unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CÂMPUS DE RIO CLARO

CHATEAUBRIAND NUNES AMANCIO

UMA PERSPECTIVA SOCIOLÓGICA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

RIO CLARO

2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CÂMPUS DE RIO CLARO

UMA PERSPECTIVA SOCIOLÓGICA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Chateaubriand Nunes Amancio

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

Tese de Doutorado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, para obtenção do Título de DOUTOR em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

RIO CLARO (SP)

2004

5510 Amancio, Chateaubriand Nunes
A484p Uma perspectiva sociológica do conhecimento matemático / Chateaubriand Nunes Amancio. – Rio Claro : [s.n.], 2004
130 f. : il., fots.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Ubiratan D'Ambrosio

1. Matemática. 2. Sociologia do conhecimento. 3. Etnomatemática. 4. Matemática - História. 5. Geometria projetiva - Perspectiva. I. Titulo.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

No dia 05 (cinco) de novembro de dois mil e quatro, no Anfiteatro do Departamento de Matemática, situado na Av. 24-A, 1515 – Bela Vista, no *Campus* de Rio Claro da Universidade Paulista – UNESP, realizou-se a Defesa de Tese de Doutorado, *Uma Perspectiva Sociológica do Conhecimento Matemático*, pelo Professor Chateaubriand Nunes Amâncio, elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, para obtenção do Título de DOUTOR em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação do Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio. A Comissão Examinadora, por fim, APROVOU o candidato. Sem mais para acrescentar, além das orientações de encaminhamentos dadas pela Seção de Pós-Graduação do IGCE, firmamos a presente.

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

Prof. Dr. Antonio Carlos Carrera de Souza

Prof. Dr. Claudemir Murari

Prof. Dra. Adriana César de Mattos Marafon

Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni

dedicatória

aos meus pais;

Mytanh e Krin★?;

ao Mestre.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Programa de Demanda Social/CAPES pelo apoio concedido através da bolsa.

Ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Unesp, *campus* de Rio Claro, em particular, ao seu Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UNESP, em especial, aos vinculados ao Programa de Educação Matemática.

Agradeço a Universidade Federal de Roraima - UFRR pelo auxílio dado na fase de conclusão da tese.

Ao Departamento de Matemática da UFRR, pela abertura dada para a área da Educação Matemática, o que possibilitou minha participação no concurso para professor efetivo.

De modo especial, agradeço aos amigos do Departamento pela acolhida, pela receptividade, pelas discussões acerca do assunto da tese, entre tantos outros.

Agradeço àqueles que contribuíram no meu processo de formação e na elaboração da escrita da tese.

A todos os amigos dessa jornada. Nada disso teria sido possível sem vocês. Amém!

Chateaubriand Nunes Amancio

Boa Vista, Roraima

Novembro de 2004

SUMÁRIO

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMO

A Perspectiva linear é tomada como exemplo verificador à medida que é apresentada como uma prática e suas relações com o emprego de técnicas e sistematizações teóricas. Para tanto, faz-se uso de fontes históricas que subsidiam as considerações feitas em torno desse conhecimento enquanto objeto artístico e matemático. A partir da perspectiva oferecida pela Sociologia do Conhecimento aplicada à Matemática, evidencia-se que o conhecimento matemático trata-se de algo da cultura humana, no sentido de espírito universal, e que as suas naturezas particulares manifestam-se através do ponto de vista individual e da realidade na qual ele é elaborado, organizado e difundido, em conformidade com as concepções da Etnomatemática, enquanto programa de pesquisa, que orientam a proposição de que o conhecimento matemático é um *constructo* social.

Palavras chave: Matemática; Sociologia do Conhecimento; Etnomatemática; Matemática – História; Geometria Projetiva - Perspectiva.

ABSTRACT

The linear Perspective is taken as verifying example to the measure that is presented as one practical one and its theoretical relations with the application of techniques and theories. For in such a way, use of historical sources becomes that subsidize the consideration made in lathe of this knowledge while artistic and mathematical object. From the perspective offered for the Sociology of Knowledge applied to the Mathematics, it is proven that the mathematical knowledge is about something of the culture human being, in the direction of universal spirit, and that its particular natures are disclosed through the individual view of point and of the reality in which it is elaborated, organized and spread out, in compliance with the conceptions of the Ethnomathematics, while research program, that guide the proposal of that the mathematical knowledge is an social *constructo*.

Key words: Mathematics; Sociology of Knowledge; Ethnomathematics; Mathematics – History; Projective Geometry - Perspective.

PARTE I

introdução
do escopo

Frusta enim arcu contenditur nisi quo sagittam dirigas destinatum habeas.
Indarno si tira l'arco ove non hai da dirizzare la saetta.
He draws the bow in vain who has nowhere to point the arrow.
Em vão retesa o arco quem não tem para onde dirigir a seta.
Alberti, Da Pintura, livro I

A vida cotidiana é a vida de todo homem.
Heller, 2000, p. 17.

introdução

I

Ninguém consegue sair inteiramente da vida cotidiana, porque ela exige uma participação de todos os aspectos da individualidade do homem envolvido em atividades heterogêneas que dão organicidade a ela. As estruturas econômicas e sociais estabelecem uma hierarquia e uma dinâmica entre as diversas atividades e, da mesma forma, no interior de cada uma delas.

É nela que o homem passa a assimilar habilidades que o capacitará para viver a sua própria individualidade. As habilidades relacionam-se aos objetos que precisa utilizar, por exemplo, copos, garfos, aos ambientes que são ou serão freqüentados. Uma vez que "a assimilação da manipulação das coisas é sinônima de assimilação das relações sociais" (HELLER, 2000, p. 19), são os grupos - família, escola, comunidade, que estabelecem a "mediação" entre o indivíduo e a realidade social em que ele nasceu e em que vive.

Por tratar-se da "essência da substância social", a vida cotidiana encontra-se no centro do acontecer histórico, fazendo com que aquele "que assimila a cotidianidade de sua época assimila também, com isso, o passado da humanidade" (HELLER, 2000, p. 20).

A combinação entre essência e assimilação é a espontaneidade que, de certo modo, mostra em que medida a vida cotidiana está sendo absorvida, tornando-se uma característica dominante manifestada na maneira como o pensamento cotidiano é orientado na realização das atividades cotidianas.

"As idéias necessárias à cotidianidade jamais se elevam ao plano da teoria, do mesmo modo como a atividade cotidiana não é *praxis*" (HELLER, 2000, p. 31). Se ocorresse essa elevação, ficaria inviável a reprodução da realidade social ao refletirmos sobre a verdade material ou formal que a sustenta. Isso leva-nos ao que Heller chamou de "unidade imediata de pensamento e ação [que] implica na inexistência de diferença entre 'correto' e 'verdadeiro' na cotidianidade; o correto é também 'verdadeiro'. Por conseguinte, a atitude da vida cotidiana é absolutamente pragmática" (1989, p. 32).

Ela (1989, p. 26) cita análises feitas por Georg Lukács, quando trata da questão do reflexo na vida cotidiana, que apontam para o fato que o "o reflexo artístico e o reflexo científico rompem com a tendência espontânea do pensamento cotidiano”.

A perspectiva é um exemplo desse tipo de ruptura, ora quando combinada com os dois tipos diferentes de reflexos, ora modificada no interior de cada tipo.

II

A representação perspectiva do espaço é tomada como exemplo das possibilidades de uma investigação histórica e de uma abordagem sociológica do conhecimento relativo a esse tipo de pensamento, no sentido de como ele foi organizado social e intelectualmente. O estudo de períodos e de pessoas ligadas à Matemática e à Arte, o estabelecimento de relações entre as idéias, influências contextuais e os diferentes modos de as difundir - esses são alguns dos aspectos de um mosaico composto de relações entre conhecimento, sua representação, e os grupos sociais nos quais ele foi elaborado.

A projeção de imagens em um plano, segundo técnicas baseadas na compreensão do funcionamento da visão, dos raios visuais e de linhas que são projetadas em um ponto, tem como resultado a impressão de que as imagens se estendem para longe ou de sobressaírem-se.

A busca da representação mais próxima da percepção visual leva ao uso da projeção cônica, que tem como idéia geométrica básica, a do cone visual (LAURENT, s/d). Esse tipo de representação perspectiva não foi muito explorado na Idade Média, ao contrário da Antigüidade, quando foi utilizado pelos responsáveis pelos cenários de teatros e, podemos citar, o tratado sobre secções cônicas, escrito por Apolônio (cerca de 240 a.C.), considerado o mais antigo. É no Renascimento que outros fundamentos da perspectiva se estabelecem a partir de preocupações de arquitetos, pintores e escultores, cujas investigações sobre a representação e apropriação do espaço foram apresentadas em tratados sobre projeções e assuntos afins.

O arquiteto italiano Filippo Brunelleschi [1377-1446] inspirou, entre outros, Leon Battista Alberti [1404-1472], que evidenciou em um tratado de 1435, considerado um dos primeiros tratados desse período que teorizava a prática da perspectiva, uma técnica que consistia em utilizar o chamado “ponto de distância” como meio de verificação da exatidão da escala de profundidade de uma perspectiva e, outra, sobre o quadrado de base em perspectiva, ambas elaboradas a partir de técnicas atribuídas a Brunelleschi. Piero della Francesca [1412-

1492], pintor italiano, discutiu essas técnicas em seu tratado, como veremos, por volta de 1460, sendo que, a do quadrado de base perspectiva encontrou a sua justificação teórica dois séculos depois, quando em 1648 é publicado no apêndice de um trabalho sobre perspectiva de Abraham Bosse, o teorema dos triângulos perspectivos, de Girard Desargues [1591-1661], um arquiteto francês que, em 1636, escreveu um texto sobre perspectiva e, em 1639, um panfleto contendo concepções fundamentais para a Geometria Projetiva (STRUIK, 1989, p. 176; 1953, p. 235).

As possibilidades de reproduzir as formas com certa exatidão passam a ser utilizadas pela arte da representação, com a intenção de transpor as aparências e a criação de ilusões. Como não adentraremos no trabalho e idéias de Albrecht Dürer [1471-1528], pintor alemão, aproveitamos para referenciá-lo como alguém que dedicou-se à sistematização das deformações das formas com o objetivo de deixá-las belas. É provável que o tratado de Alberti fizesse parte de uma coleção adquirida por Dürer em 1523 (PEIFFER, 1995, p. 97).

Os homens dedicados à Arte tratam de questões envolvendo perspectiva, buscando a precisão da simulação da visão. Essa precisão é também objeto de uma Geometria que a trata de uma maneira distinta.

Gaspard Monge [1746-1818], engenheiro militar francês, desenvolveu uma forma gráfica para determinar os cortes de pedras, usadas na construção de fortificações, e que exigiam estudos e cálculos. Utilizando, por exemplo, o conceito de traço de plano, que consistia na linha que representava a interseção de dois planos, Monge chegou a eficientes análises gráficas.

Monge ensinou na École Royal de Génie de Mézières, de 1768 a 1789, época em que aplicava o Cálculo à curvas e superfícies no espaço. Ao mudar-se para Paris, e com a fundação da École Polytechnique em 1794, cuja preocupação era a de concentrar a instrução da Engenharia de caráter militar a partir de uma Matemática teórica e aplicada, Monge ingressou nessa instituição, na qual desempenhou o cargo de administrador e de professor. A necessidade de textos matemáticos, numa apresentação voltada para o ensino, leva-o a elaboração de suas lições baseadas no que chamou de *Geométrie Descriptive* (1799), considerada, posteriormente, uma parte especial da Geometria.

Em tais lições, mostra diferentes métodos de representar as formas espaciais através de suas projeções em planos de projeções ortogonais, o que conduziu às idéias fundamentais de outro ramo da Geometria, a *Geometria Projetiva*, desenvolvida por Jean Victor Poncelet [1788-1867], um discípulo que, a partir da reflexão dos métodos de Monge, torna-se o seu fundador, escrevendo em 1822 um tratado contendo os conceitos da "*nova geometria*", tais como razão harmônica, perspectividade, projetividade, entre outros.

III

Esses nomes, idéias, títulos e datas, apontados nessa *introdução*, são alinhavados a partir de uma orientação do pensamento sociológico, o qual é introduzido, em termos de concepções e de possibilidades no estabelecimento de um diálogo entre esses aspectos, no capítulo intitulado *do escopo*.

A segunda parte é dedicada às concepções adotadas por diversos autores que tratam *da arte* e *da matemática*. As concepções convergem para a terceira parte, na qual buscamos evidenciá-las em *do objeto*, e nas considerações finais sintetizadas em nossa *conclusão.*

do escopo

I

“Como passar de práticas *ad hoc* a modos de lidar com situações e problemas novos e a métodos? Como passar de métodos a teorias? Como proceder da teoria à invenção?” Esses questionamentos propostos por D´Ambrosio (2004, 2001), como sendo um programa de pesquisa, orientam-nos ao tratar do conhecimento matemático e, desse modo, tal orientação é complementada pelas perguntas: “De onde vêm as idéias matemáticas? Como elas são organizadas? Como avança o conhecimento matemático? Têm essas idéias algo a ver com o entorno em seu conjunto, socio-cultural ou natural?” (D’AMBROSIO, 1994, p. 454).

Assim, deparamo-nos com a necessidade de um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia ampla conforme evidenciado na concepção dambrosiana de Etnomatemática enquanto um programa de pesquisa (D’AMBROSIO, 1993), que consiste em “investigar holisticamente a geração [**cognição**], a organização intelectual [**epistemologia**] e social [**história**] e a difusão [**educação**] do conhecimento matemático” (D’AMBROSIO, 1996, p. 9, grifo do autor).

Intrinsecamente, o Programa Etnomatemática propõe uma atitude transdisciplinar, uma vez que “partindo da confrontação de disciplinas, faz aparecer dados novos engendrando uma nova inter-fundamentação destas disciplinas” (D'AMBROSIO, 1994, p. 31). Já do ponto de vista historiográfico, ele propõe a recuperação da presença de idéias matemáticas nas atividades humanas, partindo do princípio de que “em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber”, sendo que, tal proposta, diz D’Ambrosio (1999, p. 111), “remete, sobretudo, à dinâmica da evolução desses fazeres e saberes, resultantes da exposição a outras culturas”. Para o autor,

> A abordagem a distintas formas de conhecer é a essência do Programa Etnomatemática. Na verdade, diferentemente do que sugere o nome, Etnomatemática não é apenas o estudo de “matemáticas das diversas etnias”. [...] A disciplina denominada Matemática é, na verdade, uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa, tendo recebido importantes contribuições das civilizações do Oriente e da África, e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII. [...] Hoje, essa matemática

> adquire um caráter de universalidade, sobretudo devido ao predomínio da ciência e tecnologia modernas, que foram desenvolvidas a partir do século XVII na Europa (D'AMBROSIO, 2001, p. 10).

Esse caráter de universalidade mostra uma deficiência do pensamento ocidental, ressaltada por Oswald Spengler [1880-1936] em sua obra "A Decadência do Ocidente", na qual afirmou que tal pensamento

> carece do conhecimento dos inevitáveis limites que restringem a validez das suas afirmações. Ignora que suas 'verdades inabaláveis' e suas 'percepções eternas' são verdadeiras só para ele e eternas unicamente do ponto de vista da 'sua' visão de mundo, [concluindo que] a validez universal é, invariavelmente, a conclusão falsa que tiramos, aplicando aos demais homens o que vale para nós (1964, p. 41).

Às vésperas da Primeira Guerra Mundial, Spengler pretendia tratar os acontecimentos daquela época buscando conclusões que apontassem para um futuro. Em seu entendimento, seria a primeira vez que alguém teria como tarefa predizer a História da cultura ocidental européia e americana. "Tornou-se evidente", diz ele,

> que um problema político não poderá ser entendido por quem partir da própria política, e que numerosos traços essenciais, ativos nas profundezas, somente se manifestam nos domínios da Arte ou ainda sob a aparência de pensamentos remotos, de natureza científica ou puramente filosófica (1964, p. 60).

Envolvido por muitas perguntas, o autor percebeu tratar-se de um problema típico de existência, e que as respostas deveriam pautar-se em uma filosofia nova, a filosofia do futuro. Sua tarefa, então, passa a ser entendida como a busca de uma *morfologia da História Universal*, tendo o Universo enquanto História, contrária à *morfologia da Natureza*, na qual o Universo é visto enquanto Natureza.

A partir disso, outras oposições podem ser estabelecidas entre, por exemplo, a forma e a substância; a impressão orgânica do mundo em oposição à mecânica; a essência das formas e a essência das leis; a imagem e o símbolo à fórmula e o sistema. Destaca-se a oposição, que parece estar por trás de todas as outras, entre o que ele chama de esfera do número cronológico, enquanto "meio pelo qual compreendemos as formas vivas através de analogias", e a esfera do número matemático, enquanto "meio pelo qual reconhecemos as formas mortas", já conhecidas, traduzidas em leis (SPENGLER, 1964, p. 24).

Nessa perspectiva, uma cultura passa a ser vista como as relações entre, a vida, a alma, a natureza, e suas representações, isto é, as idéias, língua, arte e obras, ciências, concepções de mundo. A reunião de tais relações forma um conjunto de símbolos, sendo que, estes quando interpretados através de uma *Lógica do Tempo,* atrelada a uma concepção de destino, e considerando a vida enquanto contínuo "devir", possibilitaria superar os limites próprios de interpretações feitas pela *Lógica do Espaço* vinculada ao "deveio" e às análises do tipo causa e efeito.

Spengler (1964, p. 26) demonstrava convicção do pioneirismo de seus propósitos[1]. "Ainda não encontrei ninguém", escreveu ele, "que levasse a sério o estudo da 'afinidade morfológica' que liga intimamente a linguagem das formas em todos os campos da cultura". Isso levaria a um panorama que considerasse coisas de natureza diversas, como por exemplo, a organização administrativa do Egito antigo, a Geometria Analítica, a técnica rodoviária dos romanos, "como símbolos e interpretados como tais".

II

O questionamento da natureza do conhecimento matemático era algo do domínio dos matemáticos ou dos filósofos da Matemática, como evidenciou Sal Restivo (1994) em seu texto “The Social Life of Pure Mathematics” argumentando que tal questionamento girava em torno de considerações sobre: a) a concepção platônica e pitagórica da Matemática e em que medida elas são válidas, inteligíveis e úteis; b) os fundamentos da Matemática que transcendem o fluxo da História; c) a Matemática tida como criação do pensamento puro; d) o poder secreto da Matemática enquanto relações formais entre símbolos.

Uma vez que essas considerações são feitas através da própria linguagem matemática e, mesmo quando se encontram no campo da Filosofia e da Lógica, elas estão atreladas ou são derivadas de tal linguagem, Restivo propõe uma revisão através da discussão sobre o conhecimento matemático em termos sociológicos e, dessa forma, quebrar certa dependência.

[1] Outras convicções sintetizavam suas intenções, tais como

> a de que tudo quanto existe também evolui, de que todas as coisas naturais e conhecíveis, baseiam-se em algo histórico, de que o mundo como realidade se estriba num eu como possibilidade; a percepção de que não somente no 'que', mas também no 'quando' e no 'como' está escondido um profundo segredo - elas conduzem-nos ao fato de que tudo, seja o que fôr, deve ser também expressão de algo que vive. Conhecimentos e apreciações são, igualmente, atos de homens vivos. Para o pensamento do passado, a realidade exterior representava um produto do conhecimento e uma oportunidade para avaliações éticas. Para o pensamento do futuro, a realidade é, antes de mais nada, expressão e símbolo. A morfologia da História Universal converte-se, necessariamente, numa simbólica universal (SPENGLER, 1964, 59).

Afirma também que o pensamento sociológico sobre a Matemática começou a ser desenvolvido, fora da comunidade de matemáticos, pela perspectiva das Ciências Sociais que toma o matemático como um profissional e que, portanto, realiza um trabalho inserido em organizações que se institucionalizam, como evidenciado, no caso da Matemática, a partir do século XVII, na Europa. E, por outro lado, dentro da comunidade de matemáticos, esse pensamento manifestou-se através de uma autoconsciência de matemáticos que começaram a dar importância à vida social de grupos de matemáticos como, por exemplo, Dirk J. Struik [1894-2000] em seus trabalhos realizados em História da Matemática a partir de um enfoque fenomenológico, isto é, como ele (1985, p. 200) explicou, aquele que "tenta entender a ciência de um período nos seus próprios termos, tenta ver como seus contemporâneos sentiram ou pensaram sobre a matemática do seu tempo".

Na Terceira Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM, realizada em Caracas no ano 1975, D'Ambrosio (1998, p. 11) observou uma receptividade e interesse pelas discussões que tratavam da natureza social e política da Educação Matemática. Essa observação confirmou-se no Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática - ICME, em Karlsruhe na Alemanha, em 1976, e, em 1984, no Quinto Congresso Internacional de Educação Matemática realizado em Adelaide na Austrália, D'Ambrosio (1998, p. 12) não só notou uma "tendência definitiva sobre preocupações socioculturais nas discussões sobre educação matemática", como também, ele registrou que as

> Questões sobre "Matemática e sociedade", "Matemática para todos" e mesmo a crescente ênfase na "História da matemática e de sua pedagogia", as discussões de metas da educação matemática subordinadas às metas gerais da educação e, sobretudo o aparecimento da nova área de etnomatemática, com forte presença de antropólogos e sociólogos, são evidências da mudança qualitativa que se nota nas tendências da educação matemática.

Já na década de 90, a Educação Matemática esteve impregnada de termos sociológicos exigindo uma compreensão mais acurada da concepção de "social", até então tida como do domínio da Teoria Social (RESTIVO; BAUCHSPIES, 2001).

Nesse domínio, destacamos as possibilidades oferecidas pela concepção elaborada por Émile Durkheim [1858-1917] e suas importantes aplicações em análises que tomaram a divisão do trabalho (1893), o suicídio (1897) e, para nós em especial, a vida religiosa (1915) enquanto fatos sociais, ou seja, aqueles dotados de um poder imperativo ou de coerção que se impõe ao indivíduo, quer ele queira ou não, em suas "maneiras de agir, de pensar e de sentir que apresentam a notável propriedade de existir fora das consciências individuais" (1999, p. 2), como postulou em sua obra "As Regras do Método Sociológico" escrita em 1895, na qual procurou elucidar o método que utilizou em suas investigações e explicitar o que ele entendia como sendo o objeto da Sociologia.

Em seu entendimento, tais objetos eram os fenômenos formados por representações e ações estritamente coletivas, distinguindo-se dos fenômenos orgânicos ou psíquicos, constituindo "uma espécie nova e, [como concluiu], é a eles que deve ser atribuída e reservada a qualificação de *sociais*. Essa qualificação lhes convém, pois", como ele argumentou,

> é claro que, não tendo o indivíduo por substrato, eles não podem ter outro senão a sociedade, seja a sociedade política em seu conjunto, seja um dos grupos parciais que ela encerra: confissões religiosas, escolas políticas, literárias, corporações profissionais, etc. Por outro lado, é a eles só que ela convém; pois a palavra social só tem sentido definido com a condição de designar unicamente fenômenos que não se incluem em nenhuma das categorias de fatos já constituídos e denominados. Eles são, portanto o domínio próprio da sociologia (1999, p. 4).

Para o sociólogo francês, existem dois tipos de fatos sociais: um de ordem fisiológica, relacionado a todos os "modos de fazer" e o outro, de ordem anatômica ou morfológica que corresponde às "maneiras de ser" coletivas, concluindo que "as maneiras de ser não são senão maneiras de fazer consolidadas" (1999, p. 12).

Tendo estabelecido uma definição de fatos sociais, Durkheim enuncia o que considerou ser a regra fundamental de seu método: tratá-los como coisas (*choséité*); entendendo por coisa

> todo objeto do conhecimento que não é naturalmente penetrável à inteligência, tudo aquilo de que não podemos fazer uma noção adequada por um simples procedimento de análise mental, tudo o que o espírito não pode chegar a compreender a menos que saia de si mesmo, por meio de observações e experimentações, passando progressivamente dos caracteres mais exteriores e mais imediatamente acessíveis aos menos visíveis e aos mais profundos. Tratar os fatos de uma certa ordem como coisas não é, portanto, classificá-los nesta ou naquela categoria do real; é observar diante deles uma certa atitude mental (1999, p. xvii-xviii).

Ao empreender o estudo, análise e tentativa de explicação do pensamento religioso em sociedades simples, isto é, aquelas que não contém outras mais simples do que ela mesma e assim compreendem-se em um segmento único - como estabeleceu em seu método ao discutir as regras relativas à constituição dos tipos sociais, Durkheim mostra como a Sociologia pode combinar os resultados etnográficos e históricos na compreensão da realidade contemporânea centrada no homem do presente, pois, como afirmou, “não há outro que estejamos mais interessados em conhecer bem” (1999, p. vi).

Tal escolha metodológica justifica-se pela possibilidade da observação de elementos básicos do pensamento religioso em tais sociedades, nas quais as explicações dadas por seus integrantes a seus atos ainda não resultam de uma elaboração sofisticada, no sentido que estão mais próximas das motivações que realmente os determinaram. Para ele, “à medida [que o pensamento religioso] progride na história, as causas que o chamaram à existência, embora permanecendo ativas, não são mais percebidas, senão através de um vasto sistema de interpretação que as deformam” (1996, p. xiii).

A ligação entre Sociologia Religiosa e Teoria do Conhecimento é estabelecida por Durkheim quando ele mostra que são de origem religiosa “os primeiros sistemas de representações que o homem produziu do mundo e de si próprio”, os quais posteriormente constituíram a Filosofia e a Ciência, que carregaram em suas essências não só “a matéria de seus conhecimentos, mas igualmente a forma segundo a qual esses conhecimentos são elaborados”, herdando do pensamento religioso as categorias básicas do entendimento como as noções de tempo, de espaço, de número, entre outras, consideradas por ele “a ossatura da inteligência” já que seria impossível pensar em algo sem referenciá-lo, por exemplo, no tempo e no espaço (1996, p. xv-xvi).

Entretanto, tais categorias são tratadas de maneiras diversas em diferentes sistemas de representações como, por exemplo, nas mitologias e, em particular, no pensamento científico no qual elas receberam diferentes tratamentos em diferentes épocas, a partir de fatores históricos e, portanto, sociais.

Se, por um lado, é difícil apontar com exatidão tais fatores, por outro, não o é admitir suas influências no que atualmente é aceito como pensamento científico. É justamente dessa admissão que se pode colocar o problema do conhecimento em termos sociais, isto é, admitir que as categorias são de origem social, uma vez que se diferenciam de outros tipos de conhecimentos por suas características de universalidade e necessidade, é tirar o sentido de situar suas origens em situações particulares atreladas a sensações essencialmente individuais e subjetivas. “Nessas condições, submeter a razão à experiência é fazê-la desaparecer, pois é reduzir a universalidade e a necessidade que a caracterizam a serem apenas puras aparências, ilusões que, na prática, podem ser cômodas, mas que a nada correspondem nas coisas”, aqui, entendendo razão por conjunto das categorias fundamentais que se impõe a nossa vontade. Noutra direção, também deixa de ter sentido acreditar que seja possível esvaziar completamente a razão de elementos sensíveis, de todo conteúdo real, sem preocupação em "saber por que a experiência não se basta, mas supõe condições que lhe são exteriores e anteriores, e de que maneira essas condições são realizadas quando e como convém", e não originárias de algo imutável, superior, isto é, de uma razão divina (DURKHEIM, 1996, p. xxi-xxii).

As categorias passam a ser representações essencialmente coletivas que expressam estados da coletividade e que, portanto, dependem de sua morfologia e de suas instituições, resultando em um conteúdo distinto das representações individuais, uma vez que elas são produto de uma intencionalidade estendida não só no espaço, mas também no tempo já que são combinações que acumularam saber e experiências.

Durkheim assevera que "o homem é duplo" - *homo duplex*, pois é individual na medida que se limita a seu organismo e ações, e é social na medida que representa "a mais elevada realidade, na ordem intelectual e moral, que podemos conhecer pela observação, [...], a sociedade", ultrapassando a si mesmo ao participar dela, "seja quando pensa, seja quando age" (1996, p. xxiii-xxiv). Nessa participação, determinadas categorias são entendidas como necessárias, visto que se impõem ao espírito como se fossem naturais, diante de uma autoridade que se apresenta as nossas vidas, moral e intelectual, estabelecida pela sociedade para garantir uma concepção homogênea do tempo, do espaço, do número, etc., e conseqüente conformismo moral e lógico que sustentam as condições necessárias às ações comuns próprias de uma vida social.

O mérito de Durkheim foi renovar a Teoria do Conhecimento ao "reunir as vantagens contrárias das teorias rivais, [a apriorista e a empirista], sem seus inconvenientes" (1996, p. xxvi), pois trata da razão, reconhecendo sua importância, sem, no entanto, desconsiderar a complexidade que sua análise implica, não podendo limitar-se a observações sujeitas a impressões pessoais. O procedimento proposto por ele é aquele que volta seu olhar para fora de nós, já que as concepções são anteriores a nós e, como diz, "[...] é a história que devemos observar, é toda uma ciência que é preciso instituir, ciência complexa, que só pode avançar lentamente, por um trabalho coletivo [...]" (1996, p. xxvii). Além disso, suas reflexões possibilitam alternativas às visões predominantes alimentadas por filósofos, matemáticos ou psicólogos, quando ligou seu estudo da Sociologia Religiosa a um programa para o estudo sociológico das concepções lógicas, sendo que, como ressaltado por Restivo (1994, p. 211), a primeira expressão completa desse programa foi uma obra que desafiou o fato, tido como evidente, de que a Matemática era universal e invariante: “A Decadência do Ocidente”, livro de Oswald Spengler.

III

O homem passou a necessitar de uma qualidade de espírito que o ajudasse “a usar a informação e a desenvolver a razão, a fim de perceber, com lucidez, o que está ocorrendo no mundo e o que pode estar acontecendo dentro [dele mesmo]”. A partir dessa concepção, C. Wright Mills (1975, p. 11-12) apresenta essa qualidade como sendo o que ele chamou de “Imaginação Sociológica”, argumentando que através dela seria possível compreender as complexas ligações que envolvem “a história [do mundo] e a biografia [do indivíduo] e as relações entre ambas, dentro da sociedade”. Inicialmente, tal imaginação levaria a lição, que dependendo dos aspectos considerados poderia ser entendida como terrível ou magnífica, “de que o indivíduo só pode compreender sua própria experiência e avaliar seu próprio destino localizando-se dentro de seu período; só pode conhecer suas possibilidades na vida tornando-se cônscio das possibilidades de todas as pessoas, nas mesmas circunstâncias em que ele”.

A marca da imaginação sociológica está presente nos trabalhos feitos por analistas sociais considerados por Mills (1975, p. 12-13) como clássicos, citando, entre outros, Herbert Spencer, Emile Durkheim, Karl Mannheim, Karl Marx, Max Weber; ele procura demonstrar a dita presença destacando em três grupos as perguntas norteadoras desses teóricos sociais, como segue:

> 1) Qual a estrutura dessa sociedade como um todo? Quais seus componentes essenciais, e como se correlacionam? Como difere de outras variedades de ordem social? Dentro dela, qual o sentido de qualquer característica particular para a sua continuação e para a sua transformação?
>
> 2) Qual a posição dessa sociedade na história humana? Qual a mecânica que a faz modificar-se? Qual é seu lugar no desenvolvimento da humanidade como um todo, e que sentido tem para esse desenvolvimento? Como qualquer característica particular que examinemos afeta o período histórico em que existe, e como é por ele afetada? E esse período - quais as suas características essenciais? Como difere de outros períodos? Quais seus processos característicos de fazer história?

3) Que variedades de homens predominam nessa sociedade e nesse período? E que variedades irão predominar? De que formas são selecionadas, formadas, liberadas e reprimidas, tornadas sensíveis ou impermeáveis? Que tipos de “natureza humana” se revelam na conduta e caráter que observamos nessa sociedade, nesse período? E qual é o sentido que para a “natureza humana” tem cada uma das características da sociedade que examinamos?

As concepções elaboradas por eles a partir de conceitos centrais, resultaram em expressões particulares em suas teorias, como, por exemplo, os “sentimentos públicos” de Spencer, as “representações coletivas” de Durkheim, a “ideologia” de Mannheim, as “idéias dominantes” de Marx, as “legitimações” de Weber, e que, no fundo, todas atestam a relevância que deram à análise social da estrutura das instituições, como a justificaram ou a contestaram, fazendo uso do que Mills (1975, p. 45) chamou de “símbolos mestres”, isto é, aqueles que na Teoria Social possuem a qualidade de validar argumentos.

Outro aspecto considerado por Mills (1975, p.132-133) como prova do uso e conseqüente desenvolvimento da imaginação sociológica pelos analistas sociais clássicos, diz respeito à maneira como trabalhavam, pois evitavam “qualquer esquema rígido de procedimentos”, não se deixando limitar “pelo método e pela técnica, [concluindo que] o modo clássico é o modo do artesão intelectual” que alia os benefícios que a teoria traz para a clareza de concepções com a economia de procedimentos própria do uso adequado do método, num domínio que o torna “um pensador consciente de si; [...] Ser dominado pelo método ou teoria é simplesmente ser impedido de trabalhar, de tentar, ou seja, de descobrir alguma coisa que esteja acontecendo no mundo”.

Essa conclusão de Mills reforça suas críticas aos trabalhos sociológicos que ao se apegarem à determinada tendência acreditando seguir “uma tradição”, acabam por deformá-la. Ele (1975, p. 30-31) reuniu os trabalhos em três tendências tradicionais, as quais, em seu entender, podem ajudar a compreender as peculiaridades da Sociologia, seja como deformações de uma ou mais de uma delas, seja como possibilidades em termos das mesmas.

Uma das tendências diz respeito a Sociologia no sentido de uma teoria da História, uma vez que “trata de material do passado, e dele se utiliza” de forma sistemática com o intuito “de discernir ‘os estágios’ do curso da história e as regularidades da vida social”. Sua deformação leva a uma visão trans-histórica, caracterizada pelo uso forçado de elementos históricos e uma visão profética do futuro. Como exemplo desse tipo de deformação ele aponta a obra de Oswald Spengler.

A outra trata da Sociologia enquanto teoria sistemática da natureza do homem e da sociedade, que visa as características das relações sociais que possam ser consideradas invariáveis, chegando a “uma visão bastante estática e abstrata dos componentes da estrutura social, num nível de generalidade bastante elevado”, o que, justamente por isso, leva a sua deformação, ou seja, a “um formalismo complicado e árido, no qual a divisão dos Conceitos e uma interminável redisposição tornam-se a principal tarefa”.

Por fim, ele agrupa os trabalhos que tomam a Sociologia enquanto suas possibilidades empíricas em estudos que tratam dos fatos e problemas sociais contemporâneos como, por exemplo, “os estudos das cidades e famílias, das relações raciais e étnicas”, sendo exemplo de sua deformação aqueles que apresentam “uma série de fatos desconexos e [...] insignificantes, se relacionados apenas com ambientes de pequena escala”.

A imaginação sociológica coloca-se diante da “variedade humana, que consiste de todos os mundos sociais nos quais os homens viveram, vivem e poderão viver” (MILLS, 1975, p. 144), como uma maneira eficaz de apreendê-la e compreendê-la, o que implica, necessariamente, em considerar a íntima relação entre a realidade histórica e os sentidos que a ela atribuam os homens, sendo a definição dessa realidade, bem como desses sentidos o objetivo apontado por Mills (1975, p. 146) como o do cientista social que tem a concepção de “Ciência Social como estudo da biografia, da história e dos problemas de seus cruzamentos dentro da estrutura social”. Para ele “é em termos [dos sentidos] que os problemas da Ciência Social clássica são formulados, e assim as questões e preocupações que esses problemas representam, são enfrentados”.

Das críticas que faz as tendências dos estudos feitos, em sua época, na Sociologia, Mills (1975, p. 156) sustenta a sua tese, a partir dos pontos - que ao seu ver estão na essência da tradição clássica: biografia, história, sociedade - de que é pela coordenação dos três que se torna possível o “estudo adequado do homem”, ressaltando que a “história é a medula do estudo social”, afirmando que “Sem o uso da história e sem o sentido histórico das questões psicológicas, o cientista social não pode, adequadamente, formular os tipos de problemas que devem ser, agora, os pontos cardeais de seus estudos”. Entretanto, ele enfatiza que não se trata do uso de compilações de fatos que se pretendem isentas de interpretações, nem de visões trans-históricas embebidas em tragédias ou em glórias, mas sim na busca do detalhe situado em um contexto e que o resultado dessa combinação seja “capaz de abarcar acontecimentos que fizeram época no desenvolvimento das estruturas sociais” (1975, p. 157).

Eis aí uma idéia fundamental na argumentação de Mills (1975, p. 159): "Todo estudo social bem considerado - exige uma amplitude de concepção histórica e um uso pleno de materiais históricos". Só assim ele terá êxito em sua realização e em sua apresentação.

PARTE II

da arte
da matemática

Em história, tudo começa com o gesto de *separar*, de reunir, de transformar em "documentos" certos objetos distribuídos de outra maneira. Esta nova distribuição cultural é o primeiro trabalho. Na realidade, ela consiste em *produzir* tais documentos, pelo simples fato de recopiar, transcrever ou fotografar estes objetos mudando ao mesmo tempo o seu lugar e o seu estatuto. Este gesto consiste em "isolar" um corpo, como se faz em física, e em "desfigurar" as coisas para constituí-las como peças que preencham lacunas de um conjunto, proposto *a priori*. Ele forma a "coleção". Constitui as coisas em um "sistema marginal", como diz Jean Baudrillard; ele as exila da prática para as estabelecer como objetos "abstratos" de um saber. Longe de aceitar os "dados", ele os constitui. O material é criado por ações combinadas, que o recortam no universo do uso, que vão procurá-lo também fora das fronteiras do sujeito, e que o destinam a um reemprego coerente. E o vestígio dos atos que modificam uma *ordem* recebida e uma *visão* social. Instauradora de signos, expostos a tratamentos específicos, esta ruptura não é, pois, nem apenas nem primordialmente, o efeito de um "olhar". É necessária aí uma operação técnica.

Certeau, 2002, p. 81

da arte

I

Aby Warburg foi um historiador alemão dedicado ao uso dos testemunhos figurativos como fontes históricas, influenciado pelo conceito de cultura adotado nos trabalhos do historiador suíço Jacob Burckhardt [1818-1897], pela concepção de História do Espírito (*Geistesgeschichte*) do filósofo alemão Wilhelm Dilthey [1833-1911] e, entre outros, destaca-se a influência das idéias de Ernst Cassirer [1874-1945] sobre a *"Filosofia das formas simbólicas"* (GINZBURG, 1989). Seu programa de pesquisa foi estudar a continuidade e a ruptura da/com a tradição clássica, buscando elaborar o que chamou de História da imagem do ponto de vista da cultura (*Kulturwissenschaftliche Bildgeschichte*). Considerar os objetos figurativos tanto como objetos autônomos quanto resultados de acontecimentos, distância Warburg e seus seguidores da corrente Formalista da História da Arte, representada pelos expoentes Heinrich Wölfflin [1864-1945] e Alois Riegl [1858-1905], contrária à ligação entre História da Arte e História da Cultura.

O quadro metodológico dos historiadores de Arte formalistas tem como base convicções centradas na superioridade do espírito sobre a matéria, da imaginação sobre a razão e, sobretudo, "no afastamento do artista da sociedade, na natureza, inevitavelmente auto-reflexiva e circular da interpretação, e no valor redobrado da tradição artística face à atitudes inovadoras isoladas" (WOOD, 1999, p. 11).

O que determinavam os princípios estruturais das obras de um período, para Riegl, por exemplo, era a combinação do que ele chamou de Vontade Artística (*Kunstwollen*) com a Vontade (*Wollen*) predominante da época, sendo esta última a configuração da visão de mundo do meio em que viveu o artista. Assim, ele propõe uma Filosofia da visão de mundo (*Weltanschauungsphilosophie*) para sustentar uma História da Arte "estética" em detrimento a qualquer resultado histórico elaborado tendo as qualidades estilísticas como centro.

Para ilustrar que "Quando nossa atenção se concentra num mesmo modelo da natureza, [os] 'estilos individuais' se evidenciam de maneira flagrante", Wölfflin (2000, p. 1-3) recorre a uma lembrança de Ludwig Richter [1803-1884] registrada em suas "Memórias", quando ele e mais três colegas resolveram pintar a mesma paisagem. O resultado foi quatro telas completamente diferentes. Detalhes como ângulos, proporções, luz, e cor serão sempre vistos de maneiras diferentes, “dependendo do temperamento do artista”. Ao comparar desenhos de corpos femininos, ele explicita que “No desenho de uma simples narina pode-se reconhecer o caráter essencial de um estilo” que será, então, a expressão de determinado temperamento. Além disso, o artista não se encontra isolado, mas faz parte de alguma comunidade, em alguma localidade, o que implica que tenhamos que considerar, juntamente com o estilo pessoal, “o ‘estilo da escola’, o ‘estilo do país’, o ‘estilo da raça’, [...] o ‘estilo de uma época’” (2000, p. 9-11). Enfim, para Wölfflin os estilos são a expressão de seu tempo, de uma corrente cultural específica, de uma região, de um grupo organizado em torno de idéias e comportamentos que visam torná-los cada vez mais claros e vigorosos.

Ao desenvolver suas idéias citando trabalhos diversos de artistas, Wölfflin (2000, p. 14-17) destaca o problema “de descobrir as condições que, atuando como estímulos materiais - sejam elas o temperamento, o espírito da época ou o caráter racial -, determinam o estilo dos indivíduos, das épocas e dos povos”, para então colocar o que considerou ser o ponto central de seu estudo: o modo de representação como tal, pretendendo discutir suas formas universais, conscientes de que em diferentes épocas os artistas estavam ligados a diferentes possibilidades visuais de expressão, buscando, desse modo, os elementos através dos quais uma obra de arte ganhou forma e que tipo de percepção serviu de base às artes plásticas no decorrer dos séculos.

Para tanto, ele concentrou-se nos séculos XVI e XVII, realizando suas análises a partir de cinco pares de conceitos considerados determinantes para a compreensão das mudanças de estilo: a evolução do linear ao pictórico, isto é, a linha enquanto caminho da visão e guia dos olhos e sua gradativa desvalorização; a evolução do plano à profundidade, ou seja, o plano enquanto elemento da linha, sendo entendido como forma de maior clareza de representação e sua desvalorização que leva a representação relacionando “os objetos conforme sejam eles anteriores ou posteriores”; a evolução da forma fechada à forma aberta, isto é, as diferentes interpretações dadas ao fato de que “Toda obra de arte deve ser um todo fechado, e será um defeito não nos fazer sentir que está contida em si mesma”; a evolução da pluralidade para a unidade, ou seja, como a composição foi vista em diferentes épocas levando ao predomínio das partes sobre o todo ou do conjunto em relação às partes; e, por fim, a clareza absoluta e relativa do objeto, no sentido de que em determinado período julgou-se melhor representar os objetos tais como são e, em outro, tais como são percebidos.

“A visão em si possui sua história”, afirma Wölfflin (2000, p. 14), “e a revelação destas camadas visuais deve ser encarada como a primeira tarefa da história da arte”. Neste sentido, as formas de representação tratadas segundo seus cinco pares de conceitos podem ser entendidas “como formas de representação ou como formas de visão de mundo: nestas formas a natureza é vista, e nestas formas a arte manifesta seus conteúdos” (2000, p. 20). Entretanto, ele chama a atenção para o fato que é um exagero condicionar a concepção artística apenas aos ‘estados de visão’ desconsiderando noções como a de gosto. “Ninguém poderá afirmar”, diz ele (2000, p. 23),

> que 'os olhos' passam por processos evolutivos por sua própria conta. Condicionados e condicionando, eles sempre adentram outras esferas espirituais. Certamente não existe um esquema visual que, partindo de suas próprias premissas, possa ser imposto ao mundo como um modelo inalterável. Contudo, embora os homens em todas as épocas tenham visto aquilo que desejaram ver, isto não exclui a possibilidade de que uma lei permaneça operando em todas as transformações. Reconhecer esta lei seria o problema central de uma história científica da arte.

Se, por um lado, é inevitável a dificuldade da separação de obra e mundo em que vivia o seu criador para, então, realizar uma análise, por outro, temos o problema causado pela combinação da análise estética com a estilística.

II

Buscando aplicar em seu trabalho a abordagem que em seu conjunto formou o “método warburguiano”, Fritz Saxl [1890-1948] procurou dar soluções à tendência do historiador acabar na armadilha da interpretação “fisiognomônica” ou “expressiva”, ou seja, ressaltar determinadas qualidades formais de uma obra de arte julgando tratar-se de um reflexo da atitude generalizada de uma sociedade, ou de um grupo dela, em relação à realidade. O historiador é envolvido por argumentos “circulares” numa atitude de demonstração. Ao referir-se a um estudo feito sobre Dürer, Ginzburg (1989, p. 63) chama a atenção para as possíveis conseqüências dessa tendência, pois

> [...] Quando os documentos existem, as imagens são lidas em registro psicologizante e ‘biográfico’; quando faltam ou não são suficientemente eloqüentes, curva-se sobre um tipo de ‘leitura’ mais descritivo e menos interpretativo. [...] E que esse é um “dos danos que podem redundar de uma tal leitura ‘fisiognomônica’ dos documentos figurados [...].

A circularidade da interpretação é enfrentada por Erwin Panofsky [1892-1968], contemporâneo e colaborador de Saxl, que discutiu os problemas que envolvem a descrição quando feita de uma maneira “pura”, tratando-se, para ele, do que chamou de problema “da ‘ambigüidade’ de qualquer figuração”, ou seja, toda descrição, por mais elementar, pressupõe uma interpretação (GUINZBURG, 1989, p. 63).

Em certa medida, Panofsky interessa-se pelo conceito de Vontade Artística, mas pensava tratar-se de algo sem a devida fundamentação filosófica, limitada à competência pessoal de Riegl. Retomando as idéias filosóficas de Cassirer, ele reinterpretou a Vontade Artística como sendo o Sentido (*Sinn*) imanente, ou o Sentido de uma sucessão de fenômenos artísticos e, para atingí-lo, era preciso dedicar-se a uma análise desses fenômenos (WOOD, 1999), feita através da Iconografia - definida por Panofsky (1995, p. 19) como "o ramo da História da Arte que trata do conteúdo temático ou significado das obras de arte, enquanto algo diferente da sua forma". Essa análise sustenta-se em um processo orgânico e indivisível, apesar de, para sua realização, envolver três níveis de investigação distintos pelo tipo de conteúdo posto em evidência e pela atitude adotada ao interpretá-lo, sendo que cada um exigirá um conjunto de conhecimentos e de princípios diferentes que orientarão a interpretação.

O primeiro, explicou Panofsky (1995, p. 21), tem como objeto o conteúdo primário ou natural, subdividido em fatual e expressivo, já que, na intenção de constituir uma descrição 'pré-iconográfica' da obra de arte, considera as 'formas' puras de representações de 'objetos' naturais, "identificando as suas relações mútuas como 'factos'; e percebendo as qualidades 'expressivas' ". Tais formas compreendem "certas configurações de linha e cor, certas massas de bronze ou pedra de forma característica" que carregam 'significados primários' ou 'naturais' e constituem o que Panofsky chamou de mundo das 'formas' puras ou dos 'motivos' artísticos, sendo seus objetos e ações identificados a partir do conhecimento acumulado através de experiências, uma vez que "Qualquer pessoa pode reconhecer a forma e o comportamento dos seres humanos, animais e plantas e sabe distinguir entre um rosto zangado e uma expressão alegre" (1995, p. 23).

O problema de se esbarrar no alcance da experiência pessoal ou mesmo em seu uso indiscriminado é contornado pela aplicação de um princípio, pois, como explica Panofsky (1995, p. 24),

> Quando identificamos os motivos baseando-nos pura e simplesmente na nossa experiência, estamos a decifrar 'o que vemos', segundo o modo como

> os 'objectos e acções' se exprimem através de 'formas, em condições históricas variáveis'. Ao fazê-lo, sujeitamos a nossa experiência prática a um princípio de controle a que se pode chamar 'história do estilo'.

O outro nível toma como objeto de investigação o 'conteúdo temático como oposto a forma', isto é, a esfera do "mundo dos 'temas' e 'conceitos' específicos que se manifesta através de 'imagens', 'histórias' e 'alegorias', por oposição à esfera do conteúdo 'primário' ou 'natural' que se manifesta em 'motivos' artísticos" (1995, p. 21); busca-se uma 'análise iconográfica' da obra de arte a partir de seu significado dito 'secundário' ou 'convencional', observando as combinações existentes entre as imagens e as histórias e alegorias, auxiliada pelo conhecimento advindo da "familiaridade com os temas e conceitos específicos, tal como foram transmitidos através de fontes literárias e adquiridos da leitura ou da tradição oral" (1995, p. 24). Como tal conhecimento não é suficiente para garantir a exatidão da análise, é, por isso, necessária a orientação da história dos tipos uma vez que com sua ajuda é possível "saber de que forma e sob que condições históricas diferentes, os 'temas' ou 'conceitos' específicos se exprimiram por 'objetos' e acções' " (1995, p. 25).

O terceiro nível de investigação busca a descoberta e interpretação do que Panofsky (1995, p. 22-23), a partir da concepção de Cassirer, chamou de "valores simbólicos", ou seja, as "formas puras, os motivos, as imagens, as histórias e as alegorias, como manifestações de princípios fundamentais", são tomados como objetos constituintes de uma síntese ou 'interpretação iconográfica', tendo esta um sentido profundo em relação à análise iconográfica que é realizada em um sentido estrito, já que exige uma "faculdade mental comparável à de fazer diagnósticos", por ele denominada de "intuição sintética", condicionada pela psicologia e pela "Weltanschauung" de quem interpreta. Para se evitar deficiências ou excessos, principalmente nesse caso, é preciso orientar-se pela "história dos 'sintomas culturais' - ou 'símbolos', no sentido que lhe deu Ernst Cassirer - em geral" (1995, p. 28).

Quanto mais completa fosse a análise, melhor seria a compreensão do Sentido “fenomênico” ou pré-iconográfico - relativo às experiências sensíveis do artista; do Sentido iconográfico - isto é, o conhecimento do artista de determinados significados; e, por fim, do Sentido Essencial (*Wesenssinn*) ou iconológico que junto com os outros dois comporia uma descrição e uma interpretação satisfatória. Desse modo, para corrigir os efeitos do problema da ambigüidade, ele amadureceu e ampliou conceitos que foram da busca de uma “História do Sentido” (imanente) - 1920, passaram pela “Interpretação do Sentido da Essência” - 1932 e, finalmente, chegaram a “Iconologia” - 1939 (GINZBURG, 1989).

Apesar de ter desenvolvido justificativas metodológicas consistentes, Panofsky não conciliou em suas análises as duas abordagens, ou seja, a iconográfica e a iconológica. Pelo menos foi a avaliação feita por Otto Pächt [1902-1988], seguidor de Riegl, em um artigo citado por Ginzburg (1989, p. 70), no qual o critica por se fixar no estudo das idéias dos artistas objetivadas em suas obras para interpretar as próprias obras, não considerando com mesmo vigor o que ele havia definido como sendo o objeto da Iconologia, isto é, aquele manifestado no significado intrínseco, analisado a partir de "pressupostos que revelam a atitude básica de uma nação, uma época, uma classe, uma crença religiosa ou filosófica - assumidos inconscientemente por um indivíduo e condensados numa obra" (1995, p. 22).

As duas abordagens, conclui Ginzburg (1989, p. 70), não são auto-suficientes, tratando-se de uma questão de "coordenação metodológica" necessárias aos estudos.

III

A análise iconológica complementando a iconográfica era, para Warburg, o antídoto contra o determinismo fácil e a exaltação de gênios, apesar de que, em sua época, ainda não havia estudos que tivessem efetivamente testado a combinação. Além disso, ele também lamentava que, até então, “a história da arte ainda não havia conseguido pôr o seu material à disposição da ‘psicologia histórica da expressão humana’” (apud GINZBURG, 1989, p. 46).

Em uma resenha sobre uma coletânea de textos de Warburg, Ernst H. Gombrich

> [...] insistia, sobretudo no fato de que [ele], em vez de condescender com os ‘geistesgeschichtliche Parallelen’ [paralelos histórico] mais ou menos casuais, unira diferentes âmbitos científicos (história do estilo, sociologia, história das religiões e da linguagem) para resolver, mediante a reconstrução de relações concretas, problemas particulares e delimitados [...] (GINZBURG, 1989, p. 72).

A maneira diferenciada de Gombrich abordar o problema da circularidade dos argumentos de interpretações ‘fisiognomônicas’ o levou a uma exigência metodológica que não aceitava paralelismos ou analogias fáceis como, para ele, era o caso do estudo de Panofsky sobre a perspectiva no Renascimento, no qual ao buscar um aprofundamento do conceito warburguiano de *Pathosformeln* - fórmulas estilísticas arcaizantes herdadas do simbolismo dos mitos da Antiguidade convertidos em imagens que retratam os dilemas humanos - Panofsky acabou atrelando a representação perspectiva do espaço no

Renascimento ao surgimento de uma consciência histórica no sentido moderno, apesar de seus cuidados redobrados e de sua concepção clara de que

> O historiador de arte [teria] de comparar o que julga ser o 'significado intrínseco' da obra, ou grupo de obras, que estuda, com o que ele pensa ser o 'significado intrínseco' do maior número de outros documentos de civilizações historicamente relacionados com a obra ou grupo de obras em estudo: documentos que sejam testemunhos das tendências políticas, poéticas, religiosas, filosóficas e sociais da personalidade, época ou país que esteja a estudar. Escusado será dizer que, inversamente, o historiador da vida política, da poesia, da religião, da filosofia e das instituições sociais deveria fazer um uso análogo das obras de arte. É na busca dos 'significados intrínsecos' ou do 'conteúdo', [conclui ele], que as várias disciplinas humanísticas se encontram num plano comum em vez de serem dependentes umas das outras (1995, p. 28).

As analogias 'imediatas' ou 'fisiognomônicas' são criticadas energicamente por Gombrich, uma vez que entendia tratar-se de uma deformação interpretar uma concepção de estilo artístico predominante em um período como sendo a expressão coletiva de uma maneira de pensar e, por outro lado, adotar tal concepção para interpretar os elementos da representação como componentes de um sistema completo de expressão. Ele recusa

> a sobreposição à arte do passado de uma concepção, nascida na idade moderna, da arte como ruptura com a tradição, da arte como expressão 'imediata' da individualidade (ou talvez do inconsciente) do artista. Prosseguindo coerentemente ao longo dessa linha, Gombrich acabou por afirmar, em polêmica contra toda estética de tipo 'romântico', que a obra de arte não deve ser considerada 'sintoma' nem 'expressão' da personalidade do artista, mas o veículo de uma mensagem particular, a qual pode ser entendida pelo espectador na medida em que este conhece as alternativas possíveis, o contexto lingüístico em que se situa a mensagem (GINZBURG, 1989, p. 76).

Para Gombrich, que não fazia distinção entre Iconologia e Iconografia, os argumentos circulares poderiam surgir tanto em avaliações estéticas sustentadas em documentações que apenas reforçariam a análise desejada quanto nas estilísticas reforçadas por paralelismos históricos e, por isso, ele assumiu uma atitude "anti-romântica" ou "antiexpressionista" em relação a determinados estudos que visaram a reconstrução da História a partir de obras de Arte ou de testemunhos figurativos.

Tendo a mente humana como origem da Arte , os problemas da História da Arte apontados por Gombrich como centrais[2] são enfrentados enfocando os aspectos psicológicos

[2] Para Gombrich (1986, p. 255), são eles: (...) "por que a representação tem de ter uma história, por que a humanidade levou tanto tempo para chegar a uma reprodução plausível dos efeitos visuais que criam a ilusão da semelhança, e por que artistas como John Constable, que se empenharam em serem fiéis à sua visão, tiveram de

da criação e da decifração da imagem, os quais o levam a conclusão de “que nenhuma espécie de arte está livre das convenções” e que é justamente “o conjunto dessas convenções que faz o que se entende por ‘estilo’ em pintura” (1986, p. 255), este sendo considerado como um veículo que conduz o artista a uma atitude mental de busca de elementos que ele seja capaz de representar.

Em seu entendimento, a análise do estilo de uma obra deveria está sempre aberta - o que para ele era a essência do método warburguiano - disposta a romper e renovar as interpretações adotadas anteriormente, ao invés de tentar incluir a obra de Arte num contexto histórico mais amplo e definitivo, o que, inevitavelmente, levaria a argumentos circulares.

IV

O retrato é, para Gombrich (1986, p. 77-8), um exemplo de “que o ponto de partida de um registro visual não é uma certeza, mas uma conjetura condicionada pelo hábito e pela tradição”, um padrão, desenvolvido ao longo de anos de tentativas e correções, que orienta o processo de fazer, comparar e fazer novamente. A esse modelo, do qual parte o artista, ele chamou de “esquema” (*schemata)*.

Essa idéia é importante no seu modo de entender um estilo enquanto tradição envolvida pelos contextos histórico e artístico, importando-se mais em estabelecer suas relações com o contexto do que em ressaltar como ele se modifica. Para ele (1986, p. 105), ao invés de se dedicar a explicações do tipo evolutivas é mais adequado procurar “as condições que ditam a adoção de uma ou de outra maneira de tornar a natureza inteligível”, as quais poderão ser encontradas quando “propusermos a simples questão de como a função de uma imagem afeta a sua forma”. Por outro lado, referindo-se a Wölfflin quando disse que [...] “todas a pinturas devem mais a outras pinturas do que à observação direta”, ele mostrou as possibilidades do estabelecimento de relações entre os artistas que mantêm a tradição de um estilo. Essas relações resultariam no que Gombrich (1986, p. 277) entendia como História da Arte.

A Arte grega é tomada por Gombrich (1986, p. 104) como exemplo que

> [...] ilustra nitidamente nossas fórmulas de esquema e correção, de fazer antes de comparar. [...] A arte arcaica parte do esquema, da figura frontal, simétrica, concebida sob um único aspecto; e a conquista do naturalismo

---

admitir que nenhuma espécie de arte está livre das convenções, isto é, daquilo que Constable chama de ‘maneira’“.

> pode ser descrita como a acumulação gradual de correções devidas à observação da realidade.

Ao comparar representação e Natureza, o artista grego gradualmente superou os limites da imagem conceitual avançando nas artes da mimese[3], através de esforços sistemáticos no ajuste da representação às aparências, modificando o 'esquema' vigente através do escorço[4] e da modelagem em luz e sombra, a partir de outra concepção de/entre "ver" e "conhecer" [5].

O resultado alcançado foi adotado entre os séculos III e XIII d.C., época em que os artistas partiam de esquemas elaborados pela Arte Grega fazendo pequenas adaptações para os devidos ajustes ao contexto de determinadas narrativas e do ensino da doutrina religiosa.

"Os cristãos do século XI continuavam a sentir-se totalmente esmagados pelo mistério, dominados pelo mundo desconhecido que os seus olhos não podiam entrever, mas", escreveu Georges Duby (1978, p. 19), historiador medievalista, "cujo reino se estende vigoroso, admirável, inquietante para lá das aparências". Nesse período, existia uma estreita relação entre fundamentos artísticos e poder monárquico, uma integração entre soberano e Igreja.

É nesse contexto que o homem desse século projeta em seu rei não só a figura do cavaleiro, guardião da justiça e da paz, mas também a do sábio, exigindo que ele, além de empunhar a espada, domine a leitura. Assim, escreveu Duby (1978, p. 31),

> Foi antes de tudo pela arte do livro que a tradição da arte antiga se transmitiu. O livro era considerado acessório de liturgia, tanto pelo menos como instrumento de conhecimento. Cooperava no serviço divino. Por essa razão, devia ser ornamentado, como o eram o altar, os vasos sagrados ou as paredes do santuário. Neste objecto estabelecia-se, mais íntima do que em nenhum outro lugar, a junção entre a cultura escrita e a imagem.

---

[3] **Mimese: "**[Do gr. mímesis. 'imitação'.] S. f. 2. Liter. Imitação ou representação do real na arte literária, ou seja, a recriação da realidade" (LACERDA, C.; GEIGER, P. (Eds.). Dicionário Aurélio Eletrônico – V. 2.0. São Paulo: Nova Fronteira, 1996).

[4] **Escorço:** "[Do it. scorcio.] S. m. 1. Art. Plást. Desenho ou pintura que representa objeto de três dimensões em forma reduzida ou encurtada, segundo as regras da perspectiva. 2. As figuras assim representadas. 3. Qualquer figura menor que o natural. 4. Fig. Resumo, síntese" (LACERDA, C.; GEIGER, P. (Eds.). Dicionário Aurélio Eletrônico – V. 2.0. São Paulo: Nova Fronteira, 1996).

[5] Um verdadeiro dilema, como mostra a passagem retirada por Gombrich (1986, p. 272) da obra *Idée de la perfection de la peinture*, de Roland Fréat de Chambary, publicada em Le Mans, em 1662, reproduzida abaixo:

> Sempre que o pintor sustenta que imita as coisas como as vê, é certo que as vê mal. Representará essas coisas segundo a sua imaginação imperfeita e produzirá uma pintura ruim. Antes de pegar pincel ou brocha deve, portanto, ajustar o olho segundo aqueles princípios da arte que ensinam a ver os objetos não só como eles são em si mesmos mas também como devem ser representados. Porque seria freqüentemente um grave erro pintá-los exatamente como o olho os vê, por mais que isso pareça um paradoxo.

A Arte Medieval é marcada pela distância entre obra e mundo visível, utilizada para ilustrar histórias dos Evangelhos, uma Arte de copistas, até que os meios de aumentar a fidelidade das representações tornaram-se outra vez objeto de pesquisa sistemática a partir do século XIV.

V

O Renascimento pode ser estabelecido como iniciado na Itália durante o século XIV e o seu término datado no final do século XVI. A sua primeira definição é atribuída a Jules Michelet, feita no ano de 1855, sendo que, com a obra do historiador Burckhardt, *A Civilização do Renascimento na Itália*, de 1860, o termo incorporou-se ao vocabulário dos historiadores como sendo o período compreendido entre 1400 a 1600, caracterizado como um movimento que conscientemente passou a revalorizar o que o classicismo grego-romano havia exaltado, visando recuperar e reviver os êxitos da Antiguidade Clássica, afetando todos os aspectos da cultura daquela época.

Não foi uma ruptura com a Idade Medieval, ou mesmo um início a partir do nada, a busca do totalmente novo. Durante a Idade Média houve tentativas para recuperar os êxitos da Idade Clássica como, por exemplo, a chamada *renovatio*, no final do século VIII e no início do século IX, com o Imperador Carlos Magno promovendo a retomada da Arquitetura e da Literatura romanas visando restaurar o Império Romano na Europa Ocidental. A segunda tentativa ocorreu no século XII e teve um impacto maior, através das contribuições vindas do mundo árabe retomadas a partir do contato com a civilização islâmica da Espanha. Ao pensamento medieval somaram-se elementos do misticismo oriental e judaico, numa mescla que envolvia a astrologia e a astronomia, a alquimia e a química, a magia e a investigação sistemática da natureza, resultando numa nova atitude diante do mundo que, posteriormente, levaria aos fundamentos do pensamento científico do século XVII.

A Itália reunia as melhores condições para o movimento renascentista, uma vez que a posição geográfica privilegiada da península fez com que controlasse o comércio no Mediterrâneo, concentrando riquezas em suas cidades. No Norte da Itália, as ruínas romanas ainda predominavam na paisagem urbana, constituindo um testemunho amplo da civilização clássica, que teve Roma como capital até quando os godos e os vândalos, tribos germânicas, invadiram a Itália e desmantelaram o Império. Além disso, com a queda de Constantinopla, o

Sul da Itália tornou-se a entrada e refúgio natural dos sábios, filósofos, artistas que fugiam da invasão turca, trazendo com eles a cultura do Império Romano do Oriente, sem contar que a Europa Ocidental passou a ter acesso a textos filosóficos da Grécia Antiga, até então desconhecidos.

Ao ideal medieval do homem anônimo com a sua postura de servidão a Deus sobrepõe-se a do homem, basicamente o *indivíduo*, capaz de escolher e transformar o curso dos acontecimentos, que busca a exaltação de suas qualidades, como mostra a proliferação de biografias e autobiografias, na Literatura, assim como dos retratos e auto-retratos, com a devida identificação das pessoas representadas em pinturas.

É no Renascimento que surge o hábito do artista de assinar suas obras, do trabalho com materiais que resistissem a ação do tempo, como o mármore na escultura, e o óleo na pintura, visando a projeção de seu nome e de suas obras. Aliás, o tipo e a quantidade de material a ser empregado em uma obra faziam parte das especificações do contrato entre artistas e clientes, o qual, basicamente, apresentava três características: o que o pintor deveria pintar, mediante prévia aprovação do desenho; como e quanto o cliente pagaria e quando o artista entregaria a obra; as cores a serem utilizadas mediante o uso de materiais de boa qualidade.

Através de análises de contratos da época do *Quattrocento,* Michael Baxandall mostrou a notória preocupação com a qualidade do pigmento utilizado para as cores, sendo que, "Depois do ouro e da prata, o azul ultramarino era a cor mais cara e a mais difícil de se empregar" (1991, p. 20), exigindo habilidade do pintor que cobrava e era reconhecido pela mesma. O azul ultramarino, como nos explica Baxandall (1991, p. 20), "era fabricado a partir do pó do lápis-lazúli, importado a altos custos do Oriente; o pó era diluído em líquido, várias vezes, para se extrair a cor, sendo que o primeiro extrato obtido - um azul violeta intenso - era o melhor e o mais caro".

O estudo dos contratos possibilita acompanhar as mudanças que foram ocorrendo, entre elas, em relação aos materiais empregados, o notável enfraquecimento do interesse do uso de pigmentos preciosos e o reforço do interesse pela habilidade pictural, o que, para Baxandall (1991, p. 24) refletia uma tendência da Europa ocidental daquela época que passou a moderar o comportamento ostentatório, fazendo com que, na pintura, diminuísse a preocupação "em ostentar ao público a pura opulência de material".

Desse modo, o cliente passou a "transferir seu dinheiro do ouro para o 'pincel' ", isto é, a valorizar e a pagar pela técnica do pintor (BAXANDALL, 1991, p. 26-27), levando ao encarecimento dos serviços de quem possuísse tal capacidade, ao mesmo tempo que leva o cliente a outro tipo de opulência - a de comprador de habilidade, alimentando uma competitividade entre os pintores que deixam de ser meros “fazedores de arte”, o que os reduziam a categoria de artesão, e tornam-se idealizadores de obras que exigiam o domínio de técnicas a partir de conhecimentos elaborados através de estudos diversos e comparativos.

Essa atitude em relação à Arte é ilustrada por Lorenzo (Nencio) di Cione Ghiberti [1378-1455], escultor e arquiteto que, ao dedicar-se a confecção dos relevos de bronze das portas do Batistério de Florença, quando, em 1401, vence a concorrência para a escolha de um artista que fosse capaz de manter o orgulho e satisfazer o desejo dos florentinos de viverem à altura de sua grandiosa tradição, num primeiro momento viu-se como um artífice diante de uma incumbência importante que executaria tomando como modelo os artistas romanos e, num segundo momento, ao trabalhar na segunda porta, rompe e transcende os padrões que lhe serviam de modelos, mostrando que “ele estava claramente tentando não apenas alcançar o elevado padrão do passado, mas também progredir, progredir até mesmo para além de suas próprias obras anteriores” (GOMBRICH, 1990, pg. 6).

“As Portas do Paraíso” de Ghiberti podem ser consideradas um marco no sentido que a partir dessa obra passa a ficar cada vez mais evidente a distância entre, a ‘arte aplicada’ do artesão e a busca intelectual da arte, sendo esta última guiada por um espírito de “*dimostratione*”, isto é,

> O artista trabalha como um cientista. Suas obras não existem apenas por existirem, mas também para demonstrarem certas soluções de problemas. Ele as cria para que sejam admiradas por todos, mas, sobretudo, tem um olho voltado para os companheiros artistas e para os conhecedores, capazes de apreciar a inventividade da solução encontrada (GOMBRICH, 1990, p. 10).

Com a volta ao ideal clássico de imagem convincente, a descrição do mundo real tornou-se uma meta para os artistas que passaram a estudar a natureza e as possibilidades de sua reprodução fiel.

VI

Diante da impossibilidade de copiar a realidade *como ela é* ou *como a vê*, Gombrich mostra-nos que o artista lança mão de técnicas e meios, algo desenvolvido durante anos de aprendizagem e de dedicação ao domínio de um vocabulário que o qualifica na Arte da representação através de uma linguagem visual. "A pintura", diz ele (1986, p. 74), "é uma atividade, e o artista tende, conseqüentemente, a ver o que pinta ao invés de pintar o que vê". Referindo-se a afirmação de John Constable, um pintor de paisagens, de que "o pintar paisagens é uma investigação das leis da Natureza", Gombrich (1986, p. 42-4) complementa afirmando que o

> que um pintor investiga não é a natureza do mundo físico, mas a natureza das nossas reações a esse mundo. Ele não se preocupa com as causas, mas com o mecanismo de certos efeitos. Seu problema é de natureza psicológica - trata-se de conjurar uma imagem convincente apesar do fato de que nenhum tom isolado corresponde ao que chamamos de 'realidade'.

O argumento de que "toda cultura e toda comunicação dependem da interação entre expectativa e observação, das ondas de gratificação, desapontamento, conjeturas acertadas e jogadas em falso, que constituem a nossa vida diária", é um dos momentos em que Gombrich (1986, p. 51) faz uso das idéias da teoria da informação (GINZBURG, 1989) mescladas com as da Psicologia da Percepção e da Visão, áreas para as quais ele transladou a questão da interpretação, passando a discutir como o artista sugeria uma interpretação ao observador de sua obra, ao invés de como interpretava o mundo visível.

"Todo pensamento consiste em distinguir e classificar. Toda percepção está ligada a expectativa e, em conseqüência, a comparações" (GOMBRICH, 1986, p. 263); partindo desse princípio ele conclui que "aprender a ver" tem uma relação estreita com as expectativas e com o conhecimento conceitual prévio adquirido nas experiências.

No relato da estória de um adulto que perdeu a visão quando criança e, através de intervenções cirúrgicas, tenta recuperá-la aos cinqüenta anos, o neurologista Oliver Sacks mostra que o sentido da visão se correlaciona com todos os outros e que juntos atuam na criação de "um mundo visível de início, um mundo de objetos, conceitos e sentidos visuais" (1985, p. 129), sendo que "a percepção está sempre ligada ao comportamento e ao movimento, à busca e à exploração do mundo" (1985, p. 132), ou seja, ao impulso do olhar, ao comportamento visual.

Sacks e Gombrich citam o livro do bispo George Berkeley publicado em 1709, *A New Theory of Vision*, para sustentarem que a conexão entre o sentido tátil e o visual se estabelece na experiência. Os estímulos que chegam à retina através dos olhos resultam em sensações que são processadas na mente que elabora as percepções. Simultaneamente, ocorre a análise, classificação e comparação das percepções visuais a partir de expectativas, as quais desencadeiam um processo de projeção que tenta reconhecer ou perceber algo, tendo como baliza as experiências e conhecimentos anteriores.

Referindo-se ao problema da percepção, diz Gregory (1979, p. 11):

> [...] Podemos ver em nós mesmos a tentativa no sentido de organizar em objetos os dados sensoriais. Se o cérebro não estivesse continuamente alerta para objetos, o caricaturista ver-se-ia em apuros. Mas, de fato, tudo que ele tem a fazer é apresentar meia dúzia de traços ao olho e nós vemos um rosto, com expressão e tudo. Esse punhado de linhas é tudo que o olho requer - o cérebro fará o resto: buscar objetos e encontra-los, sempre que possível. Por vezes, vemos objetos que não estão lá: faces no fogo ou o Homem na Lua.

O artista domina a maneira de acionar o mecanismo de projeção - não deixando o observador em dúvida sobre como completar as lacunas, meticulosamente deixadas por ele, ao mesmo tempo em que fornece determinados detalhes sobre os quais é possível fazer projeções, comparar e completar a imagem.

“A sensação em si não tem ‘marcadores’ para tamanho e distância, que precisam ser aprendidos com base na experiência” (SACKS, 1985, p. 134n), que atua no desenvolvimento de Graduações de Constância[6], responsáveis pela modificação das dimensões e formas das imagens que chegam até a retina. O artista sugere apenas uma, dentre um conjunto de interpretações possíveis, representando objetos familiares, a partir de determinado ponto de

---

[6] Descartes em sua obra *Dióptrica, Meteoros e Geometri* de 1637, tratou dessa questão e referindo-se ao que hoje é conhecido como sendo a Constância de Tamanho, escreveu

> Em conclusão, nada preciso dizer de especial sobre o modo como vemos o tamanho e a forma dos objetos; ele é completamente determinado pelo modo como vemos a distância e a posição de suas partes. Assim, o tamanho deles é julgado de acordo com o nosso conhecimento ou opinião quanto à distância a que se encontram, em conjunto com o tamanho das imagens que imprimem no fundo do olho. Não é o tamanho absoluto das imagens o que conta. Elas são claramente cem vezes maiores [em área] quando os objetos estão muito próximos de nós do que quando estão dez vezes mais distantes; mas isso não nos faz ver os objetos cem vezes maiores; pelo contrário, eles parecem ser quase do mesmo tamanho, pelo menos enquanto não formos enganados por uma distância excessivamente grande.

Na seqüência, tratando da denominada Constância de Forma, afirmou:

> Repetindo: nossos julgamentos quanto à forma provêm claramente do nosso conhecimento, ou opinião, quanto à posição das várias partes dos objetos, e não de acordo com as imagens no olho; pois essas imagens contêm normalmente ovais e losangos quando nos fazem ver círculos e quadrados (apud GREGORY, 1979, p. 150-1).

vista, que possibilitam estimativas de tamanho e forma. É nessa idéia, assim como no fato da experiência "de que o nosso olhar não dobra esquinas" (GOMBRICH, 1986, p. 218), que repousa as bases da percepção de representações tridimensionais.

VII

As técnicas de medição eram fundamentais nas transações comerciais que exigiam o cálculo de volume, de modo rápido e preciso, de recipientes como, por exemplo, barril, saco ou fardo.

A capacidade para realizar tais cálculos podia ser desenvolvida nos quatro anos da escola primária, ou *botteghuzza*, iniciados pela criança com seis ou sete anos de idade e, em seguida, a partir dos dez ou doze anos, na escola secundária, ou *scuole d'abbaco*, na qual a maior parte do estudo era baseada na Matemática. Como poucos continuavam os estudos após o *scuole d'abbaco*, "para boa parte das pessoas pertencentes à classe média", diz Baxandall (1991, p. 167), "as noções de matemática adquiridas na escola secundária constituíam o núcleo central de sua formação intelectual e de sua cultura".

Essas técnicas passam a ser empregadas na pintura do século XV, estabelecendo uma estreita ligação entre pintura e Matemática comercial da época, como exemplifica Baxandall ao citar um manual de Matemática escrito por Piero della Francesca [c. 1410-1492], *Trattado d'abaco*, contendo, entre outros assuntos, instruções para medir o volume de um barril através de noções geométricas e do π . Essa ligação pode ser evidenciada de duas formas. "De um lado", como escreveu o autor (1991, p. 169),

> muitos pintores, eles próprios homens de negócios, haviam passado pela instrução matemática secundária das escolas leigas: essa era a geometria que conheciam e usavam cotidianamente. Por outro lado, o público culto tinha essas mesmas noções geométricas para apreciar uma pintura: era um instrumento do qual eram dotados para expressar suas opiniões, e os pintores sabiam disso.

Desse modo, o pintor fazia uso intenso de representações de objetos utilizados nos exercícios de medição, familiares aos observadores, tais como colunas, superfícies pavimentadas, cones, cilindros etc, visando levá-los a compreensão das formas a partir do sentido visual e da experiência cotidiana no trato com cálculos de volumes através de combinações de corpos geométricos. "Um pintor que deixasse traços desse tipo de análise em suas obras", conclui Baxandall (1991, p. 170) ao equiparar o homem que media um fardo com o pintor que media uma figura, "deixava para seu público, sugestões que eles estavam perfeitamente preparados para receber".

Outro aspecto da relação pintura e Matemática praticada pelos comerciantes quatrocentistas, diz respeito ao uso da aritmética na resolução de problemas que envolvessem proporcionalidade como, por exemplo, divisão de pastagens, heranças, trocas e câmbio. Esses problemas, ressaltados por Baxandall (1991, p. 174-175), faziam parte da rotina do comércio, pois era uma época em que "cada cidade importante tinha não somente sua própria moeda, mas também seus próprios pesos e medidas". A regra de três era o "instrumento aritmético universal" dos comerciantes para resolução desses problemas e, apresentada por Piero della Francesca dessa maneira:

> A regra de três diz que se deve multiplicar a coisa que se quer saber pela que lhe é diferente, e dividir o produto pela parte que sobrar. O número que resultar disso é da mesma natureza daquele que é diferente do primeiro termo; e o divisor é sempre igual à coisa que se quer saber.
>
> Por exemplo: sete *bracci* de tecido valem nove liras. Quanto valerão cinco *bracci* de tecido?
>
> Faça assim: multiplique a quantidade que você quer saber pela importância que valem sete *bracci* de tecido - a saber, nove. Cinco vezes nove é igual a quarenta e cinco. Divida por sete e o resultado é seis e três sétimos (apud BAXANDALL, 1991, p. 173).

Desse modo, temos uma habilidade "em reduzir as informações as mais diversas a uma fórmula de proporção geométrica: A está para B assim como C está para D" (BAXANDALL, 1991, p. 175), utilizada pelos pintores na elaboração de seus quadros e pelos observadores da obra na compreensão da representação dos espaços ou das formas do corpo humano a partir de uma proporcionalidade.

VIII

Uma obra de grande repercussão entre os europeus de língua latina, e durante a Idade Medieval utilizada pelos profissionais ligados à arte de construir, foi *De Architetura Libri Decem*, escrita no século I a.C. pelo arquiteto romano Marco Vitrúvio Polião. Na Renascença, ela é redescoberta mostrando-se de grande valia para os preceitos daquela época, como podemos verificar no trecho abaixo:

> A ciência do arquiteto é ornada por muitos conhecimentos e saberes variados, pelos critérios da qual são julgadas todas as obras das demais artes. Ela nasce da prática e da teoria. Prática é o exercício constante e freqüente da experimentação, realizada com as mãos a partir de materiais de qualquer gênero, necessária à consecução de um plano. Teoria, por outro lado, é o que permite explicar e demonstrar por meio da relação entre as partes, as coisas realizadas pelo engenho. Desse modo, os arquitetos formados sem instrução, exercitados apenas com as mãos, não o puderam fazer completamente, de forma que assumissem a responsabilidade pelas obras; por sua vez, aqueles que confiaram unicamente na teoria e nas letras, parecem perseguir uma sombra, não a coisa. Contudo, os que se aprofundaram numa coisa e noutra, como que munidos de todas as armas, atingiram com autoridade mais rapidamente o que era seu propósito. Em tudo na verdade, máxime certamente na arquitetura, essas duas coisas estão presentes: o que é significado e o que significa. O que é significado é algo proposto do qual se fala; o que significa é a demonstração explicada pelas regras das doutrinas. Por essa razão, quem vier a professar o ofício de arquiteto deverá estar exercitado nessas duas coisas. Assim, é necessário que seja engenhoso e sujeito à disciplina, pois nem o engenho sem disciplina, nem a disciplina sem o engenho podem produzir o artífice perfeito. E para que possa ser devidamente instruído, perito em desenho, erudito em geometria, que aprenda a história profundamente, que ouça com atenção os filósofos, que conheça música, que não seja ignorante em medicina, que conheça as respostas dos jurisconsultos, que tenha conhecimento das regras da astrologia e do céu (POLIÃO, 1999, ps. 49-50).

Em seu tratado, composto por dez livros, o arquiteto apresentou seus princípios de construção, discutindo as origens e o que era Arquitetura, condições para construir cidades e como protegê-las através de muralhas e fossos, tratou de materiais empregados nas diversas fases de uma obra, construção de templos, edificações privadas, urbanas ou rurais, para uso residencial, bem como públicas como, por exemplo, praças, prisões, teatros etc. “Com efeito”, escreveu Vitrúvio ao tratar da cenografia de peças teatrais,

> quando Ésquilo dirigiu a encenação de uma tragédia em Atenas, Agatacarco, pela primeira vez, produziu cenários e elaborou um tratado a esse respeito. Baseados nele, Demócrito e Anaxágoras, acerca do mesmo assunto, descreveram como, estabelecido um centro num lugar determinado, conviria que traçassem, segundo uma lei natural, linhas em concordância com a acuidade dos olhos e com a direção dos raios visuais de tal modo que, se pintadas nos cenários, a partir de coisas indeterminadas, comporiam imagens precisas dos edifícios e, representando-se objetos em superfícies planas e retilíneas, alguns pareceriam fugirem da vista e outros aproximarem-se. (...) (POLIÃO, 1999, p. 161).

Além disso, em sua obra encontramos considerações sobre fontes de água potável, como conduzi-la até reservatórios e distribuí-la, como construir gráficos que possibilitassem a determinação da posição das edificações a partir do movimento solar e, por fim, a discussão de assuntos relacionados a máquinas, sobretudo as de guerra.

Seu sistema de construção foi estabelecido a partir de proporções matemáticas baseadas no corpo humano, como evidenciado nos livros três e quatro, ao tratar dos templos, onde encontramos que

> A composição dos templos depende da proporção, cujas relações os arquitetos devem observar muitíssimo diligentemente. É engendrada também pela semelhança, que em grego é denominada αναλογια [analogia]. Semelhança é a correspondência entre as medidas de cada um dos elementos das partes da obra e ela com um todo, de onde resulta a relação entre as proporções. De fato, nenhum templo pode ser bem composto sem que se considere alguma proporção ou semelhança, a não ser que tenha exatas proporções, como dos membros segundo uma figura humana bem constituída. A natureza compôs o corpo humano de tal forma que o rosto, do queixo até o alto da testa, onde começam a brotar os fios de cabelo, fosse a décima parte de sua altura, assim como a palma da mão estendida, do pulso à ponta do dedo médio, a mesma coisa. A cabeça, do queixo até o sincipúcio, a oitava parte; se da cerviz até a base da raiz dos cabelos, a Sexta parte; do meio do peito até o sincipúcio, a quarta parte. A terça parte da altura do rosto via do queixo até a base do nariz; o nariz, das narinas até a região intermediária do supercílio, outra terça parte; e daí até a base da raiz dos cabelos, a testa guarda ainda uma terça parte. O pé possui a Sexta parte da altura do corpo; o antebraço a quarta parte, e o tronco, o mesmo. Os demais membros também guardam suas relações de proporção, fazendo uso das quais, antigos pintores e escultores célebres alcançaram reputação magnífica e eterna (POLIÃO, 1999, p. 92).

Tendo em mente as concepções vitruvianas, Filippo Brunelleschi [1377-1446], um florentino estudioso de Matemática e latim antes de dedicar-se à carreira de ourives, escultor e arquiteto, passou a utilizar o que havia aprendido na transformação das medidas tradicionais de planimetria em composições pictóricas, elaborando outro sistema de proporção adequado aos seus interesses de uma representação do espaço sobre um plano bidimensional. Durante a segunda década do século XV, suas buscas de um rigor maior em relação às práticas medievais o levam à técnica que dominaria toda a Arte dos séculos seguintes: a da perspectiva linear.

Até então, o espaço era entendido como uma composição de regiões qualitativamente diferentes e, por isso, não deveriam ser confundidas. Essa idéia refletia as concepções aristotélicas, sendo que, nas pinturas, evidenciava-se no modo como se estabeleciam as relações entre os planos, até que tais diferenças deixaram de ser levadas em conta, o que fez com que corpos e espaço vazio que os medeiam fossem considerados como a soma de todas as partes do espaço que, então, passou a ser visto como um *quantum continuum* único. Essa concepção permitia pensar no espaço sendo projetado em um plano, a partir de sua redução a três dimensões - comprimento, largura e altura, e assim garantir que cada parte fosse idêntica a outra, o que possibilitava o estabelecimento de relações proporcionais das distâncias entre elas.

As relações quantitativas que passa a serem estabelecidas entre, a realidade que o artista via e o modo como ele a representava, a partir daí entendido como “correto” uma vez que resultava de um espaço abstraído de relações numéricas, contrapõem-se ao modo anterior, baseado em elementos fisiológicos e ópticos, o qual passa a ser considerado “errado” e desproporcional.

Os resultados alcançados por Brunelleschi podem ser vistos no quadro em que ele representou o Batistério florentino e em outro no qual representa o município da cidade, sendo que seus êxitos tornaram-se exemplos para o escultor Donato di Niccolò di Betto Bardi [c. 1386-1466], conhecido como Donatello, e para o pintor Tommaso di Giovanni di Simone Guidi [1401-28], conhecido como Masaccio, que passam a incorporar as técnicas da criação de ilusões espaciais em suas obras, assim como influenciaram Paolo Uccello [1397-1475] e Piero della Francesca que combinaram teoria, uma vez que escreveram tratados de Matemática, e prática, já que usaram a perspectiva em seus trabalhos com grande eficácia.

Brunelleschi entendia a pintura como geometria aplicada e foi o artista que passou a estudar a Matemática e a empregá-la com mais intensidade em suas obras. Leon Battista Alberti [1404-72], um filósofo e crítico de arte, pintor e arquiteto, foi outra pessoa influenciada de maneira significativa por suas idéias.

Alberti nasceu em Gênova, e pouco tempo depois seu pai se transferiu para Veneza onde ficou até 1416. Após este ano, mudou-se para Pádua, onde ele ficou até seguir para Bolonha, cidade na qual formou-se em direito canônico em 1428. Até 1432 não se tem com exatidão o local de permanência de Alberti, porém Grayson (1999, p. 37) acredita que tenha sido nesse período que ele estabeleceu contato com os artistas florentinos, já que em 1428 sua família retornou para Florença, de onde havia sido exilada.

Em 1432 ele se estabeleceu em Roma para exercer a função de secretário de um chanceler pontifício. A partir de uma bula papal que permitia que Alberti recebesse as ordens sagradas e usufruísse os benefícios eclesiásticos, ele tornou-se prior de S. Martino em Gangalandi (1432), e vigário de Borgo S. Lorenzo (1448).

Durante sua estadia em Roma, é fato que manteve contato com Ghiberti e Brunelleschi. Foi também nessa época que começou a estudar Vitrúvio e as ruínas de Roma antiga, conduzindo seu interesse para a Arquitetura. Esses contatos foram reforçados em 1434, quando Alberti instalou-se em Florença ficando “Impressionado com a renovação artística da cidade, em particular com a construção da cúpula do Duomo, e sentindo-se seguro pelos estudos e experiências já iniciadas em Roma, redigiu o *De Pictura* (1435) e depois transladou para o vernáculo (1436)” (GRAYSON, 1999, p. 40), dedicando essa versão em italiano toscano aos artistas de Florença, em especial a Brunelleschi. É nessa obra, como escreveu Kline (1972, p. 232, tradução nossa), que Alberti “concebeu os princípios do que se tornaria a base de um sistema matemático da perspectiva adotado e aperfeiçoado por outros artistas”.

IX

No início do *De Pictura*, Alberti esclareceu quais eram seus pressupostos e propósitos. “Escrevendo sobre pintura nestas brevíssimas anotações”, disse ele (1999, p.75),

> tomaremos aos matemáticos - para que nosso discurso seja bem claro - aquelas noções que estão particularmente ligadas à nossa matéria. Depois de conhecê-las, faremos, na medida de nossa capacidade, uma exposição sobre a pintura, partindo dos primeiros princípios da natureza. Peço, porém, ardentemente, que durante toda minha dissertação considerem que escrevo sobre essas coisas, não como matemático, mas como pintor.

As noções a que se referiu Alberti (1999, p. 77) passam a ser apresentadas, iniciando com o conceito de ponto como sendo um “sinal que não podemos dividir em partes”. Esses sinais poderão ser reunidos em seqüência e “produzirão uma linha” que, para ele, será “uma figura cujo comprimento pode ser dividido, mas será de largura tão tênue que não poderá ser cindida”. As linhas, da mesma forma que os pontos, poderão, “quando se encostam umas às outras como fios de tecidos”, formarem uma superfície. Essa, por sua vez, é determinada “por seu comprimento, largura e, ainda, por suas qualidades”, as quais são definidas, por exemplo, pela quantidade de linhas que a limita. Se for por apenas uma, então teremos uma superfície circular; se for por mais de uma linha, “estas serão uma curva e uma reta ou diversas retas”.

Conforme o tipo de extremidade de uma superfície, ele (1999, p. 78) explicou que poderemos ter algo como um triângulo ou um quadrângulo e assim por diante. Além disso, ela poderá ser plana se nela for possível “colocar uma régua reta que a toca em toda a sua extensão”, ou esférica quando “se assemelha ao dorso da esfera”.

Os diferentes nomes e formas das superfícies dependerão de suas qualidades, ditas inerentes, determinadas pelo que ele (1999, p. 79) chamou de ‘orla’ e ‘dorso’ que as caracterizam. Por outro lado, as superfícies poderão permanecer as mesmas, no que diz respeito a nome e forma, mas sofrerem alterações em relação as suas qualidades, nomeadas de aparentes, “em razão da mudança de lugar [de onde são vistas] ou de luzes [que as atingem]”.

A mudança das qualidades aparentes é devida “à força da visão”, escreveu Alberti (1999, p. 79), recorrendo as opiniões dos filósofos, para quem “as superfícies são medidas por alguns raios, uma espécie de agentes da visão, por isso, chamados visuais, que levam ao sentido a forma das coisas vistas”. O pintor imagina “esses raios como se fossem fios extremamente tênues, ligados por uma cabeça de maneira muito estreita como se fosse um feixe dentro do olho, que é a sede do sentido da vista”.

Esses raios se diferem quanto à força e à função. Os que atingem a orla das superfícies serão chamados de extrínsecos e medem todas as suas quantidades, isto é, “todo espaço da superfície entre dois pontos da orla” (1999, p. 80). Os médios são aqueles que saem do dorso da superfície atingindo o olho informando sobre cores e luzes. Por fim, o raio cêntrico é aquele que ao atingir a superfície forma à sua volta ângulos retos e iguais ou, em outras palavras, é o “único que atinge a quantidade de modo que em todas as direções os ângulos sejam iguais” (1999, p.83). Tais explicações podem ser entendidas na figura abaixo.

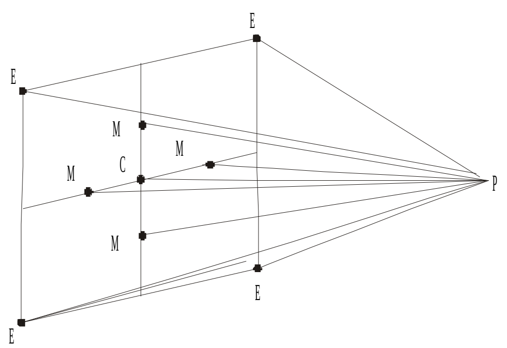


Fig. 01- Raios Visuais

Com essas noções, Alberti definiu sua idéia fundamental, a da pirâmide visual formada por esses raios. “A pirâmide”, disse ele (1999, p. 82),

> é a figura de um corpo no qual todas as linhas retas que partem da base terminam em um único ponto. A base dessa pirâmide é a superfície que se vê. Os lados da pirâmide são aqueles raios que chamei extrínsecos. O vértice, isto é, a ponta da pirâmide, está dentro do olho, onde está o ângulo das quantidades.

Uma das regras enunciadas por Alberti (1999, p. 81) diz respeito à relação entre ângulo visual e quantidade, sendo que “quanto mais agudo for o ângulo no olho, menor parecerá a quantidade vista”. A exceção dessa regra é exemplificada pelas superfícies esféricas, nas quais as quantidades parecerão maiores ou menores em razão da distância entre observador e superfície.

O fato de que quantidades possam parecer maiores ou menores em razão da distância deve-se “a mudança do intervalo”, ou seja, raios medianos tornam-se extrínsecos implicando em uma quantidade vista menor e, ao contrário, raios extrínsecos tornam-se medianos implicando numa quantidade maior. Acerca dessa idéia, Alberti (1999, p.82) dizia orientar os amigos enunciando a seguinte regra: “quanto maior é o número de raios que há para ver, tanto maior parece ser o que se vê, e quanto menor o número de raios, menor parece ser o que se vê”. Além disso, em relação às cores, observou que quanto maior a distância mais obscura e embaçada parecerá o que se vê.

A pintura para Alberti (1999, p. 88) era a intersecção da pirâmide visual “representada com arte por linhas e cores numa dada superfície, de acordo com uma certa distância e posição do centro e o estabelecimento de luzes”. Ao deter-se no estudo dessa intersecção ele (1999, p. 89) pede para que às noções sobre os raios visuais seja acrescentada

> a doutrina dos matemáticos segundo a qual prova que, se uma linha reta secciona dois lados de um triângulo e se essa linha, que acaba de formar um triângulo, for eqüidistante da linha do primeiro e maior triângulo, certamente esse triângulo menor será proporcional ao maior. Isso é o que dizem os matemáticos.

Uma vez que a pirâmide visual é formada por triângulos, desdobra-se disso que toda intersecção eqüidistante a uma superfície vista será proporcional a ela, como mostra a figura abaixo. Caso não seja eqüidistante, a quantidade vista poderá ser colinear aos raios visuais e não formará nenhum ângulo com a intersecção, o que fará com que não tenha “nenhum lugar na intersecção”. Ou, a superfície poderá ser não eqüidistante à intersecção, mas eqüidistante a outros raios visuais o que leva à seguinte situação: “quanto mais obtuso for na base do triângulo o ângulo maior, menos raios encerrará essa quantidade e por isso obterá menos espaço na intersecção” (ALBERTI, 1999, p. 92).

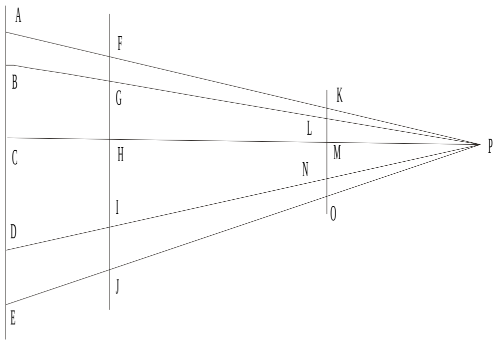
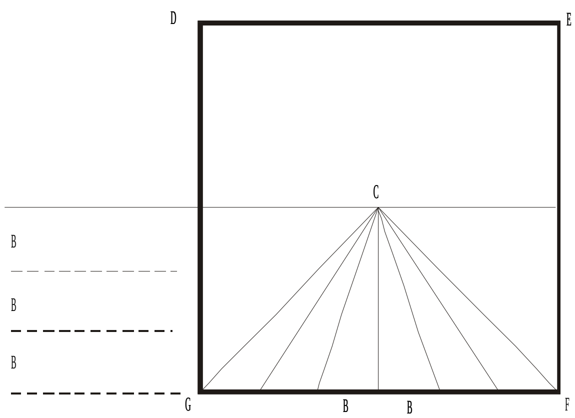


Fig. 02 – Intersecções da Pirâmide Visual

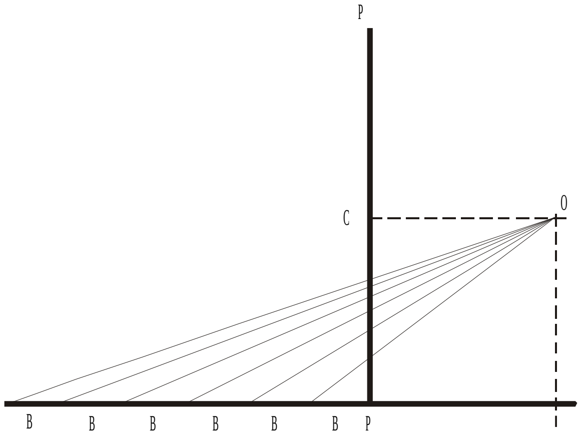
Incorporando essas idéias, Alberti (1999, p. 94) dá um passo adiante ao explicar de que maneira se obtém a intersecção. Chamando a atenção para o fato de que o fará enquanto pintor e, portanto, de modo prático e sem outros tipos de rigor, descreveu que: “Inicialmente, onde devo pintar, traço um quadrângulo de ângulos retos, do tamanho que me agrade, o qual reputo ser uma janela aberta por onde possa eu mirar o que aí será pintado, e aí determino de que tamanho me agrada que sejam os homens na pintura”.

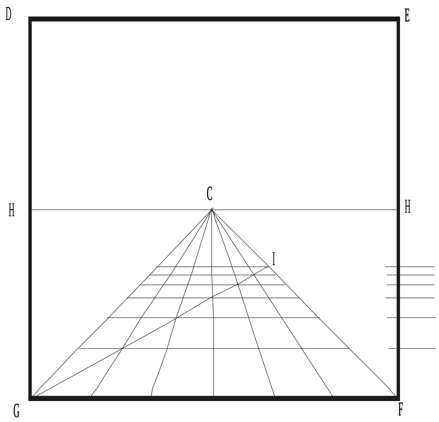
Na seqüência abaixo, segue uma representação encontrada na tradução para o inglês do livro do Alberti (1991), seguindo as instruções para a construção de uma perspectiva de um pavimento quadriculado.



Primeira etapa da construção de uma perspectiva: desenho das paralelas que se encontram no “ponto central”, onde DEFG é o limite da pintura ou a ‘janela’. B é a medida *braccio* correspondente a um terço da altura de um homem. C é o ponto central.

A segunda etapa consiste em determinar a partir das divisões horizontais as intersecções. Como vimos, B denotam as divisões, no exemplo, sobre o ‘pavimento’. PP indica a intersecção ou o plano da pintura. C é o ponto central. O, indica o ‘olho’, localizado a três *braccia* da intersecção.





A terceira etapa consiste em completar o pavimento quadriculado, sendo DEFG a tela. HH denota a linha do horizonte. Os intervalos determinados na etapa anterior em PP são transferidos para HF (ou HG), e as horizontais sucessivas do ‘pavimento’ são desenhadas de acordo com seus níveis correspondentes. GI indica a diagonal dos quadrados, desenhada como prova de acerto na elaboração da construção.

A questão do tamanho foi tratada pelo pintor apoiando-se na idéia de comparação tida como algo que tem a força de "mostrar nas coisas o que é mais, o que é menos ou igual" sempre tendo parâmetros, isto é, "grande o que é maior do que alguma coisa pequena, e muito grande o que é maior do que uma coisa grande, luminoso o que é mais claro do que alguma coisa clara. Faz-se comparação, sobretudo, [conclui ele], com as coisas mais conhecidas" (1999, p. 93).

Por esse motivo, Alberti (1999, p. 93-4) adota o homem como padrão de medida no sentido que "todos os corpos pequenos pintados na pintura parecerão grandes ou pequenos em comparação com o homem que aí esteja pintado".

Posteriormente, o processo descrito torna-se conhecido como a *cortina* ou o *véu* de Alberti, sugerindo o uso de uma tela transparente sobre a qual o pintor conseguiria a representação perspectiva da cena desejada, fixando sua posição e a da de um de seus olhos, utilizando uma estrutura, tipo mesa, em que sustentava a moldura em uma de suas extremidades e garantia, com o auxílio de uma espécie de régua móvel no sentido horizontal e vertical, fixada na outra extremidade da mesa, a posição do ponto de vista escolhido pelo pintor (STILLWELL, 1989). Abaixo, podemos ver as xilogravuras de Dürer (1525) mostrando as técnicas utilizadas pelos artistas daquela época.

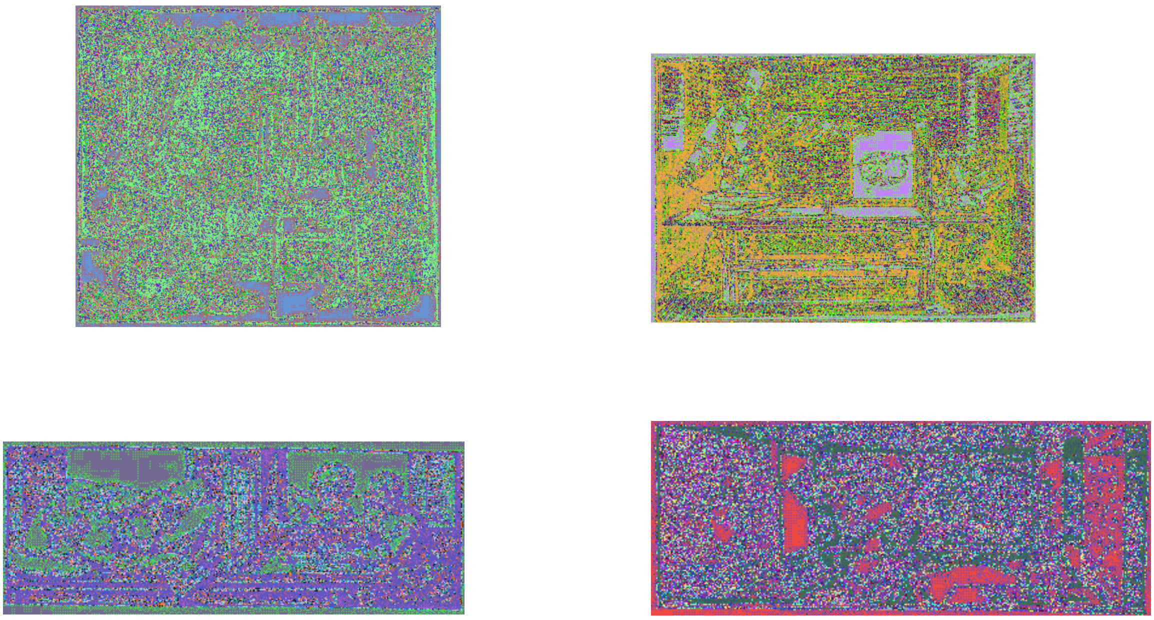


Fig. 03 – Dürer, 1525

X

Para mostrar a razão do que falava aos interlocutores que consideravam certos assuntos inacreditáveis ou apresentavam dificuldades para compreendê-los, Alberti fazia uso de uma pequenina abertura feita em uma caixa. A esse procedimento, ele dava o nome de *demonstração*, como observa Ivins Jr. (1946, p. 70) ao escrever sobre as relações entre Arte e Geometria, em particular sobre a perspectiva nos séculos XV e XVII.

Conforme a descrição feita por Ivins Jr. (1946), Alberti tomava uma caixa retangular longa o bastante para seu propósito de demonstrar e removia a parte superior, uma extremidade e um lado. No meio de uma das extremidades restantes e, próximo de sua parte superior, ele furava um orifício para observar. No fundo e na outra extremidade, ele colocava uma prancha quadriculada exatamente na largura do fundo. Quando ele olhava através do orifício para a prancha quadriculada, ele via que ela tomava a forma de uma secção de uma pirâmide truncada. Ao perceber que a resposta para o problema da altura aparente e alturas aparentes comparativas da parte superior e inferior da prancha estava na relação entre as linhas de visão, o orifício, e a prancha quadriculada, ele fez um modelo com as linhas de visão, esticando cordas a partir do orifício até o canto do quadrado na prancha quadriculada. Isto possibilitava que ele saísse de trás das linhas de visão e pudesse estudá-las a partir de várias posições.

Assim fazendo, ele realizou a pintura correta de uma prancha quadriculada, o que não foi outra coisa senão a projeção de uma prancha quadriculada sobre um plano que interceptava as linhas de visão, e percebeu que a área, forma e posição sobre aquele plano poderiam depender da localização do plano entre o orifício e a prancha quadriculada. A necessidade de fixar a posição do plano da pintura e tomar as medidas dos lugares nos quais as linhas da visão interceptavam esse plano poderia ser satisfeita utilizando uma medida padrão da época, por exemplo, o *pés*. Entretanto, tal uso era difícil, trabalhoso e impraticável em determinadas situações.

Uma solução poderia ser através de um método gráfico.

Alberti fez uso de um truque dos carpinteiros e cortadores de pedras, recorrendo a um instrumento que possibilitava a tomada de medidas a partir de uma escala própria, na prática, uma tábua fina como um prato, recortada de um lado ou de uma extremidade de uma prancha maior e preparada para adaptar-se exatamente a um contorno ou moldura. Esse conjunto assumia a função do plano da pintura, aquele que interceptava a pirâmide visual.

Ele posicionava seu instrumento de medida na borda final da prancha quadriculada. Uma de suas extremidades era cortada de modo que ele obtinha algo na forma de uma letra V maiúscula e invertida e que, ao fixá-lo à caixa, ele fosse largo o bastante para transpor os cantos inferiores da prancha quadriculada e, elevado o suficiente para ultrapassar a altura do orifício feito no final da caixa. Assim, podia-se instalar essa espécie de escalímetro acima das cordas ou linhas de visão em uma posição qualquer que ele desejasse.

Com o instrumento nessa posição Alberti realizava a medição das alturas das cordas ao passarem através dele. Após observar pelo orifício, ele movia-se para a extremidade oposta ao orifício e fazia uma marcação da imagem vista através dele e, então, desenhava o resultado, ou seja, esse desenho mostrava o fundo da caixa, o canto mais distante do instrumento, as cordas representando as linhas de visão e o trajeto que elas percorriam da prancha quadriculada até o orifício, determinando as posições ao atravessarem o instrumento. Isso feito, ele mudava a sua posição para o lado do modelo obtido na caixa e realizava outra medição.

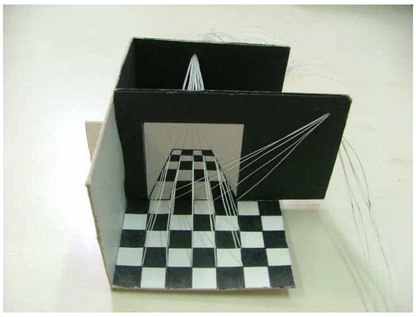


Fig. 04 – Vista frontal

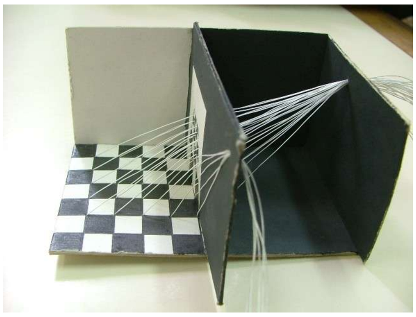


Fig. 05 – Vista lateral

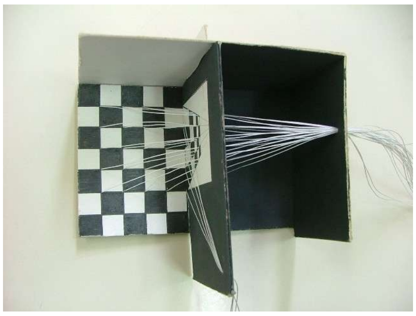


Fig. 06 – Vista superior

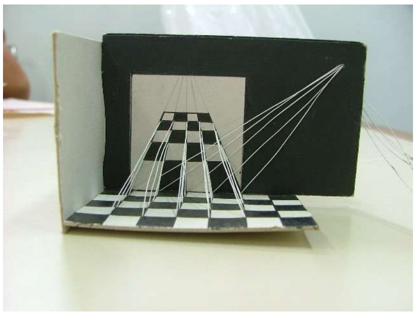


Fig. 07 – Vista frontal

Maquete: Amâncio Fotografia digital: Caleffi

Mantendo a escala, ele fazia indicações observando o fundo e a extremidade da caixa, a altura do orifício acima do fundo, as linhas de visão e as posições onde se encontravam no trajeto da prancha quadriculada até o lado do instrumento perpendicular ao da prancha quadriculada. Novamente, ele desenhava o resultado da observação e das medidas tomadas.

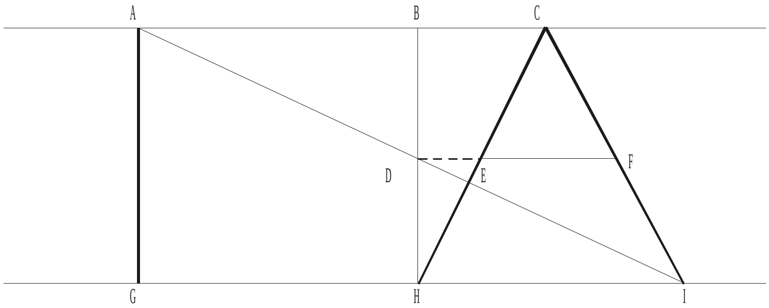
A prova considerada como suprema era feita sobrepondo os dois desenhos de uma maneira que as linhas que representavam o fundo e o canto externo do seu instrumento coincidissem. Então, para ter certeza que os dois desenhos estavam na mesma escala, ele desenhava uma linha diagonal a partir da intersecção da linha cruzada sobre o instrumento com a corda mais externa para o canto inferior oposto do feixe invertido de cordas.

O desenho completo era resultado de um esquema simples, ao invés de uma argumentação geométrica obscura e abstrata para os artistas. É importante notar que o desenho combinado continha duas vistas diferentes das cordas representando as linhas de luz e duas diferentes vistas do orifício. Alberti chamava o orifício de seu primeiro desenho de *ponto central*, o orifício do outro desenho ele chamava de *olho*[7].

A construção de Alberti é representada no desenho mostrado abaixo. A, o ponto distante, representa o olho em um dos dois desenhos preliminares. C, o ponto central, o representa no outro. AG é a altura do olho acima do plano no qual a prancha quadriculada é colocada. As linhas AC e GI são paralelas. AB igual GH, são iguais à distância próxima do canto da prancha quadriculada. AG e BH são perpendiculares a GI. HI é o comprimento do canto do quadrado da prancha quadriculada. DF é paralelo a GI. HE e IF são os lados do quadrado da prancha quadriculada como visto a partir de C. O quadrado lateral HEFI é a prancha quadriculada como vista pelo olho. Se o desenho é feito em escala, as medidas da aparência de uma prancha quadriculada mais curta no plano, representado por BH, podem ser tomadas a partir do desenho. Normalmente, C fica sobre o centro de HI, mas não há razão geométrica para que isso ocorra em nenhuma posição particular, tão longe quanto se desejar, sobre a linha AB.

Representação da construção de Alberti - 2

[7] Leonardo da Vinci [1452-1519] e Albrecht Dürer [1471-1528] quando desenharam a construção colocaram literalmente olho em cada um dos dois pontos. Dürer, em sua descrição da construção, chamou o ponto central de seu “olho próximo” e o outro ponto de seu “outro olho”. Em terminologia moderna o “ponto central” ou “olho próximo” é o “ponto de fuga”, e o “olho” ou “outro olho” é o “ponto de distância”.



Ivins Jr., 1946

A solução dada por Alberti ao problema da determinação da forma e da medida de uma pintura, ou de uma imagem visual de um quadrado de área conhecida quando ele estivesse deitado sobre o chão a uma distância conhecida do observador foi, para Ivins Jr. (1946, p. 70-71, tradução nossa), não só “a partir de um ponto de vista estritamente prático”, como também seu “método e construção são tão ingênuos quanto simples”.

XI

O trabalho, na Antiguidade, era uma atividade que conferia forma, no sentido de “modelação da matéria” e essa atividade desenvolveria o espírito humano. Essa concepção, como afirma Heller (1982, p. 317), atravessou a Idade Média e chegou ao Renascimento sem nada além do que Aristóteles havia deixado.

Já no Renascimento, o que temos é que “Os novos problemas que a época levantou relativamente ao trabalho não diziam respeito à estrutura do processo de trabalho abstracto do artesão individual, mas aos aspectos ‘técnicos’ dessa estrutura”. Esses aspectos representariam o lado dinâmico do trabalho visando alterações constantes. O que importava não era a descrição do processo, mas sim das “tarefas concretas” e das “técnicas concretas” que conduzissem quem se dedicasse a esse tipo de estudo a uma atitude de superação e não de repetição das obras de seus antecessores.

No final do primeiro livro de sua obra, parte na qual Alberti pede desculpas se não foi claro em sua exposição sobre assuntos “tediosos”, ele tocou nesse aspecto considerando que tais assuntos eram relevantes para aqueles que possuíssem “engenhos sutis e aptos para a pintura”, os quais, aliás, entenderiam com facilidade o que foi dito. Aos outros, ele (1999, p. 98) disse que “dificilmente as compreenderá mesmo à base de grande esforço”, assim concluindo:

> Falamos de triângulos, pirâmides, intersecção o quanto nos pareceu necessário. Costumo explicar prolixamente essas coisas aos meus amigos por meio de certas demonstrações geométricas, coisas que me pareceram melhor omitir nestes comentários, para não me alongar. Relatei aqui apenas os rudimentos da arte e chamo de rudimentos porque eles darão aos pintores em formação os primeiros fundamentos para bem pintar. Essas instruções são de tal natureza que quem as conhecer bem, pela sua inteligência e pelo conhecimento da definição de pintura, verificará como elas lhe serão úteis. Não haverá que duvide de que nunca existirá bom pintor se não entender o que está procurando fazer. Em vão retesa o arco quem não tem para onde dirigir a seta. Eu gostaria de que concordassem comigo que só será ótimo artífice quem aprendeu a conhecer as orlas da superfície e todas as suas qualidades. Pelo contrário, nunca será ótimo bom artífice quem não for extremamente escrupuloso em conhecer tudo que dissemos até agora.

Conduzir à impressão de que pintar envolvia o uso de uma Matemática sofisticada é, para J. V. Field (1988, p. 239), um dos méritos de Alberti, apesar de ser evidente que sua obra não era destinada a matemáticos e, por conseguinte, dos três pequenos livros que compõem *De Pictura*, somente uma pequena parte é dedicada à descrição de uma construção.

A representação perspectiva dos ladrilhos de um piso era um dos problemas enfrentados pelos pintores quatrocentistas. A resolução vem com a compreensão dos princípios que estabeleciam que, a) uma linha reta em perspectiva permanece reta e b) retas paralelas, da mesma forma, permanecem paralelas ou convergem para um único ponto. Esses princípios, que conduzem a um resultado que carrega a sensação de que a representação obedece a leis, sustentaram o método, conhecido por *costruzione legittima*, utilizado por Brunelleschi ao representar o piso da Piazza San Giovanni (IVINS JR., 1946; HERSEY, 2000).

Entretanto, as etapas da construção traziam o inconveniente de terem que ser feitas separadamente o que era impraticável quando se tratava de pinturas em paredes, como os afrescos, exigindo outros procedimentos. Isso fez com que sua aplicação ficasse limitada a formas simples, cubos e pavimentações, incluindo algumas formas arquitetônicas.

Piero della Francesca já era conhecido, em sua época, como uma pessoa competente em Matemática e teve como aluno Luca Pacioli [*c.* 1445-1517] este sim, posteriormente, reconhecido como um matemático importante. A evidência da influência de Piero sobre Pacioli encontra-se em seus trabalhos sendo que, como observa Field (1988, p. 246), boa parte dos problemas algébricos do *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, de 1494, foram retirados diretamente do *Trattado d'abaco* de Piero e, na parte em que trata de perspectiva, reconhece-se o tratado escrito por Piero por volta de 1460, *De prospectiva pingendi*, trabalho que Field não hesita em afirmar que seria razoável considerá-lo como o primeiro tratado sobre perspectiva com uma abordagem matemática. Além disso, em dezembro de 1498, Pacioli concluiu a obra *De Divina Proportione*, na qual, em sua terceira parte, apresenta uma tradução do latim para o italiano do *Libellus de quinque corporibus regularibus*, trabalho de Piero contendo casos e problemas relacionados aos polígonos, poliedros regulares e outros poliedros (BERTATO, 2003).

O livro *Le Due regole della prospettiva pratica di M. Iacomo Barozzi da Vignola* de 1583, escrito por um arquiteto que ensinou em Roma por volta de 1530, foi prefaciado pelo matemático italiano Egnazio Pellegrino Rainaldi Danti, o qual, em 1573, escreveu *La Prospettiva di Euclide*. Nesse prefácio, ele disse que o tratado de Piero era o melhor em ordem e forma, além de suas excelentes ilustrações (apud FIELD, 1988, p. 250). Danti, professor de Matemática na Universidade de Bolonha, julgou que os textos, incluindo o mais popular, *De artificiali perspectiva* de Johannes Viator (Jean Pélerin) de 1505, tinham baixo nível quando analisados do ponto de vista matemático.

O caráter elementar dos textos deve-se aos propósitos de seus autores, isto é, não o de dar instrução em Matemática, mas em ajudar o artista a construir uma pintura.

Pelo comentário feito por Danti dos tratados sobre perspectiva é possível verificar a mudança em relação a seus autores e enfoques. Aos poucos, o interesse pela perspectiva, aplicada a Arte, no século XVI, é acompanhado pelo interesse dos artesões e dos arquitetos pela aplicação dessa Matemática à artilharia e fortificações.

Dois marcos evidenciam essa mudança: o surgimento do primeiro tratado matemático de balística, em Veneza no ano de 1537, escrito por Niccolò Tartaglia [1500-1557], *La Nova Scientia*, e de outro, *Architettura*, escrito por Pietro Cataneo [*c.* 1510-1569], considerado um dos inventores de certos tipos de fortes, sendo ele um arquiteto e engenheiro militar, além de professor de Matemática. Na segunda edição, surgida em Veneza no ano de 1567, encontrava-se uma parte dedicada à perspectiva e referenciada por Danti.

Em 1568 houve uma nova edição do *De Pictura* de Alberti. No ano seguinte, Daniele Barbaro, um diplomata e clérigo humanista de Veneza, apresentou seu tratado *La Pratica della perspettiva*, considerado por Field (1988, p. 252) um complemento do trabalho de Alberti. Mas, com uma ressalva. Apesar de seu tratado ser destinado a pintores, em seu prefácio, Barbaro queixou-se do pouco uso da perspectiva por parte dos pintores de seus dias.

Por outro lado, Barbaro deu ênfase no que diz respeito à perspectiva linear, *perspectiva artificialis*, enquanto recurso para representações arquitetônicas, no próprio trabalho dos pintores interessados em dar um senso de profundidade. No tratado de Barbaro, encontravam-se três exemplos de diferentes cenários: um para tragédia, outro para comédia e, por fim, um para sátiras (apud FIELD, 1988, p. 253). Esses exemplos, aparentemente foram retirados da obra de um arquiteto chamado Sebastiano Serlio [1475-1554] que, em 1545, em Paris, lança o *Libro di geometria e di prospettiva*. Por sua vez, os exemplos correspondem aos mencionados na obra de Vitrúvio.

O valor do tratado de Barbaro está na elaboração mais acurada do que a dos anteriores e no uso de boa parte do tratado de Piero, demostrando interesse pela Matemática e consciência da necessidade de tratamento matemático para a perspectiva, apesar de que na introdução da obra ele expresse a dificuldade de entendimento do trabalho sobre o assunto feito por Federico Commandino [1509-1575], enfatizando que, em seu tratado, fez uso das exposições mais elementares.

Commandino era reconhecido pelas boas traduções de trabalhos matemáticos, do grego para o latim, além de autoridade em textos matemáticos que envolviam projeções, entre elas, a cônica que, matematicamente, é equivalente a projeção utilizada na construção de pinturas sendo que, escrevendo como matemático e para matemáticos, ele abordou os detalhes dessa equivalência. Como observa Field (1988, p. 257), seu modo de tratar o assunto deve ter causado um choque naqueles acostumados aos manuais endereçados aos artistas. Ademais, “Commandino não mostra porque o método de construção que ele descreve é válido”, o que faz com que Field suponha que Commandino devia considerar óbvias as justificativas, não necessitando de extensas argumentações.

Guidobaldo del Monte [1545-1607] publica em 1600 o tratado *Perspectivae libri sex*, muito influenciado pelo trabalho de Commandino, trazendo, por exemplo, o primeiro tratamento generalizado dos pontos de fuga. Outro aspecto destacado por Field (1988, p. 257) é a sua abordagem da projeção de círculos, quando outros se restringiam à de figuras retilíneas.

Para Field não é certa a atividade de Guidobaldo como professor de Matemática, haja vista seu título de marquês. Certa, porém, são as atividades que desempenhou como engenheiro militar e, a partir de 1588, como agrimensor geral das fortificações de Toscana.

Field (1988) faz uma comparação entre o pensamento de Cataneo, por um lado, com a sua descrição da perspectiva avaliando um polígono regular e então obtendo uma versão da perspectiva do círculo a partir da ligação dos vértices traçando uma curva suave e, por outro lado, o pensamento de Guidobaldo e o seu reconhecimento de que a projeção do círculo poderia ser outra seção cônica.

Entre os pequenos trabalhos do matemático Giovanni Battista Benedetti [1530-1590], um foi sobre perspectiva, intitulado *De rationibus operationum perspectivae*, publicado pela primeira vez em 1585. Como foi escrito para matemáticos, esse tratado diferenciou-se dos outros, pelo rigor e elegância, o que, para Field (1988, p. 258), mostra que se destinava a matemáticos com boa formação e interessados em perspectiva enquanto Matemática.

Ao destacar o desenvolvimento do pensamento projetivo, Field (1988, p. 260) alinha os trabalhos realizados por Commandino, Benedetti e Guidobaldo para mostrar como o tratamento matemático de perspectiva tornou-se algo independente do ofício do desenho de perspectiva.

da matemática

I

Na concepção de Ernst Cassirer (1994), as diferentes respostas dadas à pergunta “O que é o homem?”, emperram por buscarem uma definição em termos de sua natureza ou essência. Assim, ele propõe uma abordagem alternativa e complementar a da introspecção psicológica, da observação e experimentação biológica e a da investigação histórica. Tal abordagem é apresentada como uma *Filosofia das Formas Simbólicas*, na qual toma-se o trabalho como característica fundamental do homem, ao invés de sua natureza metafísica ou física, e o sistema de atividades humanas como os aspectos que definem e determinam o círculo da ‘humanidade’, esse constituído pela linguagem, mito, religião, arte, ciência e história. “Uma filosofia do homem”, diz ele (1994, p.115), “seria, portanto uma filosofia que nos proporcionasse uma compreensão da estrutura fundamental de cada uma dessas atividades humanas, e que ao mesmo tempo nos permitisse entendê-la como um todo orgânico”.

O vínculo comum a essas atividades, ao contrário do que encontramos no pensamento escolástico, isto é, a substância (*vinculum substantiale*), é, em sua concepção (1994, p. 115), a função (*vinculum functionale*) e, desse modo, devemos buscar a função básica por trás das inumeráveis formas e expressões dessas atividades, “tentando encontrar uma origem comum”.

O trabalho do biólogo Johannes von Uexküll [1864-1944] é reportado por Cassirer uma vez que uma das conclusões apresentadas é que todo organismo possui um sistema receptor, através do qual recebe os estímulos exteriores do ambiente em que se encontra, e um efetuador, pelo qual reage aos estímulos, sendo que a interação desses sistemas forma o que o biólogo chamou de “círculo funcional” (*Funktionskreis*). No caso do homem, Cassirer ressalta que além desses dois sistemas, encontramos um terceiro por ele denominado “sistema simbólico”, responsável pela ampliação da dimensão da realidade vivida e as diferentes reações adotadas. As respostas humanas fazem, de certa maneira, com que o homem rompa com suas limitações naturais, uma vez que “Não estando mais num universo meramente físico, o homem vive em um universo simbólico” (1994, p. 48).

A partir desses pressupostos, Cassirer (1994, p. 50) conclui que a definição do homem como *animal rationale* deve ser superada visto que não é capaz de abarcar “as formas da vida cultural do homem em toda a sua riqueza e variedade”, propondo, por isso, a definição de *animal symbolicum*.

A experiência humana é constituída por uma rede simbólica tecida com fios da linguagem, dos mitos e das religiões, da arte e da ciência, partes que formam um universo simbólico. “Todo progresso humano”, explica Cassirer (1994, p. 48),

> em pensamento e experiência é refinado por essa rede, e a fortalece. O homem não pode mais confrontar-se com a realidade imediatamente; não pode vê-la, por assim dizer, frente a frente. A realidade física parece recuar em proporção ao avanço da atividade simbólica do homem. Em vez de lidar com as próprias coisas o homem está, de certo modo, conversando constantemente consigo mesmo. Envolveu-se de tal modo em formas lingüísticas, imagens artísticas, símbolos míticos ou ritos religiosos que não consegue ver ou conhecer coisa alguma a não ser pela interposição desse meio artificial.

Nesse sentido, ele (1994, p. 257) afirma que “A arte é de fato simbolismo” inerente ao homem através do qual vemos as coisas em sua forma e luz. O artista busca a representação do mundo das formas sejam elas poéticas, musicais ou plásticas, num processo intencional e construtivo, dando uma estrutura ao nosso universo, baseada em uma maneira específica de ordenar a “apreensão das aparências visíveis, tangíveis e audíveis” (1994, p. 274), assim como a ciência, de ordenar os pensamentos.

A partir da definição da arte como uma linguagem simbólica, pode-se estabelecer as semelhanças e diferenças entre essas maneiras de se ordenar, visto que a linguagem científica e a arte, não são meras imitações de coisas ou de ações, mas sim representações. Por outro lado, possuem caráter e propósitos, meios e fins diferenciados. Se, para o cientista, as perguntas “Para que serve isso?”, “Por que motivo?”, são chaves para descobertas, para o artista o que importa são as formas, o esforço consciente da busca da profundidade das coisas, mas não uma profundidade conceitual, como na ciência, mas sim visual algo além das impressões sensoriais limitadas a superfície da realidade.

Se em uma temos a busca das causas, das leis e dos princípios, na outra temos a riqueza e a variedade descoberta além da aparência, sendo que as duas partem de visões de verdade contrastantes, mas não em conflito, uma vez que, como observa Cassirer (1994, p. 277), “Como a arte e a ciência se movem em planos totalmente diferentes, não podem contrariar-se ou contradizer-se. A interpretação conceitual da ciência não exclui a interpretação intuitiva da arte. Cada uma delas tem sua própria perspectiva e, por assim dizer, seu próprio ângulo de refração”.

Para Cassirer (1994, p. 337), a ciência é a “mais característica façanha da cultura humana”, e para exemplificar e justificar o inerente caráter simbólico do conhecimento humano faz diversas referências a História do pensamento matemático. Cita o conceito de número e suas diferentes abordagens históricas, passando de símbolo que não só explicava o objeto, mas assumia o seu lugar, ele *era* número, conforme o pensamento pitagórico, para um outro *sentido* no qual descreve relações e, mais adiante, relações de relações e assim por diante, conforme as teorias de Frege e Russel, de Peano e Dedekind, evidenciando a dependência do pensamento relacional do simbólico, pois, como argumenta (1994, p. 67), “Sem um complexo sistema de símbolos o pensamento relacional simplesmente não pode nascer, nem muito menos desenvolver-se plenamente”. É no pensamento simbólico que estabelecemos as distinções do real e do possível, das coisas reais e ideais; uma vez que o símbolo não tem existência real no mundo físico, ele tem um *sentido* ampliado com os avanços da cultura humana.

II

Se o modo como a linguagem e o mito tratam e classificam os fenômenos pode ser considerado complicado, a ciência começa justamente com a busca da simplicidade. “A cultura humana”, diz Cassirer (1994, p. 339), “começa com um estado de espírito muito mais complexo e convoluto. Quase todas as nossas ciências da natureza tiveram de passar por um estágio mítico”.

A ciência traz em seu bojo outra forma de medir, dentro de outro padrão lógico de verdade que busca ir além da experiência imediata e dos fatos observáveis. Para isso, adotou outra linguagem distanciando-se daquela que se confundia com o sentido usado na fala cotidiana. Tal linguagem, a dos números, “marcou o momento do nascimento da nossa moderna concepção de ciência” (CASSIRER, 1994, p. 342).

A crença no número e no seu poder de tornar o mundo inteligível, conforme o pensamento pitagórico, abalou-se com a descoberta de que em um triângulo retângulo isóscele a linha oposta ao ângulo reto não tem qualquer medida comum com os outros dois lados, chegando a uma situação considerada contraditória, algo sobre a qual não se podia pensar e nem falar.

Esse episódio do pensamento matemático é explorado por Cassirer para mostrar que a solução moderna, isto é, a introdução dos números irracionais, significou “apenas a introdução de novos símbolos capazes de descrever relações de uma ordem mais elevada”. Ele (1994, p.347-8) continua explicando que

> Para preencher a lacuna entre os números inteiros, que são quantidades distintas, e o mundo de eventos físicos contido no *continuum* do espaço e do tempo, o pensamento matemático foi obrigado a encontrar um novo instrumento. Se o número fosse uma ‘coisa’, uma *substantia quae in se est per se concipitur*, o problema seria insolúvel. Como se tratava de uma linguagem simbólica, porém, só era preciso desenvolver o vocabulário, a morfologia e a sintaxe dessa linguagem de modo coerente. O que se exigia não era uma mudança na natureza e na essência do número, mas apenas uma mudança de sentido. Uma filosofia da matemática precisava provar que essa mudança não conduz a uma ambigüidade ou a uma contradição - que quantidades que não podem ser expressadas com exatidão pelos números inteiros ou por razões entre estes tornavam-se inteiramente compreensíveis e exprimíveis com a introdução dos novos símbolos.

Para o filósofo francês Gilles Gaston Granger (2002, p. 23), o mesmo episódio é um exemplo de um “encontro de um obstáculo” por um criador que “ver-se obrigado, *para continuar seu trabalho*, a efetuar operações impossíveis, isto é, proibidas pelas regras anteriormente aplicadas e aplicáveis, ou que contrariam crenças ou ciências que, no entanto, ele admite”.

Nesse caso, uma dessas regras a ser contrariada era a proposição 5 do livro X dos *Elementos* de Euclides, a qual traz a idéia de que “Grandezas comensuráveis estão entre si como um número está para um número”, pois, esclarece Granger (2002, p. 47),

> se grandezas são comensuráveis, alguma grandeza comum deve medi-las, quer dizer que existem inteiros, *operadores* de multiplicação sobre essa grandeza unidade, que produzirão essas grandezas. Não que os números, convém repetir, sejam considerados por Euclides como espécies de grandezas [...]. Mas podemos doravante comparar relações de grandezas com relações de números, e a incomensurabilidade das grandezas se reduz a uma incomensurabilidade de números.

Muitos séculos se passaram até chegarmos a situação na qual tal irracionalidade já não fosse mais um obstáculo, mostrando-se, na concepção de Granger, um valioso estímulo para o pensamento matemático.

Para ele (2002) há três categorias de irracional: como *obstáculo*, no sentido de algo a ser superado, o que leva a volta à racionalidade. Como *recurso*, quando ele é visto como alternativa ao racional e que trilhando por outros caminhos chega à descobertas científicas, resultados artísticos, muitos dos quais, com o passar do tempo, acabam sendo incorporados como algo racional. E, por fim, o irracional como *renúncia* consciente de padrões e regras estabelecidas por acreditar que estes não dão conta de objetos e fenômenos que lhes escapam à compreensão.

A representação artística do volume dos corpos e da profundidade dos objetos em uma tela é para Granger uma nova espécie de obstáculo irracional, pois, como argumenta (2002, p. 85), "Existe uma impossibilidade racional, matemática, de transportar sobre a tela de duas dimensões *todos* os aspectos visíveis do objeto tridimensional".

Assim, a perspectiva pode ser entendida como a racionalização da representação da aparência. Gradualmente desenvolvida, ela passa de uma concepção na qual o esforço era em "articular a imagem em camadas dispostas paralelamente" à cena, para outra, em que se desvaloriza o plano, enfatizando "as relações entre os elementos que se dispõem à frente e os que se encontram atrás, e o observador se vê obrigado a penetrar até o fundo do quadro" (WÖLFFLIN, 2000, p. 99).

Os pintores, como observa Granger (2002, p. 88), buscaram tornar possível se pensar espacialmente os objetos representados organizando o espaço no plano de seus quadros através de uma *composição* que fornecesse ao observador "valores simbólicos" capazes de indicar a percepção tridimensional do tamanho e posição dos objetos.

Esse momento do desenvolvimento da solução perspectiva pelos pintores é para o filósofo (2002, p. 99) parte do que chama de "vertente simbólica" em que "o espaço do quadro não é mais construído principalmente como figurando o espaço em que o observador pode mover-se, mas como um *espaço de pensamento*, um sistema de signos plásticos que evoca um mundo de símbolos".

Tal solução é fruto do esforço consciente dos pintores em representar os planos como sendo uma decomposição dos mesmos em seqüências de profundidade. "A beleza das superfícies planas", diz Wölffin (2000, p. 106), "é substituída pela beleza da profundidade, que está sempre vinculada a uma impressão de movimento". O autor (2000, p. 111) ainda explica que na verdade "Todo quadro possui sua profundidade", sendo que o que ocorreu é que ela passa a ser representada como movimento homogêneo em direção ao fundo, ao contrário do efeito no qual o espaço era representado como se estivesse dividido em camadas.

Quando o problema da representação do espaço é enfrentado no sentido de construí-lo em um plano no qual se obtêm a representação do espaço tridimensional vivido, Granger (2002, p. 99) aponta para outra vertente, a geométrica, na qual encontramos os esforços concentrados no estabelecimento de regras e soluções matemáticas, como é o caso da perspectiva linear. Nesse contexto, ele (2002, p. 100) enfatiza a sistematização desenvolvida por um francês, natural de Lyon, Girard Desargues [1591-1661], considerando “Excepcional trajetória de tentativas para superar um obstáculo inicialmente de natureza estética e técnica, levando à constituição de uma nova racionalização matemática, a saber, o conceito de espaço projetivo”.

III

Desargues é retratado nos livros de História como alguém curioso por diversos assuntos ligados à Ciência e às técnicas, o que o levou à Arquitetura e à Engenharia, após ter sido oficial do exército. Seu interesse era de buscar novos métodos baseados na compreensão dos fundamentos geométricos comuns a diferentes técnicas como a da perspectiva, a da prática do corte de pedras e a da construção de relógios solares (COLLETTE, 1986, p. 59).

Visando generalizar e simplificar as diversas regras gráficas utilizadas pelos artistas, de diferentes maneiras, na elaboração de perspectiva (HERSEY, 2000), em 1636, ele apresenta um texto sobre o assunto, intitulado de *Exemple de l’une des manières iniverselles du S. G. D. L*[8]*. touchant la practique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance my d’autre nature, qui soit hors du champ de l’ouvrage*[9], no qual, encontramos que “fazer” ou “pôr em perspectiva” um determinado objeto é o mesmo que “achar a [sua] aparência”, retratá-lo ou representá-lo em um quadro - superfície na qual a perspectiva é feita - também chamado de transparência ou de secção.

Além do pressuposto de que todas as linhas são retas, Desargues (1636, p. 2) evidenciou que,

> Nessa Arte é suposto que apenas um único olho vê, de uma mesma olhada, o objeto, em sua posição, e o quadro dispostos um em relação ao outro, ou

[8] Sieur Girard Desargues Lyonnais.
[9] Vide nossa tradução desse texto que se encontra no Apêndice.

seja: não importa se é para Emissão de raios visuais, ou para a recepção dos espaços emanados do objeto, nem de que parte, ou qual dos dois ele vê em frente ou atrás do outro, desde que ele os veja todos os dois facilmente de uma mesma olhada.

É ainda suposto que aquele que pratica essa Arte entenda o modo e o uso de escala ao fazer uma posição do objeto com sua elevação; e dentro desse exemplo é suposto que ele entenda que essa coisa é que se chama comumente de perspectiva.

Para exemplificar, ele tomou como objeto uma gaiola e passou a uma descrição minuciosa de seu método, fazendo uso de palavras próprias ora do jargão dos arquitetos, ora dos geômetras e dos artistas.

Desargues concluiu seu texto trazendo proposições que tratavam de situações envolvendo o que ele chamou de "linha de olho", ou seja, aquela que passa pelo centro imóvel do olho, sendo esta indeterminada em seu comprimento e móvel em todos os sentidos.

Na década de 40 de 1600, Abraham Bosse, um gravador, retomou os tratados escritos por Desargues e, em 1648, temos o trabalho entitulado *Manière universelle de Mr. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le Géométral*, no qual, em seu apêndice, Bosse apresentou três proposições de autoria de Desargues[10], sendo que a primeira delas, sobre triângulos perspectivos, foi apresentada da seguinte forma (apud Field; Gray, 1987, tradução nossa):

Quando linhas retas *HDa, HEb, cED, lga, lfb, Hlk, DgK, EfK, [cab]*[11], as quais incidem em planos diferentes ou no mesmo plano, cortam um outro em uma ordem qualquer e em ângulo qualquer em tais pontos; os pontos *c, f, g* encontram-se sobre a linha reta *cfg*. Assim, de qualquer forma, as figuras tomadas, em qualquer caso; se as linhas retas encontram-se em planos diferentes, as linhas *abc, lga, lfb* encontram-se em um plano; as linhas *DEc, DgK, KfE* encontram-se em outro; e os pontos *c, f, g* encontram-se em cada um desses dois planos; conseqüentemente, eles encontram-se sobre a linha reta *cfg*. E se, a mesma linha reta encontra-se em um mesmo plano,

gD/gK= aD/aH lH/lK, e

fK/fE=lK/lH bH/bE, e

aD/Ah=cD/cE bE/bH , logo,

cD/cE=gD/gK fK/fE . Conseqüentemente, *c, g, f* estão em uma reta.

[10] Uma vez que essas proposições são apresentadas pela primeira vez por Bosse, supõem-se que elas tenham feito parte de uma obra de Desargues, desaparecida, entitulada *Leçons de ténèbres*, com data provável de 1940 (apud Field; Gray, 1987).
[11] Linha omitida na edição de Bosse (1648).

E, reciprocamente, se as retas *abc, HDa, HEb, DEc, HK, DKg, KEf* encontram uma outra de qualquer maneira e em qualquer ângulo, nos pontos tais como estes que são dados, as linhas encontram-se em plano diferente ou num mesmo plano; as linhas *agl, bfl* sempre se encontrarão em uma extremidade *l* a qual está sobre a linha *HK*. Assim, se as linhas retas encontram-se em planos diferentes, um desses planos é *HKgDag*; outro é *HKfEbf*; e o outro *cbagf*: e as linhas retas *HlK, bfl, agl* são as linhas de intersecção desses três planos; logo, todas elas encontram-se na extremidade *l*. E se as mesmas linhas retas incidem em um plano; se nós desenharmos através do ponto *a* a linha *agl* encontramos a linha *HK* e, então, desenharmos a linha *lb*, ela somente terá provado que esta linha encontra a linha *EK* em um ponto assim como *f* o qual é colinear aos pontos *c* e *g*, os quais é para dizer que a linha *lb* passa através de *f* e, conseqüentemente, que as duas linhas *ag, bf* encontram-se na extremidade *l*, sobre a linha *HK*. E se, novamente, as mesmas linhas encontram-se em planos diferentes, se através dos pontos sobre eles, *H, D, E, K* passa outras linhas retas *Hh, Dd, Ee, Kk* as quais encontram-se em alguma extremidade em uma distância indeterminada, ou, postas em outra direção, são paralelas uma a outra; e estas linhas encontram um dos planos, *cbagfl*, nos pontos tais como *h, d, e, k*; os pontos *h, l, k* encontram-se sobre uma linha reta; os pontos *h, d, a* encontram-se sobre uma; os pontos *h, e, b* encontram-se sobre uma; os pontos *k, g, d* encontram-se sobre uma; os pontos *k, f, e* encontram-se sobre uma.

Assim, por essa construção, as linhas retas *Hh, Kk, HlK* todas em um plano; as linhas *abc, bfl, klh* encontram-se em outro; e os pontos *h, l, k* encontram-se em um dos dois planos. Conseqüentemente, eles encontram-se sobre uma linha reta; e, igualmente, para todos os outros conjuntos de três pontos. E todas estas linhas retas encontram-se em um plano, *cgabfl*, e cada uma delas está dividida pelas linhas paralelas através dos pontos *H, D, E, K* na mesma direção como a linha correspondente na figura tridimensional. Assim, a figura na qual estas linhas paralelas têm definida no plano *hdabcedgfkl* correspondem a linha reta por linha reta; ponto por ponto; e raio por raio; para a figura tridimensional *abcEHlkgf*. E pode-se discutir suas propriedades, na mesma direção, tanto em uma figura quanto em outra e, assim, fazer sem a figura sólida, usando, ao invés, a figura no plano.

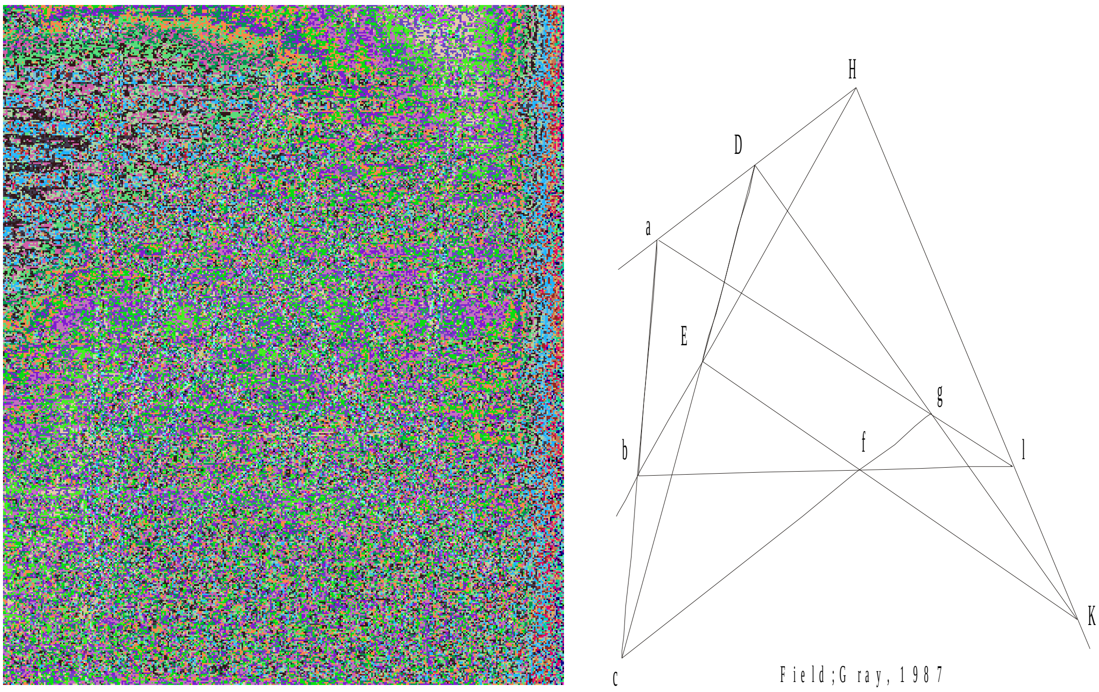


Fig. 08 – Proposição de Desargues

Essa proposição foi ilustrada pela figura apresentada à esquerda e acima, sob número da prancha 154. À direita, temos a figura redesenhada enfatizando os triângulos *DEK* e *abl*, perspectivos a partir de *H* (apud Field; Gray, 1987).

Um estudo das cônicas como derivadas de secções de planos em um cone foi apresentado por Desargues em 1639, intitulado *Brouillon projet d'une atteinte aux évènements des rencontres d'un cone avec un plan*, trazendo concepções, retomadas posteriormente, como a de que linhas paralelas possuem um final comum a uma distância infinita[12] e, a de que quando em um plano, nenhum dos pontos de uma reta está em uma distância finita, essa reta está a uma distância infinita[13].

Na introdução do *Traité des Propriétés Projectives des Figures, ouvrage utile a ceux qui s´occupent des applications de la Géométrie Descriptive et d´opérations géométriques sur le terrain*, Jean Victor Poncelet [1788-1867] questionou o fato de que na Geometria não havia um tratamento de grandezas indeterminadas, como já havia na Álgebra, a partir de argumentos puramente *implícitos*.

Na Geometria ordinária[14], para ele (1865, p. xii), por basear-se em outros princípios, seu desenvolvimento era mais tímido ou mais severo. Nela, a figura é descrita sem perdê-la de vista, sempre raciocinando sobre suas grandezas, sobre suas formas reais e existentes, sem tirar as conseqüências que não possam ser desenhadas, pela imaginação ou pela vista, por objetos sensíveis, pautando-se, desse modo, numa existência positiva, absoluta, enfim, física dos objetos.

Reclamando uma generalidade no domínio do pensar geométrico, Poncelet propôs o emprego dos cálculos e dos signos da Álgebra na Geometria ordinária, o que ele afirmava, resultaria numa *Géométrie nouvelle* que rivalizaria com a Geometria analítica, modo como se referia a Geometria da Antiguidade, sempre que essa nova Geometria fosse aplicada às situações nas quais não era possível conservar um argumento *explícito*.

Uma figura qualquer, em uma posição qualquer e indeterminada, exemplificou Poncelet (1865), do tipo que viola as leis, as condições, as ligações entre as diversas partes de um sistema, poderia ser pensada em suas relações *métricas* ou *descritivas* a partir de

[12] Sont entre elles d´une mesme ordonnance dont le but est à distance infinie (Apud COXETER, 1964, p. 3).
[13] Quand en un plan, aucun des points d´une droit n´y est à distance finie, cette droit y est à distance infinie (Apud COXETER, 1964, p. 3)
[14] (...) qu´on nomme souvent la ´synthèse, *(...)* (PONCELET, 1865, p. xii)

argumentos explícitos e ordinários. As relações e propriedades válidas num primeiro sistema, aplicadas sucessivas vezes em uma figura primitiva até níveis insensíveis, como em uma figura em movimento contínuo, ele indagava, que modificações ocorreriam no que diz respeito à grandeza, sentido e sinais? Elas seriam reconhecidas *a priori* ou por meio de regras seguras?

Os meios adotados pelo argumento implícito, geralmente são suficientes e sustentados por axiomas evidentes, incontestáveis e que não precisam ser demonstrados, levando a uma certa generalidade sobre concepções como as exemplificadas por Poncelet (1865) citando o princípio da *correlação de figuras,* admitido por Lazare Nicholas-Marguerite Carnot [1753-1823] em sua *Géométrie de position*, para estabelecer a regra dos sinais; o princípio das *funções*, empregado por grandes geômetras para as bases da Geometria e da Mecânica e, por fim, fazendo referência aos princípios do Cálculo infinitessimal, da Teoria dos limites e da Teoria geral das equações.

A partir desses exemplos, Poncelet (1865, p. xiv) introduziu o que, como ele escreveu, um princípio considerado como axioma pelos geômetras mais sábios, o chamado *princípio* ou a *lei da continuidade* das relações matemáticas da grandeza abstrata ou figurada, que pode ser entendido como um elemento de generalização não encontrado na Geometria Clássica. Segundo esse princípio, "os teoremas demonstrados para uma figura são igualmente certos para figuras obtidas a partir da original mediante transformações contínuas" [15] (RON, 991, p. xx).

Poncelet (1865, p. xiv) argumenta que,

> Não é que no mais o princípio de continuidade tenha sido admitido em toda a sua extensão e sem nenhuma restrição pelas diferentes geometrias que dele se serve, seja abertamente, seja tacitamente; pois, sem isso, elas se lançariam em todas essas considerações metafísicas dos *imaginários*, que têm estado constantemente repousadas num santuário rigoroso da Geometria racional. Seu emprego explícito, sem essa ciência, está quase sempre limitado aos estados reais de um sistema que se transforma por graus insensíveis, e mesmo lá isso que tem dado lugar aos *infinitamente pequenos*, aos *infinitamente grande*, que das geometrias buscam ainda, em nossos dias, banir do domínio das ciências exatas. Entretanto, nós temos mostrado mais forte que esse princípio desperta unicamente a admitir as conseqüências da argumentação implícita, e que em certas circunstâncias, ele é absolutamente impossível, mesmo na Geometria antiga, de evitar esse modo de argumentação. Entretanto ainda, não será um passo difícil estabelecer o princípio de uma maneira inteiramente direta e rigorosa, tenha ele a ajuda

[15] (...) los teoremas demostrados para una figura son igualmente ciertos para figuras obtenidas a partir de la original mediante transformaciones continuas.

> dos cálculos mesmo da Álgebra, cuja a certeza não é mais colocada em dúvida em nossos dias, graças a dois séculos de esforços e de sucessos![16]

A dificuldade em admitir esse princípio consiste, como ele explicou, na falta de entendimento do que é considerado “estado geral ou indeterminado” (*état général* ou *indéterminé*) e “estado particular” (*état particulier*) de um sistema. Para qualquer caso, disse ele (1865, p. xv), a distinção é fácil, exemplificando com uma reta que ao encontrar-se com outra em um plano, está em um estado geral em relação ao caso no qual ela esteja perpendicular ou paralela a outra reta.

Igualmente, uma linha, reta ou curva, prosseguiu Poncelet em sua explicação, que se encontra com outra em um plano, está numa situação geral e indeterminada em consideração a outra, e de mesmo modo quando deixam de se encontrar, visto que as duas considerações não supõem alguma relação particular de grandeza ou de posição entre essas linhas. O contrário seria se elas se tornassem tangentes, assíntotas, paralelas etc. Nesse caso, elas estariam num estado particular em relação ao estado primitivo.

A admissão do princípio da continuidade levaria as pesquisas geométricas à noções singulares e a paradoxos. Mas, argumentou Poncelet (1865, p. xv), isso também ocorria na Análise algébrica e nem por isso impedia seu progresso.

A Geometria desenvolvida por Gaspard Monge [1746-1818] era para Poncelet um exemplo de generalização, uma vez que se dedicava ao estudo das propriedades descritivas do espaço, tratando-as em figuras sobre um plano, para em seguida descrevê-las em três dimensões. Para isso, fazia uso de conceitos como o do traço de plano, que consiste na reta que representa a intersecção de dois planos, e de métodos para representar as formas espaciais através de suas projeções em planos ortogonais.

[16] Ce n’est pas qu’au reste le principe de continuité ait été admis dans toute son étendue et sans aucune restriction par les différents géomètres qui s’ensont servis, soit ouvertement, soit tacitement; car, sans cela, ils se seraient jetés dans toutes ces considérations métaphysiques des *imaginaires*, qui ont été constamment repoussées du sanctuare étroit de la Géométrie rationnelle. Son emploi explicite, dans cette science, s’est presque toujours borné aux états réels d’un système qui se transforme par degrés insensibles, et c’est même là ce Qui a donné lieu aux *infiniment petits*, aux *infiniment grands*, que des géomètres cherchent encore, de nos jours, à bannir du domaine des sciences exactes. Cependant, nous avons montré plus haut que ce principe revient uniquement à admettre les conséquences du raisonnement implicite, et que, dans bien des circonstances, il était absolument impossible, même dans la Géométrie ancienne, d’éviter ce genre de raisonnement. Cependant encore, il ne serait pas difficile d’établir ce principe, d’une manière entièrement directe et rigoureuse, à l’aide des calculs mêmes de l’Algèbre, dont la certitude n’est du moins plus mise en doute de nos jours, grâce à deux siècles d’efforts et de succès!

Um desses métodos, o de coordenadas, considera o objeto, descrito em um plano ou no espaço, em duas retas ou em três planos fixos por meio de dois ou três sistemas de retas reduzidas, de diferentes pontos da figura, paralelamente a seus eixos ou planos, os quais irão fazer a projeção desses pontos sobre os eixos e planos que os tratam.

Essa Geometria das três dimensões, elaborada por Monge e chamada de *Géométrie descriptive*, concluiu Poncelet (1865, p. xx), trata de relações e propriedades descritivas de um plano, traduzindo-as em relações e propriedades do espaço, e vice-versa.

Desargues foi considerado por Poncelet o Monge de seu século, enfatizando que os contemporâneos de Desargues eram indignos do título de geômetras já que não souberam medir a importância das idéias de uma pessoa genial. Além disso, em suas palavras, ele foi "o primeiro, dentre os modernos, que considerou a Geometria sob o ponto de vista geral".

IV

"Embora este livro seja o primeiro tratado completo de geometria projectiva", escreveu Struik (1989, p. 237) referindo-se ao trabalho de Poncelet composto por dois tomos, "durante as décadas seguintes, esta geometria atingiu um tal grau de perfeição que a tornou um exemplo clássico de estrutura matemática bem integrada".

Poncelet derivou o conceito de espaço projetivo a partir do espaço ordinário postulando uma "linha no infinito" em comum para todos os planos paralelos a um plano dado. Assim, caso duas linhas não tenham um ponto ordinário em comum, considera-se que elas encontram-se em um ponto no infinito.

Não se trabalhou no campo da Geometria projetiva, como observou Coxeter (1964, p. 3, tradução nossa), até que "estivéssemos preparados para esquecer o *status* inferior de tais pontos e admití-los dentro da comunidade como um membro completo tendo os mesmos privilégios quanto os pontos ordinários".

Essa "emancipação" teve efetiva participação do alemão K. G. C. von Staudt [1798-1867] para quem se tratava de uma *Geometrie der lage*, na qual a distinção entre pontos ordinários e pontos no infinito está na diferença desses conceitos quando tratados na Geometria projetiva de transformações e na Geometria ordinária Euclidiana e métrica.

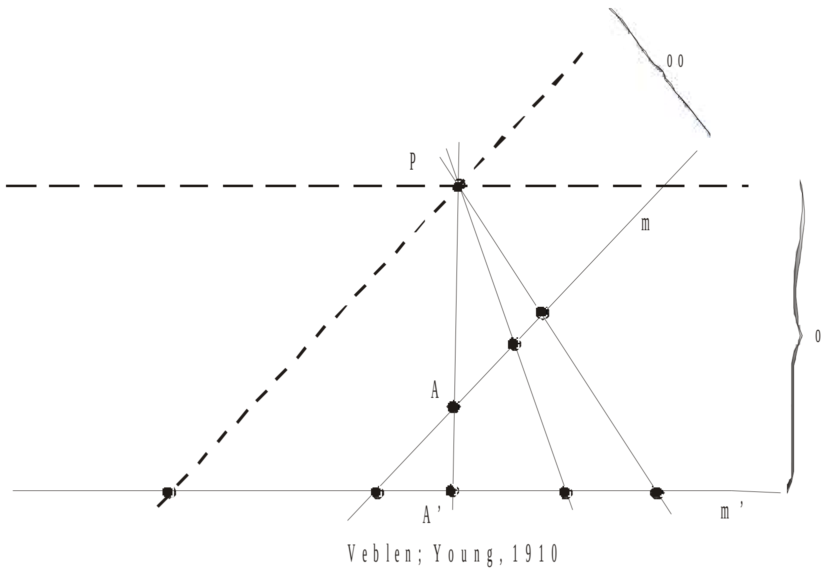


Fig. 09 – Correspondência perspectiva

Visto no plano, podemos tomar *m* e *m'* como sendo duas retas distintas, e *P* um ponto que não se encontra em nenhuma delas. Os pontos de *m* podem ser feitos para corresponder com os pontos de *m'* como segue: para qualquer ponto *A* sobre *m* tome como correspondente o ponto *A'* sobre *m'* no qual *m'* encontra a reta ligando *A* em *P*. Nesse sentido, todo ponto sobre uma das retas está associado a um único correspondente ponto sobre a outra reta. Esse tipo de correspondência é chamado de *perspectiva*, e os pontos sobre uma linha são ditos para serem transformados em pontos da outra por uma "transformação perspectiva com centro P". Se os pontos de uma reta *m* são transformados em pontos da reta *m'* por uma transformação perspectiva com centro *P* e, desse modo, os pontos de *m'* transformados em pontos de uma terceira reta *m''* por uma transformação perspectiva com um novo centro *Q*; e se isso pode ser repetido em um número finito de vezes, finalmente os pontos da reta *m* terão sido levados em correspondência com os pontos da linha *m(m)*, diz-se, nesse sentido, que todo ponto de *m* corresponde a um único ponto de *m(m)*. A correspondência obtida desse modo é chamada "projetiva", e os pontos de *m* são ditos como tendo sido transformados em pontos de *m(m)* por uma "transformação projetiva". O mesmo raciocínio aplica-se ao espaço tridimensional, como nos mostra Oswald Veblen [1880-1960] e John Wesley Young [1879-1932], ao tratarem da distinção entre Geometria projetiva e métrica (1910, p. 13).

Juntos, esses dois geômetras desenvolveram um enfoque axiomático da Geometria projetiva, na qual, explicam eles (1910, p. 13), duas figuras que podem ser feitas correspondentes uma a outra, por meio de uma transformação projetiva, não são consideradas como diferentes. Ou, como concluem, tal geometria preocupa-se com aquelas propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando as figuras são submetidas a uma transformação projetiva.

As bases da Geometria projetiva assentam-se sobre três conceitos primitivos - “ponto”, “reta” e “incidência”, os quais trazem implicitamente as idéias de estar sobre, passar através de, ligar, encontrar, ser colinear, ser concorrente, entre outras.

Um conjunto de pontos considera-se como uma reta, e um plano, como um determinado conjunto de pontos e de retas. Um ponto e uma reta, ou um ponto e um plano, ou uma reta e um plano, são ditos *incidentes* se o primeiro relaciona-se com o segundo, ou encontra-se “sobre” ou “no” segundo, ou, ainda, se o segundo “passa através” do primeiro.

Usa-se a letra maiúscula e itálica para nomear os pontos, as minúsculas e itálicas para as retas, e as letras gregas para os planos. Se uma reta l passa através de dois pontos P e Q, nós dizemos que ela “liga” esses pontos e escrevemos $l=PQ$. Igualmente, se um plano *?* passa através de duas retas l e m, ou através de l e um ponto P não incidente, nós dizemos que *?* liga as duas retas, ou a reta e o ponto, e escrevemos *?*$=lm=ml=lP=Pl$. Se P encontra-se sobre l e m, nós dizemos que estas linhas “encontram-se” em P, ou que P é o “ponto comum” a elas, ou “intersecção”: $P=l\,.\,m$.[17]

Aplicando essas idéias ao ponto P e a reta l, não incidentes, podemos considerar que o plano Pl consiste em todos os pontos que estão sobre as retas que ligam P aos pontos sobre l, e todas as retas que ligam pares de pontos distintos assim construídos.

Um triângulo PQR consiste de três pontos não colineares - P, Q, R, chamados de “vértices”, e as três retas que ligam QR, RP, PQ, chamadas de “lados”. Desse modo, se três pontos estão ligados em pares por três retas, eles formam um triângulo, o qual é igualmente formado por três retas encontradas por pares em três pontos.

[17] Observe que o ponto tem um uso especial: lm é um plano, mas $l\,.\,m$ é um ponto. Igualmente, uma reta e um plano podem ter um ponto comum l . *?*, e dois planos podem ter uma reta comum *?* . *?*.

V

Como se pode observar, a determinação de um ponto pode ser feita por duas retas, assim como a de uma reta por meio de dois pontos. Dessa maneira, todo argumento sobre pontos e retas, em um plano, pode ser substituído por um argumento “dual” sobre retas e pontos. Essa possibilidade de substituição é chamada de “princípio de dualidade”[18], o qual, em outras palavras, garante que pontos e retas têm o mesmo comportamento em relação à incidência, o que permite trocar pontos por retas e retas por pontos, levando a uma nova propriedade dual a primeira e, ainda assim, válida (CASTRO, 2000). No caso de quatro pontos e de quatro retas, as definições podem ser tratadas em colunas paralelas e, aplicando o princípio de dualidade, ficam como segue.

Se 4 pontos em um plano são ligados em pares por 6 retas distintas, eles são chamados de vértices de um *quadrângulo completo*, e as retas são seus 6 lados. Dois lados são ditos *opostos* se o ponto comum aos dois não é um vértice. O ponto comum de dois lados opostos é chamado de *ponto diagonal*. Existem 3 pontos diagonais. Na figura abaixo, o quadrângulo is *PQRS*, seus lados são

PS, QS, RS,

QR, RP, PQ,

e seus pontos diagonais são

A, B, C.

Se 4 retas em um plano encontram em pares em 6 distintos pontos, elas são chamadas os lados de um *quadrilátero completo*, e os pontos são seus 6 vértices. Dois vértices são ditos *opostos* se suas ligações não são um lado. A ligação de dois vértices opostos é chamada *reta diagonal*. Existem 3 retas diagonais. Na figura abaixo, o quadrilátero é *pqrs*, seus vértices são

p.s, q.s, r.s,

q.r, r.p, p.q,

e suas retas diagonais são

a, b, c.

[18] Coxeter (1964) em suas considerações históricas sobre o assunto, diz que apesar de Poncelet apontar esse princípio como sendo de sua descoberta, somente outro francês, J. D. Gergonne [1771-1859], de fato teve uma compreensão mais apropriada sobre o mesmo.

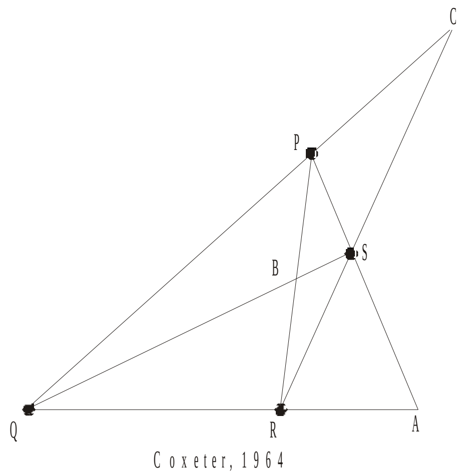


Fig. 10 – Quadrângulo

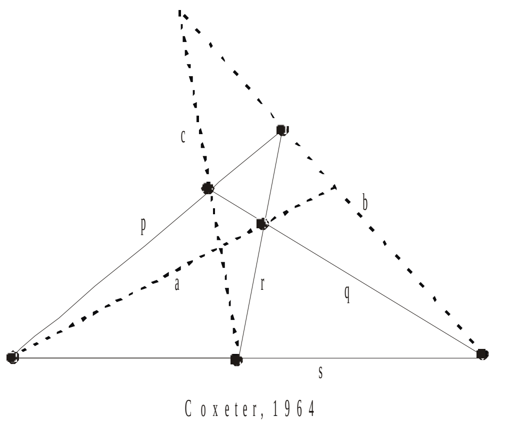


Fig. 11 - Quadrilátero

Quando não há possibilidade de incompreensão, nós dizemos simplesmente quadrângulos e quadriláteros, omitindo a palavra “completo”. Esta palavra foi introduzida para evitar confundir com um quadrângulo ordinário, o qual tem 4 vértices e 4 lados; por exemplo, o quadrângulo ordinário *PQRS* tem lados *PQ*, *QR*, *RS*, *SP*. É mais usual chamá-lo de “quadrilátero”, mas isso não é razoável, uma vez que a palavra “triângulo” refere-se tanto aos seus vértices quanto aos seus lados, e assim também com a palavra “pentágono”. O único outro polígono que nós podemos ter essa situação é o “hexágono” ordinário, o qual tem 6 vértices e 6 lados.

Poncelet (1865, p. 78) apresenta um quadrilátero completo da seguinte forma:

> 154. Seja ABCD um quadrilátero simples qualquer, cujos lados opostos, AB e CD, AD e BC, prolongados até seus encontros respectivos em E e F, formando o que se chama quadrilátero *completo* BAEDFCB com as três diagonais AC, BD e EF, das quais as duas primeiras, pertencem ao quadrilátero simples ABCD, se encontrando em G e encontram a terceira em I e H respectivamente. Traçando as retas indefinidas GE, GF, que unem o ponto G da intersecção das diagonais com os pontos de apoio E e F dos lados opostos do quadrilátero simples ABCD; as duas retas irão encontrar os lados desse quadrilátero, nos quais elas não pertencem, em quatro novos pontos: a primeira nos pontos P e M de AD e BC, a segunda nos pontos L e N de AB e CD. Haverá também formado uma figura composta de nove linhas retas, sobre cada uma delas se encontraram quatro pontos: então, eu digo que *esses diferentes sistemas de quatro pontos formarão o mesmo que grupos harmônicos.*[19]

[19] 154. Soit ABCD un quadrilatère *simple* quelconque, dont les côtés opposés, AB et CD, AD e BC, prolongés jusque’à leurs rencontres respectives en E et F, forment ce qu’on appelle le quadrilatère *complet* BAEDFCB avec les trois diagonales AC, BD et EF, dont les deux premières, appartenant au quadrilatère simple ABCD, se rencontrent en G et rencontrem la troisième en I et H respectivement. Traçons les droites indéfinies GE, GF, qui joignent le point G d’intersection des diagonales avec les points de concours E et F des côtés opposés du quadrilatère simple ABCD; ces deux droites iront recontrer les côtés de ce quadrilatère, auxquels elles n’appartiennent pas, en quatre nouveaux points: la première aux points P et M de AD et BC, la seconde aux points L et N de AB et CD. On aura ainsi formé une figure composée de neuf lignes droites, sur chacune

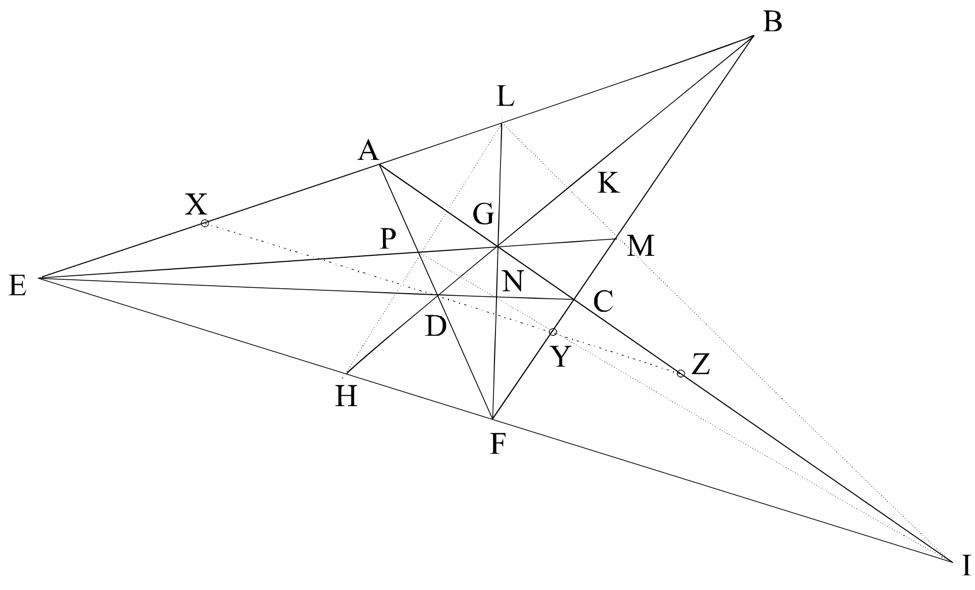
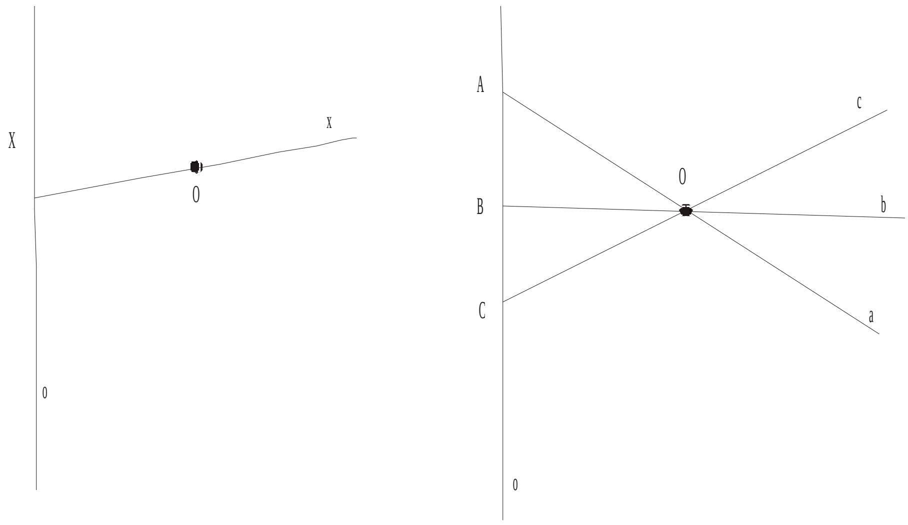


Fig. 12 – Prancha 17, Poncelet (1865)

É conveniente, às vezes, usar o nome *agrupamento* para o conjunto de todos os pontos sobre uma reta, e *feixe* para o conjunto de todas as retas que se encontram em um plano e passa através de um ponto. Agrupamentos e feixes são exemplos de *formas unidimensionais.* A consideração de uma correspondência um-a-um entre duas formas unidimensionais é comum. A mais simples das correspondências entre um agrupamento e um feixe ocorre quando os membros correspondentes são incidentes. Neste caso, é natural entender que a reta *o* sobre a qual os pontos do agrupamento encontram-se não é incidente com o ponto *O* através do qual as retas do feixe passam. Então, o agrupamento é uma *secção* do feixe (chamada, a secção pela reta *o*) e o feixe *projeta* o agrupamento (a partir do ponto *O*). Assim como a notação para essa correspondência *elementar* pode ser escrita $X \,\overline{\wedge}\, x$, quando *X* é um ponto variável de um agrupamento e *x* é a reta correspondente de um feixe (veja figura à esquerda), ela também pode ser $ABC\cdots \,\overline{\wedge}\, abc\cdots$, quando *A*, *B*, *C*, ... estão em posições particulares de *X* e *a*, *b*, *c*, ... são as posições correspondentes de *x* (veja figura à direita).

desquelles se trouveront quatre points: or je dis que *ces différents systèmes de quatre points formeront autant de groupes harmoniques.*



C o x e t e r, 1 9 6 4

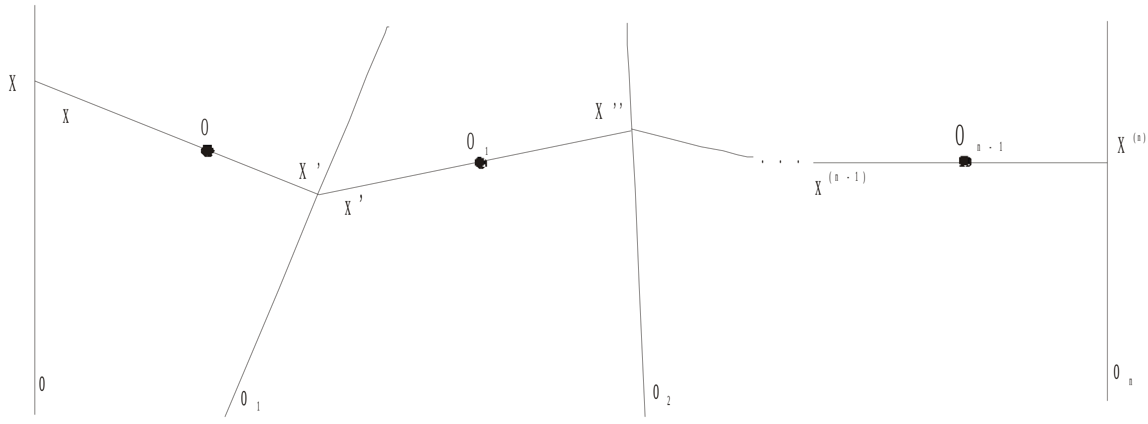
Fig. 13 – Correspondência elementar

Nessa relação, a ordem na qual os símbolos dos pontos ou retas são escritas não necessariamente de acordo com a ordem na qual os pontos ou as retas ocorrem no agrupamento ou em um feixe. Símbolos correspondentes são colocados em posições correspondentes, mas o argumento $ABC \cdots \overline{\wedge}\ abc \cdots$, tem o mesmo significado do que $BAC \cdots \overline{\wedge}\ bac \cdots$, e assim por diante.

Assim como o argumento $X \overline{\wedge} x$ significa que X e x são incidentes, nós também podemos escrever $x \overline{\wedge} X$; mas, neste caso, é conveniente fazer uma sutil distinção. A correspondência $X \overline{\wedge} x$ é direcionada de X para x: ela *transforma* X em x; mas a correspondência *inversa* $x \overline{\wedge} X$ *transforma* x em X.

O mais sofisticado tipo de transformação pode ser construída combinando algum número de correspondências elementares. Para isso, nós usamos uma seqüência de retas e pontos ocorrendo alternadamente: $o, O, o_1, O_1, o_2, ..., O_{n-1}, o_n, O_n$.

É permitido que a seqüência comece por um ponto (omitindo o) ou termine com uma reta (pela omissão de O_n , como mostra a figura abaixo), mas é importante observar que membros adjacentes podem ser não incidentes e que membros alternados (tais como O e O_1, ou o_1 e o_2) podem ser distintos. Este arranjo de retas e pontos possibilita-nos estabelecer uma transformação relacionando agrupamentos e pontos X sobre o (ou um feixe de retas x através de O) para um feixe de retas $x^{(n)}$ através de O_n (ou agrupamento dos pontos $X^{(n)}$ sobre o_n). Esse tipo de transformação é chamado uma *projetividade*.



Coxeter, 1964

Fig. 14 – Seqüência de correspondências elementares

Desse modo, $X \overline{\wedge} x \overline{\wedge} X' \overline{\wedge} x' \overline{\wedge} X'' \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge} X^{(n)} \overline{\wedge} x^{(n)}$, nós podemos simplesmente escrever $X \overline{\wedge} x^{(n)}$, ou $x \overline{\wedge} x^{(n)}$, ou $x \overline{\wedge} X^{(n)}$, ou $X \overline{\wedge} X^{(n)}$.

Em outras palavras, nós estendemos o significado do sinal $\overline{\wedge}$ a partir de uma correspondência elementar para o *produto* (ou “resultante”) de qualquer número de correspondências elementares.

Esta extensão de significado é comparável ao estágio na aritmética quando nós estendemos o significado de *número* a partir dos inteiros para a fração: o quociente de dois inteiros.

Um tipo de projetividade é tão importante que recebe um nome especial e um sinal mais elaborado: o produto de *duas* correspondências elementares é chamado uma *perspectividade* e é indicado pelo sinal $\overset{=}{\wedge}$ (com *duas* barras). Usando o recurso das colunas paralelas para enfatizar o princípio de dualidade e descrever essa transformação, teremos que

Dois agrupamentos estão relacionados por uma perspectividade com *centro O* se eles são secções de um feixe (consistindo de todas as retas através de *O*) por duas retas distintas *o* e o_1; isto é, se a ligação *XX'* dos pontos correspondentes continuamente passa através do ponto *O*. Em símbolos:

$$X \overset{=}{\wedge} X' \text{ ou } X \overset{O}{\overset{=}{\wedge}} X'$$

Dois feixes estão relacionados por uma perspectividade com *eixo* o_1 se eles projetam um agrupamento (consistindo de todos os pontos sobre o_1) a partir de dois pontos distintos *O* e O_1; isto é, se a intersecção *x.x'* das retas correspondentes continuamente encontram-se sobre a reta *o1* . Em símbolos:

$$x \overset{=}{\wedge} x' \text{ ou } x \overset{o_1}{\overset{=}{\wedge}} x'.$$

Por exemplo, na figura abaixo (na qual *A*, *B*, *C* são exemplos particulares do ponto variável *X*, e *a*, *b*, *c* da reta variável *x*), nós temos as perspectividades

$$ABC \stackrel{O}{\overline{\overline{\wedge}}} A'B'C', \qquad abc \stackrel{o_1}{\overline{\overline{\wedge}}} a'b'c',$$

nas quais podemos analisar em termos de correspondências elementares como segue:

$$ABC \;\overline{\wedge}\; abc \;\overline{\wedge}\; A'B'C', \qquad abc \;\overline{\wedge}\; A'B'C' \;\overline{\wedge}\; a'b'c'.$$

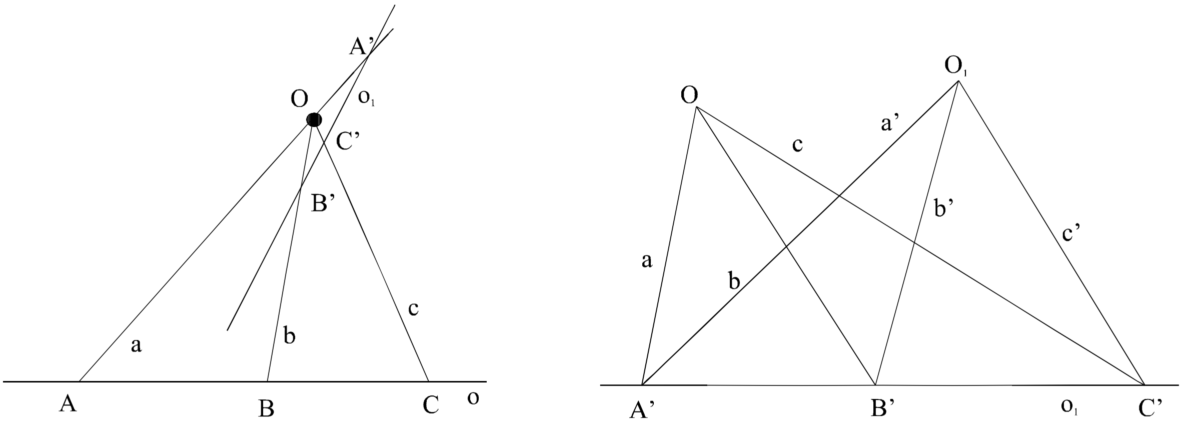


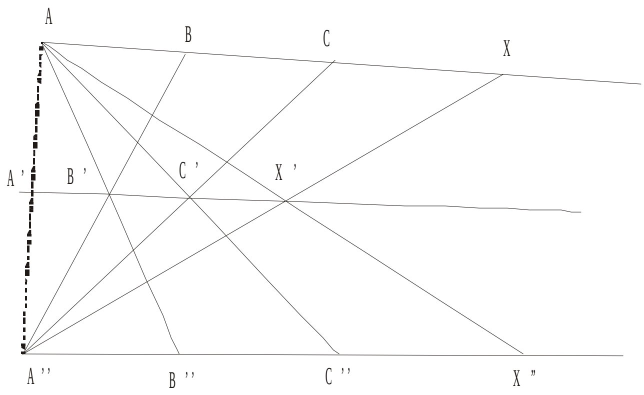
Fig. 15 - Perspectividades

Dados três pontos distintos *A*, *B*, *C* sobre uma reta, e três pontos distintos *A''*, *B''*, *C''* sobre outra reta, nós podemos considerar duas perspectividades cujos produtos serão $ABC \;\overline{\wedge}\; A''B''C''$, como na figura abaixo, na qual o *eixo* (ou "reta intermediária") da projetividade liga os pontos $B'=AB''\,.\,BA''$, $C'=AC''\,.\,CA''$, isso se $A'=AA''\,.\,B'C'$,

$$ABC \stackrel{A''}{\overline{\overline{\wedge}}} A'B'C' \stackrel{A}{\overline{\overline{\wedge}}} A''B''C''.$$

Para cada ponto *X* sobre *AB*, nós podemos construir um ponto correspondente *X''* sobre *A''B''* ligando *A* ao ponto $X' = A''X\,.\,B'C'$, e, assim

$$ABCX \stackrel{A''}{\overline{\overline{\wedge}}} A'B'C'X' \stackrel{A}{\overline{\overline{\wedge}}} A''B''C''X''.$$

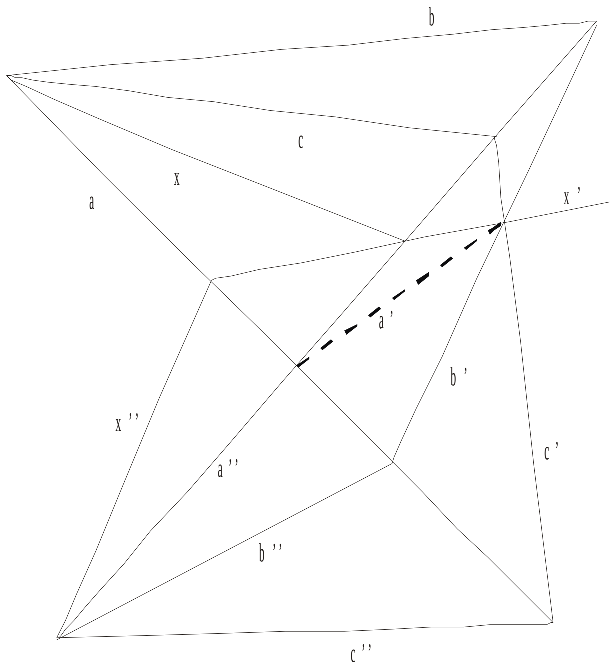


Coxeter, 1964

Fig. 16 – Reta intermediária

Essa projetividade $ABC \barwedge A''B''C''$ é única, no sentido que *qualquer* seqüência de perspectividades relacionando *ABC* com *A''B''C''* terá o mesmo efeito em *X*.

Intercambiando pontos e retas, nós obtemos uma construção análoga, conforme figura abaixo, da projetividade $abc \barwedge a''b''c''$, na qual *a*, *b*, *c* são três retas distintas através de um ponto e *a''*, *b''*, *c''* são três retas distintas através de outro ponto.



Coxeter, 1964

Fig. 17 – Projetividade $abc \barwedge a''b''c''$

Outro exemplo de projetividade é ilustrado na próxima figura, na qual *A*, *B*, *C*, *D* são quatro pontos colineares quaisquer, *R* é um ponto fora delas, *T*, *Q*, *W* são as secções de *RA*, *RB*, *RC* por uma reta arbitrária através de *D*, e *Z* é o ponto *AQ* . *RC*. Nesse caso,

$$ABCD \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} ZRCW \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} QTDW \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} BADC. \text{ Então } ABCD \; \overline{\wedge} \; BADC.$$

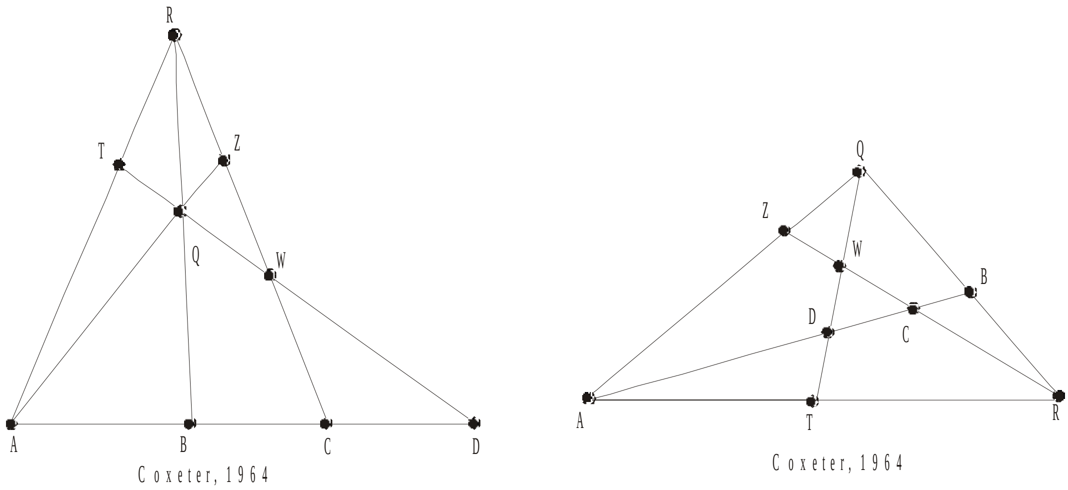


Fig. 18 – Casos de projetividade

Esse resultado é apresentado no teorema seguinte: [T0] *Quatro pontos colineares quaisquer podem ser intercambiados em pares por uma projetividade*, e pode ser representado pela figura abaixo.

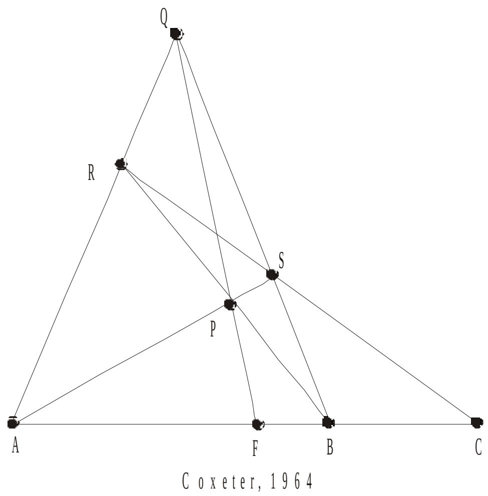


Fig. 19 – Teorema [T0]

$$ABC \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} APS \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} AFB, \qquad ABC \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} AQR \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} AFB.$$

Nesta projetividade $ABC \;\overline{\wedge}\; AFB$, o ponto *A* corresponde a ele mesmo. Um ponto que corresponde a ele mesmo é chamado de *invariante.*

VI

Como o objetivo da Geometria Projetiva é o estudo de propriedades que se mantém invariantes por projeções e secções, podemos nos perguntar se dados *k* pontos colineares pode-se definir um invariante projetivo associados a eles. Vemos que *k* deve ser maior ou igual que quatro, ou seja, não pode existir um tal invariante para pares nem para ternas de pontos colineares.

Tomemos *A*, *B*, *C* três pontos quaisquer de uma reta *p* e *A'*, *B'*, *C'* outros três pontos quaisquer de outra reta *p'*. Chamando *O = AA' BB'* o ponto de intersecção de retas *AA'* e *BB'*, através de uma projeção desde *O* pelo ponto *A*, *B* se transforma no par *A'*, *B'*. Por outro lado, para transformar *A*, *B*, *C* em ternas *A'*, *B'*, *C'* necessitamos usar em geral duas projeções. No caso, escolhemos primeiro dois pontos distintos quaisquer O_1 e O_2 sobre a reta *AA'*, e consideremos os pontos de intersecção $B_1 = BO_1 \cap B'O_2$ e $C_1 = CO_1 \cap C'O_2$. Então, chamando *q* a reta B_1C_1 , a terna *A, B, C* se transformará em *A*, *B*, *C* pela projeção de *p* sobre *q* desde O_1 seguida de uma projeção de *q* sobre *p'*desde O_2.

Sem dúvida, se considerarmos duas quádruplas de pontos colineares então já não seria possível levar em geral uma sobre a outra por projeções e secções sucessivas. O motivo é que existe um invariante projetivo associado a quatro pontos colineares, que recebe o nome de *razão dupla* (também chamado *razão cruzada* ou *relação anarmônica*).

Consideremos uma reta em que temos escolhido um sentido, como o positivo. Dados dois pontos ordinários *A* e *B*, indicaremos por $\overline{AB}$ a distância ou o sentido do ponto *A* para o ponto *B*. Assim, por exemplo, $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

A expressão "razão dupla" provém do fato de que esta quantidade é definida como um quociente ou razão de *razões simples*, conceito que podemos discuti-lo como segue. Dado um segmento ordinário *AB* e um ponto ordinário *P*, distinto de *B*, colinear com *A* e *B*, chamaremos *razão simples* ou *razão na qual o ponto P divide o segmento AB* o quociente

$(AB, P) = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

Uma forma alternativa de calcular a razão simples, que por sua vez dará uma pista de como definir o invariante projetivo que buscamos, é a seguinte: *Se C é qualquer ponto da reta ampliada que contém um segmento AB, então*

$$(AB,C) = \frac{\overline{OA} \cdot \operatorname{sen} \angle\overline{AOC}}{\overline{OB} \cdot \operatorname{sen} \angle\overline{COB}},$$ *onde O é um ponto qualquer que não pertença a dita reta, e onde os ângulos* $\angle\overline{AOC}$ *e* $\angle\overline{COB}$ *se consideram com sinal.*

Prova: chamemos *h* a longitude de uma perpendicular que vá desde *O* a reta *AB*. Se *C* é um ponto ordinário, então a área (com sinal) do triângulo *OAC* é igual a $\overline{AC} \cdot \frac{h}{2} = \overline{OA} \cdot \overline{OC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle\overline{AOC}}{2}$. Pensando da mesma maneira o triângulo *OBC*, da definição de razão simples concluímos o resultado para *C* ordinário. Se *C* é um ponto no infinito, (também chamado ponto ideal), então o resultado se obtém diretamente, porque no tal caso a razão simples é igual a -1. ?

A expressão anterior mostra que o quociente $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ altera a invariância projetiva da razão simples. A idéia é cancelar este quociente considerando um quarto ponto. Ou seja, dados *A*, *B*, *C*, *D* quatro pontos ordinário distintos e colineares, definimos sua razão dupla como o quociente de razões simples dado por $(AB, CD) = \dfrac{(AB, C)}{(AB, D)}$.

Projetemos *A, B, C, D* desde um ponto exterior *O* a outros quatro pontos colineares *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, como se mostra na figura.

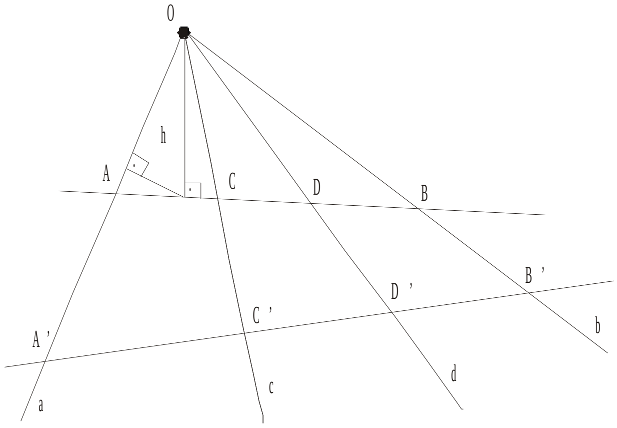


Fig. 20 – Projeção de *A, B, C, D* desde um ponto exterior *O*

Então, $(AB\,,CD\,)=\dfrac{(AB\,,C)}{AB\,,D)}=\dfrac{\dfrac{(OA\;\cdot \text{sen}\;\;\angle\overline{AOC}\;\;)}{(OB\;\cdot \text{sen}\;\;\angle\overline{COB}\;\;)}}{\dfrac{(OA\;\cdot \text{sen}\;\;\angle\overline{AOD}\;\;)}{(OB\;\cdot \text{sen}\;\;\angle\overline{DOB}\;\;)}}$

$$=\frac{\text{sen}\;\angle\overline{AOC}\;\cdot \text{sen}\;\angle\overline{DOB}}{\text{sen}\;\angle\overline{AOD}\;\cdot \text{sen}\;\angle\overline{COB}}=\frac{\text{sen}\;\angle\overline{A'OC'}\cdot \text{sen}\;\angle\overline{D'OB'}}{\text{sen}\;\angle\overline{A'OD'}\cdot \text{sen}\;\angle\overline{C'OB'}}=\frac{(A'B',C')}{(A'B',D')}=(A'B',C'D')$$

Logo, ainda que nem a distância nem a razão simples (que é uma razão das distâncias) se conservam por projeção, então a razão de razões simples é um invariante projetivo.

Observamos que a razão dupla nós a definimos para pontos ordinários, mas tendo em conta a invariância por projeção e as idéias anteriores, é claro como definir a razão dupla quando um dos pontos é ideal, ou incluso quando os quatro pontos são ideais, ou seja, são colineares em uma reta do infinito. Chegamos, desse modo, a obter um invariante projetivo associado a cada quádrupla de pontos colineares do plano ampliado.

Quatro pontos *A, B, C, D* tais que suas razões duplas *(AB, CD)* é igual a - 1, diz-se que formam uma *quádrupla harmônica*, ou que o ponto *B* é um *conjugado harmônico* de *A* com respeito a *C* e *D*. Por exemplo, dois pontos ordinários, seu ponto médio e o ponto ideal da reta em que se encontram formam uma quádrupla harmônica, isto é, o conjugado harmônico do ponto médio de um segmento qualquer é o ponto do infinito da reta.

Também podemos definir a razão dupla de quatro retas *a*, *b, c, d* concorrentes em um ponto ordinário *O* como $(ab, cd) = \dfrac{\operatorname{sen} \angle \overline{AOC} \cdot \operatorname{sen} \angle \overline{DOB}}{\operatorname{sen} \angle \overline{AOD} \cdot \operatorname{sen} \angle \overline{COB}}$, onde *A, B, C, D* são pontos quaisquer das retas *a, b, c, d,* respectivamente. A extensão ao caso em que *O* é ideal é natural, pois *a, b, c, d* seriam paralelas e basta tomar *(ab, cd) = (AB, CD),* onde *A, B, C, D* são os pontos obtidos ao cortar as quatro retas por uma transversal qualquer.

VII

As definições apresentadas nos parágrafos anteriores nos permitem afirmar que a razão dupla de quatro retas concorrentes é igual a razão dupla de quatro pontos obtidos ao cortá-las por uma transversal qualquer.

Além disso, ajuda-nos a compreender os oito axiomas fundamentais da Geometria Projetiva, propostos pelos italianos Gino Fano[20] [1871-1952] e Mario Pieri[21] [1860-1913], envolvendo os conceitos primitivos de *ponto, reta* e *incidência* (COXETER, 1964). São eles:

[A1] *Existe um ponto e uma reta que não são incidentes.*

[A2] *Toda reta é incidente à pelo menos três pontos distintos.*

[A3] *Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com somente uma reta.*

[A4] *Se A, B, C, D são quatro pontos distintos tais que AB encontra CD, então AC encontra BD. (Veja figura abaixo)*

[A5] *Se ABC é um plano, existe pelo menos um ponto fora do plano ABC.*

[A6] *Quaisquer dois planos distintos têm pelo menos dois pontos comuns.*

[A7] *Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares. (Veja figura abaixo)*

---

20 Em 1892 Fano graduou-se na Universidade de Turin e, em 1893, ele foi para Göttingen para dedicar-se à pesquisas orientadas por Felix Klein. No ano seguinte, retorna para Itália, onde trabalha como professor em diversas universidades. Seus trabalhos principais relacionam-se com Geometria Projetiva e Algébrica, sendo os mais conhecidos *Lezioni di geometria descrittiva* (1914) e *Lezioni di geometria analítica e projettiva* (1930). (STRUIK, 1989).

21 Mario Pieri graduou-se na Universidade de Bologna em 1884, passando a ensinar na Escola Técnica de Pisa. Pouco tempo depois, mudou-se para a Academia Militar em Turin, onde tornou-se professor de Geometria Projetiva. Em 1891, recebeu o título de doutor pela Universidade de Turin, onde ministrou diversos cursos sobre o assunto. Sua principal publicação foi de 1898, *The Principles of theGeometry of Position.* (STRUIK, 1989).

[A8] *Se a projetividade deixa invariante cada um dos três pontos distintos sobre uma reta, ela deixa invariante todo ponto sobre a reta.*

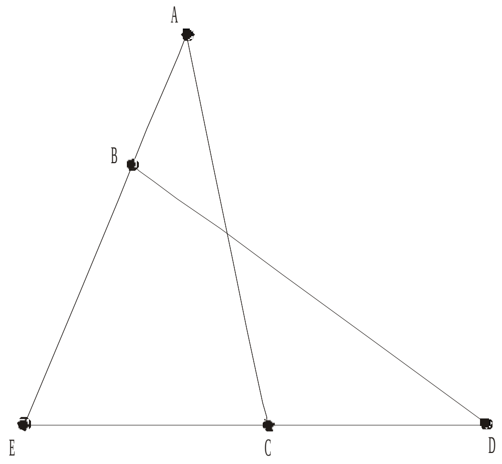


Fig. 21 – Sobre os axiomas

Esses axiomas sustentam os seguintes teoremas:

[T1] *Quaisquer duas retas distintas têm quando muito um ponto comum.*

Prova: Suponhamos, se possível, que duas retas dadas tenham dois pontos comuns *A* e *B*. O axioma [A3] diz-nos que cada reta é determinada por estes dois pontos. Então, as duas retas coincidem, contradizendo nosso argumento de que elas são distintas.?

[T2] *Quaisquer retas distintas coplanares têm pelo menos um ponto comum.*

Prova: Tomemos *E* como sendo um ponto coplanar com as duas retas, mas não sobre qualquer uma delas. Tomemos *AC* como sendo uma das retas. Desde que o plano *ACE* é determinado pelo feixe das retas através de *E* que encontra *AC*, uma das duas retas dadas pode ser tomada para ligar dois pontos sobre retas distintas deste feixe, diz-se *B* sobre *EA*, e *D* sobre *EC*, como na figura acima. De acordo com o axioma [A4], as retas *AC* e *BD* têm um ponto comum.?

[T3] *Se duas retas tem um ponto comum, elas são coplanares.*

Prova: Se duas retas têm um ponto comum *C*, nós podemos chamá-lo *AC*, *BC*, e concluir que elas encontram-se no plano *ABC*. ?

[T4] *Existem quatro pontos coplanares dos quais três são colineares.*

Prova: Pelo axioma [A1], existem duas retas distintas com um ponto comum, e cada uma contendo pelo menos dois outros pontos, diz-se que as retas *EA* e *EC* contêm também *B* e *D*, respectivamente, como na figura acima. Os quatro pontos distintos - *A*, *B*, *C*, *D* - têm a propriedade desejada de não colinearidade. Por exemplo, se os três pontos *A*, *B*, *C* forem colineares, *E* (sobre *AB*) poderia ser colinear com todas elas, e *EA* poderia ser a própria reta como *EC*, contrariando nosso argumento que estas duas retas são distintas.?

Dois agrupamentos ou feixes são chamados de *perspectiva* se elas estão relacionadas por uma perspectividade. Esta noção pode ser extendida para figuras planas envolvendo mais que um ponto e mais do que uma reta. Desse modo, duas figuras podem ser ditas *perspectiva* se seus pontos podem ser colocados em correspondência um a um e os pares dos pontos correspondentes são ligados por retas concorrentes, ou se suas retas podem ser colocadas em uma correspondência uma a uma, de forma que os pares de retas correspondentes encontram-se em pontos colineares. Por exemplo, os dois triângulos *PQR* e *P'Q'R'* na figura abaixo são perspectivos desde que os vértices correspondentes estejam ligados pelas três retas concorrentes *PP'*, *QQ'*, *RR'*, ou desde que os lados correspondentes encontram-se em três pontos colineares

$D = QR\,.\,Q'R',\qquad E = RP\,.\,R'P',\qquad F = PQ\,.\,P'Q'.$

Podemos dizer que duas figuras são *perspectiva por um ponto O* se os pares de pontos correspondentes estão ligados por retas que passam em *O*, e que duas figuras são *perspectivas a partir de uma reta o* se os pares de retas correspondentes encontram-se sobre *o*. Assim, podemos chamar *O* de *centro*, e *o* de *eixo*.

Lembrando que na situação acima assumimos que existem seis vértices distintos e seis lados distintos, podemos enunciá-la na forma do seguinte teorema:

[T5] *Se dois triângulos são perspectivos a partir de uma reta, eles são perspectivos a partir de um ponto.*

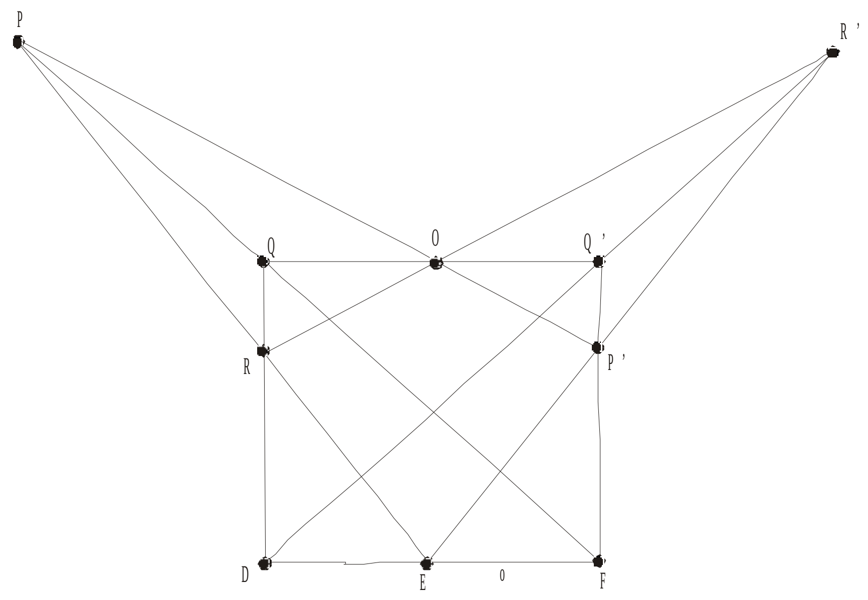


Fig. 22 – Triângulos perspectivos

Prova: Considere que dois triângulos, *PQR* e *P'Q'R'*, são perspectivos a partir de uma reta *o*. Em outras palavras, considere que *o* contém três pontos *D*, *E*, *F*, tais que *D* encontra-se sobre *QR* e *Q'R'*, *E* sobre *RP* e *R'P'*, *F* sobre *PQ* e *P'Q'*. Nós desejamos provar que as três retas *PP'*, *QQ'*, *RR'* passam através de um ponto *O*, como na figura acima. Nós distinguimos dois casos: se os triângulos dados estão em planos distintos, ou no mesmo plano.

No primeiro caso, consideramos o axioma [A4], desde que *QR* encontra *Q'R'*, *QQ'* encontra *RR'*. De mesmo modo, *RR'* encontra *PP'*, e *PP'* encontra *QQ'*. Então as três retas *PP'*, *QQ'*, *RR'* encontram-se mutuamente. Se os planos *PQR* e *P'Q'R'* são distintos, as três retas devem ser concorrentes. De outra maneira, elas formariam um triângulo, e este triângulo encontrar-se-ia nos dois planos.

No segundo caso, se *PQR* e *P'Q'R'* estão em um plano, desenhamos, em outro plano através de *o*, três retas não concorrentes através de *D*, *E*, *F*, respectivamente, e assim formamos um triângulo *P1Q1R1*, com *Q1R1* através de *D*, *R1P1* através de *E*, e *P1Q1* através de *F*. Este triângulo é perspectivo a partir de *o* com ambos *PQR* e *P'Q'R'*. Como os resultados são triângulos não coplanares, as três retas *PP1*, *QQ1*, *RR1* passam por um ponto *S*, e as três retas *P'P1*, *Q'Q1*, *R'R1* passam através de outro ponto *S'*, sendo *S* e *S'* pontos distintos. Desde que *P1* encontra-se sobre *PS* e *P'S'*, o axioma [A4] assevera que *SS'* encontra *PP'*. De mesmo modo, *SS'* encontra *QQ'* e *RR'*. Assim, finalmente, as três retas *PP'*, *QQ'*, *RR'* passam através do ponto *O = PQR . SS'*.?

E a sua recíproca, pode ser apresentada da seguinte maneira:

[T6] *Se dois triângulos são perspectivos a partir de um ponto eles são perspectivos a partir de uma reta.*

Prova: Considere dois triângulos, *PQR* e *P'Q'R'* (coplanar ou não coplanar) perspectivos a partir de um ponto *o*. Nós temos pelo axioma [A4] que os três pares de lados correspondentes encontram-se em *D*, *E*, *F*. Para provar que esses três pontos são colineares, consideramos os dois triângulos *PP'E* e *QQ'D*. Desde que os pares dos lados correspondentes encontram-se em três pontos colineares *R'*, *R*, *O*, estes triângulos são perspectivos a partir de uma reta, e por isso e pelo teorema anterior, perspectivos a partir de um ponto, nomeado, a partir do ponto *PQ . P'Q' = F*. Isto é, os três pontos *E*, *D*, *F* são colineares.?

Destacamos que tal recíproca é o nomeado *Teorema de Desargues*.

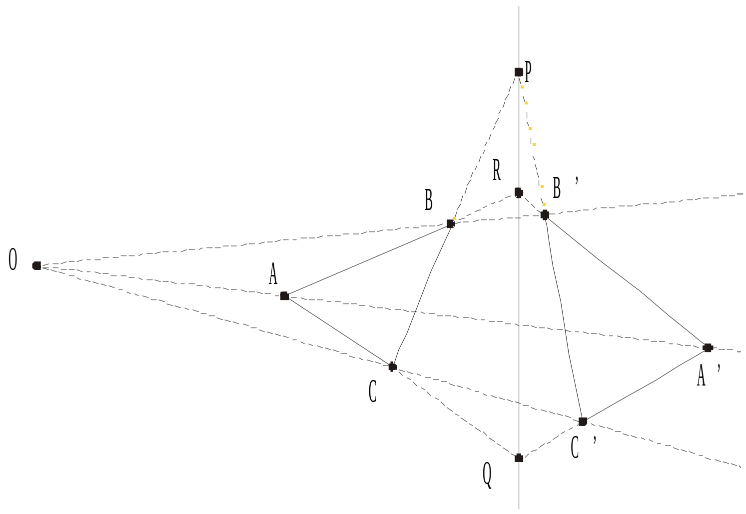


Fig. 23 – Teorema de Desargues

Essa representação é conhecida como sendo a *Configuração de Desargues*, e tem como símbolo $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$, isto é, consiste de dez pontos e dez retas, de modo que, cada reta passa por três pontos e cada ponto está sobre três retas. Sua importância está no fato de que um plano é considerado projetivo se nele é válida tal configuração (BLUMENTHAL, 1965).

VIII

Além dos teoremas tratados acima, temos o *Teorema Fundamental da Geometria Projetiva*, assim enunciado: *Uma projetividade é determinada quando três pontos colineares e os três pontos correspondentes são dados.*

Naturalmente, o conjunto de “três pontos colineares” pode ser trocado por “três retas concorrentes”. Desse modo, cada uma das relações

$$ABC \;\overline{\wedge}\; A'B'C',\ ABC \;\overline{\wedge}\; abc,\ abc \;\overline{\wedge}\; ABC,\ abc \;\overline{\wedge}\; a'b'c'$$

é suficiente para especificar unicamente uma projetividade particular. Por outro lado, cada uma das relações

$$ABCD \;\overline{\wedge}\; A'B'C'D',\ ABCD \;\overline{\wedge}\; abcd,\ abcd \;\overline{\wedge}\; a'b'c'd'$$

Expressa uma propriedade especial de oito pontos, ou de quatro pontos e quatro retas, ou de oito retas, de cuja natureza de qualquer sete dos oito pontos será determinada unicamente a partir da consideração de um deles. Assim, temos a propriedade que sustenta o teorema [T0] apresentado no final da nossa V parte, o qual nos diz que, se uma projetividade troca *A* e *B* transformando *C* em *D*, ela também transforma *D* em *C*, ou seja, ela troca *C* e *D*.

Outra consideração importante a ser feita é o conceito de *involução* apresentado por Desargues em seu tratado de 1639. De acordo com a sua definição, formulada em termos de conceitos não projetivos de distância e da concepção aritmética de multiplicação, uma involução é uma relação entre pares de pontos sobre uma reta, na qual distâncias a partir de um ponto fixo têm um produto constante (positivo ou negativo). Uma definição equivalente, não usando distância, foi dada por von Staudt, como segue: *uma involução é uma projetividade de período dois*, isto é, uma projetividade na qual troca-se pares de pontos. Ela é considerada a partir da relação $XX' \barwedge X'X$ assegurada para todas as posições de X se ele assegura a seguinte situação:

Qualquer projetividade que troca dois pontos distintos é uma involução.

Prova: Tome $X \barwedge X'$ uma projetividade dada na qual troca-se dois pontos distintos A e A', então $AA'X \barwedge A'AX'$, onde X é um ponto arbitrário sobre a reta AA'. Pelo teorema [T0], existe uma projetividade na qual $AA'XX' \barwedge A'AX'X$. Pelo teorema fundamental, esta projetividade, a qual troca X e X', é a mesma que a projetividade dada. Disso, X foi arbitrariamente trocado, a projetividade é uma involução.?

Qualquer quatro pontos colineares A, A', B, B' determina uma projetividade $AA'B \barwedge A'AB'$, na qual nós agora conhecemos como sendo uma involução. Dessa maneira, temos que *uma involução é determinada por quaisquer dois de seus pares*. De fato, ela é conveniente para denotar a involução $AA'B \barwedge A'AB'$ por $(AA')(BB')$, ou $(A'A)(B'B)$.

Assim, algo que não deixa dúvida é a presença das concepções de Desargues no pensamento projetivo, bem como a importância delas para a sistematização desse pensamento em sofisticadas teorias matemáticas.

PARTE III

do objeto
conclusão

Eu sugeriria, então, que todas as disciplinas de natureza intelectual têm seus fundadores comumente reconhecidos, mas apenas em algumas os trabalhos desses fundadores são amplamente pensados como “clássicos”. Todas as disciplinas têm seus fundadores porque eles são parte de seus mitos de origem. Não há mais divisões naturais entre as disciplinas do que entre países em um mapa. Toda disciplina intelectual reconhecida passou por um processo de autolegitimação não muito diferente daqueles que estiveram envolvidos na fundação das nações. Todas as disciplinas têm suas histórias de ficção, todas constituem comunidades imaginadas que evocam mitos do passado como um recurso para cartografar seu próprio desenvolvimento interno e sua unidade, assim como para estabelecer seus limites em relação às disciplinas vizinhas.

Giddens, 1998, p. 13-14.

do objeto

I

A presença das idéias de Cassirer na intelectualidade de Panofsky mostra-se mais uma vez em seu trabalho *A Perspectiva como Forma Simbólica*, no qual apresenta a perspectiva central como sendo a garantia de representação de um espaço racional, no sentido de infinito, imutável e homogêneo, a partir da adoção de “dois pressupostos tácitos, mas fundamentais, a saber: vemos com um olho imóvel; a secção transversal plana da pirâmide visual pode ser tomada por uma reprodução apropriada da nossa imagem óptica” (1999, p. 32). Para o historiador alemão, esses pressupostos possibilitaram uma audaciosa abstração da realidade.

O modo anterior de representação é contextualizado por Panofsky (1999, p. 37) e destaca-se uma ligação que ele faz entre a ótica da Antiguidade e um teorema de Euclides, uma vez que, no caso da ótica, como naquela época entendia-se que o campo de visão era como uma esfera, seria, portanto, natural a sustentação de “que as grandezas aparentes (isto é, as projecções dos objectos dentro desse campo esférico) são, sempre e exclusivamente, determinadas pela amplitude dos ângulos de visão, não pela distância a que os objectos estão do olho”. E, no caso do teorema, ele afirma que um dos teoremas apresentados nos Elementos[22] “prevê e ‘anula’, de forma explícita, qualquer ponto de vista contrário”.

Essas duas motivações contribuem para o estabelecimento do que Panofsky considerou uma contradição entre o modo anterior de representação, conhecido como *perspectiva naturalis* ou *communis*, e o que se desenvolvia sem se ater às restrições, em particular, atreladas às questões fisiológicas ou matemáticas, mas buscando “estabelecer um método que se provasse útil na representação de imagens em superfícies bi-dimensionais”, conhecido como o da *perspectiva artificialis*. O historiador é claro ao afirmar que o “reconhecimento do axioma implica que a criação de uma imagem perspectiva é, em rigor, tarefa impossível, pois não restam dúvidas quanto ao facto de uma esfera se não poder apresentar numa superfície” (1999, p. 37).

No campo da teoria da História da Arte o trabalho de Panofsky foi examinado por Gombrich. No que diz respeito à História da Ciência, Júlio Roberto Katinsky (2002, p. 193) não vê porque as abstrações relacionadas aos pressupostos da perspectiva central, “são mais

[22] Apud Panosfski, nota 15 da página 82: “Euclides, Oitavo Teorema, Óptica, p. 164 (p.14): “Quando colocados a distâncias diferentes, dois objectos não são vistos de acordo com a proporção entre as suas distâncias”.

audaciosas do que aquelas do astrólogo (e astrônomos clássico) construtor de analemas, ambas desmentidas pela ciência contemporânea: nem a luz é composta de raios unilineares (sem peso), nem o sol gira em torno da terra.”

Além disso, o caráter de racionalidade absoluta, dado por Panofsky, é questionado por Katinsky (2001, p. 13), uma vez que este último recoloca a questão por compreender que “nossas propostas de racionalização são sempre provisórias, ou ainda, o espaço racional renascentista é só mais preciso, mas não mais racional que o espaço romano ou medieval. A prova disso é que estudamos em momentos diferentes o *espaço euclidiano* e todos os espaços pós-euclidianos já propostos.”

No que diz respeito ao teorema, Katinsky (2001, p. 13) observa que “O tradutor de Euclides para o francês, do século XX, Paul Ver Eecke, não é tão seguro, nem em relação ao teorema oitavo, nem em relação à precisão dos conhecimentos fisiológicos e visuais dos antigos.” Argumenta ainda que

> a afirmação grega é perfeitamente válida para objetos cuja distância do observador não é conhecida, ou melhor, não pode ser medida diretamente. Como, por exemplo, os corpos celestes. E é bom não esquecer que a ótica, nesse momento, é uma ciência auxiliar da astronomia, tendo pouca ou nenhuma relação quantitativa com a representação plana dos objetos, ou aquilo que nós chamamos perspectiva.

O trabalho de Panofsky tem, para Katinsky (2001, p. 23), “um mérito filosófico inaugural.” Ao pensar sobre a repercussão que teve o texto do historiador alemão, ele observa que “normalmente os estudiosos da arte e da perspectiva sempre a encararam como Alberti a propôs: *Prospettiva Pingendi*, ou seja, como mero instrumento técnico de artistas. Panofsky entretanto, propôs, desde o início, como um problema epistemológico.” Assim, ele conclui (2001, p. 24):

> todos os meus estudos sobre o tema não só caminham no mesmo sentido, como reforçam a proposição da perspectiva exata florentina como propôs o estudioso alemão e, arrisco-me a dizer, os autores que nos amparam são quase todos os mesmos. Entretanto, devo distinguir filosoficamente duas direções diferentes e antagônicas: diferentemente de Panofsky, minha orientação dirige-se para aquilo que poderíamos chamar de *realismo crítico*: ainda que precária, provisória e relativa, eu afirmo a autonomia do conhecimento e da verdade em relação às circunstâncias que propiciaram o trabalho para alcançá-los, sem desconhecer os condicionantes sociais que as fundam.

II

Para a Sociologia do Conhecimento apresentada por Karl Mannheim (1968, p. 30) não tem sentido dizer que um indivíduo isolado pensa. Sua tese é a de "que existem modos de pensamento que não podem ser compreendidos adequadamente enquanto se mantiverem obscuras suas origens sociais". A nossa tese é de que o pensamento matemático é um deles, distanciando-nos, nesse momento, do pensamento de Durkheim (2001, p. 17) quando considera que "Todo objeto da ciência é uma coisa, salvo, talvez, os objetos matemáticos". A sua dúvida é explicitada e seguida de uma pequena justificativa dizendo que

> (...) no que diz respeito [aos objetos matemáticos], por sermos nós quem os constrói, desde os mais simples aos mais complexos, basta, para saber o que são, olhar para dentro de nós e analisar interiormente o processo mental que os resultam. Mas, desde que se trate de fatos propriamente ditos, eles são necessariamente para nós, no momento em que realizamos o seu estudo, desconhecidos, coisas ignoradas, pois as representações que deles adquirimos ao longo da vida, tendo sido feitas sem método e sem crítica, são desprovidas de valor científico e devem pôr-se de lado.

A distância aumenta ao compartilharmos da orientação de Mannheim (1968, p.33) ao dizer que,

> Somente na medida em que conseguimos trazer à área de observação consciente e explícita os vários pontos de partida e de abordagem dos fatos correntes tanto na discussão científica, como na popular, é que podemos esperar, no correr do tempo, controlar as motivações e pressupostos inconscientes que, em última análise, deram existência a esses modelos de pensamento.

Além disso, ele (1968, p. 29) chama a atenção para o fato de que os filósofos dedicaram longo tempo em histórias pessoais ou da Filosofia, ou tratando de áreas bem específicas como a Física e a Matemática, distantes da vida cotidiana, local de conhecimentos elaborados pelos indivíduos "para a penetração intelectual ou vivencial do mundo". Noutra direção, a "Sociologia do Conhecimento", diz Mannheim (1968, p. 31), "busca compreender o pensamento no contexto concreto de uma situação histórico-social, de onde só muito gradativamente emerge o pensamento individualmente diferenciado".

Se, para o filósofo, a vida de Pitágoras tem pouca importância na compreensão de suas proposições, para a Sociologia do Conhecimento existem relações relevantes obscurecidas pela atitude generalizante fazendo com que "as pessoas se tornem não-receptíveis às diferenças mais profundas entre um e outro significado" (MANNHEIM, 1968, p. 53).

No que diz respeito a método, o que se busca na Sociologia do Conhecimento, explica Mannheim (1968, p. 76), são critérios que "nos habilite a distinguir e isolar diferentes estilos de pensar e relacioná-los aos grupos de onde surgem". Desse modo, ele apresenta dois objetivos. O primeiro relacionado à análise de significado, visando refinar cada vez mais a caracterização de diferentes estilos de pensamento, fazendo com que o objeto do pensamento torne-se mais claro a partir de uma combinação de diferentes perspectivas a ele referentes. O segundo, tem a ver com o aperfeiçoamento da "técnica de reconstrução da história social a ponto de se ser capaz de perceber, ao invés de fatos isolados e distantes, a estrutura social como um todo, isto é, a rede das forças sociais em interação de onde surgiram os vários modos de observar e pensar sobre as realidades existentes, que apareceram em diferentes épocas".

Fixamo-nos, então, nesses objetivos para atender a pretensão de refletir sobre a prática da representação perspectiva e suas técnicas que, de certo modo, as encontramos no formato de uma teoria matemática. Além disso, centramo-nos nas perguntas sugeridas por Mannheim (1967, p.29) como as que devem ser enfrentadas numa concreta Sociologia do Conhecimento, ou seja, "que categorias, que concepções sistemáticas são usadas pelos diferentes grupos em um estágio dado, na avaliação de um mesmo fato descoberto no curso das operações práticas? E quais são as tensões que aparecem na tentativa de adaptar esses novos fatos àquelas categorias e concepções sistemáticas?". Ele as justifica argumentando que

> Podemos afirmar isto mais simplesmente, se deixarmos de lado o papel das pressuposições sistemáticas *a priori* no processo do pensamento; o que perdura, então, é o fato de que correntes intelectuais diversas não se desenvolvem isoladamente, mas mutuamente se afetam e se enriquecem; e, no entanto, não se fundem num sistema comum, mas tentam considerar a totalidade dos fatos descobertos, partindo de diferentes axiomas gerais. [E prossegue dizendo que] Essa visão da estrutura histórico-sociológica do processo intelectual induz à conclusão de que, em cada momento, existem vários "pontos de vista" sistemáticos e filosóficos diferentes, dos quais se pode experimentar a consideração de um novo fato emergente por uma nova faceta da realidade cognitiva (MANNHEIM, 1967, p. 30).

Entre as condições necessárias para que se possa realizar um trabalho frutífero no campo da Sociologia do Conhecimento, Mannheim (1967, p. 68) coloca que "os autores [devem possuir] a habilidade de observar o pensamento tanto 'de dentro', em termos de sua estrutura lógica, quanto 'de fora', em termos de seu condicionamento e função sociais", que é a nossa intenção, pois como ele assevera (1967, p. 70), uma análise sistemática da gênese das posições intelectuais ainda fica restrita a uma historia de idéias. Assim, "Esse trabalho sistemático preliminar na historia de idéias só pode levar a uma Sociologia do Conhecimento quando examina o problema de como as varias posições intelectuais e 'estilo de pensamento' estão enraizados numa realidade histórico-social subjacente".

III

No cenário do contexto matemático do final do século XVI e início do XVII, Kline (1972, p. 285) destaca que, da época de Pappus de Alexandria, que viveu no final do século III d.C., até por volta de 1600, pouco havia sido feito em termos de atividade criativa na geometria, com exceção da perspectiva e de seu sistema matemático desenvolvido pelos artistas renascentistas.

"Um grande número de problemas", diz Kline no trecho citado acima, "vem da ciência e das necessidades práticas", sendo um deles o levantado por Alberti ao perguntar-se que propriedades geométricas têm em comum uma secção, feita em uma projeção, e a figura que a deu origem? E mais, que propriedades geométricas têm em comum duas secções diferentes, feitas por dois planos diferentes que cortam a projeção da mesma figura em um ângulo qualquer?

Se, por um lado, Alberti apresentou uma originalidade na maneira como problematizou e, através de uma construção gráfica que reduzia o processo de uma série de medidas que se relacionavam, solucionou o problema, por outro lado, ele não tinha consciência, como ressalta Ivins Jr. (1946, p. 71), que sua construção era uma combinação prática das secções cônicas de Apolônio e do teorema ótico de Pappus acerca da aparência de um círculo a partir de uma posição dada fora do plano em que esteja o círculo. A diferença significativa é a de interesse, uma vez que Alberti não estava preocupado com o círculo e sua forma, mas como certos padrões, por exemplo, uma região quadriculada, comportava-se no interior de um círculo.

A busca de resposta para essas perguntas conduz ao que Kline (1972, p. 286) considerou como a primeira inovação no campo da Matemática daquela época no sentido que os trabalhos de então se preocupavam em disseminar as contribuições gregas, não apresentando novos teoremas ou novos métodos de prova. As abordagens iniciais feitas pelos geômetras por meio dos métodos e resultados da geometria Euclidiana mostraram o limite de uma forma de pensar e o limiar de outra que passou a adquirir contornos próprios de um novo ramo do pensamento geométrico.

As "diferentes maneiras de se aprender um conceito, de integrá-lo num sistema operatório e de associar-lhe implicações intuitivas" é o que Granger (1974, p. 31-32) denomina como "fatos de estilo", considerando o estilo de suma importância e ressaltando seu "papel talvez [como] essencial, ao mesmo tempo, numa dialética do desenvolvimento interno da Matemática e na de suas relações com mundos de objetos mais concretos". A adoção de um estilo manifesta, para o filósofo (1974, p. 53), "um gosto, no sentido estético desta palavra, a que repugna transgredir regras, misturar gêneros, introduzir abertamente a intuição sensível num cálculo".

Ao comparar estilos como, por exemplo, o euclidiano, no que diz respeito à questão da comensurabilidade, e o cartesiano, em relação às questões mecânicas, ele (1974, p. 53) conclui que tanto "O gênio de um como o do outro impede-os de pensar que, para além desse *saltus mortale* consentido por um Arquimedes, um Cavalieri, um Pascal, abre-se um reino onde regras também tão rigorosas permitirão ao geômetra audacioso retomar seu poder sobre a imaginação sensível".

Em outro momento, agora ao comparar as obras dos contemporâneos Descartes e Desargues, Granger (1974, p. 57) busca mostrar que o que os diferencia é a "variação de estilo na atividade construtiva dos matemáticos". Apesar do ponto de vista do primeiro obscurecer o de Desargues, Granger (1974, p. 61) chama a nossa atenção para o fato de que nem os trabalhos de Pascal sobre cônicas, nem os dos reconhecidos geômetras Philippe de la Hire [1640-1718] e Le Poivre "nada mais fazem do que instituir, na verdade, nos séculos XVII e XVIII, uma Matemática à Desargues", prosseguindo sua afirmação dizendo que Lazare Nicholas-Marguerite Carnot [1753-1823], Monge, Poncelet, Michel Chasles [1793-1880] "retomarão as idéias arguesianas no início do século XIX e desenvolverão suas conseqüências num corpo de doutrina chamado 'geometria moderna' ". Historicamente, tal fato é corroborado por Struik (1953, p. 19), ao registrar que o trabalho de Desargues (1639) fora perdido, mas uma cópia dele, feita por la Hire em 1679, foi redescoberta por Chasles em 1845, inspirando suas concepções sobre involução apresentadas em seus trabalhos posteriores.

Transpondo as idéias de Desargues para além da questão de estilo, Granger, por fim, conclui que elas criam uma nova estrutura para o objeto geométrico, a qual foi sistematizada na teoria geral dos grupos de transformações elaboradas por Félix Klein [1849-1925]. Ainda nessa direção, o autor esclarece que no caso das idéias geométricas de Descartes elas são tomadas como algo bem sistematizado e, por conseguinte, um modelo de inteligibilidade. Já no caso das de Desargues, tudo permaneceu em estado latente até a efetiva sistematização realizada por Poncelet e analisada por Arthur Cayley [1821-1895], que 1859, entusiasmado com as concepções projetivas e suas aplicações na elaboração de geometrias não-euclideanas, afirmou que "Geometria Métrica é uma parte da geometria descritiva, e geometria descritiva é toda a geometria"[23].

As idéias arguesianas não foram apresentadas em conformidade com o modelo de inteligibilidade matemática vigente, e dessa forma, foram difamadas e sofreram deboches e acusações, como as evidenciadas por Granger (1974, p. 84-85) ao citar um trecho de uma carta que diz que Desargues tinha uma maneira inadequada de falar sobre Matemática não só por desconhecê-la, mas também para se fazer prolixo ao tratar de assuntos que já haviam tido melhor tratamento dado por matemáticos. O vocabulário utilizado por Desargues para expor suas idéias foi duramente criticado, sendo considerado como uma "estranha exuberância de termos vegetais", tais como cepas, nós, ramos, talos, troncos, entre outros. Descartes, pelo contrário, utilizou-se do simbolismo da Álgebra.

Assim, Desargues sofreu com o que Foucault chamou de procedimentos de exclusão. "Sabe-se bem, escreveu ele (2000, p. 9), "que não se tem o direito de dizer tudo, que não se pode falar de tudo em qualquer circunstância, que qualquer um, enfim, não pode falar de qualquer coisa", sendo que, quando isso ocorre, o sujeito é submetido aos processos de interdição.

[23] "Metrical geometry is a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is all geometry". Apud Coxeter (1964, p. 4) que nos explica que a palavra "descritiva" é utilizada onde hoje usamos "projetiva".

conclusão

I

Sem perder de vista que “A transdisciplinaridade não busca o domínio sobre várias disciplinas, mas uma abertura de todas as disciplinas ao que percorre nelas e além delas” (D'AMBROSIO, 1994, p. 31-2), lembramos que D’Ambrosio (1998, p. 18) ao discutir a questão da universalidade, não só aponta a história comparada das matemáticas, associada a estudos de antropologia cultural, como uma espécie de antídoto contra as distorções do tipo prepotência e preconceito cultural, mas também afirma que “o exame da universalidade das matemáticas está associado a um exame crítico da própria institucionalização da matemática como ramo de conhecimento”. Nesse sentido, ele recomenda os estudos históricos associados aos de sociologia da matemática.

Nessa recomendação vislumbramos duas possibilidades de exploração sociológica. A primeira diz respeito à Matemática enquanto conhecimento e, nessa direção, temos o Programa Forte na Sociologia do Conhecimento como pano de fundo da discussão apresentada em “Knowledge and Social Imagery”, livro escrito por David Bloor (1976) que visa responder se a Sociologia do Conhecimento pode investigar e explicar o conteúdo e a natureza do conhecimento científico, e mostrar a aplicabilidade da Sociologia do Conhecimento nas Ciências consideradas objetivas.

Para que tenhamos uma idéia, o Programa Forte na Sociologia do Conhecimento é definido por Bloor (1976, p. 5) através de quatro características: a *causalidade* no sentido de preocupar-se com as condições que levaram à crenças ou estágios de conhecimento; a *imparcialidade* no que se trata das dicotomias como, por exemplo, verdade e falsidade, racionalidade e irracionalidade, sucesso e fracasso, uma vez que ambos os lados dessas dicotomias possuem suas justificativas. Além disso, a questão da *simetria* no conhecimento é vista como algo apropriado quando se observa que os mesmos tipos de explicações podem sustentar crenças sejam elas verdadeiras ou falsas. Por fim, temos a *reflexividade*, isto é, em princípio, seus modelos explicativos podem ser aplicados à própria Sociologia.

A segunda possibilidade diz respeito à Matemática enquanto, como disse D’Ambrosio (1998, p. 19), “sociedade dos matemáticos”, passando pela questão do reconhecimento, dos títulos, dos institutos e congressos.

A Matemática, considerada nesses termos, mostra-se constituída por um mundo social, longe de ser apenas um mundo de formas, sinais, símbolos, imaginação, intuição e raciocínios, imune aos impactos e influências da sociedade e ao momento pelo qual ela passa. Restivo (1994) toma como meta esboçar implicações e possibilidades dessa abordagem diante das limitações da visão platônica, pitagórica, formalista e fundamentalista da Matemática, as quais, para ele, necessitam de nova contextualização quando submetidas a três *insights* inter-relacionados: "todo discurso é social; o indivíduo é uma estrutura social; e o intelecto - mente, consciência, aparato cognitivo - é uma estrutura social" (1994, p. 210). Esses *insights* fundamentam o que ele chama de *Sociologia Radical da Matemática*, pautada na formulação de Karl Marx [1818-1883], segundo a qual a ciência é uma atividade social, sendo que, para Restivo, tal Sociologia Radical pode ser considerada como um programa no qual todo discurso sobre/da Matemática é discurso social.

Nessa direção, o primeiro passo, diz Restivo (1994), é despertar-nos para os "mundos matemáticos" como redes de trabalhos de seres humanos convivendo em áreas que envolvem conflitos e cooperação, dominação e subordinação. A Matemática passa a ser vista como algo que se relaciona com outras redes de trabalho. É possível o estabelecimento dessas ligações entre redes e como foram/são influenciadas pelo contexto cultural. Para isso, ele sugere os meios oferecidos pela Etnografia, o que nos remete ao segundo passo, que consiste no reconhecimento do discurso social e técnico, em suas simultaneidades e permutações, como prática social inserida na sociedade como um todo. O terceiro é focar o discurso técnico em termos de etnográficos, a partir da História Social dos sinais, símbolos, veículos de significados e imaginação. O passo final é a compreensão que a análise sociológica permite, isto é, a de que o discurso técnico é discurso social.

II

A perspectiva sociológica do conhecimento matemático mostra-nos que ele se trata de algo da cultura humana, no sentido de espírito universal, e que as suas naturezas particulares manifestam-se através do ponto vista individual e da realidade na qual ele é elaborado, organizado e difundido.

Além disso, a concepção de que pensamentos individuais estão vinculados às condições sociais, das quais eles dependem e são resultados e, assim, possíveis de serem compartilhados por meio de uma linguagem comum ao meio, sendo, dessa forma, representações elaboradas socialmente, conduz à conclusão que, nessa perspectiva, são mundos ou comunidades que pensam e que os indivíduos expressam tais pensamentos constituídos coletivamente.

Essas convicções sustentam a nossa proposição de que o conhecimento matemático é socialmente elaborado através de significados compartilhados por membros de determinados grupos sociais, ou de instituições especializadas em distintos trabalhos, sendo que, em cada uma delas, aplicam-se regras próprias, organizadas por distintos tratamentos, as quais as caracterizam.

O conhecimento matemático, enquanto processo através do qual determinados objetos são classificados por um conjunto de critérios, mostra-nos que a escolha desses critérios, não sendo nem neutra nem aleatória, é da ordem social da axiomatização das regras de coerência interna que algum grupo queira dar. “A necessidade de abstração e análise”, argumenta Mannheim (2001, p. 156), “não é imposta pelas coisas; sua origem é social. Surge a partir das proporções e da estrutura do grupo no interior do qual o conhecimento deve ser compartilhado”.

A origem de qualquer sistema teórico de referências é um ato de liberdade axiomática, no sentido de que é um ato essencialmente oposto a qualquer processo de dogmatização. Essa opção livre funda um ponto de vista, uma origem, ou princípios a partir dos quais uma determinada inteligibilidade se constrói. A teorização racional baseia-se num conjunto de hipóteses em que os princípios normativos, as regras cognitivas e as formas de codificação ou de linguagem ligam-se a padrões de comportamentos sociológicos, dos quais dependem implicitamente os modelos de comunicação e de difusão do conhecimento. Novamente, Mannheim (2001, p. 156) assevera que, “Quando o conhecimento deve ser comunicado a várias pessoas com diferentes posições e antecedentes, ele deve ser expresso em termos ‘abstratos’, pois as comunicações ‘ concretas’ só são inteligíveis aos que têm experiências e associações similares”.

III

O trabalho do matemático G. H. Hardy, *Apologia de um matemático*, é tomado por Norbert Elias [1897-1990] para tecer uma crítica ao que chama de ‘estatuto da matemática’.

A pretensão, defendida por Hardy, de ter acesso a realidades eternas que sobreviveriam à morte é criticada por Elias (1998, p. 105), dizendo que “Se a ambição fosse mais modesta, seria possível subscrevê-la”. No entanto, ele a considera um exagero, enfatizando que “essa maneira de realçar o estatuto da matemática, fazendo dela a garantia de nossa permanência, assenta-se em bases frágeis”, concluindo que, tal fato “é mascarado pela presença de uma lacuna em nosso patrimônio atual de conhecimento”.

Em seu entendimento (1998, p. 106) o que falta é uma teoria da Matemática que a veja através da perspectiva que a coloque como “um campo criado pelos homens e, por isso mesmo, ligado à sociedade”, assim como o faz ao abordar o tema ‘tempo’.

“O que nos falta”, conclui Elias (1998, p. 106), “é uma sociologia do conhecimento aplicada à matemática, uma teoria que se revele capaz, entre outras coisas, de explicar a função dessa ciência, sua utilização possível para a resolução de problemas físicos e sua aplicabilidade aos sistemas de que se compõe a natureza”.

Essa falta evidenciou-se nas oportunidades que tivemos de apresentar as idéias contidas nessa tese em diferentes fóruns e grupos de trabalho (AMANCIO; MARAFON; PEREIRA, 2003a, 2003b, 2004), o que nos levou a reforçar a sua necessidade, bem como suas possibilidades quando tais discussões ocorrem em espaços voltados para a Educação Matemática no que diz respeito aos seus fundamentos científicos e filosóficos.

Acreditamos ter contribuído para o preenchimento dessa lacuna apontada por Elias (1998), bem como ter deixado possíveis encaminhamentos de explorações futuras decorrentes dos horizontes vislumbrados durante o percurso de sua organização.

Assim, em homenagem a Desargues, repetimos a sua forma de concluir seus textos com as seguintes iniciais:

L.S.D.[24]

[24] Loué Soit Dieu.

REFERÊNCIAS

ALBERTI, L. B. **Da Pintura.** Tradução Antonio da Silveira Mendonça. Campinas: Editora da Unicamp, 1999. Título original: De Pictura.

ALBERTI, L. B. **On painting.** Tradução Cecil Grayson. New York: Penguin, 1991. Título original: De Pictura.

AMANCIO, C. N.; MARAFON, A. C. M; PEREIRA, D. J. R. A Matemática enquanto *constructo* social: dois exemplos. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 11, 2003, Blumenau. **Anais...** Blumenau: Furb, 2003a. 1 CD.

AMANCIO, C. N.; MARAFON, A. C. M; PEREIRA, D. J. R. A Matemática enquanto *constructo* social: dois exemplos. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2, 2003, Santos. **Anais...** Santos: SBEM, 2003b. 1 CD.

AMANCIO, C. N.; MARAFON, A. C. M; PEREIRA, D. J. R. Mathematics as social *construct*: two examples. In: International Congress of Mathematic Education, 10, 2004, Copenhagen. **Anais...** Copenhagen: ICME, 2004. 1 CD.

BAXANDALL, M. **O olhar renascente:** pintura e experiência social na Itália da Renascença. Tradução Maria Cecília Preto da Rocha de Almeida. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1991. (Oficina da Artes, v. 6). Título original: Painting and Experience in fifteenth Century Italy – a primer in the Social History of pictorial style.

BERTATO, F. M. A Obra “De Divina Proprtione” (1509) de Frà Luca Pacioli. NOBRE, S.; TEIXEIRA, M. (Ed) In: Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática, 5, 2003, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: SBHMat, 2003. p. 281-292.

BLOOR, D. **Knowdelge an Social Imagery**. Chicago: University of Chicago Press, 1976.

BLUMENTHAL, L. M. **Geometria axiomática.** Tradução Mario Melendez Rolla. Madrid: Aguillar, 1965. Título original: A modern view of Geometry.

CASSIRER, E. **Ensaio sobre o homem:** Introdução a uma filosofia da cultura humana. Tradução Tomás Rosa Bueno. São Paulo: Martins Fontes, 1994. (Coleção Tópicos). Título original: An Essay on Man – an introduction to a Philosophy of human culture.

CASTRO, L. G. M. Introdução à Geometria Projetiva. **Eureka!,** n.8, p. 16-27, 2000.

CERTEAU, M. de. **A Escrita da História.** Tradução Maria de Lourdes Menezes. 2. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2002. Título original: L´écriture de l´Histoire.

COLLETTE, J. P. **Historia de las Matemáticas II.** México: Siglo Veintiuno Editores, 1986.

COXETER, H. S. M. **Projective Geometry**. Toronto: Blaisdell Publishing Company, 1964.

D’AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. **A Educação Matemática em Revista-SBEM**, Blumenau, n.1, p. 5-11, 1993.

_______ . Cultural Framing of Mathematics Teaching and Learning. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRASER, R.; WINKELMANN, B. (Ed.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer, 1994. p. 443-455.

_______ (Org.). **Declaração dos Foruns de Ciência e Cultura da Unesco**: Veneza, Vancouver, Belém: Carta da Transdisciplinaridade. Brasília: Editora Unb, 1994.

_______ . História da Matemática e Educação. In: FERREIRA, E. S. (Org.) **Cadernos CEDES-40:** História e Educação Matemática**.** Campinas: Papirus, 1996. p. 7-17.

_______ . **Etnomatemática**: arte ou técnica de explicar e conhecer. 4 ed. São Paulo: Ática, 1998.

_______ . A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999. p. 97-115.

_______ . O Programa Etnomatemática: História, Metodologia e Pedagogia. In: Palestra no III Simpósio de Educación Matemática, 3, 2001, Chivilcoy-Argentina. **Palestra...** Chivilcoy-Argentina: 2001.

_______ . **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

_______ . Um Enfoque Transdisciplinar à Educação e à História da Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

DUBY, G. **O tempo das catedrais:** a arte e a sociedade 980-1420. Tradução José Saramago. Lisboa: Estampa, 1978. Título original: Le Temps des Cathédrales. L'art et la société, 980-1420.

DURKHEIM, É. **As Formas Elementares da Vida Religiosa:** o sistema totêmico na Austrália. Tradução Paulo Neves. São Paulo: Martins Fontes, 1996. Título original: Les Formes Élémentares de la Vie Religieuse.

_______ . **As Regras do Método Sociológico.** Tradução Paulo Neves. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999. Título original: Les Règles de la Méthode Sociologique.

ELIAS, N. **Sobre o tempo**. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. Título original: Über die Zeit.

FIELD, J. V. Perspective and the mathematicians: Alberti to Desargues. In: HAY, C. (Ed) **Mathematics from Manuscript to Print:** 1300 – 1600. Oxford: Clarendon Press, 1988. p. 236-263.

FIELD, J. V.; GRAY, J. J. **The Geometrical Work of Girard Desargues.** New York: Springer-Verlag, 1987.

FOUCAULT, M. **A Ordem do Discurso**. Tradução Laura Fraga de Almeida Sampaio. 6 ed. São Paulo: Loyola, 2000. Título original: L´ordre du discours. Leçon inaugurale au Collège de France prononcée lê 2 décembre 1970.

GIDDENS, A. **Politica, sociologia e teoria social**: encontros com o pensamento social clássico e contemporâneo. Tradução Cibele Saliba Rizek. São Paulo: Editora da UNESP, 1998. (Biblioteca básica). Título original: Politics, Sociology and Social Theory.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais**: morfologia e história. Tradução Federico Carotti. São Paulo: Companhia das Letras, 1989. Título original: Mutti emblemi spie: morfologia e storia.

GOMBRICH, E. H. **Arte e Ilusão**: um estudo da psicologia da representação pictórica. Tradução Raul de Sá Barbosa. São Paulo: Martins Fontes, 1986. Título original: Art and Illusion – A Study in the psychology of pictorial representation.

_______ . **Norma e Forma**. Tradução Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1990. Título original: Norm and Form.

GRANGER, G. G. **Filosofia do Estilo**. Tradução Scarlett Zerbetto Marton. São Paulo: Perspectiva, Ed. da Usp, 1974. Título original: Essai d´une Philosophie du style.

_______ . **O irracional.** Tradução Álvaro Lorencini. São Paulo: Editora Unesp, 2002. Título original: L'irrationnel.

GRAYSON, C. Introdução. In: ALBERTI, L. B. **Da Pintura.** Campinas: Editora da Unicamp, 1999, p. 35-70.

GREGORY, R. L. **Olho e Cérebro:** psicologia da visão. Tradução Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1979. Título original: Eye and Brain – the Psychology of seeing.

HELLER, A. **O Homem do Renascimento.** Lisboa: Presença, 1982.

_______ . **O cotidiano e a História.** Tradução Carlos Nelson Coutinho e Leandro Konder. 6. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2000. Título original: Alltag und Geschichte. Zur sozialistischen Gesellschaftslehre.

HERSEY, G. L. **Architecture and Geometry in the age of the Baroque**. Londres: The University of Chicago Press, 2000.

HILBERT, D. **Fundamentos de la Geometria**. Tradução Francisco Cebrián. Madrid: CSIC, 1991. Título original: Grundlagen der Geometrie.

IVINS JR, W. M. **Art & Geomety**: a study in space intuitions. New York: Dover, 1946.

KATINSKY, J. R. A Perspectiva Exata e o desenvolvimento da Geometria Ótica. **Revista Brasileira de História da Matemática.** Rio Claro, v. 1, n. 2. p. 03-25, out. 2001.

_______ . **Renascença:** estudos periféricos. São Paulo: FAUUSP, 2002.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1972.

LAURENT, R. A Perspectiva. In: DARCHE, M.; KANTOR, J. (Ed.). **Mosaico Matemático**. Paris: la Villette, [19--?], p. 21-27.

MANNHEIM, K. **O Problema de uma Sociologia do Conhecimento.** Tradução Mauro Gama e Ina Dutra. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1967. Título original: The Problem of a Sociology of Knowledge.

_______ . **Ideologia e Utopia.** Tradução Sergio Magalhães Santeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 1968. Título original: Ideology and Utopia – an introduction to the Sociology of Knowledge.

_______ . **Sociologia da Cultura.** Tradução Roberto Gambini. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 2001. Título original: Essays on the Sociology of Culture.

MILLS, C. W. **A Imaginação Sociológica.** Tradução Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Zahar, 1975. Título original: The Sociological Imagination.

PANOFSKY, E. **Estudos de Iconologia:** temas humanísticos na arte do renacismento. Tradução Olinda Braga de Souza. 2. ed. Lisboa: Editorial Estampa, 1995. Título original: Studies in Iconology.

_______ . A Perspectiva como Forma Simbólica. Tradução Elizabete Nunes. Lisboa: Edições 70, 1999. Título original: Die Perspektive als "symbolische Form".

PEIFFER, J. Dürer Géomètre. In: DÜRER, A. **Géométrie**. Paris: Seuil, 1995. p. 17-121.

POLIÃO, M. V. **Da Arquitetura.** Tradução e notas Marco Aurélio Lagonegro. São Paulo: HUCITEC/FUPAM, 1999. Título original: Vitruvii De Archictetura Libri Decem.

PONCELET, J. V. **Traité des Propriétés Projectives des Figures:** ouvrage utile a ceux qui s ´occupent des applications de la Géométrie Descriptive et d´opérations géométriques sur le terrain**.** Paris: Gauthier-Villars, 1865. (Tome Premier).

RESTIVO, S. The Social Life of Pure Mathematics. In: ENERST, P. (Ed.). **Mathematics, Education and Philosophy:** an international perspective. London: Falmer, 1994. p. 209-220.

RESTIVO, S.; BAUCHSPIES, W. K. O Arbítrio da Matemática: mentes, moral e números. Tradução Jussara de Loiola Araújo. **Bolema**, Rio Claro, n.16, p. 102-124, 2001. Título original: The Will to Mathematics: minds, morals and numbers.

RON, J. M. S. Los Grundlagen der Geometrie de Hilbert. In: HILBERT, D. **Fundamentos de la Geometria**. Madrid: CSIC, 1991.

SACKS, O. W. **Um Antropólogo em Marte**: sete histórias paradoxais. Tradução Bernardo Carvalho. São Paulo: Campanhia das Letras, 1985. Título original: An anthropogist on Mars: 7 paradoxical tales.

SPENGLER, O. **A Decadência do Ocidente**: Esboço de uma morfologia da História Universal. Tradução Herbert Caro. Rio de Janeiro: Zahar, 1964. Título original: Der Untergang des Abendalandes – Gekürzte Ausgabe.

STILLWELL, J. **Mathematics and its History**. New York: Springer-Verlaq, 1989.

STRUIK, D. J. **Lectures on Analytic and Projective Geometry**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1953.

_______ . **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.

_______ . Por que Estudar História da Matemática? In: GAMA, R. (Org.) **História da Técnica**

e da Tecnologia. São Paulo: Ed. USP, 1985. p. 191-215.

VEBLEN, O.; YOUNG, J. W. **Projective Geometry**. Boston: Ginn and Company, 1910. v.1.

VILUMBRALES, L. U. Geometría proyectiva plana. **Un paseo por la Geometria.** País Vasco. Departamento de Matemáticas. p. 91-114, curso 2001/2002.

WÖLFFLIN, H. **Conceitos Fundamentais da História da Arte:** O problema da evolução dos estilos na arte mais recente. Tradução João Azenha Jr.. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000. (Coleção a). Título original: Kunstgeschichtliche Grundbegriffe – Das problem der stilentwicklung in der neueren kunst.

WOOD, C. S. Introdução. In: PANOFSKY, E. **A Perspectiva como Forma Simbólica**. Lisboa: Edições 70, 1999, p. 9-28.

APÊNDICE

[1][25] Exemplo de uma das maneiras universais do S.G.D.L. tocante a prática da perspectiva sem empregar nenhum terceiro ponto, de distância nem de outra natureza, que esteja fora do campo de trabalho

Como "Exemplo de uma das maneiras universais do S.G.D.L. tocante a prática da perspectiva sem empregar nenhum terceiro ponto, de distância nem de outra natureza, que esteja fora do campo de trabalho", apresenta-se na língua francesa, também as medidas estão empregadas no mesmo sentido que na França.

As palavras PERSPECTIVA, APARÊNCIA, REPRESENTAÇÃO, e RETRATO são cada uma nome de uma mesma coisa.

As palavras EXTREMIDADE, BORDAS, LADOS, e CONTORNO de uma figura são também cada uma denominações de uma mesma coisa.

E as palavras, REPRESENTAR, RETRATAR, ACHAR A APARÊNCIA, FAZER ou PÔR EM PERSPECTIVA são empregadas com a mesma significação tanto uma quanto outra.

As palavras AO NÍVEL, DO NÍVEL, PARALELA AO HORIZONTE são significantes também cada uma de uma mesma coisa.

As palavras A PRUMO, PERPENDICULAR AO HORIZONTE têm significantes também cada uma de uma mesma coisa.

As palavras VERTICALMENTE, NO ESQUADRO, EM ÂNGULOS RETOS, e PERPENDICULARMENTE têm significantes novamente, em geral, tanto de uma coisa quanto de outra.

O que se propõe a retratar é chamado OBJETO[26].

O que em alguns momentos é o PLANO GEOMETRAL, noutros PLANO DE TERRA, noutros A PLANTA DO OBJETO, tem o nome de POSIÇÃO DO OBJETO.

O que em alguns momentos é A TRANSPARÊNCIA, noutros A SECÇÃO, noutros recebem outro nome, isto é, a superfície da coisa na qual faz-se uma perspectiva tem a denominação de QUADRO, tanto antes como depois do trabalho concluído.

A posição do objeto e o quadro, os quais, aqui, são discutidos, estão em superfícies planas, o que quer dizer que, somente aqui, está expresso que dos quadros planos, e a partir das posições dos objetos planos, os quais, posições e quadros, são assim considerados com duas faces cada um.

[25] Os números entre colchetes indicam o número da página do texto de Desargues (1636). Todas as notas foram incluídas por nós, a fim de facilitar a compreensão do texto. Além disso, resguardamos os destaques tipográficos feitos no texto original em francês, apresentado na obra de Field; Gray (1984), o qual utilizamos para realização desta tradução.
[26] *SVIET* no texto original, que, enquanto substantivo masculino, pode ser traduzido com as seguintes acepções: *assunto, tema, motivo, objeto*. Optamos por objeto.

A face do quadro que se encontra exposta ao olho tem o nome de a FRENTE DO QUADRO, tal como a outra face àquela que não está exposta ao olho, tem o nome de ATRÁS DO QUADRO.

Quando a posição do objeto é estendida ao Nível, essas suas faces que se encontram voltadas na direção do Céu, tem o nome de ACIMA DA POSIÇÃO DO OBJETO, pois na outra face da mesma posição que se encontra voltada **[2]** para o lado da terra tem o nome de ABAIXO DA POSIÇÃO DO OBJETO.

A extensão ou a superfície achatada[27] e indeterminada, na qual está representada a posição do objeto tem o nome de PLANO DA POSIÇÃO DO OBJETO.

A extensão achatada e indeterminada também, dentro daquele que é o quadro que tem o nome de PLANO DO QUADRO.

Todas as linhas são entendidas retas.

Em uma só e mesma estampa[28], e para o mesmo e único exemplo, há três figuras separadas e cotadas com Caracteres de mesmo nome, mas de forma diferente em cada uma dessas figuras.

Os Caracteres de encaminhamento são da mesma forma na impressão, que dessas três figuras nas quais se relacionam o discurso em qualquer parte.

Quando na impressão há para encaminhar mais de uma vez no objeto dos Caracteres de mesmo nome, mas de forma diferente entre eles, isso significa que o discurso nessa parte, sua localização, igualmente em cada uma das figuras ou em semelhantes Caracteres, estão estampados.

Quando as duas extremidades de uma linha em uma dessas figuras estão cotadas de Caracteres de mesmo nome que as duas extremidades também de uma linha em uma outra dessas figuras, essas duas linhas assim cotadas têm uma correspondência entre elas, e estão uma em sua figura e em seu espaço, a mesma coisa que na outra em sua figura e em seu espaço.

Nessa Arte é suposto que apenas um único olho vê de uma mesma olhada o objeto com sua posição e o quadro, dispostos um em relação ao outro, ou seja: não importa se é para Emissão de raios visuais, ou para a recepção dos espaços emanados do objeto, nem de que parte, ou qual dos dois ele vê em frente ou atrás do outro, desde que ele os veja todos os dois facilmente de uma mesma olhada.

É ainda suposto que aquele que pratica essa Arte entenda o modo e o uso de escala ao fazer uma posição do objeto com sua elevação; e dentro desse exemplo é suposto que ele entenda que essa coisa é que se chama comumente de perspectiva.

E que por essa maneira aqui de praticar tenha a posição e as elevações necessárias de um objeto com os intervalos convenientes traçados em tal grandeza, ou seja, ou somente sua rota e suas medidas escritas em um orçamento, e a disposição dos planos da posição do objeto e do quadro cravado; com a régua e o compasso comuns, se encontra e faz no primeiro corte facilmente o traço da perspectiva de um tal objeto, no quadro de tal grandeza que ele possa

[27] No original *surface plate*. Optamos por superfície achatada uma vez que superfície plana seria, então, *surface plane*.
[28] No original *stampe*, no sentido de figura, ilustração, imagem.

ser, sem ajuda alguma de ponto que esteja fora de sua extensão em tal distância e de tal modo, que o objeto esteja em sua posição e o quadro esteja disposto entre eles e em frente ao olho.

Das regras gerais e seus experimentos em outra linguagem, envolvendo diversas maneiras universais da prática, sua aplicação em número de casos e de figuras não semelhantes, e demonstrando-se com duas únicas proposições manifestadas e **[3]** familiares aos que estejam dispostos a conhecer.

Mas, quanto ao presente, e para os que sabem somente executar as antigas regras da prática da arte, este exemplo simples em linguagem, e de objeto comum a essas regras antigas, é de pura prática.

Onde pelas circunstâncias observadas se começa por três espaços de preparação.

Uma que olha o objeto e o faz no plano de sua posição, ou bem outra parte.

Os dois outros concernentes a aparência do objeto, e são feitos comumente no mesmo quadro.

O objeto nesse exemplo é uma gaiola construída simplesmente de linhas, quadrados e de igual grossura até certa parte depois da qual ela resulta em pontos reunidos, da maneira de um telhado coberto de bandeiras, assim em razão de campo, elevado sobre a terra a prumo até o teto, aprofundado na obra mais baixo que o nível do terreno em torno, com as medidas de qualquer linhas em pé e inclinadas em diversas direções fora e nessa gaiola nessa terra, sobre a terra, e suspensa fora da terra, qualquer uma paralela ao quadro, o qual pendura a prumo.

Da altura da Estampa até a mão direita[29]

A figura quadrada, *m, l, i, k*, a qual se encontra estendida, está na posição dessa gaiola, cuja posição está aqui posta no nível.

A linha *x* está na altura das elevações, dos pés direitos, ou dos pilares da mesma caixa, entendida posta a prumo até sua posição um para cada um dos quatro cantos do quadrado, *m, l, i, k*.

A linha *d* é a largura das três unidades[30] na escala, na qual estão medidas as bordas da posição dessa gaiola e as suas elevações, aqui nomeadas ESCALA DO OBJETO.

A linha *ts* está na medida da altura perpendicular ao olho sobre o plano da posição do objeto, no qual a altura do olho encontra o plano no ponto *t*.

Pelo mesmo plano dessa posição do objeto, a saber, na direção na qual está entendido que o plano do quadro o encontra, é traçada uma linha *ab*, chamada LINHA DO PLANO DO QUADRO, e que aqui, de fato, ou o olho vê o quadro adiante do objeto, ou bem o olho vê o objeto atrás do quadro.

A linha *tc* é a distância perpendicular do pé do olho ao quadro, isto é, a distância perpendicular do olho ao mesmo quadro.

[29] Aqui, Desargues faz referência ao desenho situado à direita da prancha que acompanha o seu texto.
[30] No original *thoises*. Conforme tradução do francês para o inglês feita por FIELD; GRAY (1987), *units*.

Por um dos pontos, *a* ou *b*, dessa linha *ab*, como aqui, pelo ponto *a* nesse mesmo plano, e da parte da posição do objeto, é traçada uma linha indeterminada *ag*, paralela à linha *tc*.

Em seguida, em qualquer um dos pontos notáveis na posição do objeto, aqui, nos quatro cantos, e do meio de um dos cortes do quadrado *m*, *l*, *i*, *k*, são traçadas até essa linha *ag*, das linhas paralelas à linha *ab*, como as linhas, *mr*, *lh*, *kn*, e *IS*, e *ig*.

[4] Pelo outro ponto *b*, da mesma linha *ab*, é traçada a linha, ainda indeterminada *bq*, paralela às linhas *ag*, *tc*.

A largura de cada uma dessas linhas, ou parte notável dessas, é medida com a escala do objeto *d*, e sua medida é retida na memória, ou no memorial é escrito sobre ela, ou no orçamento.

Assim, os números[31] 15 escritos junto da borda do quadrado *m*, *l*, *i*, *k*, indicam que cada um dos lados dessa figura tem quinze pés de comprimento.

E os números 1, 17 escritos junto da linha das elevações *x*, indicam que cada uma das elevações do objeto tem dezoito pés de comprimento, a saber, dezessete pés fora da terra, e um pé dentro da terra.

Assim, o número 12 escrito próximo da linha *ab*, denota que nesse exemplo, essa linha tem doze pés de comprimento.

Assim, o número 17 denota que a região da linha *ag*, contida entre as linhas *rm* e *ab*, se encontra tem dezessete pés de largura, e isto significa, ou de acordo com esse modo de medir, aqui diante do objeto está atrás do quadro a dezessete pés longe dele, o que se pode dizer ainda que diante do quadro se encontra em frente do objeto a dezessete pés longe dele.

Igualmente, o número 4 ½ da linha *st*, mostra que o olho está elevado quatro pés e meio de altura perpendicular acima do plano da posição do objeto.

Do mesmo modo, o número 24 significa que aqui o pé do olho, ou o próprio olho, está afastado perpendicularmente a vinte e quatro pés longe do quadro a frente dele.

Do mesmo modo, o número 13 ½ denota que a linha *lh* tem treze pés e meio de comprimento.

Do mesmo modo, um dos números 9 denota que a parte da linha *ag*, contida entre as linhas *rm*, *lh*, tem nove pés de comprimento.

Mesmo assim, os números 3, ainda como cada um dos outros semelhantes.

E eis uma das três preparações que examina o objeto, concluída.

Agora, a Estampa inteira está como uma prancha de madeira, uma muralha, ou semelhante coisa acomodada e preparada para fazer um quadro de tal extensão que ele possa ser, entendido pendurado a prumo sobre o plano da posição do objeto, cujo plano ele toca como na linha *ab*, da qual o quadro suposto que se propõe para representar essa gaiola através de uma figura em perspectiva, de grandeza proporcional aquela do quadro, sem auxílio quanto aquilo de cada um dos pontos que esteja fora dele, nem fazer primeiramente alhures uma

[31] No texto de Desargues (1636) os números são seguidos por um ponto como, por exemplo, *15.*

outra perspectiva de largura igual a da linha *ab*, para depois a transferir para dentro do quadro proporcionalmente, ou por meio de treliça ou de pequeno pé[32].

Da parte inferior da Estampa

Para essa finalidade é levada uma linha *AB*, no nível ao longo, até que seja possível da parte inferior do quadro correspondente à linha *ab*.

De fato, das extremidades *A* e *B*, de uma mesma parte dessa linha *AB*, são traçadas **[5]** duas outras partes, *AF* e *BE*, paralelas entre elas e, comumente como aqui, perpendiculares a essa linha *AB*.

Além disso, essa linha *AB*, está dividida em tantas partes iguais quantas a linha *ab*, contém de pés.

Aqui, a linha *ab*, contém doze pés de comprimento e, portanto, a linha *AB*, está dividida em doze partes iguais marcadas acima dela, que são uma escala do número de pés, uma das quais, nesse caso, a sétima, a metade, ou seus quartos estão subdivididos em suas polegadas e linhas, se necessárias.

Além disso, está considerada a altura do olho acima do plano da posição do objeto, aquela altura do olho está aqui a quatro pés e meio, e essa medida de quatro pés e meio é então tomada dos pés da escala também feita na linha *AB*, e levada sobre cada uma das duas linhas, *AF* e *BE*, a saber, de *A* a *F*, e de *B* até *E*, em seguida, é conduzida a linha *FE* paralela pelo meio até a linha *AB*.

Ainda em relação a essa *FE*, é marcado o ponto oposto do qual se entende que o olho está abaixo de sua distância, pontuada em frente ao quadro, como aqui, o ponto *G*, oposto do qual se entende que o olho está vinte e quatro pés longe em ângulo reto ao quadrado.

Pelo ponto *G*, na seqüência, é traçada a linha *GC*, paralela a cada uma das linhas *AF* e *BE*, a saber, aqui, em ângulo reto à linha *AB*, de forma que o espaço *AFEB*, se encontra dividido, por acaso, em dois outros espaços, cujas bordas opostas são em cada uma, das linhas paralelas entre elas, isto é, nesse caso, os espaços *GCAF* e *GCBE*.

Então, dentro de cada espaço *ABEF*, ou melhor, dentro de um ou dentro de outro dos dois menores espaços, *GCAF* e *GCBE*, como aqui, o espaço *GCAF*, são conduzidas as duas linhas *AG* e *CF*.

Pelo ponto que essas duas linhas, *AG* e *CF*, encontram-se, é levada a linha *HD*, paralela a linha *AB*, na qual a linha *HD* encontra a linha *BE*, no ponto *D*, a linha *GC*, no ponto *T*, e a linha *AF*, no ponto *H*.

Depois, de um ou de outro dos pontos, *H* ou *T*, é conduzida uma linha dentro do mesmo espaço *GCAF*, até um dos pontos, *G* ou *F*, que lhe é oposto diagonalmente.

Se essa linha é conduzida como na parte inferior da Estampa do ponto *G*, a partir dele até o ponto *H*, essa é a linha *GH*.

[32] No original, *(...) au moien du treillis ou du petit pied*. Desargues faz referência a um dos muitos instrumentos utilizados na elaboração do desenho e ao uso de uma espécie de escalímetro.

E, se essa linha é conduzida, como na altura da Estampa até a mão esquerda, do ponto *f*, a partir dele até o ponto *t*, essa é a linha *f t*.

E, suposto que pelos pontos *f* e *t* será a mesma linha *f t*, então, pelo ponto do qual essa linha *f t* encontra a linha *ag*, é traçada a linha *nq*, paralela a linha *ab*.

Depois, por um ponto qualquer dessa linha *nq*, encontra a linha *cg*, aqui, o ponto *o*, e, pelo ponto *f*, é traçada a linha *f o*.

[6] Em seguida, pelo ponto que essa linha *f o* encontra a linha *ag*, é traçada a linha *su*, paralela a linha *ab*.

E semelhante operação é repetida quantas vezes seja necessária.

Agora, admitido que se tenha praticado essa operação por meio das linhas *CF* e *AF*, as linhas *NQ* e *SU*, estarão sempre na mesma região do quadro que elas poderiam estar antes de serem traçadas por meio das linhas *AG* e *CG*.

Finalmente, a parte da linha *ab*, *AB*, a que ela se encontra cotada no espaço no qual se fez uma semelhante operação, como aqui, a parte *ac*, *AC*, é dividida em tantas partes iguais quantas houverem na distância do olho ao quadro.

Aqui, a distância do olho ao quadro é de vinte e quatro pés de comprimento, portanto, essa parte *ac*, *AC*, da linha *ab*, *AB*, está dividida em vinte e quatro partes iguais marcadas sob ela, que são as quantidades de pés, uma daquelas em sua metade ou em seu quarto, pode, se necessário, ser novamente subdividida em polegadas e linhas.

Então, é concluída uma das duas preparações que concernente a perspectiva empreendida, cuja preparação forma uma figura aqui nomeada ESCALA DOS AFASTAMENTOS, ainda que a chamem da ótica ou de outros nomes.

Ademais, de tal ponto que seja cômodo para a obra, na linha *AB*, *ab*, como aqui, do ponto *G*, *g*, são traçadas a partir das linhas dos pontos da primeira divisão em doze pés iguais da linha inteira *AB*, *ab*.

Nesse exemplo, essas linhas são levadas do ponto *G*, *g*, somente aos pontos dessa divisão, que estão na parte dessa *AB*, *ab*, que se encontra na cota do espaço *GCBF*, *gcbf*, a qual é, aqui, a parte *BC*, *bc*, desde que ele seja suficiente para o uso do menor número. E da mesma maneira, do ponto *G*, *g*, são traçadas as linhas aos pontos da subdivisão de uma desses doze pés, aqui, a sétima, a metade ou seus quartos em suas polegadas.

Então, está concluída a outra das duas preparações concernentes a perspectiva empreendida, sendo que essa preparação forma uma figura em triângulo, *GCB*, *gcb*, aqui nomeada ESCALA DAS MEDIDAS, ainda que digam Geométrica ou de outro modo, e que dessa maneira de praticar a perspectiva, é para o trabalhador uma ferramenta usada do mesmo modo que o compasso de proporção.

Essas duas escalas de afastamento e das medidas para a perspectiva podem, se necessário, ser feitas em outro lugar, e dispostas de outro modo no quadro, mesmo em número quanto inumerável, de diferentes maneiras as quais todas para mesma coisa.

E, por meio da proporção ou da correspondência, que há de uma dessas duas escalas para outra, faz-se o que se deseja em perspectiva.

Porque, com a escala dos afastamentos, encontra-se os lugares no quadro das aparências de cada ponto notável do plano da posição do objeto, e do próprio objeto.

E, com a escala das medidas, encontra-se as diversas medidas de cada uma das **[7]** linhas do objeto que estão paralelas ao quadro, de acordo com os diversos afastamentos em relação ao mesmo quadro, e o ângulo sob o qual eles são vistos.

Agora, as linhas *AB*, *ab* e *ab*, consideradas como uma única e mesma linha, tem como resultado dessas preparações a aparência da linha *ag*, que é a linha *AG*, *ag*, e a aparência da linha *bg*[33], que é a linha *BG*, *bg*.

Ademais, ocorre que a linha *AG*, *ag*, encontra-se retirada do lado da borda *G*, *g*, primeiramente em sua metade, depois em sua terça, depois em sua quarta parte, e assim por diante na quantidade de partes quantas forem as vezes que se repete a operação com a qual se faz a escala dos afastamentos.

Depois, de acordo com o ponto do primeiro desses fatiamentos da linha *AG*, *ag*, que é o ponto ao qual a linha *HD*, *hd*, encontra-a, é a aparência de um ponto na linha *ag*, recuada 24 pés atrás do quadro, ou seja, tão longe do quadro atrás dele quanto o olho está afastado do mesmo quadro a frente dele.

E que, o ponto do segundo desses fatiamentos da linha *AG*, *ag*, que é o no qual na linha *NQ*, *nq*, a encontra, é a aparência de um outro ponto na linha *ag*, recuada 48 pés atrás do quadro, isto é, duas vezes tão longe do quadro atrás dele quanto o olho está afastado do mesmo quadro a frente dele.

E que, o ponto do terceiro desses fatiamentos da linha *AG*, *ag*, que é o no qual a linha, *SU*, *su*, encontra-a, é a aparência de um outro ponto da linha *ag*, recuada 72 pés atrás do quadro, isto é, três vezes tão longe do quadro atrás dele quanto o olho está afastado do mesmo quadro a frente dele.

E, semelhantemente, das outras notáveis linhas quando se continuam mais vezes a operação que faz a escala dos afastamentos.

Além disso, acontece que as mesmas linhas da escala das medidas que a partir do ponto *G*, *g*, dos pontos da primeira divisão em 12 pés da linha *AB*, *ab*, marcando e dividindo cinco desses 12 pés na parte *BC*, *bc*, dessa linha *AB*, *ab*, as mesmas linhas marcando e dividindo as partes quando elas encontram as linhas *HD*, *hd*, *NQ*, *nq*, *SU*, *su*, e as suas paralelas cada uma das mesmas em cinco pés iguais entre eles, que são tanto das escalas diferentes para as diversas medidas das aparências das linhas do objeto, paralelas ao quadro, e situadas a diversos afastamentos em relação ao mesmo quadro.

Ocorre, finalmente, dessas preparações, que a linha *AB*, *ab* contém 12 pés de comprimento, a linha *HD*, *hd* com 24 pés, a linha *NQ*, *nq*, 36 pés, e a linha *SU*, *su*, 48 pés, ou seja, cada uma delas que a escala das medidas marca na parte que ela a encontra.

Daquelas coisas é evidente que a linha *HD* é a aparência de uma linha do plano da posição do objeto, paralela a linha *ab*, e recuada 24 pés **[8]** atrás do quadro. Mais, o ponto *m*

[33] No texto de Desargues (1636) lê-se *bq*.

que está recuado somente 17 pés atrás do mesmo quadro, pois o ponto *m* está em uma linha, como a *rm*, paralela à linha *ab*, e recuada 7 pés menos do quadro atrás dele, do que a que a linha representada pela linha *HD*.

A aparência desse ponto *m* é, pois, achada desse modo.

Primeiramente, com a escala dos afastamentos é encontrado um ponto na linha *AG*, que seja a aparência de um ponto na linha *ag*, recuada 17 pés de distância do quadro, isto é, é primeiramente encontrada a aparência do ponto *r* e, para o fazer, do ponto *f* é traçada uma linha ao ponto que marca a 17ª [34], e a separa da 18ª das 24 partes iguais da linha *AC*, e o ponto no qual essa linha assim traçada encontra a linha *AG*, aqui, o ponto *R*, é a aparência de um ponto na linha *ag*, recuada 17 pés longe do quadro, isto é, que o ponto *R*, é a aparência do ponto *r*, pois para o ponto *R*, é traçada a linha *RM*, paralela a linha *AB*, cuja linha *RM*, é a aparência da linha *rm*, na qual está o ponto *m*, portanto, a aparência do ponto *m*, está nessa linha *RM*.

E, desde que o ponto *m* está na linha *rm*, à direita da linha *ag*, um pé e meio longe do ponto *r*, a linha *RM*, alongada até atravessar a escala das medidas, então, com um compasso comum é tomado o comprimento de um pé e meio, dessa que a escala das medidas marca nessa linha *RM*, e com o compasso aberto nessa medida, uma de suas aberturas é ajustada no ponto *R*, e sua outra abertura é torneada à direita da linha *AG*, e arrastada sobre a mesma linha *RM*, e como no ponto *M*, a qual é a aparência do ponto *m*.

A aparência do ponto *k* é encontrada da maneira que segue.

Considerada a linha *ar* a 17 pés longe, a linha *rh* a 9, e a linha *hn* a 3; adicionando esses três números 17, 9, e 3, sua soma é 29, de modo que, o ponto *k*, encontra-se em uma linha paralela à linha *ab*, e recuada 29 pés longe do quadro atrás dela, isto é, está somente a cinco pés a frente longe da que está recuada dessa que a linha *HD*, representa.

Neste caso, primeiramente com a escala dos afastamentos é encontrada a linha *AG*, a aparência de um ponto na linha *ag*, recuada 29 pés longe do quadro, isto é, somente cinco pés de distância longe está recuada a linha que a linha *HD*, representa; E para a fazer, do ponto *G*, é traçada uma linha do ponto que marca a 5ª e a divide com a 6ª das 24 partes iguais da linha *AC*. Para o ponto no qual a linha assim traçada encontra a linha *HD*, é traçada uma outra linha ao ponto *F*, e o ponto no qual essa última linha encontra a linha *AG*, é a aparência do ponto *n*, pois, para essa aparência do *n*, é traçada uma linha paralela a linha *AB*, na qual é a aparência da linha *nk*, na qual é o ponto *k*, portanto a aparência do ponto *k*, está nessa última linha.

E desde que o ponto *k* está na linha *nk*, à esquerda da linha *ag*, sete pés e meio longe do ponto *n*, se alongarmos a última linha traçada no quadro **[9]** paralela à linha *AB*, ou seja, nessa que é a aparência da linha *kn*, afim de que ela atravesse a escala das medidas, então com um compasso comum são tomadas 7 pés e meio dessa que a escala das medidas marca, e com o compasso aberto nessa medida, uma dessas aberturas é ajustada na aparência do ponto *n*, e sua outra abertura é torneada à esquerda da linha *AG*, e arrastada sobre a mesma última linha traçada e, como no ponto *k*, por esse meio é a aparência do ponto *k*.

Se se quisesse ver na linha *AG* a aparência de um ponto na linha *ag*, recuada 53 pés longe atrás do quadro, ou seja, somente 5 pés de distância longe e recuada da linha que representa a linha *NQ*. Nesse caso, teríamos a mesma linha do ponto *G*, no ponto que marca a

[34] No texto de Desargues (1636) lê-se *17'*.

5ª e a divide com a 6ª das 24 partes iguais da linha *AC*, então, do ponto no qual essa linha também traçada encontra a linha *NQ*, se leva uma linha ao ponto *F*, a qual encontre a linha *AG*, em um ponto no qual é a aparência de um ponto na linha *ag*, recuada 5 pés adiante longe do quadro que somente está afastado da linha, que a linha *NQ* representa, e assim nas semelhantes.

Os pontos *L* e *I*, aparências dos pontos *l* e *i*, são encontrados da mesma maneira.

Depois, são traçadas, convenientemente, de ponto em ponto as linhas *ML*, *MK*, *KI* e *LI*, que são as aparências de cada uma de suas correspondentes das cotas *ml*, *mk*, *ki* e *li*, do quadrado *m*, *l*, *i*, *k*.

Agora, para encontrar a aparência de um ponto elevado 17 pés a prumo acima do ponto *m*. Para o ponto *M* é traçada da parte da linha *FE*, uma linha *Mst*, perpendicular a linha *AB* e, nessa linha *Mst*, é feita igual a 17 pés que a escala das medidas marca na linha *MR*, assim a linha *Mst* é a aparência da elevação do objeto alto a 17 pés a prumo sobre o ponto *m*.

As linhas *Lff*, *Kfr* e *Isp*, aparências das elevações do objeto sobre os outros pontos *l*, *k*, *i*, de sua posição quadrada *m*, *l*, *i*, *k* e, afastadas também cada uma a 17 pés, são encontradas de mesmo modo que a aparência *Mst*, bem entendido que os 17 pés dos quais cada uma dessas aparências está longe, são delas que a escala das medidas marca na linha traçada por sua extremidade de baixo paralela à linha *AB*.

Para ter as aparências dos abaixamentos do objeto um pé sob os mesmos pontos *m*, *l*, *i*, *k*, e para as mesmas linhas das elevações, alongue-se para baixo as aparências dessas elevações cada um pé de comprimento de sua medida própria e particular; e, para os pontos abaixo do pé, do qual essas aparências são alongadas, se mesmo as linhas convenientes daquelas marca-se de fora da obra na posição do objeto, não impede de ser visto como o mostra a figura de baixo da Estampa.

Além disso, a linha *Z*, longe a 13 pés e um quarto, sendo a medida a prumo dessa, cujo o ponto na qual é resultado do telhado, é elevado **[10]** acima do ponto do meio da posição do objeto mais alto que cada uma de suas partes laterais, as aparências dessas arestas são encontradas do mesmo modo.

Assim sendo, pelo método descrito acima, encontra-se o ponto *Æ*, aparência do ponto no qual resultam as arestas do ápice do objeto, então, de cada um dos pontos altos das aparências das elevações das partes laterais, aqui, dos pontos *st*, *ff*, *fr* e *sp*, são traçadas a esse ponto *Æ*, as linhas *stÆ*, *ffÆ*, *frÆ* e *spÆ*, as quais são as aparências de cada uma de sua correspondente das linhas dessas arestas.

As linhas SV, Z, W, e RX, são as medidas das alturas de qualquer pessoa em pé em diversos lugares do plano de posição do objeto.

A linha *X* é a medida da altura de uma pessoa em pé sobre os fundos da cavidade da gaiola, a qual o fundo está suposto no nível como o de uma bacia da fonte.

A linha *?* é a aparência de uma linha de 12 pés de comprimento, que segue de uma extremidade sobre o plano de posição do objeto na linha alongada *hl*, 4 pés 9 polegadas longe do ponto *l*, e apoiado da altura da borda ao montante que a linha *Lff*, representa.

A linha é a aparência de uma linha 5 pés de comprimento, suspendida ou pendurada a prumo do meio de cima de uma das laterais do objeto.

Nessas aparências, essas de cada um dos membros dos ornamentos da arquitetura, nessas da queda das sombras e, geralmente, as aparências de toda coisa tal que possa ser da natureza a representar no retrato, certamente os intervalos convenientes conhecidos são assim encontrados no quadro achatado de algum modo e enviesado que esteja disposto, pendente a prumo em pratos fundos, ou inclinados de um ou de outro lado diante do olho, sendo o ponto que se chama, habitualmente, ponto de vista, seja quando se encontra dentro do quadro, seja quando ele esteja fora; mas, em cada uma dessas diferentes circunstâncias, há em matéria de número de exemplos diferentes como de diversas figuras: outra que a inteligência dessa maneira de fazer os quadros achatados conduz facilmente ao meio de se fazer os quadros em qualquer outro espaço de superfície, e de fios atachados nos pontos *F* e *G*, relevante ao trabalho de muitas das linhas alteradas.

Existe regra também do lugar da cor forte e da fraca cuja demonstração é disputada em parte pela Geometria, em parte pela Física, e ainda não se encontra na França explicada em alguma leitura pública.

Para os diversos encontros nessa arte, há os meios particulares de os expedir cada um facilmente a sua maneira, desse exemplo e de outro modo, ou bem com instrumentos fundados em demonstração Geométrica, das quais há diversas maneiras.

Uns para copiar exatamente todo o objeto achatado em menor, igual, ou maior, e pôr o mesmo em perspectiva com suas elevações, de qualquer modo, enviesado e distante que o seja, também prontamente será copiado.

Outros, para desenhar exatamente o objeto, enquanto o vê, em uma figura menor, igual, ou maior, e semelhantemente posta naquela que viria **[11]** a ser no mesmo plano no qual o instrumento está aplicado, cujos instrumentos, ou um deles, tenha sido feito em Roma um tratado dois anos aproximadamente depois do privilégio dos presentes selados na França, sendo que nesse tratado de Roma não contém o meio de ter a figura da aparência, igual e disposta como nessa que se fez no mesmo plano no qual o instrumento está aplicado.

Existem, igualmente, essas maneiras universais e demonstradas, tocante a prática do traço pelo corte das pedras na Arquitetura, com as provas para habilitar o que se teve procedido bem exatamente na execução[35].

Existem, além disso, as maneiras universais também demonstradas pelo traço dos quadrantes solares com a régua, o compasso, o prumo e esquadros comuns, em todas as superfícies achatadas geralmente ou na posição do mundo é convenientemente aplicado, qualquer que seja o sentido ou viés que elas estejam estendidas[36].

8*****************************8888****************************8

[35] Desargues refere-se a sua obra *Brouillon proiet d´exemple d'une maniere universelle du S. G. D. L. touchant du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture: Et de l´esclaircissements d´une maniere de reduire au petit-pied en Perspective comme en Geometral, & de tracer tous Quadrans plats d´heures egales au Soleil*, Paris, 1640.

[36] Aqui, Desargues refere-se a sua obra *Brouillon proiet du S. G. D. L. touchant une maniere universelle de poser le style & tracer les lignes d'un Quadran aux rayons du Soleil, en quelqu´oncque endret possible, avec la Reigle, le Compas l'equiere & le plomb*, Paris, 1640.

Nesse resto de espaço, contemplaremos algumas proposições as quais podem ser enunciadas de outro modo por diversas matérias, mais elas estão acomodadas aqui para a perspectiva, e a demonstração é assaz inteligível sem figura, mais que todas as linhas e são ainda entendidas retas, e os quadros sempre achatados. É verdade que no fim é uma multidão[37] de grandes proposições abundantes no local.

Tenha imaginado que no centro imóvel do olho passe uma linha indeterminada e móvel alhures de seu comprimento em todos os sentidos, uma tal linha é aqui chamada LINHA DO OLHO, a qual em caso de necessidade é traçada paralela à tal outra linha que seja.

Quando o objeto é um ponto, e dos pontos do objeto e do olho, são traçadas até o quadro linhas paralelas entre elas, a aparência do objeto está na linha traçada pelos pontos nos quais essas paralelas encontram o quadro, a partir dessas paralelas, e nessa linha assim traçada no quadro, estão em um mesmo plano entre elas.

Quando o objeto está nas linhas, elas são, ou bem paralelas, ou bem inclinadas entre elas.

Quando as linhas do objeto são paralelas entre elas, a linha do olho traçada paralela a elas é paralela ao quadro, as aparências dessas linhas do objeto são linhas paralelas entre elas, entre as linhas objeto, e entre a linha do olho, visto que cada uma dessas linhas do objeto está em um mesmo plano com essa linha do olho, na qual todos os planos se entre cortam assim que em seu eixo comum, e que todos esses planos são cortados por um outro mesmo plano do quadro.

[12] Quando as linhas dos objetos são paralelas entre elas e quando a linha do olho traçada paralela àquelas não paralelas ao quadro; as aparências dessas linhas do objeto, são das linhas que tendem todas ao ponto no qual essa linha do olho encontra o quadro desde que cada uma dessas linhas do objeto esteja em um mesmo plano com essa linha do olho, no qual todos esses planos se entre cortam assim que a sua posição comum, e que todos esses planos são cortados de um outro mesmo plano do quadro.

Quando as linhas do objeto estão inclinadas entre elas, e tendem todas para um ponto, a linha do olho traçada nesse ponto é, ou bem paralela, ou bem não paralela ao quadro, mas sempre cada uma dessas linhas está em um mesmo plano com essa linha do olho, na qual todos os planos se entre cortam assim que em seu eixo comum.

Quando as linhas do objeto são inclinadas entre elas tendem todas para um ponto, o qual tenha a mesma linha do olho paralela ao quadro, as aparências dessas linhas do objeto são linhas paralelas entre elas, e à linha do olho por causa de cada uma dessas linhas objeto está em um mesmo plano com essa linha do olho, na qual todos esses planos se entre cortam assim que em seu eixo comum, e que todos esses planos são cortados por um outro mesmo plano do quadro.

Quando essas linhas do objeto são inclinadas entre elas e tendem todas para um ponto, no qual tenha a mesma linha do olho não paralela ao quadro, as aparências dessas linhas do objeto são as linhas que tendem todas para o ponto no qual essa linha do olho encontra o quadro, desde que cada uma dessas linhas do objeto esteja em um mesmo plano com essa linha o olho, na qual todos esses planos se entre cortam assim que em seu eixo comum, e que todos esses planos são cortados por um outro mesmo plano do quadro.

[37] No original (1636), *fourmiliere*, formigueiro, que, aqui, optamos pelo seu sentido figurado.

A proposição que segue não se divide tão brevemente quanto essas que a precede.

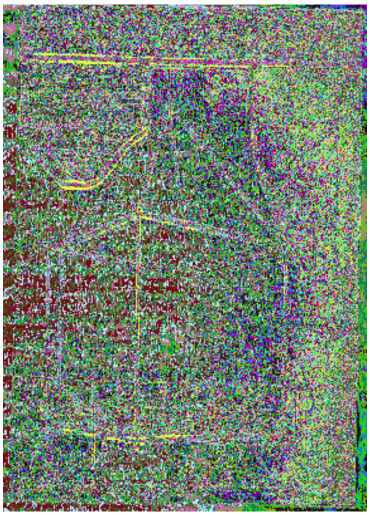
Tenham como retrato um corte do cone plano, e leve duas linhas, das quais as aparências serão as posições da figura que a representará.

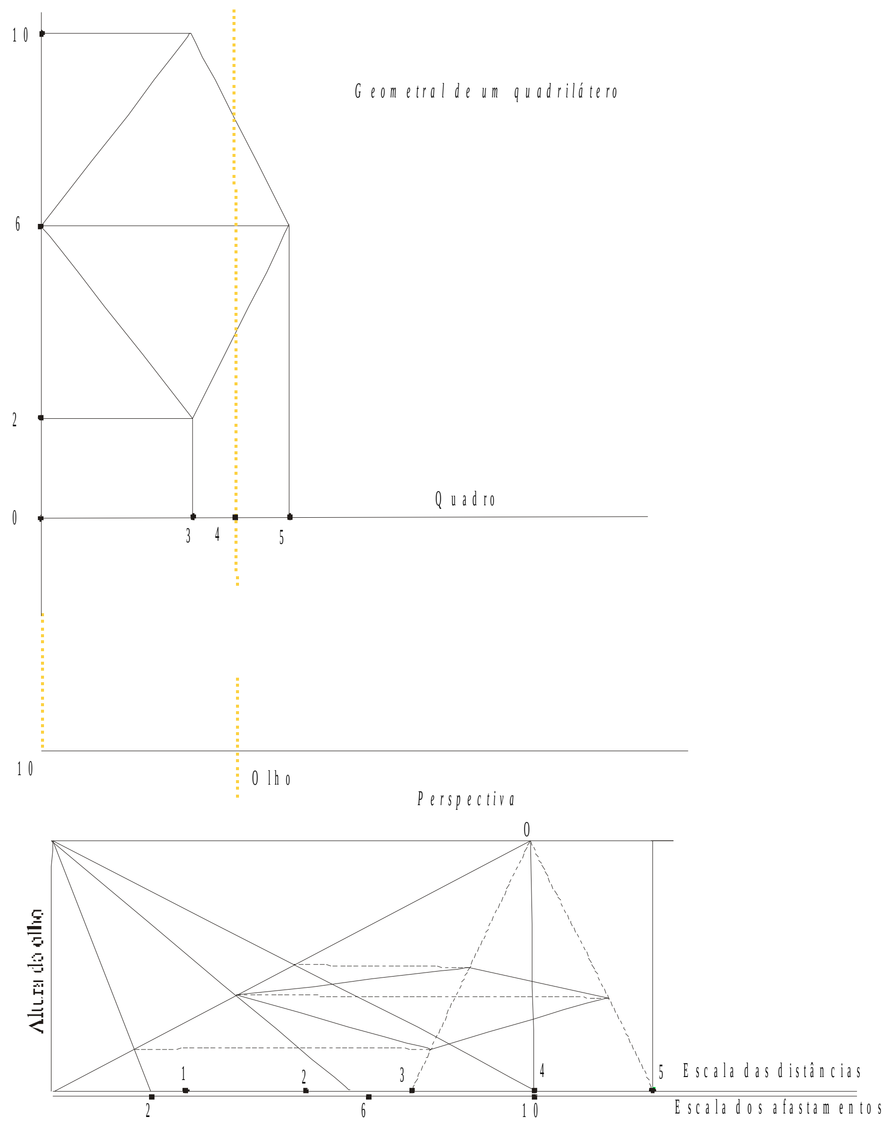
Em Paris, em Maio 1636. Com o Privilégio.

Esses exemplares estão nas mãos do Monsieur Bidault H. du Roy, de resto no atacado

Pavillon des Tuylleries, na ponta da grande Galerie du Louvre.

O texto de Desargues é acompanhado pela prancha apresentada abaixo e redesenhada por Granger (1974).





C onstrução de D esargues
(G ranger, 1974)