

Míriam Delmont

Um Estudo Sobre a Fórmula de Euler



Um Estudo Sobre a Fórmula de Euler

Míriam Delmont

Orientador Prof. Dr. Antônio Espada Filho

Dissertação apresentada ao DCCE/IBILCE/UNESP
como parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Ciências Matemáticas - Área de
Concentração Matemática Aplicada e Computacional.



699/95

São José do Rio Preto - 1995

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Antônio Espada Filho, pela orientação segura, informal e rigorosa neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Walter Júlio C. Morales pelo incentivo e colaboração na pesquisa bibliográfica.

Aos professores, Dra. Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias, Dr. Odemar Linhares, Dr. Wilson Tadini e Dr. Alagacone Sri Ranga pela amizade e apoio que me dispensaram.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação pelo atendimento eficiente e atencioso.

Aos amigos, Eliane Maria Dias, Luiz Antônio Vasconcellos, Júlio Ricardo Sambrano, Leandro Tancredo, Cláudia Augusta Hidalgo, Luiz Carlos Mattioli, Edméa Cássia Batista, Antonio Roberto Balbo e Milkes Yous Alvarenga que acompanharam com interesse a elaboração deste trabalho.

Aos colegas professores do Departamento de Matemática da UNESP pelo apoio e solidariedade constantes.

Ao meu irmão Gilberto e à minha cunhada Orla por terem me presenteado.

Aos meus tios José e Jane e aos primos Luzinete, Luiz Antônio e Luizinho por todo carinho e ajuda especial que me prestaram.

A todos que direta e indiretamente tiveram participação neste trabalho.

À minha querida mãe, fonte inesgotável de estímulo e carinho, aos meus filhos Milene, Marco Antônio, Milton Felix, Michel Caiuby e Mariane, e ao genro Rutlei pela marcada presença.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. **Antônio Espada Filho**, pela orientação segura, informal e rigorosa neste trabalho.

Ao Prof. Dr. **Walter Júlio C. Morales** pelo incentivo e colaboração na pesquisa bibliográfica.

Aos professores, Dra. **Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias**, Dr. **Odelar Linhares**, Dr. **Wilson Tadini** e Dr. **Alagacone Sri Ranga** pela amizade e apoio que me dispensaram.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação pelo atendimento eficiente e atencioso.

Àos amigos, **Eliane Maria Dias**, **Luiz Antônio Vasconcellos**, **Júlio Ricardo Sambrano**, **Leandro Tancredo**, **Cláudia Augusta Hidalgo**, **Luiz Carlos Matioli**, **Edméa Cássia Batista**, **Antonio Roberto Balbo** e **Milkes Yone Alvarenga** que acompanharam com interesse a elaboração deste trabalho.

Aos colegas professores do Departamento de Matemática da UNESP - Bauru pelo apoio e solidariedade constantes.

Ao meu irmão **Gilberto** e à minha cunhada **Odete** que sempre se fizeram presentes.

Aos meus tios **José e Jane** e aos primos **Luzinete**, **Luiz Antônio** e **Luizinho** por todo carinho e ajuda especial que me prestaram.

A todos que direta e indiretamente tiveram participação neste trabalho.

Resumo

No presente trabalho propomo-nos a desenvolver um estudo sobre a “Fórmula de Euler-Descartes” tanto no aspecto da fórmula poliedral (Teorema de Euler para poliedros) como em outros aspectos relacionados tais como na Teoria dos Grafos e em pavimentação do plano.

Fundamentalmente nos preocupamos em estudar e apresentar várias de suas demonstrações encontradas em trabalhos de diferentes autores como os respectivos enfoques e seguida de uma pequena análise comparativa mostrando a sua importância em diversos ramos da matemática e talvez à Educação Matemática.

Com o desenvolvimento desses estudos observando aplicações da fórmula e com o conhecimento de problemas de contagem em geometria conseguimos obter alguns resultados os quais julgamos originais e aqui apresentados como extensões.

Abstract

In present work we propose to develop a study on the Formula (Euler - Descartes Formula) both in the aspect of polyhedron Formula (Euler and polyhedron) and in other aspects related such a Graphs Theory and in foundation of the plain.

We mainly do care to study and present many of its demonstration found in differents authors work with each fows and followed by a brief comparative analyses showing its importance in differents branches of Mathematics and maide in Math-Educations.

By developping these studies observing the Formula Applications and by nowing the counting problems in Geometry we can obtain some results which we believe to be original and here presented as extensions.

Índice

Introdução	01
1 Conceitos Básicos e Notações	
1.1 Grafos	05
1.2 Poliedros e Pavimentação	09
2 A Fórmula de Euler na Teoria dos Grafos	
2.1 Grafos Planares	14
2.2 A Fórmula de Euler para Grafos Planares	18
2.3 A Fórmula de Euler para Mapas	19
3 Estudos Sobre a Fórmula de Euler	
3.1 Introdução	22
3.2 O Estudo de Cauchy	22
3.3 O Estudo de Cohen	24
3.4 O Estudo de Barbosa	26
3.5 O Estudo de Legendre	28
3.6 O Estudo de Pitombeira	33
3.7 O estudo de Staudt	34
3.8 O Estudo de Lhuillier	35
3.9 O Estudo de Steinitz	36
3.10 Pequena Análise e Comentários das Demonstrações	37

4 Extensões da Fórmula de Euler

4.0 Poliedros Convexos e Côncavos	45
4.1 Extensões para Retas no Plano	50
4.2 Problemas de Contagem de Regiões	53
4.3 Extensão para Superfícies Poliédricas com Saliências ou Cavidades.....	62
4.4 Superfícies Obtidas por Perfurações Poliédricas Eulerianas onde se entende que Perfuração é de Face a Face desde que elas não se cruzem.	65
4.5 Extensão para Grafos Conexos com Arestas Múltiplas (multigrafo)	67
4.6 Extensão para Grafos com C Componente Conexas	69

5 Consequências e Aplicações da Fórmula de Euler

5.1 Aplicações a Planaridade de Grafos.....	71
5.2 Consequências e Aplicações a Poliedros	75

6 Bibliografia

6.1 Bibliografia.....	90
-----------------------	----

* Leonhard Euler (1707-1783).

** Abel Boncompagni (1607-1748).

*** René Descartes (1596-1650).

**** A. L. Cauchy (1789-1859).

Introdução

O Teorema de Euler descoberto em 1758 diz que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces então $V-A+F=2$.

Seu autor Leonhard Euler* de origem suíça foi tutelado em seus estudos por Jean Bernoulli** mestre excepcional e exigente.

Aos 19 anos iniciou sua influência na vida intelectual da Europa. Cada um dos três países em que viveu e, muito trabalhou, o reclama como seu: a Alemanha, a Rússia e a Suíça.

Norteando-se pelo princípio de que “Vida é trabalho” foi o mais fecundo de todos os cientistas, tendo publicado cerca de 800 artigos, 50 livros ou panfletos em todos os ramos das Ciências Matemáticas, da Física Experimental, da Astronomia, da Química, da Engenharia, da Geodésia, da Geografia, da Economia, da Demografia, da Fisiologia, da Lógica, e ainda atingindo a Música, a Filosofia e a Religião. Esse magnífico matemático escrevia de maneira simples e direta, de modo a ser compreendido. O seu Teorema, do qual nos ocupamos, prima pela generalidade de validade, simplicidade de enunciado, características essas que o tornam atraente e popular.

Para alguns matemáticos essa descoberta deveria ser atribuída a Descartes *** devido a um seu manuscrito produzido por volta de 1639 e encontrado em 1675, que contém resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula como consequência imediata. Mas Descartes não parece ter notado isso.

Um histórico pormenorizado sobre os estudos que foram feitos posteriores ao de Euler, pudemos encontrar em Lakatos [LaK 76] na sua obra “Proofs and Refutations” onde vimos um professor apresentar a tradicional demonstração atribuída a Cauchy****. Assim que a demonstração é concluída os alunos apresentam uma série

* Leonhard Euler (1707-1783).

** Jean Bernoulli (1667-1748).

*** René Descartes (1590-1650).

**** A. L. Cauchy (1789-1852)



de contra exemplos e cada passo da demonstração é submetido ao criticismo. A discussão prossegue em níveis cada vez mais elevados de sofisticação tanto matemáticos quanto lógicos. Esse nível polêmico é sustentado por feitos de grandes matemáticos.

Para tais explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível necessário se fez conceituar plenamente o objeto de estudo ou seja os poliedros.

A primeira classe de poliedros estudada em toda história consistia de cinco poliedros regulares comuns e poliedros semiregulares como prismas e pirâmides que encontramos nos livros XII e XIII de Euclides*. Este embora definindo o cubo, octaedro, pirâmide, prisma, não define o termo genérico poliedro, mas às vezes o emprega (ex. Livro XII, Segundo Problema, Prop. 17). Essa classe foi estendida depois do Renascimento em dois sentidos: um o que inclui todos os poliedros convexos e alguns poliedros intermediários simples; outro é o de Kepler - ele ampliou a classe de poliedros regulares por apresentar os poliedros regulares estrelados. Mas a proposta de Kepler foi esquecida e só foi retomada mais tarde em 1810 por Poinot.

Euler certamente jamais imaginou poliedros estrelados e sabemos que foi incapaz de provar sua Fórmula embora tenha observado tal relação do ponto de vista não métrico, testado sua conjectura a fundo pelas consequências e a conferido para prismas, pirâmides, etc.

Tal relação é provada hoje sem dificuldades mas até o início do século XIX ela não havia sido suficientemente explorada, o que foi acontecer somente quando houve interesse nas propriedades métricas e combinatórias dos sólidos. Foi então que vários matemáticos dela se valeram, particularmente, na geometria dos sólidos convexos entre eles Cauchy (1813) Poinot (1810), Lhuillier (1812), Jonquières (1890), Hessel (1832), Legendre (1809), Cayley (1859); quer refutando-a ou defendendo-a ferrenhamente como o fez Jonquières.

Euler é considerado também um dos fundadores da Teoria dos Grafos (uma parte hoje adulta e independente da Topologia). Este ramo de estudos foi desenvolvido por Cayley, Hamilton, Petersen. Sessenta anos depois Lhuillier anunciou sua fórmula quando aplicou-a a poliedros multiplos conexos.

* Euclides (III sec. a. C.)



O assunto da Topologia foi então estudado por Listen, Moebius, Riemann Poincaré e tem acumulada uma vasta literatura.

A versão da Fórmula de Euler na Teoria dos Grafos considera que para um grafo planar conexo com V vértices, A arestas e F faces, $V-A+F=2$.

Neste trabalho procuramos mostrar a importância da Fórmula em diferentes ramos da Matemática e também de encontrar embasamento para o ensino da mesma e que possibilitasse:

- minimizar dificuldades dos professores em relação a esse assunto;
- fornecer a aplicação prática deste, na resolução de problemas;
- estimular a pesquisa e aprendizagem significativa dos conteúdos que ocorrem quando novas idéias e informações são aprendidas;
- estudar relações da Teoria dos Grafos com outros conteúdos da Matemática e suas aplicações.

Descrição dos Capítulos

No capítulo 1, estaremos colocando conceitos básicos e convencionando notações utilizadas nos demais capítulos.

No capítulo 2 estudaremos a Fórmula de Euler na Teoria dos Grafos onde aplicaremos conceitos de planaridade... O estabelecimento de primeiros critérios para verificar se o grafo é planar deve-se a Kuratowski.

No capítulo 3, examinaremos o estudo de várias demonstrações encontradas em trabalhos de diferentes autores e os respectivos enfoques seguido de uma pequena análise comparativa.

No capítulo 4, procuraremos estender a Fórmula de Euler para: poliedros convexos e côncavos uma aplicação da característica de Euler - Poincaré; retas no plano e problemas de contagem de regiões; superfícies poliédricas com saliências e



cavidades; grafos conexos com arestas múltiplas; grafos com componentes conexas.

No capítulo 5, apresentaremos conseqüências e aplicações de poliedros e grafos planares; entre elas a determinação dos cinco poliedros regulares, o que motivou Cauchy em seus estudos.

Conforme sugestão de nosso orientador deveríamos incluir pelo menos mais dois temas relacionados, um sobre aspectos concernentes à característica de Euler-Poincaré (apenas citada numa nota do capítulo 4) e outro sobre generalizações, especialmente a espaço n -dimensional, contudo exigências legais de tempo impediram-nos de assim proceder.

1.1 Grafos

Um grafo $G = (V, A)$ consiste de um conjunto finito não-vazio V de *vértices* e de um conjunto A de *arestas* distintas, em que cada aresta é um par não ordenado de vértices distintos.

Se na definição de Grafo, removemos a restrição que as arestas devem ser distintas, então como resultado podemos obter o que chamamos de *multigrafo*: duas ou mais arestas ligam o mesmo par de vértices as quais são chamadas múltiplas (ou paralelas). Figura 1b.

Se na definição de Grafo, removemos a restrição de que arestas devem ligar vértices distintos e em um vértice admitirmos a existência de loops ou laçadas como resultado tem-se o *grafo geral* ou *pseudo grafo*. Figura 1c.

Denotaremos por $V(G)$ o conjunto de vértices e por $A(G)$ seu conjunto de arestas do grafo $G = (V, A)$.

Representamos vértices por pontos e arestas $\{x, y\}$ ou xy por linhas ligando os pontos que correspondem aos vértices x e y .

A Figura 1a representa um grafo G com:

$$V(G) = \{a, b, x, y, d\}$$

$$A(G) = \{(a, b), (b, x), (x, y), (y, d), (b, d)\}$$



(a)

Capítulo 1

Conceitos Básicos e Notações

1.1 Grafos

Um grafo $G = (V, A)$ consiste de um conjunto finito não-vazio V de *vértices* e de um conjunto A de *arestas* distintas, em que cada aresta é um par não ordenado de vértices distintos.

Se na definição de Grafo, removemos a restrição que as arestas devem ser distintas, então como resultado podemos obter o que chamamos de *multigrafo*; duas ou mais arestas ligam o mesmo par de vértices as quais são chamadas múltiplas (ou paralelas). Figura 1b.

Se na definição de Grafo, removemos a restrição de que arestas devem ligar vértices distintos e em um vértice admitirmos a existência de loops ou laçadas como resultado tem-se o *grafo geral* ou *pseudo grafo*. Figura 1c.

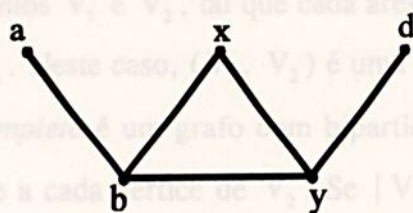
Denotaremos por $V(G)$ o conjunto de vértices e por $A(G)$ seu conjunto de arestas do grafo $G = (V, A)$.

Representamos vértices por pontos e arestas $\{x, y\}$ ou xy por linhas ligando os pontos que correspondem aos vértices x e y .

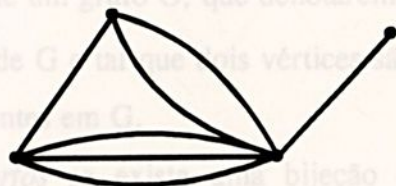
A Figura 1a representa um grafo G com:

$$V(G) = \{a, b, x, y, d\}$$

$$A(G) = \{\{a, b\}, \{b, x\}, \{x, y\}, \{y, b\}, \{y, d\}\}.$$



(a)



(b)



(c)

Figura (1)

Dada uma aresta $e = \{x, y\} \in A(G)$, os vértices x e y são os *extremos* de e . Dizemos ainda que e é *incidente* a x e a y e reciprocamente.

O grau do vértice x é o número de arestas incidentes a x .

Dois *vértices* são *adjacentes* se eles são extremos de uma mesma aresta do grafo.

Um *grafo completo* é um grafo em que quaisquer dois vértices são adjacentes. Denotaremos por K_n o grafo completo com n vértices.

Um *grafo bipartido* $G=(V, A)$ é um grafo cujo conjunto de vértices V é particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 , tal que cada aresta de G tem um extremo em V_1 e outro extremo em V_2 . Neste caso, (V_1, V_2) é uma bipartição do grafo G .

Um *grafo bipartido completo* é um grafo com bipartição (V_1, V_2) sendo que todo vértice de V_1 é adjacente a cada vértice de V_2 . Se $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, o grafo será denotado por $K_{m,n}$.

O *grafo complementar* de um grafo G , que denotaremos por $\overline{G}$, é o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se, e somente se, eles não são adjacentes em G .

Dois grafos são *isomorfos* se existe uma bijeção entre seus conjuntos de vértices que preserva a adjacência.

Seja G um grafo. Dizemos que H é *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. Se pelo menos uma destas inclusões é própria dizemos que H é *subgrafo próprio* de G .

O subgrafo que tem $S \subseteq V(G)$ por conjunto de vértices e cujas arestas são arestas de G com extremos em S , é chamado de subgrafo de G induzido por S e será denotado por $G[S]$. Um subgrafo não é necessariamente subgrafo induzido por algum subconjunto S de $V(G)$.

Seja $S \subseteq V(G)$. Denotaremos por $G - S$ o subgrafo $G[V(G) - S]$.

A *remoção de uma aresta* e do grafo G resulta no subgrafo $G - e$ com mesmo conjunto de vértices que G e com arestas $A(G) - \{e\}$.

Dados dois vértices distintos x e y em um grafo G , definimos um *caminho* entre x e y como uma sequência $P = [x = x_0, x_1, \dots, x_k = y]$ onde os vértices x_i são distintos e $(x_i, x_{i+1}) \in A(G)$.

O *comprimento* de um caminho é seu número de arestas.

Um *ciclo* é uma sequência $C = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ onde $[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]$ é um caminho, e $x_0 = x_k$, $k \geq 3$.

Um grafo G é dito ser *conexo* se existir um caminho ligando quaisquer dois vértices distintos de G ; caso contrário, ele é dito ser *desconexo*. Um subgrafo conexo maximal é uma *componente conexa* do grafo ou simplesmente componente.

Um grafo G é *simples* se não possui laçadas nem arestas paralelas. fig 1(a).

Um grafo G simples com duas arestas pelo menos, é *2 - conexo* se G não pode ser desconectado pela remoção de qualquer um dos vértices, isto é o grafo $G-v$ é conexo para cada vértice $v \in V(G)$.

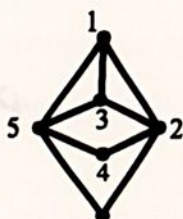


Figura (2): Um grafo 2 - conexo

1.2 Poliedros e Pavimentação

Um grafo G simples com quatro arestas pelo menos é *3-conexo* se G não pode ser desconectado pela remoção de um ou dois vértices.

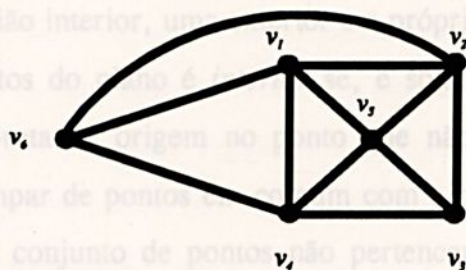


Figura (3): Um grafo 3 - conexo

Um *aresta de corte* é uma aresta tal que sua remoção do grafo aumenta o número de componentes conexas do mesmo.

Uma *árvore* é um grafo conexo que não contém ciclos.

Definimos a *operação de subdivisão de uma aresta* $e = \{x, y\}$ por se remover esta aresta do grafo e substituí-la por um caminho $P = [x_0, x_1, x_2]$ tal que $x = x_0$ e $y = x_2$, com grau de x_1 igual a dois.

A *subdivisão de um grafo* G é um grafo que pode ser obtido de G por se efetuar uma sequência de subdivisões de arestas de G .

Figura (5)

A poligonal chamamos *fronteira*.

A união do interior com a fronteira é chamada *polígono* ou *região poligonal simples fechada*.

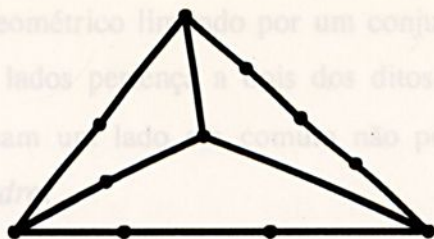


Figura (4): Uma subdivisão do K_4 .

1.2 Poliedros e Pavimentação

Uma poligonal simples fechada (ver Figura 5) separa o plano em três conjuntos de pontos do plano: uma região interior, uma exterior e a própria poligonal.

Um conjunto de pontos do plano é *interior* se, e somente se, para qualquer ponto da região, toda semi-reta de origem no ponto que não passa em vértice da poligonal tem um número ímpar de pontos em comum com a poligonal. É a situação do ponto P na Figura 5. O conjunto de pontos não pertencentes ao interior ou à poligonal é o *exterior*, cujas semi-retas possuem número par de pontos em comum com a poligonal. É a situação do ponto P' .

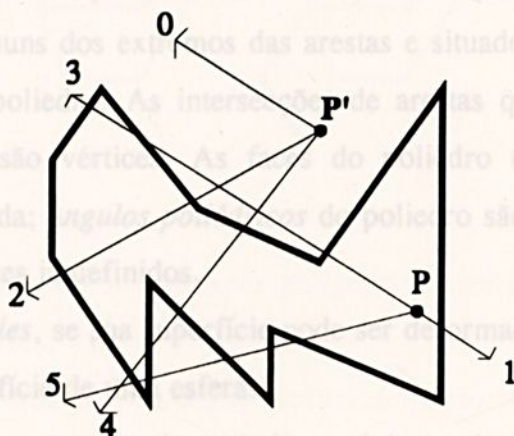


Figura (5)

À poligonal chamamos *fronteira*.

A união do interior com a fronteira é chamada *polígono* ou *região poligonal simples fechada*.

Um sólido ou corpo geométrico limitado por um conjunto finito de polígonos planos tais que cada um dos lados pertença a dois dos ditos polígonos, e que dois polígonos quaisquer que tenham um lado em comum não pertençam a um mesmo plano, recebe o nome de *poliedro*.

Os polígonos do conjunto se chamam *faces* do poliedro, os lados e vértices deles, *arestas* e *vértices* do poliedro. Denotaremos por V a cardinalidade do conjunto de vértices de um poliedro, por A a cardinalidade de seu conjunto de arestas e por F a cardinalidade de seu conjunto de faces.

A todo poliedro corresponde um grafo identificando-se vértices e arestas.

Duas faces de um poliedro são *adjacentes* se possuem uma aresta em comum.

Um poliedro convexo se diz *platônico* quando todas as suas faces têm o mesmo número n de lados e seus ângulos sólidos têm o mesmo número m de arestas (pode ser $n \neq m$).

Dizemos que um poliedro é *regular* quando todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e todos os seus ângulos sólidos ou poliédricos são congruentes.

Poliedros estrelados são poliedros regulares e portanto inscritíveis em uma esfera; suas *faces* são os polígonos planos que, em menor número possível, limitam o poliedro; suas *arestas* são os lados que limitam as faces; seus *diedros* são unicamente os que tem por arestas as arestas já definidas. As faces ao cortar-se, formarão outros diedros que não são do poliedro, por não ser sua reta intersecção aresta daquele; seus *vértices* são os pontos comuns dos extremos das arestas e situados sobre a superfície da esfera circunscrita ao poliedro. As intersecções de arestas que não cumpram as condições anteriores não são vértices. As faces do poliedro terão portanto, seus vértices sobre a esfera citada; *ângulos poliédricos* do poliedro são unicamente os que tem seus vértices nos vértices já definidos.

Um poliedro é *simples*, se sua superfície pode ser deformada com continuidade até transformar-se na superfície de uma esfera.

Um poliedro é *convexo* quando unindo-se dois quaisquer de seus pontos internos, o segmento não intercepta sua superfície.

Um conjunto não vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um *conjunto poliedral* ou simplesmente um *poliedro*, se Ω por uma intersecção de uma família finita de semi-

espaços fechados do $\mathbb{R}^n$. Se o poliedro Ω for limitado, então Ω vem a ser um politopo.

Dizemos que o politopo Ω é *d-politopo* se Ω tem dimensão d , isto é, $\Omega = \varpi + \delta$, onde δ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$, cuja dimensão é d (ϖ é um vetor arbitrário do $\mathbb{R}^n$).

O grafo de um politopo Ω , denotado por $G(\Omega)$ é um grafo consistindo dos vértices e das arestas de Ω .

Um grafo H é chamado *grafo d-politopal* se H é isomorfo a $G(\Omega)$, e neste caso dizemos que Ω realiza a H , em outras palavras, H representa ao politopo Ω .

Consideremos no plano um polígono e vamos encostando (justapondo) outros polígonos sucessivamente, mas tomando cuidado para que não haja superposição e para que não ocorram vazios.

Isto é ilustrado na Figura 6, em que começamos com um quadrado e vamos encostando a este outros polígonos.

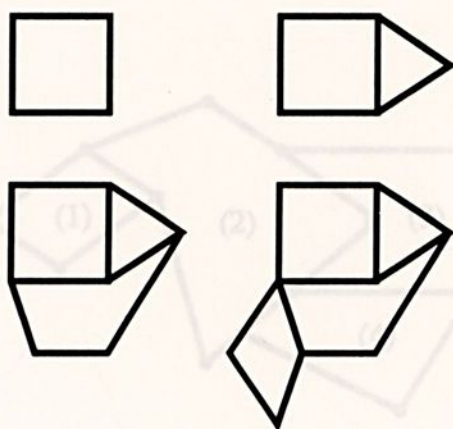


Figura (6)

Cada vez que acrescentamos um novo polígono vamos formando uma nova fronteira, ampliando a anterior.

Dizemos que se fez uma *pavimentação parcial do plano* ou que pavimentamos uma região poligonal simples fechada. Daí segue o conceito:

Um conjunto de polígonos é uma *pavimentação parcial do plano* se, e somente se, o conjunto de polígonos *cobre sem cruzamentos* uma região poligonal simples fechada do plano.

Com a palavra *cobre* queremos dizer que todo ponto interior ou da fronteira da região poligonal simples fechada pertence pelo menos a um polígono do conjunto e *sem cruzamentos* significa que toda intersecção de dois polígonos tem área nula.

Consideremos uma pavimentação parcial do plano e vamos acrescentando indefinidamente polígonos, aumentando a sua superfície, mas continuando sem deixar vazios e sem cruzamentos; então dizemos que se terá uma *pavimentação do plano*.

É claro que, efetivamente, na prática não conseguiremos uma pavimentação do plano, pois nunca a completariamos, mas podemos obtê-la idealmente. Daí vem o seguinte conceito:

Um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano se, e somente se, o conjunto de polígonos *cobre sem cruzamento o plano*.

Aos vértices dos polígonos chamamos de *nós* da pavimentação. Observamos, no entanto, que um polígono pode ter mais nós na sua fronteira que o seu próprio número de vértices. Assim, na Figura 7 o polígono (2) tem 8 nós na sua fronteira e apenas 5 vértices, enquanto os outros apresentam o mesmo número de nós que de vértices.

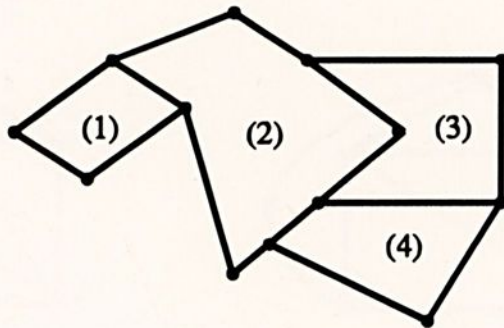


Figura (7)

Os segmentos de retas que têm por extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de polígono chamamos de *arestas*. Assim, existem lados que são arestas e partes de lados que também são arestas.

Uma pavimentação é *lado-lado* se, e somente se, toda aresta é lado comum a dois polígonos. Resulta, portanto, que todo nó na fronteira de um polígono da pavimentação é vértice do polígono.

Em outras palavras, quando pavimentamos, um novo polígono é acrescentado se os lados em contato são respectivamente congruentes (Figura 6). Em caso contrário, diremos simplesmente que a pavimentação não é lado-lado (Figura 7).

Capítulo 2

A Fórmula de Euler na Teoria dos Grafos

2.1 Grafos Planares

Um grafo é *planar* se ele pode ser representado no plano de modo que suas arestas não se interceptam exceto em seus extremos. O grafo assim representado no plano é dito ser um *grafo plano*.



(a)



(b)

Figura (8): (a) Um grafo planar G ; (b) Um grafo plano obtido de G .

O estudo de grafos planares necessariamente envolve a topologia do plano. Porém, não seremos rigorosos aqui ao colocarmos os conceitos topológicos pois nosso interesse está em relacionar a Fórmula de Euler com a classe dos grafos planares.

Os resultados da topologia que são especialmente relevantes no estudo de grafos planares são os que envolvem *curvas de Jordan*. A união das arestas num ciclo de um grafo plano constitui uma *curva de Jordan*; isto explica porque propriedades

Capítulo 2

A Fórmula de Euler na Teoria dos Grafos

2.1 Grafos Planares

Um grafo é *planar* se ele pode ser representado no plano de modo que suas arestas não se interceptam exceto em seus extremos. O grafo assim representado no plano é dito ser um *grafo plano*.

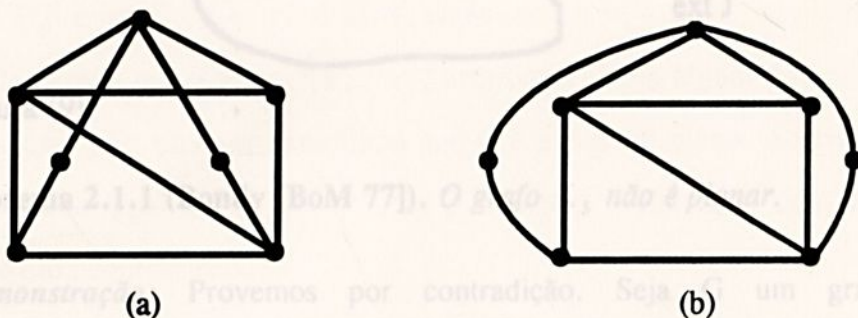


Figura (8): (a) Um grafo planar G ; (b) Um grafo plano obtido de G .

O estudo de grafos planares necessariamente envolve a topologia do plano. Porém, não seremos rigorosos aqui ao colocarmos os conceitos topológicos pois nosso interesse está em relacionar a Fórmula de Euler com a classe dos grafos planares.

Os resultados da topologia que são especialmente relevantes no estudo de grafos planares são os que envolvem *curvas de Jordan*. A união das arestas num ciclo de um grafo plano constitui uma curva de Jordan; isto explica porque propriedades

das curvas de Jordan desempenham um papel importante ao se estudar grafos planares.

Nós precisamos de um teorema bastante conhecido sobre curvas de Jordan para demonstrar que o K_5 não é planar.

Seja J uma curva de Jordan no plano. Então o restante do plano é particionado em dois conjuntos abertos chamados *interior* e *exterior* de J . Denotaremos o interior e exterior de J , respectivamente, por $\text{int } J$ e $\text{ext } J$ e suas delimitações por $\text{Int } J$ e $\text{Ext } J$. Claramente, $\text{Int } J \cap \text{Ext } J = \emptyset$.

O Teorema da Curva de Jordan - *Toda linha ligando um ponto em $\text{int } J$ a um ponto em $\text{ext } J$ deve interceptar J em algum ponto.*

Embora este teorema seja intuitivamente óbvio, uma prova formal dele não é simples pode ser encontrada em Courant - Robbin [CoR 69].

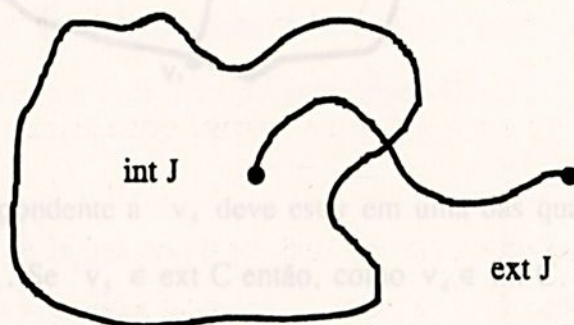


Figura (9)

Teorema 2.1.1 (Bondy [BoM 77]). *O grafo K_5 não é planar.*

Demonstração: Provemos por contradição. Seja G um grafo plano correspondente ao K_5 . Denotemos os vértices de G por v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 . Como G é completo, quaisquer dois de seus vértices estão ligados por uma aresta. Agora, o ciclo $C = [v_1, v_2, v_3, v_1]$ é uma curva de Jordan no plano, e o ponto que corresponde ao vértice v_4 deve estar no $\text{int } C$ ou no $\text{ext } C$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $v_4 \in \text{int } C$. (O caso em que $v_4 \in \text{ext } C$ pode ser tratado de maneira similar.) Então as arestas $\{v_4, v_1\}$, $\{v_4, v_2\}$ e $\{v_4, v_3\}$ dividem $\text{int } C$ em três regiões $\text{int } C_1$, $\text{int } C_2$ e $\text{int } C_3$, onde:

É importante saber quais grafos são planares e quais grafos não são. Temos visto que, em particular, K_4 e K_5 não são planares. Embora qualquer subgrafo induzido próprio destes grafos seja planar, uma das primeiras caracterizações importantes sobre grafos planares foi dada por Kuratowski [Kur 30].

$$C_1 = [v_1, v_4, v_2, v_1],$$

$$C_2 = [v_2, v_4, v_3, v_2] \text{ e}$$

$$C_3 = [v_3, v_4, v_1, v_3].$$

A Figura 10 ilustra estas regiões.

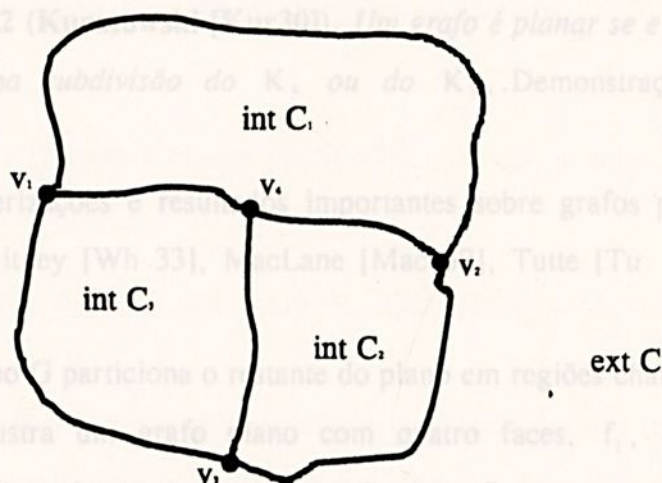


Figura (10)

O ponto correspondente a v_5 deve estar em uma das quatro regiões $\text{ext } C$, $\text{int } C_1$, $\text{int } C_2$ e $\text{int } C_3$. Se $v_5 \in \text{ext } C$ então, como $v_4 \in \text{int } C$, segue do Teorema da Curva de Jordan que a aresta $\{v_4, v_5\}$ intercepta C em algum ponto. Mas isto é uma contradição pois estamos assumindo que G é um grafo plano. Ao considerarmos os casos em que $v_5 \in \text{int } C_i$, $i = 1, 2, 3$, também chegaremos com este mesmo raciocínio a uma contradição. ■

Um argumento similar pode ser usado para provar que o $K_{3,3}$ também não é um grafo planar.

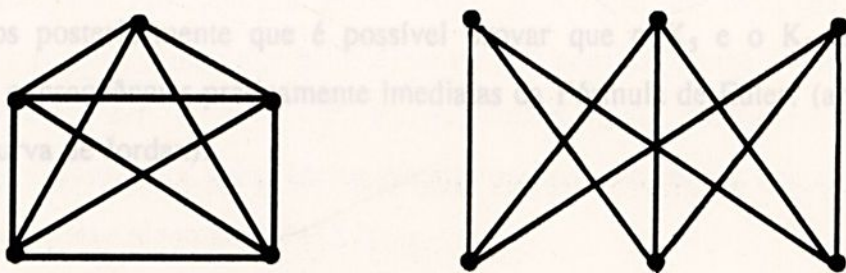


Figura (11) : Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ que não são planares.

2.2 É importante saber quais grafos são planares e quais grafos não são. Temos visto que, em particular, K_5 e $K_{3,3}$ não são planares muito embora qualquer subgrafo induzido próprio destes grafos seja planar.

Uma das primeiras caracterizações conhecidas de grafos planares foi dada por Kuratowski em 1930:

Teorema 2.1.2 (Kuratowski [Kur30]). *Um grafo é planar se e somente se ele não contém nenhuma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.* Demonstração em Berge [Be 67].

Outras caracterizações e resultados importantes sobre grafos planares foram apresentados por Whitney [Wh 33], MacLane [Mac 37], Tutte [Tu 60a], Dirac e Schustu [Dir 77].

Um grafo plano G particiona o restante do plano em regiões chamadas *faces* de G . A Figura 10 ilustra um grafo plano com quatro faces, f_1 , f_2 , f_3 e f_4 . Denotaremos por $F(G)$ o número de faces do grafo plano G .

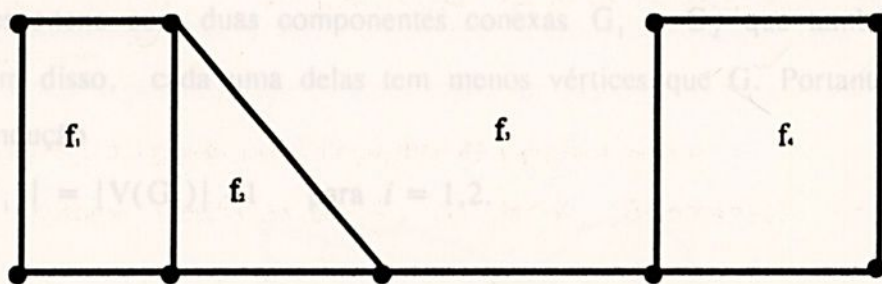


Figura (12)

Todo grafo plano tem exatamente uma face não delimitada, a *face exterior*; no grafo plano da Figura 12, f_4 é a face exterior.

Veremos posteriormente que é possível provar que o K_5 e o $K_{3,3}$ são não planares como consequências praticamente imediatas da Fórmula de Euler. (anterior a utilização da curva de Jordan).

2.2 A Fórmula de Euler para Grafos Planares

A Fórmula de Euler relaciona número de vértices, arestas e faces em um grafo plano conexo. Euler a propôs para vértices, arestas e faces de poliedros cujos estudos da mesma serão bastante explorados nestes aspecto no capítulo 3.

Antes de apresentarmos a fórmula de Euler no teorema 2.2.2, precisamos do seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 (Bondy e Murty [BoM 77]). *Se G é uma árvore, então $A = V - 1$.*

Demonstração: Por indução sobre V . Quando $V = 1$, temos que G é isomorfo ao K_1 e $A = 0 = V - 1$.

Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para todas árvores com menos que V vértices, e seja G uma árvore com $|V(G)| \geq 2$ vértices. Seja $e = \{u, v\} \in A(G)$. Então, $G - e$ não contém nenhum caminho ligando o vértice u ao v . Assim, $G - e$ é um grafo desconexo com duas componentes conexas G_1 e G_2 que também são árvores. Além disso, cada uma delas tem menos vértices que G . Portanto, pela hipótese de indução

$$|A(G_i)| = |V(G_i)| - 1 \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Assim,

$$|A(G)| = |A(G_1)| + |A(G_2)| + 1 = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 1 = |V(G)| - 1. \blacksquare$$

Teorema 2.2.2 (Bondy e Murty [BoM 77]). *Se G é um grafo plano conexo, então $V - A + F(G) = 2$.*

Demonstração: Por indução sobre $F(G)$, o número de faces de G . Se $F(G) = 1$, então o grafo G não tem ciclo e, como G é conexo, é uma árvore. Neste caso, pelo teorema 2.2.1, $A = V - 1$ e o teorema é válido. Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para todos grafos planos conexos com menos que n faces, e seja G um grafo conexo plano com $n \geq 2$ faces.



Tomemos uma aresta e de G que não é uma aresta de corte. Então $G - e$ é um grafo plano conexo e tem $n - 1$ faces, pois as duas faces de G separadas por e se tornam uma única face de $G - e$.

Pela hipótese de indução $V(G - e) - A(G - e) + F(G - e) = 2$ e, usando as relações

$V(G - e) = V(G)$, $A(G - e) = A(G) - 1$, $F(G - e) = F(G) - 1$ obtemos:

$V(G) - A(G) + F(G) = 2$.

O teorema segue do princípio da indução. ■

2.3 A Fórmula de Euler para Mapas

Um *mapa* é um grafo planar cujos vértices tem grau pelo menos três, e cujas faces tem fronteiras que são curvas fechadas simples. As faces de um mapa são seus *países*.

A propriedade de todas as faces serem delimitadas por curvas fechadas simples claramente elimina a possibilidade de uma aresta ter um mesmo país em ambos os lados.

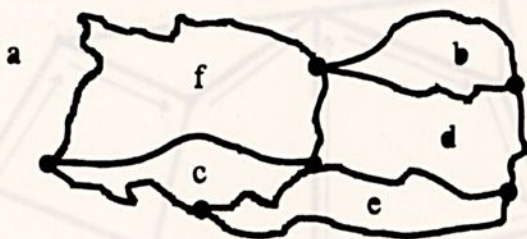


Figura (15): Um mapa com 6 países.

Nesta seção apresentaremos a Fórmula de Euler para mapas, desenvolvida por Barnette [Ba 83]. Observamos que há grafos que satisfazem a Fórmula de Euler mas que não são mapas e, também, há mapas que não satisfazem a Fórmula de Euler: estes são os mapas desconexos.

Figura (14)

A Fórmula de Euler para mapas conexos (Barnette [Bar 83]). Nós provaremos que se V , A e F são o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, de um grafo conexo planar, então $V - A + F = 2$. A prova é baseada em um processo de remover uma aresta ou uma aresta e um vértice de um grafo conexo de modo que o grafo resultante seja ainda conexo. Nós mostraremos que $V - A + F$ não se altera durante este processo, e finalmente mostraremos que repetindo este processo chegaremos em um grafo para o qual $V - A + F = 2$. Claramente, a Fórmula de Euler deverá valer para o grafo original.

O processo consiste de se efetuar um dos seguintes procedimentos: remover uma aresta mas deixar seus extremos, ou remover uma aresta e um de seus extremos. É importante que possamos fazer isto de modo que o grafo resultante ainda seja conexo.

Se há no grafo um vértice de grau 1, então o grafo resultante da remoção deste vértice e da aresta que é incidente a este vértice ainda é conexo. Se não há nenhum vértice de grau 1 no grafo, então há uma maneira de removermos uma aresta deixando o grafo ainda conexo. Partindo de uma aresta do grafo, comecemos um "passeio" ao longo das arestas do grafo, sempre saindo de um vértice e entrando em uma aresta que ainda não visitamos. Com um tal passeio, nós voltaremos precisamente a um vértice que já foi visitado porque há um número finito de vértices.

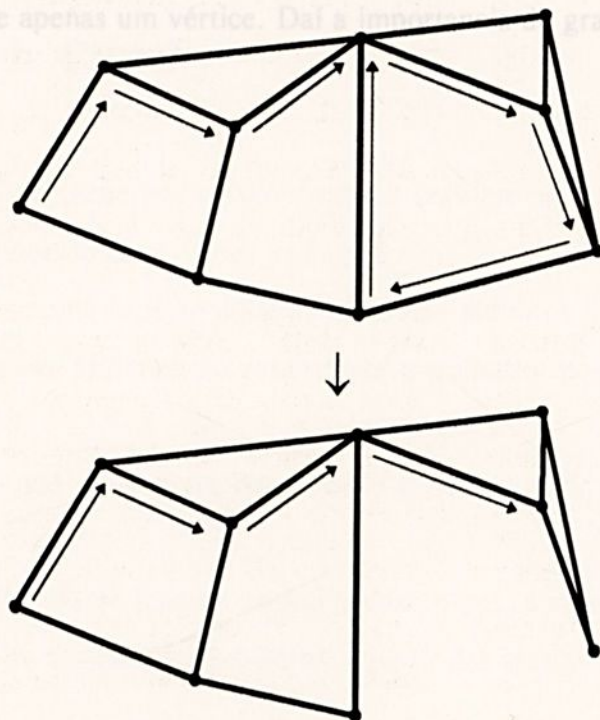


Figura (14)

Quando caímos em um vértice já visitado então a última parte do passeio consiste de uma curva simples, isto é, um ciclo. Se removermos uma aresta deste ciclo, então o grafo resultante ainda é conexo (Veja Figura 14).

Agora, vejamos como $V - A + F$ se comporta durante o processo.

Quando removemos uma aresta incidente a um vértice de grau 1 juntamente com este vértice, nós diminuimos V e A e deixamos F inalterado. Assim $V - A + F$ permanece inalterado.

Quando removemos uma aresta e deixamos seus extremos, diminuimos A de um.

Já que a aresta removida intercepta duas faces diferentes (uma no interior do ciclo e outra no exterior do ciclo), e como estas duas faces se tornam uma só com a remoção da aresta, F é diminuído de um.

Novamente $V - A + F$ permanece inalterado.

Enquanto houver arestas no grafo, aplicamos este processo para removê-las. Portanto, o processo pára quando o grafo não tem mais arestas. Mas um grafo conexo com nenhuma aresta deve consistir de um único vértice. Para este grafo $V = 1$, $A = 0$, e $F = 1$, assim a Fórmula de Euler é válida para este grafo bem como para o grafo original.

Se o grafo não for conexo no final do processo não teríamos certeza de que o último grafo consiste de apenas um vértice. Daí a importância do grafo ser conexo. ■

Capítulo 3

Estudos Sobre a Fórmula de Euler

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos diferentes demonstrações da Fórmula de Euler. Começamos com uma das mais conhecidas e tradicionais demonstração que é atribuída a Cauchy.

3.2 O Estudo de Cauchy*

A Fórmula de Euler relativa a poliedros é a seguinte: se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces então: $V - A + F = 2$.

Etapa 1. Retira-se uma face do poliedro. Isto não altera os números V , A mas F diminui de uma unidade. Basta então provar que o poliedro modificado satisfaz a condição $V - A + F = 1$.

Etapa 2. Diz-se que uma aresta do poliedro é livre quando é lado de apenas uma face.

O poliedro modificado na Etapa 1 possui arestas livres, a saber: os lados da face retirada. Esticando-se a superfície poliedral a partir das arestas livres, pode-se

*A.L. Cauchy (1789 - 1852)

achata-la de modo que durante este processo ela se transforma numa figura plana sem haver superposição de faces. Os números V , F e A mantem-se constantes.

Se, em particular, o poliedro era convexo, este achatamento pode ser entendido de modo bastante simples, projetando-se o poliedro sobre o plano, a partir de um ponto situado tão próximo da face omitida que nenhuma semi-reta que parta desse centro de projeção contenha mais de um ponto do poliedro.

Imaginando a origem dessas semi-retas como um foco luminoso o modelo achatado do poliedro é sua sombra sobre o plano da projeção.

Na Figura 15 ilustramos o resultado da aplicação das Etapas 1 e 2 ao tetraedro e ao cubo.

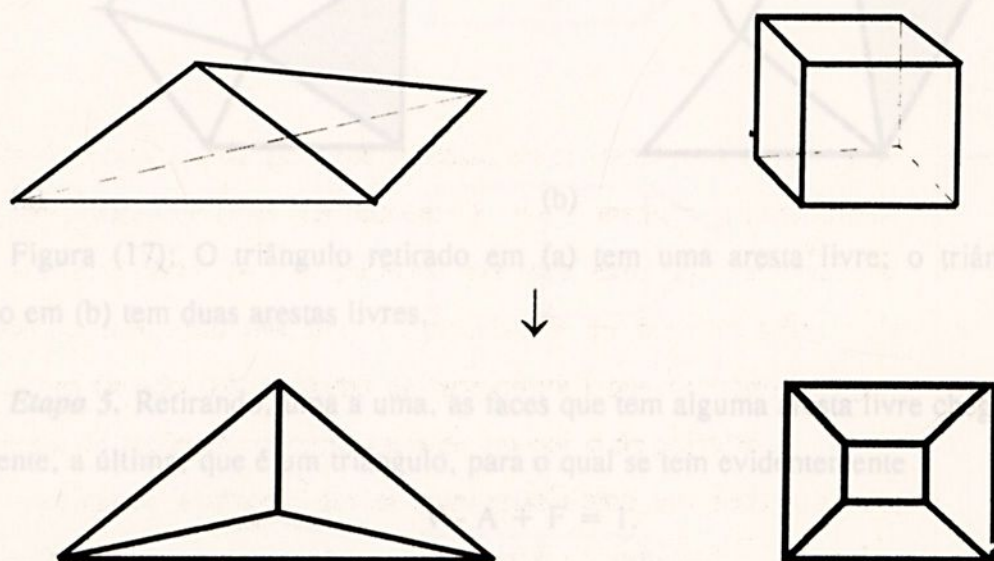


Figura (15)

Etapa 3. Traçando diagonais que não se cortam, decompõe-se cada face em triângulos. Cada vez que se traça uma diagonal que não intercepta as outras, o número V não muda, enquanto A e F aumentam de uma unidade, logo $V - A + F$ não se altera. Podemos então supor que todas as faces do poliedro são triângulos.

A Figura 16 mostra como fica o cubo depois de executadas as Etapas 1, 2 e 3.

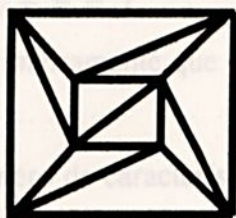
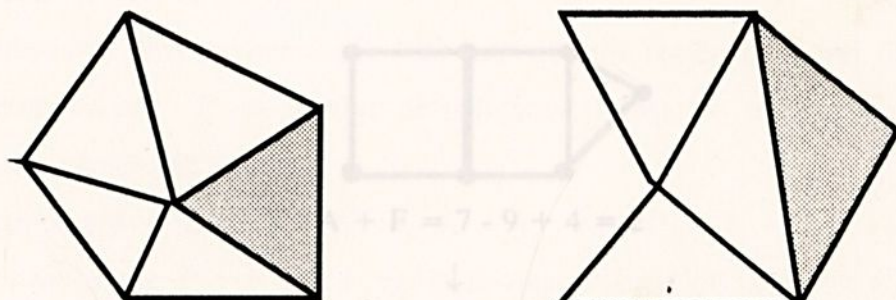


Figura (16)

Etapa 4. Começa-se a “despetalar” o poliedro plano (cuja faces agora são triângulos), retirando-se uma a uma as faces que tem alguma aresta livre. Ao retirar cada uma dessas faces, o número $V - A + F$ não se altera. Com efeito, se o triângulo retirado tem apenas uma aresta livre, sua retirada não muda V mas faz com que A e F diminuam ambos de uma unidade, o que deixa $V - A + F$ inalterado. Se, porém, o triângulo tem duas arestas livres, ao retirá-las estaremos diminuindo um vértice, duas arestas e uma face, logo $V - A + F$ não se altera.



(a)

(b)

Figura (17): O triângulo retirado em (a) tem uma aresta livre; o triângulo retirado em (b) tem duas arestas livres.

Etapa 5. Retirando, uma a uma, as faces que tem alguma aresta livre chega-se, finalmente, a última, que é um triângulo, para o qual se tem evidentemente

$$V - A + F = 1.$$

Isto conclui a demonstração. ■

3.3 O Estudo de Cohen

Teorema 3.3.1 (Cohen [Coh 78]). Em um grafo conexo planar G com A arestas, V vértices e F faces, $V - A + F = 2$.

Demonstração: Observamos primeiramente que para toda árvore

i) $V - A + F = 2$

ii) $V - A + 1$ é chamado número de característica da árvore.

Consideremos o teorema “*Todo grafo conexo contém uma árvore geradora*” e troquemos em ii) “+ 1” por “+ F”.

Se o grafo G não é uma árvore, nós retiramos uma aresta de um de seus ciclos. O grafo resultante tem o mesmo número de vértices, uma aresta a menos e as duas faces que eram separadas pela aresta que foi retirada, tornou-se uma só. Deste modo o valor da expressão $V - A + F$ permanece inalterado.

Veja isto ilustrado no grafo da Figura 18 em que é retirada uma aresta de cada ciclo até se obter uma árvore.

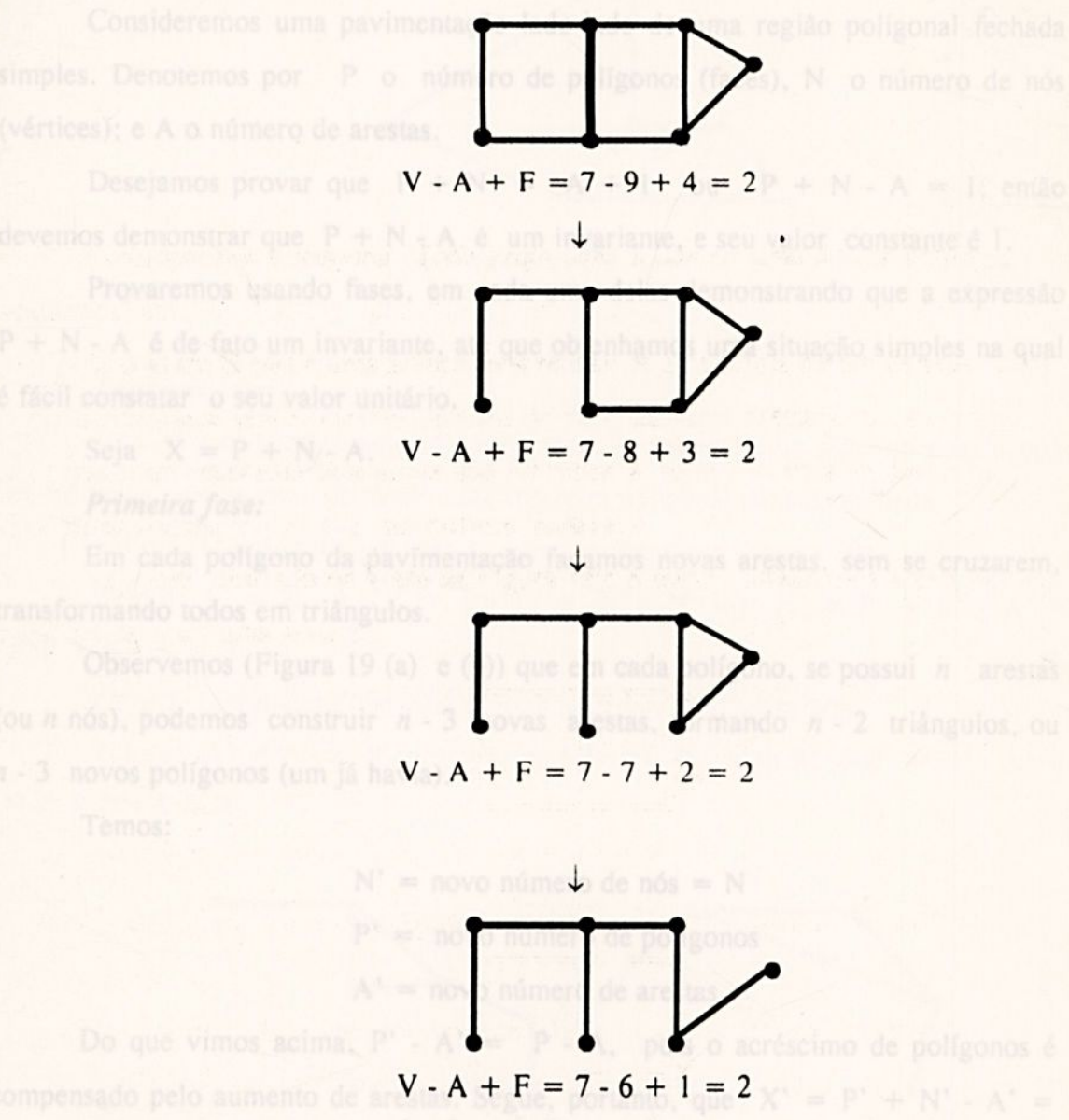


Figura (18)

Continuamos com este processo até que o grafo se constitua em uma árvore geradora cujo valor de $V - A + F$ é 2. Portanto, deve ser 2 no grafo original também. ■

3.4 O Estudo de Barbosa

Consideremos uma pavimentação lado-lado de uma região poligonal fechada simples. Denotemos por P o número de polígonos (faces), N o número de nós (vértices); e A o número de arestas.

Desejamos provar que $P + N = A + 1$ ou $P + N - A = 1$; então devemos demonstrar que $P + N - A$ é um invariante, e seu valor constante é 1.

Provaremos usando fases, em cada uma delas demonstrando que a expressão $P + N - A$ é de fato um invariante, até que obtenhamos uma situação simples na qual é fácil constatar o seu valor unitário.

Seja $X = P + N - A$.

Primeira fase:

Em cada polígono da pavimentação façamos novas arestas, sem se cruzarem, transformando todos em triângulos.

Observemos (Figura 19 (a) e (b)) que em cada polígono, se possui n arestas (ou n nós), podemos construir $n - 3$ novas arestas, formando $n - 2$ triângulos, ou $n - 3$ novos polígonos (um já havia).

Temos:

$N' = \text{novo número de nós} = N$

$P' = \text{novo número de polígonos}$

$A' = \text{novo número de arestas}$

Do que vimos acima, $P' - A' = P - A$, pois o acréscimo de polígonos é compensado pelo aumento de arestas. Segue, portanto, que $X' = P' + N' - A' = P + N - A = X$.

Figura (20)

Terceira fase:

Continuando a supressão de triângulos da fase 2, chegaremos necessariamente a um só triângulo, pois este terá 3 arestas na fronteira.

Agora, é só calcular o valor constante X .

$$X' = X = P' + N' - A' = 1 + 3 - 3 = 1$$

Consideremos os números $N = N_1 + N_2$ e $A = A_1 + A_2$,

respectivamente separados em parcelas correspondentes a interior e fronteira.

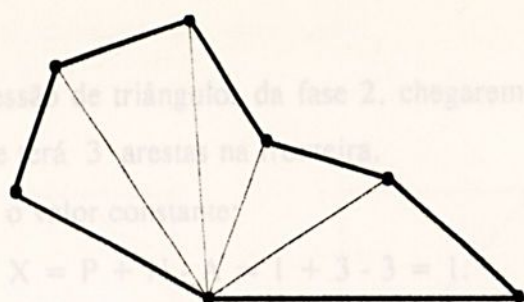
Teremos assim uma outra apresentação da Fórmula de Euler:

$$P + N - A = P + N_1 + N_2 - A_1 - A_2 = P + N_1 - A_1 = 1 \text{ pois}$$

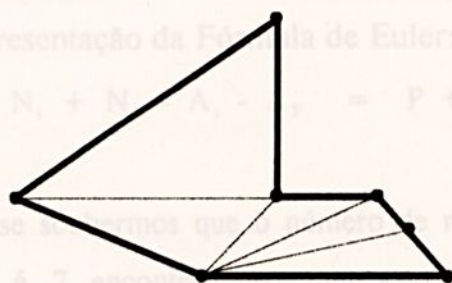
$$N_2 = A_2$$

Assim, por exemplo, se a fórmula que nos dá os interiores é 3 e o número de arestas interiores é 7, encontramos a fronteira só pode ter

$$P = 1 - N_1 + A_1 = 1 - 3 + 7 = 5, \text{ como na Figura 21.}$$



(a)



(b)

Figura (19)

Segunda fase:

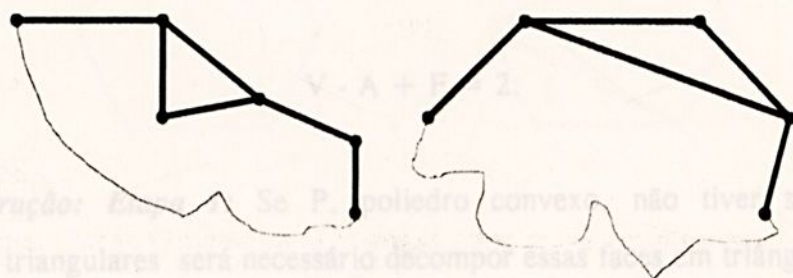
Suprimimos sucessivamente cada triângulo que tenha no máximo duas arestas na fronteira, mas sempre deixando uma fronteira poligonal simples fechada.

Caso 1: O triângulo tem uma só aresta na fronteira (Figura 20a).

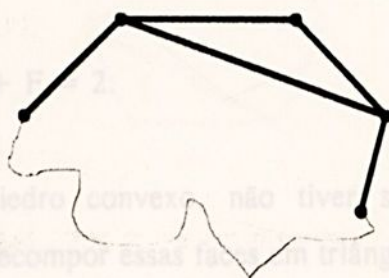
Temos: $A' = A - 1$, $P' = P - 1$ e $N' = N$; logo $X' = P' + N' - A' = P + N - A = X$.

Caso 2: O triângulo tem duas arestas na fronteira (Figura 20b).

Temos: $A' = A - 2$, $P' = P - 1$ e $N' = N - 1$; logo $X' = P' + N' - A' = P + N - A = X$.



(a)



(b)

Figura (20)

Terceira fase: *amento, em cada face observa-se:*

Continuando a supressão de triângulos da fase 2, chegaremos necessariamente a um só triângulo, pois este terá 3 arestas na fronteira.

Agora, é só calcular o valor constante:

$$X' = X = P + N - A = 1 + 3 - 3 = 1. \quad \blacksquare$$

Consideremos os números $N = N_i + N_f$ e $A = A_i + A_f$, respectivamente separados em parcelas correspondentes a interior e fronteira. Teremos assim uma outra apresentação da Fórmula de Euler:

$$P + N - A = P + N_i + N_f - A_i - A_f = P + N_i - A_i = 1 \text{ pois } N_f = A_f.$$

Assim, por exemplo, se soubermos que o número de nós interiores é 3 e o número de arestas interiores é 7, encontraremos que a pavimentação só pode ter $P = 1 - N_i - A_i = 1 - 3 + 7 = 5$, como na Figura 21.

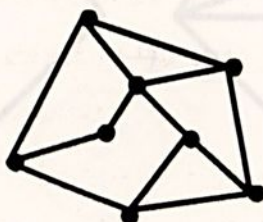


Figura (21)

3.5 O Estudo de Legendre*

Seja P um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces. Então, vale a relação

$$V - A + F = 2.$$

Demonstração: Etapa 1: Se P , poliedro convexo, não tiver suas faces poligonais todas triangulares será necessário decompor essas faces em triângulos.

Mostraremos que a relação $V - A + F$ fica inalterada por este processo. No polígono tem-se $V = n = A$.

* Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

Assim, intuitivamente, em cada face observa-se:

- Se $V = 4$, $A = 4$ e $F = 1$ então $V - A + F = 1$.

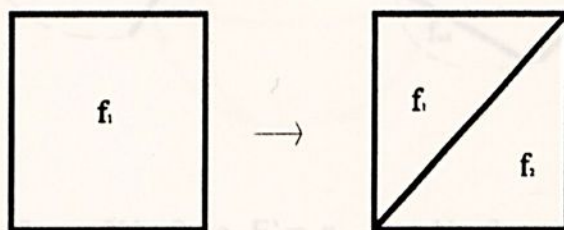


Figura (22)

Assim, após decompor em triângulos $V' = 4$, $A' = 4 + 1$ e $F' = 1 + 1$, então $V' - A' + F' = 1$.

- Se $V = 5$, $A = 5$ e $F = 1$ então $V - A + F = 1$.

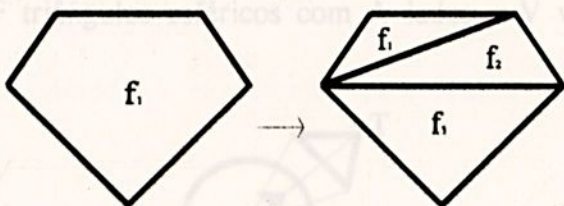


Figura (23)

Temos $V' = 5$, $A' = 5 + 2 = V + V - 3$ e $F' = 1 + 2 = 5 - 3 = V - 2$, então $V' - A' + F' = 1$.

- Se $V = 6$, $A = 6$ e $F = 1$ então $V - A + F = 1$.

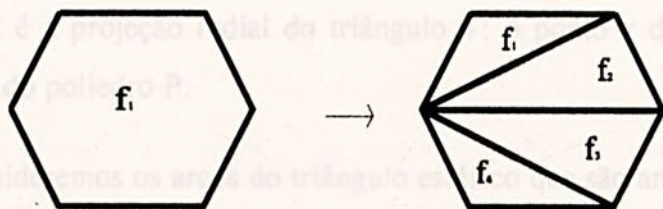


Figura (24)

Temos $V' = 6$, $A' = 6 + 6 - 3 = V + V - 3$ e $F' = 6 - 2 = V - 2$, então $V' - A' + F' = 1$.

- Se $V = n$, $A = n$ e $F = 1$ então $V - A + F = 1$.

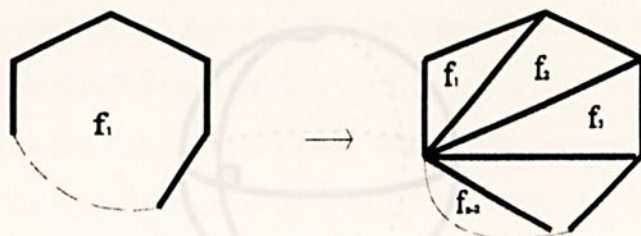


Figura (25)

$$V' = n, A' = 2n - 3 = 2V - 3 \text{ e } F' = n - 2 = V - 2, \text{ então } V' - A' + F' = \\ = V - (2V - 3) + V - 2 = V - 2V + 3 + V - 2 = 1.$$

Etapa 2: Consideremos uma esfera E de raio r , cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro P .

Pela projeção radial do poliedro P sobre a esfera E obtém-se triângulos esféricos, dispostos do modo como se situam as faces de P . Em particular ficará a esfera E recoberta por F triângulos esféricos com A lados e V vértices, conforme ilustra a Figura 26.

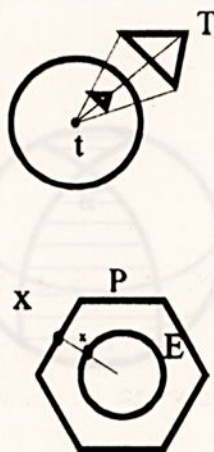


Figura (26): t é a projeção radial do triângulo T ; o ponto x da esfera E é a projeção do ponto X do poliedro P .

Etapa 3: Consideremos os arcos do triângulo esférico que são arcos de círculos máximos. Seja α o ângulo formado por esses arcos que tem uma extremidade comum, conforme ilustra a Figura 27. Consideremos então o seguinte teorema:

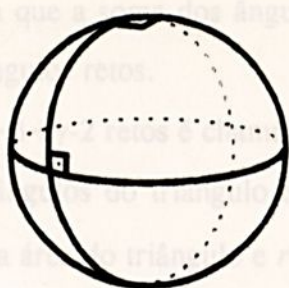


Figura (27)

Teorema de Girard (Lima [Li 82]). Se α , β e γ são ângulos internos de um triângulo esférico medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + a/r^2$ onde a é a área desse triângulo.

Demonstração: Consideremos um hemisfério H que contenha um triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam um ângulo α , até encontrarem o bordo do hemisfério H obtemos uma região $R_\alpha \subset H$ cuja área mede $2\alpha r^2$

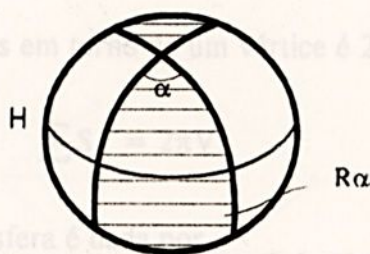


Figura (28)

Fazendo o mesmo com os ângulos β e γ obtemos regiões R_β e R_γ , cujas áreas medem respectivamente $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$. A reunião dessas três regiões é o hemisfério H com o triângulo dado contado três vezes (duas vezes mais do que deveria). Segue-se que a soma das áreas das regiões R_α , R_β e R_γ , é igual à área do hemisfério H mais duas vezes a área a do triângulo dado, ou seja, $2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2a$, pois a área de H é $2\pi r^2$. Simplificando, vem:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + a/r^2$$

A fórmula de Girard mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior a dois ângulos retos.

A diferença $a/r^2 = \alpha + \beta + \gamma - 2$ retos é chamada o “excesso esférico”.

Fazendo a medida desses ângulos do triângulo esférico, em radianos, temos $\alpha + \beta + \gamma - \pi = a/r^2$, onde a é a área do triângulo e r o raio da esfera.

Etapa 4: Decompomos a esfera E em F triângulos esféricos com um total de A lados e V vértices. Para cada triângulo t , vale a Fórmula de Girard: [Teorema anterior]

$$S_t = \pi + a_t / r^2.$$

Temos:

$$S_{t1} = \pi + a_{t1} / r^2, S_{t2} = \pi + a_{t2} / r^2, \dots, S_{tF} = \pi + a_{tF} / r^2.$$

Somando membro a membro as F igualdades, segue que

$$\sum_{i=1}^F S_{ti} = F\pi + F(a_{ti} / r^2). \quad (3.5.1)$$

Como a soma dos ângulos em torno de um vértice é 2π ,

$$\sum S_t = 2\pi V. \quad (3.5.2)$$

A área da superfície da esfera é dada por

$$F a_{ti} = \sum_{i=1}^F a_{ti} = 4\pi r^2. \quad (3.5.3)$$

Substituindo (3.5.2) e (3.5.3) em (3.5.1) vem

$$2\pi V = F\pi + 4\pi, \quad \text{ou} \quad 2V = F + 4 \Rightarrow 2V - F = 4. \quad (3.5.4)$$

Como cada triângulo tem três lados e cada aresta é lado de dois triângulos,

$$3F/2 = A \Rightarrow F = 2A - 2F. \quad (3.5.5)$$

Substituindo (3.5.5) em (3.5.4) segue que

$$2V - (2A - 2F) = 4 \Rightarrow V - A + F = 2, \text{ que é Fórmula de Euler.} \quad \blacksquare$$

3.6 O Estudo de Pitombeira

Demonstraremos a Fórmula de Euler, $V - A + F$, para grafos planos conexos. Assim, a expressão $V - A + F$ permanece invariante sob as duas operações

Observamos, primeiramente, que qualquer grafo plano conexo pode ser obtido a partir de um grafo simples consistindo de somente um vértice e nenhuma aresta, por meio das seguintes operações:

Operação 1: Adicionar uma aresta e um vértice a um vértice já existente, conforme ilustrado na Figura 29 (a) e (b).

Operação 2: Adicionar uma aresta entre dois vértices já existentes. Veja Figura 29 (c) e (d).

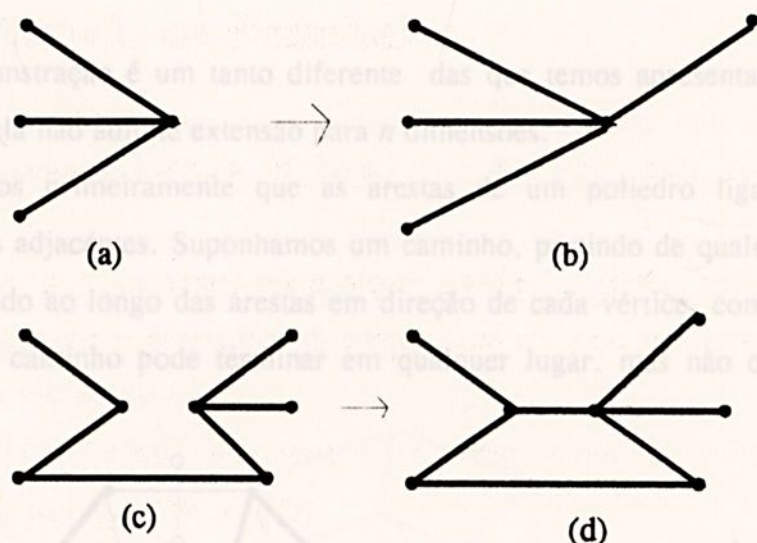


Figura (29)

Observe que no caso do grafo que consiste de somente um vértice, verificamos que $V = 1$, $A = 0$ e $F = 1$. Donde, no caso citado, $V - A + F = 1 - 0 + 1 = 2$.

Examinemos, agora, como cada um dos tipos de operações descritas anteriormente altera a quantidade $V - A + F$. Para cada uma das operações descritas, sejam ΔV , ΔA , ΔF e $\Delta(V - A + F)$ as alterações causadas, respectivamente, no número de vértices, arestas, faces e em $V - A + F$.

É fácil, então, verificar que com respeito à *Operação 1*: $\Delta V = 1$, $\Delta A = 1$, $\Delta F = 0$ e $\Delta(V - A + F) = 0$. Quanto à *Operação 2*, $\Delta V = 0$, $\Delta A = 1$ e $\Delta F = 1$ e $\Delta(V - A + F) = 0$.

Assim, a expressão $V - A + F$ permanece invariante sob as duas operações consideradas e o grafo permanece conexo. Como qualquer grafo plano conexo pode ser obtido a partir do grafo consistindo de apenas um vértice por uma sequência finita de tais operações, vemos que, para qualquer grafo plano conexo,

$$V - A + F = 2.$$

3.7 O Estudo de Staudt*

Esta demonstração é um tanto diferente das que temos apresentado até aqui pelo fato de que ela não admite extensão para n dimensões.

Observamos primeiramente que as arestas de um poliedro ligam vértices adjacentes e faces adjacentes. Suponhamos um caminho, partindo de qualquer vértice escolhido, e traçado ao longo das arestas em direção de cada vértice, como ilustrado na Figura 30. O caminho pode terminar em qualquer lugar, mas não deve incluir nenhum ciclo.

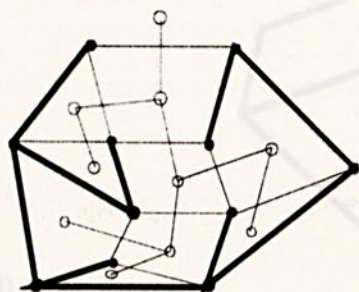


Figura (30)

O número de arestas pertencentes a este caminho é $V - 1$. Agora, consideremos um outro caminho similar construído partindo de uma face e cruzando as outras arestas, não utilizadas em direção a cada face. Desta maneira é possível passar de uma

*Von Staudt (1869 - 1940)

face para outra até que nenhuma face ou grupo de faces forme um anel com as arestas do primeiro caminho. Também há somente um caminho de uma face para outra, pois se houvesse dois, eles isolariam um grupo de vértices e, deste modo, o primeiro caminho não seria possível.

Portanto, uma vez fixado o primeiro caminho, o segundo é determinado unicamente e cruza cada aresta não incluída no primeiro caminho. Mas, o número de arestas no segundo caminho é $F - 1$. Logo

$$(V - 1) + (F - 1) = A, \text{ isto é } F - A + V = 2. \quad \blacksquare$$

3.8 O Estudo de Lhuilier*

Teorema 3.8.1 [Som 58]. *Se o poliedro é convexo com F faces, V vértices e A arestas, então $F - A + V = 2$*

Demonstração: Projetando o poliedro ortogonalmente nós obtemos um polígono duplamente coberto com uma rede de polígonos. Este é o caso para poliedro convexo onde a reta projetada não pode interceptar a fronteira em mais que dois pontos; pode este processo ser possível para projetar um poliedro não convexo desde que, se faça escolha adequada do plano de projeção.

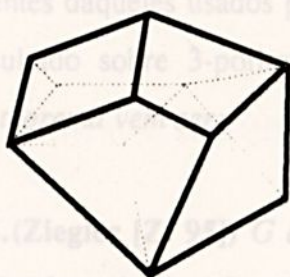


Figura (30)

Seja S ou soma dos ângulos desses polígonos, e seja o número de lados das F faces indicados por

$$n_1, n_2, \dots, n_f$$

$$S = \sum_{i=1}^F (n_i - 2)\pi = (2A - 2F)\pi$$

*Simon Lhuilier (1784 - 1853)

Mas se a fronteira do polígono tem n vértices, há $V - n$ vértices interiores, e temos também

$$S = 2(n - 2)\pi + (V - n)2\pi = (2V - 4)\pi$$

$$2A - 2F - 2V = -4$$

$$F - A + V = 2$$

3.9. O Estudo de Steinitz

Todo grafo d -politopal é simples.

Os grafos d -politopal possuem algumas caracterizações, em particular para $d \leq 3$

Para $d = 1$, 1-poliopo vem a ser associado ao grafo cujo diagrama é exatamente um segmento de reta, isto é, o grafo 1-politopal é o grafo completo K_2

Para $d = 2$, caso 2-politopo é o polígono convexo cujo grafo associado é o ciclo C , para algum $p \geq 3$.

Para $d = 3$, temos a elegante caracterização devido a Steinitz, o qual o chamou Teorema Fundamental da Teoria dos Grafos politopais. A formulação do resultado aqui está em termos diferentes daqueles usados por Steinitz, e é considerado o mais importante e profundo resultado sobre 3-politopo. Usando a terminologia moderna o enunciado do respectivo teorema vem ser:

Teorema de Steinitz 3.9.2.(Ziegler [Zi 95]) *G é o grafo de um politopo de 3-dimensões se, e somente se, G for simples, planar e 3-conexo.*

Demonstração: Seja G o grafo 3-politopal

Por observação anterior G é simples.

Cada 3-politopo é homeomorfo a um politopo encaixado na esfera, em outras palavras um poliedro é um politopo se, e somente se, sua superfície pode ser deformada com continuidade até transformar-se na superfície de uma esfera.

Já sabemos que a esfera é homeomorfa ao plano, logo pela composição de homeomorfismo, G é planar.

E pelo teorema de Balinski G é 3-conexo. ■

Em virtude deste teorema a Fórmula de Euler fica extendida para todos os grafos planares.

A demonstração da recíproca do teorema também é imediata.

Para o caso $d \geq 4$ não temos informações relevantes enquanto se refere ao estudo dos grafos d -politopais.

Fórmula de Euler para grafos planos:

Teorema (Euler 1750) *Seja G um grafo plano conexo com n , m e f número de vértices, arestas e regiões respectivamente do grafo G .*

Então

$$n - m + f = 2$$

Corolário. *Seja G um grafo plano com n vértices, m arestas, f faces e k componentes, então:*

$$n - m + f = k + 1$$

Corolário. *Se G não possuir triângulos, então $m \leq 2n - 4$*

Teorema *Cada grafo plano simples contém um vértice cujo grau é máximo 5.*

3.10. Pequena Análise e Comentários das Demonstrações

Ao analisarmos as demonstrações da Fórmula de Euler dos diversos autores, dentre os quais os mencionados neste trabalho, o fizemos observando o método aplicado, a validade da relação que representa seu enunciado, o domínio de validade, os conceitos por eles utilizados em suas demonstrações.

Quanto à mais tradicional delas que é devida a Cauchy e consiste no “desfolhamento” de um poliedro, conceituados autores como Delachet [De 62], Courant-Robbin [CoR 51] a aplicaram numa forma aparentemente compatível com



o nível de professores do ensino do segundo grau, porém, Lima [Li 82b] diz que é preciso explicitar condições as quais devem ser admitidas para que a demonstração seja válida. Ele mostra que a hipótese de que poliedro P é homeomorfo a uma esfera S^2 só permite a utilização da prova de Cauchy mediante recursos e técnicas avançadas.

Diz Lakatos a respeito *“suponhamos que alguém com limitada estrutura conceitual descubra a prova cauchyana da conjectura de Euler. Essa pessoa achará que todos os passos dessa experiência mental podem ser facilmente desempenhados em qualquer poliedro. Ela toma como óbvio, indubitável, o fato de que todos os poliedros são simples e que todas as faces são simplesmente ligadas. Nunca lhe ocorrerá converter seus lemas óbvios a condições numa conjectura aperfeiçoada e assim elaborar um teorema”*.

Em sua análise, Lima [Li 82b] mostra que as possibilidades do triângulo retirado na demonstração não são apenas aquelas duas consideradas. Na realidade há mais quatro possibilidades que não foram incluídas:

a) O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres mas nenhum dos vértices é livre (isto é, seus três vértices pertencem também a outras faces que ainda não foram retiradas do poliedro).

b) O triângulo a ser retirado tem três arestas livres mas nenhum de seus vértices é livre.

c) O triângulo a ser retirado tem três arestas livres e um vértice livre.

d) O triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres.

Consideremos a possibilidade a) em que o triângulo a ser omitido tem duas arestas e nenhum vértice livre. Em primeiro lugar, devemos deixar explícito que o Teorema de Euler se refere a poliedros conexos.

Então no processo de despetalar o poliedro, enquanto retirarmos faces como as da Figura (17), continuaremos obtendo poliedros conexos. Afirmamos agora que, ao retirar um triângulo do tipo a), se o poliedro era conexo deixará de sê-lo e, em geral se era desconexo, o número de suas componentes conexas aumentará de uma unidade.

No caso b), ao retirar o triângulo $V-A+F$ aumenta de duas unidades. O caso c) é inteiramente análogo ao a) e o caso d) é óbvio.

Para Lima a proposição provada pela demonstração de Cauchy é o seguinte:

Teorema. Seja P um poliedro no qual:

- 1) Toda aresta está contida exatamente em duas faces;
- 2) Duas faces quaisquer são encadeadas;
- 3) Todo ciclo é um bordo.

Então P cumpre a relação de Euler $V - A + F = 2$

Se o poliedro P é homeomorfo a uma esfera, então as condições 1) 2) 3) acima são satisfatórias. Mas isto é um resultado profundo da topologia, equivalente a demonstração da invariância dos grupos de homologia da esfera S^2 . Não se pode portanto, esperar obter uma demonstração elementar do teorema de Euler com a Hipótese de que P é homeomorfo a uma esfera S^2 , como fazem Courant-Robbin.

Algumas variações nesse método encontramos por exemplo em Comberousse que combinou os métodos da indução sobre o número de faces com o método de Cauchy.

No estudo de Cohen o método aplicado consiste em reconhecer a fórmula válida para a árvore geradora. Se o grafo plano conexo G não é uma árvore, então ele é transformado em uma árvore geradora pela retirada de arestas uma a uma sem desconectar G .

O que ocorre com Legendre é a utilização da Geometria esférica em sua demonstração. Sua hipótese começa com o mapeamento do poliedro com uma projeção central numa esfera contendo o centro do poliedro, colocando o raio unitário para esta esfera e centro de projeção de modo que a esfera fosse abrangida completamente, desde que, e apenas desde que por uma rede de polígonos esféricos. Assim seu primeiro lema era de que tal ponto existe. Seu segundo lema era de que para a rede poliedral na esfera, $V - A + F = 2$ mas, conseguiu isso ao decompor em lemas trivialmente verdadeiros os lemas da trigonometria esférica. Mas um ponto do qual tal projeção central seja possível só existe em poliedros convexos e em uns poucos poliedros convenientemente semi-convexos. Seria uma demonstração inteligível e bem aplicável ao ensino de segundo grau caso tais assuntos fossem abordados atualmente nesse nível.

Barbosa inova considerando uma pavimentação lado-lado de uma região poligonal fechada simples e aplicando o método heurístico. Em fases demonstra que

$P + N - A$ é de fato invariante. Segue depois combinando Cauchy a essa apresentação.

Já Pitombeira utiliza o método inverso do de Cauchy: a partir do grafo formado por um único ponto monta um grafo plano conexo arbitrário através de algumas operações.

Lhuillier e Steiner utilizam a soma dos ângulos dos polígonos. Pela obtenção dessa soma de duas maneiras, uma através dos triângulos em que se decompõem cada polígono, outra através dos vértices interiores e assim chega a fórmula de Euler.

Na demonstração do teorema de Steinitz, Grunbaum e Ziegler utilizam o teorema de Balinski e conceituação de conjunto politopal para provar que G é 3-conexo.

Validade da Relação indicada é um dos itens que nos propusermos a observar desde a leitura de Hilton & Pedersen [HiP 87] onde esses autores salientam que embora as relações $A = V + F - 2$ [1] e $V - A + F = 2$ [2] sejam consideradas equivalentes em vários livros textos, elas na verdade não levam à mesma informação.

A igualdade [1] oculta inteiramente o significado dimensional das quantidades V , A , F envolvidas ao passo que a [2] sugere a generalização.

Nos estudos aqui efetuados os autores em sua maioria estão em consonância com este aspecto ao enunciarem algebricamente a Fórmula por $V - A + F = 2$ que prevê a generalização. O mesmo não acontece por exemplo com Comberousse, Marmol - Beato, Kerekjarto e outros que a indicam por $A + 2 = F + V$

Autoria do Teorema - Em Proofs and Refutations Lakatos lembra que tem sido recentemente admitido a prioridade do resultado a Descartes. A base para isso é um manuscrito de Descartes [1639] copiado do original por Liebnitz em Paris no ano de 1676, redescoberto e publicado por Fouchier de Careil em 1860.

A prioridade não deve ser atribuída sem restrições a Descartes. É certo que René declara que o número de ângulos planos iguala $2\phi + 2\alpha - 4$ onde ϕ é entendendo por ele como o número de faces e α o número de ângulos sólidos ou

$\angle = 2\phi + 2\alpha - 4$ e como $2A = \angle$ (duas vezes mais ângulos planos do que arestas).

$$2A = 2\phi + 2\alpha - 4 = 2F + 2V - 4$$

Porém tais resultados só foram divulgados cem anos após a morte de Euler.

Nós então consideraremos com respeito a poliedros retilineares, sem contar com a convexidade, que são duas as fórmulas: Uma descoberta por Descartes que diz respeito a deficiência angular total de um poliedro convexo, que é a soma das deficiências angulares de cada vértice e que é sempre 4π [resultado muito importante do século XVI] e outra a celebrada Fórmula de Euler (chamada de característica de Euler para poliedros, a qual afirma que se $\chi = V - A + F$ então $\chi = 2$).

Observação: Polya mostra a equivalência dessas duas fórmulas conforme [HiP 87].

Dos muitos autores por nós estudados apenas Andre Delachet atribui o Teorema a Descartes, os demais são unânimes em afirmar que pertence a Euler a autoria da Relação.

Em Domínio de Validade vimos que para alguns autores a fórmula se aplica aos *poliedros simples* como é o caso de Courant-Robbin. Observam eles:

Temos visto que a Fórmula de Euler se verifica para todo poliedro simples mas a validade dela não está restrita aos poliedros da Geometria Elementar, de faces planas e arestas retas; a demonstração se aplica igualmente a poliedros simples de faces e arestas curvas, ou a qualquer subdivisão da superfície de uma esfera em regiões limitadas por arcos de curvas

Já os poliedros dos quais Lhuillier e Legendre se ocuparam são os convexos cujas faces são simplesmente conexas e com no mínimo três lados, sendo que o primeiro deles estendeu sua demonstração a poliedros multiconexos

Para Cohen, Pitombeira, Harary, Behzat, Tucker e outros grafo-teoristas a fórmula é verificada para grafos planares conexos e Steinitz se ocupa de grafos planares 3-conexos, concluindo sua validade para todos grafos planares.

Barbosa considera como domínio de validade a pavimentação lado-lado.

Quando restringimos o teorema a um domínio “seguro” pode não bastar para nossos fins. É necessário que lemas refutados com contra-exemplos, sejam reformulados e incorporados à conjectura melhorada.

Finalizemos estas considerações enfatizando que toda teoria se estrutura em conceitos e proposições primitivas e apresentando alguns dos conceitos com que deparamos na nossa pesquisa, bem como vários contra-exemplos os quais nos dizeres de Lakatos podem se constituir em crítica.



Para Courant-Robbin poliedro não tem “agulheiros” ou seja pode ser transformado com continuidade na superfície de uma esfera.

Legendre após dar sua definição geral de poliedros, *nome de sólido poliedral ou simplesmente poliedro a qualquer sólido ligado por planos ou faces planas*, apresenta uma prova que, por um lado, certamente não se aplica a todos os seus poliedros gerais mais, por outro, aplica-se a mais que poliedros convexos.

Contudo, em nota adicional, em tipos miúdos (reflexão posterior após tropeçar com exceções nunca vista) ele restringe, modesta mas seguramente a poliedros convexos.

Em termos de Educação Matemática não poderíamos deixar a obra de Lakatos. Em vez de apresentar símbolos e regras de combinação ele apresenta seres humanos, um professor e seus alunos. Em vez de apresentar um sistema construído a partir de seus primeiros princípios; ele apresenta um choque de opiniões, raciocínios e contra-raciocínios. A partir de um problema e uma conjectura (teorema) apresenta a Matemática crescendo, com uma teoria adquirindo forma sob nossos olhos, no calor do debate e da discordância, a dúvida cedendo lugar à certeza e em seguida a novas dúvidas.

Para Lakatos “demonstração” não significa um processo mecânico que transmite a verdade numa cadeia inquebrável, das hipóteses até as conclusões. Significa sim explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível e que sob a pressão de contra-exemplos se torna mais detalhada.

Em sua obra os alunos questionavam sobre o desaparecimento de uma aresta ou então de duas arestas e de um vértice, em um nível que a Cauchy e Poincaré, grandes matemáticos do século XIX, passara despercebido. Para esses matemáticos tais questões não existiam.

Euler não compartilhava dos pensamentos gregos (da era pré-euclidiana) de que *teorema é aquilo que é proposto com vistas a demonstração da própria coisa proposta*. Lakatos leu no sumário editorial de Euler (1756-7) que teoremas aritméticos foram descobertos muito antes que sua verdade tivesse sido confirmada por rígidas demonstrações.

Para esse processo de descoberta empregava Euler o termo moderno “indução” em vez da antiga “análise”.



Imre Lakatos a esse respeito acentua que a precedência heurística de resultado sobre o argumento, do teorema sobre a prova, tem profundas raízes no folclore matemático. O termo *semi-experimento* é tirado do citado editorial de Euler e segundo Polya denota sua utilização da observação e experimentos antecendendo as provas. Assim Leonhard Euler desistiu da prova visto ter notado a dificuldade em não poder fazer aquela “mínima observação” que fizeram os alunos em *Proofs and Refutations* qual seja introduzir uma única palavra quando da retirada do triângulo, ficando assim “da estrutura triangulada retiramos agora os triângulos *limítrofes* um a um”.

Já Cauchy pensava que a instrução para achar em cada estágio um triângulo que possa ser retirado pela supressão de duas arestas e um vértice ou uma aresta pode ser trivialmente executada para qualquer poliedro. Isto se relaciona com a incapacidade de imaginar um poliedro que não seja homeomorfo com a esfera. (Ver Lima em nossa análise).

Já Lhuillier notou a existência de poliedros que constituem-se em contra-exemplos como o cubo oco em que $V - A + F = 4$.

O trabalho de Lhuillier consistiu de duas partes distintas. Na primeira, o autor ofereceu uma prova original do teorema de Euler. Na segunda seu objetivo foi apontar as exceções a que está sujeito o teorema conforme Gergonne sobre o ensaio de Lhuillier em [1812 - 13].

Observamos que os geômetras do século XIX além de encontrar novas provas do teorema de Euler, empenharam-se em estabelecer as exceções de que ele padece em certas condições. Tais exceções foram declaradas, por exemplo por Poincot, S. Lhuillier e F. C Hessel tentou classificá-las.

Apresenta-nos ainda Lakatos o padrão exposto no clássico de Polya e Szego [1927]. “Deve-se inspecionar cada prova para ver se de fato utilizamos todas as suposições; deve-se tentar obter a mesma consequência de menos suposições ... e não se deve ficar satisfeito até que contra-exemplos mostrem que se chegou ao limite das possibilidades”.

O emprego de ajustagem de “monstros” (denominação utilizada por alunos no livro de Lakatos) em defesa de Euler foi feito com êxito por Matthiessen [1863] ao expor arestas e faces ocultas para esclarecer tudo o que é não euleriano inclusive

poliedros com túneis e cavidades. Soldou com economia, traçando apenas o mínimo número de arestas que dividem a face em subfaces simplesmente ligadas.

Procurou-se saber qual o erro nos exemplos em que falha a fórmula de Euler. Que condições geométricas tornando mais preciso o significado de F , V e A garantiriam a validade da fórmula de Euler?

Como resposta vemos que Polya formula isso de modo geral: *A situação, frequente em pesquisas matemáticas, é esta: já foi formulado um teorema, porém temos que dar significado mais preciso aos termos em que ele foi formulado para torna-lo estritamente correto*

Quanto a convexidade Poincaré argumenta: Ao invocar Legendre, e como altas autoridades, nada mais se faz que estimular um difundido preconceito de que são vítimas até mesmo alguns dos melhores espíritos: *que o domínio de validade do teorema de Euler consiste apenas de poliedros convexos.*

Sabemos que a convexidade é, até certo ponto causal para a característica euleriana. A relação de Euler corresponde nos dizeres de Sommerville [1929] a algo mais fundamental que a convexidade.

Mas se por um lado o problema da demonstração foi o foco de nossas atenções, por outro nos encantou a dialética e metodologia heurística de Lakatos herdada em parte de seus avós Popper e Polya nos dizeres de Davis & Hersh [DaH 85].

Trata-se de um começo razoável e encorajador. Conduz-nos a esperança de um diálogo novo e esclarecedor, que deverá levar a progressos sobre o problema fundamental, o problema da verdade e do significado da matemática, o problema do conhecimento matemático.

Seu objetivo vem de encontro aos nossos, qual sejam aperfeiçoar a questão de que a matemática informal, quase empírica não cresce por meio de um aumento monótono da quantidade de teoremas deduzidos endubitavelmente mas, por meio da melhoria incessante de adivinhações, especulações e críticas, pela lógica das demonstrações e refutações.

Figura (32)

$$V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$$

CAPÍTULO 4

Extensões da Fórmula de Euler

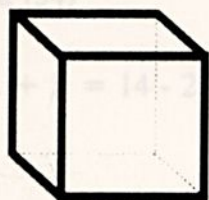
Figura (33)

$$V - A + F = 7 - 12 + 7 = 2$$

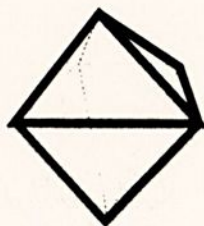
4.0. Poliedros Convexos e Côncavos

Em geral a Fórmula de Euler é considerada válida para superfícies poliédricas convexas, principalmente para livros didáticos, no entanto ela é válida também para algumas como os exemplos abaixo.

Figura (34)



$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$



$$V - A + F = 6 - 12 + 8 = 2$$

Figura (35)

$$V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2$$

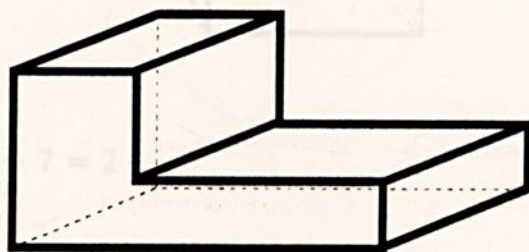


Figura (32)

$$V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$$

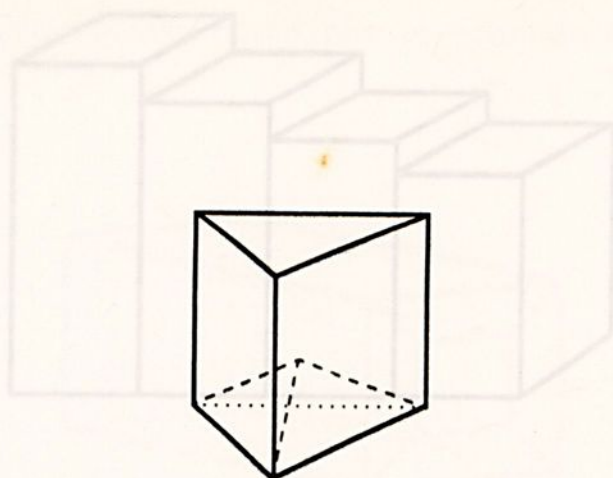


Figura (33)

$$V - A + F = 20 - 36 + 18 = 2$$

$$V - A + F = 7 - 12 + 7 = 2$$

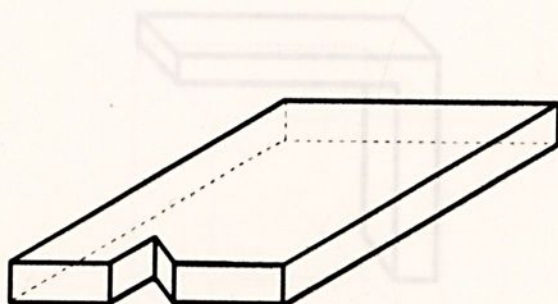


Figura (34)

$$V - A + F = 12 - 20 + 10 = 2$$

$$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$$

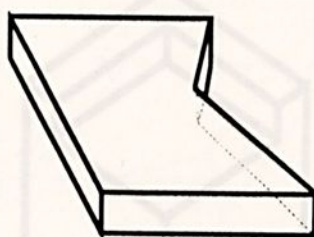


Figura (35)

$$V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2$$

Figura (36)

$$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$$

Nota: Existem algumas figuras para as quais não é válida como nos exemplos abaixo:

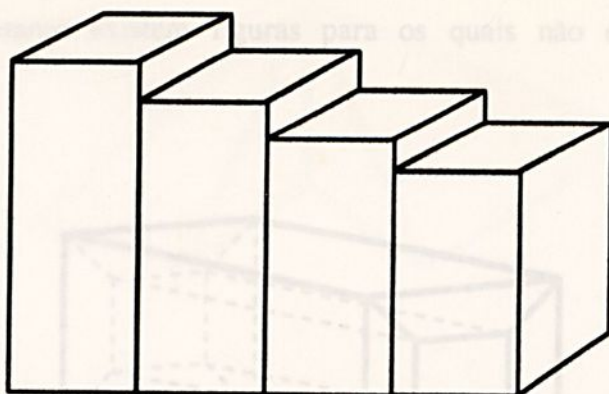


Figura (36)

$$V - A + F = 20 - 36 + 18 = 2$$

$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

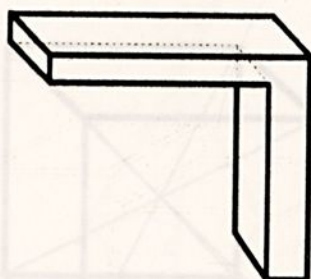


Figura (37)

$$V - A + F = 12 - 20 + 10 = 2$$

$$V - A + F = 9 - 20 + 12 = 1$$

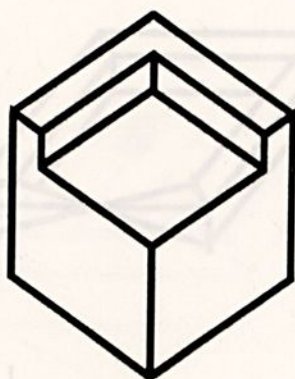


Figura (41)

$$V - A + F = 17 - 36 + 20 = 1$$

Figura (38)

$$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$$

Nota: Entretanto existem figuras para os quais não é válida como nos exemplos abaixo:

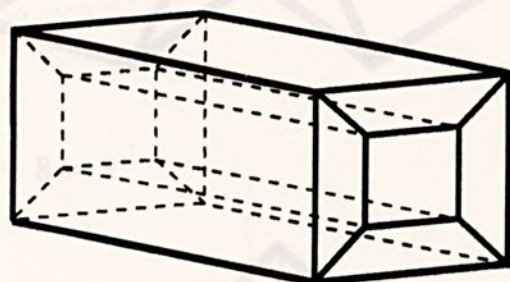


Figura (39)

$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

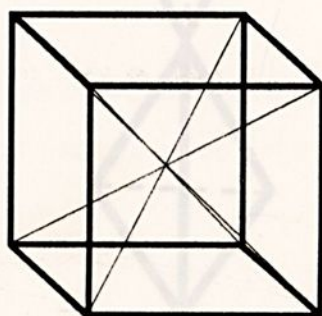


Figura (40)

$$V - A + F = 9 - 20 + 12 = 1$$

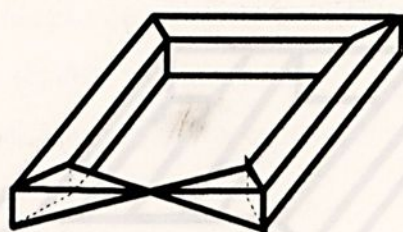


Figura (41)

$$V - A + F = 17 - 36 + 20 = 1$$

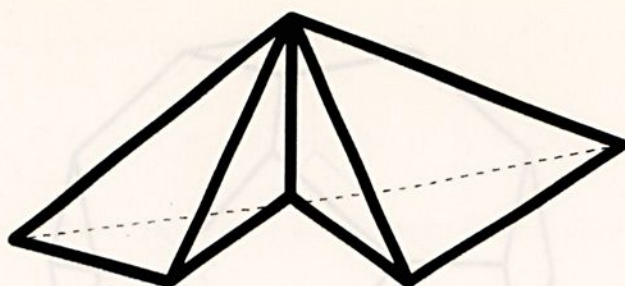


Figura (42)

$$V - A + F = 6 - 11 + 8 = 3$$

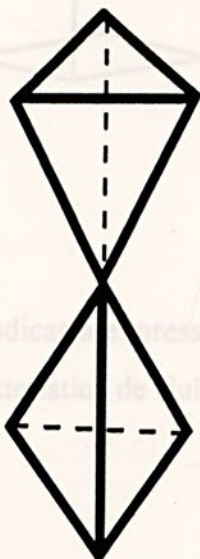


Figura (43)

$$V - A + F = 8 - 12 + 7 = 3$$

Figura (44)

$$V - A + F = 8 - 12 + 7 = 3$$

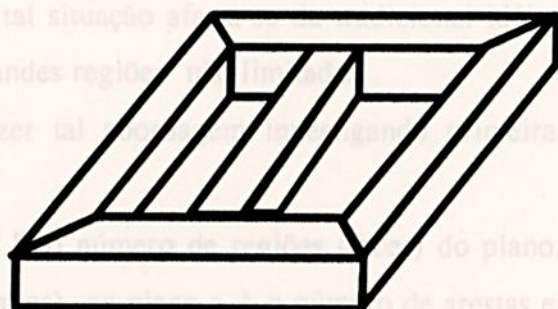


Figura (44)

$$V - A + F = 24 - 48 + 22 = -2$$

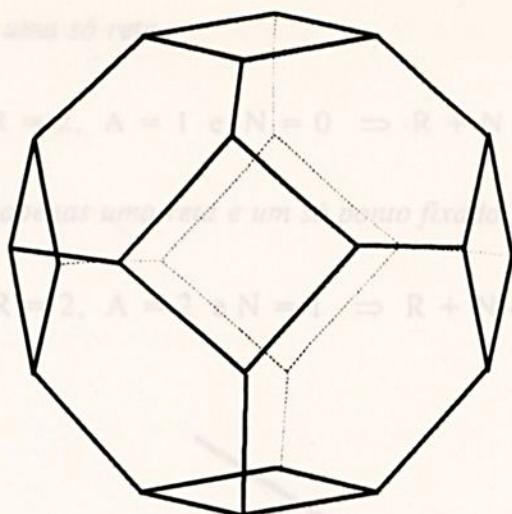


Figura (45)

$$V - A + F = 24 - 36 + 8 = -4$$

De onde a conveniência de indicar a expressão $V + F - A$ por $\chi(P)$ chamada característica do poliedro P ou característica de Euler - Poincaré.

4.1 Extensões para Retas no Plano

A questão a que nos propusemos é a de estender a Fórmula de Euler para retas num plano, visto que tal situação afasta-se da tradicional idéia em que todo plano é utilizado sugerindo grandes regiões não limitadas.

Procuramos fazer tal abordagem investigando primeiramente situações bem particulares.

Denotemos por R o número de regiões (faces) do plano, N o número de nós (vértices, pontos marcados) no plano e A o número de arestas entendidas como retas, semiretas ou segmentos de retas sem nós interiores.

Observamos que:

a) O plano sem retas

$$R = 1, A = N = 0 \Rightarrow R + N - A = 1.$$



b) O plano com uma só reta

$$R = 2, A = 1 \text{ e } N = 0 \Rightarrow R + N - A = 1.$$

c) O plano com apenas uma reta e um só ponto fixado sobre ela (Figura 46).

$$R = 2, A = 2 \text{ e } N = 1 \Rightarrow R + N - A = 1.$$



Figura (46) uma reta e duas arestas.

d) O plano com duas retas

d1) paralelas: $R = 3, A = 2, N = 0 \Rightarrow R + N - A = 1$

d2) concorrentes: $R = A = 4, N = 1 \Rightarrow R + N - A = 1$



d1)



d2)

Figura (47)

e) O plano com três retas

e1) paralelas

$$R = 4, A = 3, N = 0 \Rightarrow R + N - A = 1$$

e2) duas paralelas e uma transversal

Na k -ésima re $R = 6, A = 7, N = 2 \Rightarrow R + N - A = 1$ as m retas teremos

mais m novas arestas. Logo

e3) concorrentes

Desde que são formados m nós com m retas teremos:

$$R = 6, A = 6, N = 1 \Rightarrow R + N - A = 1$$

donde *e4) duas a duas concorrentes*

$$R_{k+1} + N_{k+1} - A_{k+1} = R_k + m + 1 + N_k + m - A_k - 2m - 1 = R_k + N_k - A_k = 1.$$

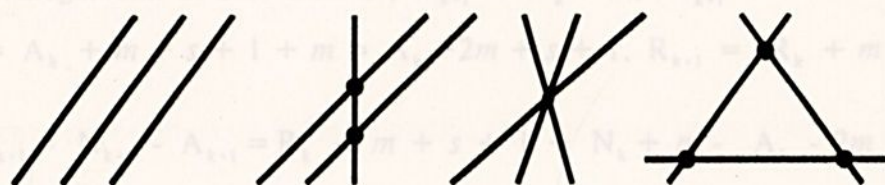
$$R = 7, A = 9, N = 3 \Rightarrow R + N - A = 1$$

Analogamente ao caso anterior, $N_{k+1} = N_k + m, A_{k+1} =$

$$= A_k + m + 1 + m - 2m - 1 = A_k.$$

$$\text{Dai, } R_{k+1} + N_{k+1} - A_{k+1} = R_k + m + 1 + N_k + m - A_k - 2m - 1 = R_k + N_k - A_k = 1.$$

$$= R_k + N_k - A_k = 1.$$



e1)

e2)

e3)

e4)

Figura (48)

Da observação dos casos particulares inferimos que é plausível a fórmula

4.2 Problemas de Contagem de Regiões

$$R + N - A = 1.$$

Demonstraremos por indução:

Seja que para k retas no plano temos $R_k + N_k - A_k = 1$.

Acrescentamos uma outra reta e suponhamos que ela determina m novos nós com as retas anteriores.

Caso 1: $m = 0$.

Esta situação só é possível se temos um feixe de paralelas. Então:

$$R_{k+1} = R_k + 1, \quad N_{k+1} = N_k = 0, \quad A_{k+1} = A_k + 1.$$

Temos

$$R_{k+1} + N_{k+1} - A_{k+1} = R_k + 1 + N_k - A_k - 1 = 1.$$

Caso 2: $m \neq 0$.

i) A nova reta possui todos m nós distintos dos N_k nós existentes:

$$N_{k+1} = N_k + m.$$

Na k -ésima reta ficam formadas as $m + 1$ novas arestas, e nas m retas teremos mais m novas arestas. Logo

$$A_{k+1} = A_k + 2m + 1.$$

Desde que são formados m nós com m retas, teremos:

$$R_{k+1} = R_k + m + 1,$$

donde segue que

$$R_{k+1} + N_{k+1} - A_{k+1} = R_k + m + 1 + N_k + m - A_k - 2m - 1 = R_k + N_k - A_k = 1.$$

ii) A nova reta possui s nós comuns com os já existentes:

Analogamente ao caso anterior, $N_{k+1} = N_k + m$, $A_{k+1} =$

$$= A_k + m + s + 1 + m = A_k + 2m + s + 1, R_{k+1} = R_k + m + s + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Daí, } R_{k+1} + N_{k+1} - A_{k+1} &= R_k + m + s + 1 + N_k + m - A_k - 2m - s - 1 = \\ &= R_k + N_k - A_k = 1. \end{aligned}$$

Isto conclui a extensão da Fórmula de Euler para Retas no Plano.

4.2 Problemas de Contagem de Regiões

É bastante clássico o problema: n linhas retas podem dividir o plano em quando muito $(n^2 + n + 2) / 2$ regiões cuja prova encontramos em dada por indução, ou em Eves [Eu 72] e Niven [Ni 65] que utiliza funções geradoras.

Outras formas são propostas impondo restrições para as retas do plano, para as quais são empregados vários argumentos.

Em Barbosa [Ba 76c] o autor estuda com a fórmula de Gregory - Newton para Diferenças Finitas generalizada para várias variáveis, contagens para número de nós e arestas além de regiões para situações relativamente gerais.

Procuramos aqui, face a presença só dos elementos componentes da Fórmula de Euler, resolver alguns destes problemas usando este novo recurso. Em especial, conseguimos alguns resultados julgados originais.

APLICAÇÃO I

Dados: r retas coplanares.

Restrições: não existem retas paralelas, não existem 3 retas concorrentes num mesmo ponto.

Argumento: Como cada reta cruza com $r - 1$ retas, qualquer uma tem $r - 1$ nós; e como não existem nós de multiplicidade maior do que 2 então cada uma tem r arestas, ou que $A = r^2$ e obviamente $N = \binom{r}{2} = (r^2 - r) / 2$.

Segue da Fórmula de Euler extendida para retas no plano que:

$$R = A - N + 1 = r^2 - \binom{r}{2} + 1 = (r^2 + r + 2) / 2.$$

Dados: $p_1 + p_2$ retas.

Restrições: p_1 retas paralelas, p_2 retas paralelas.

APLICAÇÃO II

Argumento: Cada reta do primeiro feixe tem p_2 nós, logo tem $p_2 + 1$ arestas.

Dados: r retas coplanares.

Restrições: p retas são paralelas ($p \leq r$); não existem 3 retas concorrentes em um mesmo ponto.

Argumento: Como o número de nós de cada reta do feixe de paralelas é $r - p$ temos:

a) o número de nós nas retas do feixe $= p(r - p)$.

b) número de arestas nas retas do feixe $= p(r - p + 1)$.

Contando o número de nós em cada reta que não pertence ao feixe que é $r - 1$,

temos:

c) número de arestas em cada reta não pertencente ao feixe $= r$, e número total $= r(r - p)$.

d) número de nós fora do feixe = $\binom{r-p}{2}$.

Em resumo, por a) e d) temos $N = p(r-p) + \binom{r-p}{2}$, por b) e c) vem que $A = p(r-p+1) + r(r-p)$. Aplicando a Fórmula de Euler para retas no plano encontramos:

$$R = [(r-p)(r-p+1) + 2(p+1)] / 2.$$

Em particular se $p = 0$, $r(r+1)/2 + 1 = (r^2 + r + 2)/2$.

APLICAÇÃO III

Dados: $p_1 + p_2$ retas.

Restrições: p_1 retas paralelas, p_2 retas paralelas.

Argumento: Cada reta do primeiro feixe tem p_2 nós, logo tem $p_2 + 1$ arestas, portanto todas tem $p_1(p_2 + 1)$ arestas.

Com o mesmo argumento para o segundo feixe, segue que $p_2(p_1 + 1)$ arestas.

Em resumo: $N = p_1 \times p_2$, $A = p_1(p_2 + 1) + p_2(p_1 + 1) =$

$$= p_1 \times p_2 + p_1 + p_2 \times p_1 + p_2. \text{ Daí,}$$

$$R = p_1(p_2 + 1) + p_2(p_1 + 1) - p_1 \times p_2 + 1 = 1 + p_1 + p_2 + p_1 \times p_2 = (p_1 + 1)(p_2 + 1).$$

Exemplo: dados dois feixes de retas paralelas com $p_1 = 3$ e $p_2 = 4 \Rightarrow \Rightarrow R = (3 + 1)(4 + 1) = 4 \times 5 = 20$, ou $1 + 3 + 4 + 12 = 20$.

Procuremos agora estender para k feixes de retas paralelas.

Dados: $p_1 + p_2 + \dots + p_k$ retas $k \geq 2$.

Restrições: p_1 retas paralelas, p_2 retas paralelas, ..., p_k retas paralelas.

Argumento: Cada reta do primeiro feixe tem p_2 nós em relação às retas do segundo feixe e tem p_3 nós em relação às retas do feixe com p_3 retas, ..., tem p_k em relação ao feixe com p_k retas.

Com relação às arestas:

do segundo feixe temos um total de $p_1(p_2 + 1)$ arestas;

do terceiro feixe temos um total de $p_1(p_3 + 1)$ arestas;

.... do k -ésimo feixe temos um total de $p_1(p_k + 1)$ arestas.

Exemplo:

Denotemos o número de arestas em cada reta do primeiro feixe por:

$$A_{11} = p_1(p_2 + 1) \text{ em relação a } p_2,$$

$$A_{12} = p_1(p_3 + 1) \text{ em relação a } p_3,$$

$$A_{13} = p_1(p_4 + 1) \text{ em relação a } p_4,$$

$$\dots, A_{1k-1} = p_1(p_k + 1) \text{ em relação a } p_k.$$

Assim, o total de arestas do primeiro feixe em relação aos demais é

Figura (49)

$$\sum_{i=1}^{k-1} A_{1i} = p_1(p_2 + 1) + p_1(p_3 + 1) + \dots + p_1(p_k + 1).$$

Daí, indicando o total de arestas de p_1 por A_{p_1} , vem

$$A_{p_1} = p_1(p_2 + p_3 + \dots + p_k + 1).$$

Expliquemos a substituição do “+1” de cada fator: por exemplo, em $p_2 + 1$ este +1 deu lugar a subdivisão em $p_3 + 1$, este último +1 deu lugar a subdivisão em $p_4 + 1$, etc...

Portanto somente após $p_{k-1} + 1$ onde o +1 é subdividido em $p_k + 1$ regiões teremos todas as arestas obtidas pelos k feixes sobre o feixe p_1 .

Observamos que $A_{p_1} = p_1(p_2 + p_3 + \dots + p_k + 1) = p_1[(\sum_{j=2}^k p_j) + 1]$. O mesmo raciocínio vale para o segundo feixe onde temos $p_2(p_1 + p_3 + \dots + p_k + 1)$, para o terceiro feixe, ..., para o k -ésimo feixe onde temos $p_k(p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} + 1)$.

Exemplo:

Para $k = 3$ cujos feixes são p_1 com 2 retas, p_2 com 3 retas e p_3 com 3 retas, os feixes se interceptam conforme ilustrado na Figura 49.

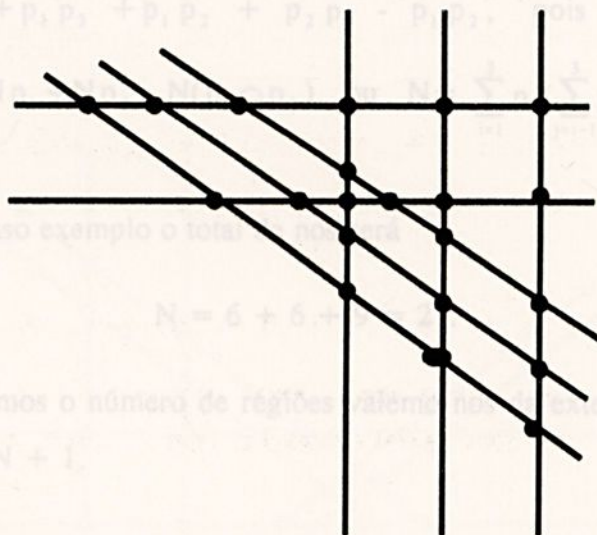


Figura (49)

O número de arestas em relação a $p_2 = p_1(p_2 + 1)$ e o número de arestas em relação a $p_3 = p_1(p_3 + 1)$.

Indicando o total de arestas de p_1 por A_{p_1} , de p_2 por A_{p_2} , ..., então:

$$A'_{p_1} \text{ em relação a } p_2 + p_3 \Rightarrow A'_{p_1} = p_1(p_2 + p_3 + 1),$$

$$A'_{p_2} \text{ em relação a } p_1 + p_3 \Rightarrow A'_{p_2} = p_2(p_1 + p_3 + 1),$$

$$A'_{p_3} \text{ em relação a } p_1 + p_2 \Rightarrow A'_{p_3} = p_3(p_1 + p_2 + 1).$$

Somando as arestas dos três feixes obtemos

$$A = p_1(p_2 + p_3 + 1) + p_2(p_1 + p_3 + 1) + p_3(p_1 + p_2 + 1) = \\ = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 + p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + p_3 = p_1 + p_2 + p_3 + \\ + 2p_1 p_2 + 2p_1 p_3 + 2p_2 p_3.$$

Substituindo pelos valores dados

$$A = 2 + 3 + 3 + 2(2 \times 3) + 2(2 \times 3) + 2(3 \times 3) = 50 \text{ arestas.}$$

Calculemos agora o número de nós (vértices). Denotemos por:

Np_1 o número de nós em relação a p_2 e $p_3 \Rightarrow Np_1 = p_1(p_2 + p_3)$.

Np_2 o número de nós em relação a p_1 e $p_3 \Rightarrow Np_2 = p_2(p_1 + p_3)$.

Assim, $\sum_{i=1}^2 Np_i = p_1(p_2 + p_3) + p_2(p_1 + p_3)$. Então,

$N = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_3 - p_1 p_2$, pois lembramos que

$$N(p_1 \cup p_2) = Np_1 + Np_2 - N(p_1 \cap p_2), \text{ ou } N = \sum_{i=1}^2 p_i \left(\sum_{j=i+1}^3 p_j \right).$$

Portanto, no nosso exemplo o total de nós será

$$N = 6 + 6 + 9 = 21.$$

Para determinarmos o número de regiões valemo-nos da extensão da Fórmula de Euler: $R = A - N + 1$.

$$R = \sum_{i=1}^K p_i \left[\left(\sum_{j \neq i}^K p_j \right) + 1 \right] - \sum_{i=1}^{k-1} p_i \left(\sum_{j=i+1}^k p_j \right) + 1 = \\ = \sum_{i=1}^K p_i \left(\sum_{j \neq i}^K p_j \right) + \sum_{i=1}^K p_i - \sum_{i=1}^{k-1} p_i \left(\sum_{j=i+1}^k p_j \right) + 1 = \\ = \sum_{i=2}^k p_i \left(\sum_{j < i}^k p_j \right) + \sum_{i=1}^K p_i + 1.$$

No exemplo que estamos considerando o número de regiões é dado por:

Figura (50)



$$R = \sum_{i=2}^3 p_i \left(\sum_{j<i}^3 p_j \right) + \sum_{i=1}^3 p_i + 1.$$

$$\begin{aligned} R &= p_1 (p_2 + p_3) + p_2 (p_1 + p_3) + p_3 (p_1 + p_2) + p_1 + p_2 + p_3 - \\ &- [p_1 (p_2 + p_3) + p_2 (p_3)] + 1 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_1 + p_2 p_3 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + \\ &+ p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + 1 = p_2 p_1 + p_3 (p_1 + p_2) + p_1 + p_2 + p_3 + \\ &+ 1 = 6 + 6 + 9 + 2 + 3 + 3 + 1 = 30 \text{ regiões.} \end{aligned}$$

Consideremos agora um outro exemplo em que $k=4$ feixes.

Seja $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ retas cujos feixes tem

$p_1 = 2$ retas paralelas,

$p_2 = 3$ retas paralelas,

$p_3 = 3$ retas paralelas e $p_4 = 2$ retas paralelas, conforme ilustrado na

Figura 50.

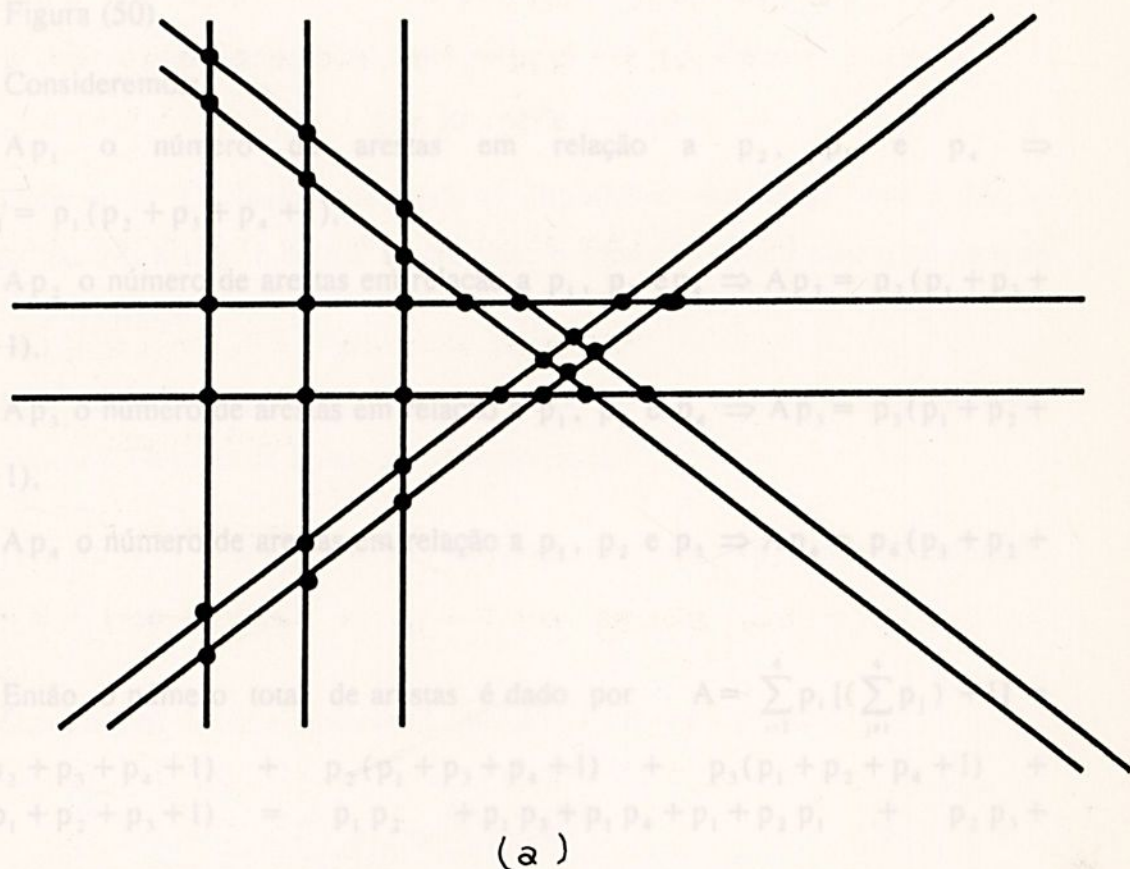
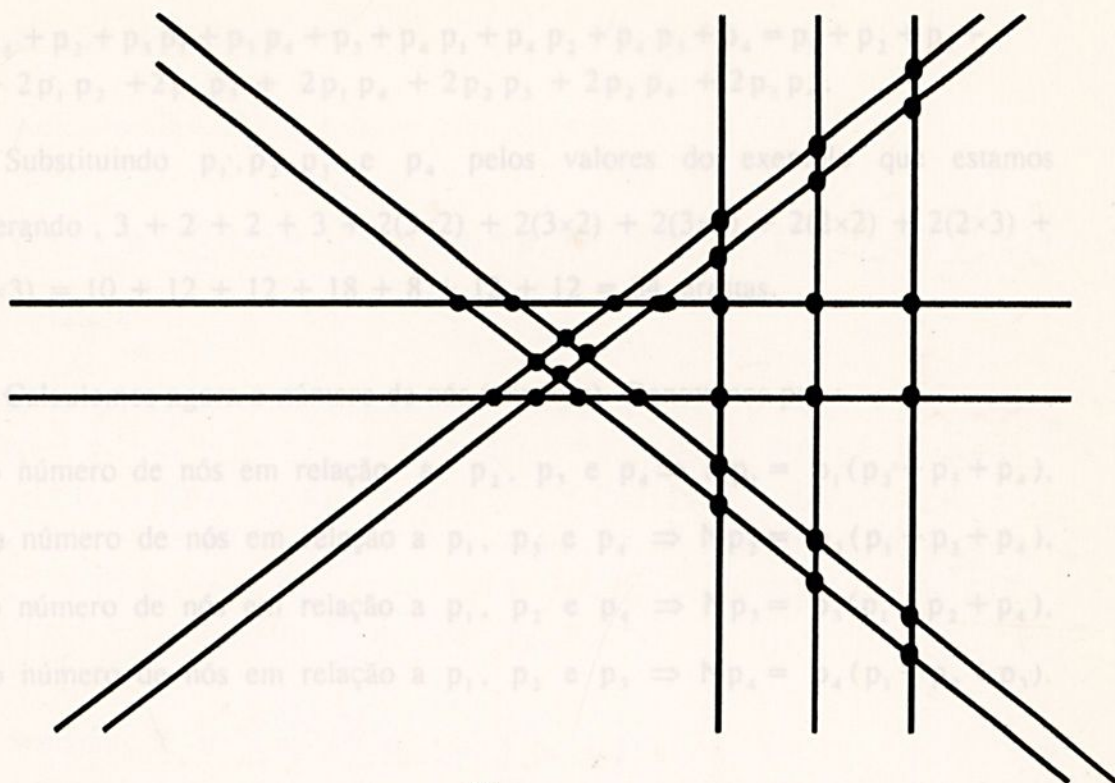


Figura (50)



(b)

Figura (50)

Consideremos:

A_{p_1} o número de arestas em relação a p_2 , p_3 e $p_4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A_{p_1} = p_1(p_2 + p_3 + p_4 + 1),$

A_{p_2} o número de arestas em relação a p_1 , p_3 e $p_4 \Rightarrow A_{p_2} = p_2(p_1 + p_3 + p_4 + 1),$

A_{p_3} o número de arestas em relação a p_1 , p_2 e $p_4 \Rightarrow A_{p_3} = p_3(p_1 + p_2 + p_4 + 1),$

A_{p_4} o número de arestas em relação a p_1 , p_2 e $p_3 \Rightarrow A_{p_4} = p_4(p_1 + p_2 + p_3 + 1).$

Então o número total de arestas é dado por $A = \sum_{i=1}^4 p_i [(\sum_{j \neq i} p_j) + 1] =$
 $= p_1(p_2 + p_3 + p_4 + 1) + p_2(p_1 + p_3 + p_4 + 1) + p_3(p_1 + p_2 + p_4 + 1) + p_4(p_1 + p_2 + p_3 + 1) =$
 $= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_1 + p_2 p_1 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_2 + p_3 p_1 + p_3 p_2 + p_3 p_4 + p_3 + p_4 p_1 + p_4 p_2 + p_4 p_3 + p_4$

$$+ p_2 p_4 + p_2 + p_3 p_1 + p_3 p_4 + p_3 + p_4 p_1 + p_4 p_2 + p_4 p_3 + p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2p_1 p_2 + 2p_1 p_3 + 2p_1 p_4 + 2p_2 p_3 + 2p_2 p_4 + 2p_3 p_4.$$

Substituindo p_1, p_2, p_3 e p_4 pelos valores do exemplo que estamos considerando, $3 + 2 + 2 + 3 + 2(3 \times 2) + 2(3 \times 2) + 2(3 \times 3) + 2(2 \times 2) + 2(2 \times 3) + 2(2 \times 3) = 10 + 12 + 12 + 18 + 8 + 12 + 12 = 84$ arestas.

Calculemos agora o número de nós (vértices). Denotemos por :

Np_1 o número de nós em relação a p_2, p_3 e $p_4 \Rightarrow Np_1 = p_1(p_2 + p_3 + p_4)$,

Np_2 o número de nós em relação a p_1, p_3 e $p_4 \Rightarrow Np_2 = p_2(p_1 + p_3 + p_4)$,

Np_3 o número de nós em relação a p_1, p_2 e $p_4 \Rightarrow Np_3 = p_3(p_1 + p_2 + p_4)$,

Np_4 o número de nós em relação a p_1, p_2 e $p_3 \Rightarrow Np_4 = p_4(p_1 + p_2 + p_3)$.

Sendo que $N(p_1 \cup p_2 \cup p_3) = p_1(p_2 + p_3 + p_4) + p_2(p_3 + p_4) + p_3(p_4)$, se substituirmos pelos valores do nosso exemplo, $N = 2(3+3+2) + 3(3+2) + 3(2) = 16 + 15 + 6 = 37$ vértices.

O número de regiões é dado por $R = A - N + 1$. Assim,

$$R = 84 - 37 + 1 = 48.$$

Observação: Quaisquer que sejam as disposições dos feixes, dois a dois se cruzando, ou três a três, quatro a quatro, etc, o resultado obtido para o número de regiões será o mesmo.

Finalmente, generalizemos agora o raciocínio que temos utilizado até aqui. Vamos provar a Fórmula de Euler por indução finita:

Para $n = 1$, se $p_1 = r \Rightarrow Ap_1 = r$ e $Np_1 = 0$. Claramente, $R = A - N + 1$ se verifica.

Suponhamos válida a hipótese de indução para $n = k - 1$, isto é,

$$R = \sum_{i=2}^{k-1} p_i \left(\sum_{j<i}^{k-1} p_j \right) + \sum_{i=1}^{k-1} p_i + 1 \quad (*)$$

provemos para $n=k$.

Adicionando a (*) o k -ésimo feixe teremos:

$$R = \sum_{i=1}^{k-1} p_i \left[\left(\sum_{j \neq i}^{k-1} p_j \right) + 1 \right] + p_k (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} + 1) - \left[\sum_{i=1}^{k-1} p_i \left(\sum_{j=i+1}^{k-1} p_j \right) + p_{k-1} (p_k) \right], \text{ ou}$$

$$R = p_1 (p_2 + p_3 + \dots + p_{k-1} + 1) + p_2 (p_1 + p_3 + \dots + p_{k-1} + 1) + \dots + p_{k-1} (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{k-2} + 1) + p_k (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{k-1} + 1) - p_1 (p_2 + p_3 + \dots + p_{k-1}) - p_2 (p_3 + p_4 + \dots + p_{k-1}) - \dots - p_{k-2} (p_{k-1}) - p_1 p_k - p_2 p_k - \dots - p_{k-1} p_k + 1 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_1 p_{k-1} + p_1 + p_2 p_1 + p_2 p_3 + \dots + p_2 p_{k-1} + p_2 + \dots + p_k p_{k-1} + p_k - p_1 p_2 - p_1 p_3 - \dots - p_1 p_{k-1} - p_2 p_3 - p_2 p_4 - \dots - p_2 p_{k-1} - \dots - p_{k-2} (p_{k-1}) - p_{k-2} p_k - p_{k-1} p_k + 1.$$

$$\text{Portanto, } R = \sum_{i=2}^k p_i \left[\left(\sum_{j < i}^k p_j \right) \right] + \sum_{i=1}^k p_i + 1. \quad \blacksquare$$

Exemplos:

4.3. Extensão para superfícies poliédricas com saliências ou cavidades

4.3.1. Saliências poliédricas eulerianas em faces de poliedros eulerianos sem que tenha elemento comum com as arestas ou vértices de face, onde entende-se que cada poliedro saliência é assentado por uma de suas faces no interior da face considerada.



Figura (51)

Sejam os números F , V e A do poliedro e f_i , v_i , e a_i da i -ésima saliência ($i = 1, 2, 3, \dots, s$) e F' , V' e A' do poliedro obtido.

Sejam x_i o número de vértices da saliência i da face assentada igual ao número de arestas.

Temos:

$$F' = F + \sum_{i=1}^s (f_i - 1)$$

$$V' = V + \sum_{i=1}^s v_i$$

$$A' = A + \sum_{i=1}^s a_i$$

Portanto

$$F' + V' - A' = (F + V - A) + \sum_{i=1}^s (f_i + v_i - a_i) - s$$

$$\text{ou que } F' + V' - A' = 2 + 2s - s = 2 + s$$

$$\text{ou seja: } F' + V' - A' = 2 + s$$

Exemplos:

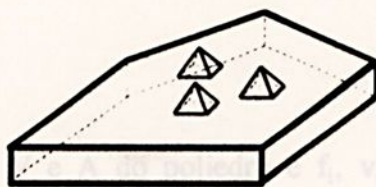


Figura (52)

Para $s = 3$

$$F = 7 \quad f_1 = 5 \quad f_2 = 5 \quad f_3 = 5$$

$$V = 10 \quad v_1 = 5 \quad v_2 = 5 \quad v_3 = 5$$

$$A = 15 \quad a_1 = 8 \quad a_2 = 8 \quad a_3 = 8$$

$$F' + V' - A' = F + V - A + \sum_{i=1}^3 (f_i + v_i - a_i) - s$$

$$= 7 + 10 - 15 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 - 8 - 8 - 8 = 3$$

$$= 2 + 30 - 24 - 3 = 5 = 2 + 3 = 2 + s$$

4.3.2. Cavidades poliédricas eulerianas em poliedros eulerianos sem que tenha elemento comum com arestas ou vértices de face.

Exemplo:

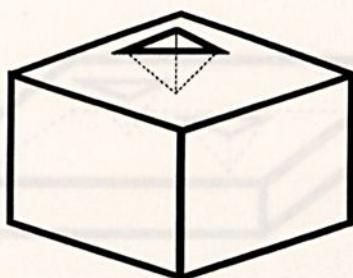
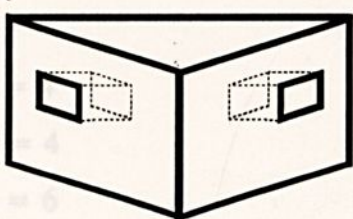


Figura (54)



Para $c = 2$

$$F = 6 \quad f_1 = 4 \quad f_2 = 4$$

$$V = 8 \quad v_1 = 4 \quad v_2 = 4$$

$$A = 12 \quad a_1 = 6 \quad a_2 = 6$$

$$F' + V' - A' = F + V - A + \sum_{i=1}^c (f_i + v_i - a_i) - c =$$

Figura (53)

$$= 6 + 8 - 12 + (4 + 4) - (6 + 6) - 2 =$$

$$= 2 + 4 - 2 = 2 + 2 = 2 + c$$

Sejam os números F , V e A do poliedro e f_i , v_i e a_i da i -ésima cavidade ($i = 1, 2, 3, \dots, c$) e F' , V' e A' do poliedro obtido.

Temos:

$$F' = F + \sum_{i=1}^c (f_i - 1)$$

$$V' = V + \sum_{i=1}^c v_i$$

$$A' = A + \sum_{i=1}^c a_i$$

Portanto

$$F' + V' - A' = (F + V - A) + \sum_{i=1}^c (f_i + v_i - a_i) - c$$

$$\text{ou que } F' + V' - A' = 2 + 2c - c = 2 + c$$

Figura (55)

ou seja: $F' + V' - A' = 2 + c$

Temos:

Exemplo:

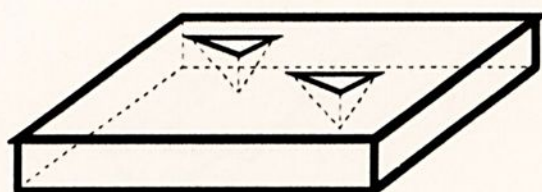


Figura (54)

Para $c = 2$

$$F = 6 \quad f_1 = 4 \quad f_2 = 4$$

$$V = 8 \quad v_1 = 4 \quad v_2 = 4$$

$$A = 12 \quad a_1 = 6 \quad a_2 = 6$$

$$\begin{aligned} F' + V' - A' &= F + V - A + \sum_{i=1}^2 (f_i + v_i - a_i) - c = \\ &= 6 + 8 - 12 + (4 + 4) - (6 + 6) - 2 = \\ &= 2 + 4 - 2 = 2 + 2 = 2 + c \end{aligned}$$

4.4. Superfícies obtidas por perfurações poliédricas eulerianas, onde se entende que a perfuração é de face a face desde que elas não se cruzem.

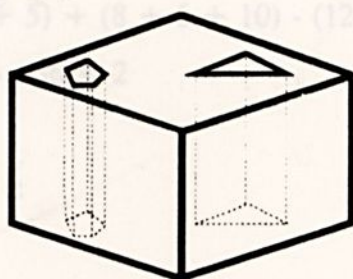


Figura (55)

Seja p perfurações. Idem (4.3) F , V , A , f_i , v_i , a_i e F' , V' , A' .

Temos:

$$F' = F + \sum_{i=1}^p (f_i - 2)$$

$$V' = V + \sum_{i=1}^p v_i$$

$$A' = A + \sum_{i=1}^p a_i$$

Portanto

Figura (57)

$$F' + V' - A' = (F + V - A) + \sum_{i=1}^p (f_i + v_i - a_i) - 2p$$

Seja a Fórmula de Euler válida para A e A' :

$$\text{ou que } F' + V' - A' = 2 + 2p - 2p$$

$$\text{ou seja: } F' + V' - A' = 2$$

Para encontrar uma aresta, teremos as seguintes possibilidades:

a) a aresta é livre

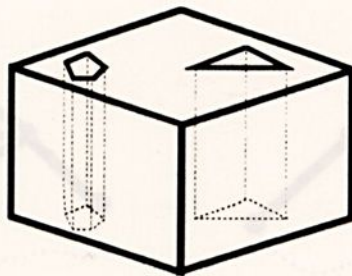


Figura (58)

Figura (56)

b) a aresta liga dois vértices sem arestas

Exemplo:

$$F = 6 \quad f_1 = 5 \quad f_2 = 7$$

$$V = 8 \quad v_1 = 6 \quad v_2 = 10$$

$$A = 12 \quad a_1 = 9 \quad a_2 = 15$$

$$\begin{aligned} F' + V' - A' &= (6 + 3 + 5) + (8 + 6 + 10) - (12 + 9 + 15) = \\ &= 14 + 24 - 36 = 2 \end{aligned}$$

Em geral:

$$F' + V' - A' = 2 + s + c$$

c) a aresta é múltipla

4.5. Extensão para Grafos Conexos com arestas múltiplas (multigrafos)

Figura (50)



Figura (57)

Seja a Fórmula de Euler válida para A arestas:

$$V + F - A = 2$$

Acrescentando uma aresta teremos as seguintes possibilidades:

a) a aresta é livre

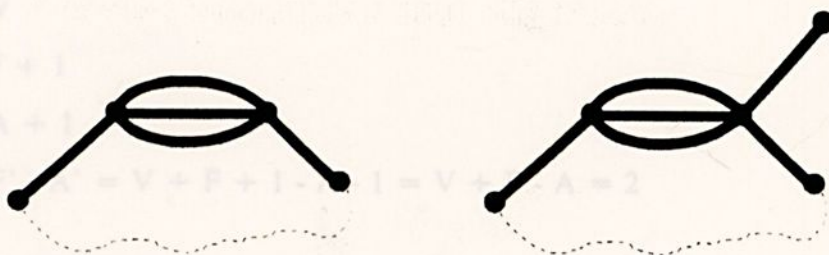


Figura (58)

b) a aresta liga dois vértices sem arestas

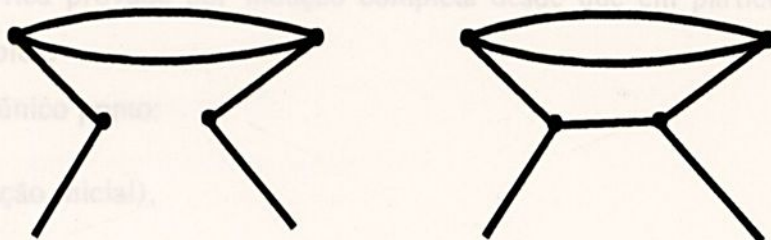


Figura (59)

c) a aresta é múltipla



Figura (60)

Em a) ela aumenta de uma unidade o número de vértices e de arestas

$$V' = V + 1$$

$$A' = A + 1$$

$$F' = F$$

Então:

$$V' + F' - A' = V + 1 + F - A - 1 = V + F - A = 2$$

Em b) ela aumenta o número de faces em uma unidade e o número de arestas

também em uma unidade.

$$V' = V$$

$$F' = F + 1$$

$$A' = A + 1$$

$$V' + F' - A' = V + F + 1 - A - 1 = V + F - A = 2$$

Em c) idem, ela aumenta o número de faces e de arestas em uma unidade e portanto $V' + F' - A' = 2$.

Em qualquer situação o valor de $V' + F' - A'$ é igual do de $V + F - A$, ou seja $V' + F' - A' = 2$.

Portanto fica provada por indução completa desde que em particular é fácil encontrar exemplos.

Para um único ponto:

● (situação inicial),

● — ● (Situação com aresta acrescentada)

$$V + F - A = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$V' + F' - A' = 2 + 1 - 1 = 2$$

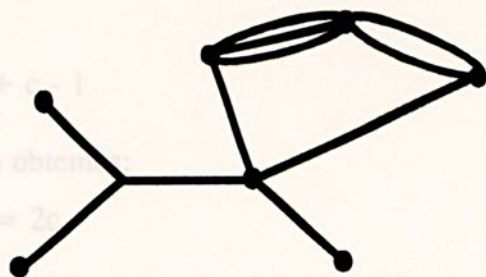


Figura (61)

$$V = 8$$

$$F = 5$$

$$A = 11$$

$$V + F - A = 8 + 5 - 11 = 2$$

4.6. Extensão para grafos com c componentes conexas

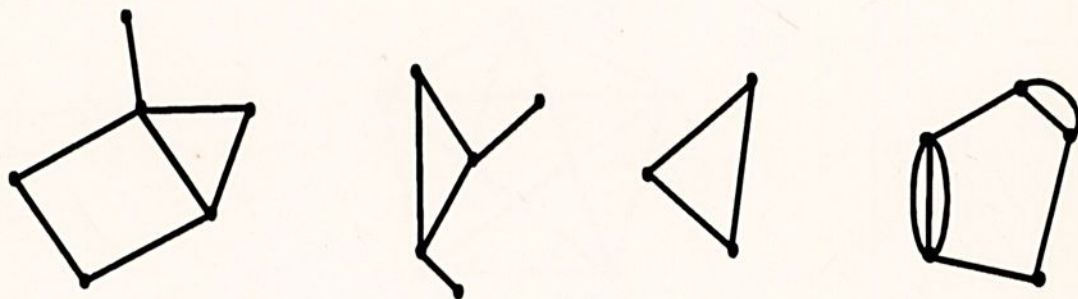


Figura (62)

Sejam c componentes conexas

Para cada componente conexa temos

$$f_i + v_i - a_i = 2$$

Somando teremos:

$$\sum_{i=1}^c (f_i + v_i - a_i) = 2c \quad (4.6.1.)$$

Mas para cada componente contamos a região exterior uma vez, logo:

$$F = \sum_{i=1}^c f_i - c + 1$$

ou que $\sum_{i=1}^c f_i = F + c - 1$

Portanto em (4.6.1.) obtemos:

$$F + c - 1 + V - A = 2c$$

$$F + V - A = c + 1$$

Exemplo:

$$F = 2 + 0 + 1 + 4 + 1 = 8$$

$$V = 6 + 5 + 3 + 5 = 19$$

$$A = 7 + 4 + 3 + 8 = 22$$

$$\text{Temos } F + V - A = 8 + 19 - 22 = 5 = 1 + c$$

5.1. Aplicações a Planaridade de Grafos

5.1.1. Se o grafo é K_5 , então não é planar



Figura (63)

De fato:

Suponhamos que o grafo seja planar. isto é para ele vale:

$$F + V - A = 2$$

$$\text{ou } F = 2 - V + A = 2 - 5 + 10 = 7$$

Porém cada uma das faces tem ao menos três arestas em seu contorno, ou seja o

número de arestas será $\geq \frac{3F}{2} = \frac{21}{2}$, porque uma aresta é comum a duas faces.

Capítulo 5

Aplicações da Fórmula de Euler

5.1. Aplicações a Planaridade de Grafos

5.1.1. Se o grafo é K_5 então não é planar

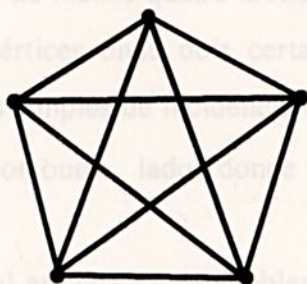


Figura (63)

De fato:

Suponhamos que o grafo seja planar, isto é para ele vale:

$$F + V - A = 2$$

$$\text{ou } F = 2 - V + A = 2 - 5 + 10 = 7$$

Porém cada uma das faces tem ao menos três arestas em seu contorno, ou seja o

número de arestas será $\geq \frac{3F}{2} = \frac{21}{2}$, porque uma aresta é comum a duas faces.

Por outro lado, neste caso o número de arestas ao formar-se o grafo simples de incidência faces-arestas, o número de arcos é $\leq 2A$ de uma parte e $\geq 3F$ de outra parte, donde $20 = 2A \geq 3F = 21$ o que é absurdo.

Assim

$$V = 4 \quad e \quad A = 2 \times 2 = 4.$$

Substituindo na Fórmula de Euler encontramos $F = 2$.

5.1.2 Se o grafo é $K_{3,3}$ então não é planar

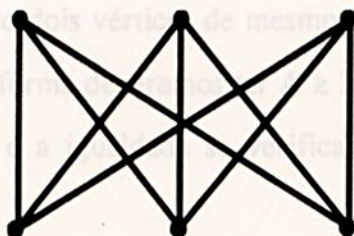


Figura (64)

Supondo que seja planar

$$F + V - A = 2$$

$$\text{ou } F = A - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$$

Cada uma das faces deve ter ao menos quatro arestas na fronteira (caso uma face tenha três arestas ela terá três vértices onde dois certamente pertencerão a mesma categoria) sobre a forma de grafos simples de incidência faces-arestas, cujo número de arcos $\leq 2A$ por um lado, $\geq 4F$ por outro lado, donde $18 = 2A \geq 4F = 20$ o que é absurdo.

Essa questão é dada em geral em termos de Problema de Ligações de três fontes produtoras a três fontes receptoras, como por exemplo em Pitombeira [Pit 87], Barbosa [Ba 70b] e Berge [Be 67].

5.1.3 Aplicação a um Problema de Grafos K_{2n}

São dados duas fontes produtoras x_1, x_2 e outras n ($n \geq 2$) fontes receptoras $y_1, y_2, \dots, y_n$. Veremos que é possível ligar cada fonte produtora x_i ($i = 1, 2$) a cada uma das fontes receptoras y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Demonstração:

Para $n = 2$ ou K_{22} $V = 2 + n$ e $A = 2n$

Consideramos x_1, x_2, y_1 e y_2 como vértices e as ligações como arestas.

Assim

Para K_{22} teremos: $V = 4$ e $A = 2 \times 2 = 4$.

Substituindo na Fórmula de Euler encontramos $F = 2$.

Observamos que cada face deverá ter pelo menos quatro arestas pois, em caso contrário, teríamos aresta ligando dois vértices de mesmo tipo; portanto $F \times 4 / 2 \leq A$ e para qualquer problema dessa forma deveremos ter $A \geq 2 \times F$.

No caso, temos $4 \geq 4$ e a igualdade se verifica. Portanto o problema tem solução.

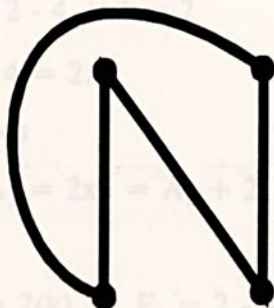


Figura (65)

Para $n = 3$ ou K_{23}

$$V = 5 = 2 + 3 \quad \text{e} \quad A = 2 \times 3 = 6$$

Substituindo na Fórmula de Euler encontramos $F = 3$

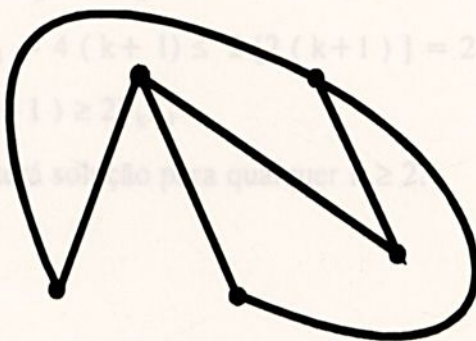


Figura (66)

Para n ou K_{2n} teremos:

$$V = 2 + n \quad \text{e} \quad A = 2n$$

Substituindo na Fórmula de Euler

$$V - A + F = 2 \Rightarrow F = 2 - V + A \Rightarrow F = 2 - (n + 2) + 2n = n$$

Para K_{2n} teremos:

$$F = n; A = 2n \quad \text{e} \quad V = n - 2$$

Verificando a desigualdade $4F = 4n \leq 2A = 4n$ e $A = 2n \geq 2F$

Demonstremos por indução finita

Para $n = 2$ ou K_{22} temos

$$V_2 = 4 \text{ e } A_2 = 2 \times 2 = 4$$

Substituindo na Fórmula de Euler vem

$$F_2 = 2 - V_2 + A_2 = 2 - 4 + 4 = 2$$

que verifica $4F_2 = 8 \leq 2 \times 4 = 2A_2$

Para $n = 3$ ou K_{23} temos

$$V_3 = 5 = V_2 + 1 \text{ e } A_3 = 2 \times 3 = A_2 + 2 \text{ e } F_3 = 2 - V_2 + A_2 + 1 = 3$$

Supondo válida para $n = k$

$$V_k = k + 2 \quad ; \quad A_k = 2(k) \quad \text{e} \quad F_k = 2 - V_k + A_k = k$$

onde $4F_k = 4k \leq 2(2k) = 2A_k$, devemos provar para $n = k + 1$

Assim $V_{k+1} = k + 1 + 2$ e $A_{k+1} = 2(k + 1)$ e substituindo na Fórmula

de Euler

$$V_{k+1} - A_{k+1} + F_{k+1} = 2 \Rightarrow V_k + 1 - (A_k + 2) + F_{k+1} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{k+1} = 2 - V_k + A_k - 1 + 2 = k + 1$$

que verifica $4 \times F_{k+1} = 4(k + 1) \leq 2[2(k + 1)] = 2A_{k+1}$ e

$$A_{k+1} \geq 2(k + 1) \geq 2F_{k+1}$$

Concluimos que K_{2n} terá solução para qualquer $n \geq 2$. ■

5.2. Consequências e Aplicações a Poliedros

5.2.1. Consequências:

1ª) O número de faces que tem número ímpar de lados é par, e o número de ângulos sólidos ou de vértices que tem número ímpar de faces é par.

Tese $F_3 + F_5 + F_7 + \dots$ é par

$V_3 + V_5 + V_7 + \dots$ é par

ETAPA I

Faremos uma primeira generalização das relações entre número de vértices, arestas e faces de um poliedro.

Seja um poliedro convexo em que:

F_3 representa o número de faces triangulares

F_4 representa o número de faces quadrangulares

F_5 representa o número de faces pentagonais

F_6 representa o número de faces hexagonais

$$\text{Então } F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \dots \quad (5.2.1.1.)$$

Sendo cada aresta comum a duas faces, teremos:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \dots \quad (5.2.1.2.)$$

Tese $[F_3 + F_5 + F_7 + \dots]$ é par

De fato, da relação (5.2.1.2.) temos:

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 + \dots = 2A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3 + F_5 + F_7 + \dots = 2A - 2F_3 - 4F_4 - 4F_5 - 6F_6 - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3 + F_5 + F_7 + \dots = 2(A - F_3 - 2F_4 - 2F_5 - 3F_6 - 3F_7 - \dots)$$

o que prova a tese.

ETAPA II

Segunda generalização das relações entre número de vértices, arestas e faces de um poliedro euleriano.

Seja um poliedro convexo em que:

V_3 representa o número de ângulos triédricos,

V_4 representa o número de ângulos tetraédricos,

V_5 representa o número de ângulos pentaédricos,

V_6 representa o número de ângulos hexaédricos,

.....

.....

Então:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \dots \quad (5.2.1.3.)$$

Se cada aresta une dois vértices, temos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \dots \quad (5.2.1.4.)$$

De fato, da relação (5.2.1.4.) temos:

$$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + \dots = 2A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_3 + V_5 + V_7 + \dots = 2A - 2V_3 - 4V_4 - 4V_5 - 6V_6 - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_3 + V_5 + V_7 + \dots = 2(A - V_3 - 2V_4 - 2V_5 - 3V_6 - 3V_7 - \dots)$$

o que prova a tese.

2ª) Em qualquer poliedro convexo vale as relações:

$$a) 2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + \dots$$

Eliminando V e A das relações (5.2.1.3.) e (5.2.1.4.) e a relação de Euler se obtém a seguinte igualdade:

$$2F + 2V - 2A = 4$$

$$2F = 4 + 2A - 2V$$

$$2F = 4 + (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \dots) - 2 \cdot (V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \dots)$$

$$2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + \dots \quad (5.2.1.5.)$$

$$b) 2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 5F_7 + \dots$$

Eliminando F e A das relações (5.2.1.1) e (5.2.1.2.) e a relação de Euler obtém a seguinte igualdade:

$$2V + 2V - 2A = 4$$

$$2V = 4 + 2A - 2V$$

$$2V = 4 + (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \dots) - 2 \cdot (F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \dots)$$

$$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 5F_7 + \dots \quad (5.2.1.6.)$$

$$c) 3F_3 + 2F_4 + F_5 > 12 + (F_7 + 2F_8 + \dots)$$

Da comparação de (5.2.1.3.) e (5.2.1.4.) resulta a desigualdade $2A > 3F$ ou o que é o mesmo $4A > 6F$. Se substituirmos nessa desigualdade A e V pelos valores (5.2.1.2.) e (5.2.1.6.) encontraremos:

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 > 12 + (F_7 + 2F_8 + \dots)$$

$$d) 3V_3 + 2V_4 + V_5 > 12 + (V_7 + 2V_8 + \dots)$$

Da comparação de (5.2.1.1.) e (5.2.1.2.) resulta a desigualdade $2A > 3V$ ou o que é o mesmo $4A > 6V$. Se substituirmos nessa desigualdade A e F pelos valores (5.2.1.4.) e (5.2.1.5.) encontraremos:

$$3V_3 + 2V_4 + V_5 > 12 + (V_7 + 2V_8 + \dots)$$

3ª) Em todo poliedro convexo o número de faces triangulares mais o número de ângulos triedros é pelo menos igual a oito; ou seja, que não podem faltar faces triangulares e ângulos triedros.

Retomando a relação de Euler, que se pode escrever

$$4F + 4V = 4A + 8$$

F por seu valor (5.2.1.1.); V por (5.2.1.3.) e $4A = [5.2.1.2.] + [5.2.1.4.]$ se tem:

$$4(F_3 + F_4 + \dots) + 4(V_3 + V_4 + \dots) = (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots) + (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots) + 8$$

ou seja

$$F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + V_5) + 2(F_6 + V_6) + 3(F_7 + V_7) + \dots$$

$$\text{ou } F_3 + V_3 \geq 8$$

Logo o primeiro membro não pode ser menor que oito; se faltam faces triangulares tem que haver pelo menos 8 ângulos triedros, como no paralelepípedo; e se faltam ângulos triedros tem que haver pelo menos 8 faces triangulares, como no octaedro.

5.2.2. A soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro euleriano é igual a $4(V-2)r$ (r -ângulo reto), ou $2\pi (V - 2)$.

Tomando o ângulo reto por unidade, a soma dos ângulos de uma face qualquer de n lados é $(2n-4)$.

Designando por $n, n', n'', \dots$, o número de lados das diferentes faces e por Σ a soma dos ângulos de todas as faces se terá para todas elas.

$$(2n-4) + (2n'-4) + (2n''-4) + \dots = \Sigma$$

e como esta soma F termos, será:

$$\Sigma = 2(n + n' + n'' + \dots) - 4F$$

Por permanecer cada lado em duas faces, o parênteses é igual a $2A$, logo pela *fórmula de Euler*.

$$\Sigma = 4(A - F) = 4(V - 2)$$

5.2.3 Existem exatamente cinco poliedros platônicos

Como cada face tem n arestas e são F faces, então, o número total de arestas é nF . Mas, cada aresta está exatamente contida em duas faces, donde

$$2A = nF \quad (5.2.3.1)$$

Cada ângulo poliédrico tem m arestas e como há V vértices, segue-se que há mV arestas. Cada aresta tem exatamente dois vértices, logo

$$2A = mV \quad (5.2.3.2)$$

de (5.2.3.1) e (5.2.3.2)

$$nF = mV \quad (5.2.3.3)$$

Como os poliedros são eulerianos, então, vale

$$V - A + F = 2 \quad (5.2.3.4)$$

Substituindo V e A em (5.2.3.4) por (5.2.3.1) e (5.2.3.2), vem:

$$[(nF/m) - (nF/2)] + F = 2 \quad (5.2.3.5)$$

Daí,

$$F[(n/m) - (n/2) + 1] = 2 \quad (5.2.3.6)$$

ou

$$F[(2n - mn + 2m) / 2m] = 2 \quad (5.2.3.7)$$

e

$$F = 4m / (2n - mn + 2m) \quad (5.2.3.8)$$

e ainda

$$F = 4m / [2(n + m) - mn] \quad (5.2.3.9)$$

com $m \geq 3$ e $n \geq 3$

Possibilidades

I) $m = 3$ e, então, $F = 12 / (6 - n)$

como $6 - n > 0$, e $n \geq 3$

Caso 1: $m = 3$, $n = 3$ e $F = 12 / (6 - 3) = 4$

e temos o *tetraedro*

Caso 2: $m = 3$, $n = 4$ e $F = 12 / (6 - 4) = 6$

e temos o *hexaedro*

Caso 3: $m = 3$, $n = 5$ e $F = 12 / (6 - 5) = 12$

e temos o *dodecaedro*

II) $m = 4$ e , então , $F = 16 / (8 - 2n)$

Como $8 - 2n > 0$ e $n \geq 3$, só temos a solução

Caso 4: $m = 4$, $n = 3$ e $F = 16 / (8 - 6) = 8$

e temos o *octaedro*

III) $m = 5$ e , então $F = 20 / (10 - 3n)$

Como $10 - 3n > 0$ e $n \geq 3$, só temos a solução

Caso 5: $m = 5$, $n = 3$ e $F = 20 / (10 - 9) = 20$

e temos o *icosaedro*

Vamos provar que a expressão (5.2.3.9) não é um número inteiro positivo para

$m \geq 6$ e $n \geq 3$

Se $m \geq 6$ e $n \geq 3$, então $m = 6 + h$ (h inteiro) e $n = 3 + k$ (k inteiro)

A expressão (5.2.3.9) dá:

$$F [2 (m + n) - mn] = 4m \quad (5.2.3.10)$$

Substituindo os valores de m e n em (5.2.3.10) temos:

$$F [2 (6 + h + 3 + k) - (6 + h) (3 + k)] = 4 (6 + h)$$

$$F (18 + 2h + 2k - 18 - 3k - 3h - hk) = 24 + 4h$$

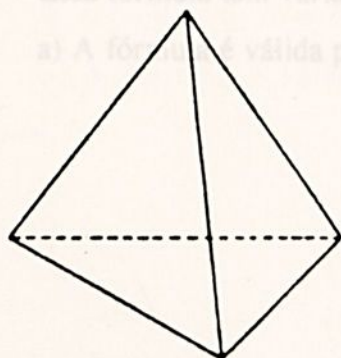
ou ainda

$$F (-h - k - hk) = 24 + 4h \quad (5.2.3.11)$$

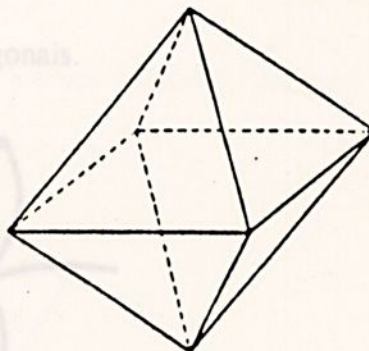
Como $h \geq 0$, $k \geq 0$ e $F > 0$, então , o primeiro membro de (5.2.3.11)

é ≤ 0 e o segundo membro de (5.2.3.11) é sempre > 0 . Vemos, assim, que é absurdo supor a existência de casos com $m \geq 6$ e $n \geq 3$ e, então, concluímos que há somente cinco poliedros platônicos.

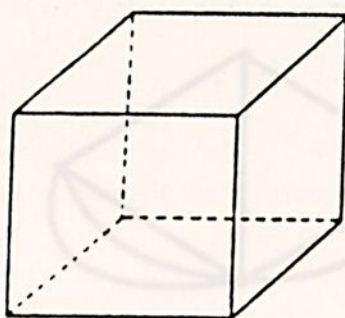
Corolário: *Existem somente cinco poliedros regulares*



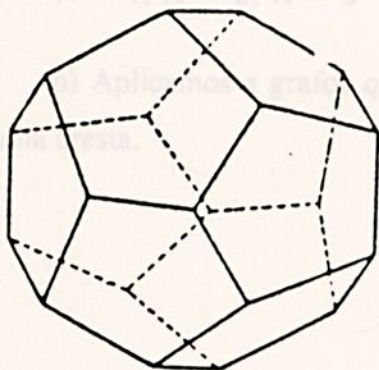
Tetraedro reg



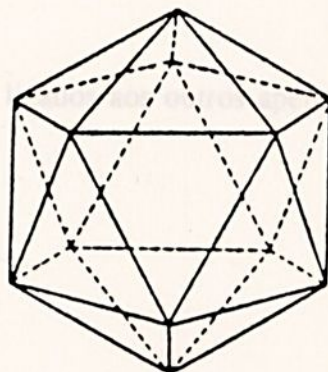
Octaedro reg



Hexaedro reg (cubo)



Dodecaedro reg



Icosaedro reg

Figura (67)

Observação: Considerando a correspondência entre superfícies poliédricas e grafos tais relações são válidas para grafos.

Como cada polígono (face) consideramos como uma região, o número de regiões do plano será $R = P + 1$ incluindo a grande região do plano ou $P = R - 1$; portanto temos a relação $R + V - A = 2$ correspondente a uma superfície poliédrica de Euler ou seja, uma superfície poliédrica convexa deformada e estendida sobre o plano.

Essa fórmula tem várias extensões..

a) A fórmula é válida para figuras não poligonais.

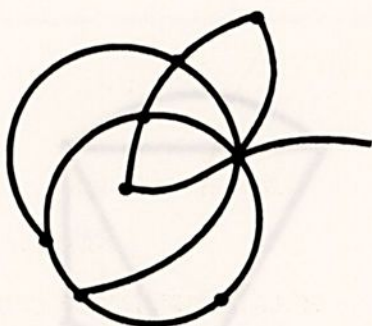


Figura (68)



Figura (69)

$$N = 4; A = 8; R = 6$$

b) Aplicamos a grafos que possuam vértices livres ligados aos outros apenas por uma aresta.

e) Há possibilidade de generalizarmos para grafos com mais de uma componente para $k \geq 1$.

Tem-se $R + V - A = k + 1$

Para $k = 3$; $V = 13$; $A = 15$; $R = 6$

$R + V - A = 6 + 13 - 15 = 4 = k + 1$

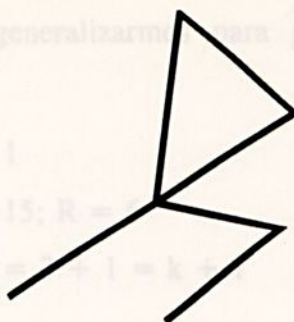


Figura (70)

$R = 2$; $V = 6$; $A = 6$

c) A fórmula é válida para grafos com arestas paralelas ou para grafos múltiplos.

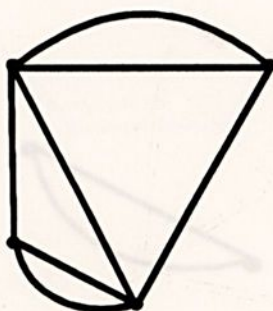


Figura (71)

$V = 4$; $R = 5$; $A = 7$

d) Podemos constatar a validade da fórmula para grafos com apenas vértices e arestas (sem ciclo).

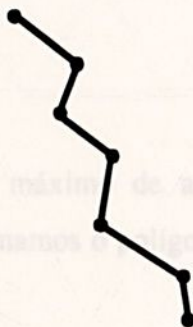


Figura (72)

Figura (72) $2A \Rightarrow A_1 = 2A - 3P$ mas $A_1 \geq 3$ em consequência $2A - 3P \geq 3$ ou

$R = 1$; $V = 7$; $A = 6$

Mas pela fórmula de Euler temos

e) Há possibilidade de generalizarmos para grafos com mais de uma componente para $k \geq 1$

$$\text{Tem-se } R + V - A = k + 1$$

$$\text{Para } k = 3; V = 13; A = 15; R = 6$$

$$R + V - A = 6 + 13 - 15 = 3 + 1 = k + 1$$

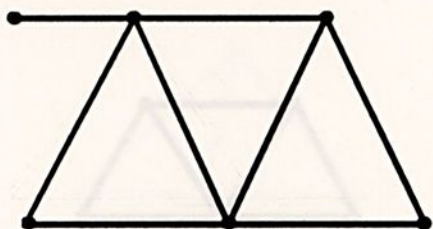
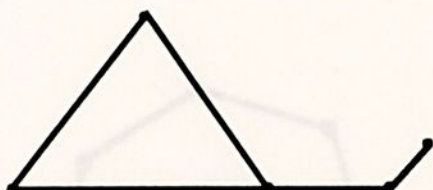


Figura (73)

Figura (75)

f) Lembrando que o número máximo de arestas que possui cada região poligonal é conseguido quando transformamos o polígono em triângulos.

Então

$$3P + A_r = 2A \Rightarrow A_r = 2A - 3P \text{ mas } A_r \geq 3 \text{ em consequência } 2A - 3P \geq 3 \text{ ou}$$

$$P \leq (2A - 3) / 3 \quad (\text{S.o.f1})$$

Mas pela fórmula de Euler temos

$P = A - V + 1$ ou, em (1) $A - V + 1 \leq (2A - 3) / 3$ de onde obtemos

$$A \leq 3V - 6 \quad (5.o.f2)$$

Substituindo (5.o.f2) em (5.o.f1) encontramos.

$$P \leq [2(3V - 6) - 3] / 3 \Rightarrow P \leq (6V - 12 - 3) / 3 \Rightarrow P \leq 2V - 5 \quad (5.o.f3)$$

Nas figuras abaixo verificamos que as cotas são atingidas quando a fronteira é também triangular.

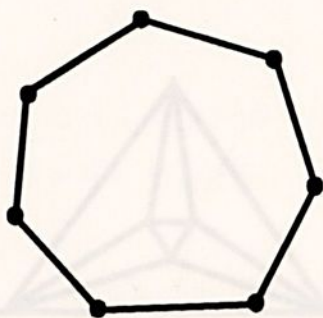


Figura (74)

$$A = 7 < 3 \times 7 - 6 \text{ ou } A = 7 < 15$$

$$P = 1 < 2 \times 7 - 5 \text{ ou } P = 1 < 9$$

$$V = 7; A = 12 < 30$$

$$P = 6 < 9$$

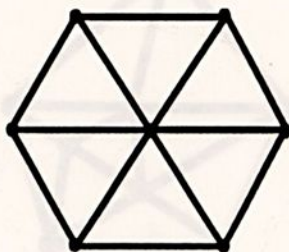


Figura (75)

$$A = 12 < 3 \times 7 - 6$$

$$P = 6 < 9$$

$$V = 7$$

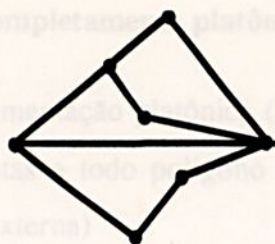


Figura (76)

$$A = 9 < 15$$

$$P = 3 < 9$$

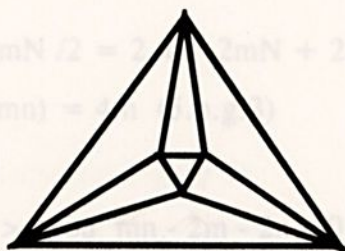


Figura (77)

$$A = 12 = 3 \times 6 - 6$$

$$P = 7 = 2(6) - 5$$

$$V = 6$$

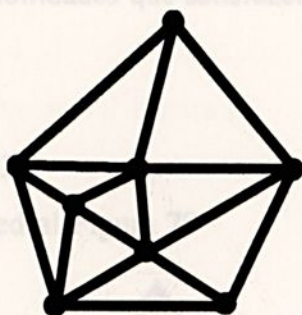


Figura (78)

$$A = 15 < 18$$

$$P = 9 < 11$$

g) Pavimentação parcial completamente platônica. [Ba 93]

Ao considerarmos uma pavimentação platônica (lado a lado) na qual todo nó N tem o mesmo número m de arestas e todo polígono tem o mesmo número n de arestas inclusive a fronteira (região externa)

Teremos: $mN - 2A$ (5.o.g.1) e $nP = 2A$ (5.o.g.2)

De (5.o.g.1) obtemos $A = mN/2$ e substituindo em (5.o.g.2)

obtemos $P = mN / n$

Utilizando a fórmula de Euler para o plano já que a grande região é considerada com n arestas, temos

$$mN / n + N - mN / 2 = 2 \text{ ou } 2mN + 2nN - mnN = 4n$$

$$N (2m + 2n - mn) = 4n \text{ (5.o.g.3)}$$

De onde segue

$$2m + 2n - mn > 0 \text{ ou } mn - 2m - 2n < 0$$

e, sucessivamente,

$$m (n - 2) - 2n < 0 \text{ ou } m (n - 2) - 2n + 4 < 4$$

$$m (n - 2) - 2 (n - 2) < 4$$

Finalmente

$$(n - 2)(m - 2) < 4 \text{ (5.o.g.4)}$$

São apenas 5 as possibilidades que satisfazem a desigualdade.

ou seja $n = 3$ e $m = 4$ ou $n = 4$ e $m = 3$

$$a) n - 2 = 1 \text{ e } m - 2 = 1$$

$$\text{ou seja } n = 3 \text{ e } m = 3$$

Trata-se de superfície tetraedral Figura 79

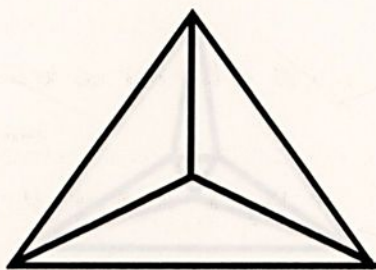


Figura (79)

$$b) n - 2 = 2 \text{ e } m - 2 = 1$$

ou seja $n = 3$ e $m = 3$

Trata-se de superfície cúbica Figura 80

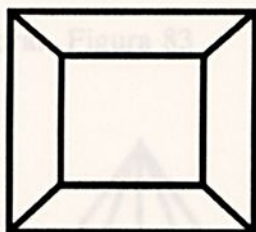


Figura (80)

c) $n - 2 = 3$ e $m - 2 = 1$

ou seja $n = 5$ e $m = 3$

Trata-se da superfície dodecaedral Figura 81

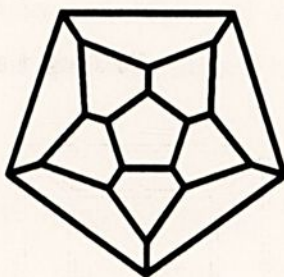


Figura (81)

d) $n - 2 = 1$ e $m - 2 = 2$

ou seja $n = 3$ e $m = 4$

Trata-se de uma superfície octaedral Figura 82

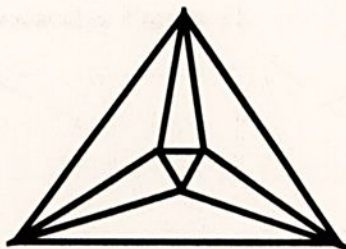


Figura (82)

e) $n - 2 = 1$ e $m - 2 = 3$

ou seja $n = 3$ e $m = 5$

Trata-se da superfície icosaedral. Figura 83

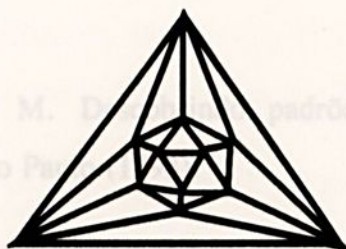


Figura (83)

[Ba 93] BARBOSA, R. M. D. Padrões em mosaicos. -Atual Editora Ltda. São Paulo (1993).

[Ba 70b] BARBOSA, R.M. Combinatória e grafos vol. I e II - Nobel. S.P. (1970).

[Ba 76c] BARBOSA, R.N. Generalized Problems of Counting of intermections, regions and edges, of straight lines in a plane, by interpolation formula Bui Mai Est e Fis - FFCL Araraquara (1976) p. 18-31

[Bar 83] BARNETTE, D.W. Map Coloring, Polyhedra and Four-Color Problem, Dolciani Mathematical Expositions nro 8 - The Mathematical Association of American (1983).

[Barg 69] BARNETTE, D.W.; GRUNBAUM, B. On Steinitz and on Some properties of planar graphs - The Many Facets of graph Theory (ed G. Chartrand and S.F. Kapoor) Lecture Notes in Math 110, Springer, Berlin (1969), p. 27-40

[Be 67] BERGE, C. Theorie des Graphes et ses Applications, Dunod, Paris, p. 201-213. (1967).

[BeF 72] BERMAN; FRYE Introduction to Combinatorics - Ac Press New Work (1972)

[BoM 77] BONDY, J.A.; MURTY,U.S.R. Graph Theory with Applications, The Mac Millan Press 27d. Londres. (1977).

Bibliografia

- [Ba 93] BARBOSA, R. M. Descobrindo padrões em mosaicos. -Atual Editora Ltda. São Paulo (1993).
- [Ba 70b] BARBOSA, R.M. Combinatória e grafos vol. I e II - Nobel. S.P. 1970
- [Ba 76c] BARBOSA, R.N. Generalized Problemes of Conhting of intermections, regions and edges, of straight lines in a plane, by interpolation formula Bul Mat Est e Fis - FFCL Araraquara (1976) p. 18-31
- [Bar 83] BARNETTE, D.W. Map Coloring, Polyhedra, and Four-Color Problem. Dolciani Mathematical Expositions nro 8 - The Mahematical Association of American (1983).
- [Barg 69] BARNETTE, D.W.; GRUNBAUM, B. On Steinitz and on Some propeties of planar graphs - The Mary Facets of graph Theory (ed G. Chartrand and S.F. Kopoor) Lecture Notes in Math 110, Springer, Berlin (1969), p. 27-40
- [Be 67] BERGE, C. Theorie des Graphes et ses Applications. Dunod. Paris. p. 201-213. (1967).
- [BeF 72] BERMAN; FRYE Introduction to Comibinatorics - Ac Press New Work (1972)
- [BoM 77] BONDY, J.A.; MURTY,U.S.R. Graph Theory with Applications. The Mac Millan Press 27d. Londres. (1977).



- [CaB] CANTAM, EAMM; BOREL E RUELQUES consequences simples de la formule de Euler par Henry Lebesque p. 24-43 (1974).
- [Ca 69] CASTRUCCI, B. Geometria - Curso Moderno. Vol II p. 87-90 (1969).
- [Car 89] CARSTEN, T. Planarity and Duality of Finite and Infinite graphs, Journal of Combinatorial Theory, Ser B - 29, p. 244-273. (1989).
- [ChL 75] CHARTRAND, G. e LESNIAK, I. Graphs & Digraphs. 2a ed. - Wadsworth & Brook's. Cole Advanced Brook & Software. California.
- [Coh 78] COHEN, D.I.A. Bases Techniques of combinatorial Theory Wiley New York, (1978)
- [Co 91] COXETER, H. S. M. Regular Polytopes. Dover Publication, Inc. New York. (1991).
- [CoR 64] COURANT, R.; ROBBINS, H. Que és la Matemática? Aguillar S.A. de Ediciones - 4ª edição Madrid - (1964).
- [DaH 85] DAVIS, P.J.; H. ROBBINS H. A Experiência Matemática. Francisco Alves Editora S.A. 2a.ed. Rio de Janeiro. (1985).
- [De 62] DELACHET, A. Contemporary Geometry. Dover Publications, Inc. New York. (1962).
- [Dir 77] DIRAC, G. A. Cardinal-determining subgraphs of infinite graphs, Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare de Scienze Matematiche e Loro Applicazioni, Acad. Naz. Lince/ 34 (1977), p. 3-14.
- [Eu 72] EVES, H. A survey of Geometry. Allyn and Bacon, Inc. Boston. London. Sydney. Toronto. p.201-213.(1972).



- [For 74] FOURNIER, J. C. Une relation de separation entre cocircuits d'un matroide, J. Combinatorial Theory Ser. B 16 - p.181-190.(1974).
- [Gr 67] GRUNBAUM, B. Convex Polytopes. Interscience Publishers. Vol XVI. p.130-145, (1967).
- [Ha 69] HARARY, F. Graph Theory. Addison Wesley Publishing Company. 3a ed. USA. Massachussetts, Califórnia, London, Amsterdam, Don Mills, Ontário, Sydney. (1969).
- [HiP 87] HILTON, P.; PEDERSEN, N. Discovering, Modify and Solving Problems: A Case Study from the Comtemplation of Polyedra-McHugh, Janre Algorithmic Graph Theory - Prentice Hall. (1987).
- [Hip 82] HILTON, P.; PEDERSEN, J. - Descartes, Euler, Poincaré, Polya and Polyhedra L'ensernement Mathematique 27, p. 327-343
- [KaN 87] KASNER, E. Matemática e Imaginação. Zahar Editores. Rio de Janeiro. (1987).
- [Ke 69] KÉREKJÁRTO, B. Les Fondements de la Geometrie. 2a ed. Gauthier Villars. Paris. (1969).
- [Kur 30] KURATOWSKI, K. Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fund. Math. 15 p. 271-283 (1930).
- [Lak 76] LAKATOS, I. Proofs and Refutations, Cambridge: Cambridge University Press (1976).
- [Li 82a] LIMA, E. L. A característica de Euler-Poincaré. Revista Matemática Universitária, nro 1. p. 47-61. (1985).
- [Li 82b] LIMA, E. L. O Teorema de Euler sobre Poliedros. Revista Matemática Universitária, nro 2. p. 57-73. (1982) .
- [Li 65] LINES, L. Solid Geometry. Dover Publications, Inc. New York. Cap XI. (1965).



- [Mac 37] MACLANE, S. A combinatorial condition for planar graphs. Fund. Math. 28, p. 22-32. (1937).
- [MaB 47] MARMOL, S. L.; PEREZ, M. Geometria Metrica, Proyectiva y Sistemas de Representation. 2a ed. S.A.E.T.A. Vol II. Madrid. (1947).
- [Ni 65] NIVEN, I - Mathematics of choice - Rondon House - Singer (1965)
- [Pit 87] PITOMBEIRA, J.B. O Problema das Ligações de água, luz e telefone- Uma aplicação da Fórmula de Euler, Revista do professor de matemática nro 11, p. 9-16 (1987).
- [Roh 64] ROBERTSON, N. e Sanders, D. e Seymour, Pe Thomas, R. The Four - Colour Theorem - By DIMACS Center, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey USA, revisada (1994).
- [Po 87] POGORELOV, A. Geometry. Mir Publishers. Moscow. (1987).
- [Sc 86] SCRHEINER, I.V. Caleidociclos - Revista do Professor de Matemática nro 8- p. 27-32 - Sociedade Brasileira de Matemática- (1986).
- [Sz 83] SZWARCFITER, J. L. Grafos e Algoritmos Computacionais. 2a ed. Editora Campus Ltda. Rio de Janeiro. (1983).
- [Som 58] SOMMERVILE, D. M. Y. Geometry of n Dimensions, ed. Dover Publications - (1958).
- [To 64] TOHT, LF. Regular Figures - vol. 48 - A Pergaman Press Brook The Macmillan Company - New York (1964).
- [Tu 84] TUCKER, A. Applied Combinations 2^a ed. John Wiley & Sons, New York, (1984).



