



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Ronan Felipe Jorge

Sobre a estabilidade estrutural e regularizações de campos de
vetores descontínuos

São José do Rio Preto
2016

Ronan Felipe Jorge

Sobre a estabilidade estrutural e regularizações de campos de
vetores descontínuos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Weber Flávio Pereira

São José do Rio Preto
2016

Jorge, Ronan Felipe.

Sobre a estabilidade estrutural e regularizações de campos de vetores descontínuos / Ronan Felipe Jorge. -- São José do Rio Preto, 2016

79 f. : il.

Orientador: Weber Flávio Pereira

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Geometria. 4. Topologia. 5. Estabilidade estrutural. I. Pereira, Weber Flávio. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Ronan Felipe Jorge

Sobre a estabilidade estrutural e regularizações de campos de
vetores descontínuos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin
UNESP- Ilha Solteira

Prof. Dr. Cláudio Gomes Pessoa
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 18 de março de 2016.

À minha mãe,
Tereza,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço:

À minha mãe, Tereza, por todo seu amor, bondade e carinho que me fez ser a pessoa que hoje eu sou e me ajudou a chegar onde estou.

Aos meus familiares por todo apoio durante estes anos. Em especial, ao meu sobrinho Matheus e meus tios Ana, Lázara e Luís.

À minha namorada, Ana Carolina, por sempre acreditar em mim até quando eu mesmo não acreditava e por seu apoio em todos os momentos.

Aos meus professores, em especial ao Prof. Dr. Weber Flávio Pereira, por não medir esforços para que este trabalho fosse concretizado.

A todos os meus amigos do Ibilce e de minha cidade Itapira, por fazerem deste período uma parte feliz da minha vida. Em especial, agradeço aos meus amigos Yagor e Jéssica, por todo apoio durante os anos de graduação e mestrado, ajudando sempre nas horas de maior dificuldade; Rodrigo, Pedro, Carlos, Cristal, Camila e Manuela, por sempre lembrarem de mim mesmo muito longe; a todos os meus companheiros de curso, de Moradia Estudantil, aos Blocos 2A e 2D e aos meus companheiros de república.

À Capes, pelo apoio financeiro.

“Que os vossos esforços desafiem as
impossibilidades, lembrai-vos de que as
grandes coisas do homem foram
conquistadas do que parecia impossível”

(Charlie Chaplin)

Resumo

O conceito de estabilidade estrutural foi introduzido aos estudos de sistemas dinâmicos contínuos por Andronov e Pontryagin (1937). Em 1988, após investigar osciladores com atrito de Coulomb e apresentar equações diferenciais com lado direito descontínuo, Filippov desenvolveu em sua obra uma nomenclatura para o estudo de sistemas dinâmicos descontínuos. Desde então, estudiosos da área vêm tentando analisar a estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos descontínuos por diferentes métodos. Um dos métodos é transformar, sem alterar a estrutura dos campos de vetores, estes sistemas descontínuos em sistemas contínuos onde o estudo da estabilidade estrutural já é conhecido. Esta transformação, também conhecida como regularização, pode ser desenvolvida de diversas formas.

Este trabalho tem por objetivo a apresentação de um método de regularização através do uso de uma função de transição de campos de vetores Z do plano com um conjunto de descontinuidade S baseando-se no método de regularização apresentado por Sotomayor e Teixeira (1996) em seu artigo, e realizar um breve estudo sobre estabilidade estrutural em campos de vetores regularizados utilizando tal método.

Palavras-chave: Sistemas descontínuos, regularização, estabilidade estrutural.

Abstract

The concept of structural stability was introduced into the studies of continuous dynamical systems by Andronov and Pontryagin (1937). In 1988, after investigating oscillators with Coulomb friction and differential equations with discontinuous right-hand sides, Filippov developed a nomenclature to the study of discontinuous dynamical systems. Since then, researches have been trying to analyze the structural stability of discontinuous dynamical systems by different methods. One of these methods is to transform, without changing the structure of vector fields, these discontinuous systems in continuous systems where the study of structural stability is already known. This transformation, also known as regularization, can be developed in various ways.

This work aims at presenting a regularization method using a transition function of vector fields Z in the plane with a discontinuous set S basing in regularization method presented by Sotomayor and Teixeira (1996) in their article, and, also to do a short study about structural stability in regularized vector fields using this method.

Keywords: Discontinuous systems, regularization, structural stability.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias	4
1.2 O Teorema de existência e unicidade de trajetórias de campos de vetores	5
1.2.1 O Teorema de Existência e Unicidade	6
1.3 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias no Plano	7
1.4 Sistemas de EDOs Lineares no Plano	9
1.5 Sistemas de EDOs não lineares no Plano e o Teorema de Grobman-Hartman	13
1.6 Conjuntos Limites e o Teorema de Poincaré-Bendixon	14
1.7 Estabilidade Estrutural e o Teorema de Peixoto	15
2 Fluxos de costura e fluxos tangentes	19
2.1 Domínios Acessíveis	19
2.2 Passagem do Fluxo	21
2.3 Fluxos Deslizantes	30
3 Regularização de Campos de Vetores Descontínuos	38
3.1 Definições Preliminares	38
3.2 Configurações Locais	40
3.2.1 Pontos Regulares	44
3.2.2 Pontos Singulares	46
3.3 Órbitas S-periódicas	53
3.4 Gráficos	55
3.4.1 Gráfico Simples	55
3.4.2 Gráfico Elementar	58
3.5 Resultado Principal	62
4 Aplicações	64
4.1 Oscilador com atrito de Coulomb	64
4.1.1 Formulação do Problema	64
4.1.2 Regularização	68
4.2 Sistema de controle automático de um barco	71
4.2.1 Formulação do Problema	71
4.2.2 Regularização	74
Referências Bibliográficas	79

Introdução

O século XVI pode ser considerado como o século do nascimento da teoria dos sistemas dinâmicos, com trabalhos de Johannes Kepler sobre mecânica celeste. Já Newton, com a formalização da mecânica clássica, contribuiu para o desenvolvimento de modelos matemáticos que descrevem fenômenos físicos, que posteriormente ajudou Lagrange e Hamilton a definirem em seus trabalhos a teoria da mecânica clássica num contexto matemático, que essencialmente é o mesmo estudado até hoje.

O matemático francês Henri Poincaré é considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, tendo introduzido muitos dos aspectos do estudo qualitativo das equações diferenciais que permitiram estudar propriedades assintóticas das soluções (ou da maior parte das soluções) de uma equação diferencial, como estabilidade e periodicidade, sem ser necessário resolver explicitamente a equação diferencial. Tal abordagem pode ser encontrada na sua obra-prima *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, publicada em três volumes entre 1892 e 1899. Considera-se que o primeiro livro publicado na área de sistemas dinâmicos é a obra *Dynamical Systems*, escrita pelo matemático estado-unidense George Birkhoff, e publicada em 1927.

Sobre sistemas descontínuos, em 1964, Filippov investigou o movimento em um oscilador de atrito de Coulomb e apresentou equações com lado direto descontínuo. Para determinar o movimento de deslize ao longo das fronteiras descontínuas, a inclusão diferencial foi introduzida e a existência de solução para uma equação diferencial descontínua foi discutida. A discussão detalhada destas equações diferenciais descontínuas pode ser referida a Filippov em [3]. Já em 1996, Sotomayor e Teixeira apresentaram em seu artigo [8], um método para a regularização de sistemas dinâmicos descontínuos com um conjunto de descontinuidade e análise destes sistemas com relação a estabilidade estrutural. Com este método, as mesmas propriedades dos sistemas contínuos podem ser trabalhadas para os sistemas descontínuos após a regularização.

A definição de sistemas estruturalmente estáveis é devida a Andronov e Pontryagin (1937). A sequência de artigos em sistemas planares, de Poincaré e Bendixon (1899) a De Baggis (1953), culminou, em 1962, com a classificação por Peixoto de todos sistemas estruturalmente estáveis em dimensão 2. Vale mencionar ainda que a estabilidade estrutural em sistemas descontínuos foi estudada por Koslova em [4] sem apelo a métodos de regularização.

Resumidamente, este trabalho é dividido em quatro capítulos: um capítulo preliminar com uma síntese da teoria básica para nos familiarizarmos com o tema. O segundo capítulo trará algumas ferramentas mais específicas que utilizaremos no trabalho. O terceiro capítulo já direcionado para o tema principal. E o quarto capítulo trazendo alguns exemplos de aplicação da teoria do capítulo anterior.

A seguir discriminamos mais detalhadamente o conteúdo de cada capítulo.

Em um primeiro capítulo, faremos um estudo preliminar introduzindo conceitos básicos de equações diferenciais ordinárias como: solução de uma equação diferencial,

problema de valor inicial, campo de vetores, trajetórias, fluxos, sistemas de equações no plano, retrato de fase, singularidades, natureza topológica e classificação das singularidades, conjuntos limite, órbitas periódicas e uma breve introdução à estabilidade estrutural. Neste capítulo também são apresentados alguns teoremas importantes na teoria de equações diferenciais ordinárias como o Teorema da Existência e Unicidade de solução de uma equação diferencial, o Teorema de Grobman-Hartman para campos vetoriais no plano, o Teorema de Poincaré-Bendixon e o Teorema de Peixoto para campos vetoriais planos estruturalmente estáveis.

O segundo capítulo abordará os fluxos de costura e fluxos tangentes em um campo de vetores no plano. Primeiramente, as definições dos tipos de domínios serão introduzidas: domínios acessíveis, inacessíveis, conectáveis e separáveis. Em seguida, discutiremos a passagem do fluxo de um domínio para o outro através da fronteira comum entre eles e classificaremos estes fluxos em fluxos de costura, deslize ou de escape conforme seu comportamento na vizinhança de pontos na fronteira de domínios adjacentes. Além disso, os teoremas desta seção apresentam a relação entre os diferentes tipos de fluxos com os vetores normal, velocidade e aceleração nos pontos de fronteira e na vizinhança destes pontos. A próxima seção deste capítulo tem como foco os fluxos deslizantes, definindo um ponto crítico e condições necessárias e suficientes para um ponto da fronteira ser um ponto crítico do fluxo, envolvendo novamente os vetores normal, velocidade e aceleração na vizinhança dos pontos na fronteira. Finalmente, uma análise análoga será feita para fluxos em fronteiras $(n - 1)$ -dimensionais e teoremas envolvendo fluxos tangentes à fronteira e a ordem de tangência serão discutidos. Os conceitos, definições e teoremas abordados neste capítulo tiveram como referência o livro de Albert Luo sobre sistemas dinâmicos descontínuos (veja [5]).

O método de regularização de campos de vetores no plano com um conjunto de descontinuidade e um breve estudo sobre estabilidade estrutural em campos regularizados apresentado por Sotomayor e Teixeira em seu artigo [8] será o tema do capítulo três. A ideia deste método é, para um campo de vetores Z com um conjunto de descontinuidade S , construir um campo regularizado Z_ϵ através de uma função de transição φ_ϵ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que o campo se conserve o mesmo de antes da regularização fora de uma vizinhança V do conjunto de descontinuidade S , e em V as trajetórias que antes tinham pontos de descontinuidade, agora são suaves no interior, na fronteira e no exterior de V . Com esta regularização, um estudo do comportamento do campo de vetores do sistema é feito durante o capítulo. Primeiramente, faremos as devidas definições das diferentes regiões em um conjunto de descontinuidade S e apresentaremos a regularização Z_ϵ de um campo de vetores Z no plano com um conjunto de descontinuidade S . Em seguida, as configurações locais são abordadas: pontos S -regulares e S -singulares, pontos de sela e de dobra, pontos críticos e hiperbólicos. Analisaremos também o comportamento do campo de vetores na vizinhança de pontos S -regulares e S -singulares após a regularização. Neste mesmo capítulo, definimos o que são órbitas S -periódicas, gráficos simples e elementares. Aqui também analisaremos o comportamento do campo regularizado Z_ϵ na vizinhança do conjunto de descontinuidade S quando temos estas estruturas. Por fim, o resultado principal deste capítulo utilizará de algumas afirmações provadas para demonstrar que campos de vetores com certas características pertencem a um conjunto importante no estudo de campos de vetores estruturalmente estáveis.

Por fim, o último capítulo trará dois exemplos de campos de vetores com um conjunto de descontinuidade: O oscilador de atrito de Coulomb e um sistema de controle automático de barco. Estas duas aplicações fazem parte da obra de Andronov, Vitt e

Khaikin [2]. Primeiramente faremos a formulação do problema, traduzindo as informações dos sistemas para a linguagem matemática. Logo depois, ajustaremos as informações para um modelo que possa ser trabalhado pelo método de regularização introduzido no capítulo três. Por fim, faremos as regularizações desses campos, analisando as regiões do conjunto de descontinuidade S , a natureza dos pontos críticos e o retrato de fase dos campos de vetores antes e depois das regularizações.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo preliminar contém uma breve introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e à teoria qualitativa dessas equações, mais especificamente aos sistemas de EDOs no plano. Uma classificação desses sistemas segundo a natureza de seus autovalores é abordada para um sistema de EDOs lineares e não-lineares no plano, esta segunda sob as condições do Teorema de Grobman-Hartman. Além disso, uma rápida definição de conjuntos limites e o Teorema de Poincaré-Bendixon são apresentados. Por fim, nesse capítulo inicial, discutiremos algumas noções sobre estabilidade estrutural e o Teorema de Peixoto. As provas de alguns teoremas desta seção serão omitidas e podem ser encontradas em livros de equações diferenciais como [7] e [9].

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma **equação diferencial** é uma equação onde aparece uma ou mais derivadas de uma função desconhecida. Chamamos de EDO (Equações Diferenciais Ordinárias) aquelas onde aparecem apenas as derivadas ordinárias. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada que aparece na equação. A **forma geral** da EDO que usaremos é dada por

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}).$$

Definição 1.1.1. Uma **EDO de primeira ordem** é uma equação da forma

$$y' = f(t, y).$$

Uma **solução** para a equação acima é uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e ϕ satisfaz

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad \forall t \in I.$$

Um **problema de valor inicial (PVI) de primeira ordem** é uma equação de primeira ordem acompanhada de uma condição, chamada de **condição inicial**

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Uma **solução do PVI** é uma função ϕ como acima, satisfazendo ainda que

- $t_0 \in I$;
- $\phi(t_0) = y_0$.

Definição 1.1.2. Uma EDO é dita **autônoma** se a aplicação f independe de t , ou seja, é do tipo $y' = f(y)$.

1.2 O Teorema de existência e unicidade de trajetórias de campos de vetores

Um *campo de vetores* em $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.1. Uma **trajetória** (ou **Curva Integral**) de um campo de vetores $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow U$ definida em um intervalo real não degenerado, tal que

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in I.$$

Exemplo 1.2.2. Alguns exemplos de campos de vetores em $\mathbb{R}^2$:

1. $U = \mathbb{R}^2$ e $X(x, y) = (-y, x)$. Neste caso, X é um campo linear.
2. $U = \mathbb{R}^2$ e $X(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Neste caso, X é um campo não-linear.

Observação 1.2.3. 1. Nos extremos de I , se houver, a derivada é lateral.

2. Esboçamos a imagem da trajetória em U , indicando com uma seta o sentido de percurso com t crescente.

Exemplo 1.2.4. Alguns exemplos de trajetórias em campos em $\mathbb{R}^2$:

1. $\gamma(t) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma trajetória de $X(x, y) = (-y, x)$ que em tempo $t = 0$ passa por (x, y) . De fato,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (-x \sin t - y \cos t, x \cos t - y \sin t) \\ &= (-(x \sin t + y \cos t), x \cos t - y \sin t) \\ &= X(\gamma(t)) \end{aligned}$$

$$\text{e } \gamma(0) = (x \cos 0 - y \sin 0, x \sin 0 + y \cos 0) = (x, y).$$

2. $\gamma(t) = e^{2t}(x, y)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma trajetória de $X(x, y) = (2x, 2y)$ que em tempo $t = 0$ passa por (x, y) . De fato,

$$\dot{\gamma}(t) = (2e^{2t}x, 2e^{2t}y) = X(\gamma(t)) \text{ e } \gamma(0) = e^{2 \cdot 0}(x, y) = (x, y).$$

Observação 1.2.5. A curva dada por $\gamma(t) = e^{2(t-t_0)}(x, y)$ também é uma curva integral do campo X do exemplo 2 acima que em tempo t_0 passa por (x, y) . O traço desta curva é exatamente o mesmo da dada por $\gamma(t) = e^{2t}(x, y)$.

De um modo geral, se $\gamma : I \rightarrow U$ é uma trajetória de X então $\eta : J \rightarrow U$ dada por $\eta(t) = \gamma(t + c)$ onde $J = \{t - c | t \in I\}$ também é uma trajetória de X cujo traço é exatamente o mesmo que o de γ .

1.2.1 O Teorema de Existência e Unicidade

A seguir apresentaremos um dos principais teoremas das equações diferenciais ordinárias que é o Teorema da Existência e Unicidade de soluções de um PVI.

Teorema 1.2.6 (Teorema de Picard). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$, r, M e $k \in (0, +\infty)$ dados. Suponhamos que $X : \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação tal que*

$$\begin{cases} \|X(x)\| \leq M \\ \|X(x) - X(y)\| \leq k\|x - y\| \end{cases}$$

para quaisquer $x, y \in \overline{B(x_0, r)}$. Então para cada $0 < a < \frac{r}{M}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ dados, existe um único caminho diferenciável $\gamma : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \overline{B(x_0, r)}$ tal que $\gamma(t_0) = x_0$ e $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ para qualquer t satisfazendo $t_0 - a \leq t \leq t_0 + a$.

Prova: O conjunto das aplicações contínuas definidas em $[t_0 - a, t_0 + a]$ com contradomínio em $\overline{B(x_0, r)}$

$$\mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B(x_0, r)}) = \{\varphi : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \overline{B(x_0, r)}; \varphi \text{ é contínua}\}$$

é um espaço métrico completo na norma do supremo

$$\|\varphi\| = \sup_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]} \|\varphi(t)\|.$$

Definimos $G : \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B(x_0, r)}) \rightarrow \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B(x_0, r)})$ por

$$G(\gamma(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\gamma(s))ds.$$

Provar o teorema é equivalente a provar que G possui um único ponto fixo $\gamma \in \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B(x_0, r)})$. Da topologia, sabemos que é suficiente provarmos que para algum $m \in \mathbb{N}$, a iterada G^m é uma contração. Por indução, provamos que

$$\|G^m(\varphi_1)(t) - G^m(\varphi_2)(t)\| \leq \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B(x_0, r)})$, $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Logo basta escolhermos m satisfazendo $\frac{(ak)^m}{m!} < 1$. ■

Observação 1.2.7. 1) Se $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ for um campo de classe $\mathcal{C}^1$ então para quaisquer $x_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ dados existem $a > 0$ e uma trajetória $\gamma : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow U$ de X tal que $\gamma(t_0) = x_0$. De fato, a hipótese de ser $\mathcal{C}^1$ implica as hipóteses do Teorema de Picard. Para isso basta usarmos a desigualdade do valor médio.

2) A demonstração do Teorema de Picard é chamada Método das Aproximações Sucessivas.

3) É possível provarmos que se $\psi : J \rightarrow U$ é uma trajetória de um campo X de classe $\mathcal{C}^1$ então existe uma trajetória $\varphi : I \rightarrow U$ de X tal que I é um intervalo aberto e φ estende ψ , isto é $J \subset I$ e $\psi = \varphi|_J$.

Definição 1.2.8. Sejam $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo, $x_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ dados. Dizemos que uma trajetória $\varphi : I \longrightarrow U$ de X é uma **trajetória maximal** de X por x_0 em t_0 se φ é uma trajetória de X por x_0 em t_0 que estende qualquer outra, ou seja, se $\psi : J \longrightarrow U$ é uma trajetória de X por x_0 em t_0 então necessariamente $J \subset I$ e $\psi = \varphi|_J$.

Observação 1.2.9. 1) Se $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de classe $\mathcal{C}^1$ então para quaisquer $x_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ existe uma única trajetória maximal de X por x_0 em t_0 , necessariamente definida em um intervalo aberto. O intervalo maximal de X por x_0 em t_0 será denotado por $I(x_0, t_0)$.

2) Sejam $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe $\mathcal{C}^1$, $x_0 \in U$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dados. Sejam $\varphi_i : I(x_0, t_i) \longrightarrow U, i = 1, 2$, as trajetórias maximais de X por x_0 em t_1 e em t_2 , respectivamente. Então

$$I(x_0, t_2) = I(x_0, t_1) - (t_1 - t_2) \quad \text{e} \quad \varphi_2(t) = \varphi_1(t + (t_1 - t_2)).$$

1.3 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias no Plano

Um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano é um sistema da forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y, t) \\ y' = g(x, y, t) \end{cases}$$

onde f, g estão definidas em algum subconjunto $U \subset \mathbb{R}^3$.

Uma **solução** de um sistema como acima é uma curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ satisfazendo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t), t) \\ e \\ y'(t) = g(x(t), y(t), t) \end{cases}.$$

Definição 1.3.1. Um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano é dito **autônomo** quando for do tipo

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

onde f, g estão definidas em um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.3.2.

$$\begin{cases} x' = \sin(x) + 2y \\ y' = x^2 + y^3 \end{cases}$$

é autônomo.

Uma solução de (1.1) é uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ satisfazendo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ e \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}.$$

Observe que $(f(x, y), g(x, y))$ é o vetor velocidade da curva α em (x, y) . De fato, sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ temos que $(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) = (x'(t), y'(t)) = \alpha'(t)$. Assim o par (f, g) define um campo de vetores.

Exemplo 1.3.3.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \end{cases}.$$

As soluções são curvas que apresentam vetores tangentes como acima. Por exemplo, $\alpha(t) = (e^{2t}, e^{-t})$ é uma solução que passa pelo ponto $(1, 1)$ quando $t = 0$. Note também que $\alpha(t) = (-e^{2t}, e^{-t})$ é uma solução que passa por $(-1, 1)$ quando $t = 0$.

Definição 1.3.4. Um **problema de valor inicial (PVI)** é um sistema (1.1) acompanhado de uma condição inicial : $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$.

Observe que no exemplo, fixado um ponto do plano, existe uma única curva que é solução do sistema e que passa por este ponto. Dizemos que uma solução do PVI é uma **trajetória** ou **órbita** que em tempo t_0 passa por (x_0, y_0) .

É fácil vermos que o traço da curva que passa por (x_0, y_0) no tempo t_0 é o mesmo que o da curva que passa por (x_0, y_0) em um tempo t_1 . Desta forma vamos considerar somente PVIs com condição inicial

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0. \quad (1.2)$$

Definição 1.3.5. O **retrato de fase** do sistema (1.1) é a união de todos os traços das trajetórias deste sistema.

Definição 1.3.6. Uma **singularidade** de (1.1) é um ponto que satisfaz

$$f(x, y) = g(x, y) = 0.$$

Exemplo 1.3.7.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \end{cases}$$

apresenta como soluções $\alpha(t) = (x_0 e^{2t}, y_0 e^{-t})$. A única singularidade do sistema é o ponto $(0, 0)$.

Definição 1.3.8. Uma família de funções $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ satisfazendo

1. φ'_t é contínua;
2. $\varphi_0 = Id$;
3. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

é um **fluxo** ou **sistema dinâmico** no plano.

Exemplo 1.3.9. Suponhamos que as soluções de

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.3)$$

estejam globalmente definidas. Seja φ a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (P, t) &\longmapsto \varphi(P, t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

onde $(x(t), y(t))$ é a solução de (1.3) satisfazendo $(x(0), y(0)) = P$. Verifica-se que a família φ_t dada por $\varphi_t(P) = \varphi(P, t)$ satisfaz a definição de fluxo.

1.4 Sistemas de EDOs Lineares no Plano

Um sistema de EDOs lineares no plano é um sistema da forma

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

com $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Para simplificarmos a notação representaremos estes sistemas na forma matricial:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$
$$X' = AX, \quad X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Nosso objetivo é estudar todos os tipos de sistemas lineares no plano. Para isto, é necessário que façamos uma classificação das matrizes 2×2 .

O **polinômio característico** de A é o polinômio dado por

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (tr A)\lambda + det A.$$

Assim as soluções de $p(\lambda) = 0$, que são os chamados **autovalores** de A , podem ser:

- duas raízes reais e distintas: λ_1 e λ_2 ;
- uma raiz real dupla: λ ;
- um par complexo conjugado: $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$.

Da teoria de álgebra linear, no primeiro caso, podemos encontrar uma base $\mathcal{B}$ do plano formada por **auto-vetores** de tal forma que

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

No segundo caso, temos duas possibilidades. Se a multiplicidade geométrica de λ for igual a 2 então podemos encontrar uma base $\mathcal{B}$ do plano formada por auto-vetores de tal forma que

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica de λ for igual a 1 então podemos encontrar uma base $\mathcal{B}$ do plano de tal forma que

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

No terceiro caso, encontramos um vetor de $\mathbb{C}^2$ satisfazendo $A(u+iv) = (\alpha+i\beta)(u+iv)$. Além disso $\mathcal{B} = \{u, v\}$ é uma base do plano satisfazendo

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Considere o sistema (1.4). Temos:

1. Se

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

então a solução de (1.4) é dada por $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t})$ e os possíveis retratos de fase são:

- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$: Neste caso, o eixo 0_X é composto de singularidades do sistema.
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$: Neste caso, o eixo 0_Y é composto de singularidades.
- $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ou $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ ou $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Neste caso, a origem $(0, 0)$ é a única singularidade. O primeiro é conhecido como **fonte** e os seguintes **nós repulsores**. Se $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo 0_X) tangenciam o eixo 0_Y e se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo 0_Y) tangenciam o eixo 0_X . Veja figura 1.1.

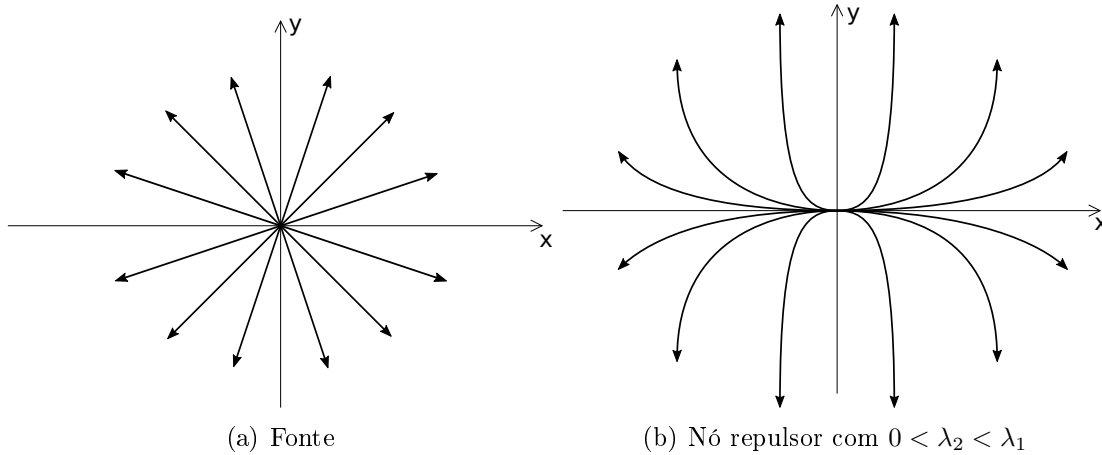


Figura 1.1: Retrato de fase de (1.4) quando A tem autovalores reais e positivos.

- $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: Neste caso, a origem $(0, 0)$ é a única singularidade. O primeiro é conhecido como **poço** e os seguintes **nós atratores**. Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo 0_X) tangenciam o eixo 0_Y e se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo 0_Y) tangenciam o eixo 0_X . Veja figura 1.2.
- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ou $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Neste caso, a origem $(0, 0)$ é a única singularidade. Este caso é conhecido como **sela**. No primeiro caso as trajetórias aproximam-se do eixo 0_Y quando o parâmetro t aproxima-se de $-\infty$ e aproximam-se do eixo 0_X quando o parâmetro t aproxima-se de $+\infty$; no segundo caso as trajetórias aproximam-se do eixo 0_X quando o parâmetro t aproxima-se de $-\infty$ e aproximam-se do eixo 0_Y quando o parâmetro t aproxima-se de $+\infty$. Veja figura 1.3.

2. Se

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

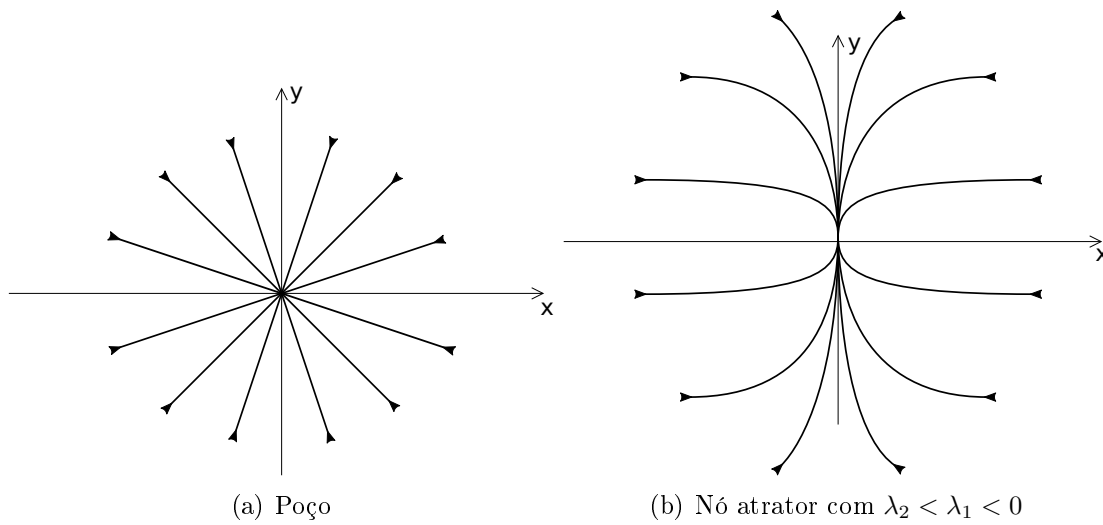


Figura 1.2: Retrato de fase de (1.4) quando A tem autovalores reais e negativos.

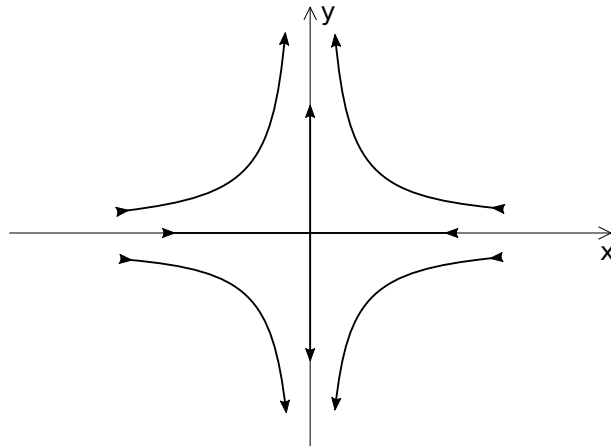


Figura 1.3: Retrato de fase de (1.4) quando A tem autovalor negativo e outro positivo.

então a solução de (1.4) é dada por $(x(t), y(t)) = ((x_0 + y_0 t)e^{\lambda t}, y_0 e^{\lambda t})$ e os possíveis retratos de fase são:

- Se $\lambda < 0$, a única singularidade $(0, 0)$ é chamada de **nó impróprio atrator**.
- Se $\lambda > 0$, a única singularidade $(0, 0)$ é chamada de **nó impróprio repulsor**.

3. Vamos analisar o caso

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Vamos utilizar coordenadas polares para encontrarmos explicitamente as soluções. Começamos com a mudança $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$. As condições iniciais r_0, θ_0 serão dadas por $x_0 = r_0 \cos \theta_0$ e $y_0 = r_0 \sin \theta_0$. Assim temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \Rightarrow x' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta \\ y = r \sin \theta \Rightarrow y' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta \end{cases}. \quad (1.5)$$

Multiplicando a primeira linha por $\cos \theta$ e a segunda por $\sin \theta$ e em seguida somando as duas linhas obtemos

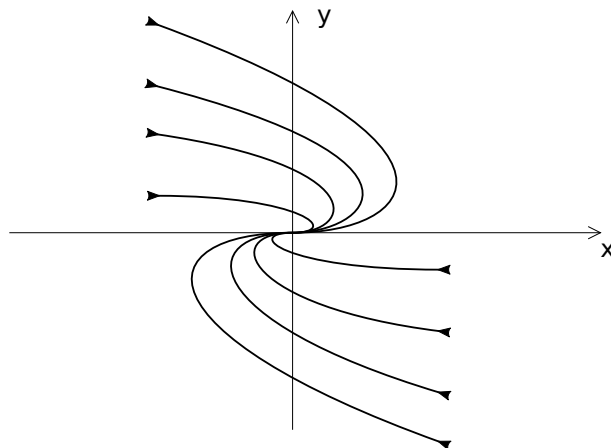


Figura 1.4: Nó impróprio atrator

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta = r'. \quad (1.6)$$

Multiplicando a primeira linha por $-\sin \theta$ e a segunda por $\cos \theta$ e em seguida somando as duas linhas obtemos

$$-x' \sin \theta + y' \cos \theta = r\theta'. \quad (1.7)$$

Substituindo (1.5) em (1.6) e em (1.7) obtemos

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ \theta' = \beta \end{cases}.$$

A solução do sistema acima é dada por

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta &= \theta_0 + \beta t \end{aligned}.$$

Voltando para x, y temos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} (x_0 \cos \beta t - y_0 \sin \beta t) \\ y(t) &= e^{\alpha t} (y_0 \cos \beta t + x_0 \sin \beta t). \end{aligned}$$

E os possíveis retratos de fase são:

- Se $\alpha = 0$ a singularidade $(0, 0)$ é chamada de **centro**. A orientação do campo de vetores será dada por β , no sentido anti-horário se $\beta > 0$ e no sentido horário se $\beta < 0$.
- Se $\alpha > 0$ a singularidade $(0, 0)$ é chamada de **foco repulsor**, no sentido anti-horário se $\beta > 0$ e no sentido horário se $\beta < 0$.
- Se $\alpha < 0$ a singularidade $(0, 0)$ é chamada de **foco atrator**, no sentido anti-horário se $\beta > 0$ e no sentido horário se $\beta < 0$.

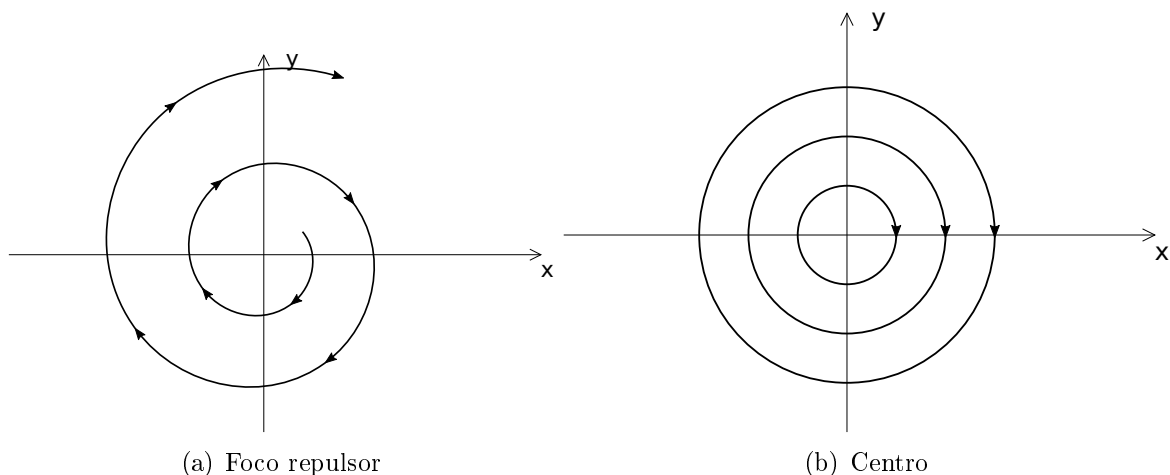


Figura 1.5: Retrato de fase de (1.4) quando A possui dois autovalores complexos e conjugados

Classificação dos Sistemas de EDOs lineares no plano

Dado um sistema linear no plano $X' = AX$ podemos classificar a singularidade $(0, 0)$ a partir do traço de A , do determinante de A e do discriminante do polinômio característico de A . A tabela abaixo nos apresenta tal classificação.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (tr A)\lambda + det A$$

$$\Delta = (tr A)^2 - 4det A$$

Δ	$det A$	$tr A$	$(0, 0)$
> 0	< 0	$\in \mathbb{R}$	Sela
> 0	> 0	< 0	Nó Atrator
> 0	> 0	> 0	Nó Repulsor
< 0	$\in \mathbb{R}$	$= 0$	Centro
< 0	$\in \mathbb{R}$	< 0	Foco Atrator
< 0	$\in \mathbb{R}$	> 0	Foco Repulsor
$= 0$	$\in \mathbb{R}$	> 0	Nó Impróprio Repulsor
$= 0$	$\in \mathbb{R}$	< 0	Nó Impróprio Atrator

1.5 Sistemas de EDOs não lineares no Plano e o Teorema de Grobman-Hartman

Nesta seção vamos dar uma pequena noção do comportamento qualitativo de alguns sistemas de EDOs não lineares no plano.

Definição 1.5.1. *Dois campos vetoriais X, Y definidos em abertos U e V de $\mathbb{R}^2$, respectivamente, são ditos **topologicamente equivalentes** quando existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação.*

Observação 1.5.2. *Temos:*

1) *Se a aplicação h da definição acima for de classe $\mathcal{C}^r$ dizemos que X e Y são $\mathcal{C}^r$ -equivalentes.*

2) Denotando φ e ψ os fluxos de X e Y , respectivamente, dizemos que h é uma **conjugação topológica** se $h(\varphi(t, x, y)) = \psi(t, h(x, y))$.

3) Se a aplicação h de 2) for de classe C^r dizemos que X e Y são **C^r -conjugados**.

Exemplo 1.5.3. Consideremos os campos de vetores dados por $X = (x, -y)$ e $Y = (x, -y + x^3)$. Seus fluxos são dados respectivamente por

$$\varphi(t, x, y) = (xe^t, ye^{-t}) \quad \text{e} \quad \psi(t, x, y) = \left(xe^t, \left(y - \frac{x^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{x^3}{4} e^{3t} \right).$$

A aplicação $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4} \right)$ define uma C^r -conjugação.

Teorema 1.5.4 (Teorema do Fluxo Tubular). *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $p \in U$ um ponto regular de $X \in \mathcal{C}^k$. Então existe um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^k$ que conjugua X em uma vizinhança de p com o campo constante $Y = (1, 0)$ restrito a uma vizinhança da origem $(0, 0)$.*

Definição 1.5.5. Um ponto singular p de um campo vetorial $X = (f, g)$ de classe $\mathcal{C}^1$ chama-se **hiperbólico** se os auto-valores de

$$JX(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$$

tem parte real diferente de zero.

Verifica-se que $(0, 0)$ é uma singularidade hiperbólica do campo linear $X' = AX$ se, e somente se, os auto-valores de A tem parte real não-nula. Como vimos anteriormente, as fontes, os poços, os nós, as selas e os focos são hiperbólicos. Já o centro nos fornece um exemplo de singularidade não hiperbólica.

Um importante teorema envolvendo campos com singularidades hiperbólicas e campos lineares é o teorema a seguir.

Teorema 1.5.6 (Teorema de Grobman-Hartman). *Sejam $X = (f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in U$ um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças V de p em U e W de $(0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$ tais que $X|_V$ é topologicamente conjugado a $JX(p)$ restrito a W .*

1.6 Conjuntos Limites e o Teorema de Poincaré-Bendixon

Consideremos um sistema de EDOs no plano $X(x, y) : \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ onde f e g são de classe $\mathcal{C}^1$ em $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto.

Definição 1.6.1. Dizemos que $Q \in \omega(P)$ (Q está no ω -**limite** de P) se

$$\exists t_n \longrightarrow +\infty; \varphi(P, t_n) \longrightarrow Q,$$

onde $\varphi(P, t_n)$ denota o fluxo de X .

Dizemos que $Q \in \alpha(P)$ (Q está no α -**limite** de P) se

$$\exists t_n \longrightarrow -\infty; \varphi(P, t_n) \longrightarrow Q.$$

Na verdade o ω -limite e o α -limite dependem da órbita γ que passa por P . Assim mudaremos nossa notação para $\omega(\gamma)$ e $\alpha(\gamma)$.

Teorema 1.6.2 (Teorema de Poincaré-Bendixon). *Se a semi-órbita positiva é limitada e o ω -limite não contém singularidades então ele é uma órbita periódica, isto é, o traço de uma curva fechada.*

1.7 Estabilidade Estrutural e o Teorema de Peixoto

Um elemento indispensável no estudo das órbitas periódicas é a **transformação de Poincaré**. Esta transformação, que denotaremos por π , é muito utilizada para o estudo das órbitas periódicas do campo. O estudo de π nos proporcionará a descrição do comportamento do campo de vetores em uma vizinhança de uma órbita periódica γ .

Seja $\gamma = \varphi(t, p_0), 0 \leq t \leq \tau_0$ o traço de uma órbita periódica, passando por p_0 , de período τ_0 , de um campo X de classe $\mathcal{C}^1$, definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Seja Σ uma seção transversal a X em p_0 . É claro que, para todo $q \in \Sigma$ próximo de p_0 , a trajetória $\varphi(t, q)$ permanece próxima de γ , com t em um intervalo compacto pré-fixado. Definimos $\pi(q)$ como o primeiro ponto onde esta órbita intersecta Σ .

Denotando $\Sigma_0 \subset \Sigma$ o domínio de π , é claro que $p_0 \in \Sigma_0$, e $\pi(p_0) = p_0$. Note que como γ é uma órbita periódica de X , com $p_0 \in \gamma$, então $\pi(p_0) = p_0$. Veja figura 1.6

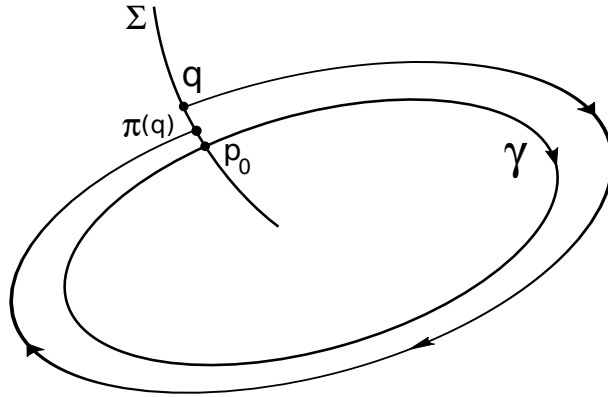


Figura 1.6: Órbita periódica γ com $p_0 \in \gamma$.

As órbitas periódicas de X vizinhas de γ correspondem aos pontos fixos de π isto é, $q \in \Sigma_0$ tal que $\pi(q) = q$.

A aplicação π assim definida é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$ sobre sua imagem (para maiores detalhes, veja [10]).

Definição 1.7.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo $\mathcal{C}^1$. Uma órbita periódica γ de X chama-se **ciclo limite** se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de X que intersecta V .

Existem apenas 3 tipos de ciclos limites:

- **Estável:**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V;$$

- **Instável:**

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V;$$

- **Semi-estável:**

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) &= 0, \forall q \in V \cap \text{ext}(\gamma) \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) &= 0, \forall q \in V \cap \text{int}(\gamma) \end{aligned}$$

ou o contrário.

É claro que γ , órbita periódica de X passando por p , é um ciclo limite se, e somente se, p é um ponto fixo isolado de π . Além disso:

- γ é **estável** se, e somente se,

$$|\pi(q) - p| < |q - p|, \forall q \neq p, \text{ próximo de } p;$$

- γ é **instável** se, e somente se,

$$|\pi(q) - p| > |q - p|, \forall q \neq p, \text{ próximo de } p;$$

- γ é **semi-estável** se, e somente se,

$$\begin{aligned} |\pi(q) - p| &< |q - p|, \forall q \neq p, q \in X \cap \text{ext}(\gamma), \text{ próximo de } p \\ |\pi(q) - p| &> |q - p|, \forall q \neq p, q \in X \cap \text{int}(\gamma), \text{ próximo de } p \end{aligned}$$

ou o contrário.

Em termos de derivada temos

$$\begin{aligned} \pi'(p) < 1 &\implies \gamma \text{ estável;} \\ \pi'(p) > 1 &\implies \gamma \text{ instável.} \end{aligned}$$

Uma fórmula que não demonstraremos aqui (veja [1]) é a seguinte

$$\pi'(p) = \exp \left(\int_0^T \text{div} X(\gamma(t)) dt \right)$$

onde T é o período de γ . Assim a estabilidade de γ pode ser verificada a partir do sinal de $\int_0^T \text{div} X(\gamma(t)) dt$.

Definição 1.7.2. *Sejam $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, um campo de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e γ uma órbita periódica de X :*

1. γ é dita **hiperbólica** se $\pi'(p) \neq 1$.

2. A **variedade estável** de γ é o conjunto

$$W^s(\gamma) = \{p \in U | \omega(p) = \text{traço de } \gamma\}.$$

3. A **variedade instável** de γ é o conjunto

$$W^u(\gamma) = \{p \in U | \alpha(p) = \text{traço de } \gamma\}.$$

Exemplo 1.7.3. Consideremos o campo de vetores dado por

$$X(x, y) = (y + x - x(x^2 + y^2), -x + y - y(x^2 + y^2)).$$

A expressão do campo em coordenadas polares é

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases}. \quad (1.8)$$

Note que $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 1$. Agora para $r = 0$, temos a singularidade $(0, 0)$ que, por sua vez, não é difícil ver que consiste de um foco repulsor com sentido horário.

Agora $r = 1$ consiste de um círculo unitário centrado na origem. Como essa órbita periódica é isolada, temos que ela consiste de um ciclo limite. Para analisarmos sua estabilidade, note que:

- Se $0 < r_0 < 1$, então $\dot{r} = r_0(1 - r_0^2) > 0$, ou seja, r é crescente. Portanto a trajetória do campo, com condição inicial no interior do ciclo, tende para o ciclo.
- Se $r_0 > 1$, então $1 - r_0^2 < 0$, e daí $\dot{r} = r_0(1 - r_0^2) < 0$, ou seja, r é decrescente, logo a trajetória do campo, com condição inicial no exterior do ciclo, também tende para o ciclo.

Portanto, o ciclo limite é estável e o retrato de fase de X é topologicamente equivalente a (1.8) que é dado pela figura 1.7.

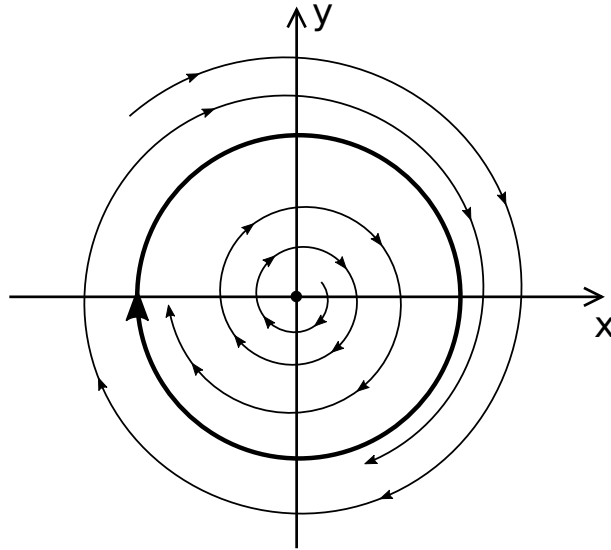


Figura 1.7: Retrato de fase de X com $(0,0)$ foco repulsor e $r=1$ um ciclo limite estável.

Disso, temos que $(0,0)$ é um foco repulsor com sentido horário e que o retrato de fase de X apresenta um ciclo limite estável cujo traço é a circunferência centrada na origem e com raio igual a 1.

Vejamos agora algumas considerações para definirmos um campo vetorial $\mathcal{C}^r$ -estruturalmente estável. Seja M uma região compacta e conexa de $\mathbb{R}^2$ com fronteira ∂M suave. Em outras palavras, suponhamos que existe uma função real $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ tal que

$$\begin{aligned} M &= \{(x, y) | F(x, y) > 0\} \\ \nabla F(p) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0), \forall p \quad \text{tal que} \quad F(p) \neq 0. \end{aligned}$$

As condições acima nos garantem que

$$\begin{cases} \partial M &= \{(x, y) | F(x, y) = 0\} \\ \text{int}(M) &= \{(x, y) | F(x, y) > 0\} \end{cases}.$$

Denotamos $X^r = X^r(M)$, $r \geq 1$, o conjunto dos campos vetoriais $X = (f, g)$ de classe $\mathcal{C}^r$ em M . Consideraremos X^r munido da norma

$$\|X\|_r = \sup_{p \in M} \{|X(p)| + |DX(p)| + \dots + |D_r X(p)|\}.$$

Definição 1.7.4. *O campo vetorial $X = (f, g) \in X^r$ é $\mathcal{C}^r$ -estruturalmente estável em M se existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $Y \in X^r$, com $\|Y - X\|_r < \delta$ existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que h transforma cada arco de trajetória de Y contido em M , num arco de trajetória de X , preservando o sentido dos mesmos.*

Definição 1.7.5. *Seja $X \in X^r$.*

- *Dizemos que $X \in \Sigma(1)$ se todos os pontos singulares de X são hiperbólicos e estão contidos em $\text{int}(M)$;*
- *Dizemos que $X \in \Sigma(2)$ se todas as órbitas periódicas de X são hiperbólicas e estão contidas em $\text{int}(M)$.*
- *Dizemos que $X \in \Sigma(3)$ se em todo ponto $p \in \partial M$, a órbita de X por p é transversal a ∂M ou tem contato parabólico.*
- *Dizemos que $X \in \Sigma(4)$ se não existem ligações de selas (chamadas **conexão de selas**), não existem trajetórias tangenciando ∂M e tendo como α ou ω -limites um ponto de sela e não existe trajetória de X que tangencie ∂M em dois pontos distintos (chamadas **conexões tangentes**).*

A seguir enunciaremos o Teorema de Peixoto, que relaciona o conjunto Σ^r e um campo $X \in \mathcal{C}^r$ -estruturalmente estável.

Teorema 1.7.6 (Teorema de Peixoto). *Seja o conjunto $\Sigma^r = \Sigma^r(M)$ definido por*

$$\Sigma^r(M) = \bigcap_{i=1}^{i=4} \Sigma(i)$$

- a) Σ^r é aberto e denso em $X^r(M)$, para $r \geq 1$.
- b) $X \in X^r(M)$ é $\mathcal{C}^r$ -estruturalmente estável $\iff X \in \Sigma^r(M)$.

Capítulo 2

Fluxos de costura e fluxos tangentes

Neste capítulo faremos uma discussão sobre diferentes campos de vetores definidos em domínios com fronteira em comum. Apresentaremos resultados necessários e suficientes que nos dizem como o fluxo passa de um domínio para outro (chamados domínios acessíveis e inacessíveis) e/ou como o fluxo tangencia tal fronteira. Por fim, discutiremos os conjuntos singulares na fronteira desses domínios. No capítulo seguinte esses conceitos serão retomados porém não com todo rigor aqui apresentado.

2.1 Domínios Acessíveis

Para qualquer sistema dinâmico descontínuo, existem muitos campos de vetores definidos em domínios diferentes no espaço de fase, e esta diferença entre dois campos de vetores em dois domínios adjacentes pode causar fluxos na fronteira correspondente serem não-suaves ou descontínuos. Para investigar a dinâmica de sistemas descontínuos, considere um sistema dinâmico descontínuo em um domínio universal $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, a passagem de um fluxo de um domínio para seu domínio adjacente será discutida primeiro. Assim, sub-domínios $\Omega_\alpha (\alpha \in I, I = \{1, 2, \dots, n\})$ do domínio universal $\mathcal{U}$ serão introduzidos e o campo de vetores nos sub-domínios podem ser diferentemente definidos. A acessibilidade do domínio pode fornecer uma possibilidade de modelo para sistemas dinâmicos descontínuos. As definições correspondentes de acessibilidade de domínio são dadas a seguir.

Definição 2.1.1. *Um sub-domínio de um domínio universal $\mathcal{U}$ em um sistema dinâmico descontínuo é denominado um sub-domínio **acessível** se pelo menos um campo de vetores específico e contínuo pode ser definido nesse sub-domínio.*

Definição 2.1.2. *Um sub-domínio de um domínio universal $\mathcal{U}$ em um sistema dinâmico descontínuo é denominado um sub-domínio **inacessível** se nenhum campo de vetores pode ser definido nesse sub-domínio.*

Desde que sub-domínios acessíveis e inacessíveis existam em sistemas dinâmicos descontínuos, o domínio universal $\mathcal{U}$ é classificado em domínios conectáveis e separáveis.

Definição 2.1.3. *Um domínio $\mathcal{U}$ no espaço de fase é denominado um domínio **conectável** se todos sub-domínios acessíveis do domínio universal podem ser conectados sem qualquer sub-domínio inacessível. A figura 2.1 ilustra um exemplo de domínio conectável.*

Definição 2.1.4. *Um domínio $\mathcal{U}$ é denominado um domínio **separável** se os sub-domínios acessíveis no domínio universal são separados por sub-domínios inacessíveis. A figura 2.2 ilustra um exemplo de domínio separável.*

Desde que qualquer sistema dinâmico descontínuo possua diferentes campos de vetores definidos em cada sub-domínio acessível, os comportamentos dinâmicos correspondentes Ω_α são distinguidos. Os diferentes comportamentos em sub-domínios distintos causam complexidade do fluxo no domínio $\mathcal{U}$ do sistema dinâmico descontínuo. Qualquer domínio conectável é limitado pela fronteira universal $S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ e cada sub-domínio é limitado pela superfície da fronteira do sub-domínio $S_{\alpha\beta} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ($\alpha, \beta \in I$) com ou sem a fronteira universal parcial.

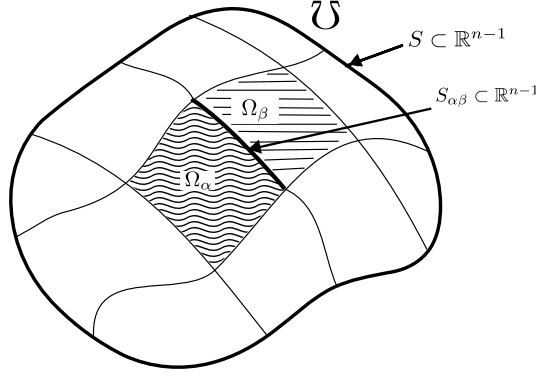


Figura 2.1: Exemplo de domínio conectável com Ω_α e Ω_β subdomínios acessíveis.

Observação 2.1.5. Nas figuras 2.1 e 2.2, temos o domínio universal $\mathcal{U}$ dividido em N sub-domínios acessíveis Ω_α ($\alpha \in I$) e sub-domínios inacessíveis Ω_0 , isto é, $\mathcal{U} = (\bigcup \Omega_\alpha) \cup \Omega_0$. No caso da figura 2.1, $\Omega_0 = \emptyset$ e $S_{\alpha\beta}$ é a fronteira comum aos sub-domínios acessíveis adjacentes Ω_α e Ω_β .

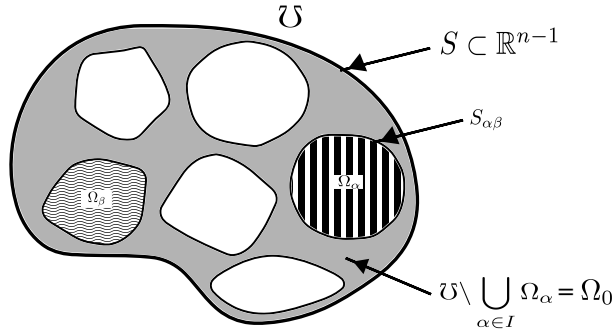


Figura 2.2: Exemplo de domínio separável com Ω_α e Ω_β sub-domínios acessíveis separados por um domínio inacessível em cinza.

Definiremos no α -ésimo sub-domínio aberto Ω_α , um sistema $\mathcal{C}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 1$) na forma de

$$\dot{x}^{(\alpha)} = F^{(\alpha)}(x^{(\alpha)}, t, p_\alpha) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad x^{(\alpha)} = (x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots, x_n^{(\alpha)})^T \in \Omega_\alpha. \quad (2.1)$$

O tempo é t e $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Em um sub-domínio acessível Ω_α , o campo de vetores $F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)$ com vetor parâmetro $p_\alpha = (p_\alpha^{(1)}, p_\alpha^{(2)}, \dots, p_\alpha^{(l)})^T \in \mathbb{R}^l$ é $\mathcal{C}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 1$) em $x \in \Omega_\alpha$

e para todo tempo t ; e o fluxo contínuo na equação (2.1) $x^{(\alpha)}(t) = \Phi^{(\alpha)}(x^{(\alpha)}(t_0), t, p_\alpha)$ com $x^{(\alpha)}(t_0) = \Phi^{(\alpha)}(x^{(\alpha)}(t_0), t_0, p_\alpha)$ é $\mathcal{C}^{r+1}$ -contínuo para o tempo t .

Para sistemas dinâmicos descontínuos, as seguintes suposições serão adotadas neste capítulo.

Hipótese 2.1.6. *A mudança de fluxo entre dois sub-sistemas adjacentes é contínua no tempo.*

Hipótese 2.1.7. *Para um sub-domínio acessível não-limitado Ω_α , existe um domínio limitado $D_\alpha \subset \Omega_\alpha$ onde um campo de vetores correspondente e seu fluxo é limitado, isto é,*

$$\|F^{(\alpha)}\| \leq k_1 \quad \text{e} \quad \|\Phi^{(\alpha)}\| \leq k_2 \quad \text{em} \quad D_\alpha, \quad \text{para} \quad t \in [0, \infty). \quad (2.2)$$

Hipótese 2.1.8. *Para um sub-domínio acessível limitado Ω_α , existe um domínio $D_\alpha \subset \Omega_\alpha$, onde o campo de vetores correspondente é limitado, mas o fluxo pode ser não-limitado, isto é,*

$$\|F^{(\alpha)}\| \leq k_1 \quad \text{e} \quad \|\Phi^{(\alpha)}\| \leq \infty \quad \text{em} \quad D_\alpha, \quad \text{para} \quad t \in [0, \infty). \quad (2.3)$$

2.2 Passagem do Fluxo

Considere subdomínios acessíveis adjacentes, onde para cada um está definido um sistema dinâmico diferente. Iremos nesta seção, apresentar condições necessárias e suficientes para que o fluxo passe de um sub-domínio para o outro de forma contínua. Tais fluxos são conhecidos na literatura como fluxos de costura (ou fluxos de passagem). Para um sub-domínio Ω_α existem k_α sub-domínios adjacentes com k_α partes de fronteiras ($k_\alpha \leq n - 1$). Considere a fronteira de quaisquer dois sub-domínios adjacentes, formada pela interseção de dois sub-domínios fechados (isto é, $\partial\Omega_{ij} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$, com $i, j \in I, j \neq i$), como mostrado na figura 2.3.

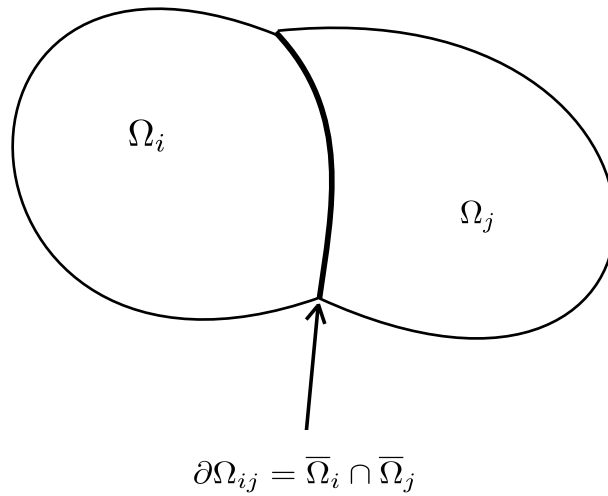


Figura 2.3: Subdomínios Ω_i, Ω_j e a fronteira correspondente $\partial\Omega_{ij}$.

Definição 2.2.1. A *fronteira* em um espaço de fase n -dimensional é definida como:

$$S_{ij} \equiv \partial\Omega_{ij} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \{x | \psi_{ij}(x, t, \lambda) = 0\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \quad (2.4)$$

com ψ_{ij} de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$).

Definição 2.2.2. Os dois sub-domínios Ω_i e Ω_j são **disjuntos** se a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é um conjunto vazio (isto é $\Omega_{ij} = \emptyset$).

Da definição 2.2.1, $\partial\Omega_{ij} = \partial\Omega_{ji}$. O fluxo na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ pode ser determinado por

$$\dot{x}^{(0)} = F^{(0)}(x^{(0)}, t) \quad \text{com} \quad \psi_{ij}(x^{(0)}, t, \lambda) = 0 \quad (2.5)$$

onde $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Com condições iniciais especificadas, sempre obtém-se diferentes fluxos em $\psi_{ij}(x^{(0)}, t, \lambda) = \psi_{ij}(x_0^{(0)}, t_0, \lambda) = 0$.

Definição 2.2.3. Se a interseção de 3 ou mais sub-domínios

$$\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \bigcap_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_k} \overline{\Omega}_\alpha \subset \mathbb{R}^r (r = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.6)$$

onde $\alpha_k \in I$ com I um conjunto de índices e $k \geq 3$ é não-vazia, o sub-domínio da interseção é denominado **conjunto singular**.

Para $r = 0$, os conjuntos singulares são pontos singulares, que são também chamados **pontos de cantos** ou **vértices**. Em outras palavras, qualquer ponto de canto é a interseção de superfícies de fronteira $(n-1)$ -dimensionais e n -linearmente independentes em um espaço de estado n -dimensional.

Para $r \in \{1, 2, 3, \dots, n-2\}$, os conjuntos singulares são superfícies singulares r -dimensionais nas fronteiras descontínuas $(n-1)$ -dimensionais. Na figura 2.4, o conjunto singular para 3 domínios de interseção $\{\overline{\Omega}_i, \overline{\Omega}_j, \overline{\Omega}_k\}$ ($i, j, k \in I$) é esboçado. Os símbolos circulares representam os conjuntos de interseção e o símbolo circular sólido maior representa o conjunto singular Γ_{ijk} .

A seguir, apresentaremos uma série de definições e resultados que nos diz como definir o campo de vetores e o fluxo nas fronteiras $\partial\Omega_{ij}$, isso dependendo da natureza das trajetórias em Ω_i e Ω_j e como cada uma delas encontra $\partial\Omega_{ij}$.

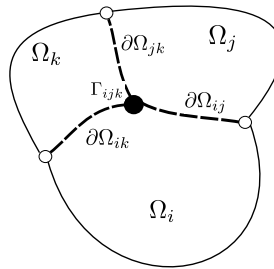


Figura 2.4: O conjunto singular Γ_{ijk} formado pela interseção de 3 domínios $\{\overline{\Omega}_i, \overline{\Omega}_j, \overline{\Omega}_k\}$ ($i, j, k \in I$).

Definição 2.2.4. Para um sistema dinâmico descontínuo (2.1), existe um ponto $x(t_m) = x_m \in \partial\Omega_{ij}$ no tempo t_m entre 2 domínios adjacentes Ω_α ($\alpha = i, j$). Para $\varepsilon > 0$ arbitrário e pequeno, existem dois intervalos de tempo $[t_{m-\varepsilon}, t_m)$ e $(t_m, t_{m+\varepsilon}]$ e suponha que $x^{(i)}(t_{m-}) = x_m = x^{(j)}(t_{m+})$. Um fluxo resultante de dois fluxos $x^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = i, j$) é chamado um **fluxo de costura** (ou **fluxo de passagem**) do domínio Ω_i para Ω_j no ponto (x_m, t_m) para a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ se os dois fluxos $x^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = i, j$) na vizinhança de $\partial\Omega_{ij}$ possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m-}) - x^{(i)}(t_{m-\varepsilon})] > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(j)}(t_{m+})] > 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j, \\ \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m-}) - x^{(i)}(t_{m-\varepsilon})] < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(j)}(t_{m+})] < 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde o vetor normal da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é

$$N_{\partial\Omega_{ij}} = \nabla\psi_{ij} \Big|_{x=x_m} = \left(\frac{\partial\psi_{ij}}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi_{ij}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\psi_{ij}}{\partial x_n} \right)^T \Big|_{x=x_m}. \quad (2.8)$$

Denotamos $t_{m\pm\varepsilon} = t_m \pm \varepsilon$, $t_{m\pm} = t_m \pm 0$ e $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j$ representa que o vetor normal da fronteira em (x_m, t_m) aponta para o domínio Ω_j . Além disso, a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ para fluxos de costura $x^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = i, j$) do domínio Ω_i para o domínio Ω_j é chamada **fronteira de costura** (expresso por $\overrightarrow{\partial\Omega_{ij}}$).

Faremos uma explicação geométrica de fluxo de costura, para isso, considere o fluxo $x^{(i)}(t)$ dado pelo sistema dinâmico (2.1) o qual irá costurar a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ através dos domínios Ω_α e Ω_β .

Suponhamos que o fluxo $x^{(i)}(t)$ atinja a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ no tempo t_m e no ponto x_m . Antes do fluxo atingir a fronteira, suponhamos que $x^{(i)}(t) \in \Omega_i$ para $t \in (t_{m-\varepsilon}, t_m)$, logo, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $x^{(i)}(t_{m-\varepsilon}) \rightarrow x_m$. Assim que o fluxo atinge a fronteira em x_m , $x^{(i)}(t)$ mudará para o fluxo $x^{(j)}(t)$ no domínio Ω_j . Suponhamos que $x^{(j)}(t) \in \Omega_j$ para $t \in (t_m, t_{m+\varepsilon})$ e que $x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) \rightarrow x_m$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Note que quando o fluxo $x^{(i)}(t)$ chega à fronteira de costura $\overrightarrow{\partial\Omega_{ij}}$, este pode tangenciá-la e retornar novamente a $\overrightarrow{\partial\Omega_{ij}}$, porém, uma vez que o fluxo $x^{(i)}(t)$ sai da fronteira, este não pode caminhar sobre $\overrightarrow{\partial\Omega_{ij}}$, porém o fluxo $x^{(j)}(t)$ pode também tangenciar $\overrightarrow{\partial\Omega_{ij}}$. Esses fluxos tangentes são importantes e serão discutidos mais adiante neste capítulo.

As duas figuras a seguir ilustram a passagem do fluxo através da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ através dos domínios Ω_i para Ω_j quando $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j$ (figura 2.5) e quando $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i$ (figura 2.6).

Utilizaremos, em alguns teoremas que apresentaremos no decorrer deste capítulo, uma hipótese comum a todos eles, que enunciaremos a seguir.

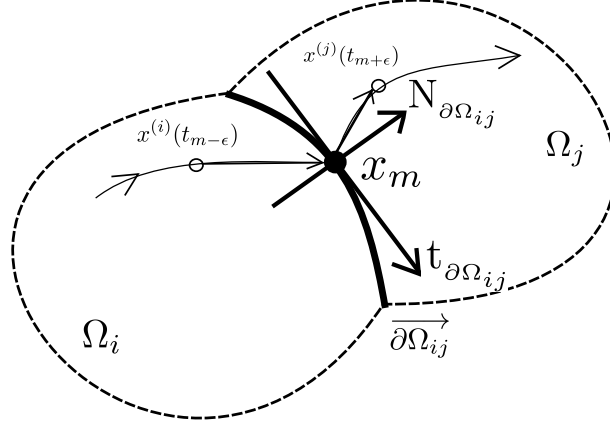


Figura 2.5: Fluxo passando através da fronteira de costura $\overrightarrow{\partial\Omega_{ij}}$ do domínio Ω_i para Ω_j quando $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_j$.

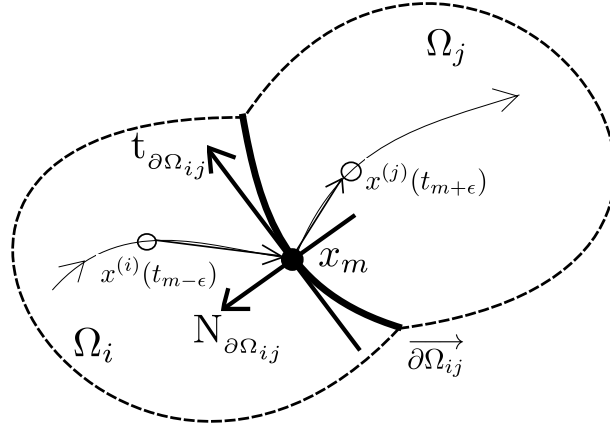


Figura 2.6: Fluxo passando através da fronteira de costura $\overrightarrow{\partial\Omega_{ij}}$ do domínio Ω_i para Ω_j quando $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_i$.

Hipótese 2.2.5. Considere um sistema dinâmico descontínuo dado por (2.1) e seja x_m um ponto na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ entre dois domínios adjacentes Ω_i e Ω_j tal que para um tempo t_m , temos $x(t_m) = x_m$. Suponha $\varepsilon > 0$ um valor arbitrariamente pequeno no qual o fluxo $x^{(i)}(t)$ esteja definido no intervalo $[t_{m-\varepsilon}, t_m)$ e o fluxo $x^{(j)}(t)$ esteja definido no intervalo $(t_m, t_{m+\varepsilon}]$ como $x^{(i)}(t_{m-}) = x_m = x^{(j)}(t_{m+})$.

A seguir apresentaremos uma condição necessária e suficiente para termos fluxo de costura.

Teorema 2.2.6. Consideremos as condições da hipótese 2.2.5 e dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ são $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m)}^{r_i}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_j}$ em t , respectivamente ($r_\alpha \geq 2, \alpha = i, j$). Suponhamos também que $\left\| \frac{d^{r_\alpha} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo resultante de $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é de costura do domínio Ω_i para Ω_j se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& \text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m+}) > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j, \\
& \text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m+}) < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Prova: Para um ponto $x_m \in \partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j$, suponha

$$x^{(i)}(t_{m-}) = x_m = x^{(j)}(t_{m+}).$$

Os dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ são $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^r$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^r$ ($r \geq 2$) para um tempo t , respectivamente. $\|\ddot{x}^{(\alpha)}(t)\| < \infty$ ($\alpha = i, j$) para $0 < \varepsilon \ll 1$. Considere $a \in [t_{m-\varepsilon}, t_{m-})$ e $b \in (t_{m-}, t_{m+\varepsilon}]$. A expansão em série de Taylor de $x^{(\alpha)}(t_{m\pm\varepsilon})$ com $t_{m\pm\varepsilon} = t_m \pm \varepsilon$ ($\alpha = i, j$) para $x^{(\alpha)}(a)$ e $x^{(\alpha)}(b)$ nos dá

$$\begin{aligned}
x^{(i)}(t_{m-\varepsilon}) &\equiv x^{(i)}(t_{m-} - \varepsilon) = x^{(i)}(a) + \dot{x}^{(i)}(a)(t_{m-} - \varepsilon - a) + o(t_{m-} - \varepsilon - a); \\
x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) &\equiv x^{(j)}(t_{m+} + \varepsilon) = x^{(j)}(b) + \dot{x}^{(j)}(b)(t_{m+} + \varepsilon - b) + o(t_{m+} + \varepsilon - b).
\end{aligned}$$

Se $a \rightarrow t_{m-}$ e $b \rightarrow t_{m+}$, os limites das equações acima nos levam a

$$\begin{aligned}
x^{(i)}(t_{m-\varepsilon}) &\equiv x^{(i)}(t_{m-} - \varepsilon) = x^{(i)}(t_{m-}) - \dot{x}^{(i)}(t_{m-})\varepsilon + o(\varepsilon); \\
x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) &\equiv x^{(j)}(t_{m+} + \varepsilon) = x^{(j)}(t_{m+}) + \dot{x}^{(j)}(t_{m+})\varepsilon + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $0 < \varepsilon \ll 1$, ε^2 e os termos de ordem maior das equações acima podem ser ignorados. Portanto, da primeira equação de (2.9), temos as seguintes relações

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m-}) - x^{(i)}(t_{m-\varepsilon})] = N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon > 0$$

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(j)}(t_{m+})] = N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m+}) \cdot \varepsilon > 0.$$

Logo, da definição 2.2.4, o fluxo é de costura de domínio Ω_i para o domínio Ω_j .

Por outro lado, da definição 2.2.4, o fluxo no ponto (x_m, t_m) na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j$ é de costura do domínio Ω_i para Ω_j usando as equações (2.10) acima e que $\varepsilon > 0$, temos verdadeira a primeira inequação de (2.9). Analogamente, mostra-se a equivalência do fluxo de costura com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i$ com a segunda inequação de (2.9). ■

Daremos agora o equivalente a esse teorema, mas para campos de vetores.

Teorema 2.2.7. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5 e dois campos de vetores $F^{(i)}(x, t, p_i)$ e $F^{(j)}(x, t, p_j)$ são $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_i}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_i}$ para o tempo t , respectivamente ($r_\alpha \geq 1, \alpha = i, j$). Suponhamos também que $\left\| \frac{d^{r_\alpha+1}x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha+1}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo resultante de dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é de costura do domínio Ω_i para Ω_j se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
& \text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m-}) > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(j)}(t_{m+}) > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j, \\
& \text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m-}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(j)}(t_{m+}) < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i
\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $F^{(i)}(t_{m-}) = F^{(i)}(x_m, t_{m-}, p_i)$ e $F^{(j)}(t_{m+}) = F^{(j)}(x_m, t_{m+}, p_j)$.

Prova: Para um ponto $x_m \in \partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j$, $x^{(i)}(t_{m-}) = x_m = x^{(j)}(t_{m+})$. Da equação (2.1), a primeira inequação de (2.11) é dada

$$\begin{aligned}
N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m-}) > 0, \\
N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m+}) &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m+}) > 0.
\end{aligned}$$

Do Teorema 2.2.6 e definição 2.2.4, o fluxo resultante no ponto (x_m, t_m) na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j$ é de costura. Analogamente, o fluxo resultante dos dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i$ é de costura sob as condições da segunda inequação de (2.11). ■

Como fizemos para um fluxo de costura, iremos agora definir os fluxos deslizantes e de escape.

Definição 2.2.8. Para um sistema dinâmico descontínuo (2.1), existe um ponto $x(t_m) \equiv x_m \in \partial\Omega_{ij}$ no tempo t_m entre dois domínios adjacentes Ω_α ($\alpha = i, j$). Para $\varepsilon > 0$ arbitrário e pequeno, existe um intervalo de tempo $[t_{m-\varepsilon}, t_m]$. Suponha que $x^{(\alpha)}(t_{m-}) = x_m$. Dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ são chamados **fluxos de deslize** no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ se os fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ na vizinhança da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ possuem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
& \text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m-}) - x^{(i)}(t_{m-\varepsilon})] > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m-}) - x^{(j)}(t_{m-\varepsilon})] < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j, \\
& \text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m-}) - x^{(i)}(t_{m-\varepsilon})] < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m-}) - x^{(j)}(t_{m-\varepsilon})] > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Definição 2.2.9. Para um sistema dinâmico descontínuo (2.1), existe um ponto $x(t_m) \equiv x_m \in \partial\Omega_{ij}$ no tempo t_m entre dois domínios adjacentes Ω_α ($\alpha = i, j$). Para $\varepsilon > 0$ arbitrário e pequeno, existe um intervalo de tempo $(t_m, t_{m+\varepsilon}]$. Suponha que $x^{(\alpha)}(t_{m+}) = x_m$. Dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ são chamados **fluxos de escape** no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ se os fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ na vizinhança da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ possuem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
&\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(i)}(t_{m+})] < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(j)}(t_{m+})] > 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j, \\
&\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(i)}(t_{m+})] > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(j)}(t_{m+})] < 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A fronteira $\partial\Omega_{ij}$ para dois fluxos de deslize (resp. fluxos de escape) $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) é chamada uma **fronteira de deslize** (resp. **fronteira de escape**), entre Ω_i e Ω_j , denotada por $\widetilde{\partial\Omega_{ij}}$ (resp. $\widehat{\partial\Omega_{ij}}$).

Os fluxos de deslize e escape da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ entre Ω_i e Ω_j são ilustrados nas figuras 2.7 e 2.8. Quando um fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = i, j$) no domínio Ω_α chega em uma fronteira de deslize $\widetilde{\partial\Omega_{ij}}$, o fluxo pode tangenciar ou deslizar sobre a fronteira de deslize $\widetilde{\partial\Omega_{ij}}$. Para a fronteira de escape $\widehat{\partial\Omega_{ij}}$, o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = i, j$) no domínio Ω_α pode tangenciar ou saltar da fronteira de escape $\widehat{\partial\Omega_{ij}}$. Neste capítulo, somente os fluxos tangente a uma fronteira de deslize ou de escape serão discutidos.

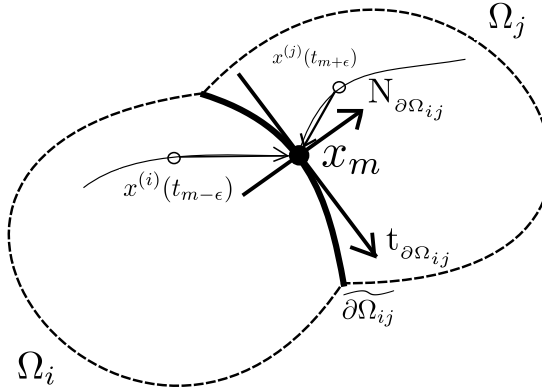


Figura 2.7: Fluxo de deslize para $\widetilde{\partial\Omega_{ij}}$.

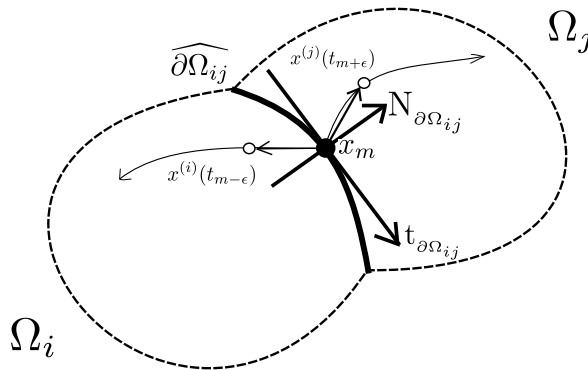


Figura 2.8: Fluxo de escape para $\widehat{\partial\Omega_{ij}}$.

Apresentaremos agora uma condição necessária e suficiente para termos fluxos deslizes.

Teorema 2.2.10. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5, um fluxo $x^\alpha(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ para o tempo t e $\left\| \frac{d^{r_\alpha} x^\alpha}{dt^{r_\alpha}} \right\| < \infty$ ($r_\alpha \geq 2, \alpha = i, j$). Dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ são fluxos de deslize se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m-}) < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j, \\ \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m-}) > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Prova: Seguindo procedimento análogo ao Teorema 2.2.6 temos que

$$\begin{aligned} x^{(i)}(t_{m-\varepsilon}) &\equiv x^{(i)}(t_{m-} - \varepsilon) = x^{(i)}(t_{m-}) - \dot{x}^{(i)}(t_{m-})\varepsilon + o(\varepsilon) \\ x^{(j)}(t_{m-\varepsilon}) &\equiv x^{(j)}(t_{m-} - \varepsilon) = x^{(j)}(t_{m-}) - \dot{x}^{(j)}(t_{m-})\varepsilon + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Como $0 < \varepsilon \ll 1$, ε^2 e termos de ordem maior da equação acima podem ser ignorados. Portanto, da equação (2.12) tem-se

$$\begin{aligned} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(i)}(t_{m-}) - x^{(i)}(t_{m-\varepsilon})] &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(j)}(t_{m-}) - x^{(j)}(t_{m-\varepsilon})] &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon < 0. \end{aligned}$$

Da definição 2.2.8, o fluxo no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j$ é deslizando do domínio Ω_i para Ω_j sob a condição na primeira equação da desigualdade (2.14). Analogamente, o fluxo no ponto (x_m, t_m) na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i$ é deslizando sob condições na segunda inequação em (2.14), e vice-versa. ■

Analogamente, apresentamos o equivalente a esse teorema para campos de vetores.

Teorema 2.2.11. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5, o campo de vetores $F^{(\alpha)}(x, t, p_i)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_i}$ ($r_\alpha \geq 1, \alpha = i, j$) e $\left\| \frac{d^{r_\alpha} F^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha+1}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). Os fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ são fluxos de deslize se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m-}) > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(j)}(t_{m-}) < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_j, \\ \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m-}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(j)}(t_{m-}) > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $F^{(\alpha)}(t_{m-}) = F^{(\alpha)}(x_m, t_{m-}, p_i)$ ($\alpha = i, j$).

Prova: Seguindo procedimento análogo ao Teorema 2.2.7, temos da equação (2.1) que

$$\begin{aligned} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m-}) &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m-}) > 0, \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m-}) &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(j)}(t_{m-}) < 0. \end{aligned}$$

Do Teorema 2.2.10 e definição 2.2.8, o fluxo resultante no ponto (x_m, t_m) na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_j$ é deslizante. Analogamente, o fluxo resultante dos dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_i$ é deslizante sob as condições da segunda inequação de (2.15) e seguindo a definição 2.2.8. ■

A seguir, apresentamos a condição necessária e suficiente para termos fluxos de escape.

Teorema 2.2.12. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5, o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{(t_m+, t_{m+\varepsilon})}^\alpha$ ($r_\alpha \geq 2, \alpha = i, j$) para o tempo t e $\left\| \frac{d^{r_\alpha} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha}} \right\| < \infty$ ($r_\alpha \geq 2$). Dois fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ são fluxos de escape se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m+}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m+}) > 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_j, \\ \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(i)}(t_{m+}) > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(j)}(t_{m+}) < 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_i. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Prova: A prova segue o mesmo procedimento do Teorema 2.2.10 fazendo as devidas adaptações e seguindo a definição 2.2.9. ■

Teorema 2.2.13. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5, o campos de vetores $F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)$ é $\mathcal{C}_{(t_m+, t_{m+\varepsilon})}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 1, \alpha = i, j$) e $\left\| \frac{d^{r_\alpha} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha+1}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). Os fluxos $x^{(i)}(t)$ e $x^{(j)}(t)$ no ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ são fluxos de escape se, e somente se,*

$$\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m+}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(j)}(t_{m+}) > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_j, \quad (2.17)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(i)}(t_{m+}) > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(j)}(t_{m+}) < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_i \quad (2.18)$$

onde $F^{(\alpha)}(t_{m+}) = F^{(\alpha)}(x_m, t_{m+}, p_\alpha)$ ($\alpha = i, j$).

Prova: A prova segue o mesmo procedimento do Teorema 2.2.11 fazendo as devidas adaptações e seguindo a definição 2.2.9. ■

2.3 Fluxos Deslizantes

Nesta seção, a singularidade local do fluxo e o fluxo tangente serão discutidos. As condições necessárias e suficientes correspondentes serão apresentadas.

Definição 2.3.1. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5 e o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_m-\varepsilon, t_m]}^{r_\alpha}$ e/ou $\mathcal{C}_{(t_m, t_m+\varepsilon]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 2, \alpha = i, j$) para o tempo t . O ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é **ponto crítico** para o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ se*

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) = 0 \quad \text{e/ou} \quad N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+}) = 0. \quad (2.19)$$

Usando a definição 2.3.1, obtemos a condição necessária e suficiente sobre o campo de vetores para termos pontos críticos.

Teorema 2.3.2. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5, um fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_m-\varepsilon, t_m]}^{r_\alpha}$ e/ou $\mathcal{C}_{(t_m, t_m+\varepsilon]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 2$) e o campo de vetores $F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)$ é $\mathcal{C}_{[t_m-\varepsilon, t_m]}^{r_\alpha-1}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_m+\varepsilon]}^{r_\alpha-1}$ para o tempo t , respectivamente. Suponhamos também que $\left\| \frac{d^{r_\alpha+1}x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha+1}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). Um ponto (x_m, t_m) da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é ponto crítico no fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ se, e somente se,*

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m-}) = 0 \quad \text{e/ou} \quad N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m+}) = 0. \quad (2.20)$$

onde $F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = F^{(\alpha)}(x, t_{m\pm}, p_\alpha)$.

Prova: Usando a equação (2.1) e a definição 2.3.1, o teorema pode ser provado.

Note que da equação (2.8), o vetor tangente dos fluxos de chegada e saída $x^{(\alpha)}(t_{m\pm})$ da fronteira $\partial\Omega_{ij}$ no domínio Ω_α ($\alpha = i, j$) é normal ao vetor normal da fronteira, então o fluxo de chegada é tangente à fronteira.

Definição 2.3.3. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5 e um fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_m-\varepsilon, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_m+\varepsilon]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 1, \alpha = i, j$) para o tempo t . O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = i, j$) em Ω_α é **tangente à fronteira** $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) se as seguintes condições se mantêm:*

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = 0. \quad (2.21)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta \quad (2.22)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \quad (2.23)$$

onde $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$.

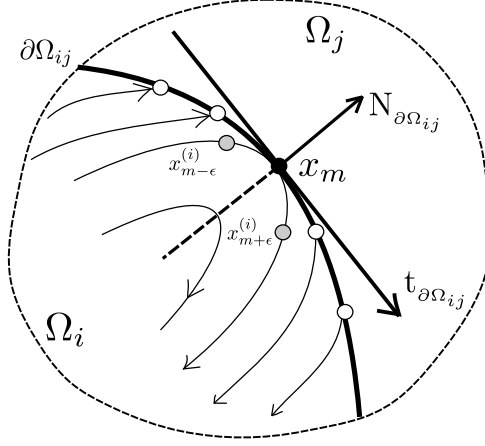


Figura 2.9: Um fluxo no domínio Ω_i tangente à fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_j$. Os círculos cinzas representam dois pontos $x_{m-\varepsilon}^{(i)}$ e $x_{m+\varepsilon}^{(i)}$ no fluxo antes e depois da tangência. O ponto de tangência x_m na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é representado por um círculo sólido preto.

Da equação 2.21, temos

$$\dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) = \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+}) \quad \text{mas} \quad \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm}) \neq \dot{x}^{(0)}(t_m). \quad (2.24)$$

A equação acima implica que o fluxo $x^{(\alpha)}$ na fronteira $\partial\Omega_{ij}$ é pelo menos $\mathcal{C}^1$ e este fluxo tangente é também denominado um fluxo deslizante.

Teorema 2.3.4. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5, um fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 2, \alpha = i, j$) para o tempo t e $\left\| \frac{d^{r_\alpha} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) se, e somente se,*

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = 0; \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [\dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [\dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon})] < 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta \\ \text{ou} \quad & \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [\dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [\dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon})] > 0 \end{cases} & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$.

Prova: A equação (2.25) é idêntica a primeira condição na equação (2.20). Considere, usando a expansão em Taylor

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t_{m\pm}) &\equiv x^{(\alpha)}(t_{m\pm} \pm \varepsilon \mp \varepsilon) = x^{(\alpha)}(t_{m\pm} \pm \varepsilon) \mp \varepsilon \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm} \pm \varepsilon) + o(\varepsilon) \\ &= x^{(\alpha)}(t_{m\pm\pm}) \mp \varepsilon \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm\pm}) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Para $0 < \varepsilon \ll 1$, os termos de ordem maior na equação acima podem ser ignorados.

Portanto,

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] = N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})\varepsilon,$$

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] = N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon})\varepsilon.$$

Da equação (2.26), o primeiro caso é

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon}) > 0 \quad \text{e} \quad N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) < 0$$

do qual a equação (2.22) mantém para $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta$ ($\beta \neq \alpha$). Porém, o segundo caso é

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon}) < 0 \quad \text{e} \quad N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) > 0$$

do qual a equação (2.23) mantém para $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha$. Portanto, da Definição 2.3.3, o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ para o tempo $t \in [t_{m-\varepsilon}, t_{m+\varepsilon}]$ em Ω_α é tangente à fronteira $\partial\Omega_{ij}$. ■

Nota-se que o teorema acima mencionado pode ser usado para superfícies de fronteira.

Enunciemos o resultado equivalente a esse teorema, mas para campo de vetores.

Teorema 2.3.5. *Consideremos as condições da hipótese 2.2.5, o campo de vetores $F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 1, \alpha = i, j$) para o tempo t e $\left\| \frac{dr_\alpha+1 x^{(\alpha)}}{dt r_\alpha+1} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) se, e somente se,*

$$N^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = 0; \quad (2.27)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon}) > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon}) < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta \\ \\ \\ \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \end{matrix} \quad (2.28)$$

onde $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$.

Prova: Usando a equação (2.1) e o Teorema 2.3.4, temos a prova deste teorema. ■

Por simplicidade, considere planos $(n-1)$ -dimensionais nos espaços de estado como sendo a fronteira de separação dos sistemas dinâmicos descontínuos, e as correspondentes tangências nessas fronteiras planas $(n-1)$ -dimensionais serão discutidas a seguir. Como o vetor normal $N_{\partial\Omega_{ij}}$ para as fronteiras planas $(n-1)$ -dimensionais não muda com relação a localização, as condições correspondentes para um fluxo tangente à estas fronteiras podem ajudar a entender o conceito de fluxo tangente às diversas fronteiras de separação de sistema dinâmico descontínuo.

Para os próximos resultados deste capítulo, vamos considerar a seguinte hipótese.

Hipótese 2.3.6. Considere um sistema dinâmico descontínuo dado pela equação (2.1) e seja x_m um ponto na fronteira plana $(n-1)$ -dimensional $\partial\Omega_{ij}$ entre dois domínios adjacentes Ω_i e Ω_j tal que para um tempo t_m , temos $x(t_m) = x_m$. Suponha $\varepsilon > 0$ um valor arbitrariamente pequeno no qual o fluxo $x^{(i)}(t)$ esteja definido no intervalo $[t_{m-\varepsilon}, t_m)$ e o fluxo $x^{(j)}(t)$ esteja definido no intervalo $(t_m, t_{m+\varepsilon}]$ com $x^{(i)}(t_{m-}) = x_m = x^{(j)}(t_{m+})$.

Teorema 2.3.7. Consideremos as condições da hipótese 2.3.6, o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 3, \alpha = i, j$) para o tempo t e $\left\| \frac{d^{r_\alpha} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira plana $(n-1)$ -dimensional $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) se, e somente se

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = 0; \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm}) < 0 \quad \text{para} \quad N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta \\ \text{ou} \quad & N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm}) > 0 \quad \text{para} \quad N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$.

Prova: A equação (2.29) é idêntica a equação (2.21), então a primeira condição na equação (2.21) é satisfeita. Da definição 2.3.3, considere a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta$ ($\beta \neq \alpha$) primeiro. Suponha $x^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = x_m$ ($\alpha = i, j$) e um fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_i}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_j}$ ($r_\alpha \geq 3, \alpha = i, j$) para o tempo t . Para $a \in [t_{m-\varepsilon}, t_m)$ e $a \in (t_m, t_{m+\varepsilon}]$, a expansão em séries de Taylor de $x^{(\alpha)}(t_{m\pm\varepsilon})$ para $x^{(\alpha)}(a)$ até a terceira ordem nos dá

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t_{m\pm\varepsilon}) &= x^{(\alpha)}(t_m \pm \varepsilon) = x^{(\alpha)}(a) + \dot{x}^{(\alpha)}(a) \cdot (t_{m\pm} \pm \varepsilon - a) + \\ &\quad + \ddot{x}^{(\alpha)}(a) \cdot (t_{m\pm} \pm \varepsilon - a)^2 + o((t_{m\pm} \pm \varepsilon - a)^3). \end{aligned}$$

Como $a \rightarrow t_{m\pm}$, o limite da equação acima nos leva a

$$x^{(\alpha)}(t_{m\pm\varepsilon}) = x^{(\alpha)}(t_m \pm \varepsilon) = x^{(\alpha)}(t_{m\pm}) \pm \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm})\varepsilon + \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m\pm})\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3).$$

Como $0 < \varepsilon \ll 1$, temos que ε^3 e termos de ordem maior tornam-se irrelevantes e podem ser ignorados, logo o desenvolvimento da equação acima e a multiplicação a esquerda por $N_{\partial\Omega_{ij}}$ nos dá

$$\begin{aligned} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] &= -N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon - N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon^2 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon + N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m+}) \cdot \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Da equação (2.29), obtém-se,

$$\begin{aligned} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] &= -N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon^2 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m+}) \cdot \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Para a fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta$, usando a primeira inequação da equação (2.30), as duas equações acima nos leva a

$$\begin{aligned} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] &= -N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon^2 > 0, \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \ddot{x}^{(\alpha)}(t_{m+}) \cdot \varepsilon^2 < 0. \end{aligned}$$

Da definição 2.3.3, a primeira inequação da equação (2.30) é obtida. Analogamente, usando a segunda inequação da equação (2.30), obtém-se

$$\begin{aligned} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] &= -N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m-}) \cdot \varepsilon^2 < 0, \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \dot{x}^{(\alpha)}(t_{m+}) \cdot \varepsilon^2 > 0. \end{aligned}$$

Para a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \longrightarrow \Omega_\alpha$. Portanto, sob a equação (2.30), o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em um domínio Ω_α é tangente a fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$, e vice-versa. ■

Teorema 2.3.8. *Considerando as condições da hipótese 2.3.6, o campo de vetores $F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon})}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 2, \alpha = i, j$) para o tempo t e $\left\| \frac{d^{r_\alpha+1} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha+1}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) se, e somente se,*

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = 0; \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot DF^{(\alpha)}(t_{m\pm}) &< 0 \quad \text{para} \quad N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta \\ \text{ou} \quad N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot DF^{(\alpha)}(t_{m\pm}) &> 0 \quad \text{para} \quad N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$ e a diferenciação total ($p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$)

$$DF^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = \left\{ \left[\frac{\partial F_p^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial x_q} \right]_{n \times n} F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) + \frac{\partial F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial t} \right\} \Big|_{(x_m, t_{m\pm})}. \quad (2.33)$$

Prova: Usando as equações (2.1) e (2.31), tem-se que a primeira condição da equação (2.21) é satisfeita. A derivada da equação (2.23) com o respectivo tempo nos dá

$$\ddot{x} = DF^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha) = \left\{ \left[\frac{\partial F_p^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial x_q} \right]_{n \times n} \dot{x} + \frac{\partial}{\partial t} F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha) \right\}.$$

Para $t = t_{m\pm}$ e $x = x_m$, a multiplicação à esquerda por $N_{\partial\Omega_{ij}}$ da equação acima nos dá

$$N^T \cdot \ddot{x}(t_{m\pm}) = N^T \cdot \left\{ \left[\frac{\partial F_p^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial x_q} \right]_{n \times n} F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) + \frac{\partial F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial t} \right\} \Big|_{(x_m, t_{m\pm})}$$

onde $F^{(\alpha)}(x_m, t_{m\pm}, p_\alpha) = F^{(\alpha)}(t_{m\pm})$. Usando a equação (2.32), a equação acima nos leva à equação (2.30). Do Teorema 2.3.7, o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) , e vice-versa. ■

Vamos agora falar de tangência de ordem ímpar com a fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$.

Definição 2.3.9. Consideremos as condições da hipóteses 2.3.6 e o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 2l_\alpha$) para o tempo t . O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) com ordem $(2l_\alpha - 1)$ se

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \frac{d^{k_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{k_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} = 0 \quad \text{para } k_\alpha = 1, 2, \dots, 2l_\alpha - 1 \quad (2.34)$$

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} \neq 0; \quad (2.35)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] > 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] < 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta \quad (2.36)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] < 0 \\ N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] > 0 \end{cases} \quad \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \quad (2.37)$$

onde $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$.

Teorema 2.3.10. Consideremos as condições da hipótese 2.3.6, um fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 2l_\alpha + 1$) para o tempo t e $\left\| \frac{d^{r_\alpha} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) de ordem $(2l_\alpha - 1)$ se, e somente se,

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \frac{d^{k_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{k_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} = 0 \quad \text{para } k_\alpha = 1, 2, \dots, 2l_\alpha - 1; \quad (2.38)$$

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} \neq 0; \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \text{ou } N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} < 0 & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta \\ \text{ou } N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} > 0 & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \end{cases} \quad (2.40)$$

onde $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$.

Prova: Para as equações (2.38) e (2.39), as duas primeiras condições na definição 2.3.9 são satisfeitas. Considere a fronteira $\partial\Omega_{ij}$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta$ ($\beta \neq \alpha$) primeiro. Escolha $a \in [t_{m-\varepsilon}, t_m)$ ou $a \in (t_m, t_{m+\varepsilon}]$, e a expansão da série de Taylor de $x^{(\alpha)}(t_{m\pm})$ em $x^{(\alpha)}(a)$ e até a ordem $(2l_\alpha)$ nos dá

$$\begin{aligned}
x^{(\alpha)}(t_{m\pm\varepsilon}) &= x^{(\alpha)}(t_{m\pm} \pm \varepsilon) = \\
&= x^{(\alpha)}(a) + \sum_{k_\alpha=1}^{2l_\alpha-1} \frac{d^{k_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{k_\alpha}} \Big|_{t=a} (t_{m\pm} \pm \varepsilon - a)^{k_\alpha} + \\
&\quad + \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=a} (t_{m\pm} \pm \varepsilon - a)^{2l_\alpha} + o((t_{m\pm} \pm \varepsilon - a)^{2l_\alpha}).
\end{aligned}$$

Como $a \rightarrow t_{m\pm}$, da equação acima segue

$$\begin{aligned}
x^{(\alpha)}(t_{m\pm\varepsilon}) &= x^{(\alpha)}(t_{m\pm}) + \sum_{k_\alpha=1}^{2l_\alpha-1} \frac{d^{k_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{k_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} (\pm\varepsilon)^{k_\alpha} + \\
&\quad + \varepsilon^{2l_\alpha} \cdot \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=t_{m\pm}} + o((\pm\varepsilon)^{2l_\alpha}).
\end{aligned}$$

Com as equações (2.38) e (2.39), o desenvolvimento da equação acima e a multiplicação à esquerda por $N_{\partial\Omega_{ij}}$ produz

$$\begin{aligned}
N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m-}) - x^{(\alpha)}(t_{m-\varepsilon})] &= -N_{\partial\Omega_{ij}}^T \varepsilon^{2l_\alpha} \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=t_{m-}}, \\
N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot [x^{(\alpha)}(t_{m+\varepsilon}) - x^{(\alpha)}(t_{m+})] &= N_{\partial\Omega_{ij}}^T \varepsilon^{2l_\alpha} \frac{d^{2l_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{2l_\alpha}} \Big|_{t=t_{m+}}.
\end{aligned}$$

Pela equação (2.40) a condição (2.36) é satisfeita, e vice-versa. Portanto, o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ no domínio Ω_α é tangente à $\partial\Omega_{ij}$ de ordem $(2l_\alpha - 1)$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta$. Analogamente, sob a condição (2.40), o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ no domínio Ω_α é tangente à fronteira $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) de ordem $(2l_\alpha - 1)$ com $N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha$. Este teorema está provado. ■

Teorema 2.3.11. *Consideremos as condições da hipótese 2.3.6, o campo de vetores $F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)$ é $\mathcal{C}_{[t_{m-\varepsilon}, t_m]}^{r_\alpha}$ e $\mathcal{C}_{(t_m, t_{m+\varepsilon}]}^{r_\alpha}$ ($r_\alpha \geq 2l_\alpha$) para o tempo t e $\left\| \frac{d^{r_\alpha+1} x^{(\alpha)}}{dt^{r_\alpha+1}} \right\| < \infty$ ($\alpha = i, j$). O fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) de ordem $(2l_\alpha - 1)$ se, e somente se,*

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot D^{k_\alpha-1} F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) = 0 \quad \text{para } k_\alpha = 1, 2, \dots, 2l_\alpha - 1; \quad (2.41)$$

$$N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot D^{2l_\alpha-1} F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) \neq 0; \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} \text{ou } N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot D^{2l_\alpha-1} F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) < 0 & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\beta, \\ \text{ou } N_{\partial\Omega_{ij}}^T \cdot D^{2l_\alpha-1} F^{(\alpha)}(t_{m\pm}) > 0 & \text{para } N_{\partial\Omega_{ij}} \rightarrow \Omega_\alpha \end{cases} \quad (2.43)$$

onde a diferenciação total

$$D^{k_\alpha-1} F^{(\alpha)}(t_m) = D^{k_\alpha-2} \left\{ \left[\frac{\partial F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial x_q} \right]_{n \times n} \dot{x} + \frac{\partial F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial t} \right\} \Big|_{(x_m, t_m)} \quad (2.44)$$

com $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k_\alpha \in \{2, 3, \dots, 2l_\alpha\}$ e $\alpha, \beta \in \{i, j\}$ mas $\beta \neq \alpha$.

Prova: A derivada de ordem k_α da equação (2.1) com respeito ao tempo nos dá

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^{k_\alpha} x^{(\alpha)}(t)}{dt^{k_\alpha}} \right|_{(x_m, t_m)} &= \left. \frac{d^{k_\alpha-1} \dot{x}^{(\alpha)}(t)}{dt^{k_\alpha-1}} \right|_{(x_m, t_m)} = \left. \frac{d^{k_\alpha-1} F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{dt^{k_\alpha-1}} \right|_{(x_m, t_m)} \equiv \\ &\equiv D^{k_\alpha-1} F^{(\alpha)}(t_m) = D^{k_\alpha-2} \left\{ \left[\frac{\partial F_p^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial x_q} \right]_{n \times n} \dot{x} + \frac{\partial F^{(\alpha)}(x, t, p_\alpha)}{\partial t} \right\} \bigg|_{(x_m, t_m)} \end{aligned}$$

Usando a equação acima para as condições nas equações (2.41), (2.42), (2.43) e (2.44), e o Teorema 2.3.10 o fluxo $x^{(\alpha)}(t)$ em Ω_α é tangente à fronteira plana $\partial\Omega_{ij}$ no ponto (x_m, t_m) de ordem $(2l_\alpha - 1)$ do Teorema 2.3.10. Portanto, este teorema está provado. ■

Capítulo 3

Regularização de Campos de Vetores Descontínuos

Neste capítulo iremos estudar a regularização de campos de vetores descontínuos no plano. De início, iremos introduzir definições preliminares e notações para os campos de vetores. Na seção 2, é fornecido um estudo local das singularidades e comportamento das separatrizes decorrentes da regularização. As seções 3 e 4 estudam a hiperbolicidade das órbitas periódicas obtidas da regularização. A seção 5 contém a afirmação e prova do resultado principal deste capítulo.

3.1 Definições Preliminares

Seja M a esfera em $\mathbb{R}^3$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{C}^\infty$ tendo 0 como valor regular, ou seja, $\nabla f(0) \neq \vec{0}$. Assumimos para simplificar, que $S = f^{-1}(0)$ tem uma única componente conexa de tal modo que $M \setminus S$ tem duas componentes conexas, que são dois discos denotados por $M^+ = f^{-1}(0, \infty)$ e $M^- = f^{-1}(-\infty, 0)$.

Denote por $\mathcal{X}^r$ o espaço dos campos de vetores $\mathcal{C}^\infty$ em M ($r > 1$). Seja $\Omega = \Omega(M, f)$ o espaço dos campos de vetores Z em M definido por:

$$Z(q) = \begin{cases} X(q), & \text{se } f(q) > 0, \\ Y(q), & \text{se } f(q) < 0. \end{cases}$$

onde $X, Y \in \mathcal{X}^r$. Para os campos X e Y escrevemos $Z = (X, Y)$.

Definição 3.1.1. *Seja $Xf : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por*

$$Xf(x, y) = X(x, y) \cdot \nabla f(x, y)$$

onde X é um campo de vetores definido em $\mathcal{X}^r$ e $\nabla f(x, y)$ é o vetor gradiente de f no ponto (x, y) . De maneira análoga, definimos $Yf(x, y) = Y(x, y) \cdot \nabla f(x, y)$.

Definimos ainda $X^n f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de tal forma que

$$X^n f(x, y) = X(x, y) \cdot \nabla (X^{n-1} f)(x, y).$$

Dado qualquer $Z = (X, Y)$ em Ω , seguindo a terminologia de Filippov [3], distinguimos as seguintes regiões em S .

- **Região de Costura** (SW), caracterizada por $(Xf)(Yf) > 0$.

- **Região de Escape (ES)**, dada pelas inequações $Xf > 0$ e $Yf < 0$.
- **Região de Deslize (SL)**, dada por $Xf < 0$ e $Yf > 0$. Nessa região definimos o campo de vetores $F^+ = F^+(X, Y)$ (chamado o SL-campo de vetores associado a $Z = (X, Y)$) como segue. Se $p \in SL$, então $F^+(p)$ denota o vetor no cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ e tangente à S .

A figura 3.1 ilustra exemplos de regiões de costura, escape e deslize.

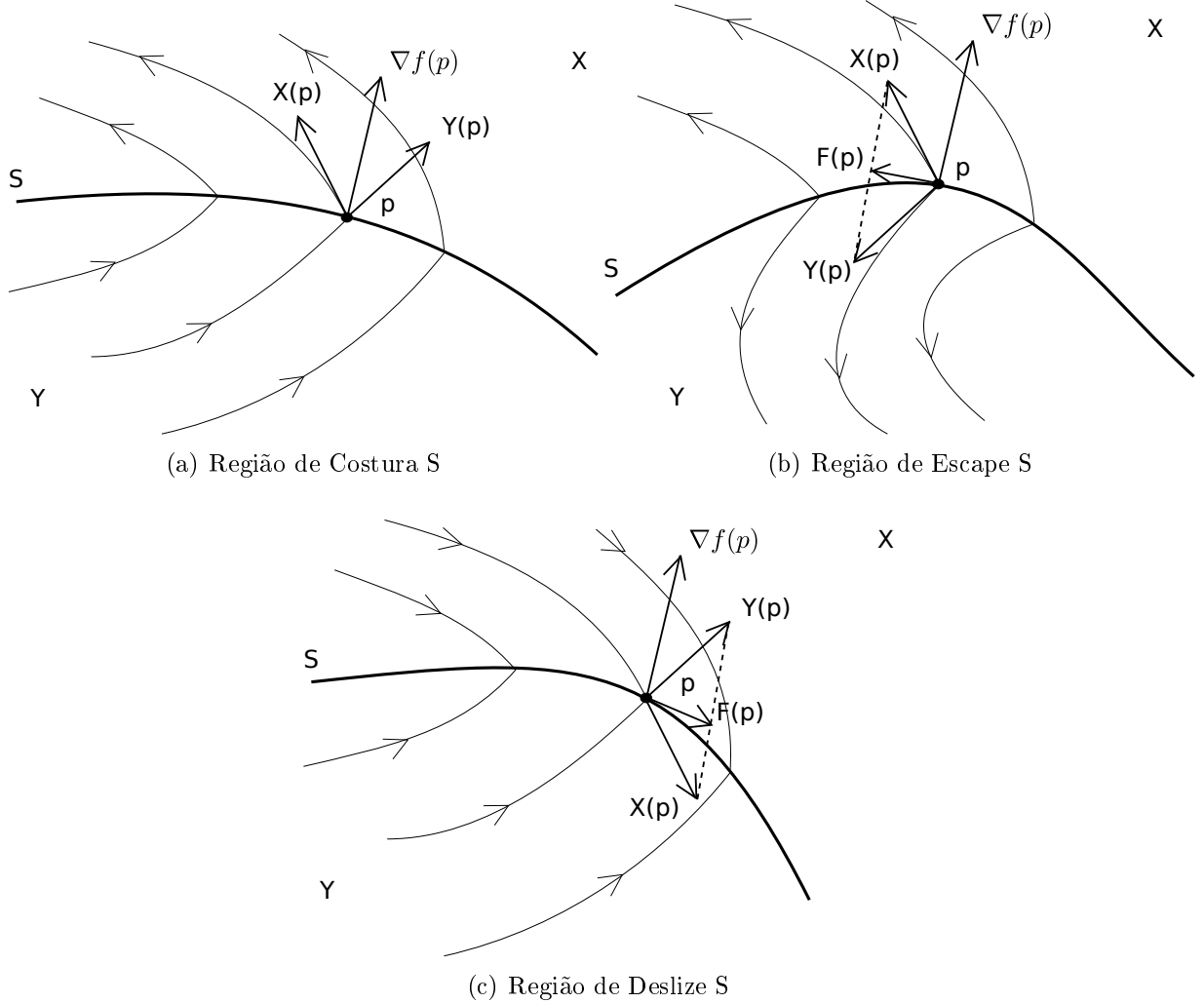


Figura 3.1: Exemplos de regiões de costura, escape e deslize em S .

Observação 3.1.2. Em ES definimos um outro campo de vetores F^- dado por $F^- = -F^+(X, Y)(p)$. Referimos a F^+ ou F^- por $F(Z)$.

Definição 3.1.3. Uma função C^∞ $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **função de transição** se $\varphi(t) = 0$ para $t \leq -1$, $\varphi(t) = 1$ para $t \geq 1$ e $\varphi'(t) > 0$ se $t \in (-1, 1)$. A figura 3.2 ilustra um exemplo de um gráfico de uma função de transição.

Definição 3.1.4. Uma φ -regularização de $Z = (X, Y) \in \Omega$ é uma família de campo de vetores Z_ε associada a um parâmetro ε em $\mathcal{X}^r$ dada por

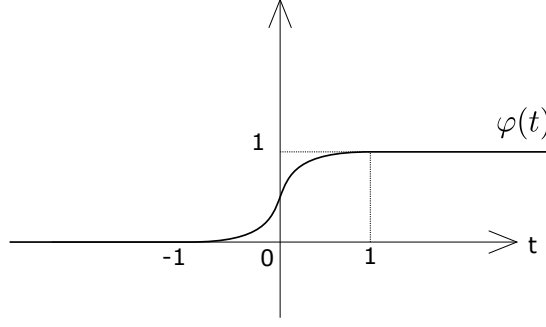


Figura 3.2: Exemplo do gráfico de uma função de transição.

$$Z_\varepsilon(q) = [1 - \varphi_\varepsilon(f(q))]Y(q) + \varphi_\varepsilon(f(q))X(q)$$

onde $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$.

Neste capítulo, daremos condições sobre $Z = (X, Y)$ que determinam o retrato de fase global de sua regularização e garanta a estabilidade de Z_ε , para qualquer função de transição e ε pequeno. Isto será feito usando a seguinte caracterização da classe Σ^r do campo de vetores estruturalmente estável em subvariedades suaves de M , devido a Andronov-Pontryaguin e Peixoto (veja [6]).

Seja N uma subvariedade bidimensional de M , com fronteira $\partial N = B$ e $X|_N$ a restrição de um campo de vetores X de $\mathcal{X}_r$ para N .

Definição 3.1.5. Chamaremos $\Sigma^r(N)$ a classe de todos os campos de vetores $X \in \mathcal{X}^r$ que satisfazem as seguintes condições:

1. Todos os pontos singulares e órbitas periódicas de $X|_N$ são hiperbólicas e estão contidas no interior de N ;
2. Qualquer tangência entre a trajetória de X e B é quadrática;
3. $X|_N$ não tem conexões de sela ou conexões tangentes.

Deve ser mencionado que a estabilidade estrutural dentro da classe de sistemas descontínuos foi estudado por Koslova (veja [4]) sem apelo a métodos de regularização.

3.2 Configurações Locais

Seja $p \in S$ e $Z = (X, Y)$.

Definição 3.2.1. Dizemos que um ponto p em S é um **ponto de dobra** de $X \in \mathcal{X}^r$ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$. Isto significa que o contato entre a órbita de X por p e S é quadrático.

Definição 3.2.2. Um ponto $p \in S$ é um **ponto S-regular** de Z se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $Xf(p) \cdot Yf(p) > 0$ (isto significa que $p \in SW$);
2. $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$ mas $\det[X, Y](p) \neq 0$. Isto significa que p pertence ou a SL ou a ES e não é ponto crítico de $F(Z)$.

Definição 3.2.3. Um ponto $p \in S$ é chamado um **ponto crítico** de $F(Z)$ se $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$ e $\det[X, Y](p) = 0$. Se temos $d(\det[X, Y]|_S)(p) \neq 0$, então p é chamado um **ponto crítico hiperbólico** de $F(Z)$.

Seja $p \in S$ um ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$. O ponto p é chamado uma **sela** se $p \in SL$ e $d(\det[X, Y]|_S)(p) > 0$ ou $p \in ES$ e $d(\det[X, Y]|_S)(p) < 0$. O ponto p é chamado **nó** se $p \in SL$ e $d(\det[X, Y]|_S)(p) < 0$ ou se $p \in ES$ e $d(\det[X, Y]|_S)(p) > 0$.

A figura 3.3 ilustra alguns exemplos de pontos críticos de sela em uma região de deslize ou de escape e ponto de dobra do campo X .

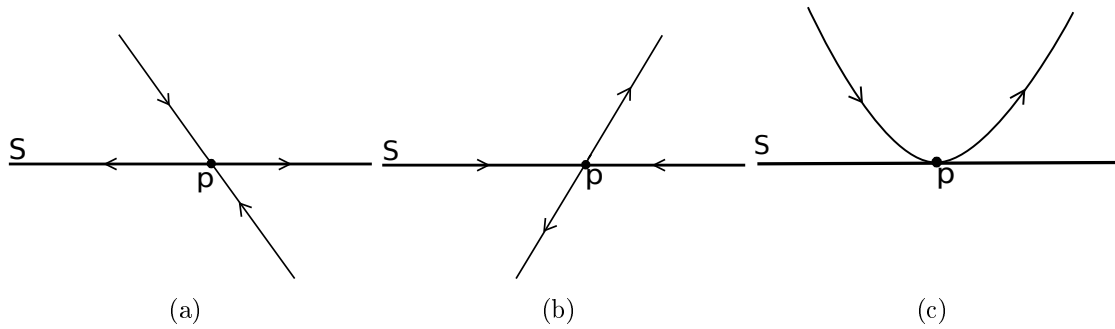


Figura 3.3: Pontos críticos para $F(Z)$; (a) sela quando p está na região de deslize; (b) sela quando p está na região de escape e (c) dobra de $X \in \mathcal{X}^r$.

As figuras 3.4 e 3.5 abaixo representam uma região de costura e de deslize em Z e suas respectivas regularizações no campo Z_ϵ .

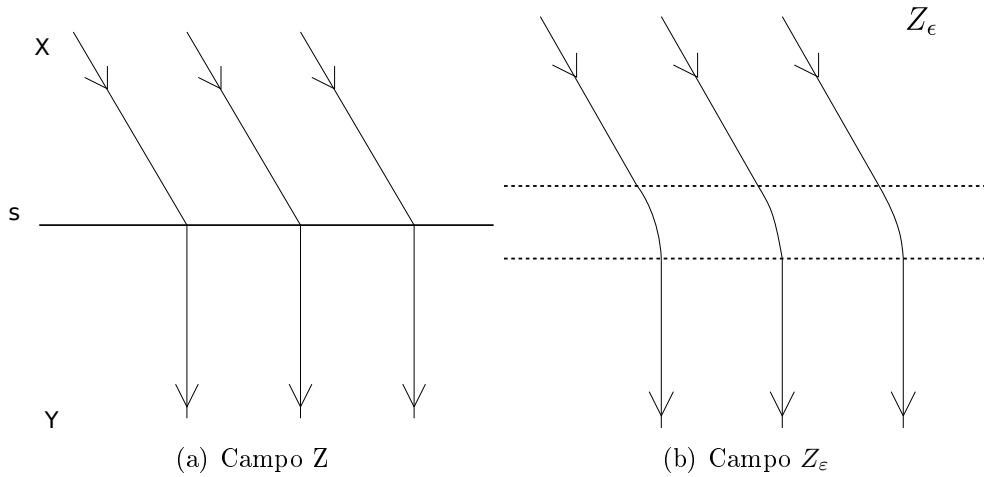


Figura 3.4: Região de Costura e sua regularização.

'ws

Observação 3.2.4. Se $\det[X, Y](p) \neq 0$ então temos que $X(p)$ e $Y(p)$ são LI, ou seja, não são paralelos.

Definimos agora uma singularidade S-elementar de Z .

Definição 3.2.5. Um ponto $p \in S$ é um ponto **S-singular elementar** de $Z = (X, Y)$ se uma das seguintes condições é satisfeita:

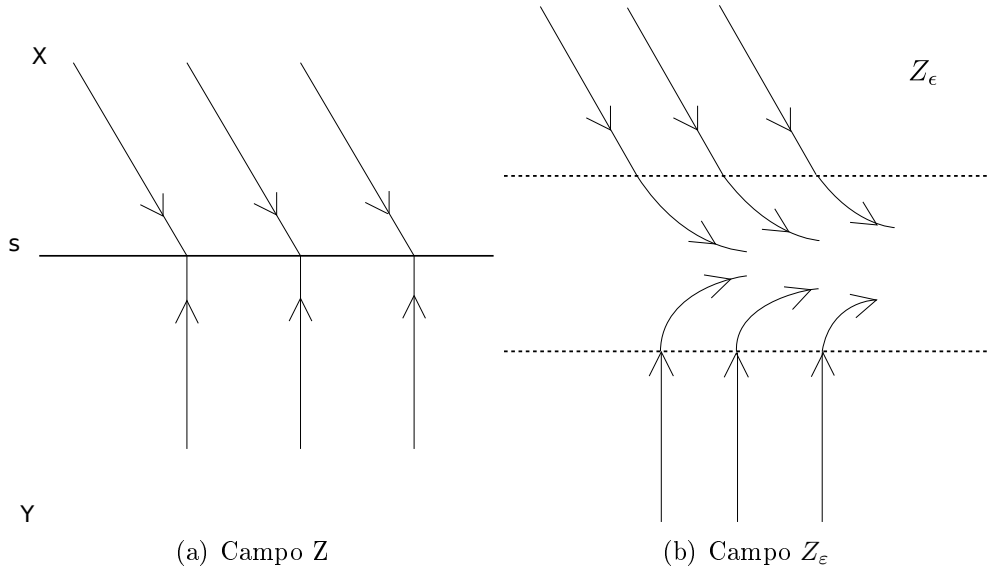


Figura 3.5: Região de Deslize e sua regularização (Análogo para uma Região de Escape e sua regularização).

1. p é um ponto de dobra de $Z = (X, Y)$. Isto significa que : ou p é um "ponto de dobra de Y " ($Xf(p) \neq 0$, $Yf(p) = 0$ e $Y^2f(p) \neq 0$); ou p é um "ponto de dobra de X " ($Yf(p) \neq 0$, $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$);
2. $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$, $\det[X, Y](p) = 0$, mas $d(\det[X, Y] |_S)(p) \neq 0$.

As figuras 3.6, 3.7 e 3.8 abaixo representam, respectivamente, um exemplo de ponto de dobra p de X com $X^2f(p) > 0$, ponto de dobra p de X com $X^2f(p) < 0$ e um ponto crítico de sela p e suas respectivas regularizações.

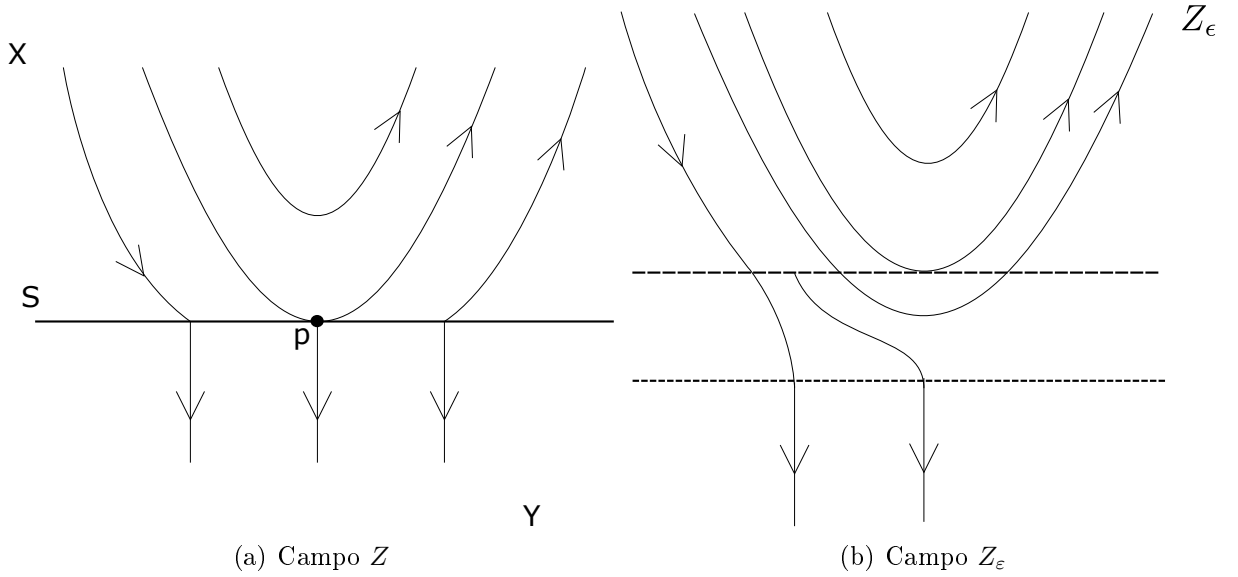


Figura 3.6: Regularização do Campo Z para p ponto de dobra de X com $X^2f(p) > 0$.

Observação 3.2.6. Um cálculo mostra que a condição 2 da definição 3.2.5 é equivalente à : " p é um ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$ ".

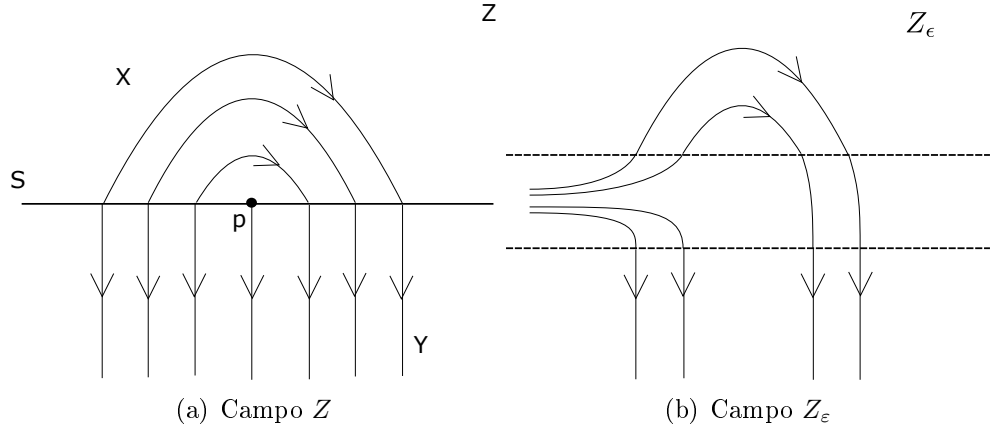


Figura 3.7: Regularização do Campo Z para p ponto de dobra de X com $X^2 f(p) < 0$.

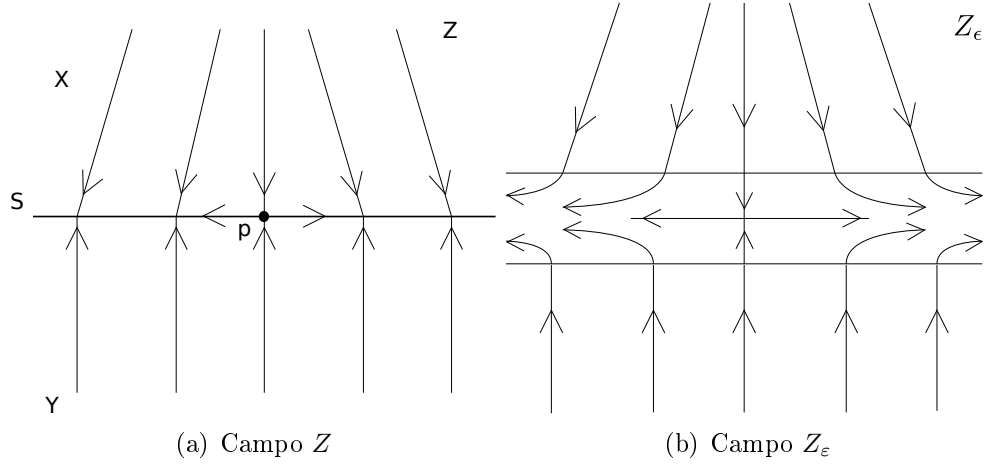


Figura 3.8: Regularização do Campo Z para p ponto crítico de $F(Z)$.

De fato, de $Xf(p).Yf(p) < 0$, temos que p é ponto de escape ou deslize. $\det[X, Y](p) = 0$ implica que p é um ponto crítico de $F(Z)$, para uma região de deslize ou escape. Além disso, os vetores $X(p)$ e $Y(p)$ são paralelos. Calculemos o campo $F(Z)$:

$$\begin{cases} X(p) = (X_1(p), X_2(p)) \\ Y(p) = (Y_1(p), Y_2(p)) \end{cases}.$$

Note que

$$\det[X, Y](p) = 0 \Rightarrow X_1(p).Y_2(p) - X_2(p).Y_1(p) = 0.$$

Mas $F(Z)$ é obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned} F(Z)(p) &= tX(p) + (1-t)Y(p) = t(X_1(p), X_2(p)) + (1-t)(Y_1(p), Y_2(p)) \\ &= (tX_1(p) + (1-t)Y_1(p), tX_2(p) + (1-t)Y_2(p)) \\ &= (F_1(Z)(p), F_2(Z)(p)) \end{aligned}$$

Consideremos, por uma mudança de coordenada conveniente, $f(x, y) = y$. Assim o conjunto S está contido no eixo x . Como $F(Z)$ é um campo em S , $F_2(Z) \equiv 0$, logo

$$tX_2(p) + (1-t)Y_2(p) = 0 \Rightarrow t(X_2(p) - Y_2(p)) + Y_2(p) = 0 \Rightarrow t = \frac{-Y_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}.$$

Notemos que $X_2(p) - Y_2(p) \neq 0$, pois caso contrário, $Xf(p) = Yf(p)$ o que não pode ocorrer pela hipótese da condição 2.

Substituindo o valor de t encontrado na equação anterior na expressão do campo $F(Z)$ no ponto p , tem-se

$$\begin{aligned} F(Z)(p) &= \left(\frac{-Y_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)} X_1(p) + \left(1 - \frac{-Y_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)} \right) Y_1(p), 0 \right) \\ &= \left(\frac{-X_1(p)Y_2(p)}{X_2(p) - Y_2(p)} + \frac{X_2(p)Y_1(p)}{X_2(p) - Y_2(p)}, 0 \right) = \left(-\frac{\det[X, Y](p)}{X_2(p) - Y_2(p)}, 0 \right) \end{aligned}$$

Agora note que $F(Z)$ é um campo unidimensional (campo em $S = \{y = 0\}$) e $p = (x, 0)$ é um ponto crítico de $F(Z)$, tal ponto crítico é hiperbólico se $F(Z)'(p) \neq 0$. Logo, abusando da notação, temos que

$$F(Z)(p) = F(Z)(x) = -\frac{\det[X, Y](x)}{X_2(x) - Y_2(x)}, \text{ onde } p = (x, 0) \in S.$$

Derivando em relação a x , temos

$$\frac{d}{dx}F(Z)(x) = \frac{-\frac{d}{dx}[\det[X, Y](x)] \cdot (X_2(x) - Y_2(x)) + \det[X, Y](x) \cdot \frac{d}{dx}(X_2(x) - Y_2(x))}{(X_2(x) - Y_2(x))^2}$$

Assim, quando $x = p$,

$$\frac{d}{dx}F(Z)(p) = \frac{-\frac{d}{dx}[\det[X, Y](p)] \cdot (X_2(p) - Y_2(p)) + \det[X, Y](p) \cdot (X_2'(p) - Y_2'(p))}{(X_2(p) - Y_2(p))^2}.$$

Como $\det[X, Y](p) = 0$ e $X_2(p) - Y_2(p) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F(Z)(p) \neq 0 &\Leftrightarrow -\frac{d}{dx}(\det[X, Y](p)) \cdot (X_2(p) - Y_2(p)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\det[X, Y](p) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, p é ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$ se, e só se, $d(\det[X, Y]|_S)(p) \neq 0$.

3.2.1 Pontos Regulares

Lema 3.2.7. *Seja $p \in M$ um ponto S -regular de $Z = (X, Y)$. Então existe uma vizinhança V de p em M e ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, Z_ε não tem pontos críticos em V .*

Prova: Dividiremos a demonstração em dois casos: o primeiro caso quando p é um ponto de costura e o outro caso, quando p é um ponto de deslize ou de escape.

Caso (I): $Xf(p).Yf(p) > 0$. Trataremos o caso $Xf(p) > 0$ e $Yf(p) > 0$. O caso onde $Xf(p) < 0$ e $Yf(p) < 0$ é análogo. Escolhendo uma carta local (x, y) em torno de p podemos considerar uma mudança de coordenadas conveniente (veja [13]) tal que $f(x, y) = y$, $S = \{y = 0\}$, $X(x, y) = (0, 1)$ e $Y(x, y) = (k(x, y), g(x, y))$ com $g(0) = g(p) = b > 0$. Então:

$$Z_\varepsilon(x, y) = (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y))$$

onde,

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^1(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)).Y_1(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y)).X_1(x, y)) \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y))k(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y)).0) \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon)(f(x, y))k(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))k(x, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^2(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)).Y_2(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y)).X_2(x, y)) \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y))g(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y)).1) \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y))).g(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y)) \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) + \varphi_\varepsilon(y). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$Z_\varepsilon(x, y) = Z_\varepsilon = ((1 - \varphi_\varepsilon(y))k(x, y), (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) + \varphi_\varepsilon(y)).$$

Observe que $Z_\varepsilon^2 > 0$. De fato, como $p = (p_1, 0)$, $g(x, y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^r$ e φ_ε é de classe $\mathcal{C}^\infty$ com $\varphi_\varepsilon(y) > 0$ quando $y = 0$, então φ_ε é positiva na vizinhança de p e

$$Z_\varepsilon^2(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) + \varphi_\varepsilon(y) > 0,$$

pois, $g(x, y) > 0$ na vizinhança de p .

Assim Z_ε não tem pontos críticos na vizinhança de p .

Caso (II): Consideremos agora o caso $Xf(p).Yf(p) < 0$ com $\det[X, Y](p) \neq 0$. Escolhemos coordenadas (veja [13]) em torno de p em M tal que $X(x, y) = (0, -1)$. $Y(x, y) = (k(x, y), g(x, y))$ com $g(p) = b > 0$. Assim, $Z_\varepsilon(x, y) = (0, 0)$ se, e somente se

$$\begin{cases} (1 - \varphi_\varepsilon(y))\det[X, Y](p) &= 0 \\ \varphi_\varepsilon(y)(1 + g(x, y)) &= g(x, y). \end{cases} \quad e$$

A primeira equação do sistema acima implica que $\varphi_\varepsilon(y) = 1$. Substituindo o valor de $\varphi_\varepsilon(y)$ na segunda equação, temos $1 + g(x, y) = g(x, y)$, que é uma contradição. Logo, estas equações não tem solução para (x, y) na vizinhança de p , ou seja, Z_ε não tem pontos críticos em uma vizinhança de p para este caso também.

Portanto, Z_ε não tem pontos críticos em torno de p . ■

3.2.2 Pontos Singulares

Lema 3.2.8. *Seja p um ponto de dobra de $Z = (X, Y)$. Então existe ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, temos: se p é um ponto de dobra de X (respectivamente de Y), então.*

1. *O contato entre as curvas $\{Xf = 0\}$ (resp. $\{Yf = 0\}$) e $\{Z_\varepsilon f = 0\}$, no nível $\{f = \varepsilon\}$ (resp. $\{f = -\varepsilon\}$) é quadrático.*
2. *Qualquer trajetória de Z_ε , passando através de qualquer ponto q , próximo a p em M com $f(q) = -\varepsilon_0$ (resp. $f(q) = \varepsilon_0$) encontra com o nível $\{f = \varepsilon_0\}$ (resp. $\{f = -\varepsilon\}$).*
3. *Na curva $\{Z_\varepsilon f = 0\}$ o contato entre Z_ε e cada curva $\{f = \alpha\}$ é quadrático.*
4. *Z_ε não tem pontos críticos na vizinhança de p .*

Prova: Como p é ponto de dobra de X , temos que $Xf(p) = 0$. Suponha que $X^2f(p) > 0$ e $Yf(p) > 0$. Os outros casos onde $X^2f(p) > 0$ e $Yf(p) < 0$, $X^2f(p) < 0$ e $Yf(p) > 0$, e $X^2f(p) < 0$ e $Yf(p) < 0$ são tratados analogamente. Escolhemos coordenadas em torno de $p = (0, 0)$ e em uma vizinhança $|x| < \varepsilon$ e $|y| < \varepsilon$, tal que $f(x, y) = y$, $X(x, y) = (1, x)$ e $Y(x, y) = (g(x, y), l(x, y))$ com $l(0, 0) = l(p) > 0$. O campo de vetores Z_ε toma a forma

$$Z_\varepsilon = (Z_\varepsilon^1, Z_\varepsilon^2) = ((1 - \varphi_\varepsilon)g + \varphi_\varepsilon, (1 - \varphi_\varepsilon)l + x\varphi_\varepsilon).$$

Assim,

$$Z_\varepsilon f(x, y) = Z_\varepsilon(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = (Z_\varepsilon^1(x, y), Z_\varepsilon^2(x, y)) \cdot (0, 1) = Z_\varepsilon^2(x, y).$$

Analisemos agora a curva $\xi_\varepsilon = \{Z_\varepsilon f = 0\}$,

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon f = 0 &\iff Z_\varepsilon^2 = 0 \iff (1 - \varphi_\varepsilon(y))l(x, y) + x\varphi_\varepsilon(y) = 0 \\ &\iff \varphi_\varepsilon(y) = \frac{l(x, y)}{l(x, y) - x}. \end{aligned}$$

Logo, $\xi_\varepsilon = \{Z_\varepsilon f = 0\}$ é expressa pelas soluções da equação $\varphi_\varepsilon(y) = \frac{l(x, y)}{l(x, y) - x}$. Isso significa que o ponto $p_0 = (0, \varepsilon)$ está em ξ_ε pois

$$\varphi_\varepsilon(\varepsilon) = \varphi(1) = 1 = \frac{l(p)}{l(p) - 0}.$$

Sabemos que $l(0, 0) > 0$ (o sistema de coordenadas foi escolhido de tal forma que satisfizesse isso), logo para (x, y) em uma vizinhança de $(0, 0) = p$, $l(x, y) > 0$. Agora, para $x < 0$, temos $-x > 0$ e então $l(x, y) - x > 0$, daí $\frac{l(x, y)}{l(x, y) - x} > 0$.

Por outro lado,

$$l(x, y) < l(x, y) - x \implies \frac{l(x, y)}{l(x, y) - x} < 1.$$

Portanto,

$$0 < \frac{l(x, y)}{l(x, y) - x} < 1, \text{ para } x < 0 \text{ suficientemente pequeno.}$$

Logo, analisando o gráfico da função de transição φ_ε , dado $x < 0$, existe $\tilde{y} = y_\varepsilon(x)$ tal que $\varphi_\varepsilon(\tilde{y}) = \frac{l(x, y)}{l(x, y) - x}$ e, então $(x, y_\varepsilon(x)) \in \{Z_\varepsilon f = 0\}$. A correspondência $x \rightarrow y_\varepsilon(x)$ é suave e pelo fato de $\frac{l(x, y)}{l(x, y) - x} > 0$ para $x < 0$, segue que essa correspondência $(x \rightarrow y_\varepsilon(x))$ nunca atinge o valor $-\varepsilon$.

Logo, $\varphi_\varepsilon(y) > 0$ e, conseqüentemente, $y > -\varepsilon$.

Provemos então a parte (4): Suponhamos que Z_ε tenha um ponto crítico (x, y) na vizinhança de p . Logo $Z_\varepsilon(x, y) = 0$. Assim, assumindo que $g(x, y) \neq 1$ temos,

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} (1 - \varphi_\varepsilon(y))g(x, y) + \varphi_\varepsilon(y) = 0 \\ (1 - \varphi_\varepsilon(y))l(x, y) + x\varphi_\varepsilon(y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \varphi_\varepsilon(y) = \frac{g(x, y)}{g(x, y) - 1} = \frac{l(x, y)}{l(x, y) - x} \end{cases} \\ &\iff (g(x, y) - 1)l(x, y) = g(x, y)(l(x, y) - x) \\ &\iff l(x, y) = g(x, y)x \\ &\iff \det[X, Y](x, y) = 0. \end{aligned}$$

O que é uma contradição, pois $\det[X, Y](x, y) \neq 0$. De fato, se $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de dobra de X , temos

$$Xf(p) = 0 \iff (1, p_1) \cdot (0, 1) = 0 \iff p_1 = 0.$$

Sabemos ainda que $\det[X, Y](x, y) = l(x, y) - g(x, y)x$. Assim,

$$\det[X, Y](p) = l(p) - g(p)p_1 = l(p) > 0$$

por hipótese. Logo, se (x, y) está na vizinhança de p , então $\det[X, Y](x, y) \neq 0$.

Portanto, $Z_\varepsilon(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) na vizinhança de p , provando a afirmação 4.

A prova da primeira parte do lema e as partes remanescentes do lema seguem da continuidade dos argumentos e usando a forma normal de X ou Y (veja [13]).■

Observação 3.2.9. *Assuma as hipóteses e notações do lema 3.2.8. Se $Xf(p) = 0$, $Yf(p) \neq 0$ e $X^2f(p) > 0$, considere na curva $\gamma_\varepsilon = \{f = \varepsilon\}$ o conjunto aberto $\gamma_\varepsilon^+ = \{Z_\varepsilon f > 0\}$ e $\gamma_\varepsilon^- = \{Z_\varepsilon f < 0\}$. Defina uma C^r -aplicação*

$$h_\varepsilon : \gamma_\varepsilon^+ \longrightarrow \gamma_\varepsilon^-$$

de tal forma que ambos os pontos u e $h_\varepsilon(u)$ pertencem à mesma trajetória de Z_ε (os detalhes podem ser encontrados em [12]). Esta aplicação é C^r próxima à identidade.

O seguinte lema será útil na continuação.

Lema 3.2.10. *Assuma as hipóteses do lema 3.2.8 e as anotações da observação 3.2.9. Para qualquer $u \in \gamma_\varepsilon^+$ tem-se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(u) = 0$.*

Prova: Assuma que $Yf(p) > 0$, o outro caso é tratado analogamente. Considerando as coordenadas dadas no lema 3.2.8, seja I_ε um intervalo em torno de p_ε em

$\{f = \varepsilon\}$. Sejam $h_0 : I_\varepsilon, 0 \implies I_\varepsilon, 0$ e $h_\varepsilon : I_\varepsilon \implies I_\varepsilon, 0$ as involuções, em $x = 0$, associadas ao campo de vetores X e Z_ε respectivamente. Notamos que x e h_ε (resp. h_0) pertencem a mesma órbita de Z_ε (resp. X) pela observação 3.2.9.

Pelo sistema de coordenadas assumido no lema 3.2.8, temos:

$$X(x, y) = \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = t + x_0 \\ \dot{y}(t) = t + x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = t + x_0 \\ y(t) = \frac{t^2}{2} + x_0 t + y_0 \end{cases}.$$

Assim, $\alpha(t) = (t + x_0, \frac{t^2}{2} + x_0 t + y_0)$ é uma órbita em M^+ . Tomemos $y_0 = \varepsilon$ para descobrirmos quem é $h_0(x)$. Logo temos a órbita $\alpha(t) = (t + x_0, \frac{t^2}{2} + x_0 t + \varepsilon) = (x(t), y(t))$ partindo de (x_0, ε) em $t = 0$. Para que essa órbita retorne a $\{f = \varepsilon\}$, temos que ter $y(t) = \varepsilon$, ou seja

$$y(t) = \varepsilon \iff \frac{t^2}{2} + x_0 t + \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow t \left(\frac{t}{2} + x_0 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ t = -2x_0 \end{cases}.$$

Agora para $t = 0$, estamos no ponto inicial (x_0, ε) e para $t = -2x_0$, temos $\alpha(-2x_0) = (-x_0, \varepsilon)$. Portanto, $h_0(x) = -x$.

Alem disso, com $X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$ e $Y(x, y) = (Y_1(x, y), Y_2(x, y))$ tem-se

$$\begin{aligned} \det[X, Z_\varepsilon] &= \begin{vmatrix} X_1 & (1 - \varphi_\varepsilon Y_1 + \varphi_\varepsilon X_1) \\ X_2 & (1 - \varphi_\varepsilon Y_2 + \varphi_\varepsilon X_2) \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon)Y_2 X_1 + \varphi_\varepsilon X_2 X_1 - (1 - \varphi_\varepsilon)Y_1 X_2 - \varphi_\varepsilon X_1 X_2 = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon)(X_1 Y_2 - Y_1 X_2) = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon)\det[X, Y] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det[Z_\varepsilon, Y] &= \begin{vmatrix} (1 - \varphi_\varepsilon)Y_1 + \varphi_\varepsilon X_1 & Y_1 \\ (1 - \varphi_\varepsilon)Y_2 + \varphi_\varepsilon X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \varphi_\varepsilon)Y_1 Y_2 + \varphi_\varepsilon X_1 Y_2 - (1 - \varphi_\varepsilon)Y_2 Y_1 - \varphi_\varepsilon X_2 Y_1 = \\ &= \varphi_\varepsilon(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = \\ &= \varphi_\varepsilon \det[X, Y]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} \det[X, Z_\varepsilon] = (1 - \varphi_\varepsilon)\det[X, Y] \\ \det[Z_\varepsilon, Y] = \varphi_\varepsilon \det[X, Y] \end{cases}.$$

A primeira equação implica que se $x < 0$, então $h_\varepsilon(x) < -x$. De fato, note que $\det[X, Z_\varepsilon] = (1 - \varphi_\varepsilon)\det[X, Y] > 0$, para todo $x < 0$, pois $(1 - \varphi_\varepsilon(y)) > 0$ e $\det[X, Y](x, y) > 0$ para (x, y) numa vizinhança de $(0, 0)$. Logo a base $\{X(q), Z_\varepsilon(q)\}$ tem a mesma orientação da base canônica de $\mathbb{R}^2$, conforme figura 3.9. Se $h_\varepsilon(x) > -x$ para algum $x < 0$, então as trajetórias de Z_ε e X se cruzariam em um ponto $\tilde{q}$ e, neste

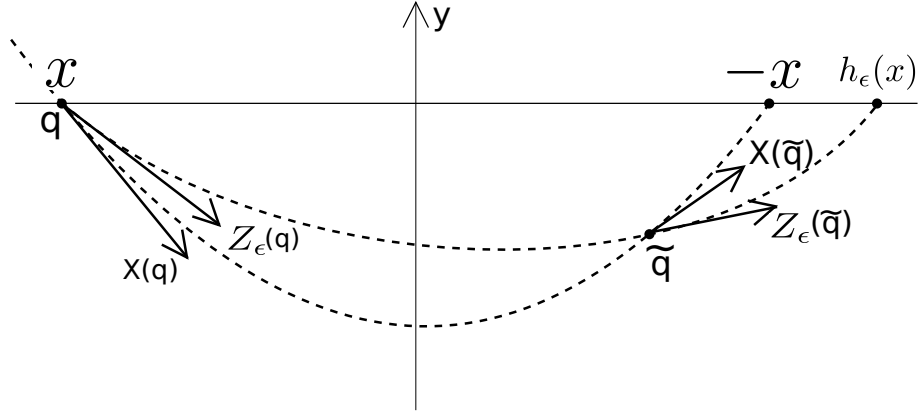


Figura 3.9: Exemplo de um campo de vetores para $h_\epsilon(x) > -x$.

ponto, as orientações são invertidas fazendo com que $\det[X, Z_\epsilon](\tilde{q}) < 0$, que é uma contradição.

Observe agora que a curva integral de X passando através de (x_0, ϵ) é

$$y = x^2 + \epsilon - x_0^2.$$

Além disso, a órbita de Z_ϵ através desse ponto encontra a curva $Xf = 0$ em $p_1 = (0, \epsilon_1)$ com $|\epsilon_1| < \epsilon$.

A curva integral de X (através de p_1) é dada por

$$y = x^2 + \epsilon_1.$$

A órbita de Z_ϵ por p_1 intersecta esta curva integral de forma transversal, pois $X(0, \epsilon_1) = (1, 0)$ e $Z_2(0, \epsilon_1) = (1 - \varphi_\epsilon(0, \epsilon_1))l(0, \epsilon_1) > 0$, com $(0, \epsilon_1)$ na vizinhança de p . A curva integral de X através de p_1 ainda encontra o nível $y = \epsilon$ em $\hat{x} = \pm\sqrt{\epsilon - \epsilon_1}$.

Temos que

$$h_\epsilon(x) < \sqrt{\epsilon - \epsilon_1} < \sqrt{2\epsilon}.$$

Isso mostra que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(u) = 0$, para todo u perto de p em S . ■

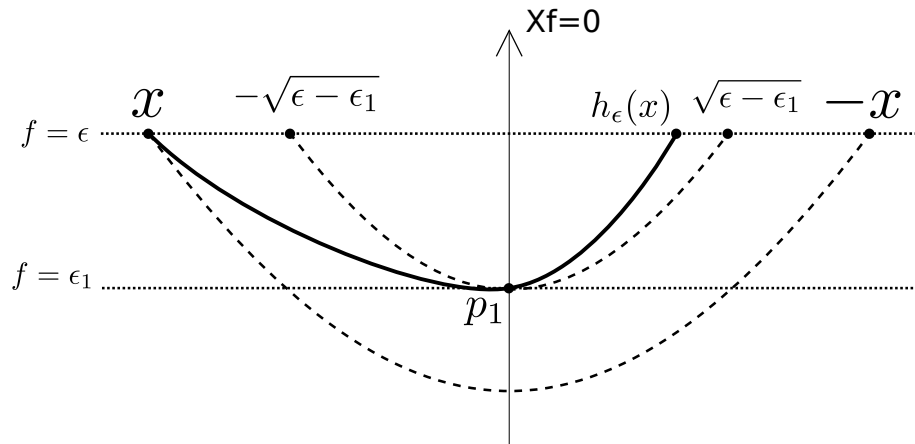


Figura 3.10: Em tracejado a curva integral de X e o traço contínuo representa a curva integral de Z_ϵ .

Lema 3.2.11. *Dado $Z = (X, Y)$ seja p um ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$. Então existe ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, Z_ε tem perto de p , um único ponto crítico que é uma sela hiperbólica ou um nó hiperbólico. Além disso, os autoespaços associados a esta singularidade são transversais às curvas $\{f = \varepsilon\}$ e $\{f = -\varepsilon\}$.*

Prova: Analisaremos o caso onde $Xf(p) < 0$, $Yf(p) > 0$, $\det[X, Y](p) = 0$ e $d(\det[X, Y]|_S)(p) \neq 0$. Os outros casos seguem analogamente. Como antes, podemos escolher coordenadas em torno de $p = (0, 0)$ tal que $f(x, y) = y$, $Y(x, y) = (0, 1)$, $X(x, y) = (g, l)$, com $l(0, 0) = a < 0$. Além disso, $\det[X, Y] = g$ e $g(0, 0) = 0$. Como p é um ponto crítico hiperbólico, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \det[X, Y]|_S(p) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} g(p) \neq 0 \Leftrightarrow g_x(0, 0) \neq 0.$$

Chame $g_x(0, 0) = \alpha \neq 0$ e $g_y(0, 0) = \beta$. O campo de vetores regularizado toma a forma

$$Z_\varepsilon = (Z_\varepsilon^1, Z_\varepsilon^2) = (\varphi_\varepsilon g, (1 - \varphi_\varepsilon) + l\varphi_\varepsilon).$$

Os pontos críticos de Z_ε são expressos por $g = 0$ e $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{1-l}$. De fato,

$$Z_\varepsilon(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow Z_\varepsilon^1(x, y) = 0 \text{ e } Z_\varepsilon^2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_\varepsilon(y)g(x, y) = 0 \\ (1 - \varphi_\varepsilon(y)) + l\varphi_\varepsilon(y) = 0 \end{cases}.$$

Observe agora que, o teorema da função implícita implica que x pode ser escrito em função de y em uma vizinhança de $p = (0, 0)$, pois $g(0, 0) = 0$, $g_x(0, 0) = \alpha \neq 0$, ou seja, em uma vizinhança de $(0, 0)$ existe $x = x(y)$, tal que $g(x(y), y) = 0$, $x(0) = 0$ e

$$x'(0) = -\frac{g_y(0, 0)}{g_x(0, 0)} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

A expansão em série de Taylor de $x(y)$ em torno de $y = 0$ é dada por

$$x(y) = x(0) + x'(0)y + o(y^2) = 0 - \frac{\beta}{\alpha}y + o(y^2) \leftrightarrow x(y) = -\frac{\beta}{\alpha}y + o(y^2).$$

Portanto, $g = 0$ pode ser resolvido por uma função suave $x(y) = \frac{\beta}{\alpha}y + o(y^2)$.

Agora, para existir uma função $y = y(x) \in \mathcal{C}^1$, precisamos estabelecer algumas condições para que possamos utilizar novamente o teorema da função implícita. Seja $G(x, y) = \varphi_\varepsilon(y) - \frac{1}{1-l(x, y)}$. Deste modo, $G(p) = 0$. Mas para escrever $y = y(x)$ com $G(x, y(x)) = 0$ precisamos ainda que $\frac{\partial G}{\partial y}(p) \neq 0$. Note que,

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \varphi'_\varepsilon(y) - \frac{\frac{\partial l}{\partial y}}{(1-l)^2}.$$

Portanto, tomando φ_ε uma função de transição tal que $\varphi'_\varepsilon(0) \neq \frac{\frac{\partial l}{\partial y}(0, 0)}{(1-l(0, 0))^2}$, o teorema da função implícita é válido e, então, existe $y = y(x)$ uma aplicação suave solução de $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{1-l}$.

Como $l(0,0) < 0$, podemos encontrar uma função positiva $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$ tal que os valores η para o qual $0 < \eta < \varepsilon - \eta_0$ nunca serão atingidos por $y(x)$, para um ε pequeno. Então a interseção

$$\{Z_\varepsilon^1 = 0\} \cap \{Z_\varepsilon^2 = 0\}$$

consiste de um único ponto $p_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$.

Vejamos a natureza desse ponto crítico. Temos que

$$dZ_\varepsilon = \begin{pmatrix} (Z_\varepsilon^1)_x & (Z_\varepsilon^1)_y \\ (Z_\varepsilon^2)_x & (Z_\varepsilon^2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_\varepsilon g_x & \varphi'_\varepsilon g + \varphi_\varepsilon g_y \\ \varphi_\varepsilon l_x & -\varphi'_\varepsilon + l_y \varphi_\varepsilon + l \varphi'_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det[dZ_\varepsilon] &= -\varphi_\varepsilon \varphi'_\varepsilon g_x (1-l) + \varphi_\varepsilon^2 g_x l_y - \varphi_\varepsilon \varphi'_\varepsilon g l_x - \varphi_\varepsilon^2 l_x g_y \\ &= \varphi_\varepsilon^2 (g_x l_y - l_x g_y) - \varphi_\varepsilon \varphi'_\varepsilon (g_x (1-l) + g l_x) \\ &= \varphi_\varepsilon^2 \det[dX] - \varphi_\varepsilon \varphi'_\varepsilon (g_x (1-l) + g l_x). \end{aligned}$$

Substituindo no ponto crítico p_ε e considerando que para tal ponto $g = 0$ e $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{1-l(x,y)}$, temos

$$\begin{aligned} \det(dZ_\varepsilon) &= \varphi_\varepsilon^2 \det[dX] - \varphi_\varepsilon \varphi'_\varepsilon \left(g_x \frac{1}{\varphi_\varepsilon} + 0 l_x \right) \\ &= \varphi_\varepsilon^2 \left(\det[dX] - \frac{g_x \varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{tr}[dZ_\varepsilon] &= \varphi_\varepsilon g_x - \varphi'_\varepsilon + l_y \varphi_\varepsilon + l \varphi'_\varepsilon = \varphi_\varepsilon (g_x + l_y) - \varphi'_\varepsilon (1-l) \\ &= \varphi_\varepsilon \text{tr}[dX] - \varphi'_\varepsilon \frac{1}{\varphi_\varepsilon} = \varphi_\varepsilon \left(\text{tr}[dX] - \frac{\varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Além disso,

- Analisando a função de transição φ_ε para y pequeno, temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi'_\varepsilon(y) = \infty$.

Um exemplo de uma função de transição φ_ε é ilustrado na figura 3.2.

- Como $y_\varepsilon(x) < \varepsilon - \eta$, $0 < \varphi_\varepsilon^2 < 1$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi'_\varepsilon(y) = \infty$, temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} = \infty$.
- Como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} = \infty$, $0 < \varphi_\varepsilon^2 < 1$ e $\det[dX] \in \mathbb{R}$, então $\text{sgn}(\det[dZ_\varepsilon]) = \text{sgn}(-g_x)$ e assim, temos $\text{sgn}(\det[dZ_\varepsilon]) = \text{sgn}(-\alpha)$.
- Finalmente, sabemos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi'_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} = \infty$, $\text{tr}[dX] \in \mathbb{R}$ e $0 < \varphi_\varepsilon < 1$. Assim, temos que $\text{tr}[dZ_\varepsilon](p_\varepsilon) < 0$.

Das condições acima concluímos que, caso $\alpha < 0$, então em p_ε temos, $\det[dZ_\varepsilon] > 0$ e $\text{tr}[dZ_\varepsilon]^2 - 4\det[dZ_\varepsilon] > 0$, logo p_ε é um nó e estável pois $\text{tr}[DZ_\varepsilon] < 0$. Analogamente, se $\alpha > 0$, então $\det[dZ_\varepsilon] < 0$ e p_ε é um ponto crítico de sela. Os auto-espaços associados são transversais às curvas $\{f = \varepsilon\}$ e $\{f = -\varepsilon\}$ pois estas singularidades estão na vizinhança de p e $l(p) > 0$, logo $Z_\varepsilon^2 > 0$. ■

Definição 3.2.12. Uma *S-conexão de sela* de $Z = (X, Y)$ em Ω é uma órbita γ de Z conectando ou um ponto crítico sela de X ou Y e um ponto crítico de $F(Z)$ do tipo sela ou dois pontos críticos sela de $F(Z)$, ou dois pontos críticos sela de X ou/e Y de tal modo que é permitido que seus pontos interiores encontrem S somente em SW .

Corolário 3.2.13. Seja $Z = (X, Y)$ em Ω . Assuma que X e Y estão em $\Sigma^r(M)$, todas as S -singularidades de Z são genéricas, ou seja, não mudam de tipo com pequenas perturbações do sistema, e Z não tem S -conexões de sela. Então existe um ε_0 tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos:

1. Todos os pontos críticos de Z_ε são hiperbólicos;
2. Z_ε não tem conexões de sela.

Prova: Pela definição 3.1.5 de Σ^r temos que todos os pontos singulares de X e Y são hiperbólicos. Já o Lema anterior diz que Z_ε tem uma sela hiperbólica ou um nó hiperbólico na vizinhança de p quando p é um ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$. Portanto, todos os pontos críticos de Z_ε são hiperbólicos.

Temos agora que provar que a regularização não “cria” S -conexões de sela, já que o campo Z não tem conexões de sela. Seja p um ponto crítico de sela de X e q um ponto de sela de $F(Z)$. Como Z não tem conexões de sela, então não existe uma órbita em Z que contenha p e q simultaneamente. Pelo lema anterior, Z_ε tem, na vizinhança de q , um ponto crítico hiperbólico q_ε do tipo sela. Como ε é suficientemente pequeno, temos que o comportamento das órbitas após a regularização não sofre grande variação na faixa entre $\{f = -\varepsilon\}$ e $\{f = \varepsilon\}$ a ponto de p e q_ε pertencerem a uma mesma órbita, pois $X, Y \in \Sigma^r$. Um exemplo desse tipo pode ser observado na figura 3.11.

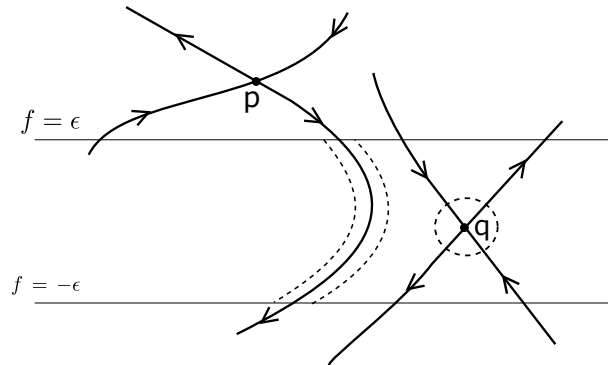


Figura 3.11: Exemplo onde p é um ponto de sela de X e q é um ponto de sela de $F(Z)$.

Para o caso onde temos p um ponto crítico de sela de X e q um ponto crítico de sela de Y temos uma situação semelhante. Como Z não tem conexões de sela, então não existe uma órbita que contenha os dois pontos. Com um ε suficientemente pequeno, podemos tomar uma regularização Z_ε tal que as órbitas dentro da faixa $\{f = -\varepsilon\}$ e $\{f = \varepsilon\}$ não sofram grandes variações, ou seja, ainda não existe uma órbita que conecte p e q . A figura 3.12 ilustra um exemplo desse tipo.

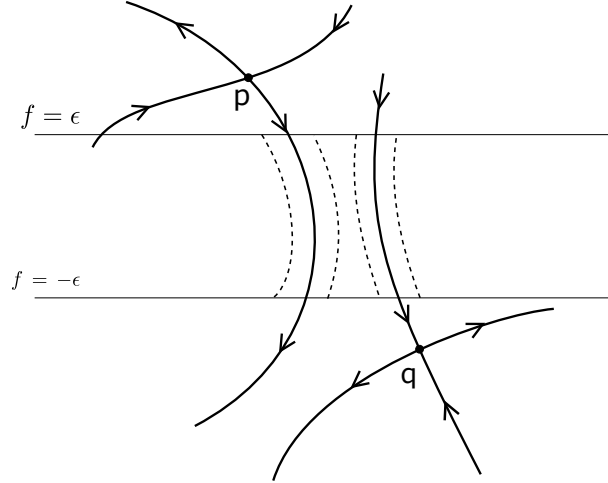


Figura 3.12: Exemplo onde p é um ponto de sela de X e q é um ponto de sela de Y .

No último caso, temos p e q pontos críticos sela de X . Neste caso, se existir uma S -conexão de sela entre p e q , a órbita que contém esses pontos teria que ter pontos na faixa $\{f = -\varepsilon\}$ e $\{f = \varepsilon\}$, ou seja, depois da regularização, a variação das órbitas na faixa fez com que existisse uma órbita que conectasse p e q . Mas se tomarmos um ε suficientemente pequeno, podemos evitar isso, ou seja, podemos tomar ε tal que Z_ε não tem sela-conexões. Uma ilustração deste exemplo pode ser vista na figura 3.13. ■

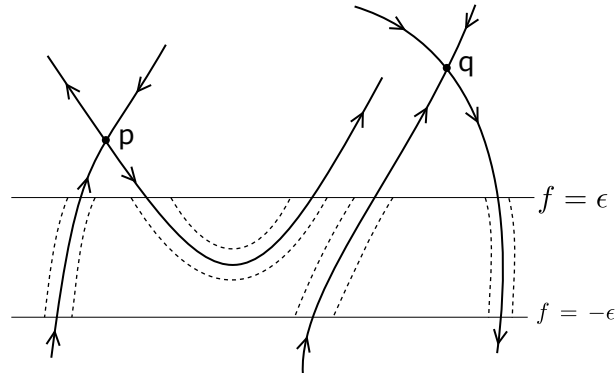


Figura 3.13: Exemplo onde p e q são pontos de sela de X .

Observação 3.2.14. Lembramos que, sob as hipóteses do corolário anterior, os limites das separatrizes em S de um ponto crítico de $F(Z)$ do tipo sela são ou um ponto de dobra de Z ou um ponto crítico atrator(ou repulsor) de $F(Z)$. Isto implica, em particular, que para um ε pequeno, Z_ε não admite conexões de sela dentro de uma vizinhança de S em M .

3.3 Órbitas S -periódicas

Definição 3.3.1. Dizemos que, uma curva fechada γ formada por pedaços de órbitas regulares de X em M^+ e órbitas regulares de Y em M^- é uma **órbita S -periódica** de $Z = (X, Y)$ se γ encontra S somente em SW e cada pedaço é transversal a S .

Observação 3.3.2. Dada uma órbita S -periódica

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k$$

com

$$\gamma_{2i} \in M^+, \gamma_{2i+1} \in M^-,$$

e

$$\gamma_j \cap S = \{p_j\} \cup \{p_{j+1}\} \quad \text{e} \quad \gamma_k \cap S = \{p_k\} \cup p_0.$$

Podemos definir uma coleção de germes de $\mathcal{C}^r$ -aplicações de Poincaré em p_j

$$\eta_j : (S, p_j) \longrightarrow (S, p_{j+1}) \quad \text{e} \quad \eta_k : (S, p_k) \longrightarrow (S, p_0)$$

com j variando de 0 a $k-1$ tal que a primeira aplicação de retorno associada é dada por:

$$\eta = \eta_k \circ \eta_{k-1} \circ \cdots \circ \eta_0$$

com $\eta(p_0) = p_0$.

A figura 3.14 ilustra um exemplo de uma órbita S -periódica.

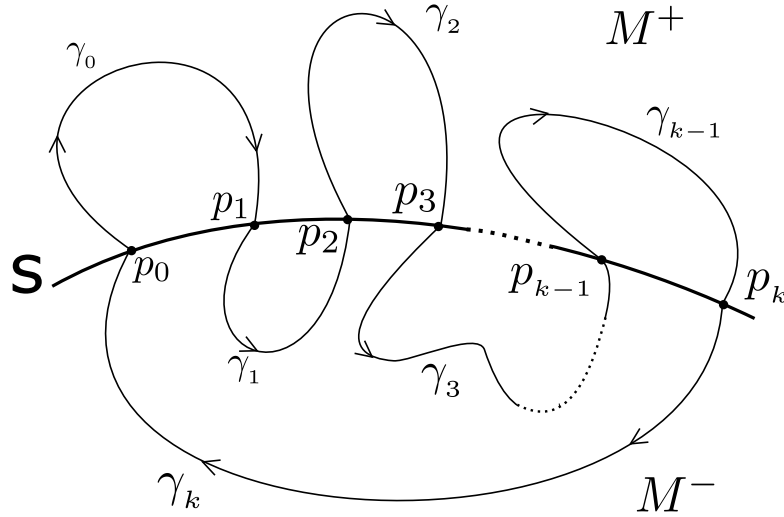


Figura 3.14: Órbita S -periódica γ .

Definição 3.3.3. Uma órbita S -periódica γ de Z é **elementar** se a aplicação primeiro retorno associada (em qualquer ponto $p \in \gamma \cap S$) satisfaz: $\eta'(p) \neq 1$.

Lema 3.3.4. Seja γ uma órbita S -periódica elementar de $Z = (X, Y)$. Então existe uma vizinhança B de γ em M e um ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, Z_ε contém uma única órbita periódica em B , que é hiperbólica.

Prova: Se γ é uma órbita S -periódica elementar de $Z = (X, Y)$, então a aplicação primeiro retorno associada satisfaz $\eta(p_0) = p_0$ e $\eta'(p_0) \neq 1$ com p_0 em S . No campo regularizado Z_ε , considere η_ε como sendo a primeira aplicação de retorno η após a regularização. Para um ε suficientemente pequeno temos que as aplicações η e η_ε estão próximas. Como o gráfico de η cruza a identidade em p_0 transversalmente, segue que existe $\varepsilon_0 > 0$ e um único ponto $p_1 \in S$ com $\|p_1 - p_0\| < \varepsilon_0$ tal que p_1 é ponto fixo de η_ε e $\eta'_\varepsilon(p_1) \neq 1$ para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ou seja, Z_ε contém uma única órbita periódica em B , que é hiperbólica. ■

3.4 Gráficos

Definição 3.4.1. Dizemos que uma curva fechada γ é um **gráfico** de $Z = (X, Y)$ se ela é formada por pedaços de órbitas regulares de $F(Z)$ e/ou pedaços de órbitas regulares de X em M^+ e/ou pedaços de órbitas regulares de Y em M^- .

Exemplo 3.4.2. Toda órbita S -periódica é um gráfico.

3.4.1 Gráfico Simples

Definição 3.4.3. Um gráfico de $Z = (X, Y)$ é **simples** se coincide com S . Neste caso, S é ou a Região de Escape ou a Região de Deslize. Além disso, assumimos a seguinte condição extra sobre Z : “para qualquer $p \in S$, o produto escalar $\Pi_S X(p) \cdot \Pi_S Y(p) > 0$, onde $\Pi_S X$ denota a projeção de X em S ”.

Lema 3.4.4. Seja γ um gráfico simples de $Z = (X, Y)$. Então, existem uma vizinhança B de γ em M e ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, Z_ε contém uma única órbita periódica em B , que é hiperbólica.

Prova: Considere coordenadas polares (θ, ρ) em torno de S em M de tal forma que S é representado por $\rho = \rho_0 > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Nestas coordenadas ainda, denotamos $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$. Da definição de um gráfico simples, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $X_1 > 0$ e $Y_1 > 0$ em S .

Assuma também que todos os pontos de S são do tipo deslize para o campo de vetores descontínuo. O tipo escape pode ser tratado analogamente. Usando o Teorema de Poincaré-Bendixon, sabemos que o campo de vetores regularizado

$$Z_\varepsilon(\theta, \rho) = (Z_1, Z_2) = [1 - \varphi_\varepsilon(\rho)]Y(\theta, \rho) + \varphi_\varepsilon(\rho)X(\theta, \rho)$$

tem uma órbita periódica $\gamma_\varepsilon = (\rho_\varepsilon(\theta), \theta)$ em $B_\varepsilon = \{|p| \leq \varepsilon\}$.

A figura 3.15 ilustra o conjunto S , uma vizinhança de S e o compacto B_ε que contém S .

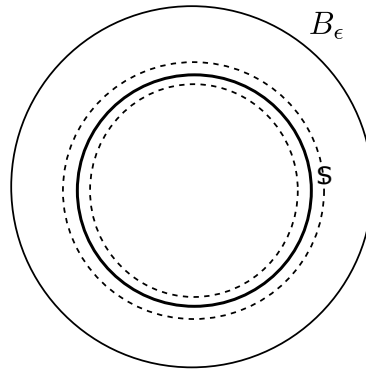


Figura 3.15: Conjunto S , sua vizinhança e um conjunto compacto B_ε tal que $S \subset B_\varepsilon$.

Pelo lema 3.2.7, se p é um ponto S -regular de $Z = (X, Y)$, então existe uma vizinhança V de p em M e ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, Z_ε não tem pontos críticos em V . Assim, Z_ε não tem pontos críticos numa vizinhança V de S .

Toda trajetória que “entra” em V não pode sair de V , pois se existir uma trajetória que faça tal caminho, pela continuidade de fluxo, S contém um ponto de dobra. Veja figura 3.16.

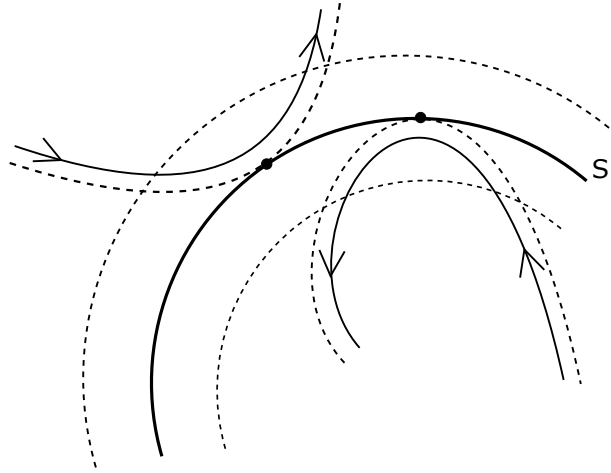


Figura 3.16: Exemplo de trajetórias na vizinhança de S .

Como $\omega(\Gamma)$ está contido na vizinhança de S , então $\omega(\Gamma)$ também não tem pontos críticos, e assim pelo Teorema de Poincaré-Bendixon $\omega(\Gamma)$ é uma órbita periódica, onde $\omega(\Gamma)$ é o conjunto ω -limite de uma trajetória Γ contida na vizinhança de S .

Vamos provar que tal órbita é atratora e hiperbólica. Consequentemente, deve ser única.

Observe que Z_1 nunca se anula em torno de $\rho = \rho_0$.

$$Z_1 = [1 - \varphi_\varepsilon(\rho)]Y_1(\theta, \rho) + \varphi_\varepsilon(\rho)X_1.$$

Em torno de $\rho = \rho_0 > 0$, $\rho/\varepsilon > -1$, logo $1 - \varphi_\varepsilon(\rho) > 0$ e $Y_1(\theta, \rho) > 0$ em S . Portanto $Z_1 > 0$ em torno de $\rho = \rho_0$.

Como o campo de vetores Z_ε é dado por

$$\begin{cases} \dot{\theta} = Z_1 \\ \dot{\rho} = Z_2 \end{cases}$$

então temos que o campo de vetores Z_ε é representado pela equação

$$\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{[1 - \varphi_\varepsilon(\rho)]Y_2(\theta, \rho) + \varphi_\varepsilon(\rho)X_2(\theta, \rho)}{[1 - \varphi_\varepsilon(\rho)]Y_1(\theta, \rho) + \varphi_\varepsilon(\rho)X_1(\theta, \rho)} = \frac{Z_2(\theta, \rho)}{Z_1(\theta, \rho)}.$$

Denote $H_\varepsilon = \frac{Z_2}{Z_1}$ e $K_\varepsilon = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \rho}$.

Assim, utilizando resultados da teoria de equações diferenciais (veja [1]), a primeira aplicação de retorno $m_\varepsilon(\theta)$ associada a Z_ε e γ_ε satisfaz

$$m'_\varepsilon(0) = e^{\int_0^{2\pi} K_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) d\theta}.$$

Vamos analisar K_ε .

$$K_\varepsilon = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \rho} = \frac{\frac{\partial Z_2}{\partial \rho} Z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} Z_2}{(Z_1)^2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_2}{\partial \rho} \cdot Z_1 &= \left(-\varphi'_\varepsilon(\rho)Y_2 + (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))\frac{\partial Y_2}{\partial \rho} + \varphi'_\varepsilon(\rho)X_2 + \varphi_\varepsilon(\rho)\frac{\partial X_2}{\partial \rho} \right) \cdot Z_1 \\
&= -\varphi'_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho))Y_1Y_2 + (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))^2 \cdot \frac{\partial Y_2}{\partial \rho}Y_1 + \\
&\quad + \varphi'_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho))X_2Y_1 + \varphi_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho))\frac{\partial X_2}{\partial \rho}Y_1 - \\
&\quad - \varphi'_\varepsilon(\rho)\varphi_\varepsilon(\rho)X_1Y_2 + (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))\varphi_\varepsilon(\rho)X_1\frac{\partial Y_2}{\partial \rho} + \\
&\quad + \varphi'_\varepsilon(\rho)\varphi_\varepsilon(\rho)X_1X_2 + \varphi_\varepsilon^2(\rho)X_1\frac{\partial X_2}{\partial \rho}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_1}{\partial \rho} \cdot Z_2 &= \left(-\varphi'_\varepsilon(\rho)Y_1 + (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))\frac{\partial Y_1}{\partial \rho} + \varphi'_\varepsilon(\rho)X_1 + \varphi_\varepsilon(\rho)\frac{\partial X_1}{\partial \rho} \right) \cdot Z_2 \\
&= -\varphi'_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho))Y_2Y_1 + (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))^2 \cdot \frac{\partial Y_1}{\partial \rho}Y_2 + \\
&\quad + \varphi'_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho))X_1Y_2 + \varphi_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho))\frac{\partial X_1}{\partial \rho}Y_2 - \\
&\quad - \varphi'_\varepsilon(\rho)\varphi_\varepsilon(\rho)X_2Y_1 + (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))\varphi_\varepsilon(\rho)X_2\frac{\partial Y_1}{\partial \rho} + \\
&\quad + \varphi'_\varepsilon(\rho)\varphi_\varepsilon(\rho)X_2X_1 + \varphi_\varepsilon^2(\rho)X_2\frac{\partial X_1}{\partial \rho}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon(\theta, \rho)(Z_1)^2 &= (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))^2 \left(\frac{\partial Y_2}{\partial \rho}Y_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial \rho}Y_2 \right) + \\
&\quad + \varphi'_\varepsilon(\rho) \left((1 - \varphi_\varepsilon(\rho))(X_2Y_1 - X_1Y_2) \right) + \\
&\quad + \varphi_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho)) \left(\frac{\partial X_2}{\partial \rho}Y_1 + \frac{\partial Y_2}{\partial \rho}X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial \rho}Y_2 - \frac{\partial Y_1}{\partial \rho}X_2 \right) + \\
&\quad + \varphi'_\varepsilon(\rho)\varphi_\varepsilon(\rho)(X_1Y_2 - X_2Y_1) + \varphi_\varepsilon^2(\rho) \left(\frac{\partial X_2}{\partial \rho}X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial \rho}X_2 \right) \\
&= (1 - \varphi_\varepsilon(\rho))^2 \left(\frac{\partial Y_2}{\partial \rho}Y_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial \rho}Y_2 \right) + \varphi_\varepsilon^2(\rho) \left(\frac{\partial X_2}{\partial \rho}X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial \rho}X_2 \right) \\
&\quad + \varphi_\varepsilon(\rho)(1 - \varphi_\varepsilon(\rho)) \left(\frac{\partial X_2}{\partial \rho}Y_1 + \frac{\partial Y_2}{\partial \rho}X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial \rho}Y_2 - \frac{\partial Y_1}{\partial \rho}X_2 \right) - \\
&\quad - \varphi'_\varepsilon(\rho)\det[X, Y].
\end{aligned}$$

Logo,

$$K_\varepsilon(\theta, \rho) = L(\theta, \rho) - \varphi'_\varepsilon(\rho)\frac{\det[X, Y]}{(Z_1)^2}(\theta, \rho),$$

sendo L uma função contínua no compacto B_ε , portanto limitada em B_ε .

Além disso, temos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) = -\infty$. De fato, temos $\det[X, Y] = \alpha \neq 0$ pois não há pontos críticos em γ_ε ; $Z_1 > 0$ em torno de $\rho = \rho_0$ como visto anteriormente; pela lei da função de transição, temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi'_\varepsilon(\rho) = \infty$; e L é uma função limitada.

Isto implica que existe ε_0 tal que $0 < m'_\varepsilon(0) < 1$, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$. Portanto, Z_ε contém uma única órbita periódica atratora γ_ε em B , que é hiperbólica. Quando S coincide com a região de escape, temos que γ_ε é repulsora e uma órbita periódica hiperbólica de Z_ε . ■

3.4.2 Gráfico Elementar

Nesta seção, analisaremos a dinâmica de uma regularização de um gráfico singular. Dado $Z = (X, Y)$, um gráfico singular contido ou em M^+ ou em M^- . Nós apenas definimos isto na primeira situação; o outro caso é tratado analogamente. Mencionamos também que centramos nossa análise quando o gráfico contém uma parte da região de deslize de Z ; o caso quando ele contém parte da região de escape pode ser tratado por dualidade e omitimos sua análise.

Seja Q uma região conexa e compacta em M com fronteira não-vazia. Denote $Q^+ = \{M^+\} \cap Q$ e $Q^- = \{M^-\} \cap Q$.

Definição 3.4.5. Um **gráfico singular** $\gamma \in Q$ é caracterizado pela existência de uma curva consistindo por um arco S_1 de S e um pedaço τ_0 de uma órbita de X em M^+ tal que:

- $S_1 = S \cap Q$ é formado pelo arco contido em S de extremos α e β . Orientamos de alguma maneira este arco $S_1 = [\alpha, \beta]$. Escolhemos algum ponto (chamado 0) contido em S_1 e denotamos $I = (\alpha, \beta)$, $I^- = (\alpha, 0)$ e $I^+ = (0, \beta)$.
- Assumimos que Y não tem ponto crítico em Q^- , e X não tem ponto crítico em S_1 . Além disso, em S_1 , $Xf(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$ e $X^2f(0) > 0$ (ou seja, 0 é o único ponto de dobra de X em (α, β)).
- $Yf \neq 0$ e $\det[X, Y] \neq 0$ em (α, β) .
- $(\det[X, Y](\alpha))^2 + (\det[X, Y](\beta))^2 \neq 0$, ou seja, os determinantes não podem ser ambos nulos, e se β pertence à fronteira da região de deslize (resp. α pertence à fronteira da região de escape), então

$$\det[X, Y](\beta) = 0 \text{ mas } d(\det[X, Y])|_S(\beta) \neq 0.$$

$$(\text{resp. } \det[X, Y](\alpha) = 0 \text{ mas } d(\det[X, Y])|_S(\alpha) \neq 0).$$

Se $Yf > 0$ (resp. $Yf < 0$) em I , então I^+ (resp. I^-) pertence à região de deslize (resp. de escape) de Z .

- A órbita de X passando através de 0, denotada por γ_0 , está contida em Q^+ de tal forma que γ_0 intersecta S_1 em $\mu_0 \in (0, \beta)$.

Um exemplo de um gráfico singular para $Yf > 0$ pode ser visto na figura 3.17.

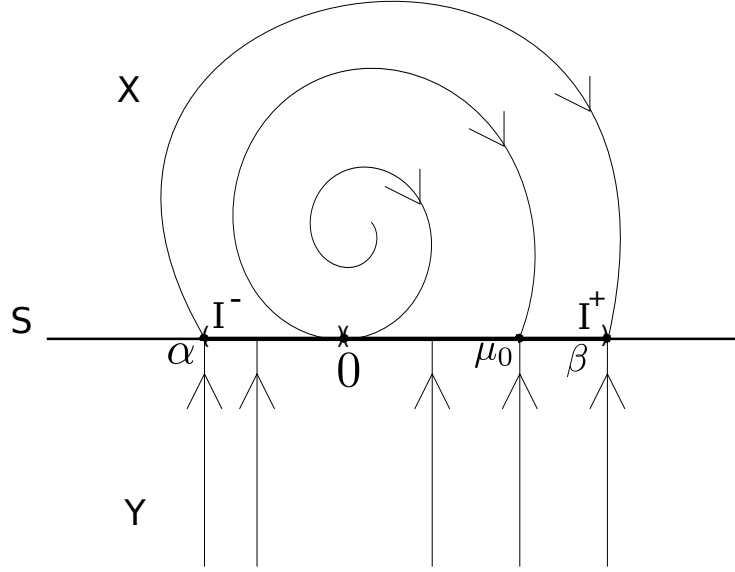


Figura 3.17: Gráfico singular com $Yf > 0$.

Observação 3.4.6. Observe que se o arco I^+ (resp. I^-) pertencem a região de deslize (resp. de escape) de Z , então deduzimos que β (resp. α) é um ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$ (do tipo sela). Denote por q_ε o ponto crítico sela de Z_ε associado a β (ou α). É permitido $Xf(\alpha) = 0$ (resp. $Xf(\beta) = 0$).

Observação 3.4.7. Dado um gráfico singular, sabemos que um dos extremos de $I = (\alpha, \beta)$ é um ponto crítico de $F(Z)$. Denotamos tal ponto por ω_0 . Nós chamamos o outro extremo por **extremo de costura** e denotamos o ponto por ω_1 . Seguindo a observação 3.2.9, podemos definir o valor de $h_\varepsilon(\omega_0)$ e por continuidade concluímos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(\omega_0) = 0$.

Definição 3.4.8. Dizemos que γ_0 é um **gráfico elementar** de $Z = (X, Y)$ se é singular e intersecta S no interior de $I = (\alpha, \beta)$.

Lema 3.4.9. Seja γ um gráfico elementar de $Z = (X, Y)$. Então existe uma vizinhança B de γ em M e um ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, Z_ε contém um única órbita periódica em B , que é hiperbólica.

Prova: Vamos realizar esta prova para o caso quando Q contém uma região de deslize de $Z = (X, Y)$. O caso quando Q contém uma região de escape é tratado de forma análoga. Primeiro, escolhamos coordenadas (x, y) em torno de 0 (ou seja, numa vizinhança $V_\varepsilon = \{|x| < 2\varepsilon, |y| < 2\varepsilon\}$) tal que $f(x, y) = y$ e $X(x, y) = (1, -x)$. Realizando da mesma forma que o lema 3.2.10, temos que, nestas coordenadas as curvas integrais de X por (x_0, y_0) são expressas por $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0}{2} + y_0$. Por simplicidade de notação nós chamamos o ponto onde Z_ε é tangente a $\{f = \varepsilon\}$ por 0_ε e não faremos distinção entre μ_0 , α e β e seus pontos correspondentes em cada curva $\{f = \varepsilon\}$. Observe que

- O ponto q_ε dado na observação 3.4.6 pertence a curva $\{Z_\varepsilon f = 0\}$. De fato, como q_ε é um ponto crítico hiperbólico de Z_ε , temos que $Z_\varepsilon(q_\varepsilon) = 0$, ou seja, $Z_\varepsilon^1(q_\varepsilon) = Z_\varepsilon^2(q_\varepsilon) = 0$. Mas,

$$Z_\varepsilon f = 0 \Leftrightarrow (Z_\varepsilon^1, Z_\varepsilon^2) \cdot (0, 1) = 0 \Leftrightarrow Z_\varepsilon^2 = 0.$$

Portanto, $q_\varepsilon \in \{Z_\varepsilon f = 0\}$.

- Em nossas coordenadas, a curva $\{Z_\varepsilon f = 0\}$ é expressa por $x = x(y)$ tal que

$$x(\varepsilon) = x'(\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad x'(y) < 0 \quad \text{para} \quad |y| < \varepsilon.$$

De fato, temos que

$$Z_\varepsilon f(q) = 0 \Leftrightarrow (1 - \varphi_\varepsilon(y))Y_2(x, y) - \varphi_\varepsilon(y)x = 0.$$

Queremos escrever em torno de $(x, \varepsilon) = q_\varepsilon$ a curva $Z_\varepsilon f(x, y) = 0$ como $x = x(y)$, ou seja, para cada y próximo de ε , existe $x = x(y)$ tal que o par $(x(y), y) \in \{Z_\varepsilon f = 0\}$, isto é, $Z_\varepsilon f(x(y), y) = 0$.

Denotando por $H(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))Y_2(x, y) - \varphi_\varepsilon(y)x$, para mostrar que é possível termos $x = x(y)$, basta mostrarmos que $\frac{\partial H}{\partial x}(x, \varepsilon) \neq 0$, mas

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))(Y_2)_x(x, y) - \varphi_\varepsilon(y),$$

daí,

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, \varepsilon) = (1 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon))(Y_2)_x(x, \varepsilon) - \varphi_\varepsilon(\varepsilon) = -\varphi\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right) = -\varphi(1) = -1 \neq 0.$$

Portanto, o conjunto $\{Z_\varepsilon f = 0\}$ é expresso por $x = x(y)$.

Agora, novamente pelo Teorema da Função Implícita, temos

$$x'(y) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial x}} = -\frac{\varphi'_\varepsilon(y)Y_2(x(y), y) + (1 - \varphi_\varepsilon(y))(Y_2(x(y), y))_y - \varphi'_\varepsilon(y)x(y)}{(1 - \varphi_\varepsilon(y))(Y_2(x(y), y))_x - \varphi_\varepsilon(y)}.$$

Usando que $\varphi_\varepsilon(y) = \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, ou seja, $\varphi_\varepsilon(\varepsilon) = \varphi(1) = 0$ e $\varphi'_\varepsilon(y) = \left(\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right)' = \varphi'\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, temos que

$$\varphi'_\varepsilon(\varepsilon) = \varphi'\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varphi'(1)}{\varepsilon} = 0.$$

Portanto, substituindo $y = \varepsilon$ na equação de $x'(y)$ acima, temos que $x'(\varepsilon) = 0$

- A Z_ε -variedade invariante instável de q_ε intersecta a curva $Xf = 0$ no interior de V_ε , com $Xf(x, y) = -x$.
- Seguindo a definição de gráfico singular e analogamente ao lema 3.2.10, podemos definir, associada a Z_ε , a involução

$$h_\varepsilon : [0_\varepsilon, \beta) \longrightarrow (\alpha, 0_\varepsilon)$$

de tal maneira que para todo μ em $[0, \beta)$, temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(\mu) = 0$.

- A órbita positiva da variedade invariante de q_ε (ou seja, o autoespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor positivo em q_ε) encontra a curva $\{f = \varepsilon\}$ em uma sequência ordenada $a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots < 0_\varepsilon$.

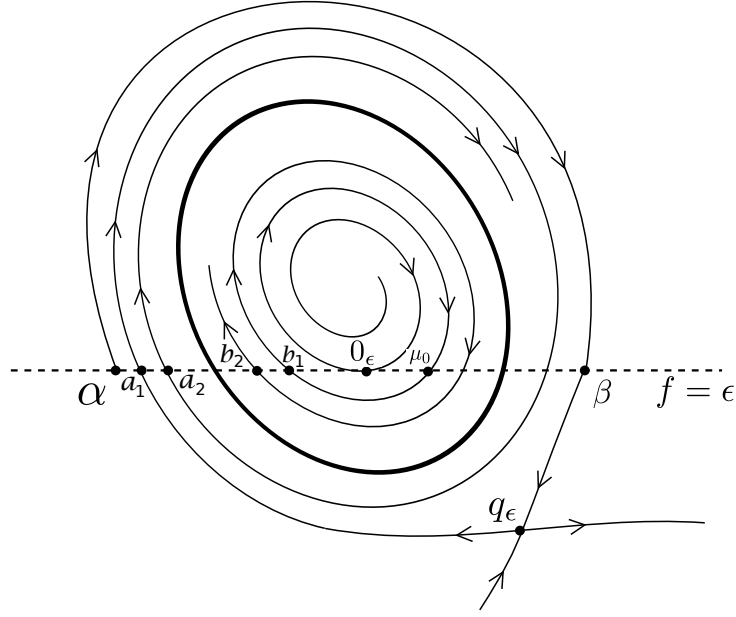


Figura 3.18: Gráfico elementar de um campo regularizado Z_ε .

- A órbita positiva de μ_0 encontra $\{f = \varepsilon\}$ em uma sequência ordenada $b_1 > b_2 > \dots b_l > \dots > \alpha$ no intervalo $(\alpha, 0_\varepsilon)$.

A figura 3.18 ilustra algumas das observações anteriores.

Consequentemente, a região determinada pela saturação de (μ_0, β) pelo Z_ε -fluxo contém uma região de atração.

Do Teorema de Poincaré-Bendixon existe nesta região, pelo menos, uma órbita periódica γ_ε . No que segue, devemos provar que é uma órbita periódica hiperbólica atratora e então única nesta região.

O campo de vetores X em Q^+ induz uma $\mathcal{C}^r$ -aplicação decrescente

$$g : (\alpha, 0) \longrightarrow (0, \beta)$$

satisfazendo $g(0) = \mu_0$, $g'(x) < 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = -\infty$, para todo x em $(\alpha, 0)$.

Pela fórmula de Taylor, podemos escrever (em torno de $x = 0$)

$$g(x) = \mu_0 + (\sqrt{kx}) + o(|\sqrt{x}|^2)$$

para $k < 0$ e $x < 0$.

Uma órbita periódica de Z_ε em Q é caracterizada pelos pontos fixos da aplicação

$$\rho_\varepsilon : [\mu_0, \beta) \longrightarrow [\mu_0, \beta),$$

onde $\rho_\varepsilon = g \circ h_\varepsilon$.

Se ε é suficientemente pequeno então a imagem de h_ε está contida em $|x| < 2\varepsilon$. Isto significa que a derivada desta função, em x_0 coincide com a derivada da involução h_0 associada a X , em $-h_\varepsilon(x_0)$, ou seja,

$$h'_\varepsilon(x_0) = h'_0(-h_\varepsilon(x_0)).$$

Lembrando que h_0 é uma aplicação linear, ou seja, $h_0 = h'_0$. Consequentemente,

$$h'_\varepsilon(x_0) = h'_0(-h_\varepsilon(x_0)) = h_0(-h_\varepsilon(x_0)) = -(-h_\varepsilon(x_0)) = h_\varepsilon(x_0).$$

Assim $h'_\varepsilon = h_\varepsilon$.

Como $h_\varepsilon(x)$ é decrescente em $(0_\varepsilon, \beta)$, então $h'_\varepsilon(x) < 0$ para $x \in (0_\varepsilon, \beta)$. E como $\rho_\varepsilon(x) = g \circ h_\varepsilon$ e $g'(h_\varepsilon(x)) < 0$, temos

$$\rho'_\varepsilon(x) = g'(h_\varepsilon(x)) \cdot h'_\varepsilon(x) > 0.$$

Por outro lado $g'(x) = \frac{k}{2\sqrt{kx}} + o(x^2)$, logo,

$$\rho'_\varepsilon(x) = \frac{k}{2\sqrt{k \cdot h_\varepsilon(x)}} \cdot h_\varepsilon(x) + o(x^2) \cdot h_\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{k \cdot h_\varepsilon(x)}}{2} + o(x^2) \cdot h_\varepsilon(x).$$

A última igualdade significa que $\rho'_\varepsilon(x)$ vai para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto Z_ε apresenta uma órbita periódica atratora. Isto prova o lema para o caso quando Q contém uma região de desliz de Z . Por outro lado Z_ε apresenta em Q uma órbita periódica hiperbólica repulsora quando Q contém uma região de escape. ■

Observação 3.4.10. Lembramos que se um gráfico singular de Z não é elementar então pode ocorrer de aparecer em Q , uma órbita periódica homoclínica para Z_ε com ε suficientemente pequeno. Ver figura 3.19.

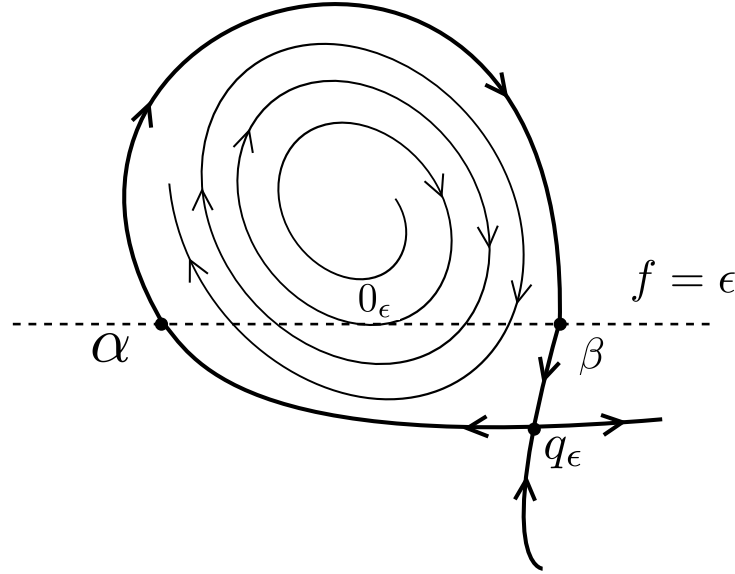


Figura 3.19: Órbita periódica homoclínica para o campo Z_ε .

3.5 Resultado Principal

Definição 3.5.1. Dizemos que uma órbita de Z é **simples** se ela encontra S somente no fecho da região de costura.

Definição 3.5.2. Seja $\mathcal{G}$ a classe de todos os campos $Z = (X, Y) \in \Omega$ para os quais as seguintes condições são satisfeitas:

1. X e Y estão em $\Sigma^r(M^+)$ e em $\Sigma^r(M^-)$ respectivamente.

2. Todas as singularidades e órbitas S -periódicas são elementares.
3. Nenhuma órbita simples de Z conecta um ponto de dobra de Z e um ponto crítico de $F(Z)$ ou dois pontos de dobra de Z .
4. Z não tem S -conexões de sela.
5. Os gráficos de Z são simples ou elementares.

O resultado principal deste capítulo é.

Teorema 3.5.3. *Seja $Z = (X, Y)$ em $\mathcal{G}$. Então existe um número positivo ε_0 tal que para qualquer $\varepsilon < \varepsilon_0$, Z_ε está em $\Sigma^r(M)$.*

Prova: Supomos Z em $\mathcal{G}$. Lembrando a definição 3.1.5, Z_ε estará em $\Sigma^r(M)$ se:

1. Todos os pontos singulares e órbitas periódicas de $Z_\varepsilon|_M$ são hiperbólicas e estão contidas no interior de M ;
2. Qualquer tangência entre uma trajetória de Z_ε e ∂M é quadrática;
3. $Z_\varepsilon|_M$ não tem conexões de sela ou conexões tangentes.

O lema 3.3.4 nos diz que se o sistema possui uma órbita S -periódica elementar γ do campo Z , então para um ε pequeno, Z_ε contém uma única órbita periódica na vizinhança de γ , que é hiperbólica.

Já o corolário 3.2.13 afirma que para um ε pequeno todos os pontos críticos de Z_ε são hiperbólicos e Z_ε não tem conexões de selas.

Os lemas 3.4.4 e 3.4.9 garantem que se o sistema possui, respectivamente, um gráfico simples γ de Z ou um gráfico elementar Γ de Z , então para ε pequeno, Z_ε contém uma única órbita periódica na vizinhança de γ , que é hiperbólica.

Portanto, estes lemas, o corolário e a definição de $\mathcal{G}$ sustentam a prova deste teorema. ■

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, iremos apresentar duas aplicações que contêm campos vetoriais com um conjunto de descontinuidade. A primeira delas é um oscilador com atrito de Coulomb e a segunda aplicação é um sistema de controle automático de um barco. Apresentaremos a formulação dos problemas, adaptando os campos vetoriais às definições do capítulo anterior. Com isso, estaremos aptos à fazer uma regularização para analisarmos o comportamento desses novos campos vetoriais.

4.1 Oscilador com atrito de Coulomb

4.1.1 Formulação do Problema

Um exemplo de um sistema dissipativo é um oscilador com atrito seco (figura 4.1). Na ausência de atrito o sistema é um oscilador harmônico. A lei linear assumida para atrito viscoso é totalmente inadequada para representar as características de atrito seco entre superfícies sólidas não lubrificadas. Os aspectos básicos destas características são reproduzidos suficientemente bem, pelo menos para pequenas velocidades, assumindo uma “constante” ou *atrito de Coulomb*.

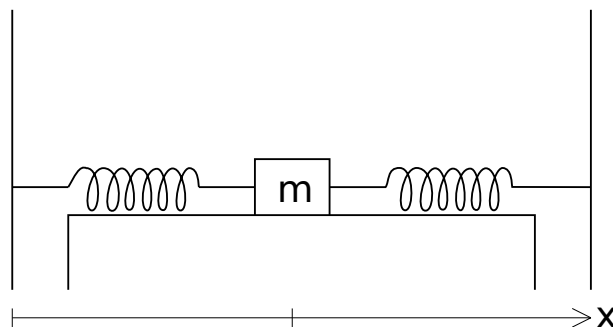


Figura 4.1: Oscilador com atrito seco.

Este “atrito constante” é constante em amplitude mas não em direção desde que a direção da força de atrito é sempre oposta ao sentido de velocidade. A dependência de um atrito Coulomb f com a velocidade v pode ser representada pelo diagrama mostrado na figura 4.2. Note que para $v = 0$ o valor que f pode assumir, dependendo dos valores de outras forças agindo no sistema, qualquer valor entre $+f_0$ e $-f_0$. A massa m sofre a ação não somente da força de atrito seco, mas também da força de tensão das molas $-kx$.

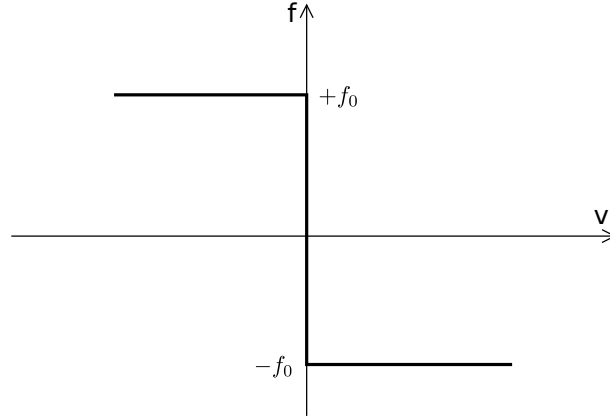


Figura 4.2: Dependência de um atrito de Coulomb f com a velocidade v .

Ela permanece em repouso ($\dot{x} = 0$) se a força de tensão das molas não excede f_0 em valor absoluto. Assim, todas as posições do oscilador com coordenadas

$$-\frac{f_0}{k} \leq x \leq \frac{f_0}{k}$$

podem ser posições de repouso. Se porém $|kx| > f_0$, então o oscilador está em movimento. Quando o oscilador está em movimento, a força do atrito de Coulomb é

$$\begin{cases} f = +f_0 & \text{para } \dot{x} < 0 \text{ e} \\ f = -f_0 & \text{para } \dot{x} > 0. \end{cases}$$

Assim, podemos descrever a força de atrito de Coulomb pelas equações:

$$f = \begin{cases} +f_0, & \text{para } \dot{x} < 0; \\ +f_0, & \text{para } \dot{x} = 0 \text{ e } kx > f_0; \\ +kx, & \text{para } \dot{x} = 0 \text{ e } |kx| \leq f_0; \\ -f_0, & \text{para } \dot{x} = 0 \text{ e } kx < -f_0; \\ -f_0, & \text{para } \dot{x} > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Uma força de atrito Coulomb é então uma função descontínua não-linear e depende não somente da velocidade $\dot{x}$ mas também da coordenada x do oscilador. Pela lei da dinâmica, temos que $\sum \vec{F} = m \cdot a$, assim a equação diferencial não-linear de movimento do oscilador é descrita por

$$m\ddot{x} = -kx + f \quad (4.2)$$

e pode ser escrita na forma de duas equações lineares separadas, uma que é válida para um movimento em direção à esquerda

$$m\ddot{x} + kx = +f_0, \quad (\text{se } \dot{x} < 0) \quad (4.3)$$

e outra para um movimento em direção à direita

$$m\ddot{x} + kx = -f_0, \quad (\text{se } \dot{x} > 0). \quad (4.4)$$

Suponha que, no instante inicial de tempo, $\dot{x} < 0$. O movimento do sistema é descrito por (4.3). A velocidade diminui até $t = t_1$ o sistema chega em $x = x_1$ e a

velocidade reduz a zero. Então a velocidade troca de sinal e o sistema vai mover na direção oposta. O movimento oposto agora é descrito pela equação (4.4), onde agora as condições iniciais são a coordenada e velocidade $(x_1, 0)$ que o sistema possuía no fim da fase anterior ao movimento. Este processo continua até que o corpo finalmente permanece em repouso. Sejam

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{e} \quad \frac{f_0}{m} = a\omega_0^2, \quad \text{onde } a = \frac{f_0}{k}.$$

As equações de movimento são

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} +a\omega_0^2, & \text{para } \dot{x} < 0 \\ -a\omega_0^2, & \text{para } \dot{x} > 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Seja $\xi_1 = x - a$, quando $\dot{x} < 0$ e seja $\xi_2 = x + a$, quando $\dot{x} > 0$, então

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = 0 \quad (\text{para } \dot{\xi}_1 < 0) \quad \text{e} \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_0^2 \xi_2 = 0 \quad (\text{para } \dot{\xi}_2 > 0)$$

mas as variáveis se referem a diferentes origens. Consequentemente, o movimento do sistema é obtido pela combinação de duas metades das oscilações harmônicas centradas em duas posições diferentes de equilíbrio distante $+a$ e $-a$ do ponto $x = 0$. A troca de um modo para outro ocorre no instante quando a velocidade do sistema se reduz a zero enquanto a coordenada é diferente de zero.

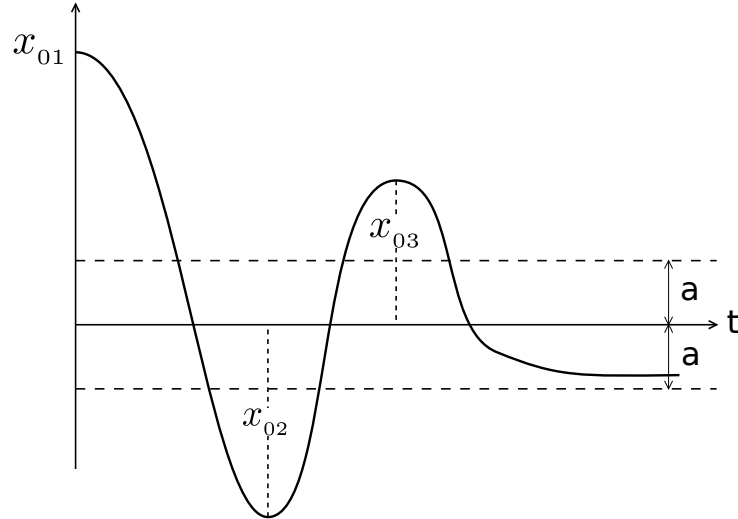


Figura 4.3: Deslocamento x como uma função de t .

Para encontrar o deslocamento x como uma função de t procede-se da seguinte maneira (figura 4.3). Seja x_{01} a posição inicial com $\dot{x}_{01}$ velocidade inicial zero. Se x_{01} é positivo, a velocidade será primeiro negativa com a posição de equilíbrio deslocada por $+a$ (na figura 4.3 por a acima do eixo-tempo). Finalmente o sistema atinge a posição mínima x_{02} , onde $|x_{02}| = |x_{01}| - 2a$.

Então, para $\dot{x} > 0$, a segunda equação torna-se válida e consequentemente, haverá uma parte da oscilação com uma posição de equilíbrio deslocada por $-a$, isto é, por uma quantidade a abaixo do eixo-tempo. No fim desta meia-oscilação o sistema atinge o desvio máximo x_{03} (acima do eixo t na figura 4.3) onde $|x_{03}| = |x_{02}| - 2a = |x_{01}| - 4a$.

O deslocamento máximo atingido diminui a cada tempo em valor absoluto de $2a$, e os máximos sucessivos formam uma progressão aritmética decrescente com diferença

constante igual a $4a$. É claro que esta progressão consiste de um número finito de oscilações. De fato, quando o deslocamento máximo diminui para um valor menor que $3a$, por exemplo, para o valor x_{03} na figura 4.3, então o movimento subsequente leva o sistema para uma região compreendida entre as retas $x = +a$ e $x = -a$, e vai pra o repouso. Então permanece em repouso desde que nesta região $|kx| \leq f_0$.

O intervalo de tempo entre 2 máximos não depende do valor da força de atrito e é igual ao período do oscilador harmônico. Mas, como é verificado examinando a figura 4.3, o intervalo de tempo entre o máximo e o próximo zero é maior que entre o zero e próximo mínimo. Esta diferença é mais perceptível, quanto menor for o máximo.

Considere agora o movimento no plano de fase. Tome $\frac{dx}{dt} = y$ e então, usando a equação (4.5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \begin{cases} \frac{-\omega_0^2(x-a)}{y} & \text{para } y < 0 \\ \frac{-\omega_0^2(x+a)}{y} & \text{para } y > 0. \end{cases}$$

Vamos descobrir agora quem são $x(t)$ e $y(t)$. Tomemos somente o caso $y < 0$. O segundo caso $y > 0$ é análogo. Utilizando o método das variáveis separáveis e fazendo a integração, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2(x-a)}{y} &\Leftrightarrow \int y dy = \int -\omega_0^2(x-a) dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 &= -\frac{\omega_0^2(x-a)^2}{2} + C_2 \Leftrightarrow \omega_0^2(x-a)^2 + y^2 = C_3. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da última igualdade por $\frac{1}{\omega_0^2}$ temos

$$(x-a)^2 + \frac{y^2}{\omega_0^2} = \frac{C_3}{\omega_0^2}.$$

Seja $R_1^2 = \frac{C_3}{\omega_0^2}$. Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $\frac{1}{R_1^2}$, temos

$$\frac{(x-a)^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_1^2 \omega_0^2} = 1 \quad \text{para } y < 0, \quad (4.6)$$

e analogamente

$$\frac{(x+a)^2}{R_2^2} + \frac{y^2}{R_2^2 \omega_0^2} = 1 \quad \text{para } y > 0, \quad (4.7)$$

onde R_1 e R_2 são constantes que dependem das constantes de integração. As equações (4.6) e (4.7) definem uma família de “semi-elipses” de centros que estão deslocados sucessivamente para a direita em (4.6) e para a esquerda em (4.7) por a . Por “correspondência” das condições iniciais e levando em conta a direção de movimento no plano de fase, é fácil construir as trajetórias conforme mostrado na (figura 4.4). Todas as trajetórias são espirais formadas de semi-elipses e o movimento é ao longo delas para o segmento O_1O_2 que é o local dos estados de equilíbrio.

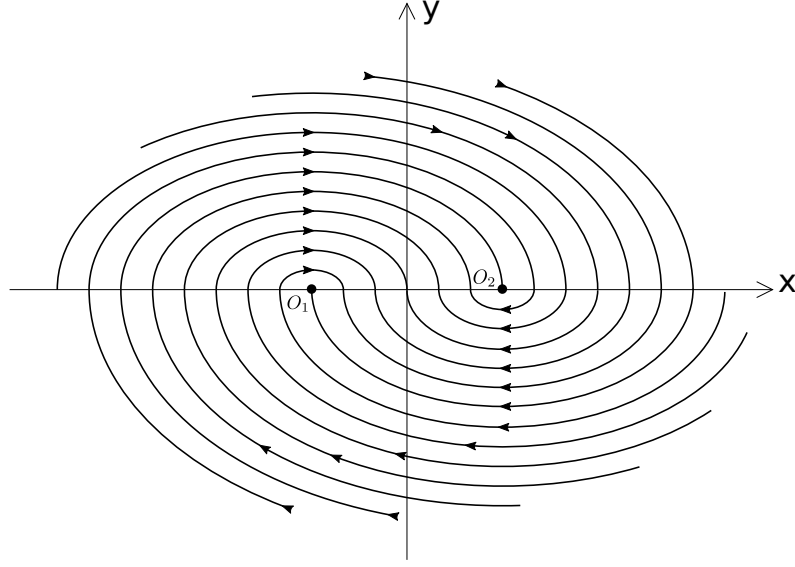


Figura 4.4: Retrato de fase da equação 4.5.

4.1.2 Regularização

Para fazermos a regularização deste sistema, primeiro temos que “traduzir” os dados do sistema para a linguagem que estamos trabalhando. Para isso, consideremos:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que $f(x, y) = y$;
- $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ campos de vetores em $\mathbb{R}^2$ dados por

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2(x + a), \text{ se } y > 0 \end{cases}$$

e

$$Y : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2(x - a), \text{ se } y < 0. \end{cases}$$

Assim, temos que o conjunto S de descontinuidade é o eixo x , X representa o campo de vetores quando $y > 0$ e Y representa o campo de vetores quando $y < 0$.

Feitas as devidas adaptações, podemos prosseguir.

Vejamos como se distribuem as regiões de costura, deslize e escape em S . Seja $p = (b, 0)$ um ponto em S . Temos que

- $\nabla f = (0, 1)$;
- $Xf = -\omega_0^2(x + a)$;
- $Yf = -\omega_0^2(x - a)$;
- $b < -a < 0 \implies Xf(p) > 0$ e $Yf(p) > 0$;
- $-a < b < a \implies Xf(p) < 0$ e $Yf(p) > 0$;
- $0 < a < b \implies Xf(p) < 0$ e $Yf(p) < 0$.

Portanto, p é um ponto de deslize se $b \in (-a, a)$ e p é um ponto de costura se $b \in (-\infty, -a)$ ou $b \in (a, +\infty)$. Temos ainda que os pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ são singularidades dos campos X e Y , respectivamente, pois $X(-a, 0) = 0$ e $Y(a, 0) = 0$. Vejamos que tipo de singularidade estes pontos são. Temos que

- $\nabla X f(x, y) = (-\omega_0^2, 0)$;
- $X^2 f(x, y) = X \cdot \nabla X f(x, y) = (y, -\omega_0^2(x + a))(-\omega_0^2, 0) = -y\omega_0^2$;
- $\nabla X^2 f(x, y) = (0, -\omega_0^2)$;
- $X^3 f(x, y) = X \cdot \nabla X^2 f(x, y) = (y, -\omega_0^2(x + a))(0, -\omega_0^2) = \omega_0^4(x + a)$
- $\nabla X^3 f(x, y) = (\omega_0^4, 0)$;
- $X^4 f(x, y) = X \cdot \nabla X^3 f(x, y) = (y, -\omega_0^2(x + a))(\omega_0^4, 0) = y\omega_0^4$.

Continuando com os cálculos acima, concluímos que

$$\begin{cases} X^n f(x, y) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \omega_0^{n+1}(x + a), & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ X^n f(x, y) = (-1)^{\frac{n}{2}} \omega_0^n y, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Logo $X^n f(-a, 0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{R}$.

Analogamente, temos que $Y^n f(+a, 0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{R}$.

A regularização Z_ε do campo $Z = (X, Y)$ é dada por:

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) \\ &= (y, -\omega_0^2(x - a) - 2a\omega_0^2\varphi_\varepsilon(y)). \end{aligned}$$

Vamos agora descobrir se há, e caso existam, onde se localizam os pontos singulares do campo regularizado Z_ε . Sabendo que $\omega_0^2 > 0$, temos que

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) = (0, 0) &\implies \begin{cases} y = 0 \\ -\omega_0^2(x - a + 2a\varphi_\varepsilon(y)) = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=0} \\ &\xrightarrow{y=0} x - a + 2a\varphi_\varepsilon(0) = 0 \implies x = a - 2a\varphi_\varepsilon(0). \end{aligned}$$

Portanto, $(a - 2a\varphi_\varepsilon(0), 0)$ é o ponto singular de $Z_\varepsilon(x, y)$.

Agora, multiplicando cada membro da desigualdade $0 < \varphi_\varepsilon(0) < 1$ por $-2a$ e somando a , como $a > 0$, segue que

$$0 < \varphi_\varepsilon(0) < 1 \implies -2a < -2a\varphi_\varepsilon(0) < 0 \implies -a < a - 2a\varphi_\varepsilon(0) < a.$$

Portanto o ponto singular está entre $-a$ e a no nível $y = 0$.

Resta ainda sabermos que tipo de singularidade temos. Como φ_ε pode não ser uma função linear, temos que fazer a linearização do campo Z_ε para descobrirmos a natureza do ponto singular, uma vez que o campo Z_ε e seu campo linearizado DZ_ε possuem estruturas semelhantes, se essa singularidade for hiperbólica (Teorema 1.5.6).

Fazendo a linearização, temos que

$$DZ_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(y) \end{pmatrix}.$$

Assim, para um ponto $p = (b, 0)$ de S com $b \in (-a, a)$, temos

$$DZ_\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0) \end{pmatrix}.$$

Encontrando os autovalores λ associados a este operador, temos que

$$\det[DZ_\varepsilon(p) - \lambda Id] = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0)\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Logo,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0) + \sqrt{a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0) - \sqrt{a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2} \end{cases} \text{ e}$$

Como $-a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0) + \sqrt{a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2} < 0$ quando $a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2 \geq 0$, concluímos que

- Se $(a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0))^2 - \omega_0^2 = 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, e neste caso o ponto singular é um nó impróprio estável.
- Se $(a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0))^2 - \omega_0^2 > 0$, então $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, e neste caso o ponto singular é um nó estável.
- Se $(a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0))^2 - \omega_0^2 < 0$, então λ_1 e λ_2 são autovalores complexos e conjugados, e neste caso o ponto singular é um foco atrator.

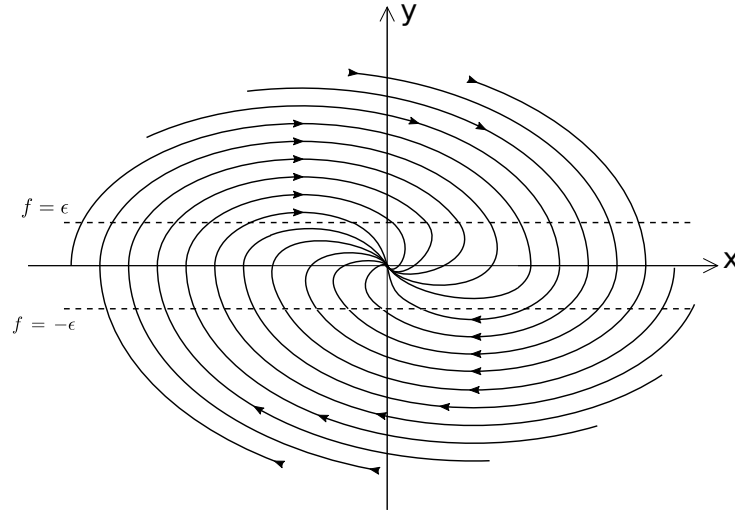


Figura 4.5: Campo Regularizado para o caso $(a\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0))^2 - \omega_0^2 = 0$ e assumindo $(0,0)$ como ponto singular de Z_ε .

Em todo caso, a singularidade é um ponto crítico hiperbólico, já que a parte real de λ_1 e de λ_2 nunca se anulam, pois a , ω_0^2 e $\varphi'_\varepsilon(0)$ são valores positivos.

Observação 4.1.1. A expressão $a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2$ pode assumir valores positivos, negativos ou nulos pois depende da escolha da função de transição φ_ε .

De fato, se tomarmos uma função de transição com $0 < \varphi'_\varepsilon(0) = \frac{\sqrt{km}}{f_0} < 1$, onde k é a constante de mola, m é a massa do corpo e f_0 é a constante de atrito Coulomb, então $\varphi'_\varepsilon(0)^2 = \frac{km}{f_0^2} = \frac{1}{a^2\omega_0^2}$. Assim,

$$a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2[a^2\omega_0^2\varphi'_\varepsilon(0)^2 - 1] = \omega_0^2[1 - 1] = 0.$$

Analogamente, se $0 < \varphi'_\varepsilon(0) < \frac{\sqrt{km}}{f_0} < 1$, então $a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2 < 0$.

Finalmente, se $0 < \frac{\sqrt{km}}{f_0} < \varphi'_\varepsilon(0) < 1$, então $a^2\omega_0^4\varphi'_\varepsilon(0)^2 - \omega_0^2 > 0$.

4.2 Sistema de controle automático de um barco

4.2.1 Formulação do Problema

Considere para a regulação de velocidade de uma força motriz usando um servo-motor “flutuante” ou “velocidade constante” sem “zona-morta”, e com um elemento de detecção ideal. O diagrama esquemático de um regulador de velocidade automático é mostrado na figura 4.6. Suas equações de movimento para variações na velocidade angular sobre o estado de equilíbrio $\omega = \Omega$ podem ser escritas da seguinte forma (veja [2])

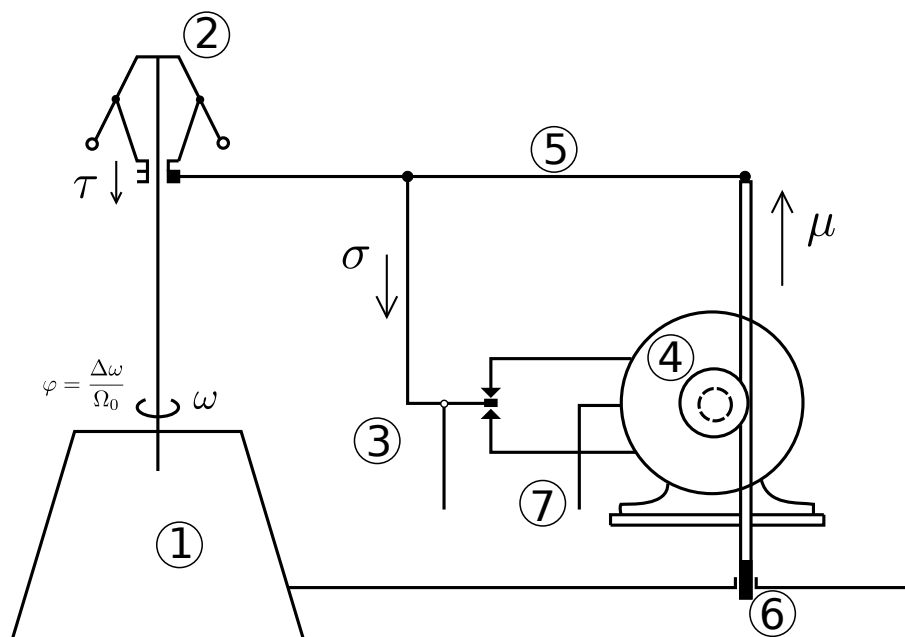


Figura 4.6: Diagrama de um regulador de velocidade automático.

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = \mu. \quad (4.8)$$

A equação linearizada do elemento “*speed-serving*” ou *governador* é

$$\delta\eta + \varphi = 0. \quad (4.9)$$

A equação de feedback é

$$\sigma = \eta - \gamma\mu. \quad (4.10)$$

E a equação do servomotor que move ou para um caminho ou para outro é

$$\frac{d\mu}{dt} = \begin{cases} +\frac{1}{T_s} & \text{para } \sigma > 0 \\ -\frac{1}{T_s} & \text{para } \sigma < 0 \end{cases}. \quad (4.11)$$

Servo-motor é uma máquina, eletromecânica, que apresenta movimento proporcional a um comando. Servomotores são dispositivos de malha fechada, ou seja, recebem um sinal de controle, que verifica a posição atual para controlar sua movimentação indo para a posição desejada com velocidade monitorada externamente sob *feedback* de um dispositivo taco ou sensor de efeito *Hall* ou *encoder* ou *resolver* ou *tachsin*, dependendo do tipo de servo-motor.

Feedback é o termo utilizado para se referir à realimentação de um sistema, ou seja, à transferência de um sinal de saída para a entrada do mesmo sistema ou circuito, resultando num aumento do nível de saída (*feedback* positivo) ou diminuição de saída (*feedback* negativo)

Os significados de φ , η , δ e μ podem ser observado do diagrama. μ é o deslocamento relativo da válvula controlando o fluxo de combustível ou eletricidade no motor.

T_a e k são chamadas constantes de tempo e sensibilidade do motor, δ é a sensibilidade do elemento de detecção. γ é o coeficiente de acoplamento de *feedback* e T_s é a constante de tempo do servo-motor. Das equações (4.8) e (4.9), obtemos

$$\mu = T_a \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = T_a \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k \frac{d\varphi}{dt} \quad (4.12)$$

$$\delta\eta + \varphi = 0 \Rightarrow \eta = -\frac{\varphi}{\delta}. \quad (4.13)$$

Das equações (4.8), (4.10) e (4.13), temos que

$$\begin{aligned} \sigma = \eta - \gamma\mu &\Rightarrow \sigma = -\frac{\varphi}{\delta} - \gamma \left(T_a \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi \right) \\ &\Rightarrow \sigma = -\left(\frac{1}{\delta} - \gamma k \right) \varphi - \gamma T_a \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Finalmente, das equações (4.11) e (4.12) e (4.14) temos que

$$T_a T_s \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k T_s \frac{d\varphi}{dt} = \begin{cases} +1 & \text{para } \sigma > 0, \\ -1 & \text{para } \sigma < 0 \end{cases}$$

onde,

$$\sigma = -\left(\frac{1}{\delta} - \gamma k \right) \varphi - \gamma T_a \frac{d\varphi}{dt}.$$

Se agora introduzirmos novas variáveis x e ξ e um novo tempo dimensional t_n conectados às variáveis antigas pelas relações

$$t = \frac{T_a}{k} t_n \quad , \quad \varphi = \frac{T_a}{k^2 T_s} x \quad \text{e} \quad \sigma = -\frac{T_a \left(\frac{1}{\delta} + \gamma k \right)}{k^2 T_s} \xi,$$

então as equações do sistema são reduzidas à forma

$$\ddot{x} + \dot{x} = \begin{cases} -1 & \text{para } \xi > 0, \\ +1 & \text{para } \xi < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

onde $\xi = x + \beta \dot{x}$ e $\beta = \frac{\gamma k}{\frac{1}{\delta} + \gamma k}$.

Daqui para frente, quando denotarmos $\dot{x}$, estamos já considerando a diferenciação com relação a nova variável t_n , ou seja, $\dot{x} = \frac{dx}{dt_n}$.

Observemos que as equações acima descritas são verdadeiras. De fato,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt_n} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_n} = \frac{k^2 T_s}{T_a} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{T_a}{k} = k T_s \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt_n} \left(\frac{dx}{dt_n} \right) = \frac{d}{dt_n} \left(k T_s \frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(k T_s \frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{dt}{dt_n} = k T_s \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \cdot \frac{T_a}{k} \\ &= T_s T_a \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \end{aligned}$$

Da definição de ξ , temos que $\sigma > 0 \Leftrightarrow \xi < 0$ e $\sigma < 0 \Leftrightarrow \xi > 0$ desde que $\frac{T_a \left(\frac{1}{\delta} + \gamma k \right)}{k^2 T_s}$ seja positivo. Desta forma,

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{k^2 T_s}{T_a \left(\frac{1}{\delta} + \gamma k \right)} \cdot \left[-\left(\frac{1}{\delta} + \gamma k \right) \varphi - \gamma T_a \frac{d\varphi}{dt} \right] \\ &= \frac{k^2 T_s}{T_a} \varphi + \frac{k^2 T_s \gamma}{\frac{1}{\delta} + \gamma k} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{k^2 T_s}{T_a} \varphi + \frac{k \gamma}{\frac{1}{\delta} + \gamma k} \cdot k T_s \frac{d\varphi}{dt} \\ &= x + \beta \dot{x} \end{aligned}$$

com β definido anteriormente e observando ainda que $0 < \beta < 1$.

4.2.2 Regularização

Como na seção anterior, faremos as devidas adaptações para este sistema. Definindo $y = \dot{x}$ consideremos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$f(x, y) = x + \beta y \quad , \text{ com } \quad \beta = \frac{\gamma k}{\frac{1}{\delta} + \gamma k}.$$

Logo, da equação (4.15) e fazendo a substituição acima, temos o seguinte sistema descontínuo

$$\dot{y} + y = \begin{cases} -1 & \text{para } f(x, y) > 0, \\ +1 & \text{para } f(x, y) < 0. \end{cases}$$

Tomemos agora dois campos de vetores $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ de modo que

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - 1 \end{cases} \quad \text{se } f(x, y) > 0$$

$$Y : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + 1 \end{cases} \quad \text{se } f(x, y) < 0.$$

Logo, temos as seguintes relações.

- $\nabla f = (1, \beta)$;
- $Xf(x, y) = (y, -y - 1)(1, \beta) = y - \beta y - \beta = y(1 - \beta) - \beta$;
- $Yf(x, y) = (y, -y + 1)(1, \beta) = y - \beta y + \beta = y(1 - \beta) + \beta$;
- $\nabla Xf(x, y) = \nabla Yf(x, y) = (0, 1 - \beta)$;
- $X^2f(x, y) = (y, -y - 1)(0, 1 - \beta) = -y + \beta y - 1 + \beta = y(\beta - 1) - (1 - \beta)$;
- $Y^2f(x, y) = (y, -y + 1)(0, 1 - \beta) = -y + \beta y + 1 - \beta = y(\beta - 1) + (1 - \beta)$.

Assim, o conjunto de descontinuidade $S = \{f(x, y) = 0\}$ é representado pela reta $y = -\frac{1}{\beta}x$, X é o campo de vetores para pontos (x, y) tais que $f(x, y) > 0$ e Y para pontos (x, y) tais que $f(x, y) < 0$.

Analisemos agora as regiões de costura, escape e deslize em S .

$$Xf.Yf > 0 \Leftrightarrow (y(1 - \beta) - \beta)(y(1 - \beta) + \beta) > 0 \Leftrightarrow y^2(1 - \beta)^2 - \beta^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow y < -\frac{\beta}{1 - \beta} \quad \text{ou} \quad y > \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

$$\begin{cases} Xf > 0 \\ Yf < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - \beta) - \beta > 0 \\ y(1 - \beta) + \beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y > \frac{\beta}{1 - \beta} \quad \text{e} \quad y < -\frac{\beta}{1 - \beta}.$$

o que é uma contradição!

Por fim,

$$\begin{cases} Xf < 0 \\ Yf > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - \beta) - \beta < 0 \\ y(1 - \beta) + \beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\beta}{1 - \beta} < y < \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

Portanto, as regiões em S são distribuídas da seguinte forma:

- Região de Costura: $SW = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y < -\frac{\beta}{1-\beta} \text{ ou } y > \frac{\beta}{1-\beta} \text{ e } x = -\beta y \right\};$
- Região de Escape: $ES = \emptyset;$
- Região de Deslize: $SL = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{\beta}{1-\beta} < y < \frac{\beta}{1-\beta} \text{ e } x = -\beta y \right\}.$

Além disso, os pontos $p = \left(-\frac{\beta^2}{1-\beta}, \frac{\beta}{1-\beta} \right)$ e $q = \left(\frac{\beta^2}{1-\beta}, -\frac{\beta}{1-\beta} \right)$ são pontos de dobra de X e de Y respectivamente. De fato,

$$Xf(x, y) = 0 \Leftrightarrow y(1-\beta) - \beta = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Substituindo em S , temos que $x = -\frac{\beta^2}{1-\beta}$.

Analogamente para $Yf(x, y) = 0$, tem-se $y = -\frac{\beta}{1-\beta}$ e $x = \frac{\beta^2}{1-\beta}$.

Agora,

$$X^2f(p) = \frac{\beta}{1-\beta}(\beta-1) - (1-\beta) = -\beta - 1 + \beta = -1 \neq 0$$

e

$$Y^2f(q) = -\frac{\beta}{1-\beta}(\beta-1) + (1-\beta) = \beta + 1 - \beta = 1 \neq 0.$$

E assim, p é ponto de dobra de X e q é ponto de dobra de Y .

Temos ainda,

$$\det[X, Y] = y(-y+1) - y(-y-1) = -y^2 + y + y^2 + y = 2y.$$

Substituindo $y = 0$ em S , temos que $x = 0$. Portanto, $(0, 0)$ é um ponto crítico de $F(Z)$.

Vejamos agora se $(0, 0)$ é um ponto crítico hiperbólico.

Observando que $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -\frac{1}{\beta}x \right\}$, temos

$$d(\det[X, Y]|_S) = d(2y) = d\left(-\frac{x}{\beta}\right) = -\frac{1}{\beta} \neq 0$$

para todo (x, y) em S .

Assim, como $(0, 0) \in S$, temos que $d(\det[X, Y])(0, 0) \neq 0$ e, de fato, $(0, 0)$ é um ponto crítico hiperbólico de $F(Z)$.

Portanto, o retrato de fase deste sistema pode ser observado na figura 4.7.

O campo regularizado Z_ε é dado por

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= (1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y)))Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) = \\ &= \left(y, -y + 1 - 2\varphi_\varepsilon(f(x, y)) \right). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$Z_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + 1 - 2\varphi_\varepsilon(f(x, y)) \end{cases} \quad (4.16)$$

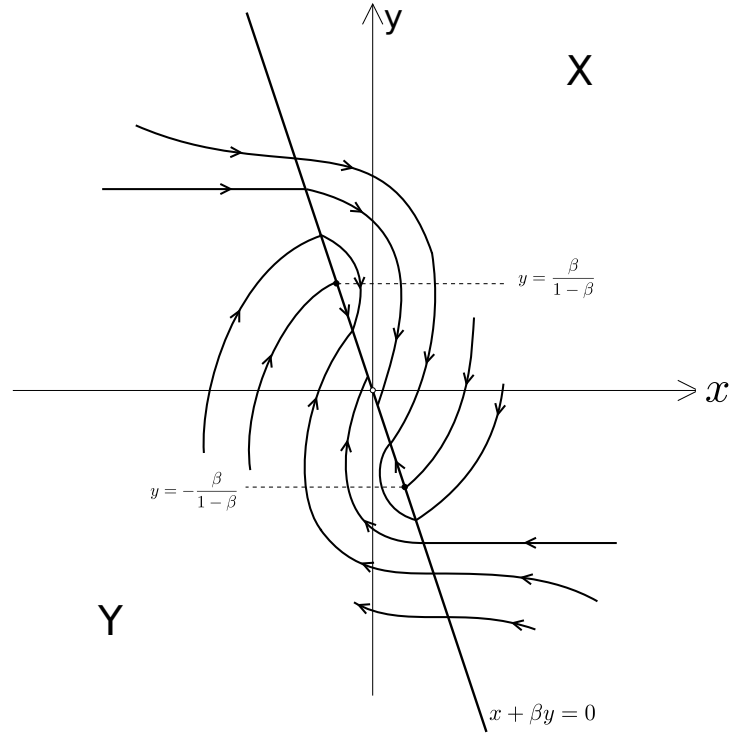


Figura 4.7: Retrato de fase de um sistema de controle de barco automático.

onde φ_ε é uma função de transição.

Vejamos agora se existem e quais são os pontos críticos do campo Z_ε .

$$\begin{aligned}
 Z_\varepsilon(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} y = 0 \\ -y + 1 - 2\varphi_\varepsilon(f(x, y)) = 0 \end{cases} \\
 &\implies \varphi_\varepsilon(f(x, y)) = 1/2 \implies -1 < \frac{f(x, y)}{\varepsilon} < 1 \\
 &\implies -\varepsilon < f(x, y) < \varepsilon \implies -\varepsilon < x - \beta y < \varepsilon \\
 &\stackrel{y=0}{\implies} -\varepsilon < x < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Assim, um ponto $p = (x, y)$ será um ponto crítico de Z_ε se $-\varepsilon < x < \varepsilon$ e $y = 0$.

A função φ_ε pode assumir valores entre $-\varepsilon$ e ε , mas para facilitar nossos cálculos, consideremos $\varphi_\varepsilon(f(x, y)) = 1/2$, ou seja, consideremos $(0, 0)$ ponto crítico de Z_ε . Assim, temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} [\varphi_\varepsilon(x + \beta y)] \right|_{x=0, y=0} = \varphi'_\varepsilon(x + \beta y) \cdot \beta \Big|_{x=0, y=0} = \beta \cdot \varphi'_\varepsilon(0)$$

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} [\varphi_\varepsilon(x + \beta y)] \right|_{x=0, y=0} = \varphi'_\varepsilon(0).$$

Analisemos portanto a natureza do ponto crítico $(0, 0)$ do campo Z_ε , para isso tomamos o ponto $(0, 0)$ no campo linearizado DZ_ε .

$$DZ_\varepsilon(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\varphi'_\varepsilon(0) & -1 - 2\beta\varphi'_\varepsilon(0) \end{pmatrix}.$$

Encontrando os autovalores λ associados a matriz de DZ_ε , temos

$$\lambda^2 + (1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))\lambda + 2\varphi'_\varepsilon(0) = 0.$$

Isto implica que

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0)) + \sqrt{(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0)} \right) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0)) - \sqrt{(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0)} \right) \end{cases}.$$

Quando $(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0) \geq 0$ temos que

$$\frac{1}{2} \left(-(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0)) + \sqrt{(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0)} \right) < 0$$

e assim, concluímos que

- Se $(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0) = 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, e neste caso o ponto singular é um nó impróprio estável.
- Se $(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0) > 0$, então $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, e neste caso o ponto singular é um nó estável.
- Se $(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0) < 0$, então λ_1 e λ_2 são autovalores complexos e conjugados, e neste caso o ponto singular é um foco atrator.

Observação 4.2.1. A expressão $(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0)$ pode assumir valores positivos, negativos ou nulos pois depende da escolha da função de transição φ_ε .

De fato, supondo que $(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0) = 0$, temos

$$(1 + 2\beta\varphi'_\varepsilon(0))^2 - 8\varphi'_\varepsilon(0) = 0 \Leftrightarrow 4\beta^2\varphi'_\varepsilon(0)^2 + (4\beta - 8)\varphi'_\varepsilon(0) + 1 = 0.$$

Assim, como $0 < \beta < 1$, o discriminante em função de $\varphi'_\varepsilon(0)$ é o seguinte

$$\Delta = (4\beta - 8)^2 - 16\beta^2 = 64(-\beta + 1) > 0.$$

Logo, continuando com a resolução da equação, temos

$$\begin{cases} \varphi'_\varepsilon(0) = \gamma_1 = \frac{-(\beta - 2) + 2\sqrt{-\beta + 1}}{2\beta^2} \\ \text{ou} \\ \varphi'_\varepsilon(0) = \gamma_2 = \frac{-(\beta - 2) - 2\sqrt{-\beta + 1}}{2\beta^2} \end{cases}.$$

Observe que

$$2\sqrt{-\beta + 1} \geq -(\beta - 2) \Rightarrow 4(-\beta + 1) \geq (\beta - 2)^2 \Rightarrow -4\beta + 4 \geq \beta^2 - 4\beta + 4 \Rightarrow 0 \geq \beta^2$$

o que é uma contradição.

Daí, $2\sqrt{-\beta + 1} < -(\beta - 2)$ e assim $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$ para todo $\beta \in (0, 1)$. Portanto,

- Se $\varphi'_\epsilon(0) = \gamma_1$ ou $\varphi'_\epsilon(0) = \gamma_2$, então $(1 + 2\beta\varphi'_\epsilon(0))^2 - 8\varphi'_\epsilon(0) = 0$;
- Se $\gamma_2 < \varphi'_\epsilon(0) < \gamma_1$, então $(1 + 2\beta\varphi'_\epsilon(0))^2 - 8\varphi'_\epsilon(0) < 0$;
- Se $0 < \varphi'_\epsilon(0) < \gamma_2$ ou $\gamma_1 < \varphi'_\epsilon(0) < 1$, então $(1 + 2\beta\varphi'_\epsilon(0))^2 - 8\varphi'_\epsilon(0) > 0$.

Apresentamos a seguir o retrato de fase do campo regularizado (4.12) para $\varphi'_\epsilon(0)$ tomado de tal forma que o ponto singular $(0,0)$ seja um foco atrator.

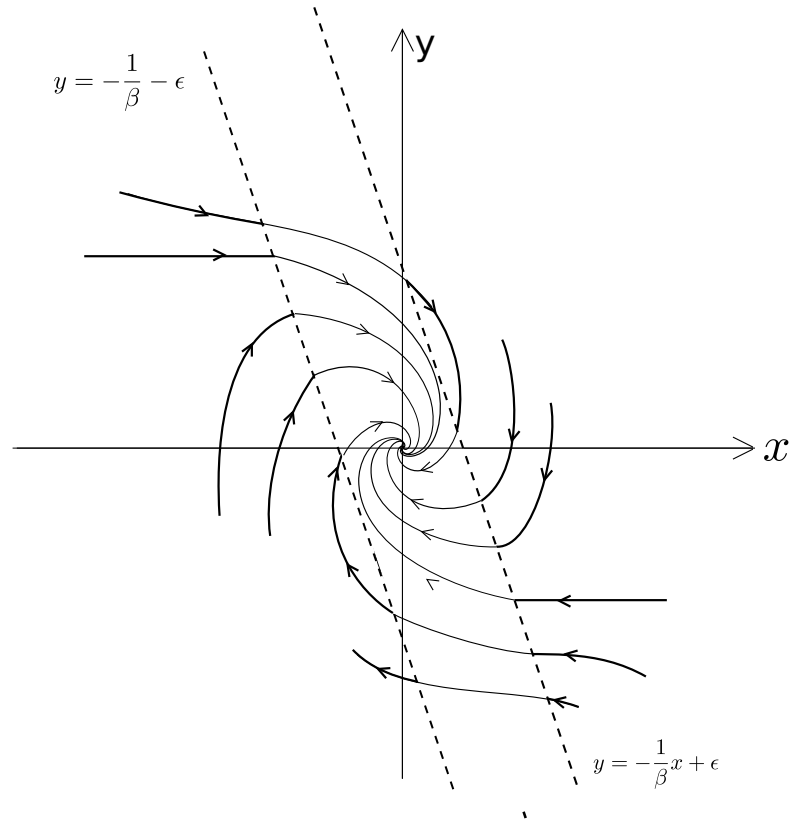


Figura 4.8: Campo regularizado para $(1 + 2\beta\varphi'_\epsilon(0))^2 - 8\varphi'_\epsilon(0) < 0$ e $(0,0)$ um foco atrator de Z_ϵ .

Referências Bibliográficas

- [1] Andronov, A.A., et al., *Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.
- [2] Andronov, A.A.; Vitt, A.A.; Khaikin, S.E., *Theory of Oscillators*, Dover, New York, 1966.
- [3] Filippov, A.F., *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Kluwer, 1988.
- [4] Kozlova, V.S., Roughness of a discontinuous system, *Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika*, No.5, 16-20, 1984.
- [5] Luo, A.C.J., *Discontinuous dynamical systems*, Springer, 2012.
- [6] Peixoto, M.C.; Peixoto, M.M., *Structural stability in the plane with enlarged conditions*, An.Ac.Bras.Cienc., V.31, 135-160, 1959.
- [7] Perko, L., *Differential equations and dynamical systems*, 3rd ed., Springer, 2001.
- [8] Sotomayor, J.; Teixeira, M.A., Regularization of discontinuous vector fields, *International Conference on Differential Equation*, Lisboa, 207-223, 1996.
- [9] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, 1979.
- [10] Sotomayor, J., *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1981.
- [11] Sotomayor, J. ; Machado, A. L. F. , Structurally stable discontinuous vector fields in the plane, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, Lleida, v. 3, 227-250, 2002.
- [12] Teixeira, M.A., *Generic singularities of discontinuous vector fields*, An.Ac.Bras.Cienc., V.53, No.1, 1981.
- [13] Vishik, S.M., Vector fields near the boundary of a manifold, *Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika*, V.27, No.1, 21-28, 1972.