



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**AJUSTE DE MODELO DE UMA ESTRUTURA
DO TIPO *STEEL JOIST***

Silmara Cassola

Ilha Solteira - SP

1210001315





AJUSTE DE MODELO DE UMA ESTRUTURA DO TIPO STEEL JOIST

Insc. 071/2002-NPD 076/02

UNESP - "CA" IS D. "A"	
SERVICOTÉCNICO	AÇÃO
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
19.9.02	30.09.02
R. Ailza	TOMBO
	Te. 1315
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Ilha Solteira Custa R\$ 10.00	C345a

1210001315



Silmara Cassola

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Orientador: Prof. Dr. João Antonio Pereira

Ilha Solteira, Julho de 2000.

30500001
ENGENHARIA MECÂNICA
C345a

Sup 768989
Sup 54176

BCpIS - FEIS - UNESP

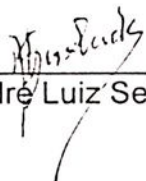
Ajuste de Modelo de uma Estrutura do Tipo Steel Joist

SILMARA CASSOLA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS E APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. Dr. André Luiz Seixlack - Coordenador

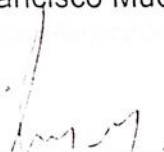
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. João Antonio Pereira - Orientador



Prof. Dr. Mário Francisco Mucheroni



Prof. Dr. Luiz de Paula do Nascimento

Ilha Solteira – SP, julho de 2000

BCpIS - FEIS - UNESP



À minha mãe Maria Stela, ao meu pai Alcidio
e ao Amarildo, com todo carinho.



Agradecimentos

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Ao Prof^o. Dr. João Antonio Pereira pela orientação e confiança durante a realização deste trabalho.

Ao Prof^o. Dr. Paulo Sérgio Varoto pela contribuição decisiva na realização dos testes experimentais.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica e ao Prof^o. Edison Righeto pelos valiosos ensinamentos.

Aos amigos Adriano e Leopoldo pelo inestimável auxílio.

À minha família e ao Amarildo pelo carinho e imenso incentivo.

A Deus, pela vida.



“O conhecido é finito. O desconhecido infinito.
Vivemos em uma ilha de conhecimento
cercada por um mar de inexplicabilidades.
Nosso objetivo a cada geração é reivindicar por um pouco mais de terra.”

Huxley.



SUMÁRIO

Resumo.....	viii
Abstract.....	ix
Índice de Figuras	x
Índice de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
 Capítulo 1: INTRODUÇÃO.....	 01
 Capítulo 2: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	 06
2.1 Revisão Bibliográfica.....	07
2.2 Análise Modal.....	10
2.2.1 O Método dos Elementos Finitos.....	11
2.3 Análise Modal Experimental.....	14
2.3.1 Função de Transferência.....	15
2.3.2 Função de Resposta Em Frequência.....	18
2.4 Correlação de Modelos.....	19
2.4.1 Comparação Direta das Frequências de Ressonância.....	20
2.4.2 Coeficiente de Correlação Modal.....	21
2.4.3 Ortogonalidade.....	22
2.4.3 Comparação de FRF(s).....	23
2.5 Técnicas de Ajuste de Modelo.....	24



Capítulo 3: AJUSTE DE MODELO UTILIZANDO FRF(S).....	27
3.1 Força de Excitação e Resposta.....	29
3.2 Linearização do Resíduo do Balanço de Força.....	31
Capítulo 4: ESTRATÉGIAS DE AJUSTE.....	35
4.1 Cálculo das Matrizes de Rigidez e Massa para Placas	
4.1.1 Teoria de Placas de Reissner-Mindlin.....	38
4.1.2 Formulação de Elementos Finitos.....	39
4.1.3 Matriz de Rigidez do Elemento em Função dos Parâmetros Físicos.....	42
4.1.4 Matriz de Massa do Elemento em Função dos Parâmetros Físicos.....	44
4.2 Análise de Sensibilidade.....	45
4.3 Seleção e Correção dos Parâmetros.....	47
4.4 Aspectos Computacionais da Rotina de Ajuste.....	48
Capítulo 5: SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....	52
5.1 Viga <i>Steel Joist</i>	53
5.2 Placa.....	61
Capítulo 6: ESTUDO EXPERIMENTAL.....	73
6.1 Estudo Experimental: Viga <i>Steel Joist</i>	74
6.1.1 Modelo Experimental.....	75
6.1.2 Modelo Analítico.....	76
6.1.3 Correlação.....	78
6.1.4 Análise de Sensibilidade.....	80
6.1.5 Ajuste do Modelo Analítico.....	84
Capítulo 7: CONCLUSÃO.....	88
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	91
PUBLICAÇÕES.....	94



Resumo

CASSOLA, Silmara, *Ajuste de Modelo de Uma Estrutura do Tipo Steel Joist*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual de São Paulo, 2000, 94 p. Dissertação de Mestrado.

Este trabalho trata do estudo do comportamento dinâmico de estruturas metálicas do tipo *steel joist* destinadas à construção de pisos de lajes de concreto. O objetivo é buscar um modelo analítico representativo do sistema real. Este processo é feito basicamente em três etapas:

1. obtenção do modelo experimental por meio da análise modal;
2. obtenção do modelo analítico pelo Método de Elementos Finitos;
3. comparação dos modelos e correção do modelo analítico;

O modelo de elementos finitos é ajustado com base nas FRF(s) medidas. As variáveis de ajuste são os próprios parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo. Uma técnica de Sensibilidade é utilizada para identificar os parâmetros que conduzem ao ajuste. A potencialidade da técnica de ajuste com base nas FRF(s) medidas é demonstrada por meio de dois exemplos simulados, um para o caso de uma viga *steel joist* e outro para o caso de placa. A proposta é validada com a realização de testes experimentais com um modelo reduzido de viga *steel joist*.

Palavras-chave: Ajuste de modelo, Elementos Finitos, Análise Modal, Análise de Sensibilidade, Placas, *Steel Joist*



Abstract

CASSOLA, Silmara, *Finite Element Model Updating of a Steel Joist Structure*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, 2000, 94 p. Dissertation.

The study of the dynamic behavior of steel joist structure is discussed in this work. The objective is to define a representative analytical model of the real system. This process is made basically in three stages:

1. obtaining of the experimental model by the Modal Analysis;
2. obtaining of the analytical model by the Method of Finite Elements;
3. comparison of the models and correction of the analytical model;

The model of finite elements is updated by using FRF data. The parameters to be updated are the own physical and/or geometric parameters of the analytical model. A sensitivity formulation is used to identify the parameters that drive the model updating. The potentiality of the model updating technique by using FRF data is demonstrated by two simulate examples, one for the case of a steel joist and another for the case of a plate. The viability of the method is demonstrated by using experimental data of a reduced model of steel joist.

Key Words: Model Updating, Finite Element Method, Modal Analysis, Sensitivity, Plate, Steel Joist



Índice de Figuras

Figura 1.1	Diagrama da metodologia proposta	3
Figura 4.1	Convenção de sinal para o movimento e giro da normal	39
Figura 4.2	Discretização de uma placa com elementos de placa de Reissner – Mindlin retangulares de quatro nós	40
Figura 4.3	Fluxograma da Rotina de Ajuste de Modelo	51
Figura 5.1	Viga <i>steel joist</i> estudada – exemplo numérico	53
Figura 5.2	Mapa de Sensibilidade do modelo analítico para as 10 primeiras frequências – exemplo numérico viga <i>steel joist</i>	55
Figura 5.3	Mapa de Sensibilidade do modelo de referência para as 10 primeiras frequências – exemplo numérico viga <i>steel joist</i>	55
Figura 5.4	Comparação dos mapas de sensibilidade da estrutura para as duas primeiras frequências – exemplo numérico viga <i>steel joist</i> : (a) modelo analítico; (b) modelo de referência	56
Figura 5.5	Evolução dos parâmetros ajustados: momento de inércia em y para os elementos 1, 2, 3, 4 nos apoios – exemplo numérico viga <i>steel joist</i> : (a) todas as iterações; (b) terceira iteração	58
Figura 5.6	Superposição das FRF(s) medidas no ponto de excitação para os modelos analítico, de referência e ajustado – exemplo numérico viga <i>steel joist</i>	59



Figura 5.7	Comparação dos mapas de sensibilidade da estrutura para as duas primeiras frequências - exemplo numérico viga <i>steel joist</i> : (a) modelo ajustado; (b) modelo de referência	60
Figura 5.8	Exemplo de placa retangular no plano xy	62
Figura 5.9	Elementos da placa	63
Figura 5.10	Correlação das frequências	64
Figura 5.11	Superposição das FRF(s) medidas no centro do elemento 1 - exemplo numérico de placa	65
Figura 5.12	Soma das receptâncias e frequências de ajuste selecionadas - exemplo numérico de placa	66
Figura 5.13	Evolução e variação dos parâmetros ajustados: espessura de todos os elementos - exemplo numérico de placa; (a) todas as iterações; (b) primeira iteração; (c) quarta iteração	68
Figura 5.14	Diferença relativa das frequências naturais dos modelos de referência e analítico - exemplo numérico de placa	69
Figura 5.15	Superposição das FRF(s) medidas no centro do elemento 1 - exemplo numérico de placa	69
Figura 5.16	Sexto Modo de Vibrar da Placa: (a) modelo analítico; (b) modelo de referência; (c) modelo analítico ajustado	71
Figura 5.17	Nono Modo de Vibrar da Placa: (a) modelo analítico; (b) modelo de referência; (c) modelo analítico ajustado	72



Figura 6.1	Montagem do Experimento	75
Figura 6.2	Discretização do modelo de elementos finitos	77
Figura 6.3	Correlação das frequências – estudo experimental	78
Figura 6.4	Superposição das FRF(s) medidas no ponto de excitação – estudo experimental	78
Figura 6.5	Mapas de sensibilidade para os parâmetros geométricos – estudo experimental: (a) parâmetro área; (b) parâmetro inércia	81
Figura 6.6	Mapas de sensibilidade para os parâmetros do material: (a) parâmetro módulo de elasticidade ; (b) parâmetro densidade	82
Figura 6.7	Frequência de ajuste escolhida – estudo experimental	85
Figura 6.8	Diferença relativa das frequências naturais – estudo experimental	85
Figura 6.9	Evolução da variação dos parâmetros – estudo experimental	86
Figura 6.10	Superposição das FRF(s) medidas no ponto de excitação – estudo experimental	86



Índice de Tabelas

Tabela 5.1	Comparação dos modelos de referência e analítico – exemplo numérico viga <i>steel joist</i>	54
Tabela 5.2	Comparação dos modelos de referência e analítico ajustado – exemplo numérico viga <i>steel joist</i>	57
Tabela 5.3	Propriedades do material da placa	62
Tabela 5.4	Comparação dos modelos de referência e analítico – exemplo numérico de placa	64
Tabela 5.5	Comparação dos modelos de referência e analítico ajustado – exemplo numérico de placa	67
Tabela 6.1	Propriedades do material e seções transversais dos componentes da viga	74
Tabela 6.2	Frequências Naturais Estimadas via EMA	76
Tabela 6.3	Frequências Naturais do Modelo Analítico	78
Tabela 6.4	Comparação dos modelos experimental e analítico	78
Tabela 6.5	Comparação dos modelos experimental e analítico ajustado	85



ϕ^A / ϕ^X	Vetor Modal Analítico / Experimental
$\{\varepsilon\}$	Vetor Resíduo ou diferença entre os modelos analítico e experimental
$\{\tilde{\varepsilon}\}$	Vetor Resíduo Reduzido
$\{\hat{\varepsilon}\}$	Vetor de deformações generalizadas
q	Forças distribuídas
W	Forças pontuais
p	Parâmetro de Ajuste
δp	Perturbação no Parâmetro
Δp	Correção do Parâmetro
FRF	Função de Resposta em Frequência
MAC	Coefficiente de Correlação Modal
COMAC	Coefficiente de Correlação Modal dos Graus de Liberdade
FDAC	Coefficiente de Correlação no Domínio da Frequência



Lista de Símbolos

n	Número de graus de liberdade
x, y, z	Graus de liberdade de translação
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Graus de liberdade de rotação
N	Funções de forma
$[]$	Matriz
$\{ \}$	Vetor
$[S]$	Matriz de Sensibilidade
$[K]$	Matriz de Rigidez'
$[M]$	Matriz de Massa
$[Z]$	Matriz de Rigidez Dinâmica
$[H]$	Matriz de Receptância
$[B]$	Matriz de Deformação Generalizada
$[D]$	Matriz que relaciona as tensões não nulas e suas deformações associadas
$\{F\}$	Vetor de forças
$\{X\}$	Vetor deslocamento
ω^A / ω^X	Frequência de Ressonância Analítica / Experimental



CAPÍTULO 1

Introdução

Todas as estruturas, independente do tipo de construção, são flexíveis e respondem com uma vibração quando excitadas. Quando estas vibrações são originadas por fontes permanentes (“steady-state”), elas apresentam características diferentes das vibrações transitórias e podem ser isoladas na maioria das vezes. Os problemas surgem quando as vibrações são de origem transitória, causadas pelas atividades cotidianas das pessoas e os seus efeitos começam a incomodar estas pessoas. Quando exposto às vibrações, o ser humano apresenta reações subjetivas que vão desde a simples percepção e desconforto, até apreensão e dor (CEB nº209, 1991). Nos casos em que a fonte de excitação e os “sensores” são os mesmos não é possível o isolamento. Desta forma, os níveis de vibrações devem ser controlados pelas próprias características da estrutura, por meio de alterações em suas propriedades físicas (tipo de material) e/ou geométricas (tipo de perfis, variação da seção transversal, etc.), a fim de se obter uma estrutura mais adequada às suas condições de uso, que ofereça segurança e conforto aos usuários.



A utilização de técnicas de projetos, como o método dos elementos finitos, tem permitido analisar o comportamento dinâmico das estruturas levando em consideração os efeitos de vibrações. No entanto, a modelagem dinâmica de estruturas de engenharia civil por elementos finitos ainda requer cuidados especiais e várias hipóteses e simplificações, usualmente adotadas neste tipo de análise, podem levar a resultados muito discrepantes em relação às situações reais. Isto é, o modelo analítico pode não representar adequadamente a estrutura real. Portanto, existe a necessidade de se desenvolver um modelo de elementos finitos detalhado da estrutura a fim de se obter uma solução mais realística quando se deseja definir um modelo de predição confiável (Cassola e Pereira, 1999).

Neste contexto, técnicas de ajuste de modelo emergiram na última década como um assunto de enorme importância para o projeto, construção e manutenção de sistemas mecânicos, e mais recentemente de estruturas civis. O processo de ajuste de modelo é baseado na comparação da modelagem experimental e numérico-analítica. O modelo experimental é assumido como correto, e com base nos dados experimentais, as regiões do modelo analítico que não representam adequadamente o modelo real (Friswell et al., 1995, Pereira, 1996) são corrigidas. O sistema físico, como por exemplo a estrutura de uma viga ou laje, é modelado experimentalmente, por meio da análise modal experimental (AME), e numericamente, pelo método dos elementos finitos (MEF). Estes modelos fornecem os parâmetros modais (frequências naturais, amortecimento modal e modos próprios) experimentais e os parâmetros modais analíticos, respectivamente. Comparando estes parâmetros com critério, pode-se verificar se os modelos analítico e experimental são correlacionados ou não. Se os modelos são correlacionados, tem-se um modelo analítico representativo do sistema físico, e todo estudo efetuado por meio deste modelo apresentará resultados compatíveis com a realidade. Por outro lado, se os modelos não são correlacionados, a utilização do modelo analítico para estudar o comportamento do sistema pode levar a resultados não realísticos. Neste caso, o uso de técnicas de ajuste de modelo pode levar a uma melhor representação do modelo analítico.

A Figura 1.1 apresenta o fluxograma que resume o funcionamento do programa de ajuste de modelo.



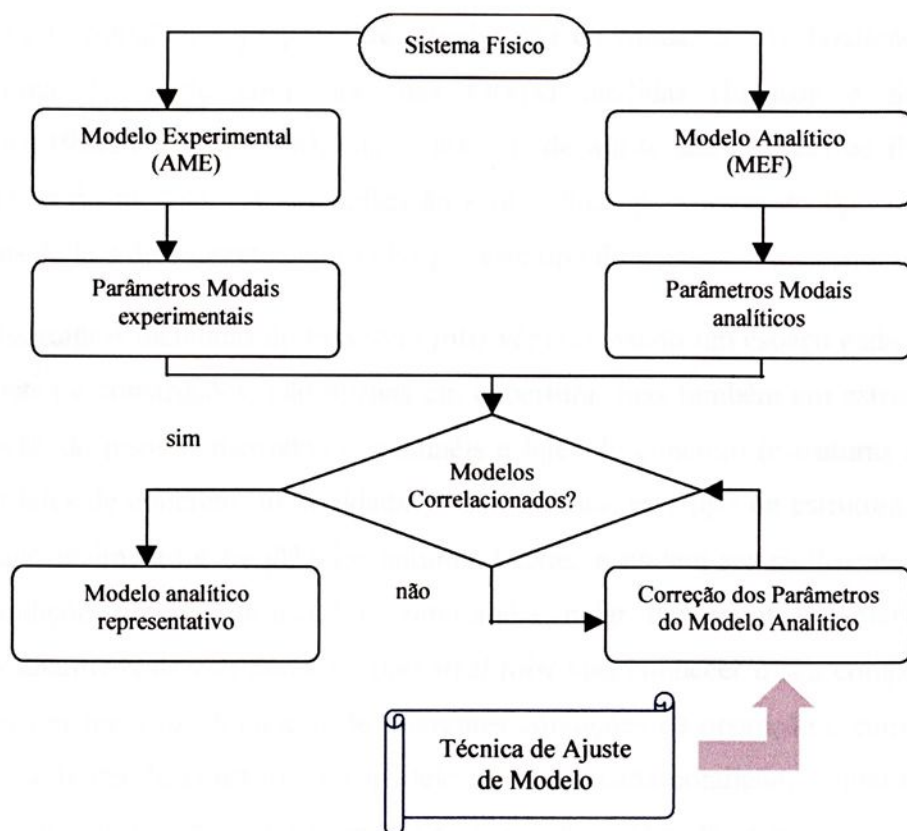


Figura 1.1: Diagrama da Metodologia Proposta

Os primeiros estudos de ajuste de modelo utilizam métodos baseados na extração dos parâmetros modais. Entretanto, o sucesso destas técnicas de ajuste depende intimamente da qualidade da estimativa destes parâmetros, e este é um processo que inevitavelmente introduz incertezas e erros, além daqueles já presentes nas medições. Mais recentemente, surgiram alternativas baseadas no uso direto das funções de respostas medidas para o ajuste do modelo. Estas técnicas mostraram-se promissoras, visto que elas podem levar a resultados com maior confiabilidade, ou seja, aumenta a capacidade preditiva de modelos numéricos.

Atualmente, técnica de ajuste de modelo com base nas respostas medidas é uma tecnologia de grande interesse que vem sendo estudada por um número cada vez maior de pesquisadores, cujo objetivo é melhorar o seu entendimento para sua aplicação em problemas de ordem industrial (Grafe, 1998).

Neste trabalho, a proposta de Atualização de Modelos está fundamentada em uma rotina de ajuste com base nas FRF(s) medidas (Larsson e Sas, 1992; Lammens, 1995; Pereira, 1996), cujas variáveis de ajuste são parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo. A sua aplicação será voltada para vigas do tipo *steel joist* e estruturas de laje de concreto suportadas por este tipo de viga.

Estruturas metálicas do tipo *steel joist* vêm ocupando um espaço cada vez maior nos projetos e construções, não apenas em cobertura, mas também em estruturas para sustentação de pisos construídos por painéis e lajes de concreto (estruturas metálicas-pisos de lajes de concreto pré-moldadas). No entanto, este tipo de estrutura apresenta pouco amortecimento e frequências naturais baixas, e podem ser facilmente excitadas pelas condições naturais de uso, tais como andar, pular, dançar, etc. A elaboração de modelos analíticos de estruturas do tipo *steel joist* visa conhecer o seu comportamento dinâmico por meio da simulação de diferentes condições de operação e carregamento, sem que se tenha de construir um modelo real para cada condição, o qual é bastante oneroso e complexo. Nos casos em que as vigas são destinadas à sustentação de pisos de lajes de concreto, o estudo detalhado deste tipo de estrutura metálica envolve também o conhecimento do comportamento dinâmico da laje. Desta forma, uma rotina de análise dinâmica de elementos de placa foi implementada no programa de ajuste.

A fim de validar a proposta, testes experimentais com um modelo reduzido de viga *steel joist* foram realizados em laboratório. Neste caso, a análise modal experimental foi utilizada como uma ferramenta para estimar os parâmetros modais da estrutura, frequências naturais, modos de vibrar e amortecimento, os quais são os dados de entrada da rotina de ajuste de modelo.

A dissertação está dividida em 7 capítulos. O capítulo 2 apresenta os principais conceitos referentes às técnicas de ajuste. Inicialmente são discutidos alguns dos trabalhos envolvendo vibrações em estruturas civis e metodologias para o ajuste de modelo de elementos finitos. Em seguida, são apresentados os aspectos básicos da Análise Modal e a formulação da Análise Modal Experimental, a qual será utilizada como ferramenta nas técnicas de ajuste. Os principais problemas da correlação de modelos e os métodos de comparação dos dados medidos com os dados preditos são apresentados e discutidos. Por fim, são apresentados os aspectos gerais dos métodos de



atualização de modelo, enfatizando as vantagens da utilização direta das respostas medidas no processo de ajuste.

O capítulo 3 apresenta a formulação da técnica de ajuste baseada nas funções de resposta em frequência.

O capítulo 4 discute com detalhes a seleção e a correção dos parâmetros de ajuste. Inicialmente é apresentada a formulação de elementos finitos utilizada na análise dinâmica de placas, ressaltando a influência dos parâmetros físicos nas matrizes de massa e rigidez elementares. Em seguida é apresentada a análise de sensibilidade das frequências características em relação ao parâmetro de ajuste. Por meio desta análise é possível conhecer em quais componentes ou regiões do modelo o ajuste fornece resultados mais significativos. Por fim, são apresentados o cálculo da correção dos parâmetros e a descrição detalhada da rotina de ajuste.

O capítulo 5 refere-se à aplicação da metodologia proposta em exemplos simulados. A primeira parte do capítulo 5 apresenta um estudo numérico de uma viga *steel joist* envolvendo a análise de sensibilidade. A segunda parte discute o ajuste de modelo de elementos do tipo placa.

O capítulo 6 apresenta o estudo de uma viga *steel joist* utilizando dados experimentais.

Finalmente, o capítulo 7 conclui o trabalho discutindo a importância, as dificuldades e limitações da metodologia proposta.



CAPÍTULO 2

Fundamentos Teóricos

Todas as estruturas estão, de uma forma ou de outra, sujeitas a vibração, a qual é, em geral, indesejada. Em virtude dos efeitos adversos que as vibrações podem causar, existe um grande interesse em se conhecer o comportamento dinâmico das estruturas. Este estudo pode ser dividido em duas atividades distintas: modelagem analítica e testes experimentais.

Atualmente, para o projeto, análise e especialmente para a predição do comportamento dinâmico de estruturas complexas é necessário dispor de modelos matemáticos confiáveis, especialmente quando a operação, a integridade e o controle destas estruturas dependem crucialmente do conhecimento das suas características dinâmicas. Uma série de métodos e técnicas de modelagem tem sido proposto para tal, sendo o método dos elementos finitos indubitavelmente um dos mais expressivos nesta área. Entretanto, existem diversas situações nas quais a modelagem por elementos finitos é limitada e os resultados necessitam de uma avaliação mais refinada, ou mesmo testes para validação do modelo. Neste contexto, as técnicas de ajuste de modelo vêm



se firmando como ferramentas de grande alcance nesta área, cuja finalidade é melhorar o modelo de elementos finitos com base em dados medidos.

No entanto, as aplicações de técnicas de atualização de modelos para estrutura de engenharia civil (pilares e lajes de concretos, pontes, e outros) ainda é incipiente, mas a literatura recente tem mostrado alguns resultados bastante promissores, o que leva a acreditar que a mesma deverá ocupar, em um futuro próximo, um lugar de destaque na análise destas estruturas. A primeira seção deste capítulo apresenta alguns trabalhos que mostram que existe grande interesse neste assunto, apresentam as dificuldades e limitações das técnicas existentes para estudar o problema, e apontam para uma metodologia envolvendo a utilização de testes experimentais para a validação e ajuste da modelagem de elementos finitos.

A seção 2.2 mostra as principais características da análise modal, utilizada como ferramenta no ajuste de modelo, ressaltando as diferentes limitações e hipóteses, bem como as vantagens e desvantagens das formulações analítica e experimental da análise modal. A seção 2.3 apresenta a formulação da análise modal experimental. A seção 2.4 discute os principais problemas envolvidos na comparação dos modelos e apresenta algumas das técnicas de correlação mais usadas. Os aspectos básicos das técnicas de ajuste de modelo são apresentados na seção 2.5.

2.1 Revisão Bibliográfica

Vibrações em estruturas de engenharia civil, especialmente aquelas causadas pelas pessoas em suas atividades diárias de trabalho ou lazer, é um assunto em estudo já há vários anos (Galambos, 1988) e que vem ocupando um grande espaço no meio técnico científico mais recentemente.

De acordo com Stephenson et al. (1998), há um grande interesse em todo o mundo no conhecimento da resposta de pisos ao impacto causado pelo uso cotidiano das pessoas, tal como um simples caminhar. Este assunto é particularmente relevante quando se consideram estruturas esbeltas, e as investigações buscam um maior entendimento do comportamento deste tipo de estrutura, e de que maneira suas características de vibração podem ser relacionadas com o conforto humano, de forma a



se evitar as frequências que podem causar desconforto, ainda que não seja necessariamente o tempo todo. E concluem que são necessários estudos atuais que identifiquem as frequências dos diferentes pisos, e estabeleçam as frequências cujas pessoas são mais sensíveis quando caminham sobre pisos apoiados em vigas *steel joist*.

Ellis et al. (1997) estudam a interação homem\estrutura em vibrações verticais, e mostram a influência do público nos modos de vibrar de uma estrutura tipo arquibancada. Eles afirmam a crescente importância de se conhecer a resposta das estruturas às cargas dinâmicas induzidas por indivíduos ou multidões, salientando que a literatura está bastante carente deste assunto.

Trabalhos como o de Fusco (1996) e Bonilha (1997), abordam as técnicas de investigação dos comportamentos dinâmicos de estruturas civis antigas (já existentes), como por exemplo estádios de futebol, submetidas a vibrações induzidas pelas pessoas, considerando não apenas os aspectos de segurança, mas também aspectos de conforto dos usuários.

Reynolds et al. (1998 a) descreve como a modelagem por elementos finitos, análise modal e técnicas de ajuste de modelo, podem ser aplicadas para resolver problemas de vibração em estruturas esbeltas, resultado de técnicas avançadas de dimensionamento, porém ainda carentes de conhecimento a respeito dos níveis de vibrações que pode atingir tal estrutura. Em outro trabalho, Reynolds et al. (1998 b) avalia o comportamento dinâmico de um piso de concreto já construído, antes e depois da incorporação de um piso falso não estrutural. Para tanto, eles usam análise modal para melhorar o modelo por elementos finitos, por meio de técnicas de ajuste de modelo, e com o modelo analítico representativo eles conhecem o comportamento dinâmico da estrutura em diferentes situações de carregamento e operação.

Cantieni et al. (1998) buscam por meio do modelo analítico ajustado a melhor solução para o problema de vibrações em um piso de laje de concreto adicionado a um galpão industrial já existente para servir de escritório, onde pessoas caminham e operam máquinas (fax, xerox). O problema surgiu por causa do amplo vão. Assim, o modelo ajustado foi utilizado para simular as diversas soluções possíveis, como por exemplo encontrar o número mínimo de colunas a serem adicionadas de forma a elevar as frequências características de estrutura para que estas não coincidam com a faixa de frequência de excitações causadas pelos usuários.



Considerando a necessidade do acompanhamento das condições de uso de pontes antigas, Wang et al. (1997) buscaram estabelecer um modelo analítico base capaz de representar satisfatoriamente a estrutura sem defeito. Para tanto, desenvolvem um modelo de elementos finitos, cujos modos de vibrar são comparados com os modos do modelo experimental (obtido por medições em campo) utilizando uma técnica de correlação bastante popular: Coeficiente Modal de Correlação (Modal Assurance Criterion –MAC). O método apresentado pelos autores pode ser considerado como um tipo de técnica de ajuste de modelo, e é utilizado para se avaliar a condição da estrutura, no caso uma ponte, de tempos em tempos.

Papadimitriou et al. (1998) apresentam uma metodologia para o ajuste de modelo de elementos finitos de uma estrutura usando um conjunto incompleto de dados (frequências naturais e modos próprios) obtidos experimentalmente, no qual o resíduo do balanço de força é minimizado pela técnica dos mínimos quadrados. E observam significativa melhora no modelo ajustado para todos os casos estudados.

Os vários trabalhos relacionados acima abordam os problemas de vibrações em estruturas civis, em particular aquelas causadas pelas próprias condições de uso, tais como o caminhar sobre pisos de laje, o movimento das torcidas nos estádios, o tráfego sobre pontes, e descrevem ainda como os níveis de vibrações afetam o conforto dos usuários. A metodologia apresentada para a solução destes problemas envolve uma formulação numérico-experimental, cujo objetivo é obter um modelo analítico representativo do sistema físico por meio de técnicas de ajuste de modelo semelhante à metodologia proposta neste trabalho: a estrutura é modelada analiticamente (numérico) por elementos finitos e testes experimentais são utilizados para a validação do modelo ou, nos casos em que não existe uma boa correlação entre os dados numérico-experimentais, o modelo de elementos finitos é corrigido (ajustado) com base nos dados experimentais.



2.2 Análise Modal

A Análise Modal é uma importante ferramenta para a investigação dos problemas da dinâmica estrutural, tanto na área experimental quanto na modelagem analítica das estruturas. É uma técnica bem conhecida que investiga o comportamento dinâmico de estruturas por meio de uma formulação matricial, na qual a modelagem do sistema está fundamentada em três simplificações básicas: a estrutura é linear, invariante no tempo e observável. Se forem satisfeitas estas condições, a estrutura real poderá ser representada por um modelo matemático discreto capaz de descrever as principais características dinâmicas da estrutura por meio de um número reduzido de dados. As propriedades de massa, rigidez e amortecimento são definidas para um número reduzido de pontos, chamados pontos de discretização ou pontos nodais. O sistema de equações de equilíbrio do sistema é definido por um vetor deslocamento $\{X\}$ e pelas matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura. Para um sistema com n graus de liberdade, tem-se:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (2.01)$$

Na qual:

- $[M]$ - matriz de massa ($n \times n$)
- $[C]$ - matriz de amortecimento ($n \times n$)
- $[K]$ - matriz de rigidez ($n \times n$)
- $\{X\}$ - vetor ($n \times 1$) de deslocamento
- $\{F\}$ - vetor ($n \times 1$) de força

Para um sistema real, as matrizes de rigidez, amortecimento e massa apresentam algumas propriedades específicas, tais como: semi-positiva definida, autovetores ortogonais em relação à massa e à rigidez, e para alguns casos especiais de amortecimento, em relação ao amortecimento (Meirovitch, 1980). Estas propriedades são aplicadas à maioria das formulações matemáticas utilizadas na Análise Modal, pois simplificam a formulação e conferem uma melhor performance dos métodos de soluções.



Na modelagem analítica, em geral por Elementos Finitos, a estrutura é dividida em elementos e o modelo matricial do sistema é descrito em função das propriedades físicas e geométricas dos elementos. As matrizes da estrutura são calculadas por meio da montagem adequada das matrizes individuais de rigidez e massa dos elementos, obedecendo às condições de compatibilidade e continuidade do modelo. A solução do modelo matricial (problema de autovalores) fornece os parâmetros modais, frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura. Na modelagem experimental, o comportamento dinâmico da estrutura é avaliado considerando as propriedades da estrutura e a natureza da excitação, isto é, por meio da relação excitação-resposta medida na estrutura.

A seguir são discutidos as principais características e alguns conceitos da formulação analítica da análise modal, bem como as vantagens e desvantagens das modelagens analítica e experimental.

2.2.1 O Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica de análise numérica, entre outras (como por exemplo, Matriz de Transferência ou Deslocamento Generalizado), para expressar os deslocamentos de uma estrutura como um número finito de deslocamentos e/ou deflexões nodais. Atualmente, graças ao seu amplo potencial, este método representa uma das ferramentas mais gerais de análise estrutural. Combinando versatilidade matemática com uma interpretação geométrica simples, este método é aplicado em praticamente todos os campos de análise de engenharia. Existe uma vasta literatura a respeito do assunto, incluindo as diferentes formulações, bem como os aspectos computacionais envolvidos na solução dos problemas. Dentre os livros clássicos encontram-se: Prezeminiecki, 1968; Bathe & Wilson, 1976; Zienkiewicz, 1985, e outros.

Basicamente, o Método dos Elementos Finitos conduz à construção de um sistema discreto de equações matriciais que representam os efeitos de massa e rigidez de uma estrutura contínua. As matrizes, em geral, são simétricas e na forma de banda. Não há restrição quanto à complexidade geométrica da estrutura, pois as matrizes de



massa e rigidez são obtidas por meio de contribuições dos elementos finitos individuais com formas simples. O comportamento dos elementos pode ser analisado usando o enfoque de campo de deslocamento ou força, por meio das funções de forma ou de interpolação. Assim, cada elemento finito possui uma formulação matemática que está associada com descrições geométricas simples, ao contrário da geometria da estrutura como um todo. Uma vez escolhidos os elementos e suas funções de interpolação, determina-se a equação matricial que expressa as propriedades dos elementos individuais. Pode ser utilizado um dos seguintes métodos: método direto, método variacional, método variacional ponderado, ou método do balanço de energia (Rad, 1997). O passo seguinte é montar a matriz global da estrutura com base nas matrizes individuais dos elementos.

$$[K] = \sum_{i=1}^{nel} [k_i]^e \quad [M] = \sum_{i=1}^{nel} [m_i]^e \quad (2.02)$$

Nas quais:

$[k_i]^e$ – matriz de rigidez do i-ésimo elemento

$[m_i]^e$ – matriz de massa do i-ésimo elemento

nel – número de elementos do modelo

O símbolo $\sum$ representa a superposição das matrizes de massa e rigidez individuais de cada elemento, obedecendo às condições de conectividade entre os mesmos (para maiores detalhes ver Prezeminiecki, 1968). Desta forma, a Expressão 2.02 permite a montagem das matrizes globais de massa e rigidez da estrutura, cuja dimensão é o próprio número de graus de liberdade no modelo. A escolha do número de graus de liberdade é arbitrária, mas deve ser uma quantidade suficiente para minimizar os erros de discretização. O número de graus de liberdade e as matrizes de massa e rigidez de uma estrutura podem variar de um analista para outro e de um programa de elementos finitos para outro. Porém, o resultado final deve ser o mesmo, independente do programa ou do analista.

Neste estudo numérico, uma representação exata das matrizes de amortecimento já não é possível, é mais comum utilizar a matriz de amortecimento proporcional, a qual está baseada em fatores de amortecimento modal obtidos experimentalmente.



O modelo matemático resultante é simplesmente um conjunto de equações diferenciais que representam o movimento do sistema. Para o caso não amortecido, da Expressão 2.01 tem-se:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (2.03)$$

O sistema de equações descrito pela Expressão 2.03 representa o equilíbrio de forças atuando no sistema, forças elásticas, inerciais e externas, por meio de conjunto simultâneo de equações lineares com coeficientes constantes. Existem várias dificuldades para a solução deste sistema de equações, especialmente quando se trata de sistemas de ordem mais elevada, como é o caso do problema de elementos finitos. Neste caso, a análise modal é uma técnica muito conveniente para abordar este problema. Procede-se a solução do problema de autovalor, para o qual existe uma variedade de métodos de soluções, e a resposta do sistema pode ser expressa como uma combinação linear dos autovetores.

Em virtude da falta de exatidão do modelo analítico, testes dinâmicos em estruturas reais têm sido utilizados como um processo clássico para confirmar o modelo de elementos finitos ou ajustá-lo para representar os dados experimentais. No entanto, ambas modelagens, analítica e experimental, apresentam problemas. Os erros no modelo de elementos finitos podem ser divididos basicamente em dois tipos:

- Erros inevitáveis que surgem por causa da própria técnica numérica utilizada. O mais crítico é o erro de discretização que surge em virtude da aproximação da estrutura contínua por um número finito de elementos individuais (o tamanho deste erro depende da qualidade da malha e da eficácia das funções de forma).
- Erros de modelagem em virtude das hipóteses adotadas pelo analista: escolha inadequada do tipo de elemento para representar a geometria em questão, omissão de detalhes menos importantes, incertezas associadas às condições de contorno, e outros.

Alguns dos problemas encontrados na análise modal experimental são:

- a estrutura de teste pode exibir não linearidade significativa, e o modelo analítico assume linearidade;



- as condições de engaste são muito difíceis de se obter, e as condições livre-livre estão sujeitas aos efeitos da suspensão;
- o número de modos identificados é limitado pela faixa de frequência e alguns modos da estrutura podem não ser excitados durante o experimento, ou, mesmo se excitado, podem não ser identificados;
- com a tecnologia atual ainda é inviável a medição de alguns graus de liberdade, tais como aqueles internos e rotações, e os dados medidos são contaminados por uma certa quantidade de ruído;

Em virtude das diferentes limitações e hipóteses adotadas em ambos os métodos, o modelo de elementos finitos e o modelo obtido pela análise modal experimental apresentam diferenças. Uma vez que os resultados obtidos no modelo experimental são derivados diretamente das características medidas no sistema real, assume-se que o modelo experimental é mais confiável do que o modelo de elementos finitos. Por meio da Técnica de Ajuste de Modelo busca-se identificar, com base nos dados medidos, variações dos parâmetros do modelo analítico que minimizam a diferença entre os modelos analítico e experimental.

Em suma, a Técnica de Ajuste de Modelo pode ser definida como a correção de um modelo analítico existente, com base em dados obtidos em testes dinâmicos. Após a correção, o modelo ajustado deve representar fielmente o comportamento dinâmico da estrutura.

A seção seguinte discute a formulação da análise modal experimental. A inclusão deste assunto no corpo da dissertação tem por objetivo apresentar todos os aspectos envolvidos na metodologia proposta.

2.3 Análise Modal Experimental

A análise modal experimental tem sido amplamente utilizada para a identificação de parâmetros modais (frequência natural, razão de amortecimento e deslocamento modal) de estruturas mecânicas. Seus vários aspectos e aplicações têm sido extensamente estudados, existindo atualmente uma vasta literatura a respeito do



assunto (Ewins, 1984; Snoeys et al, 1992; Heylen et al, 1994; Maia e Silva, 1997). Neste trabalho a análise modal será utilizada como uma ferramenta para estimar os parâmetros modais, os quais serão usados como dados de entrada da rotina de ajuste de modelo.

A análise modal experimental consiste basicamente de dois passos: aquisição de dados e análise dos dados para extração dos parâmetros modais, ou seja, frequências naturais, modos próprios e razões de amortecimento.

A formulação matemática do método conduz a um modelo matemático que estabelece uma relação entre a resposta (saída) e a excitação (entrada) do sistema em termos dos seus parâmetros modais. A relação entrada-saída é calculada com base na excitação e na resposta, medidas respectivamente nos pontos de excitação e de medição previamente selecionados. Um conjunto de funções complexas é obtido, e cada uma representa a função transferência $H_{ij}(s)$ entre a força de excitação aplicada no ponto j e a resposta medida no ponto i da estrutura. As funções de transferência podem também ser avaliadas no domínio da frequência, definindo as chamadas funções de resposta em frequência (FRF(s)). As funções de transferência do modelo são definidas pela razão entre saída e a entrada do sistema. O denominador da função de transferência é associado à equação característica do sistema, e suas raízes ou polos permitem estimar as frequências naturais e razão de amortecimento da estrutura.

2.3.1 Função de Transferência

A função de transferência é obtida com base na equação de movimento:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\}$$

Na qual:

$[M]$ - matriz de massa ($n \times n$)

$[K]$ - matriz de rigidez ($n \times n$)

$[C]$ - matriz de amortecimento ($n \times n$)

$\{X\}$ - vetor deslocamento ($n \times 1$)

$\{F\}$ - vetor força ($n \times n$)



Rescrevendo o sistema de equações em termos da variável de Laplace s , e assumindo condições iniciais nulas para o problema, a equação de movimento pode ser escrita como:

$$(s^2[M] + s[C] + [K])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (2.04)$$

Em uma forma compacta:

$$[Z(s)]\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (2.05)$$

Na qual:

$$[Z(s)] = s^2[M] + s[C] + [K] \quad \text{- matriz de rigidez dinâmica do sistema}$$

Esta matriz define uma relação direta entre a resposta $\{X(s)\}$ e a excitação $\{F(s)\}$ do sistema. Para uma entrada conhecida, a resposta medida do sistema pode ser relacionada com a entrada $\{F(s)\}$ pela definição de uma matriz desconhecida $[H(s)]$, chamada de matriz das funções de transferência, dada por:

$$\{X(s)\} = [H(s)]\{F(s)\} \quad (2.06)$$

Na qual:

$$[H(s)] \quad \text{- matriz de transferência do sistema.}$$

Com base na Expressão 2.05 e na Expressão 2.06, pode ser estabelecida uma relação direta entre a matriz transferência e a matriz de rigidez dinâmica:

$$[H(s)] = [Z(s)]^{-1} \quad (2.07)$$

Ou, utilizando a inversa da matriz de rigidez dinâmica,

$$[H(s)] = \frac{Adj[Z(s)]}{Det[Z(s)]} \quad (2.08)$$

Na qual:

$Adj[Z(s)]$ - matriz adjunta de $[Z(s)]$

$Det[Z(s)]$ - determinante da matriz $[Z(s)]$

O denominador da Expressão 2.08 representa a equação característica do modelo, então suas raízes (λ_r, λ_r^*) fornecem as frequências naturais e razões de amortecimento do modelo, e a equação pode ser rescrita como frações parciais.

$$[H(s)] = \sum_{i=1}^N \frac{[A_r]}{s - \lambda_r} + \frac{[A_r]^*}{s - \lambda_r^*} \quad (2.09)$$

Na qual:

A_r - resíduo

Uma relação direta entre os resíduos e os vetores modais pode ser dada por:

$$[H(s)] = \sum_{i=1}^N \frac{Q_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^T}{s - \lambda_r} + \frac{Q_r^* \{\psi\}_r^* \{\psi\}_r^{*T}}{s - \lambda_r^*} \quad (2.10)$$

Na qual:

$$A_r = Q_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^T ;$$

Q_r - fator de escala

A relação entre as funções de transferência e os vetores modais é o que permite relacionar as funções de respostas com os vetores modais. Este é o caso mais geral de análise modal e a maioria dos programas comerciais estimam os parâmetros do sistema com base nesta expressão (para maiores detalhes ver Heylen et al., 1994).



2.3.2 Função de Resposta em Frequência

As funções de resposta em frequência são definidas substituindo na Expressão 2.10, a variável de Laplace s pela frequência complexa $j\omega$. O conjunto das funções de resposta calculadas ao longo do eixo de frequência, $j\omega$, para cada grau de liberdade selecionado define a matriz das funções de resposta em frequência.

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{Q_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{Q^* \{\psi\}_r^* \{\psi\}_r^{*T}}{j\omega - \lambda_r^*} \quad (2.11)$$

Ou, utilizando os vetores modais e fatores de participação,

$$[H(j\omega)] = [V] [j\omega [I] - [\Lambda]]^{-1} [L] \quad (2.12)$$

Na qual:

$$[V] = [\{\psi\}_1 \cdots \{\psi\}_N \{\psi\}_1^* \cdots \{\psi\}_N^*]$$

$$[L] = [Q_1 \{\psi\}_1 \cdots Q_N \{\psi\}_N Q_1^* \{\psi\}_1^* \cdots Q_N^* \{\psi\}_N^*]^T = [Q] [V]^T$$

A Expressão 2.11 e a Expressão 2.12 relacionam diretamente os parâmetros modais da estrutura com as FRF(s) medidas, permitindo a estimativa dos mesmos com base nos dados medidos. A extração destes parâmetros é feita por meio de técnicas de estimação de parâmetros aplicadas à Expressão 2.11. Atualmente existem um grande número de métodos, passando por estimadores baseados em um grau de liberdade, até estimadores mais complexos, utilizando multi graus de liberdade (Ewins, 1984; Heylen et al., 1994; Maia e Silva, 1997). Basicamente, os métodos convencionais buscam definir uma expressão capaz de relacionar os parâmetros modais procurados diretamente com as funções de resposta medidas (valores conhecidos), e com base nesta expressão, estimar os valores dos mesmos.



2.4 Correlação de Modelos

Nesta etapa do processo de ajuste de modelo, os dados do modelo analítico (ω^A, ϕ^A) são comparados com os dados experimentais (ω^X, ϕ^X), e é verificado se o modelo analítico é representativo do sistema ou se é necessário uma reavaliação do mesmo. Surgem então as dificuldades de se estabelecer uma base de comparação capaz de correlacionar um conjunto reduzido de dados (modelo experimental) com os dados analíticos (Pereira, 1996).

Os principais problemas na comparação são:

- (i) Incompatibilidade entre os graus de liberdade dos modelos - a quantidade de graus do modelo analítico é muito maior do que do modelo experimental (em geral, obtido por teste modal);
- (ii) Incompatibilidade geométrica - as coordenadas medidas muita vezes não coincidem com as coordenadas do modelo de elementos finitos, isto acontece por causa do número limitado de transdutores usados para medir a resposta da estrutura; da dificuldade de acesso aos pontos de medição; das limitações dos equipamentos de medida (graus de liberdade de rotação); e às vezes também pela falta de comunicação entre as equipes de projeto e de teste das empresas;
- (iii) Imperfeições na modelagem, sobretudo a ausência (não inclusão) do amortecimento no modelo numérico.

O primeiro problema pode ser solucionado pelo método de redução dos graus de liberdade do modelo analítico ou pelo método de expansão dos graus de liberdade do modelo experimental. O segundo problema pode ser evitado utilizando um sistema comum de referência para ambos modelos. E o amortecimento pode ser aproximado por um modelo de amortecimento proporcional ou utilizando coeficiente de amortecimento experimental para cada modo para recriar as FRF(s) analíticas (Friswell et al., 1995).

Assumindo que as malhas dos modelos analítico e experimental são compatíveis e que existe uma base comum de comparação que permite estabelecer uma correspondência entre os graus de liberdade do modelo analítico e do modelo experimental, várias técnicas de correlação podem ser aplicadas, como por exemplo:



- (i) Comparação direta das frequências de ressonância (Ewins, 1984);
- (ii) Coeficiente Modal de Correlação (Modal Assurance Criterion –MAC) (Allemang & Brown, 1982);
- (iii) Ortogonalidade de matrizes (Targoff, 1976);
- (iv) Comparação de FRF(s) (Rad, 1997);

A comparação dos modelos é uma fase fundamental do processo de ajuste. Vários aspectos do modelo estão envolvidos no processo de comparação, que compreende desde simples comparações, comparações diretas de parâmetros globais e parâmetros locais, até métodos mais elaborados de comparação. Porém, cada método aborda apenas um número limitado de aspectos, tais como, entre outros:

- parâmetros globais: frequências de ressonância
- parâmetros locais: modos de vibrar
- propriedades de ortogonalidade: massa e rigidez

A utilização de cada um destes métodos, de forma complementar, permite uma avaliação mais realística da proximidade entre os dados analíticos e experimentais (Pereira, 1996).

2.4.1 Comparação Direta das Frequências de Ressonância

A validade deste método limita-se a estruturas pouco amortecidas, cujas frequências amortecidas medidas podem ser comparadas com as frequências não amortecidas calculadas analiticamente (Ewins, 1984). Um método comum de comparação das frequências de ressonância de dois modelos similares é o gráfico de 45°, o qual mostra as frequências de ressonância experimentais contra as frequências de ressonância preditas. Se a distribuição dos pontos estiver em uma reta de inclinação mais ou menos igual a 1, com pequena dispersão, então os dados estão bem correlacionados. Caso contrário, não existe correlação entre os modelos ou estão mal correlacionados.



De maneira análoga pode-se comparar os modos de vibrar, plotando em gráfico $x \times y$ os elementos do modo experimental contra os elementos do correspondente modo predito (Pereira, 1996).

2.4.2 Coeficiente de Correlação Modal

Segundo este critério, se existe correlação entre os autovetores preditos e experimentais, ou seja, ambos vetores representam o mesmo modo, então estes podem ser escritos um proporcional ao outro. Este fator de proporcionalidade entre dois vetores é definido por Allemang et al. (1982) como fator de escala modal.

$$MSF\left(\frac{\{\psi^A\}}{\{\psi^X\}}\right) = \frac{\{\psi^A\}^T \{\psi^X\}}{\{\psi^X\}^T \{\psi^X\}} \quad (2.13)$$

A correlação entre estes dois modos é definida pelo coeficiente de correlação modal (Modal Assurance Criterion – MAC).

$$MAC\left(\frac{\{\psi^A\}}{\{\psi^X\}}\right) = \frac{|\{\psi^A\}^T \{\psi^X\}|^2}{(\{\psi^A\}^T \{\psi^A\})(\{\psi^X\}^T \{\psi^X\})} \quad (2.14)$$

MAC- valores iguais à unidade indicam uma perfeita correlação entre os dois vetores, e MAC- valores iguais a zero indicam total ausência de correlação entre os mesmos. Informações adicionais, como por exemplo os possíveis componentes do modo responsáveis por eventuais discrepância entre os dados medido e preditos, podem ser obtidas utilizando o conceito de fator de escala e coeficiente de correlação dos modos.

O Coeficiente de Correlação Modal dos Graus de Liberdade –COMAC (Coordinate Modal Assurance Criterion) é um outro método utilizado para a comparação de modos com base no conceito de coeficiente de correlação. De acordo com este critério, a correlação do modelo é calculada em relação a cada componente dos vetores modais. Um conjunto de nc pares de modos correlacionados (experimentais/analíticos) é utilizado para o cálculo do coeficiente de correlação de cada grau de liberdade i do modelo (Ewins, 1984). O valor do coeficiente de cada grau

de liberdade i é calculado pela Expressão 2.15 e o número de pares de modos são definidos pelo conceito de MAC- valores.

$$COMAC(i) = \frac{\sum_{k=1}^{nc} |\psi_k^A(i) \cdot \psi_k^X(i)|^2}{\sum_{k=1}^{nc} (\psi_k^A(i))^2 \cdot \sum_{k=1}^{nc} (\psi_k^X(i))^2} \quad (2.15)$$

De maneira análoga ao coeficiente de correlação modal (MAC- valores), a magnitude dos valores dos coeficientes calculados (COMAC- valores) encontra-se entre zero e a unidade, e a interpretação destes valores é idêntica à anterior. Neste caso, o método correlaciona os graus de liberdade da estrutura, e não os modos próprios, o que permite em alguns casos, identificar as regiões do modelo não correlacionadas satisfatoriamente.

2.4.3 Ortogonalidade

Os autovetores referentes a um modelo analítico de uma estrutura não amortecida são ortogonais de modo que, para autovetores normalizados pela massa,

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [I] \quad \text{e} \quad [\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = [\Lambda] \quad (2.16)$$

Nestas Expressões, $[\Phi]$ é a matriz de autovetores normalizados em relação à massa, $[\Lambda]$ é a matriz diagonal de autovalores e $[I]$ é a matriz identidade. Se os modos próprios medidos forem substituídos na Expressão 2.16, então a qualidade dos modos pode ser determinada pela proximidade de ambos os lados da Expressão. Se forem substituídos por modos próprios numéricos, a ortogonalidade não oferece indicação quanto à correlação entre os modelos. Porém, pré- multiplicando e pós-multiplicando somente um autovetor pelos dados medidos, é possível a comparação dos modos analíticos e experimentais. A hipótese da normalização da massa não representa um problema na Expressão 2.16, pois as técnicas de análise modal usualmente estimam modos próprios normalizados pela massa. As duas maiores dificuldades que restringem o uso da ortogonalidade são medidas de modos complexos e incompatibilidade de dados medidos. A incompatibilidade acontece por causa do número de posições medidas, o



que significa que matrizes de massa e rigidez devem ser reduzidas ou os modos próprios devem ser expandidos (Friswell et al., 1995). O problema da complexidade dos modos pode ser resolvido tornando os modos reais (Pereira, 1996).

No contexto de atualização de modelos, os métodos mais utilizados são:

- Ortogonalidade Mista:
$$[\psi^x]^T [M^A] [\psi^A] = [m_\lambda]$$

- Ortogonalidade Cruzada:
$$[\psi^x]^T [M^A] [\psi^x] = [m_\lambda]$$

Para uma situação ideal, dados analíticos bem correlacionados com os dados experimentais e modos normalizados em relação à massa, os elementos de diagonal da matriz $[m_\lambda]$ são unitários, e os demais são zero. No entanto, em aplicações práticas, estes valores não se verificam e elementos fora da diagonal com valores até 10% são aceitos como indicativo de correlação satisfatória do modelo (Pereira, 1996).

2.4.4 Comparação de FRF(s)

Uma inspeção visual é geralmente suficiente para determinar a correlação entre as funções de transferência analíticas e experimentais. Também pode ser utilizado um fator de erro, calculado por meio da norma Euclidiana dos vetores de Função de Resposta em Freqüência medidos em funções discretas (Expressão 2.17):

$$\varepsilon_{H_{ij}} = \frac{\|(H_A)_{ij} - (H_X)_{ij}\|}{\|(H_A)_{ij}\|} \quad (2.17)$$

O seguinte critério é baseado nas técnicas de MAC e nos conceitos de alternar as freqüências. É proposto para medir a proximidade entre FRF analítica e experimental (Expressão 2.18):

$$FDAC(\omega_a, \omega_x, j) = \frac{(\{H_A(\omega_a)\}_j^T \{H_X(\omega_x)\})^2}{(\{H_A(\omega_a)\}_j^T \{H_A(\omega_a)\}_j)(\{H_X(\omega_x)\}_j^T \{H_X(\omega_x)\}_j)} \quad (2.18)$$



Na Expressão 2.18, j corresponde à coluna medida de $[H]$, ω_A corresponde à frequência na qual $\{H_A\}$ é calculada e ω_x corresponde à frequência na qual a FRF foi medida experimentalmente. O coeficiente de correlação no domínio da frequência (FDAC – Frequency Domain Assurance Criterion) pode ser considerado como equivalente ao MAC no domínio das FRF(s). De modo análogo ao MAC, valores de FDAC são limitados entre 0 e 1. O valor de 1 indica perfeita correlação, e 0 significa nenhuma correlação (Rad, 1997).

2.5 Técnicas de Ajuste de Modelo

Uma rotina de ajuste de modelo consiste, basicamente, no desenvolvimento de um método sistemático de correção do modelo analítico em relação ao modelo experimental. Considerando que os modelos são compatíveis, os dados medidos são comparados com os dados analíticos com o objetivo de definir a correlação dos modelos e localizar a discrepância entre eles. Finalmente, por meio de um processo de ajuste, o modelo analítico é corrigido com base nos dados experimentais.

As primeiras tentativas sistemáticas de utilização, de forma complementar, dos dados obtidos na modelagem experimental com os resultados da modelagem analítica surgiram no início dos anos 70. Berman & Flannelly (1971) marca o início das técnicas de ajuste de modelo utilizando métodos de ajuste direto das matrizes de massa e rigidez. Desde então, vários pesquisadores têm trabalhado neste assunto utilizando os mais variados métodos, Mottershead (1993) apresenta uma revisão bastante completa incluindo mais de três centenas de artigos. Atualmente livros como Heylen (1994), Friswell (1995) e Maia (1997) incluem a formulação de algum dos principais métodos de ajuste.

A literatura mostra uma variedade muito grande de métodos e técnicas de ajuste, o que torna o levantamento destes trabalhos uma tarefa bastante árdua. Entretanto, a grande maioria dos métodos são bastante similares, apresentando pequenas variações, o que permite colocá-los em algumas classes ou grupos. Diversas classificações têm sido propostas, por exemplo, Friswell et al.(1995) considerando o processo de solução do sistema de equações, classifica os métodos de ajuste em métodos diretos e métodos



iterativos. A seguir, um breve comentário será feito sobre ambos os métodos, com ênfase para os iterativos, uma vez que são estes utilizados neste trabalho.

Os métodos diretos compreendem, entre outros:

- Métodos baseados nos Multiplicadores de Lagrange
- Métodos por Matriz Ótima

A atualização de modelos por Matriz Ótima consiste basicamente no cálculo das matrizes de correção $[\Delta K]$ e $[\Delta M]$, as quais minimizam uma norma de uma dada função erro, $\delta F([\Delta K], [\Delta M])$, considerando certas restrições. Os parâmetros desconhecidos (variações dos componentes de rigidez) são calculados por meio das equações de atualização escritas em função dos parâmetros modais medidos e das matrizes analítica de rigidez e massa conhecidas do modelo de elementos finitos.

$$[K^U] = [K^A] + [\Delta K] \quad [M^U] = [M^A] + [\Delta M]$$

As matrizes ótimas são calculadas diretamente sem nenhuma iteração.

Os métodos iterativos compreendem, entre outros:

- Métodos baseados na Sensibilidade
- Métodos baseados nas Funções de Resposta em Frequência

Os métodos de Sensibilidade estão baseados na minimização de um vetor erro ou resíduo em relação a um conjunto de parâmetros de atualização previamente selecionado. Este vetor geralmente expressa a diferença entre o modelo analítico e o experimental como uma expressão matricial que combina os parâmetros modais medidos e os parâmetros espaciais do modelo analítico. Existem várias estratégias para definir o vetor resíduo, como por exemplo:

- Frequência de ressonância (Heylen et. al, 1993):

$$\varepsilon = \frac{\omega_r^A - \omega_r^X}{\omega_r^X}$$

- Modos próprios (Heylen et. al, 1993):

$$\varepsilon = \{\psi_r^A\} - \{\psi_r^X\}$$

- Massa total (Heylen et. al, 1993):

$$\varepsilon = m^A - m^X$$



- Ortogonalidade (Heylen et. al, 1993);

$$\varepsilon = \{\psi_r^x\}^T [M] \{\psi_s^x\}, \text{ com } r \neq s$$

$$\varepsilon = \{\psi_r^x\}^T [K] \{\psi_s^x\}, \text{ com } r \neq s$$

- Equilíbrio de força (Ibrahim et. al, 1987):

$$\varepsilon = ([K] - (\omega_r^x)^2 [M]) \{\psi_r^x\}$$

- Diferença de força (Larson et. al, 1992):

$$\varepsilon = \{F^A(\omega_k)\} - \{F^X(\omega_k)\}$$

- Diferença de FRF(s) (Larson et. al, 1992):

$$\varepsilon = \{H_j^A(\omega_k)\} - \{H_i^X(\omega_k)\}_j$$

Assim, a montagem das equações de atualização dependem da definição do resíduo e da escolha dos parâmetros de atualização. Estas equações podem expressar a diferença entre as frequências de ressonância, os modos próprios, a massa total, as funções de resposta em frequência dos modelos, etc. Alguns autores, como por exemplo Pereira (1996), utilizam simultaneamente a combinação destas equações visando uma melhor performance no processo de ajuste.

Neste trabalho, o método de ajuste está baseado nas respostas em frequência. Este método utiliza as funções de resposta em frequência para a definição do vetor resíduo.

O uso das FRF(s) diretamente no processo de ajuste permite a correção do modelo sem a necessidade de se proceder à análise modal do sistema, o que representa algumas vantagens em relação aos métodos baseados na extração dos parâmetros modais. Os métodos com base nos parâmetros modais utilizam FRF(s) de uma maneira indireta, para extração destes parâmetros. Este processo pode introduzir erros e incertezas além daqueles já presentes nos dados medidos. O capítulo 3 discutirá com maiores detalhes a técnica de ajuste de modelo baseada nas funções de resposta em frequência.



CAPÍTULO 3

Ajuste de Modelo Utilizando FRF(s)

O uso das FRF(s) diretamente no processo de ajuste de modelo não é recente. Trabalhos como os de Natke (1983) e Cottin et al. (1984) já mostravam as vantagens desta técnica de ajuste. Desde então, o interesse em desenvolver e explorar a técnica de ajuste de modelo baseada em FRF(s) tem produzido muitos trabalhos, como por exemplo, Lin & Ewins (1990); Larsson & Sas (1992); Lammens, (1993); Nalitoela, (1993); Pereira, (1996), Rad (1997), Grafe (1998), entre outros.

Funções de Resposta em Frequência - FRF(s) são a forma típica de apresentar as respostas medidas de um experimento dinâmico, e são utilizadas como referência para validação do modelo de elementos finitos.

A técnica de ajuste apresentada neste trabalho utiliza as FRF(s) medidas diretamente para a identificação dos possíveis parâmetros incorretos. Esta classe de ajuste de modelo é particularmente interessante pois, os dados utilizados são medidas diretas, e não um conjunto de propriedades modais estimadas, portanto contém maiores quantidades de informações a respeito do comportamento do modelo. Além disso,



existe uma grande quantidade de dados disponíveis, o que aumenta a possibilidade de se obter um conjunto de equações de atualização mais estável.

Neste capítulo, uma técnica de ajuste usando funções de resposta em frequência é apresentada. Neste método, as funções de resposta em frequência são utilizadas para a definição do vetor resíduo, e o modelo analítico é ajustado com base nas FRF(s) medidas.

Em geral, a técnica de ajuste de modelo procura identificar, com base nos dados medidos, variações dos parâmetros do modelo analítico que minimizam a diferença entre os dados analíticos e experimentais. Para modelos compatíveis, esta diferença pode ser descrita por um vetor resíduo $\{\varepsilon\}$.

$$\{\varepsilon\} = f\left(\left[Z^A(\{p\})\right], \{H^x\}\right) \quad (3.01)$$

Na qual:

$\left[Z^A(\{p\})\right]$ - matriz de rigidez dinâmica contendo os parâmetros analíticos da estrutura

$\{H^x\}$ - a vetor contendo os dados medidos

Para uma perfeita correlação entre os modelos, esta função resíduo deve ser igual a zero. No entanto, em situações práticas os dados analíticos e experimentais não satisfazem esta condição, pois os modelos não são perfeitamente correlacionados, ou seja, $\{\varepsilon\} \neq \{0\}$. Dependendo do critério de comparação utilizado, este resíduo pode fornecer, em alguns casos, uma localização direta da diferença entre os modelos, levando à identificação dos prováveis parâmetros estimados incorretamente na modelagem. Uma vez identificados estes parâmetros, o processo de atualização procura as correções dos parâmetros $\{\Delta p\}$, que minimizam a diferença entre modelos. Portanto, a solução do problema consiste em identificar n_p mudanças de parâmetros, as quais tornam a diferença entre os dados do modelo próxima de zero.

$$\{\varepsilon\} = f\left(\left[Z^A(p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2, \dots, p_m + \Delta p_m)\right], \{H^x\}\right) \cong \{0\} \quad (3.02)$$

Geralmente, os critérios usados para comparar os modelos levam a um conjunto de equações não lineares em relação aos parâmetros selecionados para correção $\{p^u\}$, os chamados parâmetros de atualização. Dependendo do tipo de parâmetro selecionado,



a solução das equações torna-se muito complexa ou pode não existir. A linearização destas equações para a maioria dos sistemas físicos, é uma suposição válida nas faixas de frequência de interesse para análise de vibração. Desta forma, uma solução aproximada do problema é investigada linearizando-se o resíduo em relação aos parâmetros de atualização $\{p^u\}$.

3.1 Força de Excitação e Resposta

A discrepância entre o modelo analítico e o experimental é investigada por meio da relação entre a força de excitação e a resposta do modelo. Para uma excitação no ponto j e medida da resposta no ponto i , a equação dinâmica do modelo (sem amortecimento) é dada por:

$$([K] - (\omega_k)^2 [M])\{X(\omega_k)\}_i = \{F(\omega_k)\}_j \quad (3.03)$$

Na qual:

- $\{F(\omega_k)\}_j$ - força de excitação aplicada no grau de liberdade j
- $\{X(\omega_k)\}_i$ - resposta do modelo medida no grau de liberdade i
- ω_k - frequência de excitação

Se o modelo analítico e o modelo experimental são perfeitamente correlacionados e as condições de conectividade são respeitadas, a diferença entre os modelos deve ser nula. No entanto, em situações práticas isto não ocorre, uma vez que as condições de modelagem não são as mesmas. Neste caso, a diferença entre os modelos pode ser expressa por meio de um vetor erro definido pela diferença entre a força de excitação experimental $\{F^X\}$ e a força analítica $\{F^A\}$, necessária para produzir uma resposta analítica idêntica à resposta experimental $\{X^X\} = \{X^A\}$.

$$\{\epsilon_f\} = \{F^A\} - \{F^X\} \quad (3.04)$$



A Expressão 3.04 pode ser rescrita utilizando a matriz dinâmica $[Z]$:

$$\{\varepsilon_f\} = [Z]\{X^A\} - \{F^X\}$$

substituindo a resposta analítica $\{X^A\}$, excitação no grau de liberdade j , pela resposta experimental $\{X^X\}_j$, medida (lembrando que $\{X^X\} = \{X^A\}$) e efetuando algumas manipulações matemáticas, chega-se à expressão do erro:

$$\{\varepsilon_f\} = [Z]\{X^X\} - \{F^X\} \quad \left(\text{"÷"} \{F^X\}_j \right)$$

O vetor erro dado pela Expressão 3.04 pode ser rescrito em termos da matriz de receptância medida $[H]$:

$$\{\varepsilon_f\} = [Z^A]\{H^X\}_j - \{I\}_j \quad (3.05)$$

Na qual:

- $\{H^X\}_j$ - j -ésima coluna da matriz de receptância
- $[Z^A]$ - matriz de rigidez dinâmica
- $\{I\}_j$ - vetor cujas componentes são nulas, exceto para a j -ésima componente

Assim, a Expressão 3.05 define um vetor erro utilizando os parâmetros analíticos e os parâmetros medidos diretamente do sistema. Neste caso, o vetor erro descreve a discrepância entre os modelos por meio da matriz de rigidez dinâmica analítica e pela j -ésima coluna da matriz de receptância experimental (medida).

A subrotina desenvolvida para o ajuste de modelo parte do pressuposto que o modelo experimental representa satisfatoriamente o sistema real e os dados medidos são utilizados como referência para o ajuste do modelo analítico. Entretanto, no processo de ajuste é assumido que a formulação matemática do modelo de elementos finitos é “bem definida” e que a diferença entre os dois modelos surge em virtude das eventuais imprecisões nos valores estimados das propriedades físicas e/ou geométricas usadas no modelo de elementos finitos. Neste caso, o ajuste do modelo é feito por elementos ou



conjunto de elementos (macro regiões) e a correção dos parâmetros durante o processo de atualização, pode ser rastreada utilizando as informações da matriz de conexão entre os elementos. Isto permite ajustar o modelo analítico por meio da correção dos parâmetros incorretos de cada elemento ou macro região, mantendo o significado físico do modelo.

Para expressar a diferença dos modelos utilizando diretamente os parâmetros estruturais, a Expressão 3.05 pode ser rescrita em relação aos parâmetros $\{p\}$ do modelo de elementos finitos.

$$\{\varepsilon_f\} = [Z^A(\{p\})]\{H^x\}_j - \{I\}_j \quad (3.06)$$

Os parâmetros de atualização $\{p^u\}$ da matriz de rigidez dinâmica podem, neste caso, ser diretamente relacionados com os elementos do modelo de elementos finitos. Desta forma, a sensibilidade do modelo com relação à variação de um parâmetro p_i é avaliada por meio da variação da matriz do elemento (região) ao qual este parâmetro está associado, em relação ao modelo matricial. A correção do parâmetro durante o processo de atualização, neste caso, não afeta a conectividade dos elementos e a matriz de conexão permanece inalterada e conseqüentemente, as matrizes atualizadas mantêm as mesmas formas originais. As matrizes de massa e rigidez ajustadas mantêm a mesma conectividade e as propriedades de simetria, esparcialidade, etc., não mudam.

3.2 Linearização do Resíduo do Balanço de Força

A expansão de Taylor da matriz de rigidez dinâmica, para uma frequência ω_k é dada por:

$$[Z_k^A(\{p\})] = [Z_k^A(\{p^0\})] + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial [Z_k^A(\{p\})]}{\partial p_i} \Delta p_i + o(\Delta p_i)^2 + \dots \quad (3.07)$$



Substituindo a Expressão 3.07 na Expressão 3.06 e desprezando os termos de ordem mais alta, obtém-se a linearização do resíduo contendo os parâmetros de atualização.

$$\{\epsilon_f^{lin}(\omega_k)\} = [Z_k^A(\{p^0\})]\{H_k^X\}_j + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial [Z_k^A(\{p\})]}{\partial p_i} \Delta p_i \{H_k^X\}_j - \{I\}_j \quad (3.08)$$

A minimização deste resíduo leva a um conjunto de equações com base na sensibilidade da matriz de rigidez dinâmica e da matriz de receptância medida para uma dada frequência ω_k . O conjunto de equações obtido por meio da Expressão 3.08 quando comparado com equações baseadas na diferença de receptância é mais estável devido ao caráter monotônico e mudanças mais suaves da matriz de rigidez dinâmica em relação a pequenas variações dos parâmetros estruturais (Pereira, 1996). Entretanto, a estabilidade do processo não pode ser totalmente garantida e a convergência para pontos de mínimos locais ou divergência do processo pode ocorrer em relação a alguns parâmetros. Problemas numéricos também são esperados, pois são efetuadas operações matriciais problemáticas, como por exemplo a multiplicação da matriz $[Z_k^a]^0$ pelo vetor $\{H_k^X\}_j$. Neste caso, a matriz de rigidez dinâmica e o vetor de receptância possuem componentes relativamente grandes e o vetor resultante deste produto contém componentes relativamente pequenas, o que é bastante susceptível a problemas de mal condicionamento.

Para uma melhoria do condicionamento do sistema (Pereira, 1996), pode-se multiplicar a Expressão 3.08 pela inversa da matriz de rigidez dinâmica, e rearranjando as equações resultantes utilizando a inversa da matriz de rigidez dinâmica e a equivalente matriz de receptância, tem-se :

$$\{\tilde{\epsilon}_{\Delta H}(\omega_k)\} = \sum_{i=1}^{n_p} \left([H_k^A]^0 \frac{\partial [Z_k^A(\{p\})]}{\partial p_i} p_i \{H_k^X\}_j \frac{\Delta p_i}{p_i} \right) + \{H_k^X\}_j - \{H_k^A\}_j^0 \quad (3.09)$$

Na qual:

$$[H_k^A] = ([Z(p_0)])^{-1}$$

$$\{\tilde{\epsilon}_{\Delta H}(\omega_k)\} = [H_k^A] \{\epsilon_f^{lin}(\omega_k)\}$$

Desta forma espera-se que os problemas de mal condicionamento, sobretudo em virtude de ruídos de medição, sejam menos acentuados quando comparados com o resíduo $\{\varepsilon_f^{lin}(\omega_k)\}^0$ na Expressão 3.08. Isto leva a um melhor condicionamento do sistema de equações. A minimização deste novo resíduo leva a um conjunto de equações que combina a sensibilidade da matriz de rigidez dinâmica e a diferença entre as receptâncias analítica e experimental. Nenhuma restrição a respeito da ordem das matrizes foi imposta na montagem do conjunto de equações de atualização, o que implica na disponibilidade de todos os elementos de pelo menos uma coluna da matriz de receptância. Na maioria das aplicações práticas, isto representa uma limitação, pois é muito difícil medir todos os componentes da matriz de receptância (graus de liberdade de rotação, pontos inacessíveis, etc.). Nestes casos, deve ser usado um processo de redução da matriz de rigidez dinâmica $[Z]$ ou a expansão da matriz de receptância $[H]$.

O modelo de atualização proposto contorna o problema de incompatibilidade do tamanho dos modelos utilizando o processo de redução dinâmica (Kidder, 1973).

Neste caso, a formulação da expressão do resíduo continua válida, mesmo para o modelo reduzido. Substituindo as matrizes do modelo reduzido na Expressão 3.09, tem-se:

$$\{\tilde{\varepsilon}_{\Delta H}(\omega_k)\} = \sum_{i=1}^{n_p} \left([H_k^{AR}]^p \frac{\partial [Z_k^{AR}\{p\}]}{\partial p_i} p_i \{H_k^X\} \frac{\Delta p_i}{p_i} \right) + \{H_k^X\}_j - \{H_k^{AR}\}_j \quad (3.10)$$

A sensibilidade da matriz reduzida com relação aos parâmetros de atualização é avaliada numericamente para uma frequência ω_k por meio de uma perturbação no parâmetro desejado:

$$\frac{\partial [Z_k^R]}{\partial p} \cong \frac{[Z_k^R(p^0 + \Delta p)] - [Z_k^R(p^0)]}{\Delta p} \quad (3.11)$$

A matriz de sensibilidade definida pela Expressão (3.11) é avaliada para cada frequência de interesse selecionada, definida como **frequência de atualização**.



A Expressão do resíduo (3.10) é avaliada para cada frequência de atualização considerando as limitações impostas pelo processo de redução, tais como as dificuldades da seleção dos graus de liberdade ativos (em geral, estes não coincidem com os pontos medidos) e especialmente a perda do significado físico do modelo original. Para um conjunto de frequências de atualização ω_i ($i=1, 2, \dots, k, \dots, n_k$), a Expressão. 3.10 pode ser escrita em uma forma compacta por:

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [S]\{\Delta p\} - \{\Delta H\} \quad (3.12)$$

Na qual:

- $[S]$ - matriz formada pelos coeficientes de sensibilidade;
- $\{\Delta H\}$ - vetor formado pela diferença entre as receptâncias analítica e experimental;
- $\{\Delta p\}$ - variações dos parâmetros de atualização.

A solução aproximada do problema é obtida aplicando a técnica dos mínimos quadrados para o cálculo dos parâmetros de atualização. Os parâmetros calculados redefinem uma matriz de rigidez dinâmica $[Z]$ mais próxima do modelo real. Se a discrepância entre os modelos não for suficientemente pequena, o procedimento é repetido iterativamente (Pereira, 1996).



CAPÍTULO 4

Estratégias de Ajuste

Alguns métodos de ajuste de modelo estão baseados em correções de parâmetros, os p-valores, que multiplicam a matriz individual de elementos finitos. Esta metodologia está baseada na hipótese de que as matrizes elementares de massa e rigidez podem ser expressas como soma ou produto de outras matrizes intermediárias as quais são governadas por um ou mais parâmetros de ajuste. No entanto, em alguns casos, as matrizes calculadas perdem a esparcialidade ou podem produzir coeficientes irrealis, o que torna confuso o entendimento do significado físico do ajuste do modelo.

Uma alternativa é usar um método no qual os parâmetros de ajuste são os próprios parâmetros espaciais do modelo de elementos finitos. Neste caso, a variação destes parâmetros afeta os principais parâmetros dinâmicos (funções de respostas, frequências de ressonância, razão de amortecimento e modos próprios da estrutura), porém, as matrizes elementares de massa e rigidez mantêm suas características físicas e propriedades matemáticas (semi-positiva definida, simétrica, etc).



Neste trabalho, o ajuste do modelo é feito por meio de correções nos parâmetros físicos e/ou geométricos dos próprios elementos ou conjunto de elementos. Usando estes parâmetros, o modelo será ajustado com base na correção apenas do parâmetro selecionado internamente na matriz do elemento, e suas conectividades serão preservadas. A seleção do parâmetro não é óbvia, entretanto, por meio do cálculo da sensibilidade do modelo é possível identificar quais parâmetros da estrutura são mais sensíveis a pequenas variações, indicando assim os componentes ou regiões do modelo nos quais o ajuste pode ser mais significativo ou não. Esta é uma informação muito importante na escolha dos parâmetros para o processo de ajuste, pois a escolha de parâmetros mais sensíveis a mudanças melhora a performance do processo de atualização.

O conjunto de possíveis parâmetros de atualização é definido considerando o tipo de elemento finito utilizado na modelagem da estrutura. Os parâmetros físicos do modelo podem ser corrigidos por elemento ou por macro-regiões. Neste trabalho, são utilizados basicamente elementos de viga e elementos de placa. Para o elemento finito tipo viga, os parâmetros de ajuste são módulo de elasticidade (E), densidade (ρ), coeficiente de Poisson (ν), área (A), momentos de inércia em x (I_x - torção), em y (I_y - flexão) e em z (I_z - flexão) e momento de inércia polar em x (I_p). Os valores dos parâmetros de correções dos elementos são calculados com base na Expressão 3.12, e os dados de entrada do modelo de Elementos Finitos são corrigidos a cada iteração. As matrizes $[K]$ e $[M]$ apresentadas a seguir mostram a influência dos parâmetros na matriz do elemento.



$$[M]^{ele} = \frac{\rho AL}{420}$$

140												
0	156			<i>s</i>	<i>i</i>	<i>m</i>	<i>é</i>	<i>t</i>	<i>r</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
0	0	156										
0	0	0	$\frac{140I_p}{A}$									
0	0	-22 <i>L</i>	0	$4L^2$								
0	22 <i>L</i>	0	0	0	$4L^2$							
70	0	0	0	0	0	140						
0	54 <i>L</i>	0	0	0	-13 <i>L</i>	0	156					
0	0	54	0	-13 <i>L</i>	0	0	0	156				
0	0	0	$\frac{70I_p}{A}$	0	0	0	0	0	$\frac{140I_p}{A}$			
0	0	13 <i>L</i>	0	-3 <i>L</i> ²	0	0	0	22 <i>L</i>	0	$4L^2$		
0	-13 <i>L</i>	0	0	0	-3 <i>L</i> ²	0	-22 <i>L</i>	0	0	0	$4L^2$	

$$[K]^{ele} = \frac{E}{L}$$

<i>A</i>												
0	$12\frac{I_z}{L^2}$			<i>s</i>	<i>i</i>	<i>m</i>	<i>é</i>	<i>t</i>	<i>r</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
0	0	$12\frac{I_y}{L^2}$										
0	0	0	$\frac{I_x}{2(1+\nu)}$									
0	0	$-6\frac{I_z}{L}$	0	$4I_y$								
0	$6\frac{I_z}{L}$	0	0	0	$4I_z$							
- <i>A</i>	0	0	0	0	0	<i>A</i>						
0	$-12\frac{I_z}{L^2}$	0	0	0	$-6\frac{I_y}{L}$	0	$12\frac{I_z}{L^2}$					
0	0	$-12\frac{I_y}{L^2}$	0	$6\frac{I_z}{L}$	0	0	0	$12\frac{I_y}{L^2}$				
0	0	0	$\frac{I_x}{2(1+\nu)}$	0	0	0	0	0	$\frac{I_x}{2(1+\nu)}$			
0	0	$-6\frac{I_y}{L}$	0	$2I_y$	0	0	0	$6\frac{I_y}{L}$	0	$4I_y$		
0	$6\frac{I_z}{L}$	0	0	0	$2I_z$	0	$-6\frac{I_z}{L}$	0	0	0	$4I_z$	

Para o elemento finito tipo placa os parâmetros são densidade (ρ), módulo de elasticidade (E), espessura (t) e coeficiente de Poisson (ν).

A próxima seção apresenta a formulação para a análise dinâmica de elementos do tipo placa implementada no programa de Ajuste de Modelo, como fora proposto para este trabalho. Este assunto poderia ter sido apresentado como um apêndice, no entanto a sua discussão neste capítulo visa tornar o texto mais completo, mostrando como os parâmetros influenciam nas matrizes. Para o estudo de viga, a rotina já havia sido implementada (Pereira, 1996). A seção (4.2) apresenta um método de cálculo da sensibilidade das frequências características do modelo em relação a um parâmetro p . As seções (4.3) e (4.4) apresentam a técnica de correção dos parâmetros físicos e os aspectos computacionais, respectivamente.

4.1 Cálculo das Matrizes de Massa e Rigidez para Placas

4.1.1 Teoria de Placas de Reissner-Mindlin

Os elementos de placa de Reissner-Mindlin podem ser aplicados a problemas de placas delgadas e grossas, daí sua crescente popularidade. E muitos destes elementos têm sido incorporados com êxito à maioria dos programas computacionais comerciais para análise de estrutura pelo método de elementos finitos (Oñate, 1992).

As hipóteses sobre as quais se baseiam a teoria de placas de Reissner-Mindlin são:

1- Nos pontos da superfície média:

$$u = v = 0 \quad (4.01)$$

Ou seja, os pontos da superfície média se movem verticalmente;

2- Todos os pontos contidos em uma normal à superfície média têm o mesmo deslocamento vertical;

3- A tensão normal σ_z é desprezível;



4- Os pontos que antes da deformação estavam sobre a normal à superfície média da placa, permanecem sobre uma mesma reta ao se deformar, sem que esta tenha de ser necessariamente ortogonal à deformação da superfície média (Fig. 4.1).

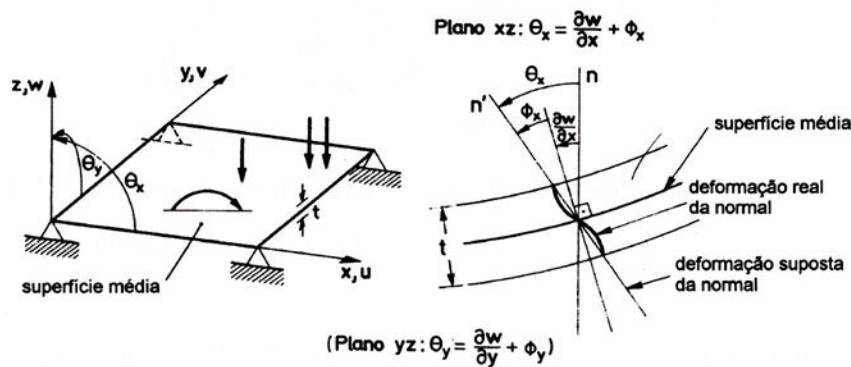


Figura 4.1 – Convenção de sinal para o movimento e giro da normal

Das hipóteses 1 e 2 e 4, pode-se deduzir:

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \tag{4.02}$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \tag{4.03}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \tag{4.04}$$

Nestas equações, w é o deslocamento vertical (flecha) dos pontos da superfície média e θ_x e θ_y são os ângulos que definem o giro da normal (hipótese 4), contido nos planos xz e yz , respectivamente. E o vetor de movimento é definido como:

$$\mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T \tag{4.05}$$

4.1.2 Formulação de Elementos Finitos

Para maior generalidade esta formulação trata de um elemento finito isoparamétrico de classe C_0 de n nós.

i. Discretização do campo de movimentos

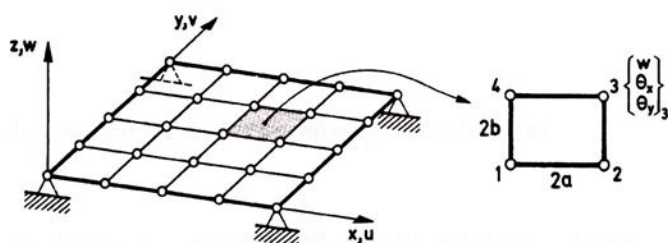


Figura 4.2 – Discretização de uma placa com elementos de placa de Reissner – Mindlin retangulares de quatro nós

A superfície média da placa se discretiza em uma malha de elementos isoparamétricos de classe C_0 (Fig. 4.2). Uma vez que cada elemento tem n nós e que a flecha e os giros são variáveis independentes, pode-se fazer a interpolação do vetor de movimento $\mathbf{u}$ (Expressão 4.05) na forma:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{x_i} \\ N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \cdots \\ w_n \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix} = [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = N \mathbf{a}^{(e)} \quad (4.06)$$

Na qual:

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_n] \quad , \quad \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (4.07)$$

são as matrizes de funções de forma e o vetor de movimento do elemento (e), de um nó i , respectivamente (Oñate, 1992).

ii. Discretização do campo de deformações generalizadas

O vetor de deformações generalizadas pode ser expresso por meio dos vetores de deformações generalizadas de flexão ($\hat{\varepsilon}_f$) e cortante ($\hat{\varepsilon}_c$), e aplicando a Expressão 4.06:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{x_i} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{y_i} \\ -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{x_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{y_i}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i - N_i \theta_{x_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i - N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} B_{f_i} \\ B_{c_i} \end{Bmatrix} a_i^{(e)} = [B_1, \dots, B_n] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} = B a^{(e)} \end{aligned} \quad (4.08)$$

Nesta Expressão, B e B_i são as matrizes de deformação generalizada do elemento e do nó i , respectivamente. Da Expressão 4.08 se deduz que:

$$B_i = \begin{Bmatrix} B_{f_i} \\ \dots \\ B_{c_i} \end{Bmatrix}$$

Na qual:

$$B_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{c_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (4.09)$$

Nestas Expressões, B_{f_i} e B_{c_i} são as matrizes de deformações generalizadas de flexão e de cortante transversal associadas ao nó i , respectivamente.

4.1.3. Matriz de Rigidez do Elemento em Função dos Parâmetros Físicos

Aplicando o PTV ao domínio discretizado de um elemento, tem-se:

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} dA - \iint_{A^{(e)}} \delta w q dA = \sum_i \delta w_i W_i \quad (4.10)$$

Para simplificar, a expressão dos trabalhos virtuais é considerada em uma placa sobre a qual atuam apenas uma carga uniformemente distribuída q e forças pontuais W_i (atuando ambas na direção z). E ainda, operando com esforços generalizados ($\hat{\sigma}$) e deformações generalizadas ($\hat{\varepsilon}$) o problema de flexão de placas adquire um caráter bidimensional, já que todas as integrais que aparecem no PTV são em duas dimensões (Oñate, 1992).

Na Expressão 4.10:

$$\hat{\sigma} = \hat{D} \hat{\varepsilon} \quad (4.11)$$

Na qual:

$$\hat{D} = \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} D_f \\ \dots \\ t D_c \end{Bmatrix}$$

$$D_f = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \quad D_c = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix}$$

Para um material isotropo:

$$E_x = E_y = E, \quad \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$$

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Substituindo a Expressão 4.11 na Expressão 4.10 e aplicando a Expressão 4.06 e a Expressão 4.08, obtém-se a clássica expressão:

$$\left[\iint_{A^{(e)}} B^T \hat{D} B dA \right] a^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} N^T q dA = q^{(e)} \quad (4.12)$$

Ou:

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)} \quad (4.13)$$

Na qual:

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_i^T \hat{D} B_j dA \quad (4.14)$$

$$f_i^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N_i [q, 0, 0]^T \quad (4.15.a)$$

$$q_i^{(e)} = [W_i, 0, 0]^T \quad (4.15.b)$$

As expressões acima são a submatriz de rigidez que conecta os nós ij ; o vetor de forças nodais equivalentes do nó i em virtude de uma carga distribuída vertical; e o vetor de forças nodais de equilíbrio do nó i , respectivamente.

Aplicando a Expressão 4.13 e a Expressão 4.12, pode-se transformar a expressão da matriz de rigidez do elemento na seguinte forma:

$$\begin{aligned} K^{(e)} &= \iint_{A^{(e)}} [B_f^T, B_c^T]^T \hat{D} \begin{Bmatrix} B_f \\ B_c \end{Bmatrix} dA = \\ &= \int_{A^{(e)}} (B_f^T \hat{D} B_f + B_c^T \hat{D} B_c) dA = K_f^{(e)} + K_c^{(e)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Na qual:

$$K_f^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_f^T \hat{D}_f B_f dA \quad (4.17.a)$$

$$K_c^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_c^T \hat{D}_c B_c dA \quad (4.17.b)$$

são as matrizes de rigidez que contêm os termos de flexão e de cortante, respectivamente. Obter a matriz de rigidez do elemento como soma das duas matrizes anteriores é mais econômico do que calcular diretamente a matriz total (Oñate, 1992).

4.1.4. Matriz de Massa do Elemento em Função dos Parâmetros Físicos

A Expressão 4.12 representa o equilíbrio estático, e aplicando-se o *Princípio de D'Alembert*, pode-se simplificar a obtenção da equação de “equilíbrio dinâmico” com a inclusão da força de inércia na equação de equilíbrio. A força de inércia, então será dada por:

$$b = -\rho N \ddot{a} \quad (4.18)$$

Nesta Expressão, ρ é a densidade de massa por unidade de volume do elemento e $\ddot{a}$ é um vetor das acelerações nodais.

Introduzindo a força de inércia b na Expressão 4.10, esta pode ser rescrita utilizando as funções de forma:

$$\iint_{A^{(e)}} N^T q dA + q^{(e)} + \int_{V^{(e)}} N^T (-\rho N \ddot{a}) dV = \left(\int_{V^{(e)}} B^T D B dV \right) a^{(e)} \quad (4.19)$$

Ou ainda:

$$\iint_{A^{(e)}} N^T q dA + q^{(e)} = \left(\int_{V^{(e)}} \rho N^T N dV \right) \ddot{a} + \left(\int_{V^{(e)}} B^T D B dV \right) a^{(e)} \quad (4.20)$$

Nesta Expressão,

$$\int_{V^{(e)}} \rho N^T N dV = M^{(e)} \quad (4.21)$$

Considerando uma placa no plano xy , com espessura constante para o elemento:

$$dV = t dA$$

E a Expressão 4.21 pode ser rescrita como:

$$M^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \rho t N^T N dA \quad (4.22)$$

A Expressão 4.22 representa uma matriz quadrada denominada *matriz de massa* do elemento (Paschoalini, 1995). Desta forma, a Expressão 4.20 pode ser rescrita como:

$$M^{(e)} \ddot{a} + K^{(e)} a = f^{(e)} + q^{(e)} = \bar{f}$$

que é a Expressão que representa o equilíbrio dinâmico do elemento, na qual a , $f^{(e)}$ e $q^{(e)}$ dependem do tempo. A matriz coluna $\bar{f}$ representa o vetor carga do elemento correspondente às forças generalizadas.

4.2 Análise de Sensibilidade

O sucesso do ajuste depende da escolha de parâmetros bastante sensíveis a pequenas variações. O conhecimento prévio dos componentes ou regiões do modelo nos quais o ajuste pode ser mais significativo, pode ser obtido por meio do cálculo da sensibilidade do modelo.

Basicamente, a sensibilidade de uma quantidade modal em relação a um parâmetro p é calculada como a variação de primeira ordem desta quantidade em relação a uma pequena variação deste parâmetro. A sensibilidade das frequências características do modelo em relação a um parâmetro $\{p\}$ é estimada por meio da seguinte Expressão:

$$(-\lambda[M] + [K])\{X\} = \{0\} \quad (4.23)$$

Para o r -ésimo modo tem-se:

$$[K]\{\psi\}_r - \lambda_r [M]\{\psi\}_r = 0 \quad (4.24)$$



Derivando a Expressão 4.24 com relação ao p-ésimo parâmetro, tem-se:

$$[K]' \{\psi\}_r + [K] \{\psi\}'_r - \lambda_r [M] \{\psi\}_r - \lambda_r [M]' \{\psi\}_r - \lambda_r [M] \{\psi\}'_r = 0 \quad (4.25)$$

Na qual: $()'$, $\{ \}'$ e $[]'$ são derivadas de primeira ordem.

Pré-multiplicando a Expressão 4.25 por $\{\psi\}_s'^T$, e aplicando as propriedades de ortogonalidade das matrizes de massa e rigidez, esta pode ser rearranjada em função das suas derivadas de primeira ordem.

$$\{\psi\}_s'^T [K]' \{\psi\}_r - \lambda_r' \{\psi\}_s'^T [M] \{\psi\}_r - \lambda_r \{\psi\}_s'^T [M]' \{\psi\}_r + \{\psi\}_r'^T ([K] \{\psi\}_s - \lambda_r [M] \{\psi\}_s) = 0 \quad (4.26)$$

A sensibilidade de primeira ordem do r-ésimo autovalor λ_r em relação a um parâmetro $\{p\}$ é dada por:

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial p} = \{\psi\}_r'^T \frac{\partial [K]}{\partial p} \{\psi\}_r - \lambda_r \{\psi\}_r'^T \frac{\partial [M]}{\partial p} \{\psi\}_r \quad (4.27)$$

Na qual:

$\{\psi\}_r'^T$ - autovetor

$[M]$ - matriz de massa

$[K]$ - matriz de rigidez

A sensibilidade de primeira ordem do r-ésimo vetor modal em relação a um parâmetro é também derivada por meio de Expressão 4.26, mas este estudo não foi incluído neste trabalho.



4.3 Seleção e Correção dos Parâmetros

Nesta fase são feitas a montagem das equações de atualização e o cálculo da correção dos parâmetros.

O conjunto de equações de atualização é obtido utilizando a aproximação por mínimos quadrados para a solução da equação do resíduo Expressão 3.09.

$$\{\tilde{\varepsilon}_{\Delta H}(\omega_k)\} = \sum_{i=1}^{n_p} \left([H_k^{AR}]^p \frac{\partial [Z_k^{AR}\{p\}]}{\partial p_i} p_i \{H_k^X\} \frac{\Delta p_i}{p_i} \right) + \{H_k^X\}_j - \{H_k^{AR}\}_j^p$$

Para uma frequência de atualização ω_k , a minimização da equação de resíduo conduz a um conjunto de n equações de atualização nos parâmetros escolhidos. Em termos da matriz de rigidez dinâmica e matriz de receptância, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{np} \left([H_k^{AR}]^p \frac{\partial [Z_k^{AR}\{p\}]}{\partial p_i} \{H_k^X\}_j \Delta p_i \right) = \{\Delta H_k\}_j \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} \{S_k\}_1 & \dots & \{S_k\}_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_1 \\ \vdots \\ \Delta p_{np} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta h_{k,1} \\ \vdots \\ \Delta h_{k,np} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Na qual:

$$\{S_k\}_i = [H_k^{AR}]^p \frac{\partial [Z_k^{AR}\{p\}]}{\partial p_i} \{H_k^X\}_j$$

$$\Delta p = p_i - p_i^0$$

$$\{\Delta H_k\}_j = \{H_k\}_j^0 - \{H_k^E\}_j$$

Em uma forma compacta:

$$[S_k] \{\Delta p\} = \{\Delta H_k\}_j \quad (4.30)$$

A Expressão 4.30 é válida especificamente para a frequência de atualização ω_k . Em aplicações práticas, um conjunto de pontos de frequência é selecionado e a equação

é avaliada para cada um deles, o que define um conjunto simultâneo de equações de atualização em todos os pontos de frequência selecionados.

Para a seleção do conjunto ótimo de frequência de ajuste, não existe um critério sistemático. Estas frequências devem ser selecionadas de modo a se obter uma matriz de receptância de referência que possui, de forma balanceada, todas as informações relevantes contidas na matriz de receptância medida na faixa de frequência de análise (Pereira, 1996).

A Expressão 4.31 define o conjunto de equações de atualização para cada ponto de frequência escolhido.

$$[S]\{\Delta p\} = \{\Delta H\}_j \quad (4.31)$$

Na qual:

$$[S]^T = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] & \cdots & [S_k] & \cdots & [S_{nk}] \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta H\}_j^T = \left\{ \{\Delta H_1\}_j \quad \{\Delta H_2\}_j \quad \cdots \quad \{\Delta H_k\}_j \quad \cdots \quad \{\Delta H_{nk}\}_j \right\}$$

nk - número de frequência de atualização

4.4 Aspectos Computacionais da Rotina de Ajuste de Modelo

Os principais aspectos envolvidos no processo de ajuste de modelo, bem como a formulação para a análise dinâmica de placas pelo método dos elementos finitos, implementada no programa de ajuste **PROMU** (**PRO**gram of **MO**del **UP**dating), foram discutidos nos capítulos e seções anteriores.

O manuseio, comparação e processamento dos dados da modelagem analítica e dos dados experimentais são realizados em um ambiente MATLAB (1998). Os principais dados obtidos do modelo experimental são as FRF(s) e a malha de medição, e portanto, os parâmetros modais: frequências naturais, modos próprios e razões de amortecimento. As FRF(s) são usadas como referência para o ajuste de modelo analítico e os parâmetros modais juntamente com a malha de pontos medidos são usados para verificar a correlação entre os modelos. Os dados de entrada procedentes do modelo de elementos finitos são as frequências de ressonância, modos próprios,



matrizes de rigidez e massa e a conectividade correspondente. Os parâmetros de atualização do modelo são definidos com base nos dados de entrada da rotina de elementos finitos, por meio da seleção das variáveis cuja atualização é desejada. Os dados de saída da rotina de ajuste são as mudanças dos parâmetros de atualização e as informações da correlação do novo modelo atualizado.

Inicialmente, as matrizes dos elementos, da estrutura e as informações de conexão dos elementos são previamente armazenadas para posterior cálculo da sensibilidade dos parâmetros do modelo. A seleção dos parâmetros a serem ajustados é um passo muito importante na solução do problema. O analista, com base nos seus conhecimentos e informações disponíveis, pode escolher qualquer elemento ou macro-região do modelo. Testes prévios de localização de erro, como por exemplo, Análise de Sensibilidade (seção 4.2), podem ser utilizados para se ter uma idéia dos prováveis parâmetros incorretamente definidos na modelagem. O conhecimento prévio das regiões responsáveis pela discrepância entre os modelos propicia uma redução do número de variáveis atualizadas, melhorando a performance do ajuste de modelo.

O processo se inicia com uma perturbação δp no parâmetro introduzida diretamente no arquivo de entrada do programa de elementos finitos. Calculados os efeitos desta perturbação no elemento, as matrizes associadas aos mesmos são corretamente introduzidas nas matrizes da estrutura utilizando as informações de conectividade dos elementos. A Sensibilidade dada pela Expressão 3.11 pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{\partial[Z]}{\partial p_i} \cong \frac{[Z(p_i + \Delta p_i)] - [Z(p_i)]}{\Delta p_i} = \frac{[\Delta Z]}{\Delta p_i} \quad (4.32)$$

Utilizando as matrizes de rigidez e massa:

$$\frac{[\Delta Z]}{\Delta p_i} = \frac{[\Delta K] - \omega_k^2 [\Delta M]}{\Delta p_i} \quad (4.33)$$

Na qual:

$$[\Delta K] = [K(p_i + \Delta p_i)] - [K(p_i)]$$

$$[\Delta M] = [M(p_i + \Delta p_i)] - [M(p_i)]$$



As variações das matrizes de rigidez e de massa causadas pela perturbação no parâmetro p são estimadas pela Expressão 4.34 e pela Expressão 4.35, respectivamente.

$$[K(p_i + \Delta p_i)]|_l = \sum_{j=1}^{nel} [K\{p\}_j]^e|_l - [K_r(p_i)]^e|_l + [K_r(p_i + \Delta p_i)]^e|_l \quad (4.34)$$

$$[M(p_i + \Delta p_i)]|_l = \sum_{j=1}^{nel} [M\{p\}_j]^e|_l - [M_r(p_i)]^e|_l + [M_r(p_i + \Delta p_i)]^e|_l \quad (4.35)$$

Na qual:

r – r ésimo elemento

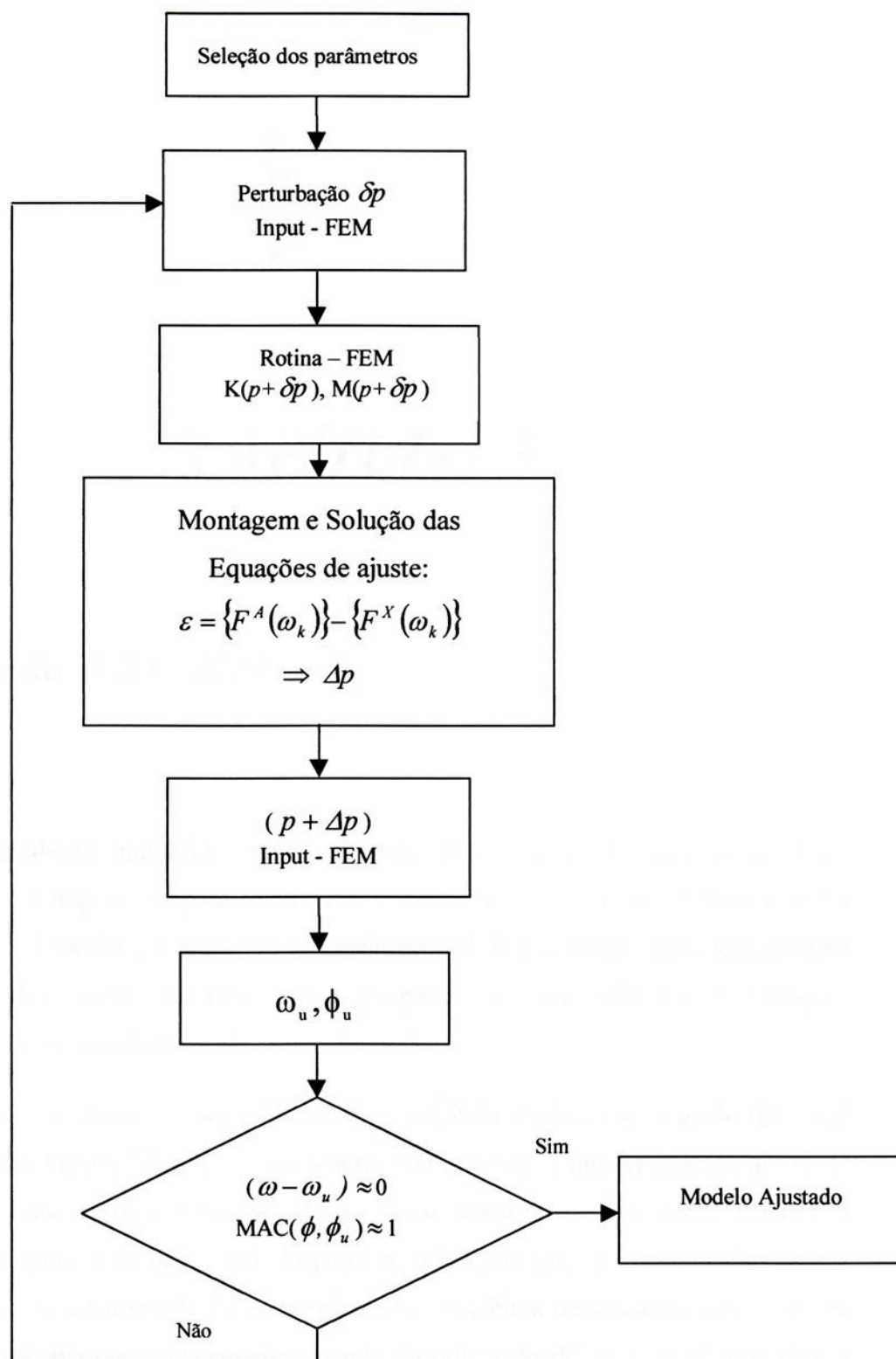
l – l ésima iteração

i – i ésimo parâmetro

nel – número de elemento

Procede-se então a montagem das equações de ajuste, dadas pela Expressão 3.09, cuja solução fornece o vetor Δp , com o qual são obtidos os parâmetros ajustados. Com estes parâmetros são calculados os novos valores para as frequências naturais e modos próprios, utilizados para verificar a correlação dos modelos. Se a correlação não for satisfatória, ou seja, se a discrepância entre os modelos não for suficientemente pequena, o processo é repetido iterativamente. A Figura 4.3 mostra o fluxograma que resume o funcionamento da rotina de ajuste.



Figura 4.3: Fluxograma da Rotina de Ajuste de Modelo

CAPÍTULO 5

Simulação Numérica

A simulação numérica, realizada com base em parâmetros previamente especificados, é importante para se ter ciência das variáveis de interesse, bem como a ordem de grandeza das mesmas. A utilização inicial de exemplos numéricos permite averiguar o desempenho da metodologia proposta em uma variedade de situações diferentes, às quais o sistema pode estar submetido.

O primeiro exemplo a ser estudado neste capítulo trata de uma viga do tipo *steel joist*. Este estudo foi realizado com o objetivo de mostrar a importância do ajuste de modelo para o estudo do comportamento dinâmico de estruturas *steel joist*. E também foi discutido como o modelo ajustado pode ser utilizado para prever mudanças nas características da estrutura de forma a minimizar os efeitos de vibração, uma vez que isto é um problema que pode ocorrer quando da utilização de vigas *steel joist* para a sustentação de pisos de lajes de concreto.

No caso da utilização de vigas *steel joist* para a sustentação de pisos de lajes de concreto, além do estudo detalhado deste tipo de estrutura metálica, também é



necessário o conhecimento do comportamento dinâmico da laje. Isto demandou o desenvolvimento e implementação de elementos do tipo placa, no programa de ajuste de modelo.

O segundo exemplo refere-se ao estudo de placas. Este exemplo numérico foi usado para checar o algoritmo de ajuste, estudar a potencialidade e definir os limites da rotina implementada no programa de ajuste de modelo –PROMU.

5.1. Viga *Steel Joist*

O exemplo apresentado a seguir é o de uma viga metálica treliçada, com 15 m de comprimento e 0,50 m de altura. Banzos paralelos e extremidades em diagonais (SJI-Technical Digest). Os banzos são compostos por perfis laminados em cantoneira dupla de abas desiguais, e as diagonais, em ferro redondo soldado nos banzos (Fig. 5.1).

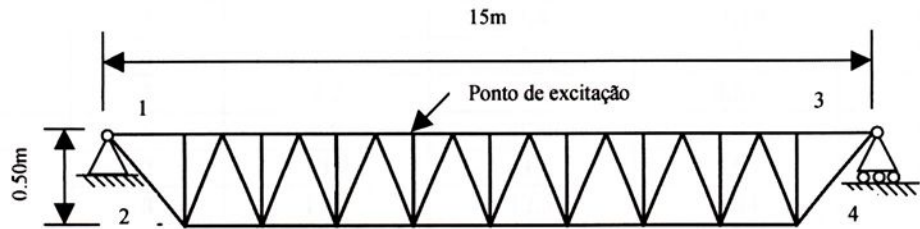


Figura 5.1: Viga *steel joist* estudada – exemplo numérico

O processo de comparação e ajuste de modelos envolve a definição de um modelo experimental o qual é utilizado como referência para comparação e correção do modelo analítico. No processo de simulação numérica, a definição do modelo de referência é feita com base nos dados do modelo analítico de elementos finitos.

Neste trabalho, o modelo de referência será definido com base no modelo original de elementos finitos e o modelo analítico será definido com a introdução de algumas alterações no modelo original de elementos finitos. Portanto, a comparação dos dados do modelo de referência com os dados do modelo analítico mostrará uma discrepância entre os modelos.



Inicialmente, a estrutura foi modelada por elementos finitos e o modelo de referência foi definido com base nestes dados. O modelo analítico foi definido com base no modelo original de elementos finitos, introduzindo pequenas alterações nos parâmetros geométricos momento de inércia em y , dos elementos 1, 2, 3 e 4, nas extremidades da viga, Fig. 5.1. Este novo modelo representa o modelo analítico, cujos parâmetros modais são discrepantes em relação ao modelo de referência, em virtude da alteração introduzida nos parâmetros de inércia. A Tabela 5.1 mostra a comparação do modelo analítico com os dados de referência, para os 10 primeiros modos, a coluna 5 apresenta as diferenças de frequências e a coluna 6, a comparação dos modos (Mac-valores). Mac-valor próximo de 1 significa que os modos estão bem correlacionados, enquanto que Mac-valor próximo de zero significa total ausência de correlação entre os modos comparados.

Tabela 5.1. Comparação dos modelos de referência e analítico – exemplo numérico viga *steel joist*

Modo (Referência)	Modo (Analítico)	F _x (Hz)	F _a (Hz)	DF(%)	MAC(%)
1	1	1,2	1,5	17,77	99,7
2	2	3,4	3,9	14,09	99,5
3	3	6,6	7,4	11,19	99,1
4	4	7,6	7,9	3,34	99,5
5	5	8,2	8,2	0,01	91,5
6	6	9,9	10,2	3,07	99,1
7	7	10,9	11,9	8,66	98,6
8	8	11,8	12,3	4,34	98,9
9	9	14,9	15,7	5,33	98,6
10	10	16,3	17,5	7,40	98,4

O objetivo deste teste é estudar como alterar as primeiras frequências naturais da viga, pois estas coincidem com a faixa de frequência de excitação produzida por uma pessoa caminhando, ou seja, frequências na faixa de 1,7 a 2,3 Hz (CEB nº 209, 1991), o que pode levar à vibração excessiva quando da utilização destas em piso. Portanto, a viga deve sofrer alterações em suas propriedades físicas e/ou geométricas. No entanto, estas alterações devem ser as menores possíveis, devido aos padrões comerciais para a viga. Assim, deve-se buscar as regiões do modelo mais sensíveis às mudanças, ou seja, regiões nas quais pequenas mudanças nas propriedades da estrutura causam grandes mudanças no seu comportamento dinâmico. Isto pode ser feito introduzindo-se variações nos parâmetros do modelo real e observando as mudanças causadas nos parâmetros modais (tentativa e erro) ou de uma maneira sistemática por meio de uma



análise de sensibilidade do modelo analítico, desde que este represente corretamente o sistema real, ou seja, utilizando-se um modelo de predição. Neste caso, o modelo de predição (modelo analítico) será utilizado para identificar as regiões mais indicadas para mudanças, as quais seriam posteriormente verificadas no modelo de referência.

Inicialmente, foi feita uma análise de sensibilidade dos vários elementos do modelo em relação ao parâmetro momento de inércia em y . A Figura 5.2 e a Fig. 5.3 mostram as regiões mais sensíveis (em vermelho) do modelo analítico e do modelo de referência para as dez primeiras frequências.

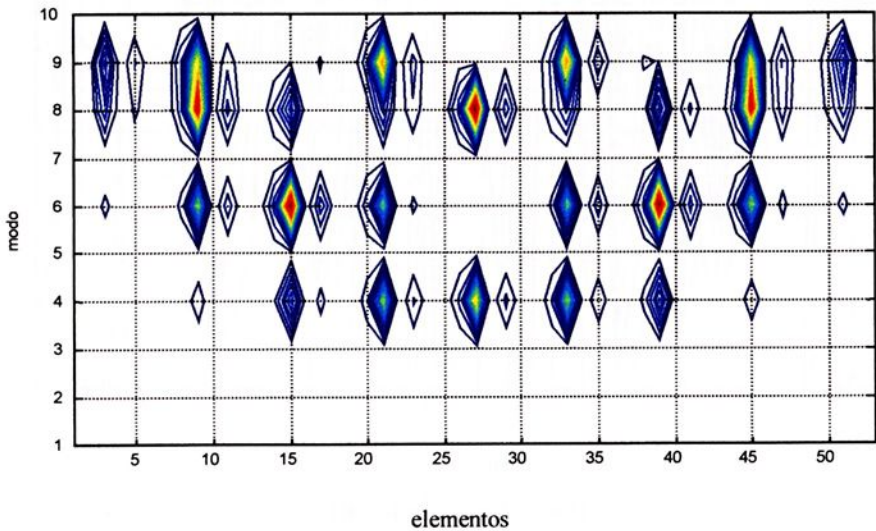


Figura 5.2: Mapa de Sensibilidade do modelo analítico para as 10 primeiras frequências— exemplo numérico viga *steel joist*

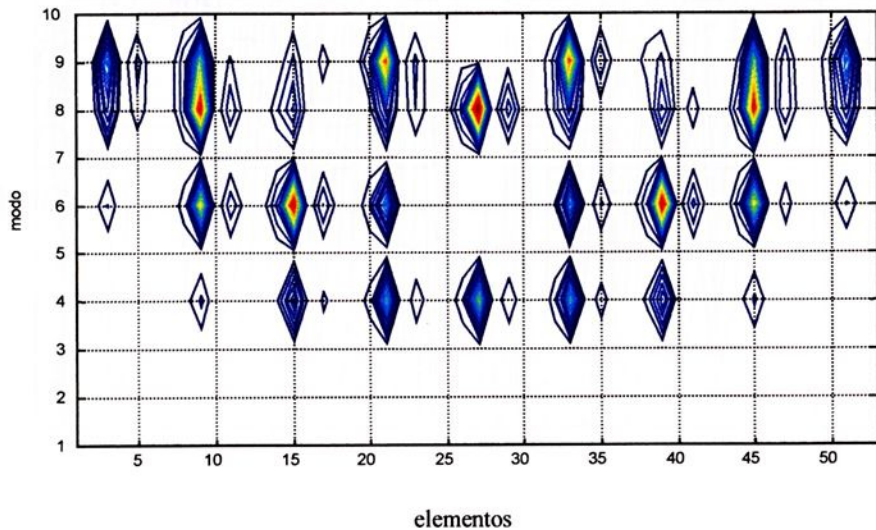


Figura 5.3: Mapa de Sensibilidade do modelo de referência para as 10 primeiras frequências— exemplo numérico viga *steel joist*



A análise das figuras acima mostra que o modelo analítico sem ajuste apresenta um “mapa” de sensibilidade com pequenas diferenças em relação ao mapa do modelo de referência. Porém, analisando os mapas para as duas primeiras frequências fica bastante clara a diferença de sensibilidade dos modelos. A Figura 5.4 mostra para as duas primeiras frequências, mapas de sensibilidade do modelo analítico e do modelo de referência, em relação ao parâmetro momento de inércia em y , para todos os elementos do modelo.

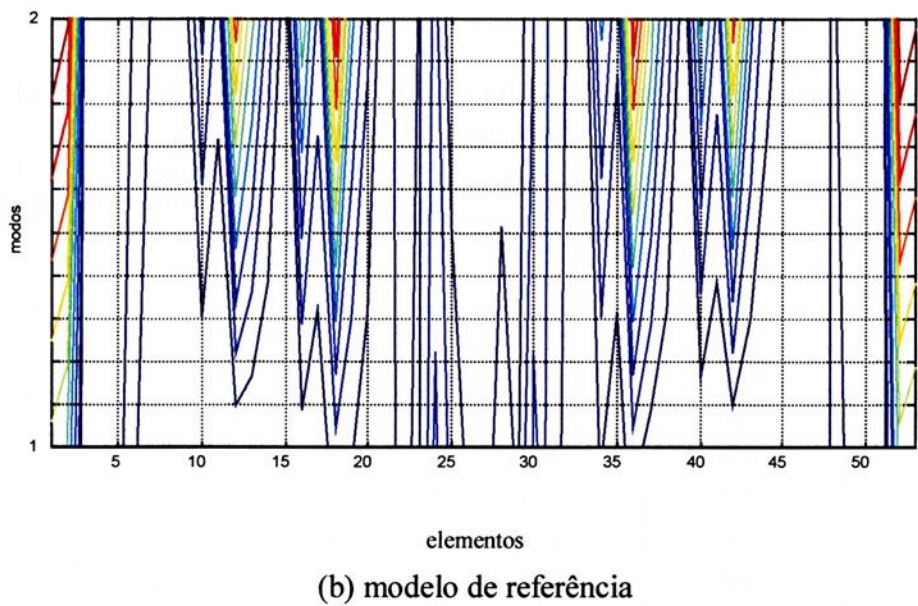
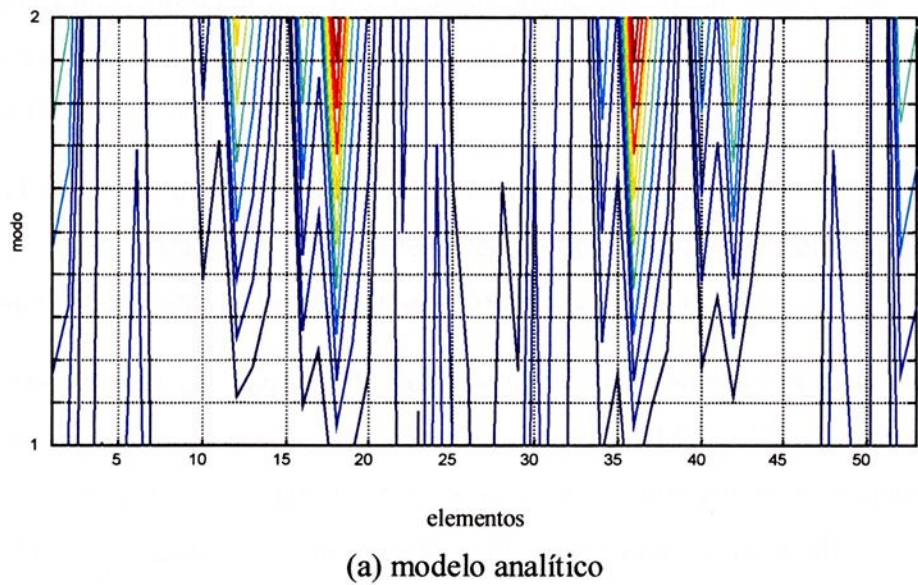


Figura 5.4: Comparação dos mapas de sensibilidade da estrutura para as duas primeiras frequências – exemplo numérico viga *steel joist*.



A análise da Figura 5.4(a) e da Figura 5.4(b) mostra que os elementos (parâmetros) centrais do modelo analítico apresentam uma maior sensibilidade, ou seja, um mapa de sensibilidade diferente do mapa de sensibilidade do modelo de referência. Portanto, uma mudança dos parâmetros do modelo proposto com base nos dados obtidos no modelo analítico sem ajuste, poderia apresentar resultados diferentes do esperado, pois o modelo de referência apresenta uma sensibilidade diferente. Neste caso, por exemplo, um estudo de como elevar as frequências do modelo com base no modelo de predição poderia levar a resultados errôneos, pois o modelo não é suficientemente representativo em relação ao modelo de referência, o qual descreve o real comportamento da estrutura. Um modelo representativo poderia ser obtido por meio do ajuste do modelo analítico.

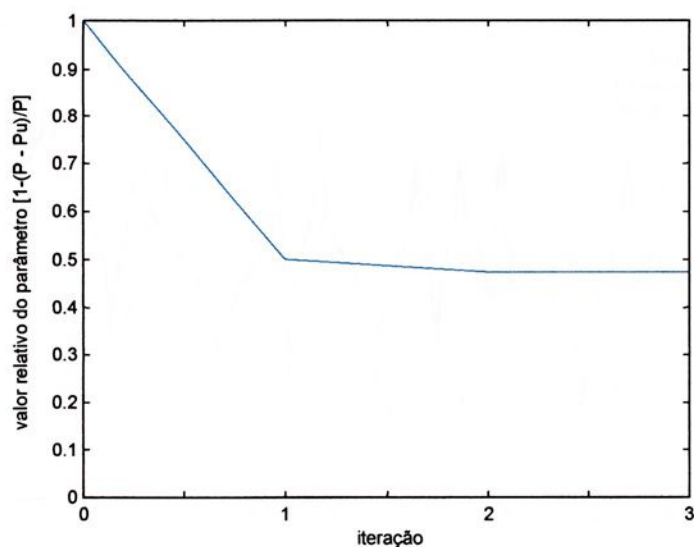
O ajuste do modelo analítico foi proposto com base nos dados do modelo de referência. Os parâmetros de ajuste selecionados foram parâmetros geométricos, momento de inércia em y , dos elementos próximos aos apoios.

Após o ajuste, a diferença de frequência entre os modelos é praticamente zero, e os modos encontram-se perfeitamente correlacionados, MAC valores iguais a 1, como mostra a Tabela 5.2. A Figura 5.5 mostra evolução dos parâmetros ajustados, e a Fig. 5.6 mostra a equivalência do modelo analítico ajustado com o modelo de referência por meio da superposição das FRF(s) medidas no ponto de excitação.

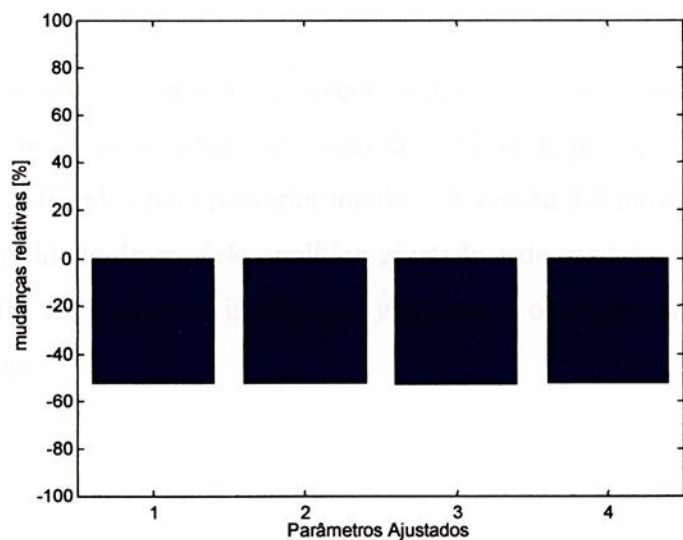
Tabela 5.2. Comparação dos modelos de referência e analítico ajustado – exemplo numérico viga *steel joist*

Modo (Referência)	Modo (Analítico)	F _x (Hz)	F _a (Hz)	DF(%)	MAC(%)
1	1	1,2	1,2	0,02	100,0
2	2	3,4	3,4	0,01	100,0
3	3	6,6	6,6	0,01	100,0
4	4	7,6	7,6	0,00	100,0
5	5	8,2	8,2	-0,00	100,0
6	6	9,9	9,9	0,00	100,0
7	7	10,9	10,9	0,01	100,0
8	8	11,8	11,8	0,00	100,0
9	9	14,9	14,9	0,01	100,0
10	10	16,3	16,3	0,01	100,0





(a) todas as iterações



(b) terceira iteração

Figura 5.5: Evolução dos parâmetros ajustados: momento de inércia em *y* para os elementos 1, 2, 3 e 4 nos apoios – exemplo numérico viga *steel joist*



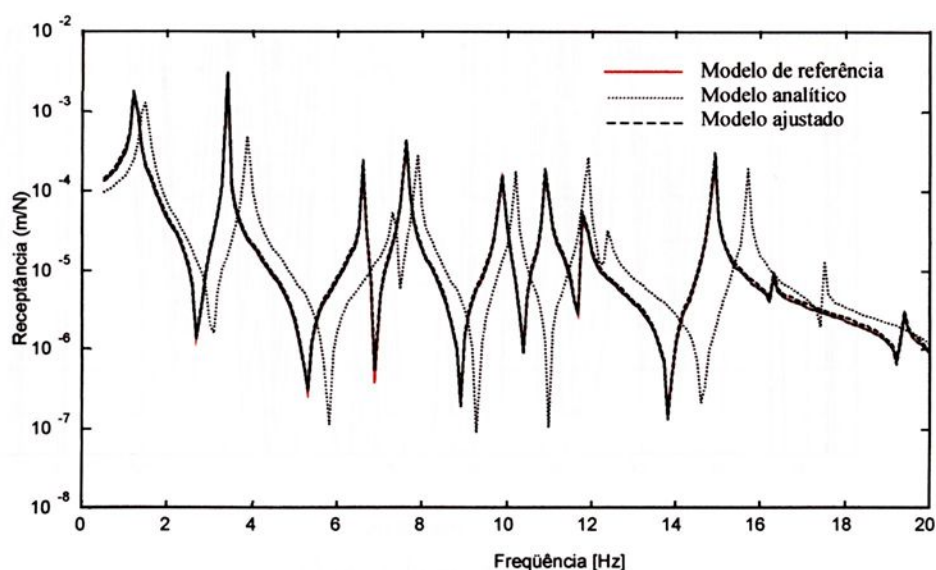
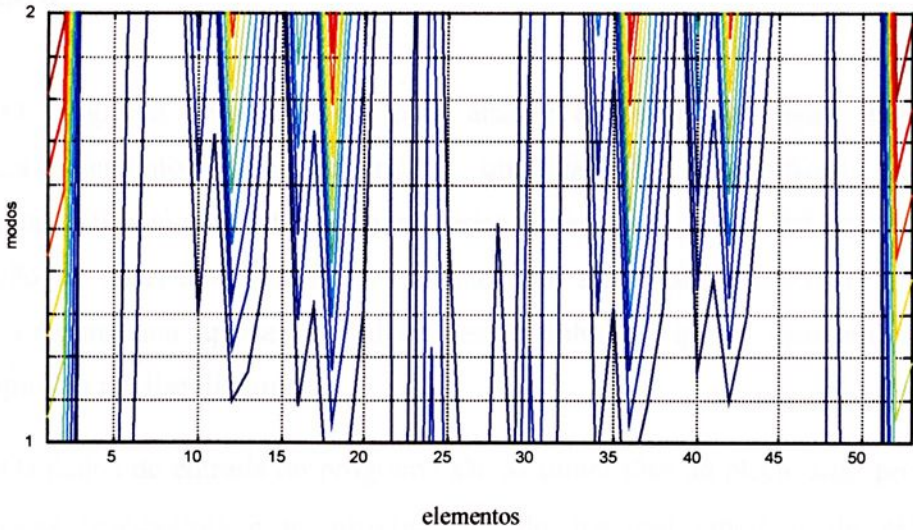
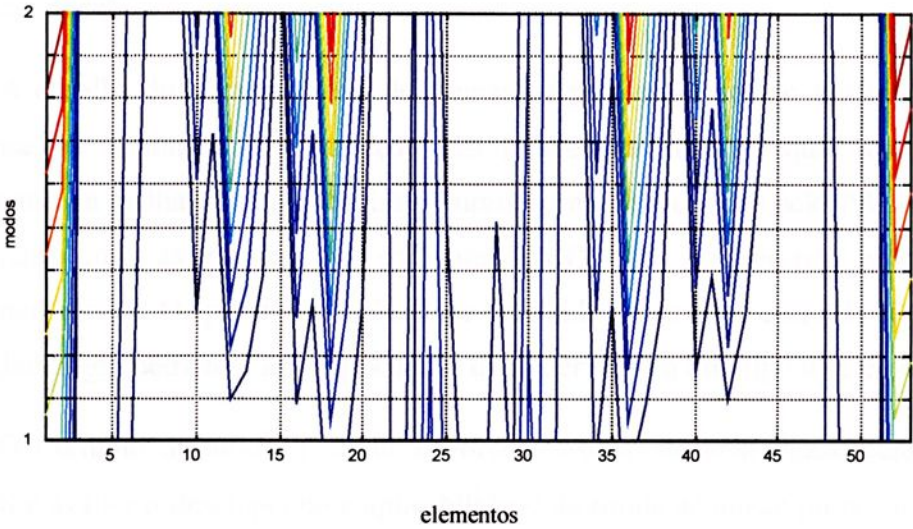


Figura 5.6: Superposição das FRF(s) medidas no ponto de excitação para os modelos analítico, de referência e ajustado – exemplo numérico viga *steel joist*

Uma vez definido um modelo representativo, ou seja, um modelo de predição confiável, o sistema pode ser estudado por meio do modelo de predição, e os resultados obtidos poderão ser utilizados para posterior análise. A Figura 5.7 mostra a comparação dos mapas de sensibilidade do modelo analítico ajustado e do modelo de referência, em relação ao parâmetro momento de inércia em y de todos os elementos, para as duas primeiras frequências.



(a) modelo ajustado



(b) modelo de referência

Figura 5.7: Comparação dos mapas de sensibilidade da estrutura para as duas primeiras frequências – exemplo numérico viga *steel joist*

Os mapas neste caso mostram uma perfeita equivalência do modelo ajustado com o de referência o que não ocorre com o modelo sem ajuste.

Uma mudança dos parâmetros do modelo com base nos dados obtidos no modelo sem ajuste, poderia apresentar resultados diferentes do esperado, pois o modelo de referência apresenta uma sensibilidade diferente. Entretanto, o modelo analítico ajustado apresentou regiões sensíveis similares ao modelo de referência. Desta forma, os estudos realizados com base neste modelo apresentarão resultados mais compatíveis com a realidade, e portanto, mais confiáveis.



5.2 Placa

O programa computacional para análise dinâmica de placas implementado considera elementos isoparamétricos, quadrilaterais, quadráticos da família Lagrangeana (9 nós) com integração numérica consistente, isto é, 3×3 ($m=9$) pontos de integração na superfície média. De acordo com Paschoalini (1995), o elemento da família Lagrangeana apresenta melhor desempenho do que o elemento da família Serendipity na análise dinâmica.

Os dados de entrada do programa são as dimensões da placa, suas propriedades geométricas (espessura) e as propriedades do material (módulo de elasticidade, coeficiente de poisson e densidade), coordenadas nodais, condições de contorno e incidência nodal.

A escolha do número ótimo de elementos para cada modelo analítico foi feita com base na diminuição da variação das frequências naturais que ocorre com o refinamento da malha. As frequências naturais do modelo obtidas pelo PROMU foram comparadas com as obtidas no software ANSYS, e a diferença encontrada é praticamente nula. Os possíveis parâmetros escolhidos para o processo de ajuste são as propriedades geométricas e as propriedades do material para este tipo de elemento.

O exemplo discutido a seguir envolve o estudo de uma placa, cujo objetivo principal é avaliar o desempenho e aplicabilidade da rotina de ajuste proposta com base em dados simulados. Neste caso, a utilização de dados previamente especificados permite avaliar corretamente a performance da proposta.

O modelo de referência, como discutido anteriormente, é definido com base no modelo de elementos finitos. Neste caso, o modelo de referência foi definido considerando que os elementos possuem diferentes espessuras e/ou propriedades do material, o que poderia significar pequenas irregularidades da estrutura. O modelo analítico é definido considerando que os elementos possuem valores iguais para os parâmetros físicos (módulo de elasticidade, coeficiente de poisson e densidade) e geométricos (espessura).

A placa estudada é de concreto e tem forma retangular, conforme esquematizado na Figura 5.8. As propriedades da estrutura estudada são apresentadas na Tabela 5.3.



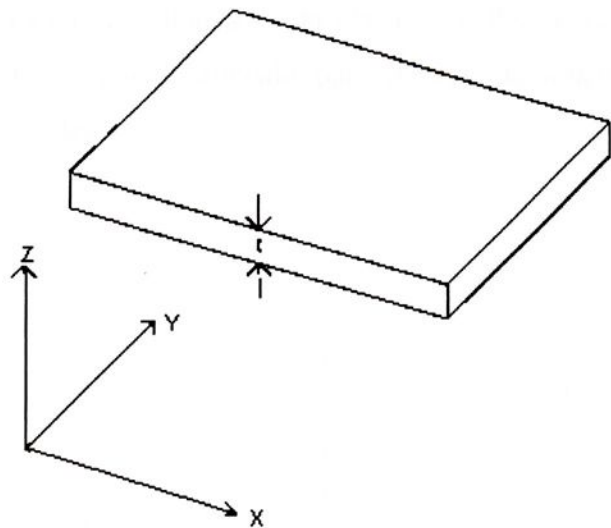


Figura 5.8: Exemplo de Placa Retangular no Plano xy

Tabela 5.3: Propriedades do material da placa

Módulo de Elasticidade	$2,1 \cdot 10^{10}$
Coefficiente de Poisson	0,2
Densidade	$2,5 \cdot 10^3$

Modelos Experimental e Analítico

As dimensões laterais desta placa são 6,00 x 4,00 m e coincidem com as direções x e y respectivamente. A estrutura é modelada por elementos finitos. Este modelo, cuja espessura é de 0,07m, é definido para uma malha 5x5 (25 elementos), 121 nós (3 gl(s) por nó), sendo 40 nós totalmente restringidos, ou seja, todos os lados estão engastados, e portanto a estrutura possui 323 graus de liberdade. O modelo de referência é simulado com base no modelo de elementos finitos. Neste caso, os elementos apresentam pequenas variações, ou seja, os elementos possuem pequenas diferenças de espessura, sendo que esta varia entre 0,05 m a 0,09 m, o que poderia representar uma pequena irregularidade no piso. Desta forma, a espessura de alguns elementos do modelo de referência coincide com a espessura dos elementos do modelo analítico, ou seja, 0,07 m.



A Figura 5.9 mostra as dimensões da placa, a malha de elementos finitos, e o ponto de excitação da estrutura, utilizado para definir as funções de resposta em frequência FRF(s) do modelo.

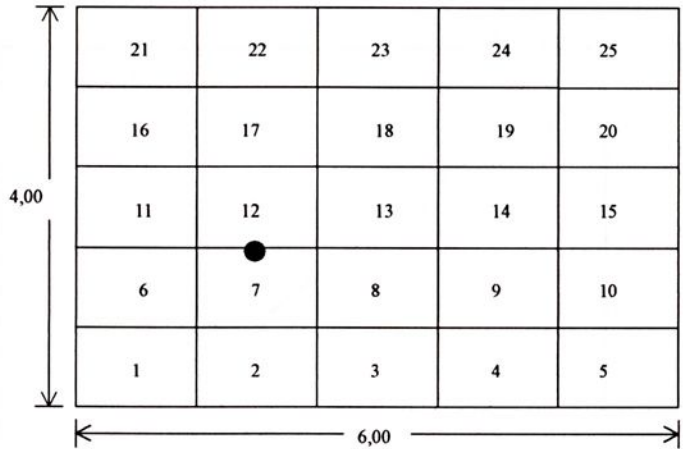


Figura 5.9: Elementos da Placa

Foram utilizadas apenas as FRF(s) relacionadas com os deslocamentos na direção z, isto representa considerar apenas 20% dos graus de liberdade do modelo analítico da estrutura. As FRF(s) são definidas numa faixa de frequência de 10 Hz a 100 Hz, para uma excitação aplicada na direção z, perpendicular à superfície da placa, como indicado. A fim de definir uma condição mais próxima da condição real de teste, as FRF(s) foram contaminadas com ruído gaussiano, distribuição normal com média zero e variância unitária. O ruído adicionado às FRF(s) é calculado com base no valor RMS do sinal, cuja razão sinal/ruído é dada em porcentagem.

O modelo analítico a ser comparado com o modelo experimental é definido considerando que todos os elementos possuem a mesma espessura, 0,07 m. E ainda, é introduzida uma variação significativa em uma propriedade da estrutura, que consiste no aumento em 100% da espessura do elemento 22. Isto acarreta um aumento das frequências naturais em relação ao modelo experimental. Os modos de vibrar também sofrem alterações.



A Figura 5.10 mostra a correlação das frequências. O gráfico de 45° mostra que os pontos de frequência estão distribuídos ao longo de uma reta de 45° com uma pequena dispersão. Isto indica que os modelos representam a mesma estrutura, porém, com uma razoável diferença, e a rotina de atualização pode ser utilizada para melhorar a correlação entre os dois modelos.

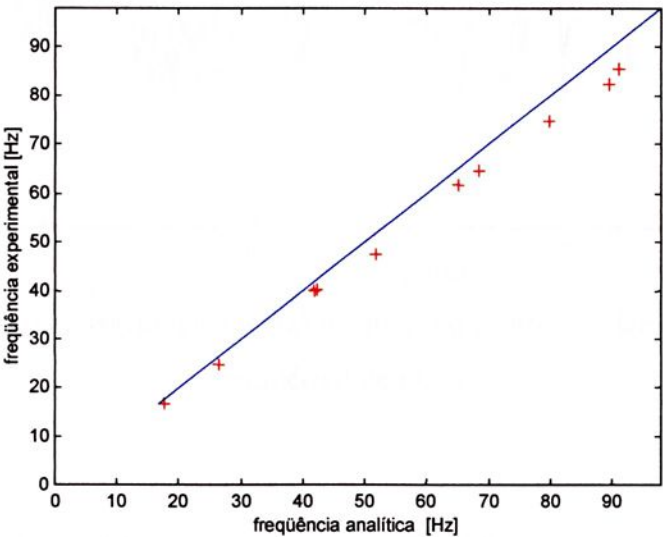


Figura 5.10: Correlação das Frequências

A Tabela 5.4 e a Figura 5.11 mostram a discrepância entre os modelos. E a Figura 5.11 mostra a FRF de referência contaminada com 2% de ruído.

Tabela 5.4 - Comparação dos modelos de referência e analítico – exemplo numérico de placa

Modo (Referência)	Modo (Analítico)	Fx (Hz)	Fa (Hz)	DF (%)	MAC (%)
1	1	16,70	17,54	5,06	98
2	2	24,78	26,53	7,08	95
3	3	39,91	41,87	4,98	61
4	4	40,28	42,15	4,73	50
5	5	47,33	51,68	9,24	86
6	6	61,78	65,11	5,54	84
7	7	64,61	68,54	6,12	60
8	8	74,83	79,85	6,89	80
9	9	82,59	89,49	8,57	80
10	10	85,67	91,00	6,34	87



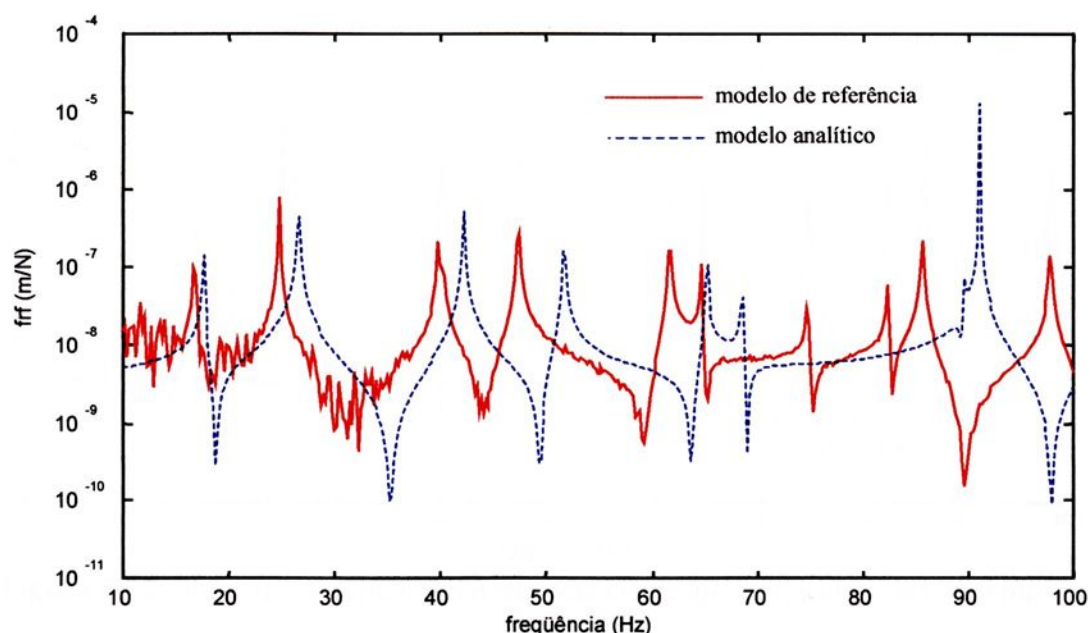


Figura 5.11: Superposição das FRF(s) medidas no centro do elemento 1 - exemplo numérico de placa

As diferenças relativas de frequências estão muito acima do valor considerado aceitável, 1%, chegando a 9,24% para o quinto modo. Os modos também apresentam, com exceção do primeiro modo, valores muito abaixo do valor aceitável, 98%, sendo o menor MAC-valor para o quarto modo, 50%. Isto indica que os modos não estão perfeitamente correlacionados.

Para o processo de ajuste foi escolhido o parâmetro espessura, pois este é um parâmetro bastante susceptível a erros de modelagem. Foram selecionados como parâmetros de ajuste a espessura de todos os elementos, e nenhuma informação a respeito dos prováveis elementos modelados erroneamente foi fornecida. As frequências de ajuste foram selecionadas graficamente, em regiões próximas das frequências naturais e abaixo dos valores destas, como mostra a curva da soma das receptâncias, apresentada na Fig. 5.12, isto evita variações bruscas de diferença entre as receptâncias durante as iterações.

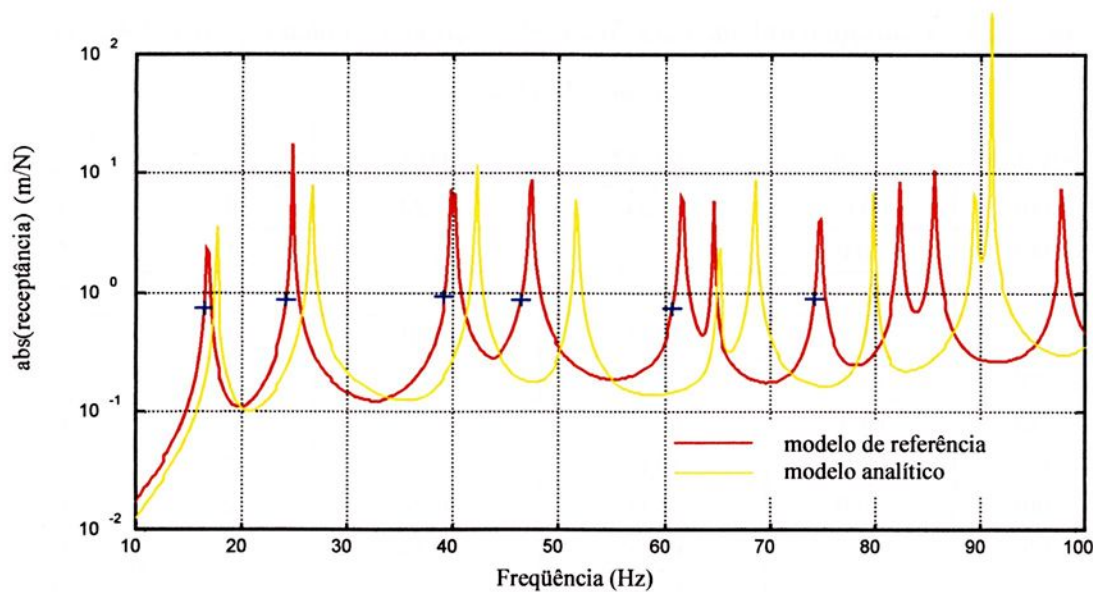


Figura 5.12: Soma das receptâncias e frequências de ajuste selecionadas - exemplo numérico de placa

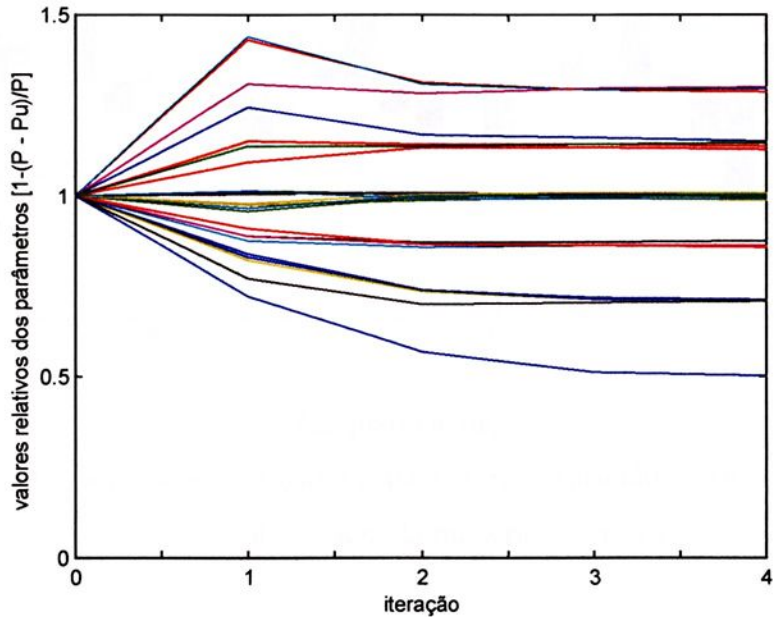
A Tabela 5.5 mostra os resultados da correlação entre o modelo analítico ajustado e o modelo experimental, e a Figura 5.13(a) mostra o gráfico da evolução da variação dos parâmetros corrigidos, espessura de todos os elementos do modelo. As espessuras dos elementos do modelo analítico que não eram iguais às espessuras do modelo de referência foram alteradas. Esta alteração significou aumento ou redução dentro da faixa de 0,05 a 0,09, conforme o modelo de referência. No caso das espessuras menores do que as correspondentes no modelo de referência, algumas sofreram aumento de 14,3% (de 0,07 para 0,08) e outras, aumento de 28,6% (de 0,07 para 0,09). No caso das espessuras maiores do que as correspondentes no modelo de referência algumas sofreram redução de 14,3% (de 0,07 para 0,06) e outras, redução de 28,6% (de 0,07 para 0,05). As espessuras dos elementos do modelo analítico que já estavam iguais às espessuras do modelo de referência não sofrem alterações. Desta forma, o modelo ajustado apresenta variações de espessura igual ao modelo de referência. O parâmetro com perturbação significativa é claramente localizado e corretamente estimado após algumas iterações.

As Figuras 5.13(b) e 5.13(c) mostram a variação de cada parâmetro para a primeira e a última iteração, neste caso, cada parâmetro está relacionado diretamente com o elemento.



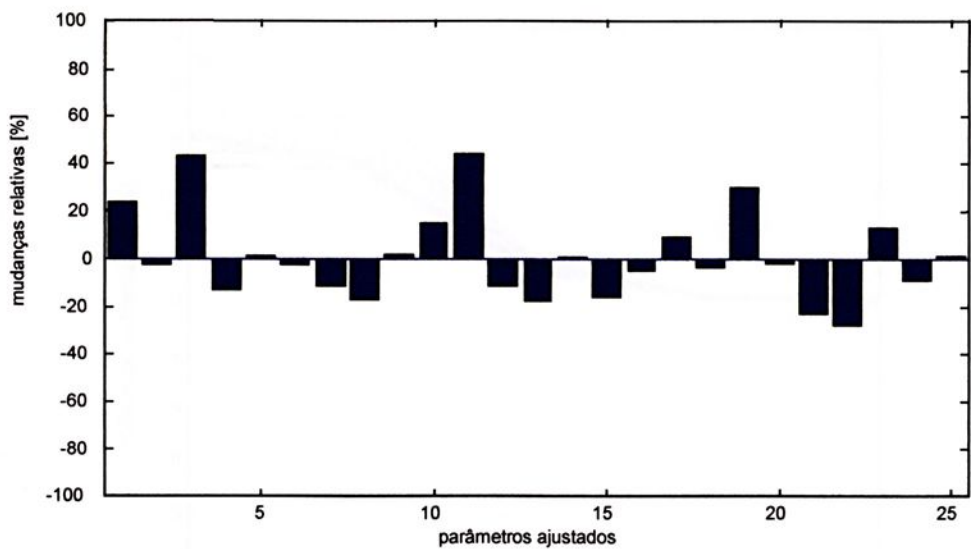
Tabela 5.5: Comparação dos modelos de referência e analítico ajustado – exemplo numérico de placa

Modo (Referência).	Modo (Analítico).	Fx (Hz)	Fa (Hz)	DF (%)	MAC (%)
1	1	16,70	16,70	-0.00	100
2	2	24,77	24,78	0.01	100
3	3	39,88	39,91	-0.00	100
4	4	40,24	40,28	0.03	100
5	5	47,31	47,33	-0.01	100
6	6	61,70	61,78	-0.01	100
7	7	64,58	64,61	-0.00	100
8	8	74,70	74,83	0.01	100
9	9	82,43	82,59	-0.01	100
10	10	85,58	85,67	-0.03	100

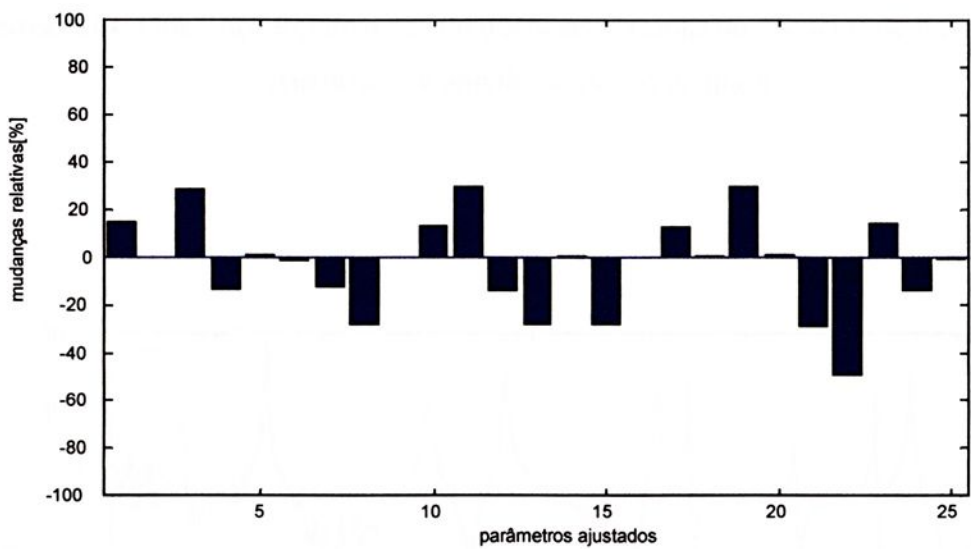


(a) todas as iterações





(b) primeira iteração



(c) quarta iteração

Figura 5.13: Evolução e Variação dos Parâmetros Ajustados: Espessura de Todos Elementos- exemplo numérico de placa

Com 4 iterações, a diferença de frequência entre os modelos experimental e analítico é de praticamente zero, e os modos apresentam-se perfeitamente correlacionados, como mostram a Tabela 5.5 e as Figuras 5.14 e 5.15.

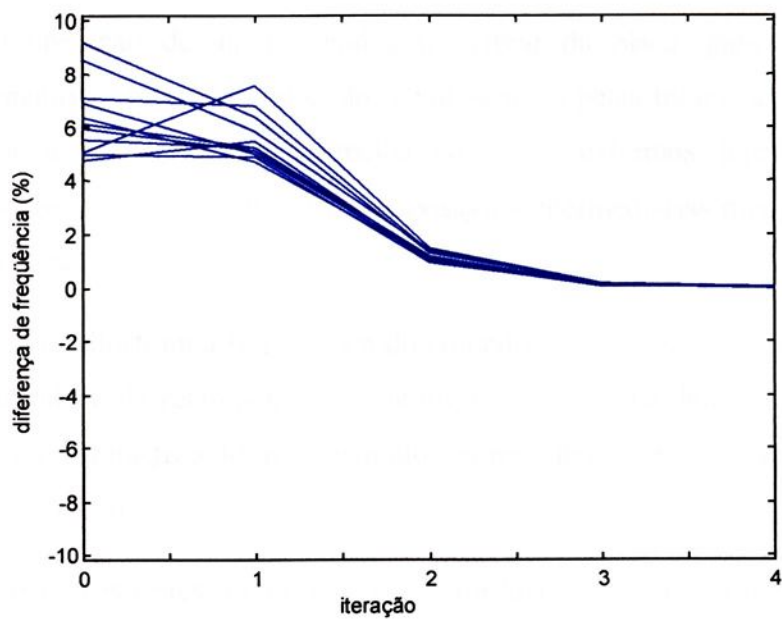


Figura 5.14: Diferença Relativa das Frequências Naturais do Modelos de Referência e Analítico – exemplo numérico de placa

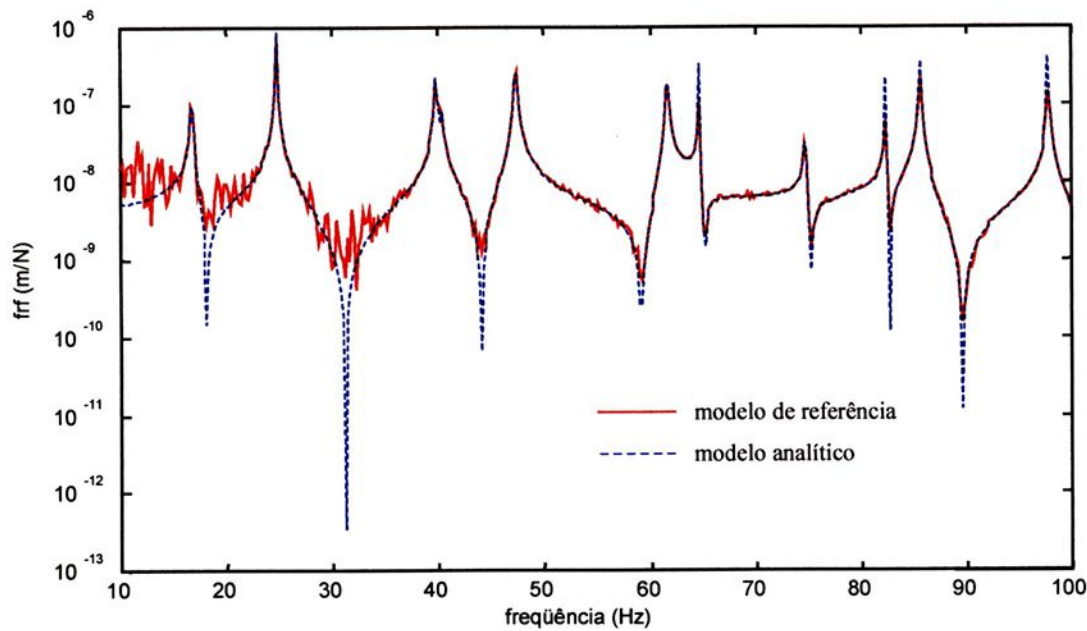


Figura 5.15: Superposição das FRF(s) Medidas no Centro do Elemento 1– exemplo numérico de placa

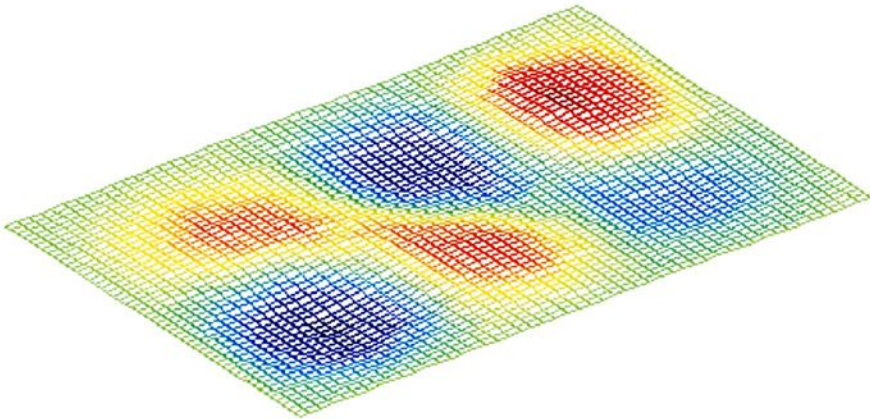


A comparação de alguns modos de vibrar da placa, para os modelos de referência, analítico e analítico ajustado, é apresentada pelas figuras a seguir. Pode-se convencionar as cores azul e vermelha como os extremos inferior e superior, respectivamente, e suas nuances como as posições intermediárias dos pontos da placa vibrando na direção z .

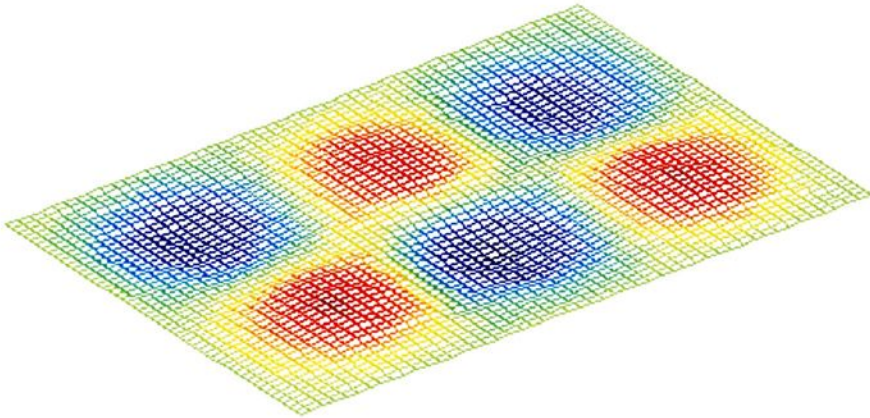
As figuras ilustram a semelhança do comportamento dinâmico entre os modelos analítico ajustado e de referência, e a diferença entre este modelo e o analítico. Isto mostra que os parâmetros foram corrigidos corretamente, e o modelo analítico foi ajustado com sucesso.

Vários outros testes foram realizados considerando outras condições, tais como outras espessuras para a placa, diferentes dimensões laterais e número de elementos. Estes testes foram feitos a fim de avaliar a implementação da rotina de análise dinâmica de placas e conhecer a sua potencialidade. Os resultados obtidos mostraram-se satisfatórios, semelhantes ao do exemplo discutido.

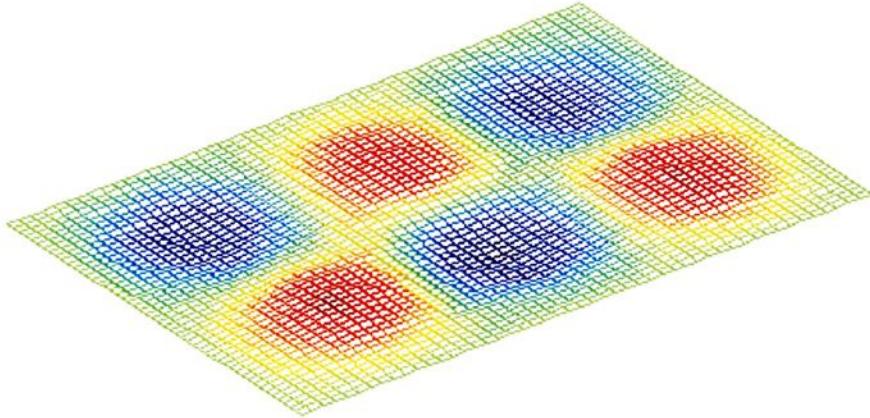




(a) modelo analítico

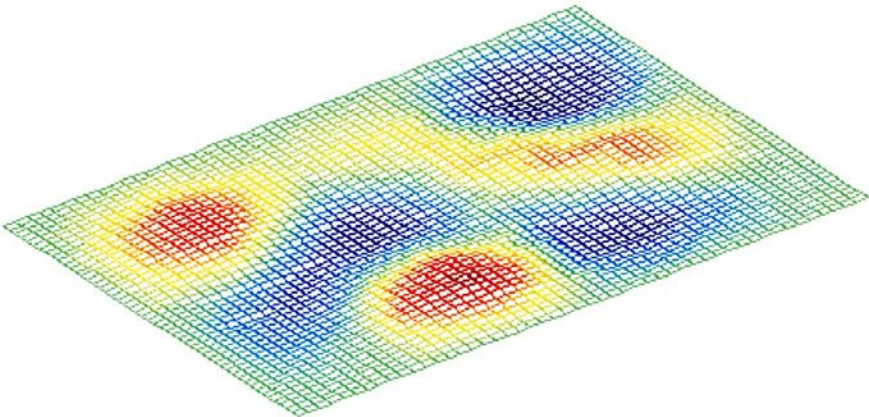


(b) modelo de referência

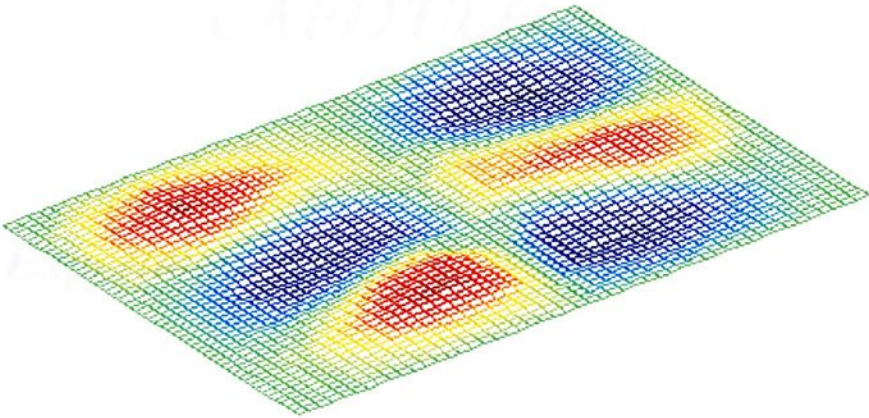


(c) modelo analítico ajustado

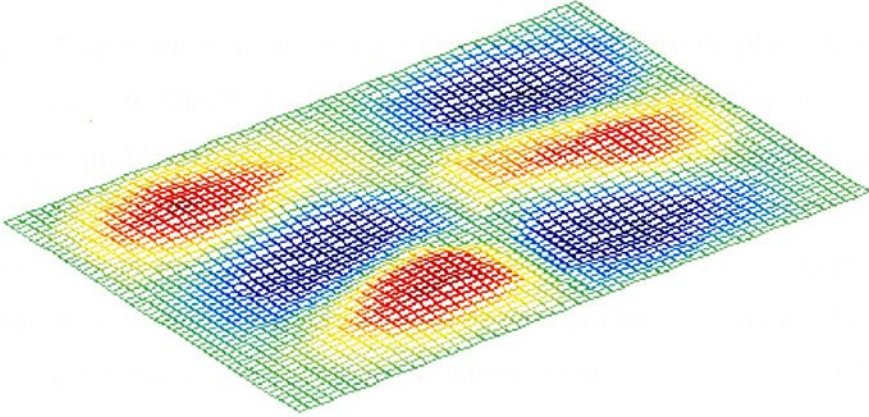
Figura 5.16: Sexto Modo de Vibrar da Placa



(a) modelo analítico



(b) modelo de referência



(c) modelo analítico ajustado

Figura 5.17: Nono Modo de Vibrar da Placa

CAPÍTULO 6

Estudo Experimental

No capítulo anterior, a importância de se definir um modelo analítico fiel à estrutura real foi demonstrada por meio da investigação de exemplo simulado de uma viga *steel joist*. A aplicação da metodologia de ajuste para o caso de placas também foi demonstrada. Com a finalidade de obter resultados numéricos o mais realísticos possível, os vários problemas envolvidos em um teste experimental (número limitado de graus de liberdade, faixa de frequência incluindo um número limitado de modos, ruído nas respostas) foram incluídos no estudo numérico. No entanto, embora considerando todos estes efeitos, o modelo analítico não é capaz de reproduzir a complexidade de um experimento. Para validar a metodologia de ajuste proposta, ensaios em laboratório foram realizados.

Neste capítulo é apresentado o estudo de uma viga *steel joist* utilizando dados experimentais.



6.1 Estudo Experimental: Viga Steel Joist

Estruturas do tipo *steel joist* apresentam geometria bastante complexa: banzos em cantoneira dupla e diagonais em ferro redondo, unidas por solda. Desta forma, o modelo de elementos finitos correspondente pode não representar fielmente o comportamento dinâmico a estrutura real. Neste caso, uma comparação do modelo com dados experimentais, visando a validação do modelo de elementos finitos, é necessária. Em virtude da complexidade da estrutura *steel joist*, a sua modelagem correta é um grande desafio, especialmente por causa das dificuldades na estimativa das propriedades geométricas do modelo, o que representa um teste bastante adequado para avaliar a aplicabilidade do trabalho.

A estrutura estudada é um modelo reduzido de uma viga *steel joist*, composta por cantoneiras duplas de abas iguais, cujos tamanhos são 25,4x3,175 mm e 22,2x3,175 mm, para os banzos superior e inferior, respectivamente, e diagonais em ferro redondo com diâmetro de 4,2 mm. As ligações foram feitas com solda. A estrutura é toda em aço, e mede 2.760 mm de comprimento e 149 mm de altura. A Tabela 6.1 apresenta as principais propriedades da viga.

Tabela 6.1: Propriedades do Material e Seções Transversais dos Componentes da Viga

	cantoneira superior	cantoneira inferior	diagonais	conexões superiores	conexões inferiores
módulo de elasticidade	2,1e+11	2,1e+11	2,1e+11	2,1e+11	2,1e+11
coeficiente de Poisson	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
densidade	7850	7850	7850	7850	7850
seção transversal	2,96e-04	2,64e-04	1,4e-05	3,1e-4	2,78e-4

A estrutura foi construída pelo Departamento de Engenharia Mecânica, unesp/feis/DEM, e os ensaios dinâmicos foram realizados no Laboratório de Dinâmica do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos, EESC/USP. A Figura 6.1 mostra a montagem da viga para o ensaio experimental.





Figura 6.1: Montagem do Experimento

6.1.1. Modelo Experimental

Um teste experimental de análise modal foi realizado para determinação dos parâmetros modais do modelo. A estrutura foi ensaiada na condição livre-livre, cabos elásticos foram utilizados para fixação da mesma permitindo uma aproximação razoável da condição livre-livre.

A estrutura foi excitada na direção vertical por meio de um shaker em um único ponto localizado na extremidade da viga. As respostas foram medidas com acelerômetro axial posicionado na direção y (altura da viga) em 25 pontos, os quais referem-se às junções dos banzos com as diagonais. A aquisição dos dados foi realizada com analisador espectral Tectroniks, com o qual foram obtidas 25 FRF(s). As aquisições foram feitas com 30 médias, janela do tipo Hanning, numa faixa de frequência de 0 a 500 Hz e discretização de 0.625 Hz.

A análise modal foi realizada com base nas FRF(s) medidas e os parâmetros modais foram estimados por meio do software EMA – Experimental Modal Analysis



(Pereira & Arruda, 2000). Na faixa de frequência analisada foram computados 4 modos de flexão. A Tabela 6.2 mostra os parâmetros modais estimados. É importante ressaltar que neste trabalho os modos estimados não são utilizados como dados de referência para o processo de ajuste. Estes dados são utilizados para a avaliação da correlação entre o modelo analítico e experimental por meio da técnica de MAC-valores. Os dados de referência no processo de ajuste são as receptâncias medidas e as frequências de ressonância estimadas. Neste caso , o conjunto de dados de referência contém 25 FRF(s) referentes aos 25 pontos de medida em uma direção, e 4 frequências de ressonância estimadas.

Tabela 6.2: Frequências Naturais Estimadas via EMA

modo	frequência (Hz)
1	117,42
2	201,60
3	273,62
4	339,97

6.1.2 Modelo Analítico

A modelagem analítica da estrutura foi desenvolvida com base no Método dos Elementos Finitos. Para representar as barras da estrutura foram utilizados elementos do tipo viga com 3 graus de liberdade por nó (deslocamento em *y*, deslocamento em *x* e rotação em *z*). Em relação à complexa geometria da estrutura (banzos em cantoneira dupla unidos por solda às diagonais em ferro redondo), a discretização da malha de elementos finitos apresenta muitas simplificações: as conexões feitas por solda são assumidas como uniões perfeitas e os elementos envolvidos nestas uniões são modelados como elementos normais de viga.

O modelo de Elementos Finitos contém 110 nós e 130 elementos, 330 GL(s), dos quais 7,6% (25 GL(s)) foram medidos. Para facilitar a definição da equivalência entre os modelos, o modelo analítico possui nós coincidindo com todos os pontos de medida. A Figura 6.2 mostra a malha de elementos finitos para a viga. A Tabela 6.3 mostra as frequência de ressonância analíticas.



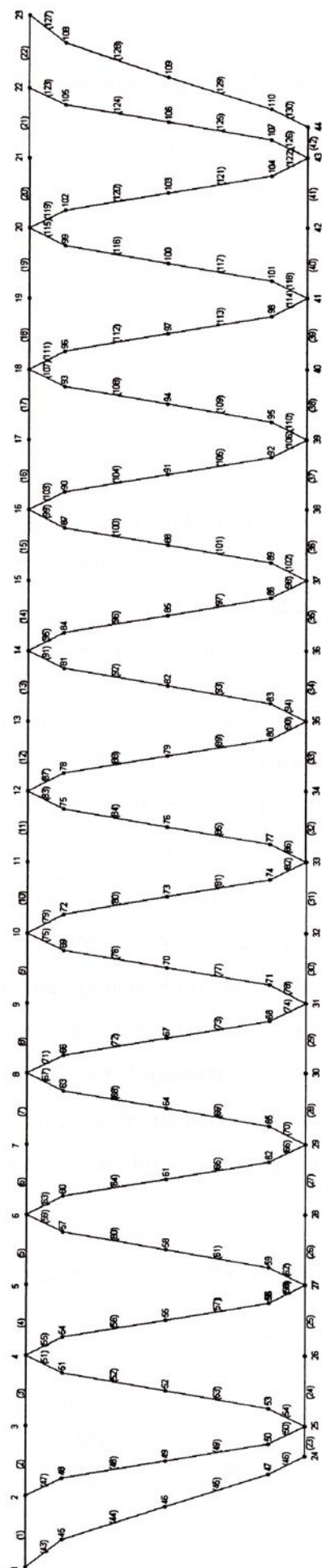


Figura 6.2: Discretização do Modelo de Elementos Finitos

Tabela 6.3: Frequências Naturais do Modelo Analítico

modo	frequência (Hz)
1	111,17
2	190,74
3	272,75
4	349,98

6.1.3 Correlação

A comparação entre os modelos permite avaliar se o modelo analítico representa fielmente o sistema ou se é necessário ser reavaliado. Neste caso, o modelo é ajustado com base nos dados medidos, ou seja, são efetuadas correções nos elementos ou conjunto de elementos modelados incorretamente.

Para comparar os modelos analítico e experimental foi utilizado um sistema de referência comum. Isto permite coincidir os GL(s) medidos no modelo experimental com os respectivos GL(s) do modelo analítico. A equivalência entre o número de graus de liberdade foi feita por meio da redução dinâmica do modelo analítico. Os parâmetros modais foram comparados utilizando o Coeficiente de Correlação Modal (MAC – valor) para os modos e a comparação direta entre as respectivas frequências. A tabela e as figuras a seguir mostram a discrepância entre os modelos. A Tabela 6.4 mostra as quatro primeiras frequência dos modelos analítico e experimental e os MAC – valores para os respectivos modos. A Figura 6.3 apresenta a correlação direta entre os modelos, por meio de um gráfico de 45° para as frequências de ressonância, e a Figura 6.4 mostra a superposição das FRF(s) medida e analítica, no ponto de excitação.

Tabela 6.4: Comparação dos modelos experimental e analítico

Modo (Experimental)	Modo (Analítico)	Fx (Hz)	Fa (Hz)	DF (%)	MAC (%)
1	1	117,42	111,17	-5,32	96
2	2	201,60	190,74	-5,39	91
3	3	273,62	272,75	0,32	73
4	4	339,97	349,98	2,94	54



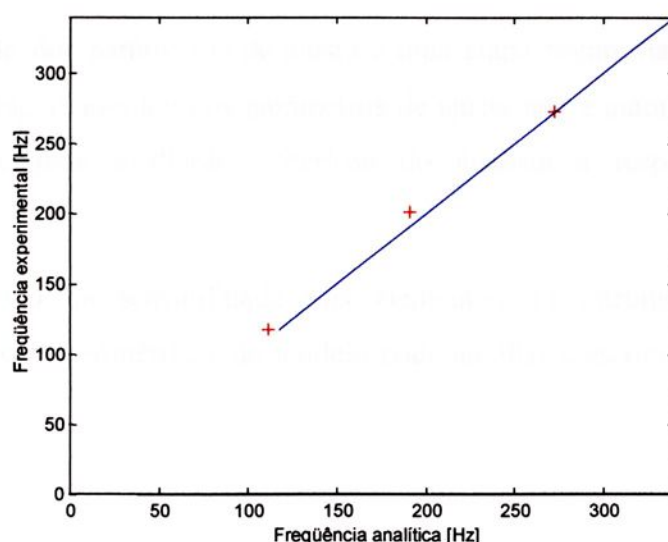


Figura 6.3: Correlação das Frequências – estudo experimental

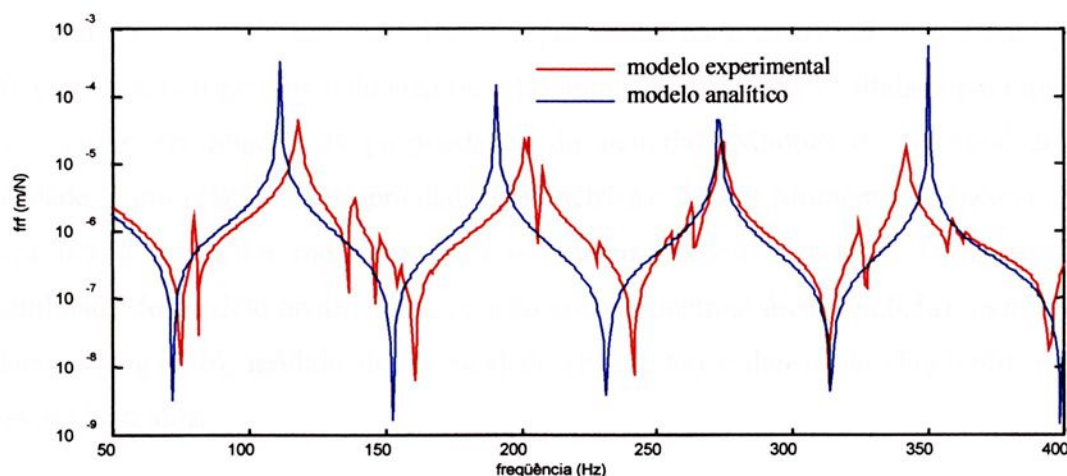


Figura 6.4: Superposição das FRF(s) medidas no ponto de excitação – estudo experimental

Os resultados obtidos mostram que o modelo de Elementos Finitos é uma aproximação razoável para o modelo experimental. As primeira e segunda frequências apresentam uma diferença da ordem de 5%, a quarta frequência é da ordem de 3%, e a terceira frequência é praticamente idêntica para ambos modelos. Entretanto o quarto modo apresenta uma correlação muito baixa. O gráfico de 45° das frequências e a Figura 6.4 mostram que os modelos representam a mesma estrutura, porém com pequenas diferenças de frequências, as quais podem ser reduzidas corrigindo o modelo

analítico. Neste caso, antes de iniciar o ajuste propriamente dito é bastante importante proceder uma avaliação dos possíveis parâmetros de ajuste.

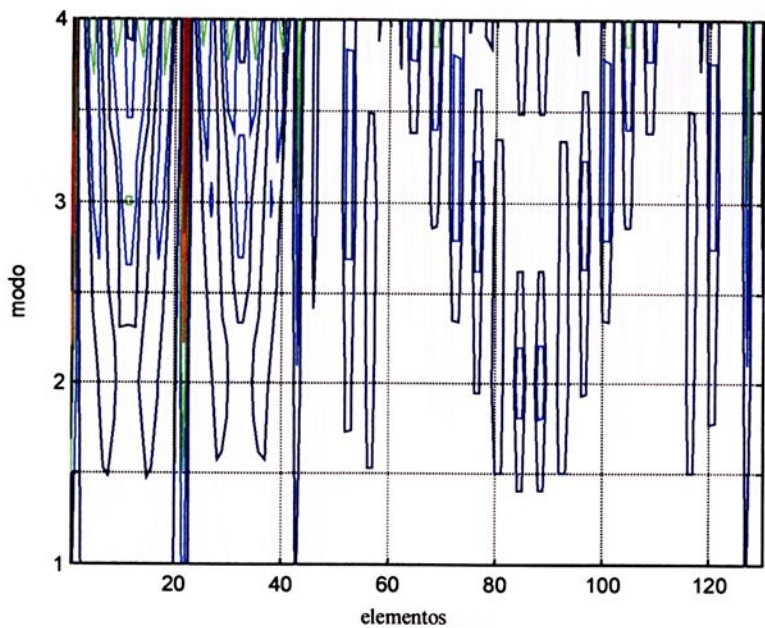
A seleção dos parâmetros de ajuste é uma etapa primordial para o sucesso do ajuste do modelo. A escolha dos parâmetros de ajuste não é automática, demanda um conhecimento e uma avaliação criteriosa do analista a respeito dos prováveis parâmetros.

Um estudo da sensibilidade dos elementos da estrutura em relação aos parâmetros físicos e geométricos do modelo pode auxiliar a escolha dos parâmetros de ajuste.

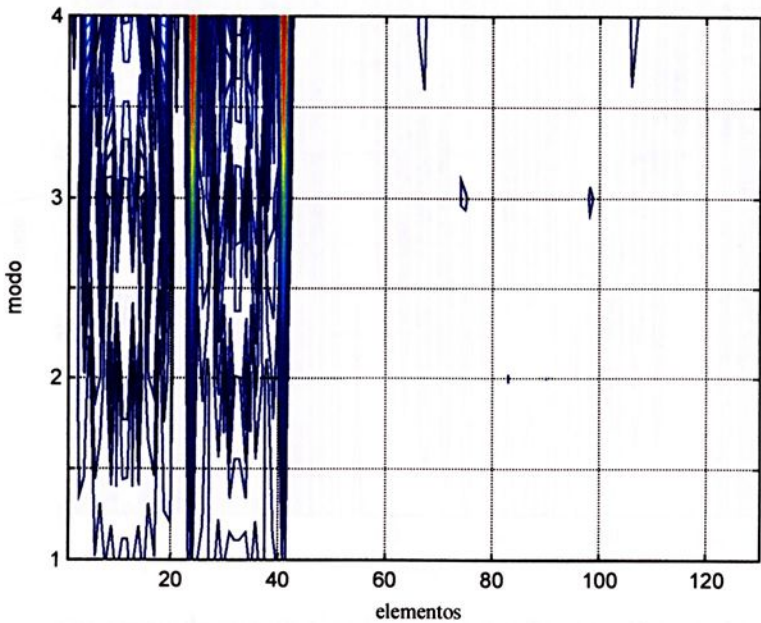
6.1.4 Análise de Sensibilidade

Com o objetivo de identificar os prováveis parâmetros ou o conjunto de parâmetros que corrige o modelo analítico, foi feita a análise de sensibilidade para todos os elementos em relação às propriedades do material: Módulo de Elasticidade e Densidade, e em relação às propriedades geométricas: Área e Momento de Inércia. A Figura 6.5 e a Fig.6.6 mostram, para os quatro primeiros modos, os mapas de sensibilidade do modelo analítico em relação aos parâmetros: área (Fig.6.5a), momento de inércia (Fig.6.5b), módulo de elasticidade (Fig. 6.6a) e densidade (Fig.6.6b), para todos os elementos.



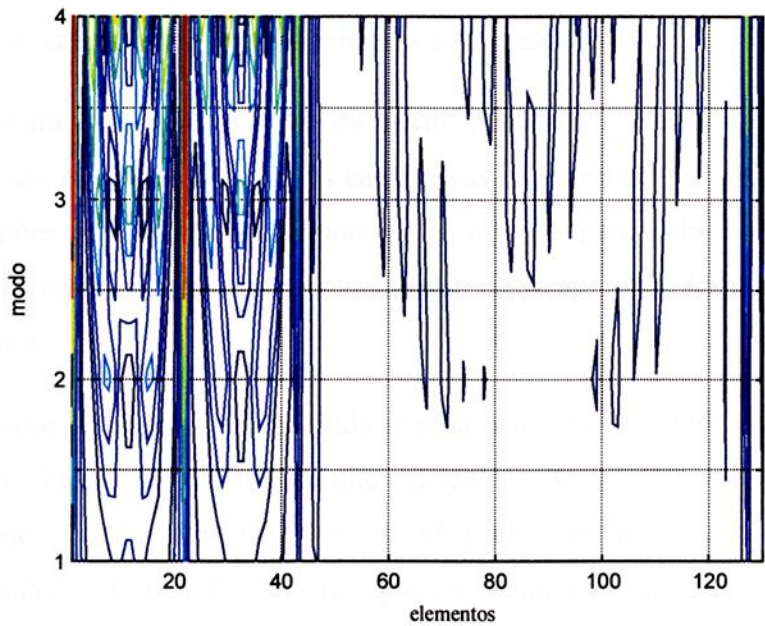


(a) mapa de sensibilidade para o parâmetro área

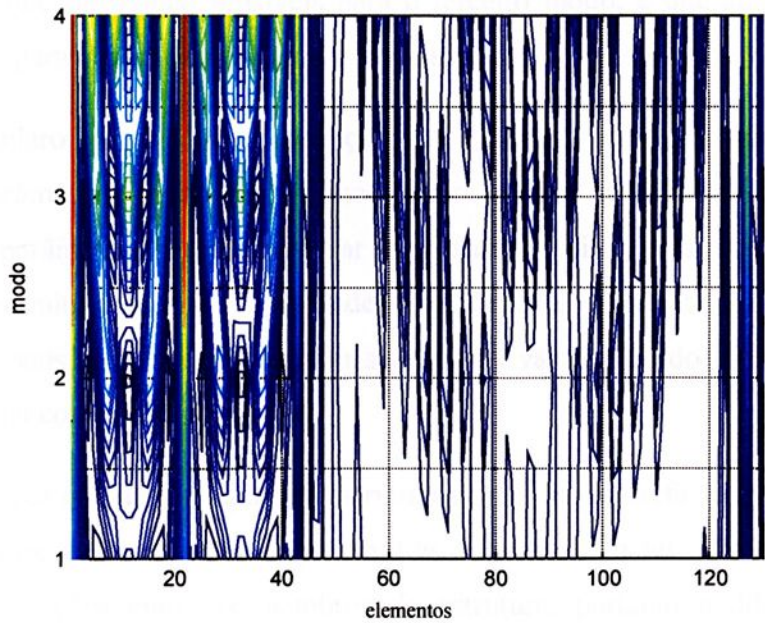


(b) mapa de sensibilidade para o parâmetro inércia

Figura 6.5: Mapas de Sensibilidade Para os Parâmetros Geométricos



(a) mapa de sensibilidade para o parâmetro módulo de elasticidade



(b) mapa de sensibilidade para o parâmetro densidade

Figura 6.6: Mapas de Sensibilidade Para os Parâmetros do Material

A proposta inicial do ajuste é reduzir a diferença entre as frequências do modelo analítico e experimental. Neste caso, as diferenças de frequência na faixa analisada são maiores nos dois primeiros modos, e praticamente nula para terceiro modo. Desta forma, o objetivo da análise é identificar as regiões da estrutura que apresentam maior sensibilidade para os dois primeiros modos, e pouca sensibilidade para o terceiro modo,

de maneira que uma pequena alteração nos elementos desta região resulte em uma mudança significativa apenas para o primeiro e segundo modos.

A Figura 6.5 mostra que os elementos mais sensíveis aos parâmetros geométricos são aqueles referentes às cantoneiras da estrutura (elementos 1 a 42). E ainda, as regiões de maior sensibilidade são as mesmas para todos os modos, ou seja, uma alteração nestas regiões afetaria inclusive os modos que já se encontram bem correlacionados.

A análise do mapa de sensibilidade para o parâmetro Módulo de Elasticidade, apresentado na Figura 6.6 (a), mostra que existem regiões próximas às extremidades da viga (elementos 1 a 5, 18 a 22, 23 a 28, 37 a 42) que são muito sensíveis para os primeiros modos. E também mostra que os elementos das diagonais têm maior influência nos modos mais altos. O mapa de sensibilidade para a Densidade mostra que existem regiões, referentes aos elementos da diagonal e aos elementos do centro das cantoneiras, que são pouco sensíveis para o terceiro modo, e que apresentam alguma sensibilidade para o primeiro e segundo modos.

Fica claro que a simples inspeção nos gráficos não é suficiente para se obter todos os parâmetros de ajuste. É necessário avaliar as diversas combinações de conjunto de parâmetros que podem levar ao ajuste. A análise da sensibilidade por meio dos mapas permite descartar uma grande quantidade de parâmetros, tais como aqueles que não são sensíveis às variações, ou seja, o seu valor, estando ou não correto, não influenciará na correlação do modelo.

Uma vez que a montagem da estrutura não foi uma tarefa simples, a união com solda das barras em cantoneira dupla com as diagonais em ferro redondo certamente introduziu variações entre os membros da estrutura, portanto a diferença entre os modelos deve estar relacionada com as propriedades dos elementos localizados nas regiões de conexão entre as cantoneiras e as diagonais. A análise da sensibilidade das propriedades do material mostra que todos os modos são bastante sensíveis às variações da densidade do material para os elementos localizados nas regiões de conexão, e ainda, que para alguns elementos do centro das cantoneiras, a densidade é um parâmetro mais sensível para o primeiro modo do que para o terceiro modo. Este é um fato interessante, pois as maiores diferenças de frequência aparecem para o primeiro e segundo modo. No entanto, a alteração desta propriedade provoca também um aumento na diferença de



freqüência para o terceiro e quarto modos, que já se encontram bem correlacionados. Este aumento pode ser “equilibrado” por meio de um parâmetro bastante sensível para os modos mais altos. Estes modos são bastante sensíveis às variações do módulo de elasticidade dos elementos localizados nas extremidades da viga. Com base nesta análise, uma alteração no parâmetro densidade do material para os elementos localizados nas regiões de conexão e no centro das cantoneiras, e no parâmetro módulo de elasticidade dos elementos localizados nas extremidades das cantoneiras pode conduzir ao ajuste do modelo analítico.

6.1.5 Ajuste do Modelo Analítico

Com base na análise de sensibilidade discutida anteriormente, é possível dividir a viga em cinco regiões:

- 1- extremidades das cantoneiras (6 primeiros elementos em ambas cantoneiras)
- 2- centro das cantoneiras
- 3- extremidades das diagonais (10 primeiros elementos em ambas extremidades)
- 4- centro das diagonais
- 5- conexões (elementos de ligação das cantoneiras com as diagonais)

Foram considerados dois parâmetros de ajuste, ou seja, módulo de elasticidade para a região 1 e densidade para as regiões 2 e 5, sendo que o valor da densidade destas regiões foi ajustado proporcionalmente.

A freqüência selecionada para o processo do modelo é mostrada na Figura 6.7. A figura mostra uma freqüência localizada na região da curva de receptância próxima à primeira freqüência natural e fora da região entre os picos de freqüência analítica e experimental correspondentes. Isto evita variações bruscas de diferença entre as receptâncias durante as iterações, que levaria a problemas numéricos durante o processo de ajuste.



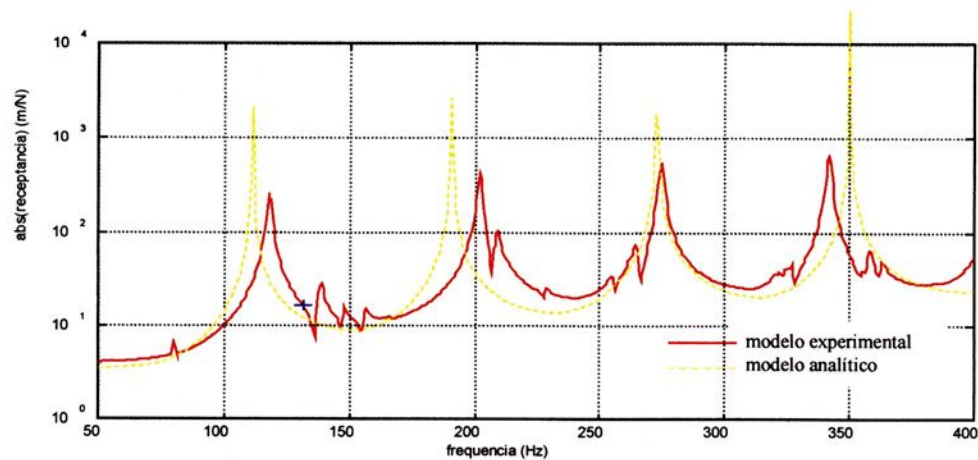


Figura 6.7 : Soma das receptâncias e frequência de ajuste selecionada

A Tabela 6.4 mostra os resultados da correlação entre o modelo analítico ajustado e o experimental. A Figura 6.8 e a Figura 6.9 mostram a evolução da diferença das frequências de ressonância durante o processo de ajuste e a correção dos parâmetros atualizados, respectivamente. A superposição das FRF(s) medida e analítica é apresentada na Figura 6.10.

Tabela 6.5: Comparação dos modelos experimental e analítico ajustado

Modo (Experimental)	Modo (Analítico)	Fx (Hz)	Fa (Hz)	DF (%)	MAC (%)
1	1	117,42	117,38	-0,03	97
2	2	201,60	199,31	-1,14	93
3	3	273,62	274,79	0,42	79
4	4	339,97	344,32	1,28	59

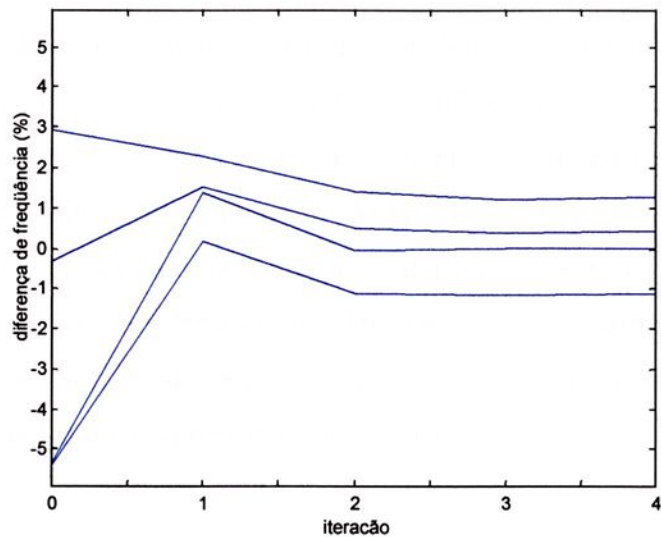


Figura 6.8: Diferença Relativa das Frequências Naturais – Estudo Experimental



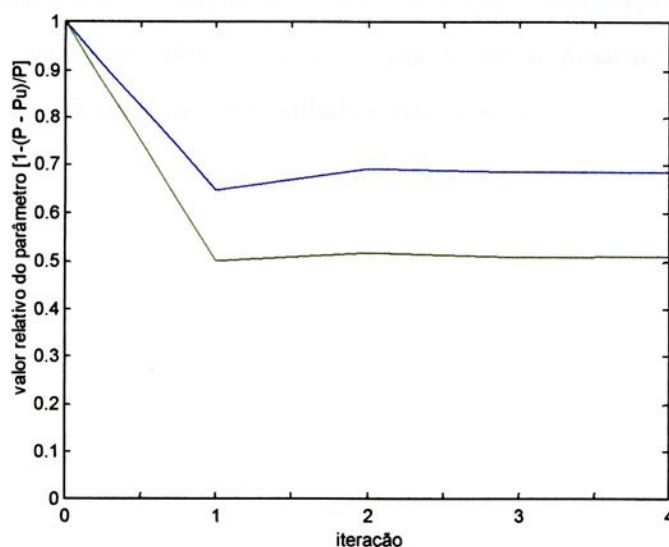


Figura 6.9: Evolução da Variação dos Parâmetros – Estudo Experimental

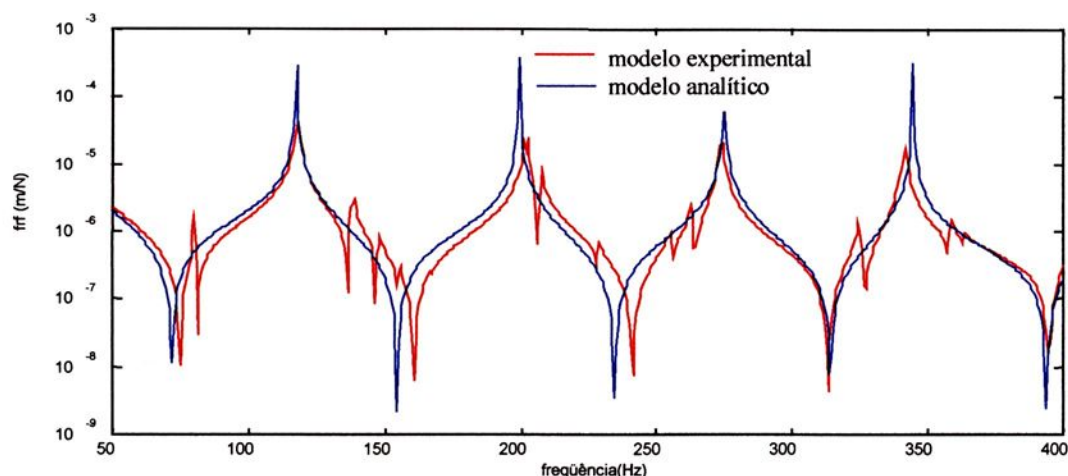


Figura 6.10: Superposição das FRF(s) medidas no ponto de excitação

Os resultados apresentados mostram que houve uma melhoria da correlação entre o modelo analítico e o experimental. As diferenças de frequência diminuíram consideravelmente, praticamente 0% para os primeiro e terceiro modos, e 1% para os segundo e quarto modos. Os valores de MAC aumentaram em relação ao modelo inicial. Embora para o quarto modo o Mac –valor aumentado de 54% para 59%, este valor de MAC continua muito abaixo do valor razoável. Isto ocorre, possivelmente em virtude do número reduzido de pontos medidos. Ou ainda, estes podem não ser os pontos mais adequados para representar o quarto modo.

Pode-se dizer que o modelo analítico corrigido é mais representativo do que o modelo inicial de elementos finitos. Desta forma, o estudo dinâmico efetuado por meio deste modelo corrigido apresentará resultados mais realísticos.



CAPÍTULO 7

Conclusão

Existe uma grande preocupação no mundo inteiro com os efeitos de vibrações em estruturas civis causadas pelos próprios usuários. Estas vibrações ocorrem em virtude do envelhecimento das estruturas, somadas às mudanças de carregamento, e ainda mais recentemente, da otimização no dimensionamento de estruturas civis, resultado do avanço do cálculo estrutural aliado aos novos e modernos materiais, que tem permitido a construção de estruturas, como lajes e vigas, bastante esbeltas e flexíveis.

Embora seja um assunto em estudo já há vários anos, não existem na literatura muitos trabalhos sobre os efeitos de vibrações nas pessoas, bem como sobre as possíveis soluções para estes problemas. Com base nos trabalhos apresentados na revisão bibliográfica, pode-se observar que não existem normas específicas para identificar as características dinâmicas das estruturas e sua relação com o conforto humano. Nestes casos, a maioria dos autores fazem uso de técnicas de ajuste de modelo a fim de se obter um modelo analítico representativo do sistema real, com o qual é possível avaliar a estrutura sob diferentes condições de operação e carregamento.



Este trabalho discute o Ajuste de Modelo de uma estrutura de viga do tipo *steel joist* e a implementação de um algoritmo para ajuste de estruturas de placa (laje). O modelo é ajustado de forma iterativa com base na sensibilidade da matriz de rigidez dinâmica e os parâmetros corrigidos são os próprios parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo. Assim, o ajuste é feito nos próprios parâmetros, em vez de alterar toda a matriz de rigidez e massa do elemento. O ajuste com base nos parâmetros da estrutura permite uma melhor interpretação física da variação dos parâmetros o que é um requisito muito importante quando se deseja obter um modelo analítico representativo do modelo real.

A aplicação da metodologia para a definição de um modelo de predição representativo foi demonstrada por meio de um estudo numérico de uma viga *steel joist* com dimensões e características similares às vigas comerciais. As frequências naturais são bastante baixas, e coincidem com a faixa das frequências de excitação típicas encontradas durante as condições de uso. Uma análise de sensibilidade da estrutura permitiu identificar as regiões do modelo mais sensíveis a mudanças, de forma a alterar as primeiras frequências naturais sem grandes modificações na estrutura. Foi discutido o problema da utilização de um modelo não representativo para o cálculo da sensibilidade. Neste caso, o mapa de sensibilidade do modelo analítico sem ajuste mostrava que as regiões mais sensíveis a mudanças eram as regiões centrais da viga, enquanto que o mapa do modelo de referência apontava como as regiões mais sensíveis, as regiões dos apoios.

Em um segundo exemplo numérico, uma estrutura simulada do tipo placa foi estudada visando avaliar o desempenho do método de ajuste discutido para estruturas de placas. Vários testes foram realizados, com placas de diferentes espessuras, dimensões laterais e número de elementos, a fim de avaliar a implementação, conhecer a potencialidade e definir os limites da rotina implementada. Em todos os casos estudados o processo convergiu após algumas iterações, e apenas os parâmetros discrepantes do modelo analítico foram corrigidos. Os parâmetros inicialmente corretos permaneceram inalterados.

A utilização de dados contaminados por ruído também foi estudada visando definir uma condição mais próxima da condição de teste. O ajuste de modelo neste caso



foi obtido com sucesso. Entretanto observou-se que o aumento da relação sinal-ruído é um fator limitante para o êxito da rotina de ajuste.

A validação da proposta foi demonstrada com a utilização de dados experimentais de um modelo reduzido de viga *steel joist*.

Os ensaios da viga, cujo objetivo era a determinação dos parâmetros modais do modelo, foram feitos na condição livre-livre. A estrutura foi excitada em um único ponto na direção vertical. Nesta direção, as quatro primeiras frequências naturais da viga foram: 117 Hz, 201 Hz, 273 Hz e 340 Hz. Além destas quatro frequências, outras frequências referentes a modos de vibrar em outra direção aparecem na curva de receptância medida. Estes modos foram detectados porque a viga estudada não se encontrava perfeitamente no plano *xy*, por causa das imperfeições originadas na sua construção.

Em virtude das imperfeições originadas na construção da viga somadas à complexidade da geometria da estrutura, a modelagem por Elementos Finitos apresentou muitas simplificações. Portanto, o modelo analítico inicial não apresentou uma correlação satisfatória com o modelo experimental. A Análise de Sensibilidade aliada ao julgamento criterioso do analista permitiu identificar os parâmetros que conduziram ao ajuste do modelo analítico.

Após o ajuste, os resultados apresentados mostraram que houve uma melhoria da correlação entre o modelo analítico e o experimental. As diferenças de frequência diminuíram consideravelmente e valores de MAC aumentaram em relação ao modelo inicial. Pode-se dizer que o modelo analítico corrigido é mais representativo do que o modelo inicial de elementos finitos, e portanto, o estudo dinâmico efetuado por meio deste modelo corrigido apresentará resultados mais realísticos.

A validação da proposta de ajuste para estruturas de placa por meio de testes experimentais, e o estudo do comportamento dinâmico do conjunto placa / viga *steel joist*, são propostas de continuidade deste trabalho.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allemang, R.J. & Brown, D.L. (1982) A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, proceedings of the I – IMAC.
- ANSYS Finite Element Analysis Program, Swanson Analysis System Inc, Revision 5.0 (Educational Version), 1992.
- Bathe, J. & Wilson, E.L. (1976) Numerical Methods in Finite Elements Analysis, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs.
- Berman, A. & Flannelly, W. (1971) Theory of Incomplete Models of Dynamic Structures, AIAA journal, v-9, pp 1482-1487.
- Bonilha, L.A.S. (1997) Investigação dos Comportamentos de Estruturas Civis Submetidas a Vibrações Induzidas por Pessoas, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Cantieni, R., Pietrzko, S. & Deger Y. (1998) Modal Investigation of an Office Building Floor, proceedings of the XVI-IMAC.
- Cassola, S., & Pereira, J.A. (1999) Caracterização dos Parâmetros Dinâmicos de Estruturas Metálicas do Tipo Steel Joist, proceedings of the XV COBEM.
- Comite Euro-International du beton – Bulletin d'Information n° 209 (1991) –Vibration problems in structures- CEB n° 209/1991- Viena.
- Cottin, N., Felgenhauer, H P. & Natke, H.G. (1984) On the Parameter Identification of Elastomechanical System Using Inout and Output Residuals, Ingenieur Archiv 54 (5), 378-387.
- Ellis, B.R., & Ji, T. (1997) Human-Structure Iteration in Vertical Vibrations, proceedings of the Institute Civil Engineering Structure & Buildings, 122 :1-9, panel paper 11023.
- Ewins, D.J. (1984) Modal Testing :Teory and Practice, John Wiley & Sons Inc, New York.
- Friswell, M.J. & Mottershead, J.E. (1995) Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers.
- Fusco,P.B. (1996) A Investigação Experimental de Estrutura, BT/PEF/9616, EDUSP.



- Galambos, T.V. (1988) Vibration of Steel Joist – Concrete Slab Floors, Technical Digest N°5.
- Grafe, H. (1998) Model Updating of Large Structural Dynamics Models Using Measured Response Functions, Ph.D Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, UK.
- Heylen, W. et al. (1994) Modal Analysis Theory and Testing, Course on Modal Analysis Theory and Practice, ISMA 19, Leuven.
- Ibrahim, S.R., Saafan, A.A. (1987) Correlation of Analysis and Test in Modeling of Structures Assessment and Review. International Modal Analysis Conference, 5, Proceedings, p. 1651-1660.
- Kidder, R.L. (1973) Reduction of Structural Frequency Equation, AIAA journal, v.11, n° 6.
- Lammens, S. (1995) Frequency Response Based Validation of Dynamic Structural Finite Element Models, Ph.D., Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- Larsson, P.O. & Sas, P. (1992) Model Updating Based on Forced Vibration Testing Using Numerically Stable Formulations, Proceedings of the X-IMAC.
- Lin, R.M. & Ewins, D.J. (1990) Model Updating Using FRF Data, In 15th International Seminar on Modal Analysis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- Maia, N.M.M. & Silva, J.M.M. (1997) Theoretical and Experimental Modal Analysis, Research Studies Press Ltda. John Wiley & Sons Inc.
- Meirovitch, L. (1980) Computacional Methods in Structural Dynamics, Sijthoff and Noordhoff International Publisher B.V.
- Nalototela, N.G. (1993) A Frequency Domain Technique for Strutural Parameter Updating, proceedings XI – IMAC, 676, Kissimmee, Florida
- Natke, H.G. (1983) Einfuehrung in Theorie und Praxis der Zeitreihen – und Modal – Analyse, (3rd ed.) Vieweg Verlag, Wiesbaden.
- Oñate, E. (1992) Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos – Análisis Estático Lineal, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- Papadimitriou, C., Levine-West, M. & Milman, M. (1998) Application of a Finite Element Model Updating Methodology on the IPEX-II Structure, proceedings XVI – IMAC.
- Paschoalini, A.T. (1995) Estudo Comparativo entre Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise Dinâmica de Placas e Cascas, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.
- Pereira, J. A. (1996) Structural Damage Detection Methodology Using a Model Updating Procedure Based on Frequency Response Functions - FRF(s), Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.
- Pereira, J.A. & Arruda, J.R.F. (2000) EMA – Experimental Modal Analysis, Relatório Técnico, Universidade Estadual Paulista, UNESP – FEIS, Ilha Soteira.



- Prezemieniecki, J.S. (1968) Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company.
- Rad, S.Z. (1997) Methods for Updating Numerical Models in Structural Dynamics, Ph.D Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, UK.
- Reynolds P. et al., (1998a), Modal Testing, FE Analysis and FE Model Correlation of a 600 tonne Post-tensioned Concrete Floor XXIII-International Seminar on Modal Analysis.
- Reynolds, P., Pavic, A. & Waldron, P. (1998b), Modal Testing of a 150-tonne Concrete Slab Incorporating a False Floor System, proceedings of the XVI-IMAC.
- Snoeys, R. et al (1992) Trends in Experimental Modal Analysis, proceedings of the XVII International Seminar on Modal Analysis, Leuven.
- Stephenson, A.C. & Humphreys, 1998, Quantification of Steel Floor Vibration and its Relationship to Human Comfort, Journal of Constructional Steel Research, **46**: 1-3, paper nº 256.
- Targoff, W.P. (1976) Ortogonality Check and Correlation of Measured Modes, proceedings AIAA Journal, v-14, n-2.
- Zienkiewicz, O.C. (1985) The Finite Element Method, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, ltd.
- Wang, M.L., Heo, G. & Satpathi, D. (1997) Dynamic Characterization of a Long Span Bridge: a Finite Element Based Approach, proceedings Soil Dynamics and Earthquake Engineering, **16**: 503-512.



PUBLICAÇÕES

Cassola, S., Pereira, J.A., Caracterização dos Parâmetros Dinâmicos de Estruturas Metálicas do Tipo *Steel Joist*, XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM, Águas de Lindóia, Brasil, 1999.

Cassola, S., Pereira, J.A., Paschoalini, A.T., Identificação dos Parâmetros Modais de Placa, Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM, Natal, Brasil, 2000.





**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**

**Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br**

