

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

VINÍCIUS ROTTOLO GARCIA

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DA VIGA EULER-BERNOULLI VIA MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Ilha Solteira
2023

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DA VIGA EULER-BERNOULLI
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

VINÍCIUS ROTTOLO GARCIA

Orientador: Prof. Dr. Márcio Antônio Bazani

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Departamento de Engenharia Mecânica

Ilha Solteira

2023

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

G216a Garcia, Vinícius Rottolo.
Análise estática e dinâmica da viga Euler-Bernoulli via método dos
elementos finitos / Vinícius Rottolo Garcia. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
48 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) -
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2023

Orientador: Márcio Antônio Bazani

Inclui bibliografia

1. Análise de elementos Finitos . 2. Análise elástica (Engenharia). 3. Dinâmica
estrutural. 4. Mecânica dos sólidos. 5. Vigas.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA – CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ATA DE DEFESA – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

TÍTULO:ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DA VIGA EULER-BERNOULLI VIA
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

ALUNO: Vinícius Rottolo Garcia

R.A.: 171051131

ORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio Antônio Bazani

APROVADO (X) – REPROVADO () PELA COMISSÃO EXAMINADORA

Nota obtida: 9,5

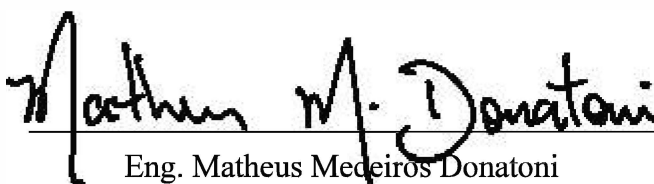
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Márcio Antônio Bazani
Presidente/Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br EDUARDO PRETO
Data: 09/05/2023 22:27:18-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Me. Eduardo Preto



Eng. Matheus Medeiros Donatoni

Documento assinado digitalmente
gov.br VINICIUS ROTTOLO GARCIA
Data: 10/05/2023 11:41:10-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Vinícius Rottolo Garcia

Ilha Solteira/SP, 9 de maio de 2023

Faculdade de Engenharia – FE/Unesp – Câmpus de Ilha Solteira

Cursos: Ciências Biológicas, Eng. Agrônômica, Eng. Civil, Eng. Elétrica, Eng. Mecânica, Física, Matemática e Zootecnia. Avenida Brasil Centro, 56 – CEP 15385-000 – Ilha Solteira – São Paulo – Brasil
pabx +55 (18) 3743-1000 – fax +55 (18) 3742-2735 – scom.feis@Unesp.br – www.feis.Unesp.br

RESUMO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica consolidada para análises estruturais de componentes mecânicos que consiste em dividir a estrutura em elementos de dimensões finitas, analisá-los individualmente e, por fim, somar suas contribuições para obter resposta final da estrutura. Embora os *softwares* de elementos finitos tenham tornado a técnica amplamente difundida devido à facilidade de sua utilização, muitos usuários acabaram deixando de lado a fundamentação teórica e os conceitos por trás dessa metodologia, o que pode prejudicar a interpretação dos resultados. Tendo isso em vista, este trabalho realizou uma revisão bibliográfica do método e da teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli, além de analisar estática e dinamicamente vigas sujeitas a diferentes restrições de movimento, aplicando os conceitos do MEF. A análise estática visou obter os valores de deflexão e forças de reações, enquanto a dinâmica pretendeu obter as frequências naturais e modos de vibrar. Para aplicar o método, foi desenvolvido um algoritmo em linguagem de programação *Python* que foi validado comparando-se seus resultados com o *software* Salome-Meca e o método analítico. Os resultados foram satisfatórios, demonstrando a eficácia do MEF e da teoria de Euler-Bernoulli, além da importância em compreender a teoria por trás desta metodologia.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos. Métodos numéricos. Teoria de viga de Euler-Bernoulli. Análise estática. Análise dinâmica. Vigas.

ABSTRACT

The Finite Element Method (FEM) is a well-established technique for structural analysis of mechanical components, which involves dividing the structure into finite-sized elements, analyzing them individually, and then summing their contributions to obtain the final response of the structure. Although finite element software has made the technique widely accessible due to its ease of use, many users have neglected the theoretical foundation and concepts behind this methodology, which can hinder the interpretation of results. With this in mind, this study conducted a literature review of the method and classical Euler-Bernoulli beam theory, as well as static and dynamic analysis of beams subjected to different motion constraints, applying the concepts of FEM. The static analysis aimed to obtain deflection values and reaction forces, while the dynamic analysis aimed to obtain natural frequencies and modes of vibration. To apply the method, an algorithm was developed in Python programming language and was validated by comparing its results with the Salome-Meca software and analytical method. The results were satisfactory, demonstrating the effectiveness of FEM and Euler-Bernoulli theory, as well as the importance of understanding the theory behind this methodology.

Keywords: Finite element method. Numerical methods. Euler-Bernoulli beam theory. Static analysis. Dynamic analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo de viga com seus referenciais globais e locais,	12
Figura 2 – Segunda suposição do modelo de Euler-Bernoulli,	13
Figura 3 – Convenção de sinais positivos das forças resultantes.	15
Figura 4 – Equilíbrio de um volume infinitesimal da viga.	16
Figura 5 – Viga engastada em uma extremidade.	17
Figura 6 – Segmento infinitesimal de viga sob ação de uma força dinâmica.	18
Figura 7 – Elemento de viga com 2 nós.	21
Figura 8 – Viga discretizada em 3 elementos.	28
Figura 9 – Vigas analisadas.	33
Figura 10 – Fluxograma do algoritmo MEF	35
Figura 11 – Malha utilizada no programa Salome-Meca	36
Figura 12 – Modelagem utilizada no programa Salome-Meca	36
Figura 13 – Gráfico de <i>deflexão</i> $\times$ <i>comprimento</i> : engastado–livre.	37
Figura 14 – Gráfico de <i>deflexão</i> $\times$ <i>comprimento</i> : bi–engastado.	38
Figura 15 – Gráfico de <i>deflexão</i> $\times$ <i>comprimento</i> : engastado–apoiado.	38
Figura 16 – Gráfico de <i>deflexão</i> $\times$ <i>comprimento</i> : bi–apoiado.	39
Figura 17 – Três primeiros modos de vibrar da viga: engastado–livre.	40
Figura 18 – Três primeiros modos de vibrar da viga: bi–apoiado.	41
Figura 19 – Três primeiros modos de vibrar da viga: engastado–apoiado	42
Figura 20 – Três primeiros modos de vibrar da viga: bi–apoiado.	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de $(\beta_n L)^2$ para diferentes condições de contorno.	21
Tabela 2 – Parâmetros utilizados nas modelagens.	33
Tabela 3 – Parâmetros utilizados na discretização.	34
Tabela 4 – Deflexão máxima e reações: engastado–livre.	37
Tabela 5 – Deflexão máxima e reações: bi–engastado.	38
Tabela 6 – Deflexão máxima e reações: engastado–apoiado.	39
Tabela 7 – Deflexão máxima e reações: bi–apoiado.	39
Tabela 8 – Cinco primeiras frequências naturais: engastado–livre.	40
Tabela 9 – Cinco primeiras frequências naturais: bi–apoiado.	41
Tabela 10 – Cinco primeiras frequências naturais: engastado–apoiado.	42
Tabela 11 – Cinco primeiras frequências naturais: bi–apoiado.	43

LISTA DE SÍMBOLOS

$\bar{i}$	Referencial Global
x	Coordenada cartesiana
y	Coordenada cartesiana
z	Coordenada cartesiana
v	Deslocamento em y
$\bar{v}$	Deslocamento vertical
u	Deslocamento em x
$\bar{u}$	Deslocamento axial
w	Deslocamento em z
θ	Ângulo de rotação
ϵ	Campo de deformação longitudinal
γ	Campo de deformação transversal
σ	Tensão axial
E	Módulo de elasticidade
N	Força axial
M	Momento fletor
V	Força cortante
A	Área da seção transversal
M_s	Momento estático
J_2	Momento de inércia de área
p	Força externa por unidade de comprimento
ρ	Massa específica
I	Momento de inércia de área
ϕ	Modo de vibrar
Y	Amplitude em função do tempo

ω	Frequência Natural
β	Constante para o cálculo da frequência natural analítica
v_i	Deslocamento vertical nodal
θ_i	Rotação nodal
δ	Deslocamento generalizado nodal
a_i	Constantes associadas ao deslocamento generalizado nodal
$\mathbf{Z}$	Matriz auxiliar
$\mathbf{N}$	Matriz função de forma
U	Energia de deformação
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
T	Energia cinética
ν	Vetor de velocidades
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
Π	Energia potencial total
W_P	Energia potencial das forças externas
$\mathbf{F}$	Vetor de forças generalizado
$\mathcal{L}$	Lagrangiano
q_j	Coordenada generalizada
$\widetilde{\mathbf{M}}$	Matriz de massa de ordem reduzida
$\widetilde{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez de ordem reduzida
Φ	Autovetor
λ	Autovalor

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	OBJETIVOS	10
1.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	10
2	REVISÃO DA LITERATURA	11
2.1	UMA BREVE HISTÓRIA DO MEF	11
2.2	O MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI	12
2.3	A VIGA EULER-BERNOULLI EM FLEXÃO PURA	17
2.3.1	Método analítico	17
2.3.1.1	<i>Análise estática</i>	17
2.3.1.2	<i>Análise dinâmica</i>	18
2.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À VIGA EULER-BERNOULLI SOB FLEXÃO PURA	21
2.4.1	Matrizes de rigidez e de massa	21
2.4.2	Análise estática	28
2.4.3	Análise dinâmica	31
3	MATERIAIS E MÉTODOS	33
3.1	PARÂMETROS GERAIS	33
3.2	MÉTODO ANALÍTICO	34
3.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	34
3.3.1	Algoritmo próprio	34
3.3.2	Programa Salome–Meca	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	37
4.1	ANÁLISE ESTÁTICA	37
4.2	ANÁLISE DINÂMICA	39
5	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	45

INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico tem sido crucial para a análise estrutural de componentes mecânicos. O desenvolvimento de ferramentas computacionais com interfaces gráficas intuitivas, capazes de manipular grandes quantidades de dados, trouxe facilidades aos projetistas. No entanto, muitos desses profissionais estão concentrados apenas na utilização do *software* e na interpretação dos resultados obtidos, deixando de lado a compreensão da base conceitual por trás das formulações e metodologias aplicadas nas análises.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) se consolidou como uma técnica amplamente utilizada nas análises estruturais. Ele consiste em dividir a estrutura em elementos de dimensões finitas, para que sejam analisados individualmente. Cada elemento é então definido por um conjunto de equações que descrevem o comportamento mecânico do material nessa região. No final, monta-se o sistema de equações global para que seja resolvido numericamente e obtidas as respostas aproximadas da estrutura toda.

Na maioria dos casos, a falta de compreensão dos fundamentos dessa abordagem pode ocasionar erros na interpretação dos resultados, comprometendo o projeto final. Desta forma, é importante que os projetistas sejam capazes de entender as teorias e conceitos que embasam esse método, para que possam aplicá-los de maneira correta e apropriada, além de serem aptos a identificar falhas e limitações dos *softwares* utilizados, permitindo uma análise mais crítica e precisa dos resultados obtidos.

Neste contexto, as vigas se configuram como elementos estruturais amplamente utilizados em diversos tipos de construções, civis e mecânicas, e cujo comportamento é facilmente analisado via Método dos Elementos Finitos. A teoria de viga de Euler-Bernoulli é uma abordagem clássica para a análise dessas estruturas, devido a sua simplicidade.

Diante disso, este trabalho tem como objetivo geral analisar estática e dinamicamente vigas sujeitas a diferentes restrições de movimentos, aplicando o Método dos Elementos Finitos e a teoria de viga de Euler-Bernoulli. Como objetivos específicos, o trabalho visa expor os conceitos básicos por trás dos *softwares* de elementos finitos, além de desenvolver um código computacional em linguagem *Python* para aplicá-los. A análise estática pretende obter os valores de deflexão e forças de reações, enquanto a análise dinâmica procura obter os valores de frequências naturais e modos de vibrar. Os resultados obtidos também foram comparados com os fornecidos pelo programa Salome-Meca 2021.

1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal analisar estática e dinamicamente vigas sujeitas a diversas condições de contorno, aplicando os conceitos do Método dos Elementos Finitos e a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os resultados obtidos serão comparados com os fornecidos pelo *software* de elementos finitos Salome-Meca 2021 e também comparados com os valores analíticos, obtidos ao considerar-se a viga como um corpo contínuo. De forma mais detalhada, pode-se descrever:

- a) Desenvolver o modelo matemático de quatro vigas, cada qual sujeita a diferentes restrições de movimentos;
- b) Desenvolver um algoritmo em linguagem de programação *Python* para solução numérica do conjunto de equações.
- c) Obtenção das forças de reação; dos deslocamentos nodais; das frequências naturais; e respectivos modos de vibrar de cada modelo;
- d) Comparar os resultados obtidos pelo algoritmo com os resultados obtidos pelo *software* Salome-Meca 2021;
- e) Comparar os resultados obtidos pelo algoritmo com os resultados analíticos.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO MEF

De acordo com Fish e Belytschko (2009), o Método dos Elementos Finitos (MEF) teve suas ideias básicas originadas a partir dos avanços na análise estrutural de aeronaves. Para Chandrupatla e Belegundu (2014), o método originou-se em 1941, com a publicação do artigo “*Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method*” escrito por Hrenikoff (1941 apud CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 2014), onde é descrito um método capaz de solucionar problemas de elasticidade substituindo o corpo contínuo por uma estrutura de barras.

Posteriormente, em 1943, Courant (1943 apud FISH; BELYTSCHKO, 2009) escreveu um artigo no qual utilizava interpolação polinomial por partes sobre sub-regiões triangulares para resolver problemas de vibração .

Diversos autores defendem que o método foi inventado, na verdade, por Turner et al. (1956 apud FISH; BELYTSCHKO, 2009) na década de 50. Eles descreveram as formulações e os procedimentos para a montagem da matriz de elementos, mas sem utilizarem o termo “elemento finito”. O termo só foi introduzido mais tarde, por Clough (1960 apud CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 2014).

Ao longo do tempo, o método passou por constante evolução. Foram adicionados novos conceitos, como os elementos isoparamétricos e os métodos de análise não-linear. O MEF teve sua popularidade aumentada com a disponibilidade dos computadores. Diversos programas, comerciais e de uso livre, são utilizados em projetos de engenharia, em pesquisas e em aprendizados.

A faixa de aplicação do Método dos Elementos Finitos é ampla e bastante variada. Ela vai desde a aplicação na indústria aeroespacial até na medicina. Abaixo, são listados alguns exemplos de aplicações (FISH; BELYTSCHKO, 2009):

- a) Análises de tensões, frequências naturais e térmica de peças industriais e de construções, tais como vasos de pressão, motores aeroespaciais, dispositivos elétricos, prédios, torres de transmissão, etc;
- b) Análise de impacto em carros, trens e aeronaves;
- c) Análise de escoamento de líquidos e gases;
- d) Análise eletromagnética de antenas, transistores e componentes de aeronaves;
- e) Análise de aerodinâmica de carros de passeio e de corrida;
- f) Análise de procedimentos cirúrgicos, como reconstrução maxilar, cirurgias plásticas e diversas outras;

Em Fish e Belytschko (2009), é possível ver a evolução detalhada do método, bem algumas das suas diversas aplicações.

2.2 O MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

As vigas são estruturas que possuem uma de suas dimensões muito maior do que as outras duas, e são projetadas para resistir principalmente a cargas transversais. O eixo da viga é definido ao longo da dimensão mais longa, e assume-se que uma seção transversal normal a esse eixo varia suavemente ao longo do comprimento (BAUCHAU; CRAIG, 2009).

Entre as diversas teorias de vigas desenvolvidas ao longo dos séculos, a mais simples e comumente utilizada foi descrita pela primeira vez por Jacob Bernoulli (1654-1705) e mais aprofundada por Leonard Euler (1707-1783) no século XVIII, e é conhecida como teoria de viga de Euler-Bernoulli. Jacob foi o primeiro a propor que a curvatura da deflexão de um viga elástica em qualquer ponto é proporcional ao momento de flexão naquele ponto, teoria a qual foi aceita por Euler na investigação das curvas elásticas de vigas e colunas (TIMOSHENKO, 1953).

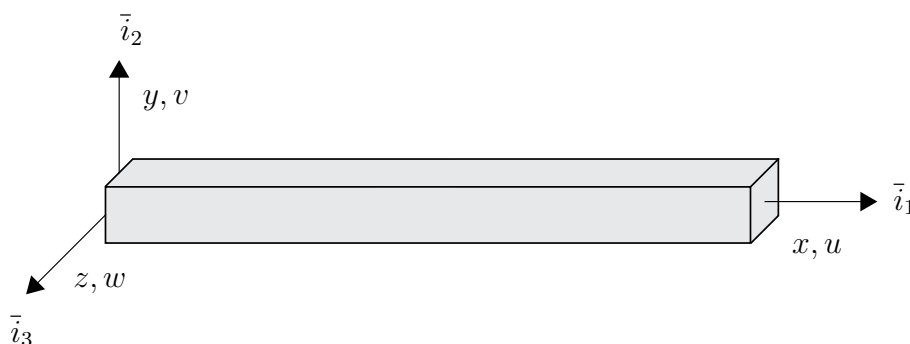
Também conhecida como teoria clássica da viga ou simplesmente teoria de viga, o modelo de Euler-Bernoulli é bastante utilizado porque além de simples, fornece aproximações razoáveis de engenharia para diversos problemas. No entanto, o modelo tende a superestimar ligeiramente as frequências naturais, sendo melhor a previsão quanto mais esbelta for a viga (HAN; BENAROYA; WEI, 1999).

A teoria da viga de Euler-Bernoulli é fundamentada seguindo as três seguintes suposições (BAUCHAU; CRAIG, 2009):

- a) A seção transversal da viga é infinitamente rígida em seu próprio plano, i.e., não ocorrem deformações no plano da seção transversal ;
- b) A seção transversal permanece plana após a deformação;
- c) A seção transversal permanece normal ao eixo da viga deformado.

Para o desenvolvimento do modelo, considere a viga representada na Figura 1, com seus devidos referenciais globais e locais. Note que $\bar{i}_1$ está ao longo do eixo da viga, enquanto $\bar{i}_2$ e $\bar{i}_3$ definem o plano da seção transversal.

Figura 1 – Modelo de viga com seus referenciais globais e locais,



A fim de simplificar a modelagem, assume-se que o plano $(\bar{i}_1, \bar{i}_2)$ é um plano de simetria da estrutura e as cargas estão todas aplicadas nesse mesmo plano. Assim, a resposta da viga está inteiramente contida naquele plano.

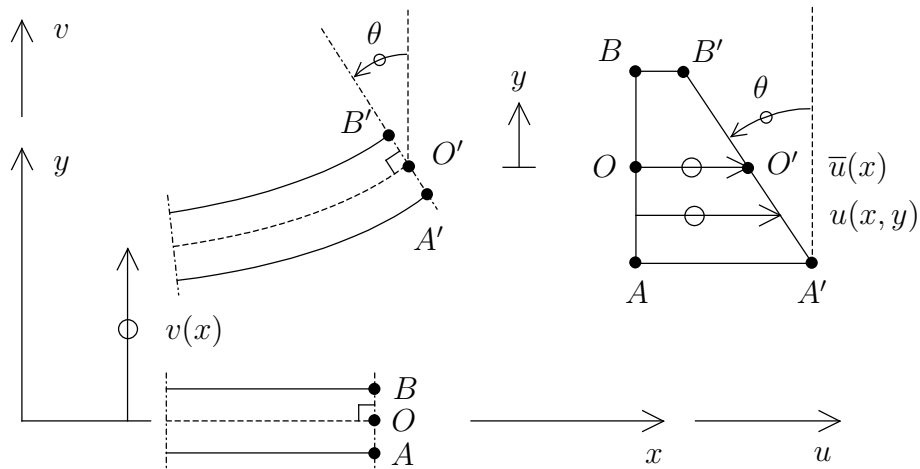
Desta forma, sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ deslocamentos de um ponto arbitrário da viga ao longo das direções $\bar{i}_1$ e $\bar{i}_2$, respectivamente. A primeira suposição (a) do modelo de Euler-Bernoulli implica que o campo de deslocamento no plano da seção transversal consiste em apenas uma translação de corpo rígido, i.e.

$$v(x, y) = \bar{v}(x) \quad (2.1)$$

A Figura 2 ilustra a segunda e a terceira suposição da teoria clássica da viga. A segunda hipótese (b) implica que o campo de deslocamento axial consiste apenas em uma translação $\bar{u}(x)$ e uma rotação de corpo rígido $\theta(x)$, i.e.

$$u(x, y) = \bar{u}(x) - y \theta(x) \quad (2.2)$$

Figura 2 – Segunda suposição do modelo de Euler-Bernoulli,



Fonte: Adaptado de Azevedo (2003)

A terceira hipótese do modelo de Euler-Bernoulli afirma que a seção transversal permanece normal ao eixo da viga deformado, o que implica na igualdade entre a inclinação da viga e a rotação da seção, i.e.

$$\theta(x) = \frac{d\bar{v}}{dx} \quad (2.3)$$

Substituindo a relação 2.3 na Equação 2.2, o campo de deslocamento do modelo de viga de Euler-Bernoulli pode ser escrito como

$$u(x, y) = \bar{u}(x) - y \frac{d\bar{v}}{dx} \quad (2.4a)$$

$$v(x, y) = \bar{v}(x) \quad (2.4b)$$

Consequentemente, derivando as Equações 2.4, o campo de deformação da viga é definido por

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\bar{u}}{dx} - y \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} \quad (2.5a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.5b)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{d\bar{v}}{dx} + \frac{d\bar{v}}{dx} = 0 \quad (2.5c)$$

A hipótese de que a seção transversal da viga permanece plana após a deformação resulta na distribuição linear da deformação axial, ϵ_1 , como indicado pela Equação 2.5a. Por outro lado, a suposição de que a seção transversal de uma viga permanece infinitamente rígida em seu próprio plano implica o desaparecimento do campo de deformação na direção do plano, ϵ_2 , como visto na Equação 2.5b. De maneira análoga, a suposição de que a seção transversal permanece normal ao eixo deformado da viga implica que a deformação de cisalhamento transversal, γ_{12} , é nula, como visto na Equação 2.5c.

Supondo que o material da viga é linearmente elástico, isotrópico e obedece a lei de Hooke, admite-se que as tensões atuantes no plano da seção transversal, σ_2 e σ_3 , permanecem bem inferiores à tensão axial, σ_1 . Consequentemente, os componentes de tensão transversal são assumidos como nulos e a lei de Hooke é reduzida a

$$\sigma_1(x, y, z) = E \epsilon_1(x) \quad (2.6)$$

onde E é o módulo de Young (módulo de elasticidade do material).

Substituindo a Equação 2.5a na Equação 2.6, resulta-se em

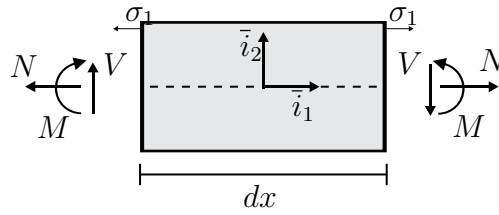
$$\sigma_1(x, y, z) = E \frac{d\bar{u}}{dx} - E y \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} \quad (2.7)$$

Nota-se que há uma inconsistência na teoria de Euler-Bernoulli ao assumir que tanto as deformações como as tensões no plano da seção transversal são nulas. Pela lei generalizada de Hooke, ambas componentes não poderiam desaparecer simultaneamente, pois implicaria em desprezar o efeito de Poisson. Entretanto, como esse efeito é muito pequeno, desprezar esses componentes não causa erros significativo para a maioria dos casos (BAUCHAU; CRAIG, 2009).

O campo de tensão tridimensional da viga pode ser descrito em termos de tensões resultantes. Essas tensões são forças equivalentes que representam o efeito integral das tensões internas atuantes na seção transversal da viga.

A Figura 3 ilustra três forças resultantes: a força axial $N(x)$, que atua ao longo do eixo da viga ($\bar{i}_1$); o momento fletor $M(x)$, atuante no eixo $\bar{i}_3$; e a força cortante $V(x)$, que atua na direção $\bar{i}_2$.

Figura 3 – Convenção de sinais positivos das forças resultantes.



Fonte: próprio autor.

A força $N(x)$ e o momento fletor $M(x)$ são definidos pelas expressões

$$N(x) = \int_A \sigma_1(x, y, z) dA \quad (2.8)$$

$$M(x) = - \int_A y \sigma_1(x, y, z) dA \quad (2.9)$$

sendo A a área da seção transversal. Note que o sinal de menos na definição do momento fletor $M(x)$ é necessário para ter a equivalência de sinal positivo de acordo com a convenção estabelecida na Figura 3.

Substituindo a Equação 2.7 na Equação 2.8, tem-se

$$N(x) = \int_A E \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - y \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} \right) dA = EA \frac{d\bar{u}}{dx} - E \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} \int_A y dA \quad (2.10)$$

De forma semelhante, a Equação 2.9 pode ser escrita como

$$M(x) = - \int_A y E \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - y \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} \right) dA = -E \frac{d\bar{u}}{dx} \int_A y dA + E \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} \int_A y^2 dA \quad (2.11)$$

O momento estático M_{s2} e o momento de inércia de área J_2 são definidos como sendo

$$M_{s_2} = \int_A y \, dA \quad (2.12)$$

$$J_2 = \int_A y^2 \, dA \quad (2.13)$$

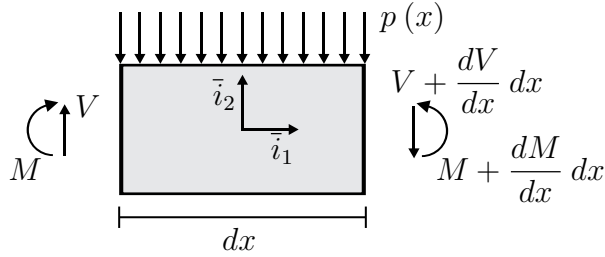
Uma vez que os eixos $\bar{i}_2$ e $\bar{i}_3$ passam pelo centroide da viga, o momento estático é nulo, i.e., $\int_A y \, dA = 0$. Desta forma, as Equações 2.10 e 2.11 se reduzem a

$$N(x) = EA \frac{d\bar{u}}{dx} \quad (2.14)$$

$$M(x) = EJ_2 \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} \quad (2.15)$$

A força cortante $V(x)$ é calculada considerando o equilíbrio de um segmento infinitesimal da viga, mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Equilíbrio de um volume infinitesimal da viga.



Fonte: próprio autor.

Considerando o equilíbrio de forças na direção $\bar{i}_2$ e de momentos na direção $\bar{i}_3$, tem-se

$$\sum F_y = 0 : \quad \frac{dV}{dx} + p(x) = 0 \quad (2.16)$$

$$\sum M_z = 0 : \quad \frac{dM}{dx} - V(x) = 0 \quad (2.17)$$

Substituindo a relação constitutiva 2.15 nas Equações 2.16 e 2.17, ambas se reduzem a

$$V(x) = EJ_2 \frac{d^3 \bar{v}}{dx^3} \quad (2.18)$$

2.3 A VIGA EULER-BERNOULLI EM FLEXÃO PURA

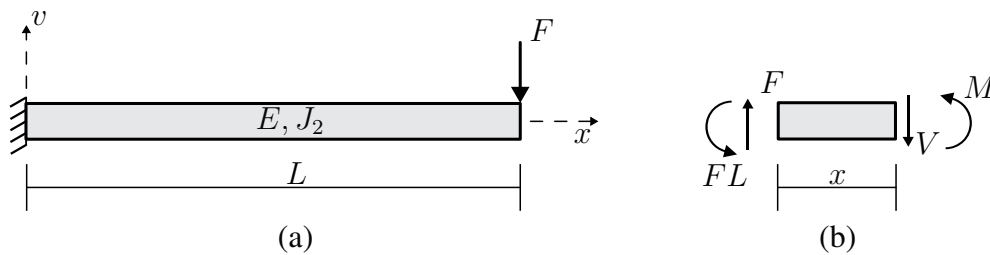
A seguir, são apresentadas duas modelagens distintas da viga Euler-Bernoulli. A primeira considera a viga como um corpo contínuo, enquanto a segunda a discretiza utilizando o método dos elementos finitos.

2.3.1 Método analítico

2.3.1.1 Análise estática

Considere a viga engastada apresentada na Figura 5 (a), cujo comprimento é L e módulo de elasticidade é E , ambos constantes, sujeita a uma força transversal pontual F na extremidade livre. A Figura 5 (b) ilustra uma seção dessa viga.

Figura 5 – Viga engastada em uma extremidade.



Fonte: próprio autor.

Do diagrama de corpo livre, segue que a equação da força cortante e do momento fletor são

$$V(x) = F \quad (2.19)$$

$$M(x) = Fx - FL \quad (2.20)$$

Substituindo a Equação 2.15 na Equação 2.20 e integrando em x , chega-se a equação da declividade da viga

$$EJ_2 \frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{Fx^2}{2} - FLx + C_1 \quad (2.21)$$

Integrando novamente em x , resulta-se na equação da deflexão da viga

$$EJ_2 \bar{v} = \frac{Fx^3}{6} - \frac{FLx^2}{2} + C_1x + C_2 \quad (2.22)$$

As constantes C_1 e C_2 são obtidas a partir das condições de contorno. Para o caso da viga engastada, as condições de contorno são $\frac{d\bar{v}}{dx}\big|_{x=0} = 0$ e $\bar{v}|_{x=0} = 0$. Substituindo essas condições em 2.21 e 2.22, chega-se a $C_1 = C_2 = 0$. Assim, as equações de declividade e deflexão da viga engastada-livre são respectivamente

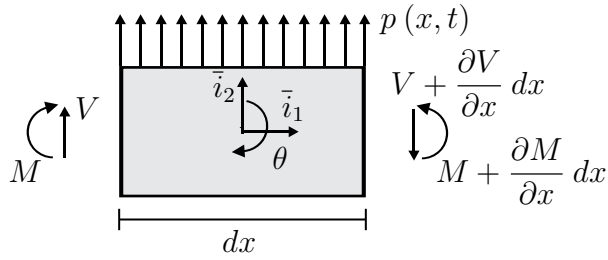
$$\theta(x) = \frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{F}{EJ_2} \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) \quad (2.23)$$

$$\bar{v}(x) = \frac{F}{EJ_2} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right) \quad (2.24)$$

2.3.1.2 Análise dinâmica

A fim de desenvolver a equação de movimento da viga Euler-Bernoulli em flexão pura, é considerado um segmento infinitesimal da viga, ilustrado na Figura 6. Note que, tanto o deslocamento transversal $\bar{v}(x, t)$ quanto as forças resultantes agora também são uma função do tempo.

Figura 6 – Segmento infinitesimal de viga sob ação de uma força dinâmica.



Fonte: próprio autor.

Aplicando-se a segunda lei de Newton no elemento da Figura 6, tem-se

$$\rho A dx \frac{\partial^2 \bar{v}(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx + p(x, t) dx \quad (2.25)$$

$$\rho dx I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx - V(x, t) dx - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx^2 - p(x, t) \frac{dx^2}{2} \quad (2.26)$$

onde ρ é massa específica do material e I é o momento de inércia de massa, dado por $\int r^2 dm$, sendo r a distância até o eixo de rotação.

É possível reduzir as Equações 2.25 e 2.26, dividindo-as por dx e aplicando o limite com $dx \rightarrow 0$, resultando em

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{v}(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + p(x, t) \quad (2.27)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - V(x, t) \quad (2.28)$$

O termo $\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ geralmente é um efeito de segunda ordem, chamado de inércia rotacional. No modelo de viga Euler-Bernoulli ele é negligenciado. Assim, a Equação 2.28 é simplificada a

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação 2.29 em 2.27, tem-se

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{v}(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t) \quad (2.30)$$

E, finalmente, utilizando a Equação 2.15 em 2.30, resulta-se na equação governante da viga em flexão

$$E J_2 \frac{\partial^4 \bar{v}(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}(x, t)}{\partial t^2} - p(x, t) = 0 \quad (2.31)$$

Para o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibrar da viga em flexão, é considerado o caso em que a Equação 2.31 é homogênea, i.e., $p(x, t) = 0$. A solução dessa equação é obtida utilizando o método de separação de variáveis. Para obtê-la, inicia-se dividindo a Eq. 2.31 por $E J_2$ e adotando a notação de prima e de ponto para indicar a derivada parcial em relação a x e t , respectivamente, o que resulta em

$$\bar{v}^{iv}(x, t) + \frac{\rho A}{E J_2} \ddot{\bar{v}}(x, t) = 0 \quad (2.32)$$

Supondo que a solução seja da forma

$$\bar{v}(x, t) = \phi(x)Y(t) \quad (2.33)$$

onde $\phi(x)$ é o modo de vibrar da viga e $Y(t)$ a amplitude. Assim, a Eq. 2.32 pode ser escrita como

$$\phi^{iv}(x)Y(t) + \frac{\rho A}{E J_2} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0 \quad (2.34)$$

Dividindo por $\phi(x)Y(t)$, a Eq. 2.34 pode ser separada em

$$\frac{E J_2}{\rho A} \frac{\phi^{iv}(x)}{\phi(x)} = -\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = \text{const.} = \omega^2 \quad (2.35)$$

sendo a constante de separação igual a ω^2 . A Eq. 2.35 produz duas equações diferenciais ordinárias

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad (2.36)$$

$$\phi^{iv}(x) - \frac{\omega^2 \rho A}{E J_2} \phi(x) = 0 \quad (2.37)$$

A Eq. 2.36 tem a forma de uma vibração harmônica simples não-amortecida, cuja solução é (CLOUGH; PENZIEN, 2003)

$$Y(t) = Y(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \sin(\omega t) \quad (2.38)$$

onde ω é a frequência natural do sistema, $Y(0)$ é o deslocamento inicial e $\dot{Y}(0)$ a velocidade inicial.

Assumindo que a Eq. 2.37 tem solução na forma e^{sx} , tem-se a seguinte equação característica

$$s^4 - \frac{\rho A \omega^2}{E J_2} = 0 \quad (2.39)$$

cujas raízes são

$$s_{1,2} = \pm \beta \quad s_{3,4} = \pm j\beta \quad \left(\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{E J_2}} \right) \quad (2.40)$$

Portanto, para cada valor de β há uma solução na forma

$$\phi(x) = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x) + A_3 \cosh(\beta x) + A_4 \sinh(\beta x) \quad (2.41)$$

A frequência natural ω associada a cada valor de β pode ser determinada a partir das condições de contorno do sistema. As condições de contorno mais usuais são

$$\text{Livre:} \quad M(x) = E J_2 \phi''(x) = 0 \quad V(x) = E J_2 \phi'''(x) = 0 \quad (2.42)$$

$$\text{Engastada:} \quad \phi(x) = 0 \quad \phi'(x) = 0 \quad (2.43)$$

$$\text{Apoiada:} \quad \phi(x) = 0 \quad M(x) = E J_2 \phi''(x) = 0 \quad (2.44)$$

Lalanne, Berther e Der Hagopian (1984) demonstram que as frequências naturais da viga em flexão têm forma

$$\omega_n = \frac{(\beta_n L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E J_2}{\rho A}} \quad (2.45)$$

sendo $(\beta_n L)^2$ valores obtidos a partir das condições de contorno apresentadas nas Eqs. 2.42–2.44. A Tabela 1 apresenta os cinco menores valores de $(\beta_n L)^2$ para diferentes restrições.

Tabela 1 – Valores de $(\beta_n L)^2$ para diferentes condições de contorno.

Condição de contorno	$(\beta_1 L)^2$	$(\beta_2 L)^2$	$(\beta_3 L)^2$	$(\beta_4 L)^2$	$(\beta_5 L)^2$
Engastada – livre	3,516	22,03	61,69	120,9	199,8
Engastada – engastada	22,37	61,67	120,9	199,8	298,5
Engastada – apoiada	15,41	49,96	104,2	178,2	272,0
Apoiada – apoiada	9,869	39,47	88,82	157,9	246,7

Fonte: retirado de Lalanne, Berther e Der Hagopian (1984).

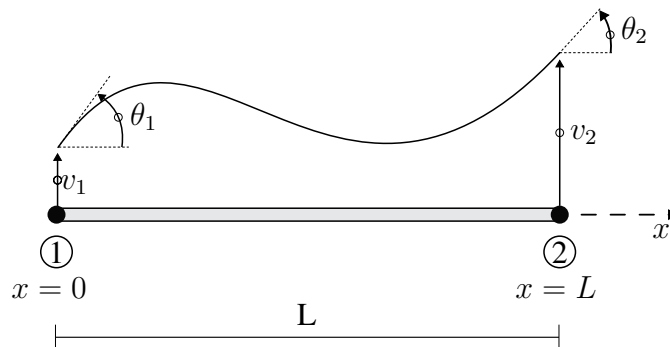
2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À VIGA EULER-BERNOULLI SOB FLEXÃO PURA

A partir deste ponto, será desenvolvida a formulação de elementos finitos para o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Inicialmente, serão calculadas as matrizes de rigidez e de massa do elemento, para posteriormente efetuar-se as análises.

2.4.1 Matrizes de rigidez e de massa

A Figura 7 representa um elemento finito de viga com dois nós, comprimento L e dois graus de liberdade por nó – sendo um deslocamento em y (deflexão) e uma rotação em z (declividade).

Figura 7 – Elemento de viga com 2 nós.



Fonte: Próprio autor.

Seja δ_e o vetor de deslocamentos nodais generalizados

$$\delta_e = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \quad (2.46)$$

onde θ é dado pela Equação 2.3. Como há quatro deslocamentos nodais, é conveniente assumir que a função de deslocamento $v(x)$ é um polinômio de grau 3, da forma

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (2.47)$$

e, por consequência, a função de declividade é

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (2.48)$$

onde a_i , $i = 1, \dots, 4$ são constantes obtidas a partir dos valores de v e θ nos dois pontos nodais. Na forma matricial, as funções podem ser escritas, respectivamente, como

$$v(x) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

ou ainda

$$v(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{X} \quad (2.51)$$

$$\theta(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{X}' \quad (2.52)$$

sendo

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Avaliando os valores de $v(x)$ e $\theta(x)$ nos pontos nodais ($x = 0$ e $x = L$), pode-se escrever

$$v_1 = v(0) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\theta_1 = \theta(0) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$v_2 = v(L) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ L^2 \\ L^3 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\theta_2 = \theta(L) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2L \\ 3L^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

e agrupando numa única expressão matricial, resulta-se em

$$\begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & L & 1 \\ 0 & 0 & L^2 & 2L \\ 0 & 0 & L^3 & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

ou

$$\delta_e^T = \mathbf{a}^T \mathbf{Z} \quad (2.59)$$

onde $\mathbf{Z}$ é definido por

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & L & 1 \\ 0 & 0 & L^2 & 2L \\ 0 & 0 & L^3 & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Multiplicando, à direita, ambos os membros da Equação 2.59 por $\mathbf{Z}^{-1}$ resulta-se em

$$\mathbf{a}^T = \boldsymbol{\delta}_e^T \mathbf{Z}^{-1} \quad (2.61)$$

sendo $\mathbf{Z}^{-1}$ a matriz inversa de $\mathbf{Z}$, dada por

$$\mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{L} & \frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Agora, substituindo a Eq. 2.61 na Eq. 2.51, obtém-se

$$v(x) = \boldsymbol{\delta}_e^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X} \quad (2.63)$$

e aplicando a transposta nos dois lados da Equação 2.63, e lembrando que a transposta de um escalar é o próprio escalar, pode-se escrever

$$v(x) = (\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X})^T \boldsymbol{\delta}_e \quad (2.64)$$

ou ainda

$$v(x) = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_e \quad (2.65)$$

onde $\mathbf{N}$ é conhecida como matriz função de forma, dada por

$$\mathbf{N} = (\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X})^T = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

sendo N_i , $i = 1, \dots, 4$ as funções de forma. Para o elemento da Figura 7, as funções de forma são

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (2.67)$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.68)$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (2.69)$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.70)$$

Desta forma, a Equação 2.47 se torna

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez do elemento, é necessário aplicar-se o conceito de energia de deformação, U , cuja fórmula, considerando um material elástico linear, é dada pela expressão (LALANNE; BERTHER; DER HAGOPIAN, 1984)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.72)$$

No caso do elemento de viga Euler-Bernoulli representado na Figura 7, a equação da energia de deformação passa a ser

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \epsilon_1 \sigma_1 dA dx \quad (2.73)$$

Como a viga está em flexão pura, são considerados apenas os deslocamentos laterais $v(x)$, ou seja, $\bar{u} = 0$. Desta forma, a Equação 2.5a se reduz a

$$\epsilon_1 = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2.74)$$

Substituindo-se a Eq. 2.74 na Eq. 2.6 e utilizando o resultado na Eq. 2.73, tem-se

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E y^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dA dx \quad (2.75)$$

Como v é independente de y e de z (suposição (a) da teoria de Euler-Bernoulli), e o módulo de elasticidade E é constante por todo o domínio, a energia de deformação do elemento é dada por

$$U_e = \frac{1}{2} E J_2 \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.76)$$

onde a derivada segunda da Equação 2.65 em relação a x é

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \mathbf{N}'' \boldsymbol{\delta}_e \quad (2.77)$$

Portanto,

$$U_e = \frac{1}{2} E J_2 \int_0^L (\mathbf{N}'' \boldsymbol{\delta}_e)^T \mathbf{N}'' \boldsymbol{\delta}_e dx \quad (2.78)$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_e^T \left[E J_2 \int_0^L \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' dx \right] \boldsymbol{\delta}_e \quad (2.79)$$

ou ainda

$$U_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_e^T \mathbf{k} \boldsymbol{\delta}_e \quad (2.80)$$

onde

$$\mathbf{k} = E J_2 \int_0^L \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' dx \quad (2.81)$$

A derivada segunda da matriz de forma $\mathbf{N}$ em relação a x é obtida derivando as funções de forma N_i , $i = 1, \dots, 4$ dadas pelas Eqs. 2.67 a 2.70, i.e.

$$\mathbf{N}'' = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Utilizando esse resultado na Equação 2.81, tem-se que

$$\mathbf{k} = EJ_2 \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} dx \quad (2.83)$$

e, portanto, a matriz de rigidez $\mathbf{k}$ da viga Euler-Bernoulli sujeita a flexão pura é

$$\mathbf{k} = \frac{EJ_2}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

De forma análoga, é possível calcular a matriz de massa do elemento aplicando-se o conceito de energia cinética, T , cuja forma integral para um material isotrópico é dada pela expressão geral (LALANNE; BERTHER; DER HAGOPIAN, 1984)

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho |\boldsymbol{\nu}|^2 dV \quad (2.85)$$

onde $\boldsymbol{\nu}$ é o vetor de velocidades do sistema, que no caso do elemento de viga estudado é

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\delta}}_e \quad (2.86)$$

Substituindo-se essa relação na Eq. 2.86, chega-se a

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\delta}}_e \right)^T \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\delta}}_e dA dx \quad (2.87)$$

que pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}_e^T \left[\int_0^L \int_A \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA dx \right] \dot{\boldsymbol{\delta}}_e \quad (2.88)$$

ou ainda

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}_e^T \mathbf{m} \dot{\boldsymbol{\delta}}_e \quad (2.89)$$

onde

$$\mathbf{m} = \int_0^L \int_A \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA dx \quad (2.90)$$

Desenvolvendo os cálculos integrais de maneira análoga ao que foi realizado anteriormente, conclui-se que a matriz de massa do elemento de viga Euler-Bernoulli é

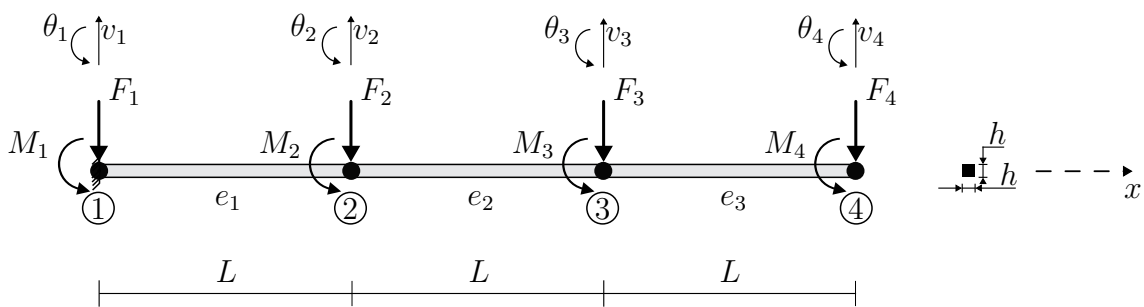
$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Em posse da matriz de rigidez $\mathbf{k}$ (Eq. 2.84) e da matriz de massa $\mathbf{m}$ (Eq. 2.91), é possível dar continuidade às análises estática e dinâmica.

2.4.2 Análise estática

Considere a viga engastada representada na Figura 8. A viga possui comprimento $3L$, módulo de elasticidade E , massa específica ρ e seção transversal quadrada de comprimento $h \times h$, ambos constantes, sujeita a uma força transversal pontual F na extremidade livre. A fim de se aplicar o Método dos Elementos Finitos, o sistema é discretizado em 3 elementos finitos de viga de comprimento L .

Figura 8 – Viga discretizada em 3 elementos.



Fonte: próprio autor.

A energia potencial total Π da viga apresentada acima é composta pela soma da energia de deformação U e a energia potencial das forças externas WP. Como o material da viga é linearmente elástico, a energia de deformação é dada pela Equação 2.72, enquanto a energia potencial das forças externas, considerando o sistema como conservativo, é dada por (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 2014)

$$\text{WP} = - \sum_m F_m v_m - \sum_k M_k v'_k \quad (2.92)$$

onde F_m é a carga concentrada no ponto m , M_k é o momento concentrado aplicado no ponto k , v_m é a deflexão no ponto m , e v'_m é a declividade no ponto k . Portanto, energia potencial total dessa viga pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} (\delta_{e_1}^T \mathbf{k} \delta_{e_1} + \delta_{e_2}^T \mathbf{k} \delta_{e_2} + \delta_{e_3}^T \mathbf{k} \delta_{e_3}) - F_2 v_2 - F_3 v_3 - F_4 v_4 + \dots \\ \dots - M_2 \theta_2 - M_3 \theta_3 - M_4 \theta_4 \end{aligned} \quad (2.93)$$

sendo δ_{e_i} o vetor de deslocamentos nodais generalizados do elemento $i = 1, \dots, 3$ e $\mathbf{k}$ a matriz de rigidez elementar dada pela Equação 2.84. A energia potencial total pode, então, ser escrita como

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{K} \delta - \delta^T \mathbf{F} \quad (2.94)$$

onde

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

e

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Pelo princípio da energia potencial mínima, o campo de deslocamento correspondente à condição de equilíbrio do sistema torna a energia potencial total um valor mínimo. Consequentemente, as equações de equilíbrio podem ser obtidas pela minimização de Π em relação a δ , levando em conta as condições de contorno. No caso da viga representada na Figura 8, as condições de contorno são $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Isso implica que a minimização de Π é

$$\frac{d\Pi}{d\delta_i} = 0 \quad i = 3, \dots, 8 \quad (2.97)$$

A fim de se estender a presente dedução para outras condições de contorno, será considerado que os graus de liberdade gdl_1 e gdl_2 possuem um deslocamento prescrito $\delta_1 = \alpha_1$ e $\delta_2 = \alpha_2$. Desta forma, a minimização de Π fornece

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\delta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_2 - K_{31}\alpha_1 - K_{32}\alpha_2 \\ M_2 - K_{41}\alpha_1 - K_{42}\alpha_2 \\ F_3 - K_{51}\alpha_1 - K_{52}\alpha_2 \\ M_3 - K_{61}\alpha_1 - K_{62}\alpha_2 \\ F_4 - K_{71}\alpha_1 - K_{72}\alpha_2 \\ M_4 - K_{81}\alpha_1 - K_{82}\alpha_2 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{F}}} \quad (2.98)$$

A matriz de rigidez reduzida $\widetilde{\mathbf{K}}$ é obtida simplesmente pela eliminação das linhas e colunas referentes aos gdl prescritos, isso é, gdl_1 e gdl_2 , a partir da matriz de rigidez original $\mathbf{K}$, enquanto os vetores $\widetilde{\delta}$ e $\widetilde{\mathbf{F}}$ são obtidos de forma análoga, com a eliminação das linhas correspondentes. O campo de deslocamento a ser determinado é, portanto:

$$\widetilde{\delta} = \widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \widetilde{\mathbf{F}} \quad (2.99)$$

Após a determinação dos deslocamentos, é possível calcular as forças de reação no engaste, F_R e M_R . Elas são obtidas a partir da equação de equilíbrio para o nó 1, como se segue

$$\begin{bmatrix} F_1 + F_R \\ M_1 + M_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Neste ponto, é importante ressaltar que todos os elementos da Equação 2.100, exceto F_A e M_A , são conhecidos: $v_2, v_3, v_4, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ já foram calculados; F_1 e M_1 são a força e momento aplicados no engaste, respectivamente; e α_1 e α_2 são prescritos. No caso do sistema da Figura 8, as condições de contorno $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ simplificam bastante os cálculos.

2.4.3 Análise dinâmica

As equações de movimento de um sistema físicos podem ser expressas em termos de coordenadas generalizadas por meio das equações de Lagrange (RAO, 2003). No caso de um sistema conservativo com n graus de liberdade, as equações de Lagrange são expressas como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.101)$$

onde q_j é a j -ésima coordenada generalizada e $\mathcal{L}$ é o Lagrangiano, dado por

$$\mathcal{L} = T - \Pi \quad (2.102)$$

sendo T e Π calculados pelas Eqs. 2.89 e 2.94, respectivamente. Para o sistema representado na Figura 8, o Lagrangiano é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}^T(t) \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{F}(t) \quad (2.103)$$

no qual $\mathbf{M}$ é a matriz de massa obtida pela superposição das três matrizes de massa elementares, de maneira análoga a que foi obtida a matriz $\mathbf{K}$ anteriormente. Considerando que o sistema está engastado em uma das extremidades, as coordenadas generalizadas referentes a esse nó são nulas, isto é, $v_1 = \theta_1 = \dot{v}_1 = \dot{\theta}_1 = 0$, e as equações de Lagrange se resumem a

$$\widetilde{\mathbf{M}} \ddot{\tilde{\boldsymbol{\delta}}}(t) + \widetilde{\mathbf{K}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) \quad (2.104)$$

em que as matrizes de massa $\widetilde{\mathbf{M}}$ e de rigidez $\widetilde{\mathbf{K}}$ são obtidas pela eliminação das linhas e colunas referentes aos gdl restritos nas matrizes originais; e os vetores de deslocamentos $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ e de esforços $\tilde{\mathbf{F}}$ são obtidos pela simples eliminação das linhas correspondentes dos vetores originais. Desta forma,

$$\begin{bmatrix} M_{33} & \cdots & M_{38} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{83} & \cdots & M_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{v}_4 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{33} & \cdots & K_{38} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{83} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Para o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibrar da viga, deve-se considerar o caso em que a Equação 2.104 é homogênea, i.e., $\tilde{\mathbf{F}}(t) = 0$. Assim, a equação do movimento se reduz a

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\tilde{\boldsymbol{\delta}}}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) = 0 \quad (2.106)$$

e propondo uma solução da forma

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) = \boldsymbol{\Phi} e^{j\omega t} \quad (2.107)$$

sendo ω a frequência natural associada ao modo de vibrar $\boldsymbol{\Phi}$, resulta-se no problema clássico de autovalor e autovetor

$$[\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}] \boldsymbol{\Phi} = 0 \quad (2.108)$$

que pode ser escrito como

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} = \lambda \boldsymbol{\Phi} \quad (2.109)$$

onde $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}$. Os autovalores são dados por $\lambda = \omega^2$, ou seja, estão relacionados diretamente às frequências naturais do sistema. Como as matrizes $\tilde{\mathbf{K}}$ e $\tilde{\mathbf{M}}$ são reais e simétricas, haverão n frequências naturais, sendo $n = \text{graus de liberdade total} - \text{graus de liberdade restritos}$. Os autovetores são dados por $\boldsymbol{\Phi}$ e representam os modos de vibrar. A solução deste problema pode ser obtida via métodos numéricos.¹

¹ Em *Python* a solução pode ser obtida utilizando a função `scipy.sparse.linalg.eigsh`, que calcula os autovalores e o autovetores de uma matriz quadrada simétrica esparsa.

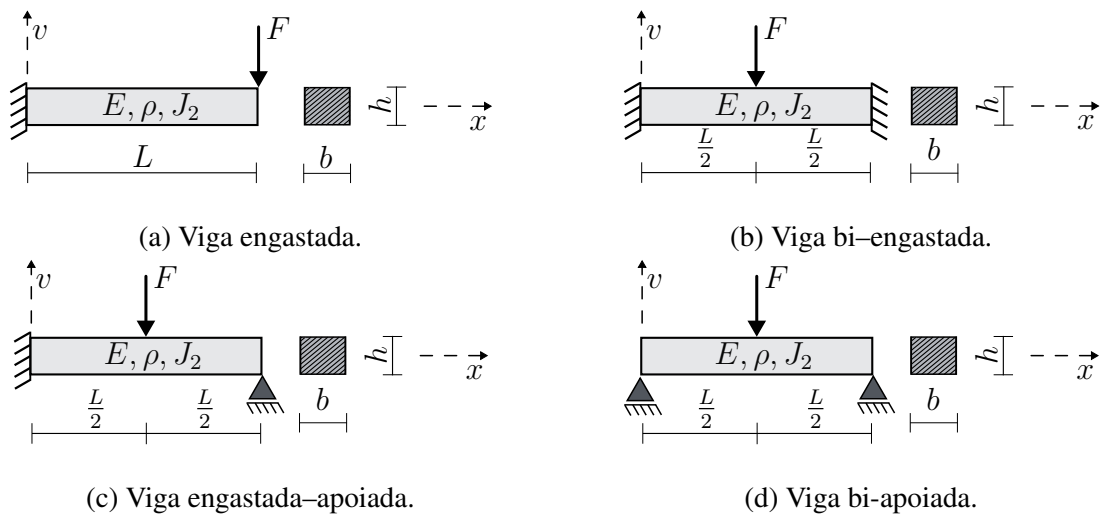
3 MATERIAIS E MÉTODOS

Inicialmente, foram desenvolvidos os modelos analíticos das quatro vigas estudadas – a partir da teoria de Euler-Bernoulli – de onde calcularam-se os valores de deflexão, reação nas extremidades, frequências naturais e modos de vibrar. Em sequência, as vigas foram discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos e realizada a comparação dos resultados. Por fim, uma nova comparação foi feita tomando como referência os valores obtidos pelo *software* Salome-Meca 2021.

3.1 PARÂMETROS GERAIS

A Figura 9 ilustra as quatro vigas analisadas neste trabalho, cada qual sujeita a diferentes restrições de movimento nas extremidades.

Figura 9 – Vigas analisadas.



A Tabela 2 contém os parâmetros dos modelos estudados. Foram consideradas as propriedades do AÇO INOXIDÁVEL 304 a 20 °C nas análises.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados nas modelagens.

Parâmetro	Valor	Unidade de Medida
F	$1 \cdot 10^2$	<i>lbf</i>
L	$2 \cdot 10^1$	<i>in</i>
h	0,7	<i>in</i>
b	1	<i>in</i>
E	$1 \cdot 10^7$	<i>psi</i>
ρ	0,284321	<i>lb/in³</i>
J_2	0,0833	<i>in⁴</i>

Fonte: próprio autor.

3.2 MÉTODO ANALÍTICO

No método analítico, inicialmente foram calculados os valores das forças de reações nas extremidades das vigas, por meio do diagrama de corpo livre. Em seguida, determinou-se a equação da deflexão para cada caso, seguindo os procedimentos indicados na subseção 2.3.1.1. Na análise dinâmica, determinaram-se as frequências naturais de cada viga utilizando a Equação 2.45 e a Tabela 1. Por fim, os modos de vibrar foram calculados utilizando a Equação 2.41 e as condições de contorno para cada caso.

3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.3.1 Algoritmo próprio

O algoritmo computacional para a resolução do problema via método dos elementos finitos foi todo desenvolvido em ambiente *Python*. O programa tem como dados de entrada as características físicas dos elementos, como número de nós por elemento, número de graus de liberdade por nó, módulo de elasticidade, massa específica, comprimento total da viga, altura e largura da seção transversal, e o número de elementos finitos. O processo inicia-se com a montagem das matrizes globais de rigidez e massa, e do vetor de forças aplicadas, seguida pela eliminação das colunas e/ou linhas correspondentes aos gdl restritos. Os deslocamentos nodais são então calculados utilizando a Equação 2.99, plotados num gráfico de *deslocamento x comprimento*, e por fim utilizados no cálculo das forças de reações por meio da Equação 2.100. Na análise dinâmica, resolve-se o problema de autovalor-autovetor prescrito pela Equação 2.109, obtendo-se os valores de frequências naturais e modos de vibrar. As cinco primeiras frequências naturais e os três primeiros modos de vibrar correspondentes são então comparados com os obtidos anteriormente pelo método analítico. A Figura 10 ilustra o fluxograma computacional do algoritmo e a Tabela 3 contém os parâmetros da discretização.

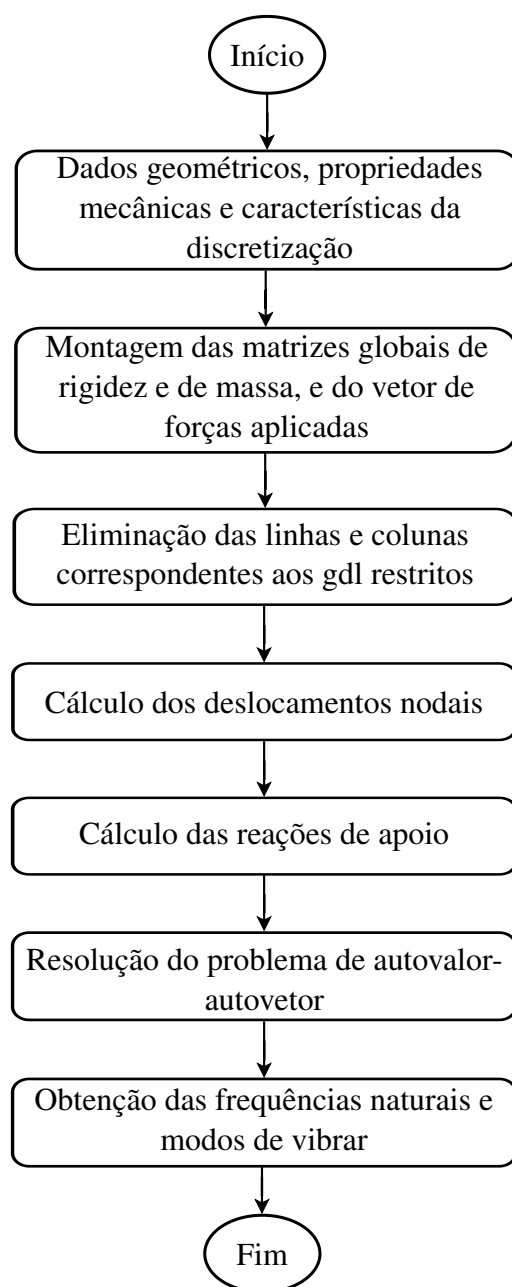
Tabela 3 – Parâmetros utilizados na discretização.

Parâmetro	Valor
nº de elementos finitos	100
nº de nós por elemento	2
nº de graus de liberdade (gdl) por nó	2
nº total de nós	101
nº total de gdl	202

Fonte: próprio autor.

É importante destacar que a biblioteca *numpy* foi utilizada para realizar os cálculos matriciais necessários, enquanto a biblioteca *scipy.sparse.linalg* foi empregada na resolução do problema de autovalor-autovetor. Além disso, os gráficos foram gerados utilizando a biblioteca *matplotlib.pyplot*.

Figura 10 – Fluxograma do algoritmo MEF

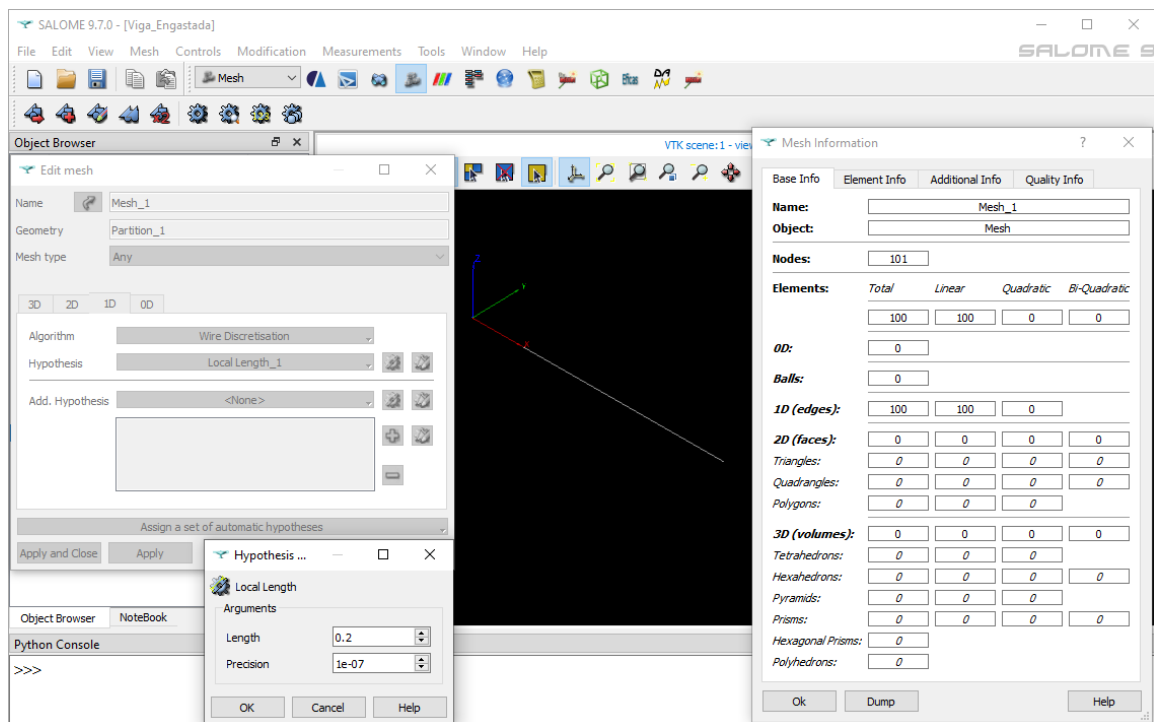


Fonte: próprio autor.

3.3.2 Programa Salome–Meca

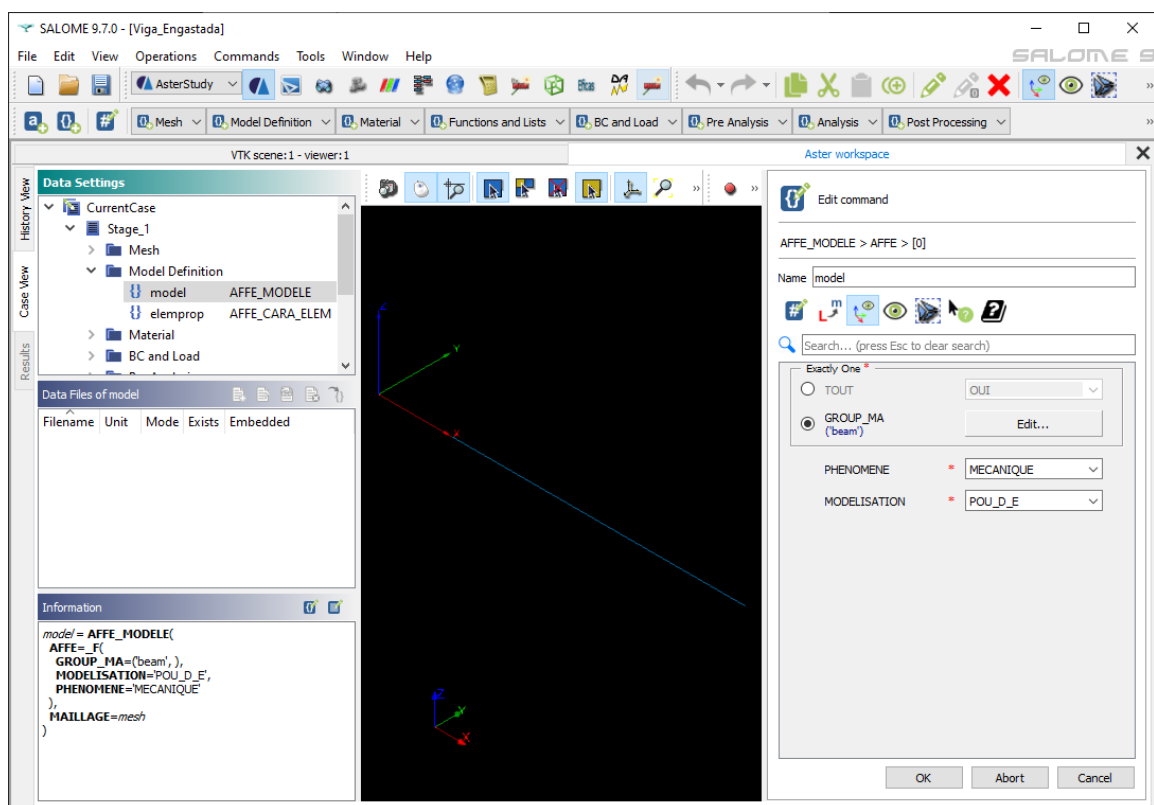
A fim de comparação de resultados, as análises foram simuladas no *software* de código aberto Salome-Meca, versão de 2021 para *Windows*. A malha foi gerada a partir do algoritmo *Wire Discretisation* e da hipótese *Local Length*, resultando em 100 elementos e 101 nós. A modelagem utilizada foi a *POU_D_E*, que assume as hipóteses da teoria de Euler–Bernoulli. As Figuras 11 e 12 ilustram as configurações utilizadas. Como resultado, obteve-se o campo de deslocamento da viga, assim como as nove primeiras frequências naturais e seus respectivos modos de vibrar. Os resultados foram então comparados com os valores obtidos anteriormente.

Figura 11 – Malha utilizada no programa Salome-Meca



Fonte: próprio autor.

Figura 12 – Modelagem utilizada no programa Salome-Meca



Fonte: próprio autor.

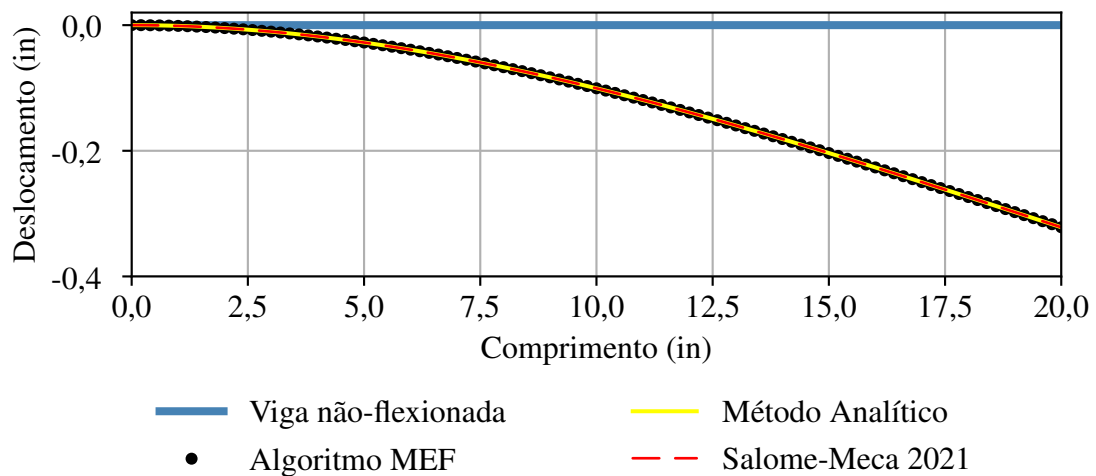
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo reúne os resultados das análises estática e dinâmica dos casos A, B, C e D, segundo a teoria de Euler–Bernoulli.

4.1 ANÁLISE ESTÁTICA

A seguir, é apresentado o gráficos de *deslocamento* $\times$ *comprimento* para cada um dos casos estudados, seguido por uma tabela contendo o valor de deflexão máxima e das forças reativas. A Figura 13 e a Tabela 4 referem-se ao caso A, onde viga é engastada em uma das suas extremidades; a Figura 14 e a Tabela 5 contêm os resultados do caso B, em que a viga é engastada em ambas extremidades; A Figura 15 e a Tabela 6 representam o caso C, onde viga é engastada em uma das suas extremidades e apoiada na outra; Por fim, a Figura 16 e a Tabela 7 referem-se ao caso D, onde viga é apoiada em ambas extremidades.

Figura 13 – Gráfico de *deflexão* $\times$ *comprimento*: engastado–livre.



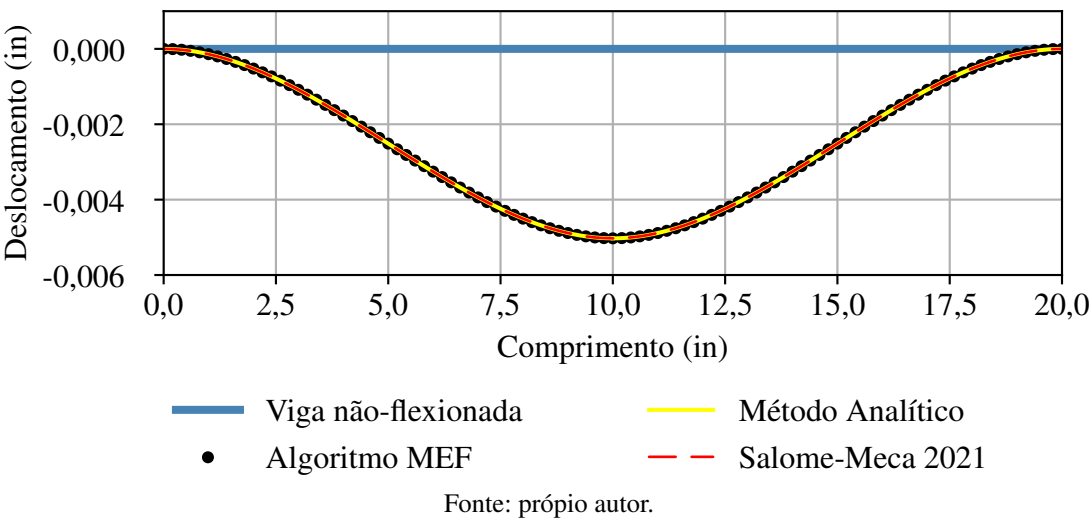
Fonte: próprio autor.

Tabela 4 – Deflexão máxima e reações: engastado–livre.

Reação	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
y_{MAX}	0,32	0,32	0,32	<i>in</i>
Fr_A	100,00	100,00	100,00	<i>lbf</i>
Mr_A	2000,00	2000,00	2000,00	<i>lbf·in</i>

Fonte: próprio autor.

Figura 14 – Gráfico de *deflexão* $\times$ *comprimento*: bi-engastado.



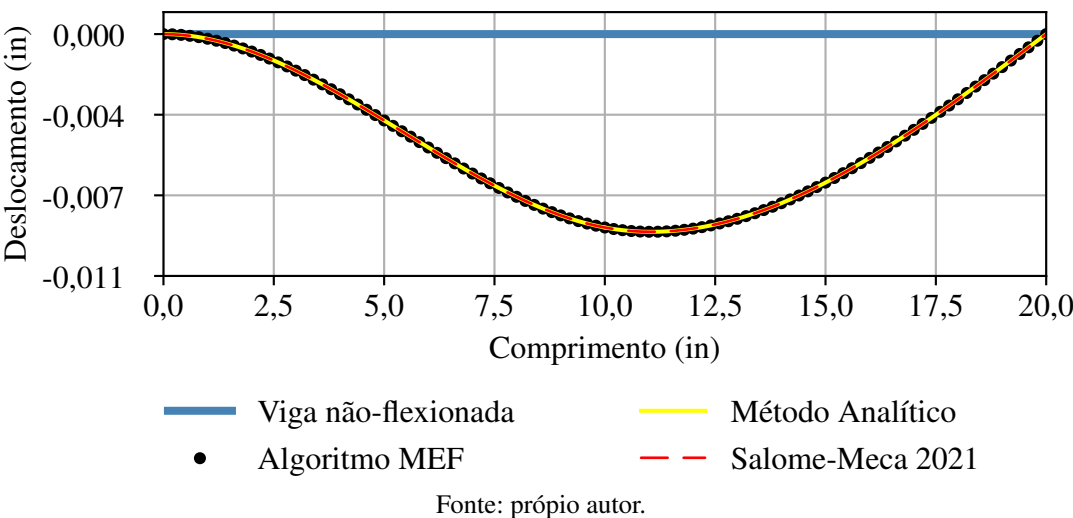
Fonte: próprio autor.

Tabela 5 – Deflexão máxima e reações: bi-engastado.

Reação	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
y_{MAX}	0,005	0,005	0,005	<i>in</i>
Fr_A	50,000	50,000	50,000	<i>lbf</i>
Mr_A	250,000	250,000	250,000	<i>lbf·in</i>
Fr_B	50,000	50,000	50,000	<i>lbf</i>
Mr_B	-250,000	-250,000	-250,000	<i>lbf·in</i>

Fonte: próprio autor.

Figura 15 – Gráfico de *deflexão* $\times$ *comprimento*: engastado–apoiado.

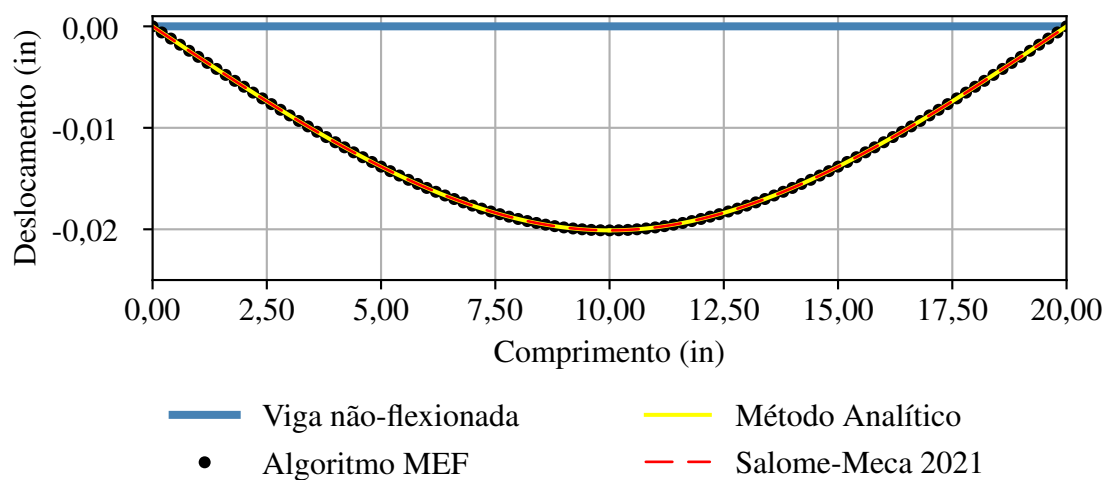


Fonte: próprio autor.

Tabela 6 – Deflexão máxima e reações: engastado–apoiado.

Reação	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
y_{MAX}	0,009	0,009	0,009	<i>in</i>
Fr_A	68,75	68,75	68,75	<i>lbf</i>
Mr_A	375,00	375,00	375,00	<i>lbf·in</i>
Fr_B	31,25	31,25	31,25	<i>lbf</i>

Fonte: próprio autor.

Figura 16 – Gráfico de *deflexão* × *comprimento*: bi–apoiado.

Fonte: próprio autor.

Tabela 7 – Deflexão máxima e reações: bi–apoiado.

Reação	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
y_{MAX}	0,02	0,02	0,02	<i>in</i>
Fr_A	50,00	50,00	50,00	<i>lbf</i>
Fr_B	50,00	50,00	50,00	<i>lbf</i>

Fonte: próprio autor.

Nota-se que a análise estática apresentou resultados bastantes satisfatórios. Em todos os casos estudados, os valores de *deslocamento* × *comprimento*, deflexão máxima, forças e momentos reativos foram exatamente o mesmo para as três metodologias abordadas. Desta forma, conclui-se que o algoritmo desenvolvido apresenta fidelidade à análise estática de vigas.

4.2 ANÁLISE DINÂMICA

Agora, é apresentada uma tabela contendo os valores das cinco primeiras frequências naturais para cada caso analisado, seguida pelos modos de vibrar associados às primeiras três frequências naturais. A Tabela 8 e a Figura 17 referem-se ao caso A; a Tabela 9 e a Figura 18, ao

caso B; a Tabela 10 e a Figura 19, ao caso C; e, por fim, a Tabela 11 e a Figura 20 referem-se ao caso D.

Tabela 8 – Cinco primeiras frequências naturais: engastado–livre.

Frequência natural	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
ω_{n_1}	2,86	2,86	2,86	Hz
ω_{n_2}	17,93	17,93	17,93	Hz
ω_{n_3}	50,21	50,22	50,22	Hz
ω_{n_4}	98,40	98,40	98,40	Hz
ω_{n_5}	162,62	162,67	162,67	Hz

Fonte: próprio autor.

Figura 17 – Três primeiros modos de vibrar da viga: engastado–livre.

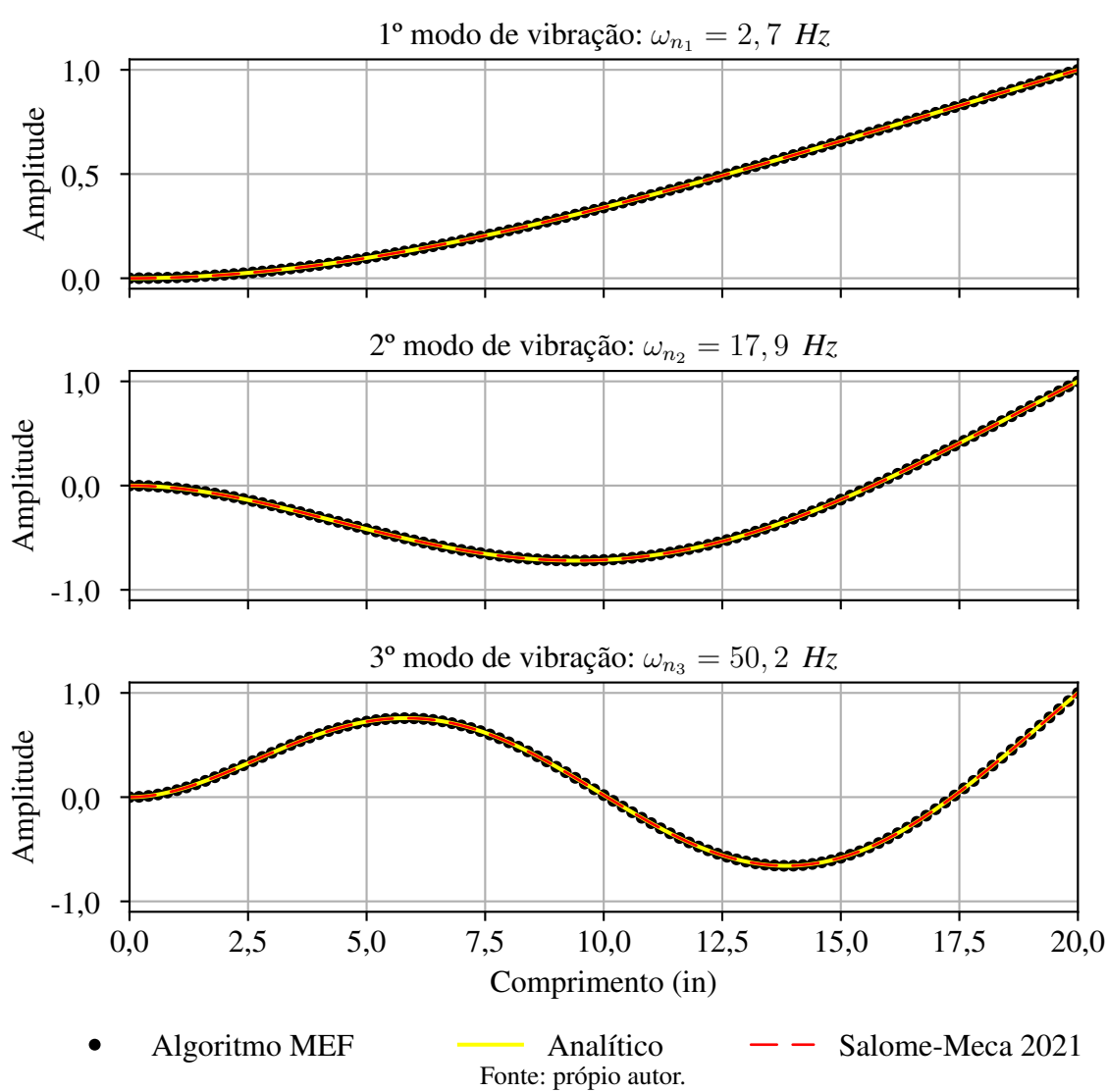


Tabela 9 – Cinco primeiras frequências naturais: bi-apoiado.

Frequência natural	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
ω_{n_1}	18, 21	18, 21	18, 21	Hz
ω_{n_2}	50, 19	50, 20	50, 20	Hz
ω_{n_3}	98, 40	98, 40	98, 40	Hz
ω_{n_4}	162, 62	162, 67	162, 67	Hz
ω_{n_5}	242, 95	243, 00	243, 00	Hz

Fonte: próprio autor.

Figura 18 – Três primeiros modos de vibrar da viga: bi-apoiado.

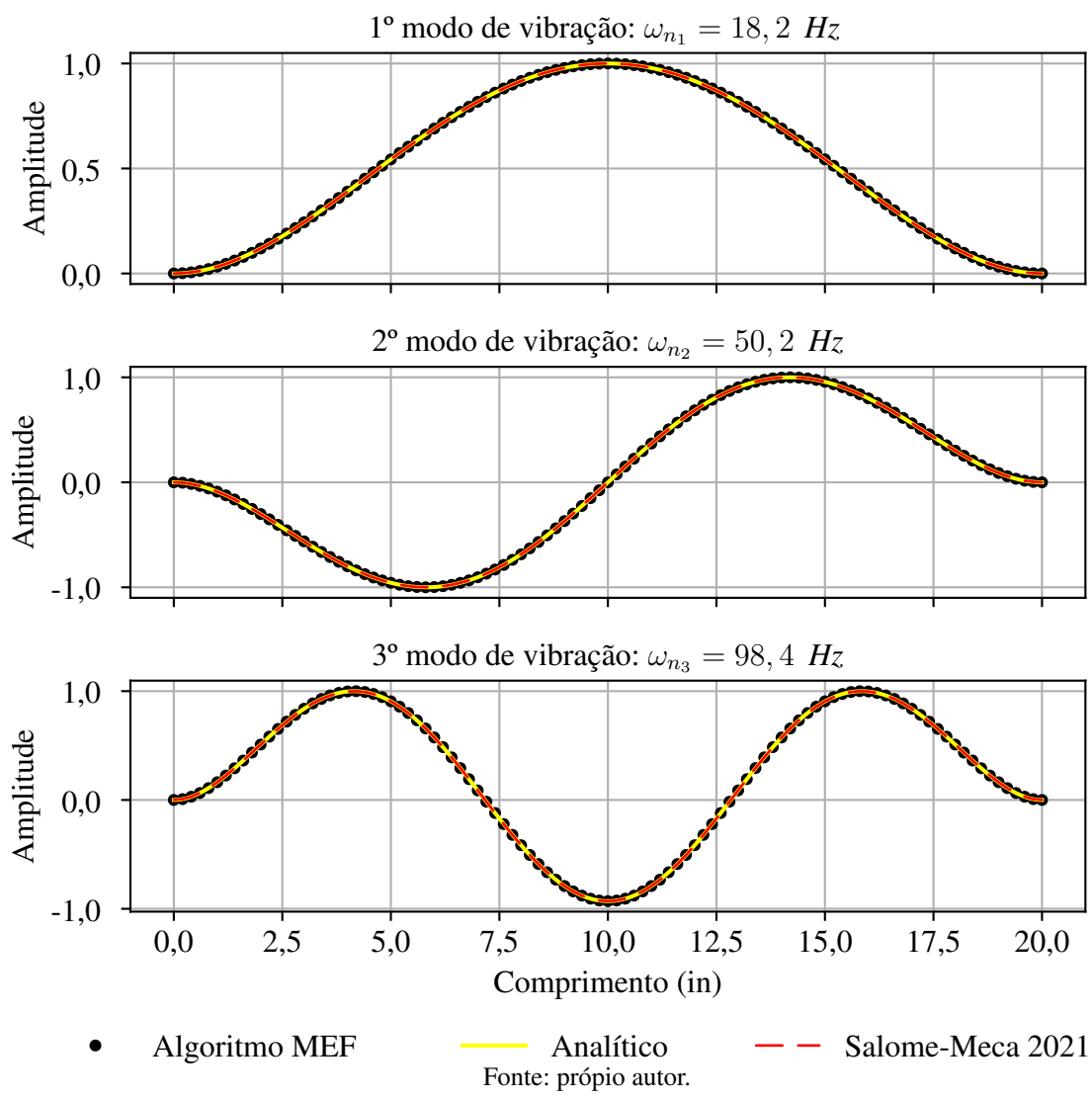


Tabela 10 – Cinco primeiras frequências naturais: engastado–apoiado.

Frequência natural	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
ω_{n_1}	12, 54	12, 55	12, 55	Hz
ω_{n_2}	40, 66	40, 67	40, 67	Hz
ω_{n_3}	84, 81	84, 85	84, 85	Hz
ω_{n_4}	145, 04	145, 10	145, 10	Hz
ω_{n_5}	221, 38	221, 41	221, 41	Hz

Fonte: próprio autor.

Figura 19 – Três primeiros modos de vibrar da viga: engastado–apoiado

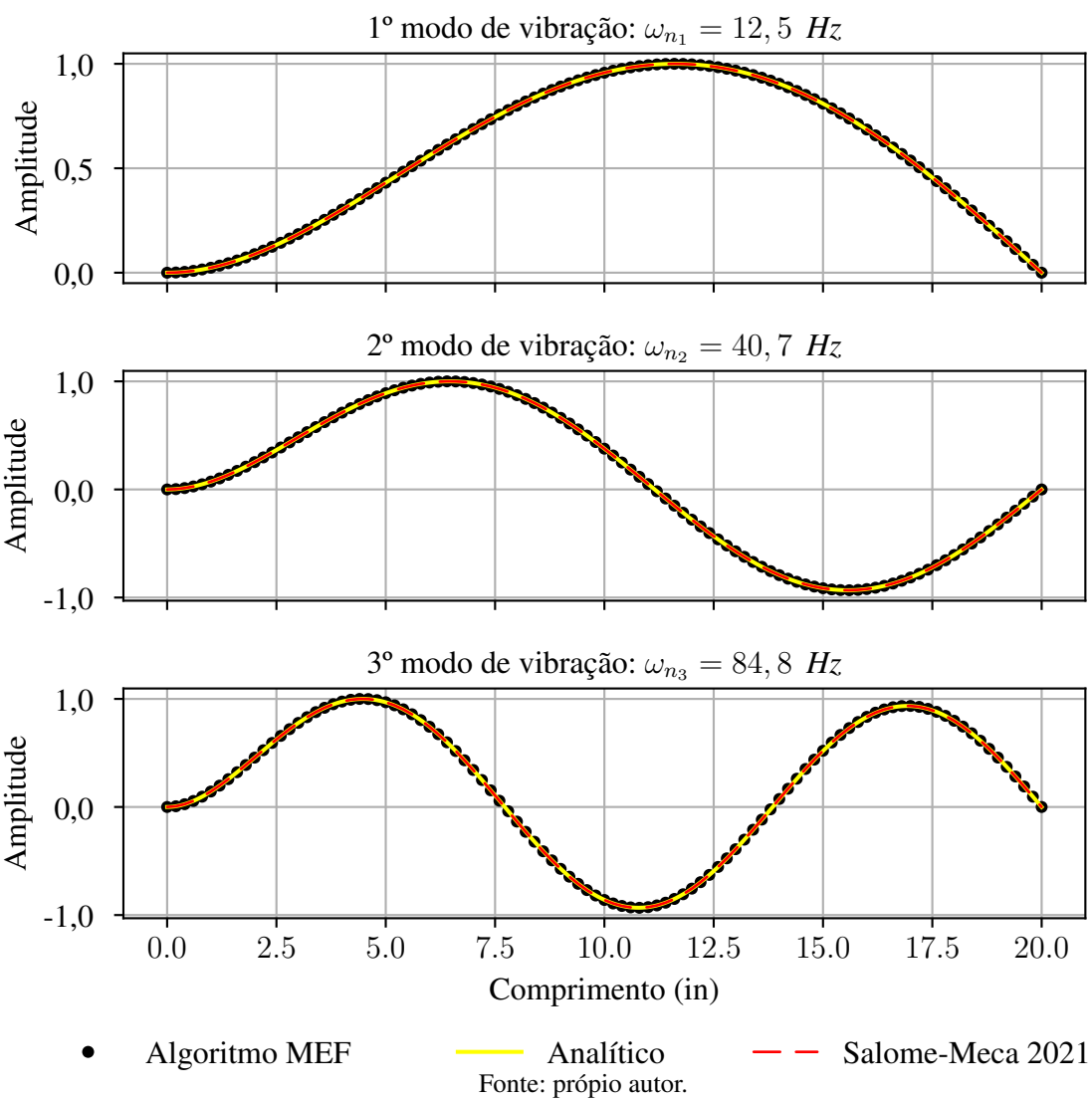
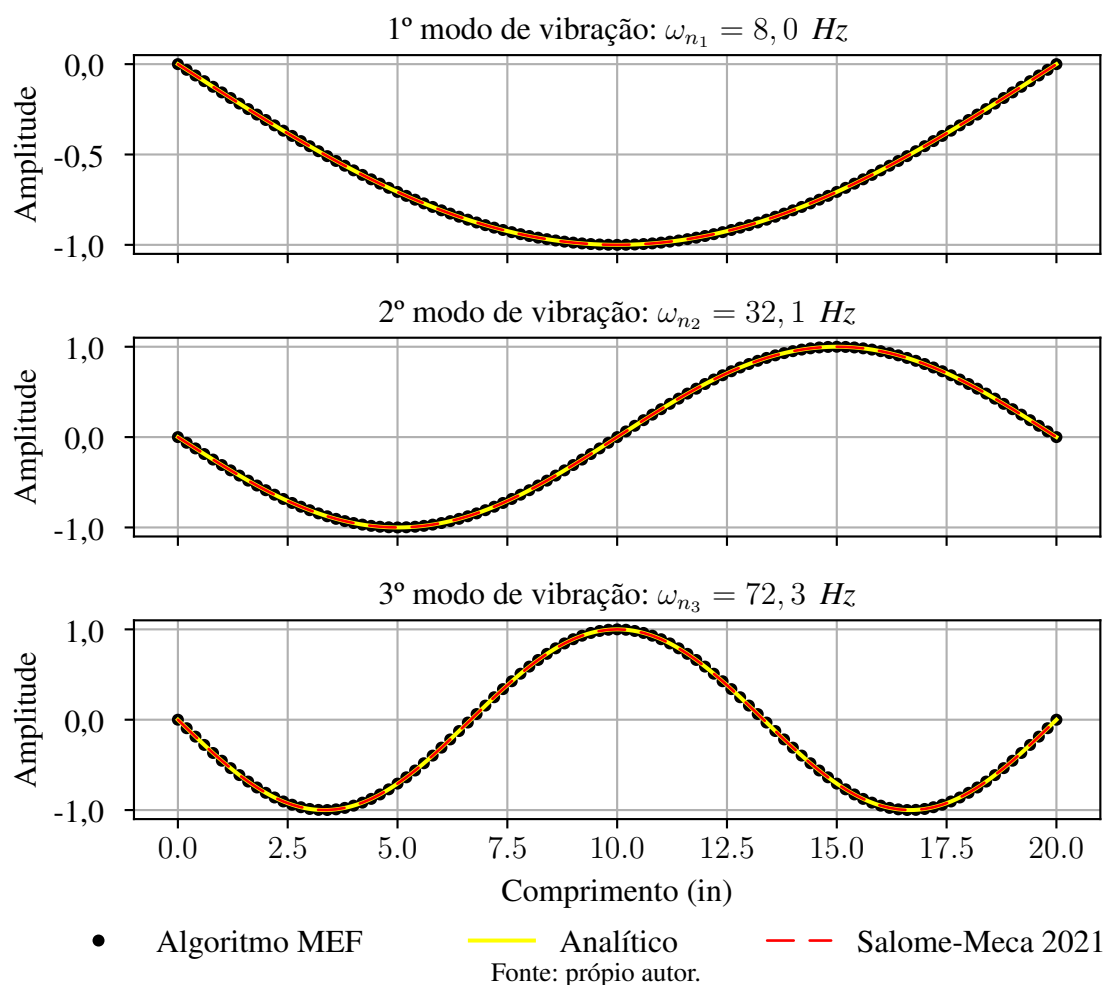


Tabela 11 – Cinco primeiras frequências naturais: bi–apoiado.

Frequência natural	Método Analítico	Algoritmo MEF	Salome-Meca 2021	Unidade de Medida
ω_{n_1}	8,03	8,03	8,03	Hz
ω_{n_2}	32,12	32,13	32,13	Hz
ω_{n_3}	72,29	72,30	72,30	Hz
ω_{n_4}	128,52	128,53	128,53	Hz
ω_{n_5}	200,79	200,82	200,82	Hz

Fonte: próprio autor.

Figura 20 – Três primeiros modos de vibrar da viga: bi–apoiado.



Observa-se que os valores obtidos pelo algoritmo desenvolvido e pelo Salome-Meca 2021 foram iguais, porém ligeiramente diferentes do valor analítico. Nota-se, ainda, que a diferença aumenta conforme aumentam os valores das frequências naturais. Uma possível causa disso é o método numérico utilizado na resolução do problema de autovalor–autovetor descrito na Equação 2.109. Entretanto, lembrando-se que o MEF é um método aproximado, pode-se dizer que os resultados obtidos foram bastante satisfatórios e que o algoritmo desenvolvido apresentou fidelidade à análise dinâmica de vigas.

5 CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que o algoritmo desenvolvido apresenta uma boa fidelidade tanto na análise estática quanto na análise dinâmica de vigas. Os valores obtidos para os diversos casos analisados foram satisfatórios e bastante próximos dos valores analíticos esperados, considerando que o Método dos Elementos Finitos é uma técnica aproximada. Sendo assim, pode-se afirmar que o algoritmo é uma ferramenta útil e confiável para a análise estrutural de vigas e seu uso pode proporcionar uma redução significativa no tempo e custo de projetos de engenharia.

Uma sugestão para trabalhos futuros seria realizar as mesmas análises utilizando a teoria de viga de Timoschenko, a fim de comparação. Essa abordagem considera não apenas a deformação axial, mas também a deformação por cisalhamento. Outra sugestão interessante seria realizar análises de impacto nas vigas, a fim de investigar o comportamento dinâmico delas.

Por fim, é importante destacar que o estudo realizado foi relevante para a formação de um profissional mais capacitado e crítico, capaz de compreender as bases conceituais das ferramentas computacionais utilizadas em diversos projetos. O aprendizado de um *software* de elementos finitos é essencial para a carreira profissional, e até mesma acadêmica, visto que sua popularização aumenta cada vez mais. Portanto, o trabalho teve seu objetivo alcançado.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, Á. F. **Método dos Elementos Finitos**. 1. ed. Porto, Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- BAUCHAU, O.; CRAIG, J. Euler-bernoulli beam theory. In: _____. **Structural Analysis: With applications to aerospace structures**. Dordrecht: Springer, 2009. v. 163, cap. 5, p. 173–221.
- CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Elementos finitos**. 4. ed. Rio de Janeiro: Person, 2014. ISBN 978-85-430-0593-5.
- CLOUGH, R. The finite element method in plane stress analysis. **Proceedings American Society of Civil Engineers**, v. 23, p. 345–378, 1960.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3. ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2003.
- COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 49, p. 1–23, 1943.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um pequeno curso em elementos finitos**. Rio de Janeiro: LTC, 2009. ISBN 978-85-216-1941-3.
- HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beam using four engineering theories. **Journal of Sound and Vibration**, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999. ISSN 0022-460X.
- HRENIKOFF, A. Solution of problems in elasticity by the frame work method. **Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME**, v. 8, p. 169–175, 1941.
- LALANNE, M.; BERTHER, P.; DER HAGOPIAN, J. **Mechanical Vibrations for Engineers**. [s.n.], 1984. Disponível em: <<https://cel.hal.science/cel-00315803>>. Acesso em: mar. 2023.
- RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- TIMOSHENKO, S. P. **History of Strength of Materials**. New York: Dover Publications, Inc., 1953.
- TURNER, M. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of Aeronautical Science**, v. 3, n. 9, p. 805–824, 1956.