logo, como f não é limitada e $[0, 2]_{\mathcal{Q}}$ é limitado, temos pela contrapositiva do resultado acima enunciado que f não é uniformemente contínua.

Uma sequência de números racionais como a considerada no Exemplo 2.11 acima, cujo quadrado converge para o número dois, de fato existe. Para construí-la, apresentamos os seguintes resultados, cujas demonstrações podem ser vistas em [6], páginas 127 e 128.

Teorema 2.15 (Método das aproximações sucessivas). *Seja $0 \leq \lambda < 1$. Suponhamos que a sequência (x_n) seja tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathcal{N}$. Então (x_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, converge.*

Lema 2.6. *Para todo $x > 0$, tem-se $\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) > 1$.*

Construção: Seja (x_n) uma sequência definida recursivamente pondo $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$, para todo $n \in \mathcal{N}$. É claro que $x_n \in \mathcal{Q}$, para todo $n \in \mathcal{N}$. Segue-se do Lema 2.6 que $x_n > 1$, para todo $n > 1$. Logo, $x_n x_{n+1} > 1$, ou seja, $\frac{1}{x_n x_{n+1}} < 1$, para todo $n > 1$.

Usaremos este fato para provar que a sequência (x_n) cumpre a condição $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n > 1$. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(x_{n+1} + \frac{2}{x_{n+1}} \right) - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n) + \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n) + \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \right| &= \left| \left(\frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n) + \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{x_{n+1} - x_n} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x_n x_{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

pois $0 < \frac{1}{x_n x_{n+1}} < 1$. Portanto, temos pelo Método das aproximações sucessivas que a sequência (x_n) é de Cauchy e, então, é convergente. Como $x_n \geq 1$ para todo $n \in \mathcal{N}$, segue que $b := \lim x_n > 0$.

Resta verificar que $x_n^2 \rightarrow 2$, quando $n \rightarrow +\infty$. De fato, fazendo $n \rightarrow +\infty$ na igualdade que define x_{n+1} em função de x_n , obtemos $b = \frac{1}{2} \left(b + \frac{2}{b} \right)$, ou seja, $b = \frac{2}{b} \Rightarrow b^2 = 2$ (*). Finalmente, por propriedades aritméticas dos limites (ver, por exemplo, em [6], páginas 115 e 116), temos que $x_n^2 \rightarrow b^2 \stackrel{(*)}{=} 2$.

O exemplo seguinte mostra uma função contínua e limitada num intervalo fechado, mas não uniformemente contínua nele.

Exemplo 2.12. Seja $f: [0, 2]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x^2 \in [0, 2)_{\mathcal{Q}} \\ 1, & \text{se } x^2 \in (2, 4]_{\mathcal{Q}} \end{cases}.$$

Seja x_0 um ponto qualquer, que satisfaça $x_0^2 \in [0, 2)_{\mathcal{Q}}$. Seja (x_n) uma sequência de números racionais tal que $x_n \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Como $x_n \rightarrow x_0$, se tomarmos $n_0 \in \mathcal{N}$ suficientemente grande, teremos $x_n^2 \in (0, 2)_{\mathcal{Q}}$, para todo $n > n_0$. Logo, $f(x_n) = 0$ para todo $n > n_0$ e, daí, $f(x_n) \rightarrow 0 = f(x_0)$. Se $x_0^2 \in (2, 4]_{\mathcal{Q}}$, a prova é análoga. Logo, f é contínua em $[0, 2]_{\mathcal{Q}}$.

f é limitada, por exemplo, por -1 e 1 , ou seja, $|f(x)| < 1$ para todo $x \in [0, 2]_{\mathcal{Q}}$.

Agora, se tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para todo $\delta > 0$, $\delta \in \mathcal{Q}$, que escolhermos, basta tomar $x_1, x_2 \in \mathcal{Q}$ satisfazendo $x_1^2 \in \left(2 - \frac{\delta}{2}, 2\right)_{\mathcal{Q}}$ e $x_2^2 \in \left(2, 2 + \frac{\delta}{2}\right)_{\mathcal{Q}}$ para que tenhamos $|x_1 - x_2| < \delta$ e $|f(x_1) - f(x_2)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$. Portanto, f não é uniformemente contínua em $[0, 2]_{\mathcal{Q}}$.

O exemplo seguinte mostra uma função uniformemente contínua (e além disso limitada) num intervalo fechado, que não possui um máximo valor nele.

Exemplo 2.13. Seja $f: [0, 1]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$, definida por

$$f(x) = x - x^3.$$

f é limitada, por exemplo, por 0 e 1 , de modo que $f(x) \in [0, 1)_{\mathcal{Q}}$, para todo $x \in [0, 1]_{\mathcal{Q}}$.

Verifiquemos que f não assume máximo valor em $[0, 1]_{\mathcal{Q}}$. De fato, estudando a função $\bar{f}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$, definida por

$$\bar{f}(x) = x - x^3$$

com relação a crescimento e decrescimento, observamos que $\bar{f}'(x) > 0$ quando $x \in [0, \sqrt{3}/3)$, $\bar{f}'(\sqrt{3}/3) = 0$ e $\bar{f}'(x) < 0$ quando $x \in (\sqrt{3}/3, 1]$, já que $\bar{f}'(x) = -3x^2 + 1$ e $\bar{f}'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}/3$. Assim, como $\bar{f}(\sqrt{3}/3) = \sqrt{3}/3 - 3/27 > 0$ e $\bar{f}''(x) < 0$ quando $x > 0$, temos que a concavidade de $\bar{f}$ é voltada para baixo no intervalo $[0, 1]$. Logo, o único ponto onde $\bar{f}$ assume máximo valor é $\sqrt{3}/3$. Agora, a função $\bar{f}$ é uma extensão para o intervalo fechado $[0, 1] \subset \mathcal{R}$ da função $f: [0, 1]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$ acima definida, implicando que se f possuisse máximo valor, então este seria o mesmo máximo valor de $\bar{f}$, o que é impossível, já que $\sqrt{3}/3 \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$.

Como f' é limitada em $[0, 1]_{\mathcal{Q}}$, temos que f é uniformemente contínua (ver [6], páginas 242 e 273).

Teorema 2.16 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Ver em [6], página 234. $\square$

O exemplo seguinte mostra uma função contínua num intervalo fechado, para a qual não vale o Teorema do Valor Intermediário.

Exemplo 2.14. Seja $f: [0, 2]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x^2 \in [0, 2)_{\mathcal{Q}} \\ 1, & x^2 \in (2, 4]_{\mathcal{Q}} \end{cases}.$$

Temos que $0 = f(0) < \frac{1}{2} < f(2) = 1$, entretanto não existe $c \in (0, 2)_{\mathcal{Q}}$ tal que $\frac{1}{2} = f(c)$, uma vez $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.

Outra função contínua num intervalo fechado para a qual não vale o Teorema do Valor Intermediário é $f: [1, 2]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$, definida por

$$f(x) = x^2.$$

De fato, temos que $1 = f(1) < 2 < f(2) = 4$, entretanto não existe $c \in (1, 2)_{\mathcal{Q}}$ tal que $2 = f(c)$, já que não há número racional c tal que seja $c^2 = 2$.

O exemplo seguinte mostra uma função diferenciável não constante cuja derivada se anula sobre um intervalo fechado.

Exemplo 2.15. Seja $f: [0, 2]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x^2 \in [0, 2)_{\mathcal{Q}} \\ 1, & x^2 \in (2, 4]_{\mathcal{Q}} \end{cases}.$$

É claro que $f'(x) = 0$ para todo $x \in [0, 2]_{\mathcal{Q}}$.

Teorema 2.17 (Teorema de Rolle). *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é diferenciável em (a, b) , então existe um ponto $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Ver em [6], página 270. $\square$

O último exemplo desta seção, mostra uma função diferenciável para a qual não vale o Teorema de Rolle.

Exemplo 2.16. Seja $f: [0, 1]_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$, definida por

$$f(x) = x - x^3.$$

Temos que f é contínua em $[0, 1]_{\mathcal{Q}}$, $f(0) = 0 = f(1)$ e f é diferenciável em $(0, 1)_{\mathcal{Q}}$, entretanto não existe $c \in (0, 1)_{\mathcal{Q}}$ tal que $f'(c) = 0$, já que não há número racional c tal que seja $c^2 = \frac{1}{3}$. Portanto, não vale o Teorema de Rolle.

3 Funções e Limites

Neste capítulo, discutimos situações pouco conhecidas no ambiente dos números reais, envolvendo funções e limites. Tais situações, nem sempre se apresentam como exemplos de fácil verificação, o que normalmente se dá pelo caráter não intuitivo das mesmas. Daí vem a relevância dos exemplos aqui apresentados.

Definição 3.1. Dizemos que uma função é irracional quando não é racional (vide Definição 2.47, página 27).

Definição 3.2. Seja $A \subset \mathcal{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f: A \rightarrow \mathcal{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b,$$

quando o número real b satisfaz a seguinte condição: dado $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar $N > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$, sempre que $x \geq N$.

De maneira análoga, define-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, quando o domínio de f é ilimitado inferiormente: para todo $\varepsilon > 0$ deve existir $N > 0$ tal que $x \leq -N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

As duas proposições a seguir estabelecem relação entre limites infinitos de uma função racional e o grau das funções polinomiais que a compõe.

Proposição 3.1. Se f e g são funções polinomiais tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r \in \mathcal{R}^* := \mathcal{R} - \{0\}$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r \in \mathcal{R}^*$), então f e g possuem o mesmo grau.

Proposição 3.2. Sejam f e g funções polinomiais. Se f e g possuem o mesmo grau, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemplo 3.1 (Uma função irracional). Seja $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por

$$h(x) := \sqrt{x^2 + 1}.$$

A função h assim definida não é racional. De fato, suponhamos o contrário: que existam funções polinomiais $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tais que $h(x) = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)/g(x)$, para

todo $x \in \mathcal{R}$ tal que $g(x) \neq 0$. Daí, temos $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{f(x)}{xg(x)}$, para todo $x \neq 0$ e para todo $x \in \mathcal{R}$ tal que $g(x) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Isto significa, de acordo com a Proposição 3.1, que $f(x)$ e $xg(x)$ são funções polinomiais de mesmo grau. Entretanto, temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1,$$

o que contradiz a Proposição 3.2.

Definição 3.3. Uma função f é algébrica se existe uma função polinomial $p(u) = \sum_{k=0}^n a_k(x)u^k$, cujos coeficientes $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ são funções polinomiais reais não todas identicamente nulas e tais que a função composta $p(f(x))$ se anula identicamente em $D(f)$.

Definição 3.4. Uma função é transcendente se não é algébrica.

Exemplo 3.2 (Uma função transcendente). Seja $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por $f(x) := e^x$.

Afirmamos que f é uma função transcendente. De fato, supondo o contrário, existe uma função polinomial

$$p(u) = \sum_{k=0}^n a_k(x)u^k$$

tal que

$$g_0(x) := p(f(x)) = p(e^x) = a_0(x) + a_1(x)e^x + \dots + a_n(x)e^{nx} \equiv 0,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. Assim, temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_0(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0(x) = 0 \Rightarrow a_0(x) \equiv 0,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$, ou seja,

$$g_0(x) = a_1(x)e^x + \dots + a_n(x)e^{nx} \equiv 0,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. Escrevamos

$$g_1(x) := \frac{g_0(x)}{e^x} = a_1(x) + a_2(x)e^x + \dots + a_n(x)e^{(n-1)x} \equiv 0,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. Temos, também, que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_1(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a_1(x) = 0 \Rightarrow a_1(x) \equiv 0,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. Logo,

$$g_1(x) = a_2(x)e^x + \cdots + a_n(x)e^{(n-1)x} \equiv 0,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. Daí, podemos escrever

$$g_2(x) := \frac{g_1(x)}{e^x} = a_2(x) + a_3(x)e^{2x} + \cdots + a_n(x)e^{(n-2)x} \equiv 0,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. E então concluiremos, de modo análogo aos anteriores, que $a_2(x) \equiv 0$, para todo $x \in \mathcal{R}$. Prosseguindo com esse processo, que é finito (possui $n + 1$ etapas), concluiremos que $a_3(x) \equiv a_4(x) \equiv \cdots \equiv a_n(x) \equiv 0$, para todo $x \in \mathcal{R}$. Mas, isso é uma contradição, pois nem todos os coeficientes da função polinomial são identicamente nulos. A contradição surgiu em decorrência de supormos $p(f(x)) \equiv 0$, para todo $x \in \mathcal{R}$. Logo, não existe uma tal função polinomial com esta propriedade, e concluímos que a função f é transcendente.

Para o próximo exemplo necessitamos do seguinte resultado:

Proposição 3.3. *Se x é um número racional igual a m/n , onde m e n são inteiros tais que a fração m/n é irredutível e $n > 0$, então m e n são unicamente determinados.*

Demonstração. Suponhamos que m e n não sejam unicamente determinados, ou seja, que existam inteiros r e s , $s > 0$, tais que r/s seja irredutível e $m/n = r/s$ com $n \neq s$.

Agora, pelo Teorema Fundamental da Aritimética (ver [3], página 46), temos que existem números primos

$$\begin{aligned} m_1, \dots, m_k, \\ n_1, \dots, n_i, \\ r_1, \dots, r_j, \\ s_1, \dots, s_l \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} m &= m_1 \cdots m_k, \\ n &= n_1 \cdots n_i, \\ r &= r_1 \cdots r_j, \\ s &= s_1 \cdots s_l. \end{aligned}$$

Logo, $m \cdot s = r \cdot n \Rightarrow (m_1 \cdots m_k) \cdot (s_1 \cdots s_l) = (r_1 \cdots r_j) \cdot (n_1 \cdots n_i)$ (*). Como as frações m/n e r/s são irredutíveis, temos que nenhum dos números $m_1, \dots, m_k$ pertencem ao conjunto $\{n_1, \dots, n_i\}$ e, da mesma forma, nenhum dos números $r_1, \dots, r_j$ pertencem ao conjunto $\{s_1, \dots, s_l\}$. O Teorema Fundamental da Aritimética nos garante, também, que os fatores primos que expressam um número inteiro são unicamente determinados. Desta forma, para que a igualdade (*) seja verdadeira, os fatores primos de m devem ser os mesmos de r e os fatores primos de s os mesmos de n , ou seja, $m = r$ e $n = s$. $\square$

Definição 3.5. Uma função f é localmente limitada num ponto $x_0 \in D(f)$, quando existe uma vizinhança de x_0 na qual f é limitada. Uma função f é localmente limitada num subconjunto A de seu domínio, quando f é localmente limitada em todo ponto de A .

Exemplo 3.3 (Uma função que não é localmente limitada). Seja $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} n, & \text{se } x \text{ é racional, } x = m/n \text{ é irredutível e } n > 0 \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}.$$

Seja $a \in \mathcal{R}$ qualquer. Afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$ dado, f não é limitada na vizinhança $V(a, \varepsilon)$ do ponto $a \in \mathcal{R}$. De fato, se f fosse limitada em $V(a, \varepsilon)$, então concluiríamos, pela definição de f , que existe uma quantidade finita de elementos $n \in \mathcal{N}$ tais que $x = m/n \in V(a, \varepsilon)$. Daí, também existiria apenas uma quantidade finita de elementos $m \in \mathcal{Z}$, pois m/n é irredutível, de modo que para cada n existe único m correspondente, como provado na Proposição 3.3. Entretanto, isto permitiria a existência de somente uma quantidade finita de números racionais na vizinhança $V(a, \varepsilon)$. O que é um absurdo, pois $\mathcal{Q}$ é denso em $\mathcal{R}$.

Portanto, f não é localmente limitada.

Exemplo 3.4 (Uma função bijetiva entre dois intervalos, que em nenhum subintervalo é monótona). Seja $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathcal{Q} \\ 1 - x, & \text{se } x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} \end{cases}.$$

Afirmamos que não há subintervalo de $[0, 1]$ no qual f seja monótona. De fato, se existisse $A \subset [0, 1]$ tal que $f|_A$ fosse monótona, então teríamos $A \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ ou $A \cap \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} = \emptyset$. Mas, ambos os casos são impossíveis, pois $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ são densos em $\mathcal{R}$.

f é bijetiva. De fato, provemos que f é sobrejetiva. Seja $y \in [0, 1]$ qualquer. Se $y \in \mathcal{Q}$, tomando $x = y$ obtemos $f(x) = y$ diretamente. Se $y \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, tomando $x = 1 - y \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ obtemos $f(x) = f(1 - y) = 1 - (1 - y) = y$. Logo, o contradomínio de f é igual ao conjunto imagem.

Provemos, agora, que f é injetiva. Sejam $x, y \in [0, 1]$ tais que $x \neq y$ e, sem perda de generalidade, $x < y$ (*). Consideremos os seguintes casos: se $x, y \in \mathcal{Q}$, então $f(x) = x < y = f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$; se $x, y \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, então $f(x) = 1 - x > 1 - y = f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$; se $x \in \mathcal{Q}$ e $y \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ (ou, analogamente, $x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ e $y \in \mathcal{Q}$), então $f(x) = x \in \mathcal{Q}$ e $f(y) = 1 - y \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ e, portanto, $f(x) \neq f(y)$, necessariamente.

Definição 3.6. Uma função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ é dita periódica com período p se $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in \mathcal{R}$. Uma função é periódica se é periódica com período p , para algum $p \neq 0$.

Exemplo 3.5 (Uma função periódica não constante sem um menor período positivo).
Seja a função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathcal{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} \end{cases}.$$

Os períodos da função f são os números racionais. De fato, veja que:

- (i) se $x \in \mathcal{Q}$ e $p \in \mathcal{Q}$, então $x + p \in \mathcal{Q} \Rightarrow f(x) = 1 = f(x + p)$;
- (ii) se $x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ e $p \in \mathcal{Q}$, então $x + p \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, pois se tivéssemos $x + p \in \mathcal{Q}$, existiriam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, tais que $x + p = m/n$. Mas, como $p \in \mathcal{Q}$, existem $r, s \in \mathbb{Z}$, com $s \neq 0$, tais que $p = r/s$. Daí, $x + p = m/n \Rightarrow x + r/s = m/n \Rightarrow x = (ms - rn)/ns \in \mathcal{Q}$. Contradição. Assim, temos $f(x) = -1 = f(x + p)$.

Logo, qualquer número racional é um período para f e, portanto, como $\mathcal{Q}$ é denso em $\mathcal{R}$, concluímos que f não tem um menor período positivo.

Observação 3.1. É fácil verificar que o conjunto dos períodos de qualquer função a valores reais com domínio $\mathcal{R}$, forma um grupo aditivo, onde grupo aditivo é um sistema matemático constituído por um conjunto não vazio e uma operação de adição, denotada por $+$, satisfazendo os axiomas (A_1) , (A_2) e (A_3) da definição de corpo dada no Capítulo 2, página 11.

Proposição 3.4. *Seja uma função periódica $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, e seja P o conjunto dos períodos desta função. Temos que o conjunto (grupo aditivo) P ou é denso ou é discreto. Se discreto, consiste de todos os múltiplos inteiros de um menor elemento positivo. Este último caso sempre se obtém para uma função periódica não constante com domínio $\mathcal{R}$, que possui pelo menos um ponto de continuidade.*

Demonstração. Provemos que se P não é discreto, então é denso. Mas, notemos que um conjunto não é discreto se, e somente se, possui algum ponto de acumulação. Logo, é suficiente provar que se $P' \neq \emptyset$, então P é denso em $\mathcal{R}$. Sejam, então, $r \in \mathcal{R}$ e $a_0 \in P'$, tais que $a_0 < r$. Como a_0 é ponto de acumulação de P , existe uma sequência (a_n) em P tal que $a_n \rightarrow a_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que para $i, j \in \mathcal{N}$, $i > j$, $i \geq n_0 \Rightarrow |a_i - a_0| < \varepsilon/2$ e $j \geq n_0 \Rightarrow |a_j - a_0| < \varepsilon/2$, e daí $b_\varepsilon := |a_i - a_j| \leq |a_i - a_0| + |a_j - a_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Agora, escolhendo arbitrariamente $p \in P$, $p < r$, temos que para $n \in \mathcal{N}$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno ($\varepsilon < r - p$), $p + nb_\varepsilon \leq r < p + (n+1)b_\varepsilon$. Escrevendo $p_n := p + nb_\varepsilon$, observamos que $p_{n+1} - p_n = [p + (n+1)b_\varepsilon] - [p + nb_\varepsilon] = b_\varepsilon < \varepsilon$. Assim, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existem $i, j \in \mathcal{N}$ tais que $b_\varepsilon < \varepsilon$, e para $n \in \mathcal{N}$ suficientemente grande, obtemos $p_n \leq r < p_{n+1}$ e $p_{n+1} - p_n < \varepsilon$. E isto encerra a argumentação, pois do fato de P ser um grupo aditivo, temos que $p_n = p + nb_\varepsilon \in P$.

Por outro lado, provemos que se f é contínua num ponto $a_0 \in \mathcal{R}$, então P não é denso (isto é suficiente para provar que P é discreto, pois se P não é denso, então já que P é aditivo, $P' = \emptyset$, o que implica P discreto).

Vamos supor o contrário: que P é denso. Como f é contínua em a_0 , temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in \mathcal{R}$, $|x - a_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon$. Mas, como estamos supondo f não constante, existe $x_0 \in \mathcal{R}$ tal que $f(x_0) \neq f(a_0)$ e, daí, $\eta := |f(x_0) - f(a_0)| > 0$ (*). Agora, como P é denso, então existe $p \in P$ tal que $x_0 + p \in B(a_0, \delta)$, para todo $\delta > 0$. Entretanto, $f(x_0 + p) = f(x_0)$ e, por (*), temos que $f(x_0)$ não está contido na bola $B(f(a_0), \eta)$, contrariando a continuidade de f . Portanto, P não pode ser denso, e concluímos que P é discreto.

Finalmente, observemos que se P é discreto, então existe um menor elemento positivo em P . De fato, suponhamos o contrário: que P seja discreto mas não admita um menor elemento positivo. Seja o conjunto $P_+ := \{p \in P \mid p > 0\}$. Sendo o conjunto P discreto, temos que dado arbitrariamente $p \in P_+$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $D(p, \varepsilon_0) \cap P = \emptyset$. Como P_+ é limitado inferiormente (pelo zero, por exemplo), temos pela Proposição 2.2, página 14, que existe $0 \leq \alpha = \inf P_+$. Daí, como não existe um menor elemento positivo em P , temos que para $\varepsilon_0 > 0$, existe $k_1 \in P_+$ tal que $\alpha < k_1 < \alpha + \varepsilon_0$. Temos também, para k_1 , que existe $k_2 \in P_+$ tal que $\alpha < k_2 < k_1$. Assim, $\alpha < k_2 < k_1 < \alpha + \varepsilon_0 \Rightarrow k := k_1 - k_2 < \varepsilon_0$. Como P é um grupo aditivo e $k > 0$, segue que $k \in P_+$. Logo, $p + k \in P_+ \subset P$ e $p + k \in D(p, \varepsilon_0)$, ou seja, $D(p, \varepsilon_0) \cap P \neq \emptyset$. Contradição. Logo, concluímos que existe $p_0 \in P_+$ tal que $p_0 \leq p$, para todo $p \in P_+$.

Supondo que existe (sem perda de generalidade) $0 < q \notin \{kp_0 : k \in \mathbb{Z}\}$, $q \in P$, temos que $np_0 < q < (n+1)p_0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < q - np_0 \in P$ e $q - np_0 < p_0$ o que é um absurdo, mostrando neste caso, que P consiste de todos os múltiplos inteiros de um menor elemento positivo. $\square$

Vimos na Proposição 3.4 acima, que se uma função periódica não constante $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ possui pelo menos um ponto de continuidade, então o conjunto dos seus períodos é discreto. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, como veremos a seguir. Para tanto, daremos a seguinte caracterização de continuidade de funções em termos de sequências.

Teorema 3.1. *Para que $f: A \rightarrow \mathcal{R}$ seja contínua no ponto $a_0 \in A$ é necessário e suficiente que se tenha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a_0)$, para toda sequência de pontos $x_n \in A$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a_0$.*

Exemplo 3.6 (Uma função periódica descontínua, cujo conjunto dos períodos é discreto). Seja $k \in \mathcal{R}^*$. Para $x \in (-1/2, 1/2]$, definamos a função f como segue:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{se } x \in (-1/2, 1/2] \cap \mathcal{Q}^* \\ -x, & \text{se } x \in (-1/2, 1/2] \cap \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}^* \\ k, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

onde $\mathcal{Q}^* := \mathcal{Q} - \{0\}$.

Se $x \notin (-1/2, 1/2]$, então existe $x_0 \in (-1/2, 1/2]$ tal que $x = x_0 + n$, para algum $n \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$. Daí, definimos f para $x \notin (-1/2, 1/2]$ por extensão periódica, fazendo $f(x) = f(x_0 + n) := f(x_0)$.

Por construção, f é periódica e o conjunto dos seus períodos é, obviamente, o conjunto discreto $P = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}^*$.

Afirmamos que f não é contínua em x , para todo $x \in \mathcal{R}$. Como f foi definida por extensão periódica, basta provar que f não é contínua no intervalo $(-1/2, 1/2]$.

Temos que f não é contínua no ponto $x_0 = 0$. De fato, seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Temos, para todo $n \in \mathcal{N}$, que

$$f(x_n) := \begin{cases} x_n, & \text{se } x_n \in \mathcal{Q} \\ -x_n, & \text{se } x_n \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} \end{cases}.$$

Como $x_n \rightarrow 0$ e (consequentemente) $-x_n \rightarrow 0$, segue que $f(x_n) \rightarrow 0 \neq k = f(0)$, quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, f é descontínua em $x_0 = 0$.

Agora, seja $0 \neq x_0 \in (-1/2, 1/2]$. Consideremos uma sequência (x_n) , tal que $x_n \in \mathcal{Q}$, para todo $n \in \mathcal{N}$, e $x_n \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Consideremos, também, uma sequência (y_n) , tal que $y_n \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, para todo $n \in \mathcal{N}$, e $y_n \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Temos que $f(x_n) = x_n \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$, e $f(y_n) = -y_n \rightarrow -x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, f é descontínua em todo $x_0 \neq 0$.

Exemplo 3.7 (Uma função descontínua em todos pontos de seu domínio, cujo valor absoluto é contínuo em todos os pontos). Seja a função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathcal{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} \end{cases}.$$

Para ver que f é descontínua, basta observar que se $x, x_0 \in D(f)$, então $|f(x) - f(x_0)| = 0$ ou $|f(x) - f(x_0)| = 2$, de modo que para $\varepsilon = 1$, por exemplo, não existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < 1$ sempre que $|x - x_0| < \delta$. Se isso acontecesse, teríamos que os racionais ou os irracionais não seriam densos em $\mathcal{R}$, chegando num absurdo.

Por outro lado, $g(x) = |f(x)| = |\pm 1| = 1$ é contínua em $\mathcal{R}$, pois $|g(x) - g(x_0)| = 0$, para todos $x, x_0 \in \mathcal{R}$.

Exemplo 3.8 (Uma função contínua num único ponto). Seja a função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathcal{Q} \\ -x, & \text{se } x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} \end{cases}.$$

Temos que f é contínua no ponto $x_0 = 0$. De fato, seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Temos, para todo $n \in \mathcal{N}$, que

$$f(x_n) := \begin{cases} x_n, & \text{se } x_n \in \mathcal{Q} \\ -x_n, & \text{se } x_n \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} \end{cases}.$$

Como $x_n \rightarrow 0$ e (consequentemente) $-x_n \rightarrow 0$, segue que $f(x_n) \rightarrow 0 = f(0)$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Por outro lado, seja $x_0 \neq 0$. Consideremos uma sequência (x_n) , tal que $x_n \in \mathcal{Q}$, para todo $n \in \mathcal{N}$, e $x_n \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Consideremos, também, uma sequência (y_n) , tal que $y_n \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, para todo $n \in \mathcal{N}$, e $y_n \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Temos que $f(x_n) = x_n \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$, e $f(y_n) = -y_n \rightarrow -x_0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, f é descontínua em todo $x_0 \neq 0$.

Portanto, a função f dada é contínua somente no ponto $x_0 = 0$.

Exemplo 3.9 (Uma função contínua em todo ponto irracional e descontínua em todo ponto racional). Seja $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} n, & \text{se } x \text{ é racional, } x = m/n \text{ é irredutível e } n > 0 \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}.$$

Afirmamos que f é contínua em todo ponto $a \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$. De fato, seja (x_k) uma sequência qualquer, tal que $x_k \rightarrow a$, quando $k \rightarrow +\infty$. Se $x_k \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, então $f(x_k) = 0$. Se $x_k \in \mathcal{Q}$, $x_k = m_k/n_k$ é irredutível e $n_k > 0$, então temos $f(x_1) = f(m_1/n_1) = 1/n_1$, $f(x_2) = f(m_2/n_2) = 1/n_2, \dots$, $f(x_k) = f(m_k/n_k) = 1/n_k, \dots$

Temos, então, a sequência $(1/n_1, 1/n_2, \dots, 1/n_k, \dots)$. Observemos que $1/n_k \rightarrow 0 \Leftrightarrow n_k \rightarrow +\infty$. Se a sequência (n_k) fosse limitada, $\mathcal{N}$ não seria arquimediano. Logo, $n_k \rightarrow +\infty \Rightarrow 1/n_k \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_k) \rightarrow 0$. Portanto, se $a \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, temos que dada uma sequência (x_k) qualquer, tal que $x_k \rightarrow a$, obtemos $f(x_k) \rightarrow 0 = f(a)$.

Provemos, agora, que f não é contínua em $a \in \mathcal{Q}$. De fato, seja $a = m/n$ irredutível, com $n > 0$. Consideremos a sequência (x_k) em $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$, tal que $x_k \rightarrow a$. Temos que $f(x_k) = 0$, para todo $k \in \mathcal{N}$. Logo, $f(x_k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Por outro lado, $f(a) = f(m/n) = 1/n \neq 0$ e, portanto, $f(x_k) \nrightarrow f(a)$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Definição 3.7. Se f for uma função descontínua num ponto x_0 , mas existir $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, então diremos que a descontinuidade no ponto x_0 é removível (para remover a descontinuidade, basta redefinir a função f de tal modo que se tenha $f(x_0) = l$).

Exemplo 3.10 (Uma função com um conjunto denso de pontos de descontinuidade, cada um dos quais é removível). Se $a \in \mathcal{Q}$, e se a função do Exemplo 3.9 acima é redefinida no ponto $a \in \mathcal{Q}$ para ter valor zero, então f torna-se contínua neste ponto.

Definição 3.8. Um conjunto A é enumerável se A é finito ou existe uma aplicação bijetiva entre os conjuntos $\mathcal{N}$ e A .

Definição 3.9. Seja (x_n) uma sequência de números reais qualquer. Para cada $n \in \mathcal{N}$ definimos

$$S_n := \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

A sequência (S_n) é chamada sequência das somas parciais da série $\sum x_n$ e x_n é o n -ésimo termo (ou termo geral) da série. Escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

quando o limite acima existe e, neste caso, ele é dito limite da série. A série $\sum x_n$ é convergente ou divergente se (S_n) é convergente ou divergente, respectivamente.

Exemplo 3.11 (Uma função monótona cujos pontos de descontinuidade formam um conjunto enumerável arbitrário - que pode ser denso). Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathcal{R}$ um conjunto enumerável arbitrário.

Seja $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k$ uma série convergente, tal que $p_k > 0$ para cada $k \in \mathcal{N}$, e para cada $x \in \mathcal{R}$, seja $N_x := \{k \in \mathcal{N} \mid a_k \leq x\}$.

Se A for um conjunto infinito, definamos $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ por $f(x) := \sum_{k \in N_x} p_k$, convencioando $\sum_{\emptyset} p_k = 0$.

A função f desta forma definida é não decrescente em $\mathcal{R}$, pois se $x < y$, então $N_x \subseteq N_y$ e, portanto, $f(x) \leq f(y)$.

Afirmamos que f é contínua em todo $x_0 \in \mathcal{R} \setminus A$. De fato, como a série $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $\sum_{k \geq N} p_k < \varepsilon$ (*).

Agora, seja $A_N = \{a_1, \dots, a_N\}$. Se $A_N \cap [x_0, +\infty) = \emptyset$, então para todo $\delta > 0$ temos que $a_k \in [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow k \geq N$. Assim, $x \in [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \sum_{k \in N_x \setminus N_{x_0}} p_k \leq \sum_{k \geq N} p_k \stackrel{(*)}{<} \varepsilon$.

Por outro lado, se $A_N \cap [x_0, +\infty) \neq \emptyset$, então tomando $0 < \delta \leq \inf(A_N \cap [x_0, +\infty))$, temos que $a_k \in [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow k \geq N$. Assim, $x \in [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \sum_{k \in N_x \setminus N_{x_0}} p_k \leq \sum_{k \geq N} p_k \stackrel{(*)}{<} \varepsilon$.

Logo, concluímos que f é contínua à direita de x_0 .

De modo análogo, verifica-se a continuidade à esquerda de x_0 e, portanto, f é contínua em todo $x_0 \in \mathcal{R} \setminus A$.

Afirmamos que f é descontínua em todo $a_n \in A$. De fato, se $a_n \in A$, então

$$\lim_{x \rightarrow a_n^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_n^-} f(x) = p_n > 0.$$

Agora, se A for um conjunto finito (digamos que tenha n elementos), então tomamos a série finita $\sum_{k=1}^n p_k$, onde para cada $k = 1, 2, \dots, n$, tem-se $p_k > 0$.

Se x for menor que qualquer elemento de A , definamos $f(x) := 0$. Se $x \in [a_m, a_{m+1})$, definamos $f(x) := \sum_{k=1}^m p_k$. Por último, se x for maior que qualquer elemento de A , definamos $f(x) := \sum_{k=1}^n p_k$.

A função f desta forma definida é não decrescente em $\mathcal{R}$.

f é contínua em todo ponto pertencente a $\mathcal{R} \setminus A$. De fato, temos que f é constante em todos os intervalos da forma $[a_m, a_{m+1})$, bem como nos intervalos $(-\infty, \min A]$ e $[\max A, +\infty)$.

f é descontínua, com salto igual a p_n em cada $a_n \in A$, pois $\lim_{x \rightarrow a_n^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_n^-} f(x) = p_n$.

Se fizermos $A = \mathcal{Q}$ neste exemplo, obteremos uma função que possui um conjunto denso de pontos de continuidade e um conjunto denso de pontos de descontinuidade, nenhum dos quais é removível.

Definição 3.10. *Um conjunto é fechado se contém todos seus pontos de acumulação.*

Definição 3.11. *Um conjunto A é aberto se dado qualquer $x \in A$, existe uma vizinhança V de x tal que $V \subset A$ propriamente.*

Definição 3.12. *Um ponto p é um ponto de fronteira de um conjunto A se toda vizinhança de p contém algum ponto de A e algum ponto de $\mathcal{R} \setminus A$.*

O conjunto de todos os pontos de fronteira de A é chamado a fronteira de A , e denotado por $fr(A)$.

Definição 3.13. *Um ponto p é um ponto interior de um conjunto A se existe uma vizinhança de p totalmente contida em A .*

O conjunto dos pontos interiores de A é chamado o interior de A , e denotado por $int(A)$.

Proposição 3.5. *Qualquer conjunto fechado é a união de seu interior com sua fronteira.*

Exemplo 3.12 (Uma função cujos pontos de descontinuidade formam um conjunto fechado arbitrário dado). Seja A um conjunto fechado arbitrário. Definamos o conjunto B pela seguinte regra:

$$x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in fr(A) \\ \text{ou} \\ x \in int(A) \cap \mathcal{Q} \end{cases}.$$

Seja a função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin B \end{cases}.$$

Afirmamos que se $c \in A$, então f é descontínua em c . De fato, há três casos para considerar:

(i) Se $c \in fr(A)$, então $c \in B$ e $f(c) = 1$. Mas, tomando uma sequência qualquer (x_n) em $\mathcal{R} \setminus A$, com $x_n \rightarrow c$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos que $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathcal{N}$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0 \neq f(c)$.

(ii) Se $c \in \text{int}(A) \cap \mathcal{Q}$, então $c \in B$ e $f(c) = 1$. Mas, tomando uma sequência qualquer (x_n) em $\text{int}(A) \setminus \mathcal{Q}$, com $x_n \rightarrow c$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos que $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathcal{N}$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0 \neq f(c)$.

(iii) Se $c \in \text{int}(A) \setminus \mathcal{Q}$, então $c \notin B$ e $f(c) = 0$. Mas, tomando uma sequência qualquer (x_n) em $\text{int}(A) \cap \mathcal{Q}$, com $x_n \rightarrow c$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos que $f(x_n) = 1$, para todo $n \in \mathcal{N}$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1 \neq f(c)$.

Por outro lado, f é constante igual a zero no conjunto aberto $\mathcal{R} \setminus A$ e, portanto, é contínua neste conjunto.

Definição 3.14. Uma sequência (f_n) é uma sequência de funções quando, para cada $n \in \mathcal{N}$, f_n é uma função.

Definição 3.15. Seja $A \subset \mathcal{R}$ e (f_n) uma sequência de funções, onde tem-se $f_n: A \rightarrow \mathcal{R}$, para cada $n \in \mathcal{N}$. (f_n) converge uniformemente para uma função f se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in A$.

Definição 3.16. Uma série de funções é uma série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

cujos termos f_n são, em geral, funções de uma variável real x , todas com um domínio comum de definição. As expressões

$$\sum f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{e} \quad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

são símbolos com os quais denotamos uma série.

Definição 3.17. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ uma série de funções. Uma soma parcial desta série,

quando existe, é uma função $S_m(x)$ definida por $S_m(x) = \sum_{n=1}^m f_n(x)$.

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente se, e somente se, a sequência $(s_m(x))$ das somas parciais converge uniformemente.

Teorema 3.2 (M - teste de Weierstrass). Seja $\sum M_n$ uma série numérica convergente e $(f_n(x))$ uma sequência de funções definidas num conjunto $A \subset \mathcal{R}$, satisfazendo a condição $|f_n(x)| \leq M_n$, para todo $n \in \mathcal{N}$ e todo $x \in A$. Então, a série $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em A .

Demonstração. Ver [2], páginas 122 e 123. □

Teorema 3.3. *Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ uma série de funções contínuas, uniformemente convergente num conjunto $A \subset \mathcal{R}$, então f é contínua em A .*

Demonstração. Ver [2], páginas 123 e 124. $\square$

Exemplo 3.13 (Uma função contínua que em nenhum lugar é monótona). Seja $\tilde{f}_1(x) := |x|$ para $|x| \leq 1/2$, e definamos $f_1: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ por extensão periódica de período 1, isto é, façamos $f_1(x+n) = \tilde{f}_1(x)$, para todo número real $x \in [-1/2, 1/2]$ e inteiro n .

Para cada número natural $n > 1$, definamos $f_n: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ por $f_n(x) := 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$. Para cada $n \in \mathcal{N}$, a função f_n tem as seguintes propriedades:

(i) f_n é uma função periódica de período 4^{-n+1} . De fato, seja $x \in \mathcal{R}$ qualquer. Temos que $f_n(x + 4^{n-1}) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x + 1) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x) = f_n(x)$.

(ii) f_n assume máximo valor no ponto $\frac{1}{2}4^{-n+1}$. De fato, $f_n(x) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$ assume máximo onde $f_1(4^{n-1}x)$ assume máximo. Sendo $f_1(4^{n-1}x)$ uma função 4^{-n+1} periódica, segue que seu máximo é assumido em $x = \frac{1}{2}4^{-n+1}$.

Além disso, o máximo valor que f_n assume é $\frac{1}{2}4^{-n+1}$.

Finalmente, seja $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}4^{-n+1}$ é convergente e $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2}4^{-n+1}$, para todo $n \in \mathcal{N}$ e $x \in \mathcal{R}$, segue pelo M-teste de Weierstrass (Teorema 3.2) que f converge uniformemente em $\mathcal{R}$ e, pelo Teorema 3.3, concluímos que f é contínua em $\mathcal{R}$.

Resta verificar que f não é monótona em $\mathcal{R}$. Notemos, primeiramente, que para qualquer ponto da forma $a_0 = k4^{-m}$, onde k é um inteiro e m é um inteiro positivo, vale $f_n(a_0) = 0$, sempre que tivermos $n > m$. De fato, basta notar que $k4^{-m+n-1} \in \mathcal{Z}$ e, portanto, $f_1(k4^{-m+n-1}) = 0$. Logo, $f(a_0) = f_1(a_0) + \dots + f_m(a_0)$.

Para qualquer inteiro positivo m , seja $h_m = 4^{-2m-1}$. Observemos, agora, que $f_n(a_0 + h_m) = 0$, para todo $n \geq 2m+2$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} f_n(a_0 + h_m) &= 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}(a_0 + h_m)) \\ &= 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}4^{-m}k + 4^{n-1}4^{-2m-1}) \\ &= 4^{-n+1} f_1(\underbrace{4^{n-(m+1)}k + 4^{n-(2m+2)}}_{\in \mathcal{Z}}) \\ &= 4^{-n+1} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Se provarmos que a função f não é monótona na vizinhança dos pontos da forma $a_0 = k4^{-m}$ acima definidos, teremos provado que f não é monótona em $\mathcal{R}$, já que

números desta forma podem ser encontrados em toda parte em $\mathcal{R}$. Basta, então, provarmos que $f(a_0 + h_m) - f(a_0) > 0$ e $f(a_0 - h_m) - f(a_0) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
 f(a_0 + h_m) - f(a_0) &= \{[f_1(a_0 + h_m) - f_1(a_0)] + \cdots + [f_m(a_0 + h_m) - f_m(a_0)]\} \\
 &+ \{f_{m+1}(a_0 + h_m) + \cdots + f_{2m+1}(a_0 + h_m)\} \\
 &\stackrel{(*)}{\geq} [m(-h_m)] + [(m+1)h_m] \\
 &= h_m = 4^{-2m-1} > 0.
 \end{aligned}$$

Na desigualdade $(*)$ acima, usamos os seguintes dois fatos, ambos de fácil verificação:

- (i) $f_n(a_0 + h_m) - f_n(a_0) \geq 0$, quando $1 \leq n \leq m$;
- (ii) $f_n(a_0 + h_m) = h_m$, quando $m+1 \leq n \leq 2m+1$.

Analogamente, verifica-se que $f(a_0 - h_m) - f(a_0) \geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0$.

Referências

- [1] ARTMANN, B. *The Concept of Number: from quaternions to monads and topological fields*. 1. ed. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1988.
- [2] ÁVILA, G. S. S. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.
- [3] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.
- [4] FILHO, J. G. R. *Análise: Um Curso de Mestrado*. São Carlos: USP, 2001.
- [5] GELBBAUM, B. R.; OLMSTED, J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2003.
- [6] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- [7] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.
- [8] MONTREZOR, C. L. O corpo dos números reais é completo: Em que sentido? *In: Boletim de Iniciação Científica em Matemática-BICMat*, Rio Claro: IGCE, Departamento de Matemática - UNESP, Vol. IV, p. 7–15, 2007.