

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira(FEIS) - Campus de Ilha Solteira

GABRIEL SILVA DOS SANTOS

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO
PLANAR COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

Ilha Solteira

2025

GABRIEL SILVA DOS SANTOS

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO
PLANAR COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Facul-
dade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS), Ilha
Solteira, para obtenção do título de Bacharel em
Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecatrônica e Controle

Orientador: Prof. Dr. Márcio Antônio Bazani

Ilha Solteira

2025

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvida pela Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

S237m Santos, Gabriel Silva dos.
Modelagem matemática e simulação de um manipulador robótico planar com dois graus de liberdade / Gabriel Silva dos Santos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2025
70 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2025

Orientador: Márcio Antônio Bazani
Inclui bibliografia

1. Manipuladores robóticos. 2. Modelagem dinâmica. 3. Controle PID. 4. Torque computado. 5. Robótica planar.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA – CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ATA DA DEFESA – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

TÍTULO: MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR
ROBÓTIPOPLANAR COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

ALUNO: Gabriel Silva dos Santos

RA: 181052059

ORIENTADOR: Márcio Antônio Bazani

Aprovado (X) – Reprovado () pela Comissão Examinadora

Nota obtida: 9

Comissão Examinadora:

 Documento assinado digitalmente
MÁRCIO ANTÔNIO BAZANI
Data: 03/12/2025 10:47:29-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

Orientador: Prof. Dr. MÁRCIO ANTÔNIO BAZANI
Departamento de Engenharia mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

 Documento assinado digitalmente
LETÍCIA KAROLAYNE MOREIRA FIRMO
Data: 03/12/2025 17:37:36-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

Ma. LETÍCIA KAROLAYNE MOREIRA FIRMO
Departamento de Engenharia mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

 Documento assinado digitalmente
CARLINEIA MARCIANA DOS SANTOS PEREIRA
Data: 04/12/2025 09:50:59-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

Ma. CARLINEIA MARCIANA DOS SANTOS PEREIRA
Departamento de Engenharia mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

 Documento assinado digitalmente
GABRIEL SILVA DOS SANTOS
Data: 03/12/2025 23:38:14-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

GABRIEL SILVA DOS SANTOS
Departamento de Engenharia mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Ilha Solteira (SP), 01 de dezembro de 2025.

Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, expresso minha profunda gratidão à minha família, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo apoio incondicional diante dos desafios da vida. Agradeço de maneira especial à minha mãe, Maria do Socorro da Silva, pelo constante suporte, carinho e dedicação ao longo de toda a minha trajetória. Registro também minha homenagem ao meu falecido pai, José Roberto dos Santos, cujo exemplo de honestidade e caráter permanece como inspiração em meu caminho. Quero agradecer aos meus irmãos Daniel Silva dos Santos, Dayanne Silva dos Santos e Michel Silva dos Santos.

Manifesto igualmente minha gratidão aos amigos que estiveram presentes durante essa jornada, em especial Lucas, João Paulo, Felipe, Cauê, Bruno, Daiane, Yasmin, Alicia, Rogério, Edmar, Renan, Kevin, Roni, João Frois, Vitor, Marcos, Pedro e Luis, bem como tantos outros que, mesmo não mencionados individualmente, contribuíram significativamente para esta caminhada. Também expresso meus agradecimentos aos amigos da Equipe Zebra Aerodesign.

Agradeço ao professor Márcio Antônio Bazani pela orientação prestada na elaboração deste trabalho, bem como pelas aulas ministradas e pelo conhecimento transmitido com excelência, comprometimento e cordialidade.

Registro ainda meus agradecimentos à professora Silvia Regina Vieira da Silva, pelas aulas, pela dedicação e pelo suporte sempre oferecido aos alunos.

Expresso também meu reconhecimento ao projeto Cursinho Diferencial, cuja contribuição foi fundamental para minha preparação acadêmica antes do ingresso na universidade.

Por fim, agradeço a todo o corpo docente do curso de Engenharia Mecânica da FEIS pelos ensinamentos transmitidos ao longo de toda a graduação, que foram essenciais para minha formação profissional e pessoal.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo modelar matematicamente e simular o comportamento dinâmico de um manipulador robótico planar com dois graus de liberdade, utilizando a formulação de Lagrange para obtenção das equações de movimento. A partir do modelo desenvolvido, duas estratégias de controle amplamente utilizadas em robótica, o controle PID independente de juntas e o método de torque computado, foram projetadas e implementadas em ambiente MATLAB, de modo a avaliar sua eficiência no rastreamento de trajetórias articulares. A metodologia adotada compreendeu a derivação da cinemática direta e inversa, a modelagem dinâmica completa, a implementação computacional das equações diferenciais e o desenvolvimento de leis de controle lineares e não lineares. As simulações realizadas permitiram analisar o comportamento do manipulador sob condições distintas, incluindo situações em que o sistema opera próximo a configurações singulares. Os resultados demonstram que o controlador PID é capaz de estabilizar o manipulador e realizar o rastreamento desejado, porém apresenta maior sensibilidade às não linearidades, ao acoplamento dinâmico e às singularidades geométricas. Em contraste, o método de torque computado proporcionou respostas mais rápidas, com menor erro estacionário, menor sobressinal e torques mais suaves, evidenciando sua superioridade na compensação dos termos dinâmicos do sistema. A comparação entre as estratégias permitiu identificar limitações, vantagens e condições de melhor desempenho para cada abordagem.

Palavras-Chave: Manipuladores Robóticos; Modelagem Dinâmica; Controle PID; Torque Computado; Robótica Planar.

ABSTRACT

This work presents the mathematical modeling and simulation of a planar robotic manipulator with two degrees of freedom, employing classical kinematic formulation and the Lagrangian method to derive its dynamic equations. Based on the developed model, two control strategies commonly used in robotic systems, the independent joint PID controller and the computed torque control, were designed, implemented, and evaluated in a MATLAB simulation environment. The adopted methodology involved the derivation of forward and inverse kinematics, the complete dynamic modeling of the manipulator, the numerical implementation of the differential equations, and the design of both linear and nonlinear control laws. The simulated scenarios allowed the assessment of the manipulator's behavior under different operating conditions, including configurations close to kinematic singularities. The results indicate that, although the PID controller is capable of stabilizing the system and tracking the desired reference, its performance is significantly affected by nonlinearities, dynamic coupling, and the proximity to singular configurations. In contrast, the computed torque controller provided faster responses, smaller tracking errors, reduced overshoot, and smoother torque signals, demonstrating its superior ability to compensate for the manipulator's nonlinear dynamics. Overall, the study highlights the importance of mathematical modeling in predicting system behavior and designing effective control strategies. It also shows that the computed torque method yields better performance for nonlinear and coupled robotic systems, while the PID controller remains suitable only for simpler operating conditions or regions far from singularities.

Keywords: Robotic Manipulators; Dynamic Modeling; PID Control; Computed Torque Control; Planar Robotics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Principais tipos de juntas utilizadas em manipuladores robóticos.	17
Figura 2	Descrição da posição de um ponto no espaço em relação ao sistema de coordenadas.	18
Figura 3	Orientação de um ponto na extremidade do efetuador.	19
Figura 4	Fixação dos sistemas de referência aos elos.	21
Figura 5	Velocidade de elos vizinhos.	23
Figura 6	Diagrama do manipulador planar 2 DOF com sistemas de coordenadas segundo a convenção DH.	31
Figura 7	Resposta temporal de θ_1 - PID (Simulação 1).	34
Figura 8	Resposta temporal de θ_2 - PID (Simulação 1).	35
Figura 9	Erro de seguimento de θ_1 - PID (Simulação 1).	35
Figura 10	Erro de seguimento de θ_2 - PID (Simulação 1).	36
Figura 11	Torques aplicados na junta 1- PID (Simulação 1).	37
Figura 12	Torques aplicados na junta 2 - PID (Simulação 1).	37
Figura 13	Resposta temporal de θ_1 - CTC (Simulação 1).	38
Figura 14	Resposta temporal de θ_2 - CTC (Simulação 1).	38
Figura 15	Erro de seguimento de θ_1 - CTC (Simulação 1).	39
Figura 16	Erro de seguimento de θ_2 - CTC (Simulação 1).	39
Figura 17	Torques da junta 1 - CTC (Simulação 1).	40
Figura 18	Torques da junta 2 - CTC (Simulação 1).	40
Figura 19	Comparação de θ_1 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).	41
Figura 20	Comparação de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).	42
Figura 21	Comparação do erro de θ_1 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).	42
Figura 22	Comparação do erro de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).	43
Figura 23	Comparação dos torques da junta 1 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).	43
Figura 24	Comparação dos torques da junta 2 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).	44
Figura 25	Resposta temporal de θ_1 - PID (Simulação 2).	45
Figura 26	Resposta temporal de θ_2 - PID (Simulação 2).	46
Figura 27	Erro de seguimento de θ_1 - PID (Simulação 2).	46
Figura 28	Erro de seguimento de θ_2 - PID (Simulação 2).	47
Figura 29	Torques da junta 1 - PID (Simulação 2).	47
Figura 30	Torques da junta 2 - PID (Simulação 2).	48
Figura 31	Resposta temporal de θ_1 - CTC (Simulação 2).	49
Figura 32	Resposta temporal de θ_2 - CTC (Simulação 2).	49
Figura 33	Erro de seguimento de θ_1 - PID (Simulação 2).	50
Figura 34	Erro de seguimento de θ_2 - PID (Simulação 2).	50
Figura 35	Torques da junta 1 - CTC (Simulação 2).	51

Figura 36	Torques da junta 2 - CTC (Simulação 2).	51
Figura 37	Comparação de θ_1 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).	52
Figura 38	Comparação de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).	52
Figura 39	Comparação do erro de θ_1 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).	53
Figura 40	Comparação do erro de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).	53
Figura 41	Comparação dos torques da junta 1 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).	54
Figura 42	Comparação dos torques da junta 2 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros físicos do manipulador planar 2 DOF	30
Tabela 2 – Ganhos do controlador PID obtidos via LQI.	33
Tabela 3 – Ganhos da lei auxiliar μ obtidos via LQR para o controlador por torque computado.	33
Tabela 4 – Comparação das métricas de desempenho para a Simulação 1.	44
Tabela 5 – Comparação das métricas de desempenho para a Simulação 2.	55

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DOF	Degrees of Freedom (Graus de Liberdade)
PID	Proportional–Integral–Derivative
CTC	Computed Torque Control (Controle por Torque Computado)
D-H	Denavit–Hartenberg
LQI	Linear Quadratic Integral
LQR	Linear Quadratic Regulator
ODE	Ordinary Differential Equation (Equação Diferencial Ordinária)
CM	Centro de Massa
IAE	Integral Absolute Error (Integral do Erro Absoluto)
MATLAB	Matrix Laboratory
RK45	Runge–Kutta de quarta e quinta ordem

LISTA DE SÍMBOLOS

θ_1, θ_2	Ângulos das juntas 1 e 2 do manipulador
$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$	Velocidades angulares das juntas
$\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$	Acelerações angulares das juntas
L_1, L_2	Comprimentos dos elos 1 e 2
r_1, r_2	Distâncias do centro de massa dos elos 1 e 2
m_1, m_2	Massas dos elos 1 e 2
I_{1zz}, I_{2zz}	Momentos de inércia dos elos em torno do eixo perpendicular ao plano
I	Tensor de inércia
H	Energia cinética
U	Energia potencial
$\mathcal{L}$	Lagrangiana do sistema
$M(q)$	Matriz de inércia
$C(q, \dot{q})$	Termos centrífugos e de Coriolis
$G(q)$	Vetor gravitacional
τ_1, τ_2	Torques aplicados nas juntas
q	Vetor de coordenadas generalizadas
f	Termo auxiliar na lei de controle PID
K_P, K_D, K_I	Matrizes de ganhos proporcional, derivativo e integral do PID
μ	Lei auxiliar do Torque Computado
$J(q)$	Jacobiano do manipulador
$\det(J)$	Determinante do Jacobiano
g	Aceleração da gravidade
e	Erro de seguimento
IAE	Integral do erro absoluto
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	Parâmetros dinâmicos auxiliarmente definidos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEORICA	17
2.1	Manipuladores Robóticos	17
2.2	Descrições Espaciais e Transformações	18
2.2.1	Descrição da posição	18
2.2.2	Descrição da Orientação	18
2.2.3	Sistemas de Referência	20
2.3	Cinemática de Manipuladores	20
2.3.1	Cinemática Direta	20
2.3.2	Cinemática Inversa	22
2.4	Velocidade, Jacobiano e Aceleração	22
2.4.1	Velocidades Linear e Angular	23
2.4.2	Matriz Jacobiana	23
2.4.3	Acelerações	24
2.5	Dinâmica de Manipuladores	24
2.5.1	Formulação de Newton–Euler	24
2.5.1.1	Iterações para fora	24
2.5.1.2	Iterações para dentro	25
2.5.2	Formulação Lagrangiana	26
2.5.3	Equações de Movimento	26
2.6	Singularidades	26
2.7	Geração de Trajetórias	27
2.8	Controle de Manipuladores	27
2.8.1	O Problema Multivariável em Robótica	28
2.8.2	Lei de Controle Particionado	28
2.8.3	Método de Torque Computado	29
2.8.4	Controle PID de Juntas	29
3	METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO	30
3.1	Descrição do Manipulador	30
3.2	Modelagem Matemática Utilizada nas Simulações	31
3.2.1	Cinemática Direta	31
3.2.2	Modelagem Dinâmica	31
3.3	Controladores Implementados	32
3.3.1	Controlador PID Independente	32
3.3.2	Controlador por Torque Computado	32

3.4	Metodologia da Simulação	32
3.5	Configurações das Simulações	33
4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	34
4.1	Simulação 1 ($\theta_{1d} = \pi/2$, $\theta_{2d} = \pi/2$)	34
4.1.1	Simulação com controlador PID	34
4.1.1.1	Resposta temporal	34
4.1.1.2	Erro de seguimento	35
4.1.1.3	Torques aplicados	36
4.1.2	Simulação por Torque Computado	37
4.1.2.1	Resposta temporal	37
4.1.2.2	Erro de seguimento	38
4.1.2.3	Torques aplicados	39
4.1.3	Comparação entre os Controladores	41
4.1.3.1	Comparação das respostas temporais	41
4.1.3.2	Comparação do erro de seguimento	42
4.1.3.3	Comparação dos torques aplicados	43
4.1.3.4	Tabela comparativa das métricas de desempenho	44
4.2	Simulação 2 ($\theta_{1d} = \pi/2$, $\theta_{2d} = 0$)	44
4.2.1	Simulação com controlador PID	45
4.2.1.1	Resposta temporal	45
4.2.1.2	Erro de seguimento	46
4.2.1.3	Torques aplicados	47
4.2.2	Simulação por Torque Computado	48
4.2.2.1	Resposta temporal	48
4.2.2.2	Erro de seguimento	49
4.2.2.3	Torques aplicados	50
4.2.3	Comparação entre os Controladores	51
4.2.3.1	Comparação das respostas temporais	51
4.2.3.2	Comparação do erro de seguimento	53
4.2.3.3	Comparação dos torques aplicados	53
4.2.3.4	Tabela comparativa das métricas de desempenho	54
4.3	Síntese geral	55
5	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59
	Apêndice A – Modelagem Cinemática e Dinâmica do Manipulador Planar	
	2DOF	61

Apêndice B – Equação de Movimento no Espaço dos Estados e Determinação dos Ganhos Ótimos	64
Apêndice C – Métricas de Desempenho	68

1 INTRODUÇÃO

A robótica tem desempenhado um papel central no desenvolvimento tecnológico contemporâneo, especialmente em aplicações que exigem precisão, repetitividade e operação segura em ambientes controlados. Em diversos setores como indústria, medicina, agricultura e defesa, sistemas robóticos têm sido empregados para aumentar a eficiência, reduzir custos operacionais e ampliar a capacidade de execução de tarefas complexas. Entre esses sistemas, os manipuladores robóticos se destacam por sua capacidade de seguir trajetórias específicas e manipular objetos com elevado grau de precisão. A análise e o projeto de manipuladores dependem diretamente de uma modelagem matemática consistente, capaz de descrever suas características geométricas e dinâmicas. Tal modelagem fornece ferramentas essenciais para prever o comportamento do sistema, avaliar esforços, identificar fenômenos como acoplamento dinâmico e não linearidades, além de subsidiar o desenvolvimento de estratégias de controle. Nesse contexto, a simulação computacional torna-se fundamental para testar e validar algoritmos antes da implementação física, reduzindo riscos e custos associados ao desenvolvimento de protótipos.

Este trabalho investiga a modelagem matemática e a simulação do comportamento dinâmico de um manipulador robótico planar com dois graus de liberdade. A partir da formulação clássica de Lagrange, são obtidas as equações de movimento, permitindo a construção de modelos capazes de representar com fidelidade os efeitos inerciais, gravitacionais e de acoplamento presentes no sistema. Com base nesse modelo, são analisadas duas estratégias de controle amplamente utilizadas em robótica: o controlador Proporcional–Integral–Derivativo (PID) e o método de torque computado. Enquanto o controlador PID trata cada junta de forma independente, o torque computado utiliza explicitamente o modelo dinâmico para compensar as não linearidades do manipulador. A pergunta que orienta este estudo é: como a modelagem matemática contribui para a análise do comportamento dinâmico de um manipulador planar, e de que forma diferentes estratégias de controle influenciam o desempenho do sistema? A resposta a essa questão permite compreender as vantagens, limitações e condições de aplicação de cada abordagem de controle.

Os objetivos específicos incluem: desenvolver o modelo matemático do manipulador utilizando o formalismo de Lagrange, implementar sua simulação em ambiente MATLAB, projetar e ajustar os controladores PID e de torque computado, e comparar o desempenho de ambas as estratégias por meio de métricas de rastreamento e estabilidade.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica necessária para o entendimento dos conceitos cinemáticos, dinâmicos e de controle. O Capítulo 3 descreve a modelagem matemática, parâmetros adotados e metodologia de simulação. O Capítulo 4 apresenta o desenvolvimento das equações e a implementação dos controladores. O Capítulo 5 discute os resultados obtidos nas simulações. Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

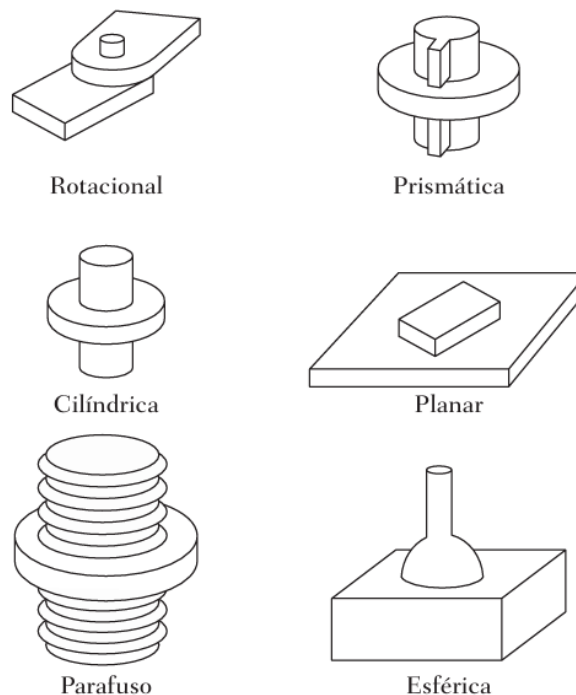
Este capítulo apresenta os principais conceitos necessários para a compreensão do comportamento de manipuladores robóticos. São abordados temas relacionados à representação espacial, cinemática, dinâmica e controle, que constituem a base teórica utilizada no desenvolvimento do modelo e das simulações deste trabalho.

2.1 MANIPULADORES ROBÓTICOS

Um manipulador robótico é constituído por elos rígidos conectados por juntas, formando uma cadeia cinemática responsável pelo posicionamento de um efetuator no espaço de trabalho. A geometria dessa cadeia define o alcance, a mobilidade e as possíveis configurações assumidas pelo robô. Segundo Craig (2013), a análise desses sistemas envolve três áreas principais: cinemática (estudo do movimento), dinâmica (estudo das forças) e controle (definição das forças necessárias para seguir trajetórias específicas).

As juntas podem ser rotacionais ou prismáticas, sendo representadas mecanicamente por graus de liberdade que permitem ao manipulador executar movimentos complexos. Na Figura 1 são apresentados alguns tipos de juntas comumente utilizados em robótica.

Figura 1 – Principais tipos de juntas utilizadas em manipuladores robóticos.



Fonte: Adaptado de Craig (2013).

2.2 DESCRIÇÕES ESPACIAIS E TRANSFORMAÇÕES

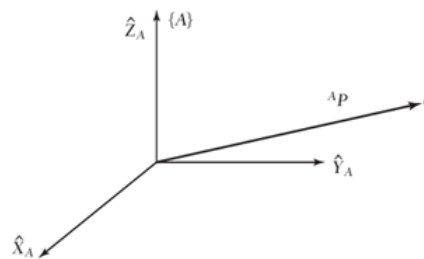
A representação de posições e orientações no espaço é fundamental na robótica, pois permite relacionar matematicamente diferentes partes do manipulador e objetos no ambiente. A seguir são apresentados os conceitos essenciais para essa representação.

2.2.1 Descrição da posição

Considerando o sistema de coordenadas fixo $\{A\}$, apresentado na Figura 2, um ponto P no espaço é representado por um vetor coluna 3×1 , cujos elementos são as distâncias x_p , y_p e z_p ao longo dos eixos X_A , Y_A e Z_A do sistema $\{A\}$, conforme exemplificada pela equação 1 (Craig, 2013):

$${}^A P = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1)$$

Figura 2 – Descrição da posição de um ponto no espaço em relação ao sistema de coordenadas.



Fonte: Adaptado de Craig (2013).

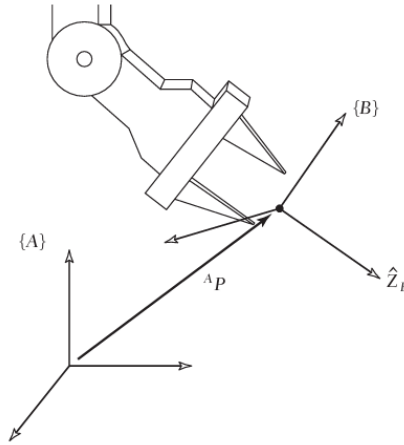
O vetor ${}^A P$ expressa a posição do ponto P em relação ao referencial $\{A\}$. Essa representação vetorial é fundamental para a formulação das transformações espaciais, que permitem determinar a localização de pontos e corpos rígidos em diferentes referenciais.

2.2.2 Descrição da Orientação

Como um manipulador é constituído por elos rígidos, sua orientação no espaço tridimensional deve ser descrita em relação ao sistema de referência. Considere a situação na qual o efetuador deve alcançar e manipular um objeto: para isso, ele deve ajustar tanto sua posição quanto sua orientação.

A orientação de um corpo é representada por um sistema de coordenadas fixado a ele, descrito em relação a outro sistema de referência (Craig, 2013). A Figura 3 ilustra essa relação por meio da matriz de rotação obtida a partir do produto escalar entre os vetores unitários dos sistemas $\{A\}$ e $\{B\}$.

Figura 3 – Orientação de um ponto na extremidade do efetuador.



Fonte: Adaptado de Craig (2013).

A matriz de rotação ${}^A_B R$ relaciona a orientação do sistema {B} em relação a {A} e é dada pela equação 2.

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \quad (2)$$

Como os vetores são ortonormais, a matriz inversa corresponde à sua transposta, conforme exemplificado na equação 3

$${}^B_A R = ({}^A_B R)^T \quad (3)$$

Geralmente a matriz de rotação é dada por matriz na qual a rotação se dá em torno de um dos eixos do sistema de coordenada, conforme as equações 4, 5 e 6. Nessa situação considera-se o produto escalar da matriz gera o ângulos entre os vetores unitários dos sistemas de referência.

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2.3 Sistemas de Referência

A pose de um corpo rígido é completamente descrita por sua posição e orientação. Assim, um sistema de referência é formado por um vetor posição e uma matriz de rotação (Craig, 2013):

$$\{B\} = \{{}^A_B R, {}^A P_B\} \quad (7)$$

Para converter um ponto P descrito no sistema $\{B\}$ para o sistema $\{A\}$, utiliza-se:

$${}^A P = {}^A_B R \cdot {}^B P + {}^A P_B \quad (8)$$

Essa expressão pode ser escrita na forma homogênea:

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

A matriz de transformação homogênea é então dada por:

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Na robótica, matrizes de rotação descrevem orientações, enquanto matrizes de transformação homogênea descrevem sistemas de referência completos.

2.3 CINEMÁTICA DE MANIPULADORES

A cinemática estuda o movimento sem considerar forças. Para manipuladores robóticos, a análise cinemática é fundamental porque permite determinar a posição e a orientação do efetuador final em função das variáveis articulares, bem como o problema inverso: determinar as variáveis articulares que resultam em uma configuração desejada do efetuador.

Duas formulações principais compõem a cinemática de manipuladores: a cinemática direta e a cinemática inversa.

2.3.1 Cinemática Direta

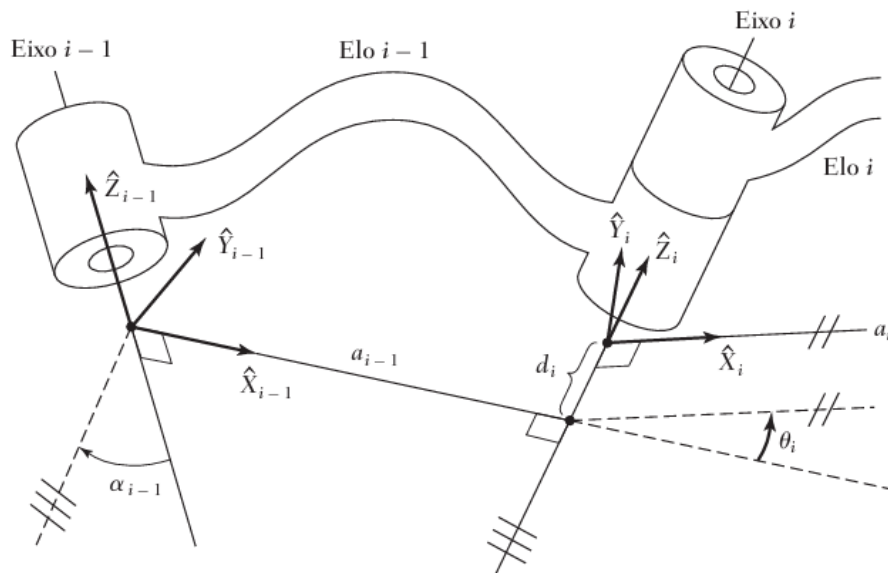
A cinemática direta consiste em determinar a posição e a orientação do efetuador final a partir dos ângulos ou deslocamentos das juntas. Para isso, utiliza-se o método dos Parâmetros de Denavit–Hartenberg (DH), o qual padroniza a representação geométrica de cada elo e junta. Por meio de matrizes de transformação homogênea, relacionam-se sistemas de coordenadas adjacentes, obtendo-se ao final a transformação que leva o sistema base ao efetuador. Ainda segundo Craig (2013), os elos são numerados a partir da base fixa, denominada elo 0. O elo subsequente é o elo 1, e assim sucessivamente até o elo n , localizado na extremidade livre do manipulador.

Denavit e Hartenberg propuseram uma convenção que utiliza apenas quatro parâmetros para descrever a transformação entre dois elos consecutivos, reduzindo a complexidade da formulação clássica de movimento de corpos rígidos. Esses parâmetros são:

- a_i : distância entre os eixos Z_{i-1} e Z_i , medida ao longo de X_i ;
- α_i : ângulo entre os eixos Z_{i-1} e Z_i , medido em torno de X_i ;
- d_i : distância entre X_{i-1} e X_i , medida ao longo de Z_i ;
- θ_i : ângulo entre X_{i-1} e X_i , medido em torno de Z_i .

A Figura 4 ilustra a identificação dos parâmetros DH entre dois elos consecutivos.

Figura 4 – Fixação dos sistemas de referência aos elos.



Fonte: Adaptado de Craig (2013).

O procedimento para definir os sistemas de referência para cada elo, conforme Craig (2013), é:

1. Identificar os eixos das juntas e traçar linhas infinitas ao longo deles;
2. Determinar a perpendicular comum entre dois eixos consecutivos ou seu ponto de interseção; esse ponto define a origem do sistema do elo;
3. Definir o eixo Z_i ao longo do eixo da i -ésima junta;
4. Definir o eixo X_i ao longo da perpendicular comum entre Z_{i-1} e Z_i ; caso se cruzem, X_i deve ser perpendicular ao plano formado pelos eixos;

5. Definir o sistema base $\{0\}$ de modo conveniente;
6. Definir o sistema $\{N\}$ (efetuador final) de acordo com a aplicação.

A matriz de transformação homogênea entre os sistemas $\{i - 1\}$ e $\{i\}$ é expressa pela equação 11:

$${}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & a_{i-1} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & a_{i-1} \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A equação 12 representa a transformação total entre a base e o efetuador final.

$${}^0T_N = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdots {}^{N-1}T_N \quad (12)$$

2.3.2 Cinemática Inversa

A cinemática inversa tem como objetivo determinar os ângulos de junta necessários para que o efetuador final atinja uma posição e orientação desejadas. Em outras palavras, é o problema inverso da cinemática direta: enquanto esta calcula a pose do efetuador a partir das variáveis articulares, a cinemática inversa calcula as variáveis articulares que produzem uma pose específica Craig (2013).

A cinemática inversa envolve um sistema de equações não lineares derivadas da matriz de transformação homogênea. Devido à não linearidade do problema, podem existir múltiplas soluções, nenhuma solução, ou soluções singulares, dependendo da geometria do manipulador.

As soluções podem ser obtidas por dois métodos principais:

- Métodos analíticos: fornecem soluções fechadas; são rápidos e exatos, mas dependem fortemente da geometria do manipulador.
- Métodos numéricos: utilizam algoritmos iterativos baseados na Jacobiana; são aplicáveis a manipuladores com geometria complexa.

Na Seção 3 será desenvolvida a cinemática inversa de um manipulador planar com dois graus de liberdade utilizando o método geométrico. Mais detalhes podem ser consultados em Craig (2013) e Siciliano & Khatib (2016).

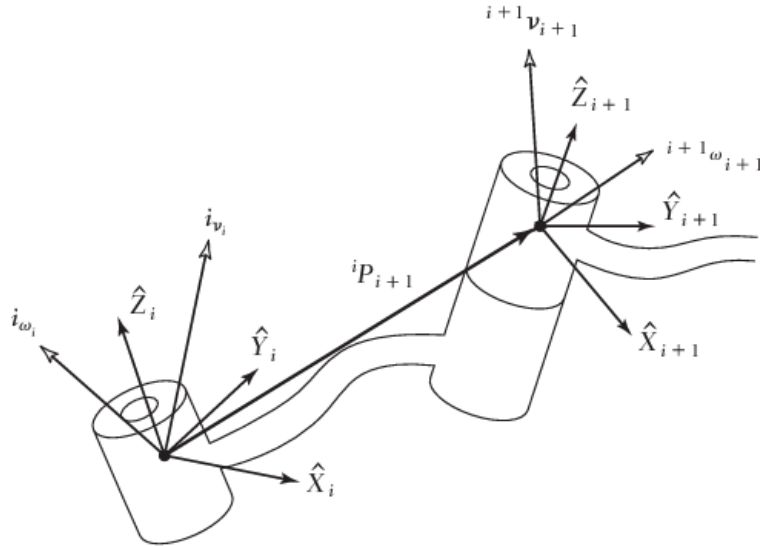
2.4 VELOCIDADE, JACOBIANO E ACELERAÇÃO

Um manipulador é um conjunto de elos, cada um capaz de se movimentar em relação aos elos vizinhos. Com base nessa característica, a velocidade de cada elo pode ser computada da base até o efetuador (Craig, 2013). A velocidade do elo $(i + 1)$ será igual à velocidade do elo i somada aos componentes adicionais introduzidos pelo movimento do elo $(i + 1)$.

2.4.1 Velocidades Linear e Angular

A Figura 5 apresenta a representação esquemática de elos genéricos.

Figura 5 – Velocidade de elos vizinhos.



Fonte: Adaptado de (Craig, 2013).

A velocidade angular do elo $(i + 1)$ em relação ao sistema de referência $\{i\}$ é dada por:

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^{i+1}R \dot{q}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (13)$$

onde ${}^{i+1}R$ é a matriz de rotação que transforma vetores do sistema $\{i + 1\}$ para o sistema $\{i\}$, $\dot{q}_{i+1}$ é a velocidade da junta $(i + 1)$ e ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$ representa o eixo de rotação associado à junta.

A velocidade linear da origem do sistema $\{i + 1\}$ é obtida pela soma da velocidade linear do elo anterior com a velocidade induzida pela rotação do elo i :

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1} \quad (14)$$

onde ${}^i P_{i+1}$ é o vetor que liga as origens dos sistemas de coordenadas $\{i\}$ e $\{i + 1\}$.

2.4.2 Matriz Jacobiana

Formas multidimensionais de expressar derivadas são conhecidas como Jacobianos (Craig, 2013). O Jacobiano é definido como a matriz de derivadas parciais:

$$J(q) = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (15)$$

No contexto da robótica, eles são usados para relacionar as velocidades das juntas com a velocidade linear e angular do efetuador.

$$\dot{X} = J(q) \dot{q} \quad (16)$$

em que $\dot{X} = \begin{bmatrix} v & \omega \end{bmatrix}^T$ representa o vetor de velocidade linear do efetuador e $J(q) = \begin{bmatrix} J_v(q) & J_\omega(q) \end{bmatrix}^T$ é a matriz Jacobiana, dependente da configuração articular do manipulador.

Em muitas situações deseja-se estabelecer uma velocidades ao efetuador para realizar algum movimento no espaço de trabalho. A partir do Jacobiano é possível converter a velocidade cartesiana do efetuador em velocidades das juntas mediante multiplicação da inversa $J(q)^{-1}$. O Jacobiano também é importante na análise de singularidade do manipulador e controle (Craig, 2013).

2.4.3 Acelerações

De modo análogo, as acelerações linear e angular dos elos são obtidas derivando-se as expressões de velocidade em relação ao tempo. Assim, a aceleração angular é dada por:

$${}^i\dot{\omega}_{i+1} = {}^i\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_i R \ddot{q}_{i+1} {}^{i+1}_i \hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_i R \dot{q}_{i+1} ({}^i\omega_i \times {}^{i+1}_i \hat{Z}_{i+1}) \quad (17)$$

A aceleração linear da origem do sistema $\{i + 1\}$ é então expressa por:

$${}^i\dot{v}_{i+1} = {}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) \quad (18)$$

Essas equações recursivas permitem determinar as velocidades e acelerações de todos os elos, conhecendo-se as variáveis articulares e suas derivadas no tempo.

2.5 DINÂMICA DE MANIPULADORES

A dinâmica de manipuladores descreve as forças, torques e efeitos inerciais associados ao movimento. Nesta seção são apresentadas as formulações clássicas de Newton–Euler e Lagrange, bem como a derivação das equações de movimento do manipulador estudado.

2.5.1 Formulação de Newton–Euler

Segundo Craig (Craig, 2013, Seção 6.5), um algoritmo recursivo é empregado para computar as equações de movimento via formulação de Newton–Euler. O procedimento consiste em duas etapas: (i) iterações para fora do elo (forward recursion), nas quais são calculadas as velocidades e acelerações; e (ii) iterações para dentro do elo (backward recursion), nas quais são computadas as forças e torques internos.

2.5.1.1 Iterações para fora

As equações utilizadas nessa etapa são:

$$\omega_{i+1}^{i+1} = {}^i_{i+1}R \omega_i^i + \dot{q}_{i+1} \hat{Z}_{i+1}^{i+1}, \quad (19)$$

$$\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = {}^i_{i+1}R \dot{\omega}_i^i + {}^i_{i+1}R (\omega_i^i \times \dot{q}_{i+1} \hat{Z}_{i+1}^{i+1}) + \ddot{q}_{i+1} \hat{Z}_{i+1}^{i+1}, \quad (20)$$

$$\dot{v}_{i+1}^{i+1} = {}^i_{i+1}R (\dot{\omega}_i^i \times P_{i+1}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times P_{i+1}^i) + \dot{v}_i^i), \quad (21)$$

$$\dot{v}_{C_{i+1}}^{i+1} = \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} \times P_{C_{i+1}}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times (\omega_{i+1}^{i+1} \times P_{C_{i+1}}^{i+1}) + \dot{v}_{i+1}^{i+1}, \quad (22)$$

$$F_{i+1}^{i+1} = m_{i+1} \dot{v}_{C_{i+1}}^{i+1}, \quad (23)$$

$$N_{i+1}^{i+1} = I_{i+1} \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times (I_{i+1} \omega_{i+1}^{i+1}). \quad (24)$$

O tensor de inércia utilizado na equação 24 é:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

com seus elementos definidos por:

$$I_{xx} = \int_V \rho(y^2 + z^2) dV, \quad I_{yy} = \int_V \rho(x^2 + z^2) dV, \quad I_{zz} = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV, \quad (26)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_V \rho(xy) dV, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_V \rho(xz) dV, \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_V \rho(yz) dV. \quad (27)$$

2.5.1.2 Iterações para dentro

As forças e torques são computados pelas equações recursivas:

$$f_i^i = {}^i_{i+1}R f_{i+1}^{i+1} + F_i^i, \quad (28)$$

$$n_i^i = N_i^i + {}^i_{i+1}R n_{i+1}^{i+1} + P_{C_i}^i \times F_i^i + P_{i+1}^i \times ({}^i_{i+1}R f_{i+1}^{i+1}), \quad (29)$$

$$\tau_i = (n_i^i)^T \hat{Z}_i^i. \quad (30)$$

2.5.2 Formulação Lagrangiana

Na formulação Lagrangiana, a dinâmica é obtida a partir da função Lagrangiana, definida por como:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = H(q, \dot{q}) - U(q), \quad (31)$$

em que H e U representam, respectivamente, as energias cinética e potencial. A energia cinética é dada por:

$$H(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n (m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \omega_i^T I_i \omega_i), \quad (32)$$

e a energia potencial por:

$$U(q) = \sum_{i=1}^n m_i g^T p_{c_i}(q). \quad (33)$$

As equações de movimento são obtidas substituindo-se a Lagrangiana na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (34)$$

τ_i é torque o na i -ésima junta do manipulador.

2.5.3 Equações de Movimento

A dinâmica de manipuladores robóticos pode ser expressa de forma compacta pela equação matricial geral:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (35)$$

em que $M(q)$ é a matriz de inércia, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ representa os termos centrífugos e de Coriolis, $G(q)$ é o vetor de forças gravitacionais e τ é o vetor de torques aplicados nas juntas.

Essa formulação será particularizada e completamente deduzida no Apêndice A para o caso específico de um manipulador planar com dois graus de liberdade, considerando seus parâmetros geométricos e físicos.

2.6 SINGULARIDADES

Uma singularidade do manipulador ocorre quando o Jacobiano perde o posto. Isso significa que na equação 16 a relação entre a velocidade cartesiana e a velocidade articular deixa de ser invertível fazendo que o manipulador perca a capacidade de gerar movimentos em algumas direções. Além disso o manipulador perde a instabilidade no controle uma vez que $\dot{q} = J(q)^{-1} \dot{X}$ implica em velocidades articulares infinitas e também acarreta em amplificações de forças

externas, conforme a relação entre o torque nas juntas e as forças aplicadas no efetuador, $\tau = J(q)^T F$. Para determinar as singularidades de um manipulador, basta calcular onde o determinante do Jacobiano se anula, conforme a equação 36.

$$\det(J(q)) = 0. \quad (36)$$

Para o manipulador planar estudado, a singularidade ocorre quando os dois elos estão completamente alinhados, isto é, quando $\theta_2 = 0$ ou $\theta_2 = \pi$.

2.7 GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

A geração de trajetórias define como o manipulador deve se mover ao longo do tempo. Em aplicações industriais, a trajetória deve garantir suavidade, continuidade de velocidades e acelerações e cumprimento de restrições cinemáticas. O movimento pode ser especificado: no espaço articular ($q(t)$) ou no espaço cartesiano ($X(t)$). A conversão entre uma trajetória definida no espaço cartesiano para o espaço da junta é feita via cinemática inversa. Já a conversão de uma trajetória definida no espaço das juntas para o espaço cartesiano é feita pela cinemática direta.

2.8 CONTROLE DE MANIPULADORES

O controle de manipuladores robóticos é fundamental para garantir que o efetuador final siga trajetórias desejadas com precisão, suavidade e confiabilidade. O objetivo principal de um sistema de controle é determinar as entradas adequadas nos atuadores de forma que o manipulador alcance as posições e orientações especificadas ao longo do tempo. Para isso, a realimentação fornecida pelos sensores das juntas é utilizada para ajustar continuamente o movimento Craig (2013).

Controlar manipuladores é particularmente desafiador devido à natureza não linear de suas equações dinâmicas. Termos de coriolis, centrífugos, efeitos gravitacionais e acoplamentos de inércia entre os elos tornam a dinâmica altamente complexa. Além disso, perturbações externas e incertezas nos parâmetros do modelo podem degradar significativamente o desempenho do sistema, exigindo técnicas de controle bem projetadas (Spong; Hutchinson; Vidyasagar, 2020).

Para lidar com esses desafios, são utilizados métodos de controle linear e não linear. A estratégia de controle adotada depende do nível de modelagem necessário, da complexidade da tarefa e das exigências de desempenho. Cada categoria apresenta características específicas relacionadas à forma como o comportamento dinâmico do manipulador é tratado.

A abordagem mais simples de controle linear é o controle independente de juntas, em que cada junta do manipulador é tratada separadamente como um sistema SISO (*Single Input – Single Output*), e o acoplamento entre as juntas é tratado como uma perturbação externa. Dessa forma, podem ser projetados controladores clássicos, como PID. Segundo Craig (2013), a implementação de controladores lineares resulta em um sistema com amortecimento não

uniforme ao longo do espaço de trabalho. Essa abordagem é simples, porém limitada a situações em que a trajetória é relativamente simples e o efeito de acoplamento não é significativo.

Outra estratégia é a linearização das equações de dinâmica do manipulador. Nesse método, o sistema não linear é aproximado por um sistema linear em torno de um ponto de operação, e técnicas de controle linear são aplicadas nesse modelo linearizado. Essa abordagem é adequada apenas quando o manipulador não se afasta significativamente do ponto de operação, pois a precisão do modelo linear diminui à medida que o sistema se afasta desse ponto. Uma alternativa é linearizar as equações ao longo da trajetória do manipulador, ou seja, realizar uma linearização ponto a ponto. Embora essa técnica seja útil em algumas análises e projetos de controladores lineares, o método de torque computado é geralmente preferido, pois atua diretamente sobre as equações não lineares, compensando explicitamente os termos de coriolis, centrífugos, gravidade e acoplamento entre elos.

2.8.1 O Problema Multivariável em Robótica

Manipuladores robóticos são sistemas inerentemente MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*), pois apresentam múltiplas juntas (entradas) e múltiplas saídas relacionadas ao movimento do efetuador, como posições, velocidades e acelerações das juntas ou do efetuador. Essa característica acarreta um acoplamento dinâmico entre as juntas, de modo que a ação em uma delas pode afetar o movimento das demais, tornando o controle mais complexo.

2.8.2 Lei de Controle Particionado

Craig (2013) apresenta uma lei de controle particionada na forma da Equação 37:

$$f = \sigma f' + \beta \quad (37)$$

Os termos σ e β são escolhidos de modo que as equações de movimento sejam desacopladas, e f' seja visto como a nova entrada do sistema. Nesse caso, f é chamado de controle por linearização e desacoplamento.

Considerando a equação dinâmica do manipulador, σ e β são dados, respectivamente, pelas equações 38 e 39:

$$\sigma = M(q) \quad (38)$$

$$\beta = C(q, \dot{q}) \quad (39)$$

O termo f' representa a lei de servo do sistema, dada pela equação 40. Já E é o erro de posição e $\dot{E}$ é a derivada do erro, considerando o rastreamento da trajetória das juntas:

$$f' = \ddot{q}_d + K_d \dot{E} + K_p E \quad (40)$$

As matrizes K_d e K_p são diagonais, representando os ganhos derivativo e proporcional, respectivamente. O erro e sua derivada são definidos pela equações 41 e 42:

$$E = q_d - q \quad (41)$$

$$\dot{E} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (42)$$

A equação 43 representa o erro em malha fechada do sistema:

$$\ddot{E} + K_d \dot{E} + K_p E = 0 \quad (43)$$

2.8.3 Método de Torque Computado

No método de torque computado, a lei de controle da Equação 37 é definida como:

$$\tau = M(q)\mu + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (44)$$

onde μ é o sinal de controle externo, tipicamente projetado como um controlador PD (ou PID) para rastreamento de trajetória:

$$\mu = \ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q) \quad (45)$$

Nota-se em 44 que $\mu = f'$, $\sigma = M(q)$ e $\beta = C(q, \dot{q}) + G(q)$.

2.8.4 Controle PID de Juntas

A lei de controle particionado para controle de juntas individuais é dada pela Equação 46, na qual $\mu = f'$, $\sigma = I$ (matriz identidade $n \times n$) e $\beta = 0$:

$$\tau(t) = K_P e(t) + K_D \dot{e}(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (46)$$

onde e é o erro entre a referência e a posição atual da junta. Esse controle trata cada junta como um sistema independente, sem compensar as não linearidades dinâmicas.

Limitações:

- Não compensa acoplamento entre juntas;
- Sensível a não linearidades;
- Pode apresentar overshoot elevado;
- Desempenho degradado próximo a singularidades.

3 METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO

Este capítulo apresenta a metodologia adotada no estudo, assim como os modelos matemáticos finais utilizados na simulação do manipulador planar 2 DOF (*Degrees of Freedom*). As deduções completas da modelagem cinemática, dinâmica e das energias encontram-se no Apêndice A, de forma a manter o capítulo conciso sem comprometer o rigor teórico.

O fluxo geral do estudo abrange as seguintes etapas: modelagem cinemática, modelagem dinâmica, implementação no MATLAB, projeto dos controladores e simulação numérica.

3.1 DESCRIÇÃO DO MANIPULADOR

O manipulador analisado é planar, composto por dois elos rígidos de comprimentos L_1 e L_2 , conectados por juntas rotacionais. Os parâmetros geométricos e físicos utilizados nas simulações são apresentados na Tabela 1, conforme discutido no Capítulo 2.

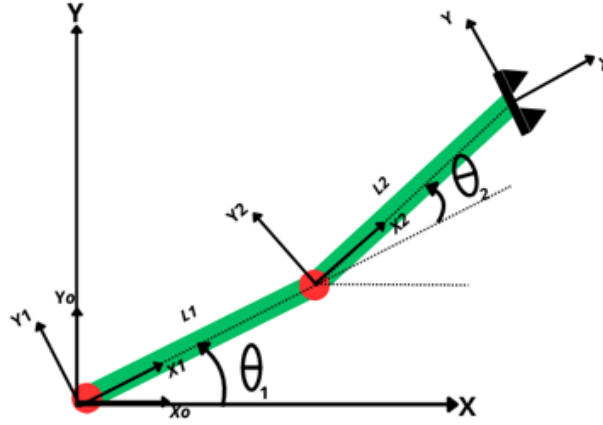
Tabela 1 – Parâmetros físicos do manipulador planar 2 DOF

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa do elo 1	m_1	2,0 kg
Massa do elo 2	m_2	1,0 kg
Comprimento do elo 1	L_1	1,0 m
Comprimento do elo 2	L_2	0,75 m
Centro de massa do elo 1	r_1	0,50 m
Centro de massa do elo 2	r_2	0,375 m

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Figura 6 apresenta o diagrama esquemático do manipulador e os referenciais adotados segundo a convenção de Denavit–Hartenberg.

Figura 6 – Diagrama do manipulador planar 2 DOF com sistemas de coordenadas segundo a convenção DH.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA UTILIZADA NAS SIMULAÇÕES

3.2.1 Cinemática Direta

A posição do efetuador no plano cartesiano é dada por:

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (1)$$

O Jacobiano utilizado para análise de velocidades e identificação de singularidades é:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde singularidades ocorrem quando $\det(J) = 0$.

3.2.2 Modelagem Dinâmica

A modelagem dinâmica utilizada é baseada na formulação de Euler-Lagrange. A forma final empregada na simulação é:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (3)$$

com:

$$M(q) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 \cos \theta_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \cos \theta_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \cos \theta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_1 g r_1 \cos \theta_1 + m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ m_2 g r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Os coeficientes são definidos como:

$$\alpha_1 = I_{1zz} + I_{2zz} + m_1 r_1^2 + m_2 (L_1^2 + r_2^2), \quad \alpha_2 = I_{2zz} + m_2 r_2^2, \quad \alpha_3 = m_2 L_1 r_2. \quad (7)$$

3.3 CONTROLADORES IMPLEMENTADOS

3.3.1 Controlador PID Independente

A lei de controle aplicada a cada junta é:

$$\tau_i = K_{P_i} e_i + K_{I_i} \int e_i dt + K_{D_i} \dot{e}_i, \quad (8)$$

com $e_i = q_{d,i} - q_i$. Os ganhos foram obtidos via técnica LQI.

3.3.2 Controlador por Torque Computado

Utiliza-se o modelo dinâmico para linearização e desacoplamento:

$$\tau = M(q) (\ddot{q}_d + K_D \dot{e} + K_P e) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q). \quad (9)$$

3.4 METODOLOGIA DA SIMULAÇÃO

Para integrar as equações diferenciais não lineares, definiu-se o vetor de estados:

$$x = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T, \quad (10)$$

resultando em:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{bmatrix}. \quad (11)$$

O torque é atualizado a cada passo do solver `ode45`.

3.5 CONFIGURAÇÕES DAS SIMULAÇÕES

Condições iniciais:

$$q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trajetórias desejadas:

$$(\theta_{1d}, \theta_{2d})_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (\theta_{1d}, \theta_{2d})_2 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Os ganhos LQI e LQR utilizados estão apresentados nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2 – Ganhos do controlador PID obtidos via LQI.

Ganho	Matriz	Descrição
K_P	$\begin{bmatrix} 46.5339 & 1.3133 \\ 1.3133 & 40.8915 \end{bmatrix}$	Ganho proporcional
K_D	$\begin{bmatrix} 18.4540 & 1.8154 \\ 1.8154 & 10.6544 \end{bmatrix}$	Ganho derivativo
K_I	$\begin{bmatrix} 31.6228 & 0 \\ 0 & 31.6228 \end{bmatrix}$	Ganho integral

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Tabela 3 – Ganhos da lei auxiliar μ obtidos via LQR para o controlador por torque computado.

Ganho	Matriz	Descrição
K_P	$\begin{bmatrix} 31.6228 & 0 \\ 0 & 31.6228 \end{bmatrix}$	Ganho proporcional
K_D	$\begin{bmatrix} 12.7768 & 0 \\ 0 & 12.7768 \end{bmatrix}$	Ganho derivativo

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados obtidos nas simulações do manipulador robótico planar com dois graus de liberdade, modelado dinamicamente pelo formalismo de Lagrange e controlados por duas estratégias de controle distintas: o controlador PID e o método de Torque Computado(Computed Torque Control - CTC).

4.1 SIMULAÇÃO 1 ($\theta_{1d} = \pi/2$, $\theta_{2d} = \pi/2$)

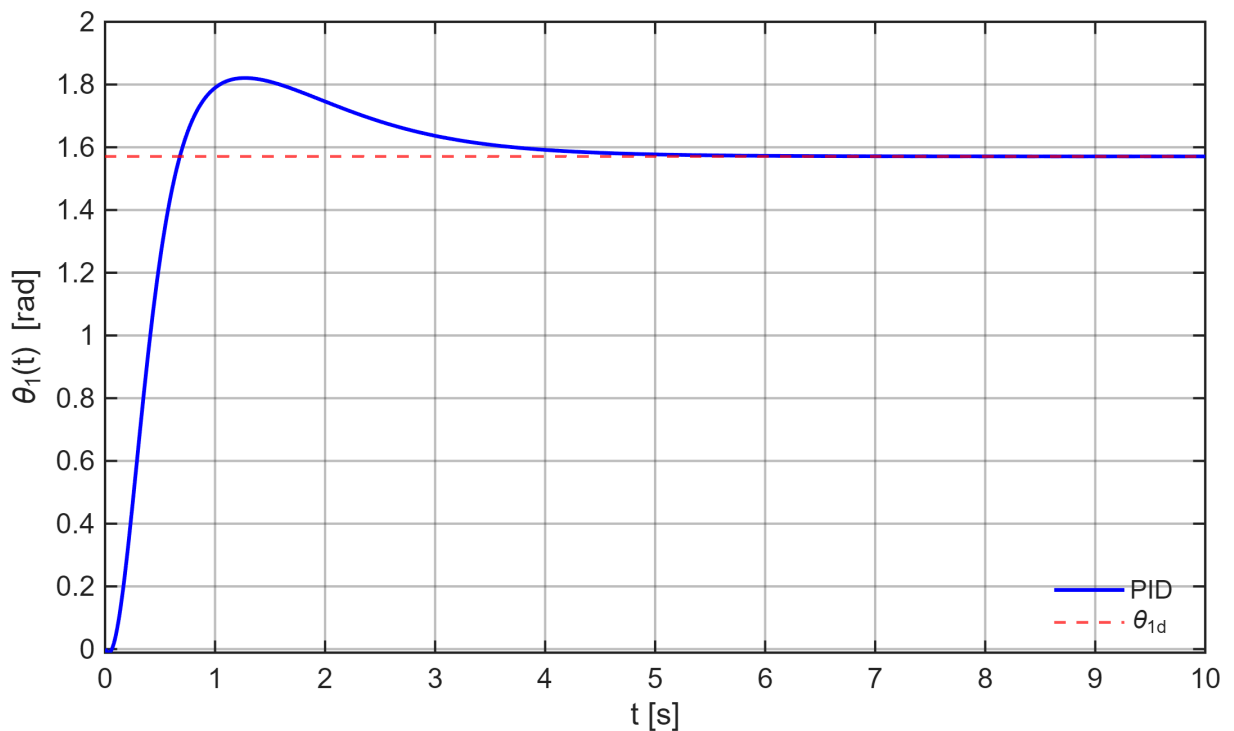
4.1.1 Simulação com controlador PID

4.1.1.1 Resposta temporal

A Figura 7 mostra a evolução temporal de θ_1 , enquanto a Figura 8 apresenta a evolução de θ_2 . Em ambas as respostas, observa-se que as juntas atingem a referência desejada; porém, há um sobressinal elevado no início da simulação, seguido de um decaimento suave até atingir o valor de $\frac{\pi}{2}$ em regime estacionário.

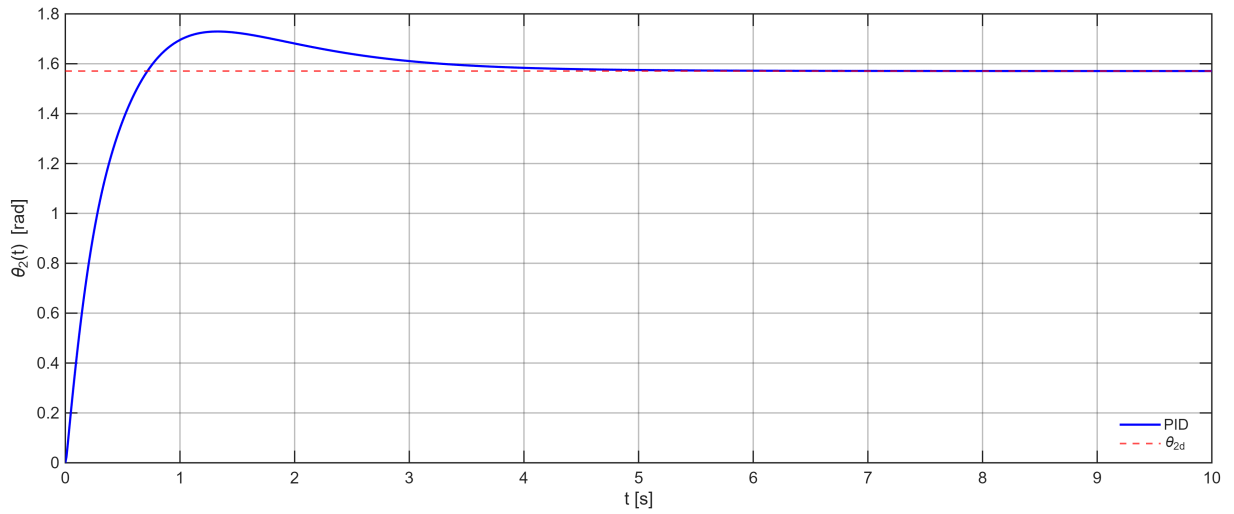
Conforme discutido na Seção 3, esse comportamento ocorre porque o controlador PID não compensa os efeitos gravitacionais $G(q)$ nem os efeitos decorrentes dos termos acoplados presentes em $C(q, \dot{q})$.

Figura 7 – Resposta temporal de θ_1 - PID (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 8 – Resposta temporal de θ_2 - PID (Simulação 1).



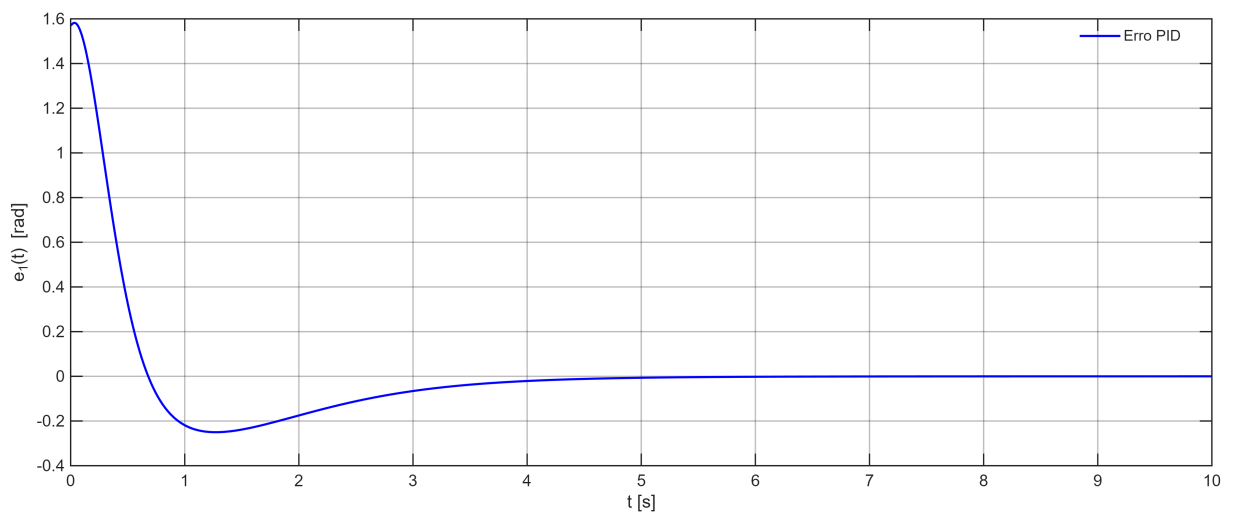
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.1.2 Erro de seguimento

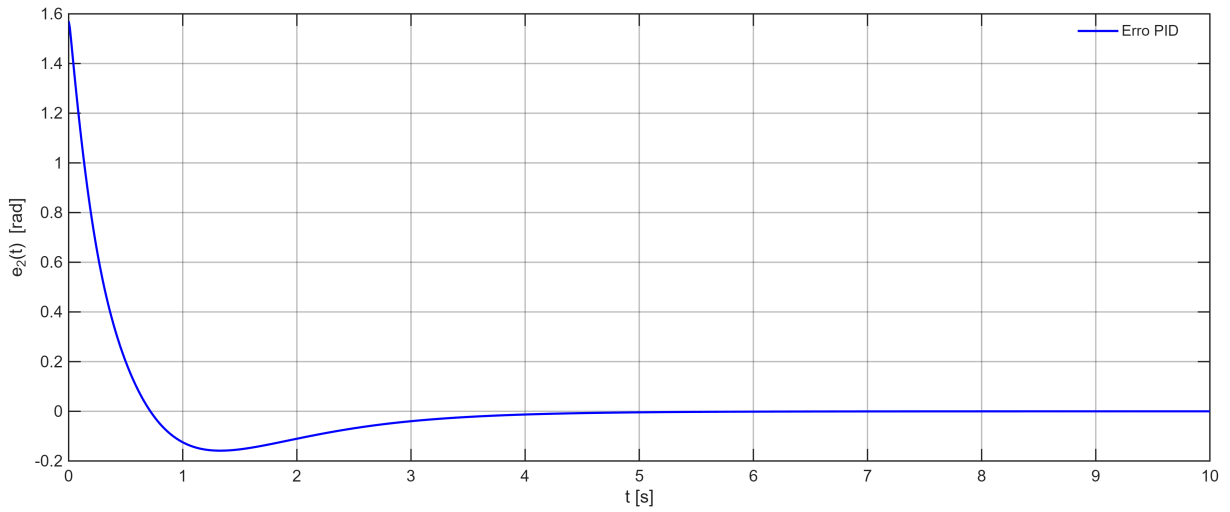
Os erros de seguimento do set-point são apresentados a seguir. A Figura 9 mostra o erro de θ_1 . Observa-se um comportamento oscilatório semelhante ao visto na resposta temporal de θ_1 .

O mesmo ocorre para o erro de θ_2 , apresentado na Figura 10. Em ambos os casos, o erro inicialmente decai e se torna negativo — o que ocorre porque θ_1 e θ_2 ultrapassam momentaneamente o valor de referência $\pi/2$. Após esse instante, o erro converge para zero.

Figura 9 – Erro de seguimento de θ_1 - PID (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 10 – Erro de seguimento de θ_2 - PID (Simulação 1).

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

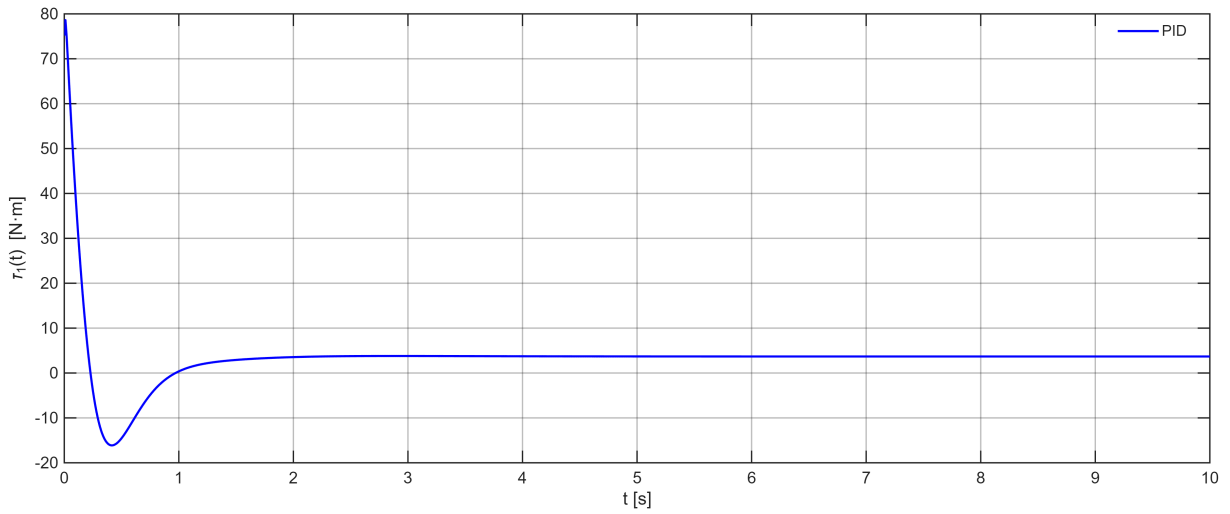
4.1.1.3 Torques aplicados

Os torques aplicados nas juntas são apresentados nas Figura 11 e Figura 12. Na Figura 11, observa-se que o torque τ_1 apresenta inicialmente um pico negativo e, em seguida, cresce de forma suave até estabilizar. Esse comportamento está associado ao fato de que a junta 1 deve compensar não apenas sua própria dinâmica, mas também os efeitos do elo 2. Assim, a contribuição dos termos de acoplamento $C(q, \dot{q})$ e da gravidade $G(q)$ é significativamente maior na equação de τ_1 , exigindo maior esforço de controle para conduzir θ_1 até o valor desejado.

Por outro lado, o torque aplicado na junta 2 apresenta uma resposta mais suave, como mostrado na Figura 12. Embora haja oscilações rápidas no início da simulação, τ_2 converge rapidamente para um valor praticamente constante. Isso ocorre porque a junta 2 atua diretamente apenas sobre o elo 2, cuja inércia e efeitos gravitacionais são menores quando comparados aos vistos pela junta 1. Além disso, τ_2 não precisa compensar o movimento do elo 1, resultando em um esforço de controle significativamente menor.

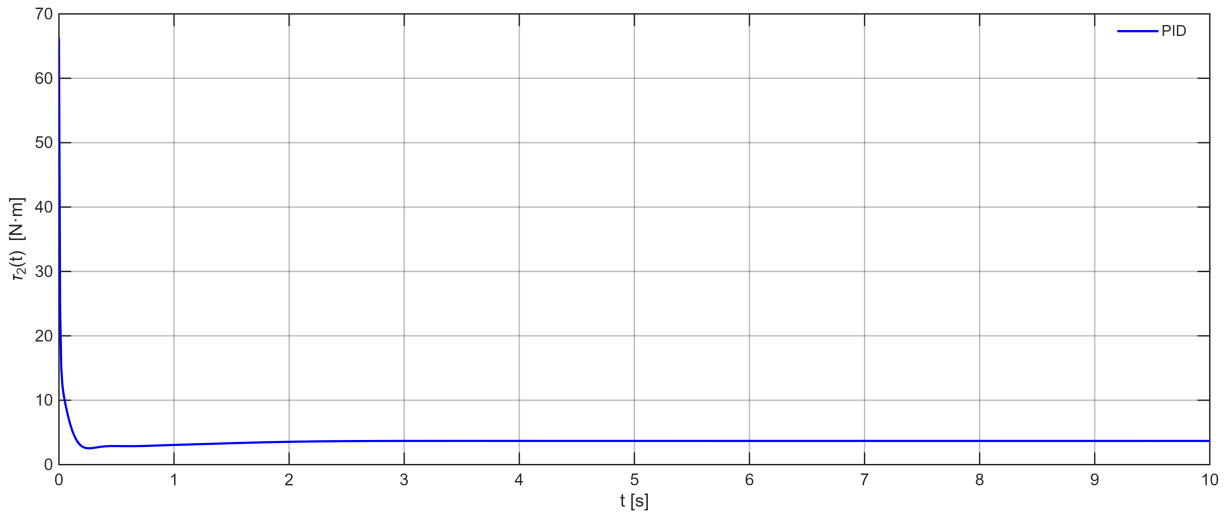
Esse comportamento distinto entre τ_1 e τ_2 é característico de manipuladores planares do tipo 2R, nos quais a junta 1 sustenta e movimenta ambos os elos, enquanto a junta 2 afeta apenas o segundo elo. Assim, os efeitos de acoplamento dinâmico e os termos gravitacionais têm maior impacto sobre τ_1 , justificando as diferenças observadas nas respostas de torque.

Figura 11 – Torques aplicados na junta 1- PID (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 12 – Torques aplicados na junta 2 - PID (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.2 Simulação por Torque Computado

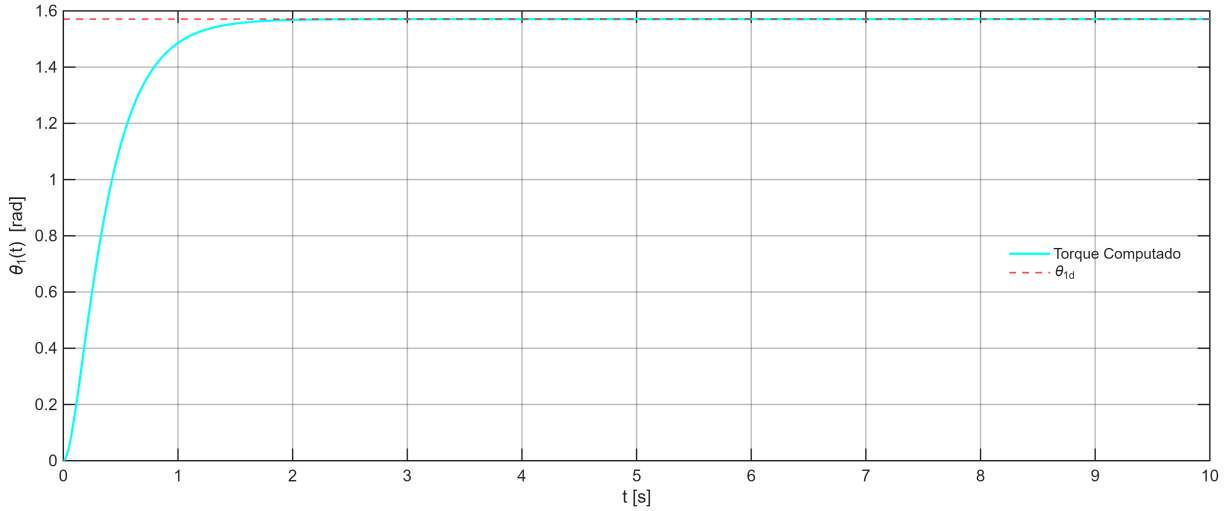
4.1.2.1 Resposta temporal

Para o método do torque computado, obtiveram-se as respostas temporais das juntas conforme ilustrado na Figura 13 e Figura 14. Ambas as respostas de θ_1 e θ_2 atingem o valor desejado sem apresentar sobresinal significativo e sem oscilações. Observa-se que o sistema apresenta um comportamento semelhante ao de um sistema próximo do amortecimento crítico.

Esse desempenho ocorre porque o método do torque computado realiza a compensação explícita das não linearidades do manipulador. Ao incluir no sinal de controle os termos dinâmicos

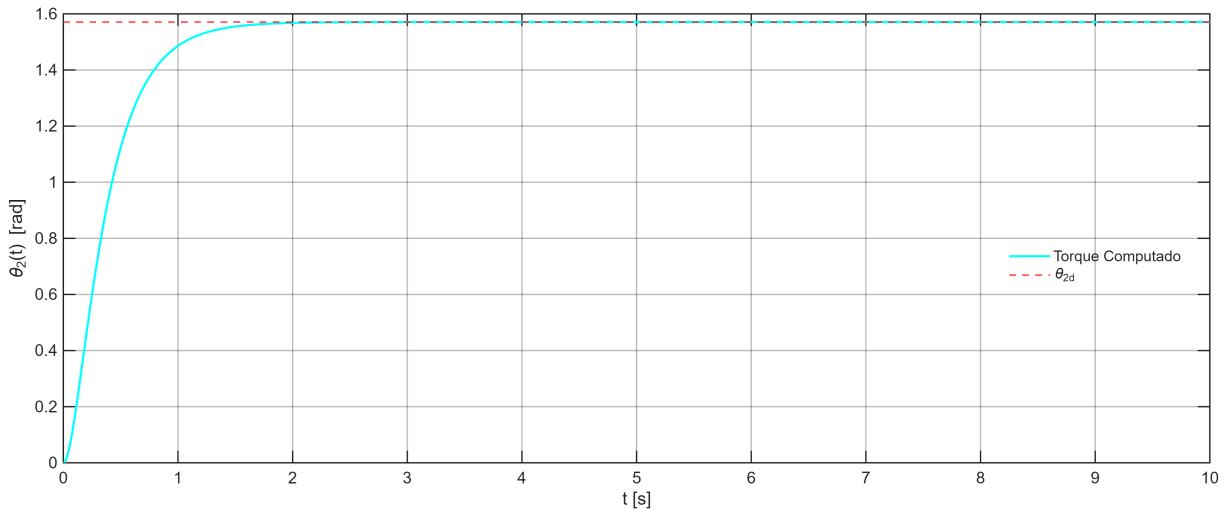
$M(q)$, $C(q, \dot{q})$ e $G(q)$, a dinâmica não linear do manipulador é efetivamente cancelada, resultando em um sistema linear e desacoplado cuja resposta é determinada apenas pela lei de servo externa (ver Seção 4). Dessa forma, a ação de controle reduz a influência dos termos inerciais, centrífugos, coriolis e gravitacionais, produzindo uma resposta suave e bem condicionada.

Figura 13 – Resposta temporal de θ_1 - CTC (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

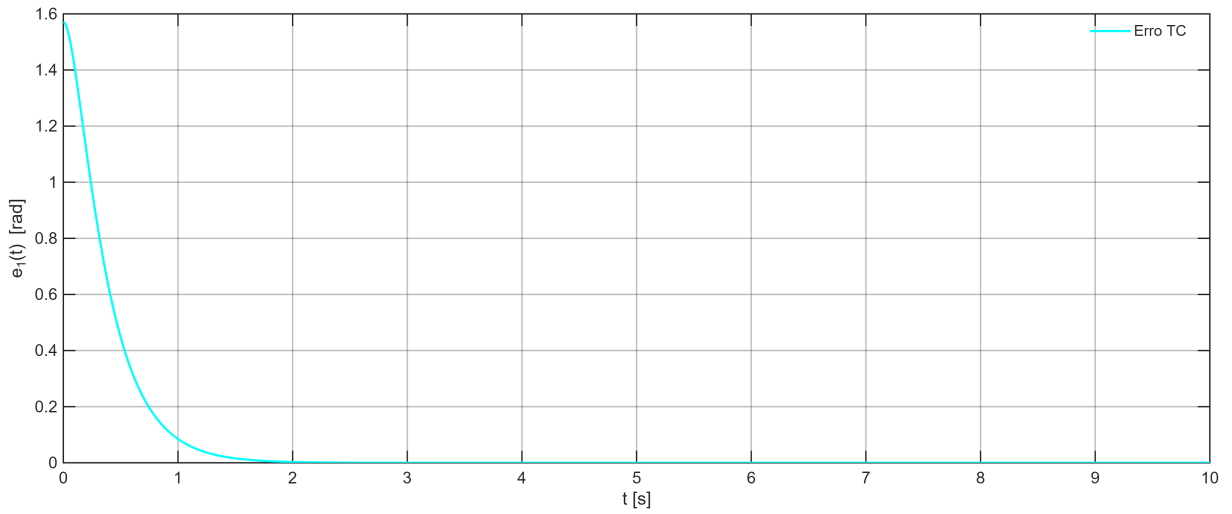
Figura 14 – Resposta temporal de θ_2 - CTC (Simulação 1).



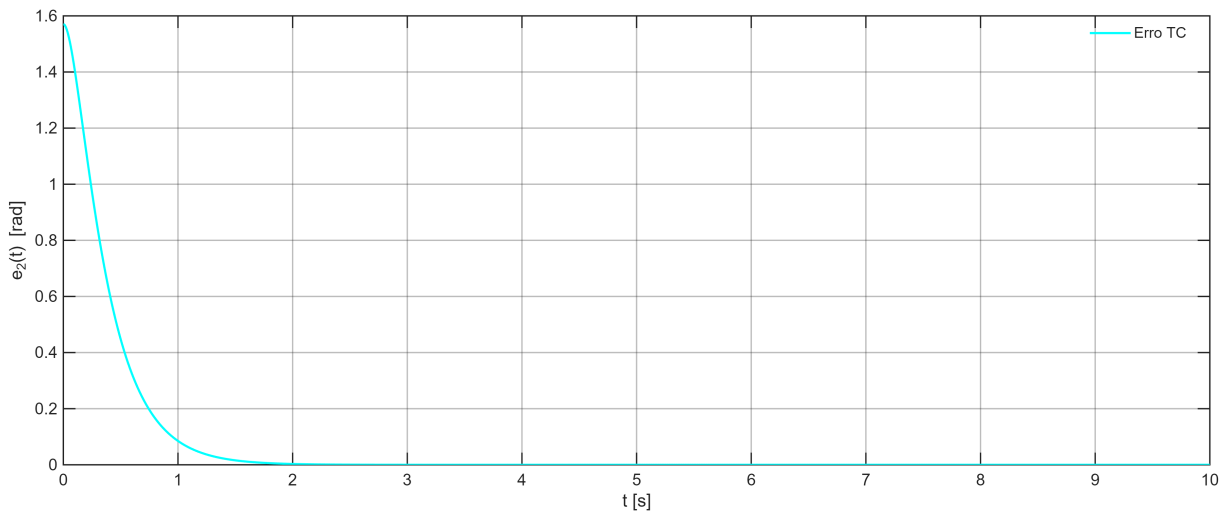
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.2.2 Erro de seguimento

O erro segue o mesmo comportamento visto em θ_1 e θ_2 .

Figura 15 – Erro de seguimento de θ_1 - CTC (Simulação 1).

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 16 – Erro de seguimento de θ_2 - CTC (Simulação 1).

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

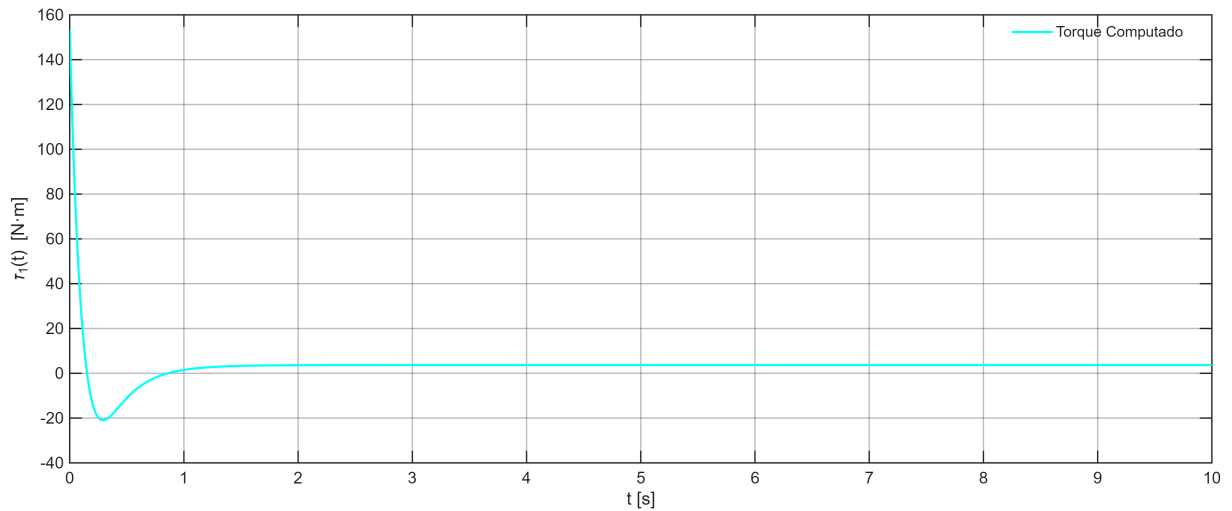
4.1.2.3 Torques aplicados

Os torques aplicados nas juntas, apresentados nas Figura 17 e Figura 18, exibem um comportamento oscilatório no instante inicial devido ao erro entre a posição atual e a referência. Esse erro inicial, ao ser processado pela lei de servo $\mu = \ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q)$, gera torques elevados destinados a cancelar rapidamente as dinâmicas não lineares do manipulador.

No caso da junta 1, observa-se que τ_1 decai até atingir um pico negativo de aproximadamente -20 N·m e, em seguida, aumenta de forma suave até estabilizar próximo de 3 N·m. Para a junta 2, o torque τ_2 apresenta comportamento semelhante, alcançando um valor mínimo de cerca de $-2,7$ N·m antes de convergir para aproximadamente $3,7$ N·m.

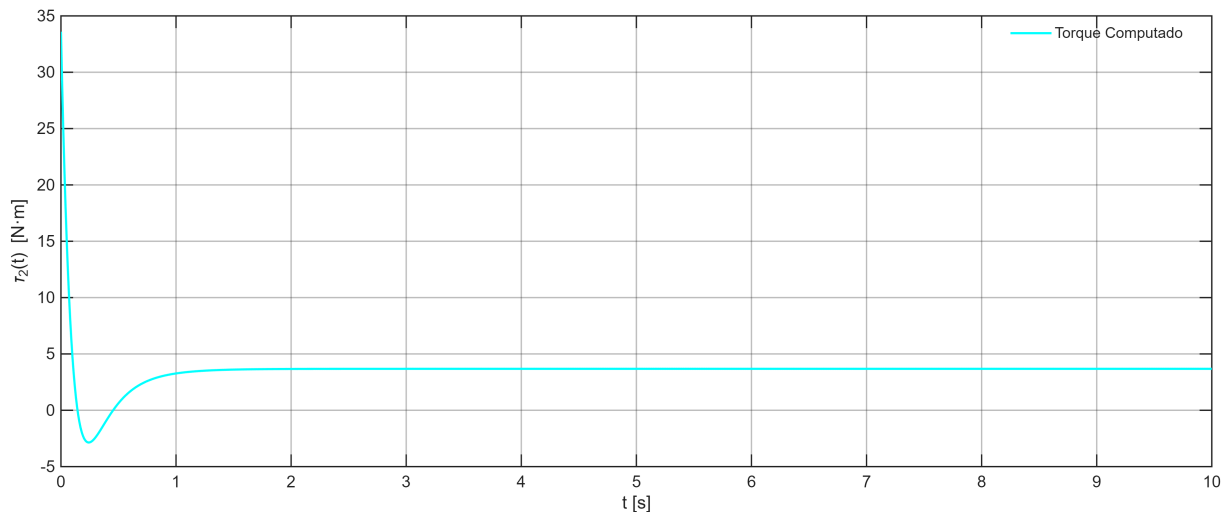
As diferenças entre os perfis de τ_1 e τ_2 podem ser explicadas pelas características dinâmicas do manipulador. A junta 1 movimenta ambos os elos e, portanto, sofre maior influência dos termos inerciais e gravitacionais, resultando em torques mais intensos. Já a junta 2 atua apenas sobre o segundo elo, o que leva a um esforço de controle menor. Em regime permanente, ambos os torques permanecem distintos de zero, pois equilibram os termos gravitacionais do modelo dinâmico.

Figura 17 – Torques da junta 1 - CTC (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 18 – Torques da junta 2 - CTC (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.3 Comparação entre os Controladores

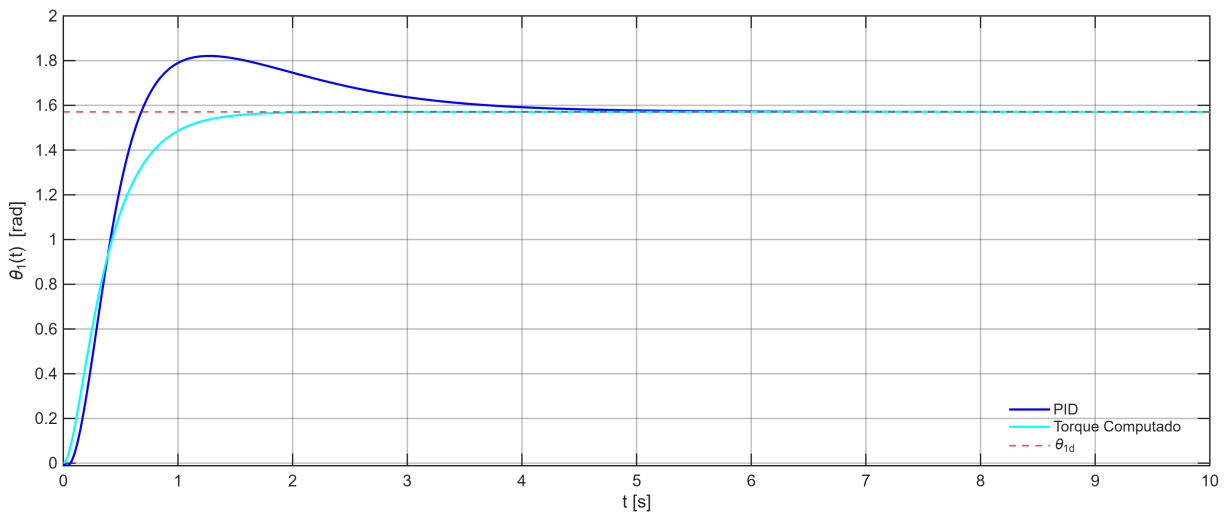
4.1.3.1 Comparação das respostas temporais

A comparação entre as respostas temporais mostra que, embora ambos os métodos atinjam o valor de referência, o controlador PID apresenta uma resposta mais lenta para se estabelecer no valor desejado. Além disso, observa-se um sobresinal significativamente maior no PID quando comparado ao método de torque computado.

No caso de θ_1 , as diferenças são ainda mais evidentes. A Figura 19 ilustra a comparação entre as respostas da junta 1. A resposta do PID ultrapassa o valor de referência $\pi/2$ antes do controle por torque computado, isto é, ela possui um tempo de resposta menor. Após ultrapassar a referência, a curva do PID apresenta oscilações e converge lentamente até se estabilizar.

Em contraste, a resposta obtida pelo torque computado atinge o valor de $\pi/2$ de forma mais gradual, sem ultrapassá-lo. Além disso, não apresenta oscilações significativas, estabilizando-se rapidamente no valor de referência, ou seja, a resposta possui um tempo menor para se acomodar no valor desejado.

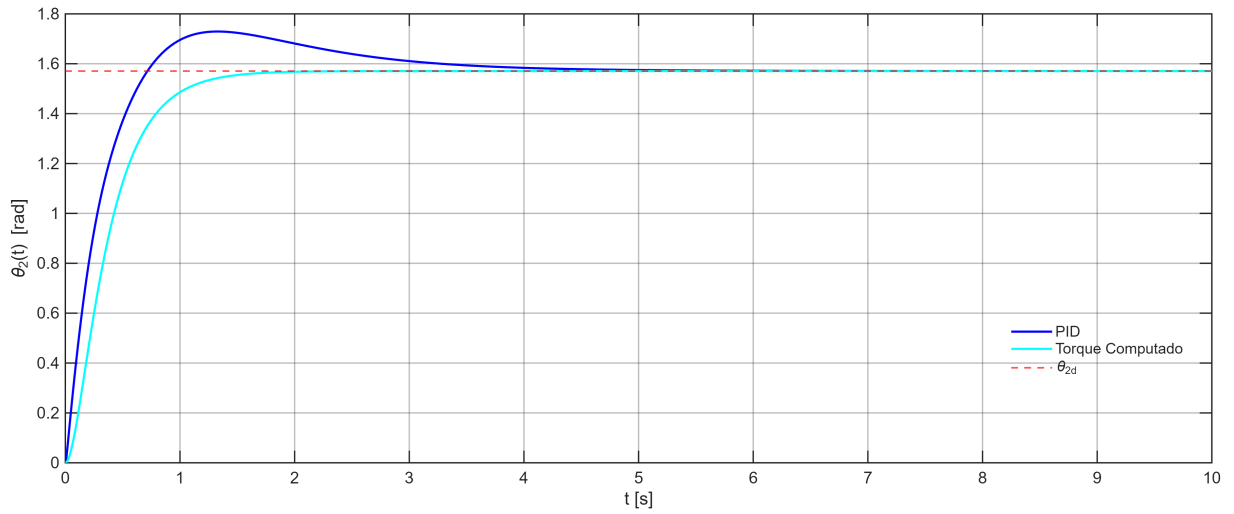
Figura 19 – Comparação de θ_1 - PID × CTC (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

O mesmo comportamento observado para θ_1 na Figura 19 é ilustrado em Figura 20 para θ_2 , porém em menor magnitude devido ao fato de que o efeito de acoplamento em θ_1 ser maior que em θ_2 .

Figura 20 – Comparação de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).

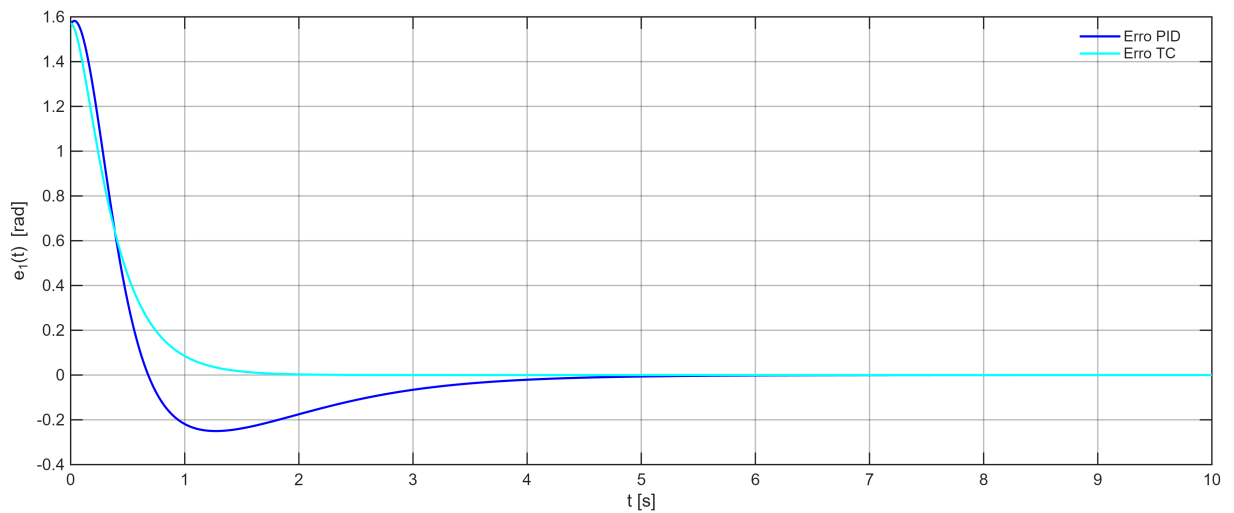


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.3.2 Comparação do erro de seguimento

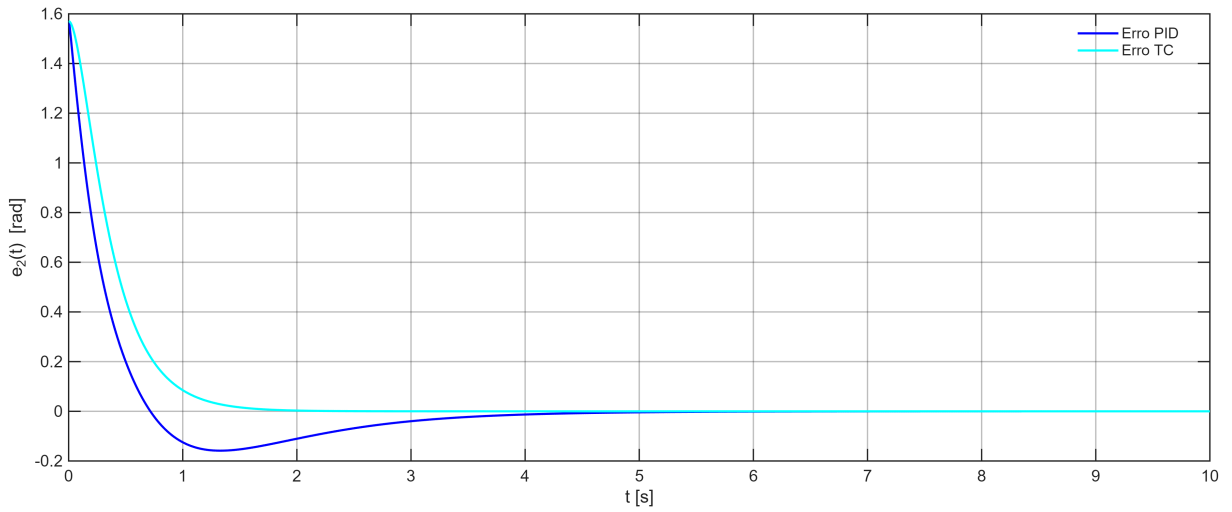
A Figura 21 mostra que o controlador PID apresenta um erro transitório maior e uma taxa de decaimento mais lenta. A ação integral reduz o erro em regime permanente, mas também introduz atraso e contribui para o aumento do sobressinal. No caso do torque computado (CTC), o erro possui menor amplitude e decaimento mais rápido, indicando que a compensação dinâmica reduz as perturbações cruzadas entre as juntas e melhora o rastreamento da referência.

Figura 21 – Comparação do erro de θ_1 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 22 – Comparação do erro de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).



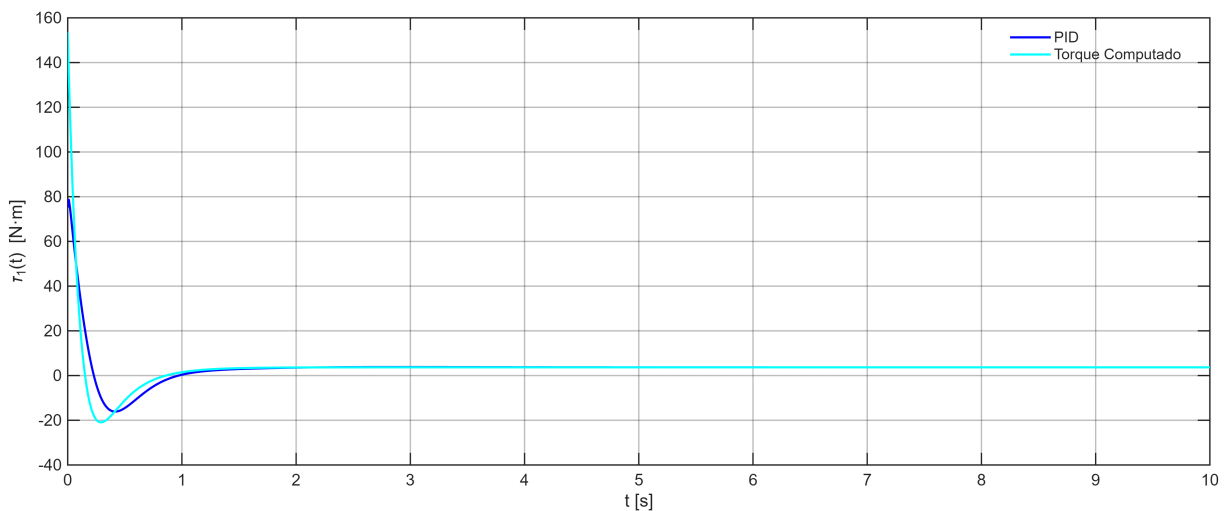
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.3.3 Comparação dos torques aplicados

A Figura 23 apresenta os torques aplicados na junta θ_1 . No CTC, observa-se um pico inicial elevado (aproximadamente 153 N·m), coerente com a necessidade de compensar instantaneamente o torque gravitacional da configuração estendida. Esse torque decai rapidamente e se estabiliza devido à ação *feedforward* da lei de controle. O controlador PID apresenta um pico menor (cerca de 79 N·m), porém com oscilações mais prolongadas e estabilização mais lenta.

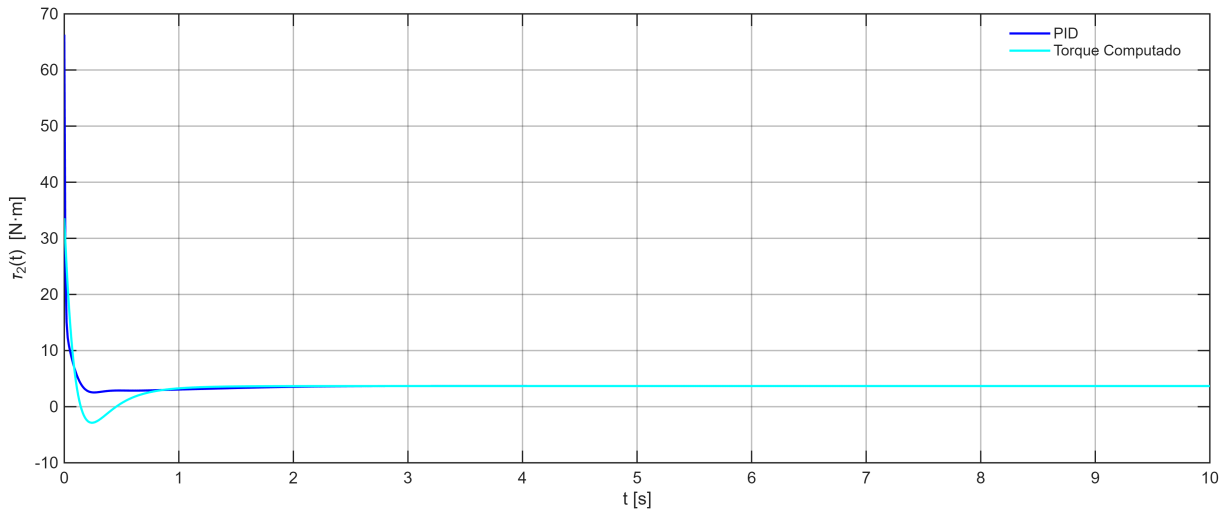
Os torques na junta θ_2 (Figura 24) revelam que o controlador PID produz sinais mais irregulares, com pico inicial de aproximadamente 66 N·m seguido de oscilações. Já o torque computado apresenta um pico reduzido (cerca de 33 N·m), porém mais sinal mais oscilatório.

Figura 23 – Comparação dos torques da junta 1 - PID $\times$ CTC (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 24 – Comparação dos torques da junta 2 - PID × CTC (Simulação 1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.3.4 Tabela comparativa das métricas de desempenho

A Tabela 4 apresenta os principais índices de desempenho calculados para cada controlador, incluindo tempo de subida, tempo de acomodação, overshoot, erro em regime permanente e IAE.

Tabela 4 – Comparação das métricas de desempenho para a Simulação 1.

Métrica	PID	Torque Computado	Melhor Desempenho
Overshoot (%)	15.92 / 10.09	≈ 0	Torque Computado
Tempo de subida (s)	0.42 / 0.50	0.72	PID (ligeiramente)
Acomodação 2% (s)	3.66 / 3.22	1.30	Torque Computado
Acomodação 5% (s)	2.84 / 2.37	1.03	Torque Computado
IAE	1.01 / 0.66	0.64	Torque Computado

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A análise integrada dos resultados da Simulação 1 evidencia que o método de torque computado apresenta desempenho superior em cenários fortemente não lineares. O CTC reduz significativamente o overshoot, o tempo de acomodação e o erro acumulado (IAE), ao mesmo tempo em que proporciona torques mais consistentes. Em contrapartida, o PID apresenta um tempo de subida menor.

4.2 SIMULAÇÃO 2 ($\theta_{1d} = \pi/2$, $\theta_{2d} = 0$)

A Simulação 2 foi conduzida em uma condição singular do manipulador. Para $\theta_2 = 0$, os elos encontram-se completamente alinhados, fazendo com que o Jacobiano perca posto e imponha severas limitações cinemáticas e dinâmicas. Configurações singulares são bem conhecidas por degradar controladores

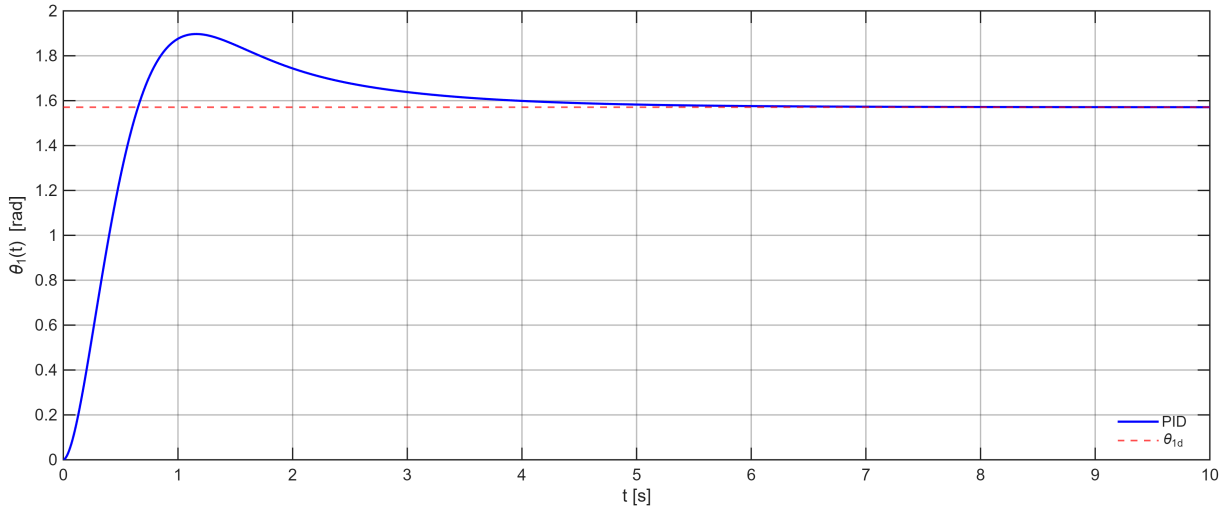
4.2.1 Simulação com controlador PID

4.2.1.1 Resposta temporal

As respostas de θ_1 e θ_2 são apresentadas na Figura 25 e Figura 26, respectivamente. Para θ_1 , o controlador PID apresenta um comportamento semelhante ao obtido na Simulação 1, uma vez que o valor desejado permanece $\pi/2$.

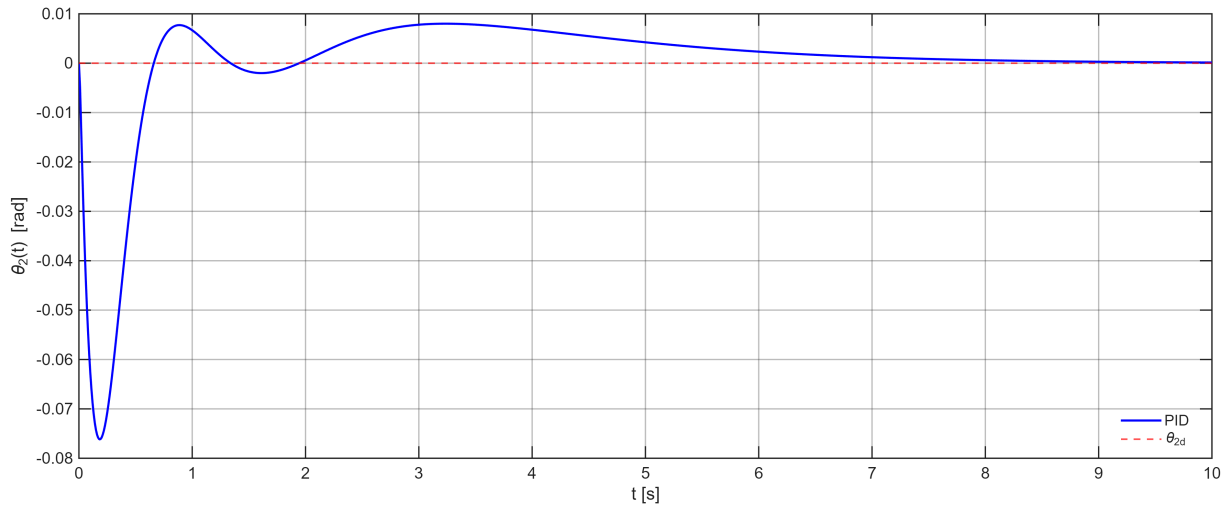
A principal diferença ocorre na resposta de θ_2 , ilustrada na Figura 26. Observa-se uma resposta altamente oscilatória. Isso ocorre porque θ_2 inicia e permanece próximo de uma configuração singular, caracterizada por $\det(J(q)) = 0$. Como discutido na Seção 2, nessas condições há amplificação dinâmica e perda de efetividade do controle, o que intensifica os efeitos de acoplamento entre as juntas. Dessa forma, o controlador PID apresenta dificuldade em compensar esses efeitos e a resposta de θ_2 oscila antes de convergir para o valor desejado.

Figura 25 – Resposta temporal de θ_1 - PID (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 26 – Resposta temporal de θ_2 - PID (Simulação 2).



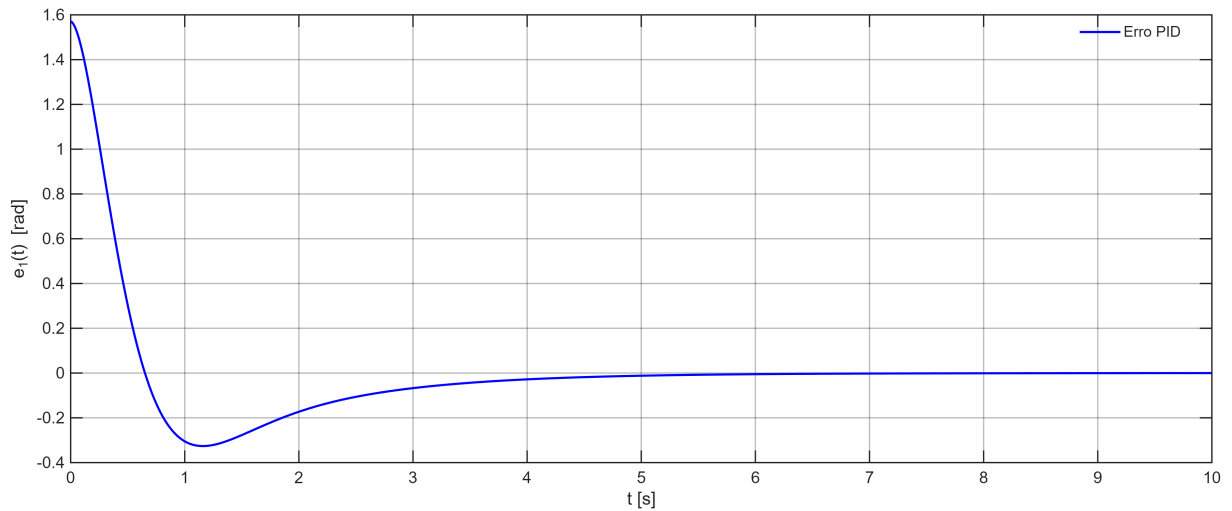
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.2.1.2 Erro de seguimento

A comparação entre a Figura 27 com a Figura 28 torna evidente o efeito da singularidade em $\theta_2 = 0$. O erro de θ_1 apresenta comportamento similar ao da Simulação 1: inicialmente decai para um valor negativo devido ao sobresinal e, posteriormente, converge para zero.

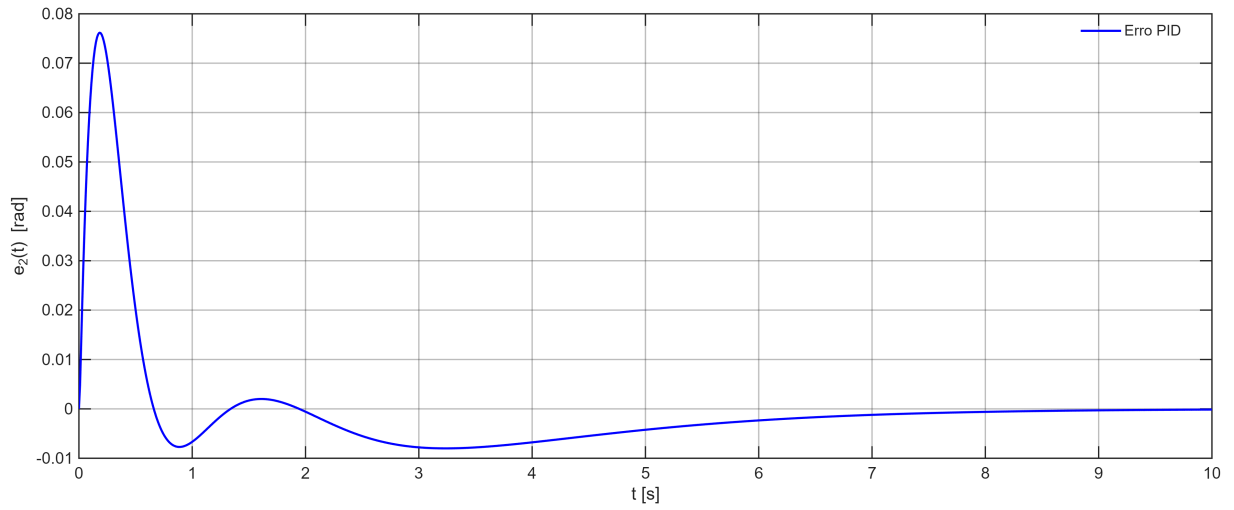
Em contraste, o erro de θ_2 apresenta natureza claramente oscilatória. O erro cresce até aproximadamente $7,5 \times 10^{-2}$ rad, decai e oscila até convergir. Esse comportamento é consequência direta da perda de condicionamento da Jacobiana, que amplifica pequenas variações do torque aplicado e dificulta o amortecimento do erro.

Figura 27 – Erro de seguimento de θ_1 - PID (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 28 – Erro de seguimento de θ_2 - PID (Simulação 2).



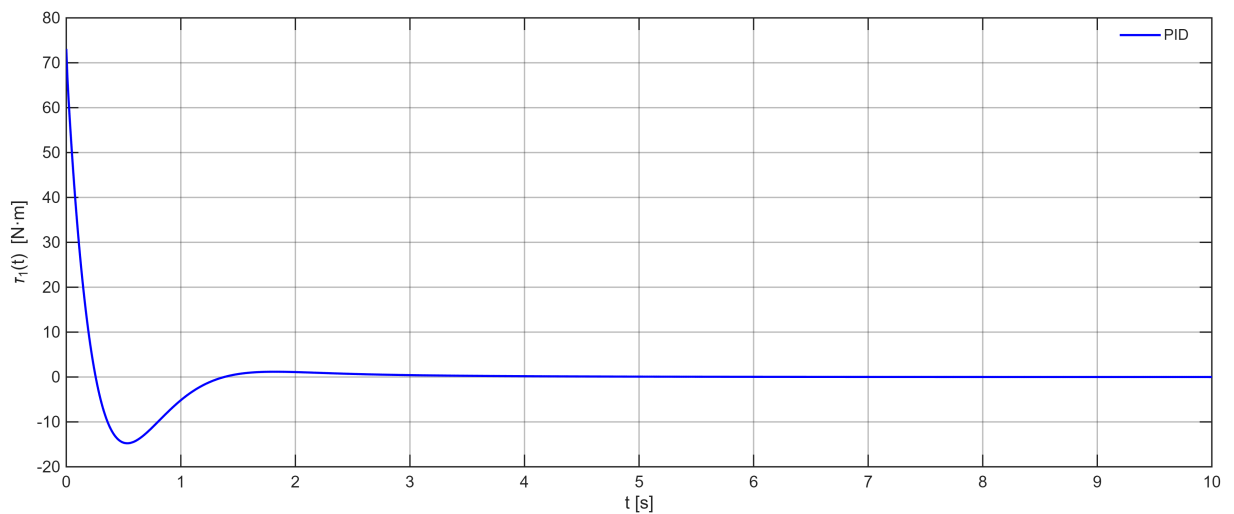
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.2.1.3 Torques aplicados

Os torques aplicados às juntas são apresentados na Figura 29 e Figura 30. Observa-se que o torque τ_1 decresce, apresenta pequenas oscilações e se estabiliza em zero, comportamento compatível com o erro transitório moderado dessa junta.

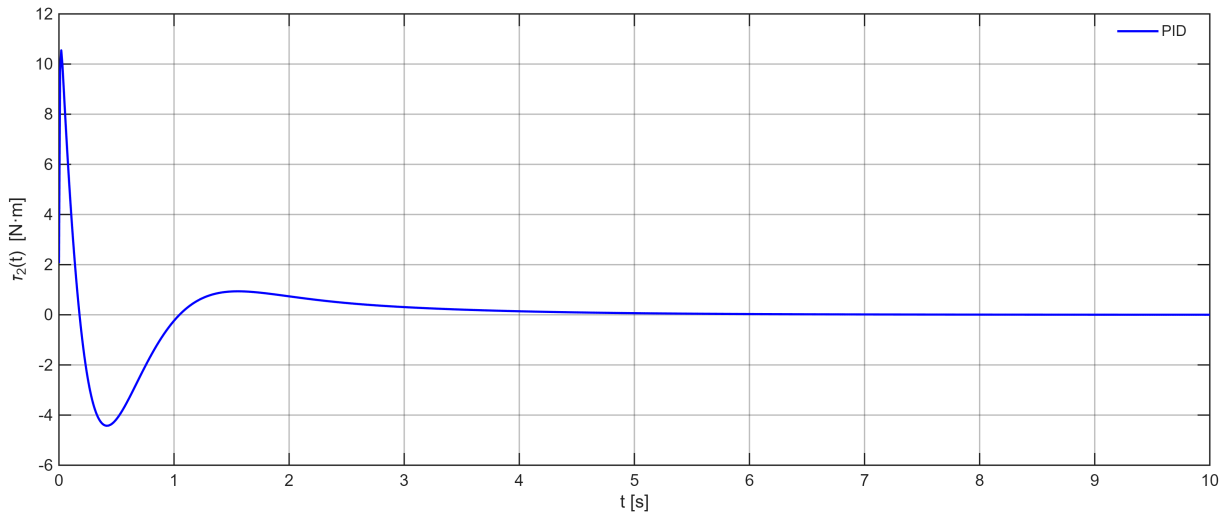
Por outro lado, o torque τ_2 apresenta oscilações mais acentuadas antes de convergir para zero. Essa maior sensibilidade ocorre porque a junta 2 está diretamente associada à singularidade do manipulador, o que aumenta o esforço de controle necessário para compensar as variações amplificadas pela dinâmica do sistema.

Figura 29 – Torques da junta 1 - PID (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 30 – Torques da junta 2 - PID (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

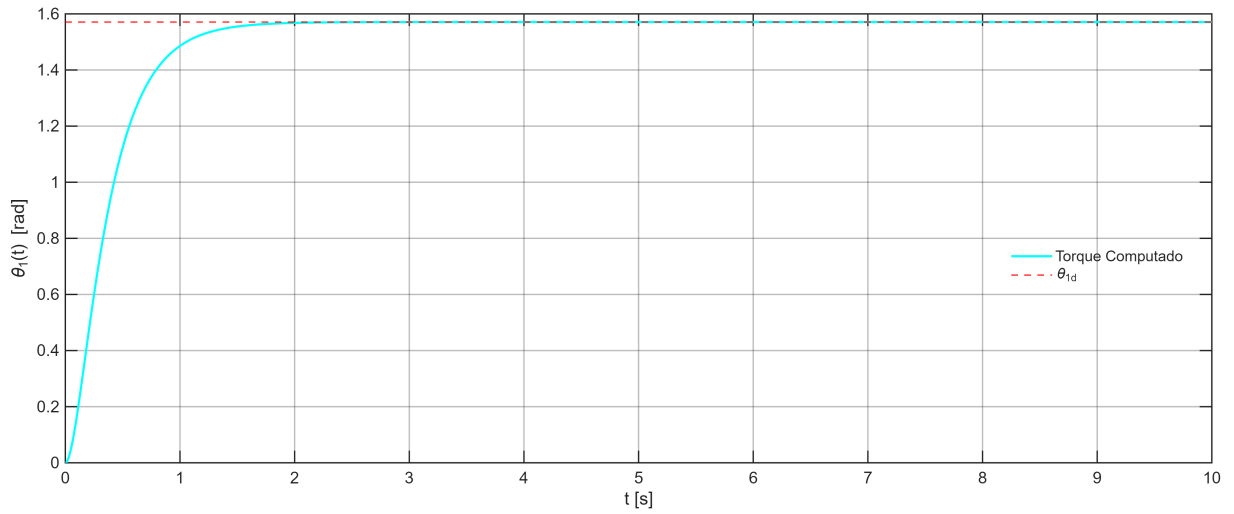
4.2.2 Simulação por Torque Computado

4.2.2.1 Resposta temporal

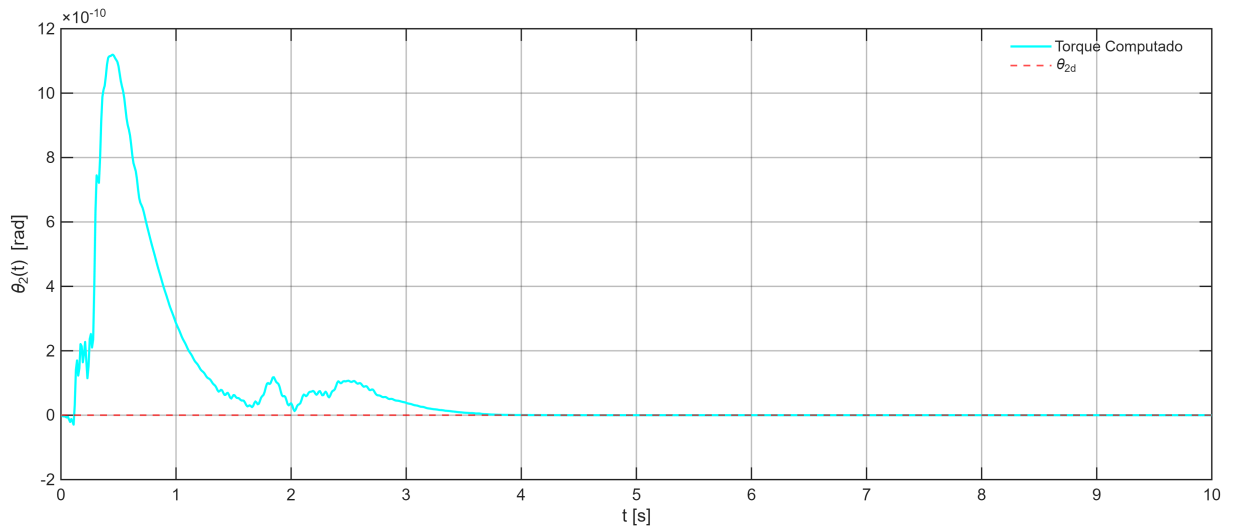
Assim como na Simulação 1, o controle por torque computado é capaz de levar θ_1 ao valor desejado sem apresentar oscilações ou sobresinal significativo. Esse comportamento já era esperado, pois o termo de compensação dinâmica cancela adequadamente os efeitos gravitacionais, centrífugos e de Coriolis associados à junta 1.

A maior diferença surge na resposta de θ_2 , apresentada na Figura 32. Observa-se uma oscilação inicial mais pronunciada em comparação com a Simulação 1. Embora o torque computado compense as não linearidades e reduza o acoplamento dinâmico, a presença de uma singularidade ($\theta_2 = 0$) provoca um efeito de amplificação nos termos da dinâmica.

Como discutido na Seção 2, próximo a uma singularidade o Jacobiano torna-se mal condicionado, o que intensifica a sensibilidade do sistema a pequenas variações de torque. Assim, o termo feedforward do CTC acaba amplificando essas perturbações, resultando na oscilação inicial observada. Após esse regime transitório mais agressivo, a resposta converge suavemente para o valor desejado.

Figura 31 – Resposta temporal de θ_1 - CTC (Simulação 2).

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 32 – Resposta temporal de θ_2 - CTC (Simulação 2).

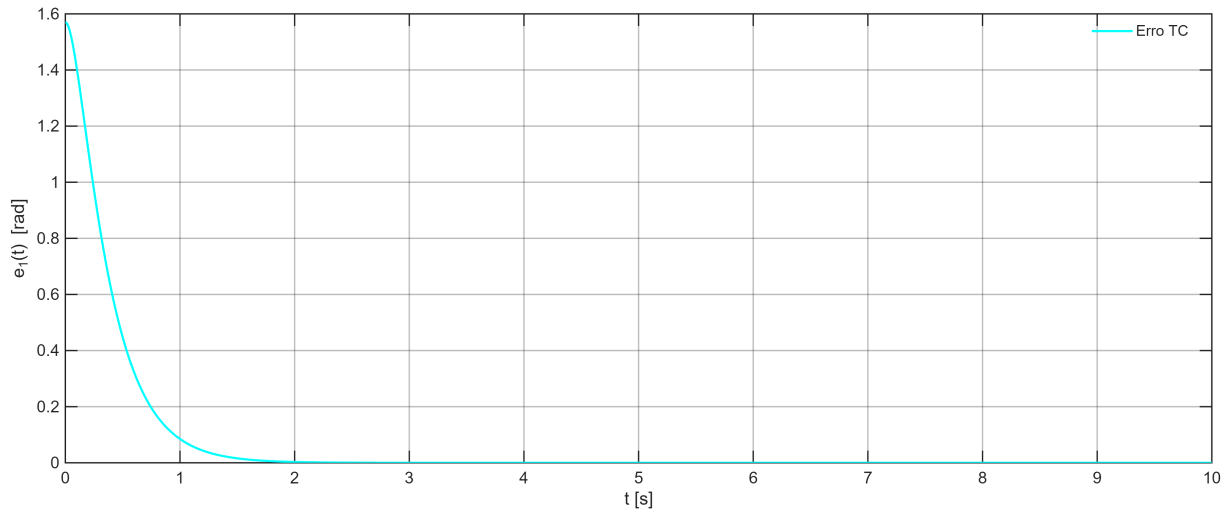
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.2.2.2 Erro de seguimento

O comportamento do erro de seguimento reflete diretamente as respostas temporais apresentadas anteriormente. A Figura 33 mostra que o erro de θ_1 decai rapidamente e converge para zero de forma suave, confirmando o bom desempenho do controlador nessa junta.

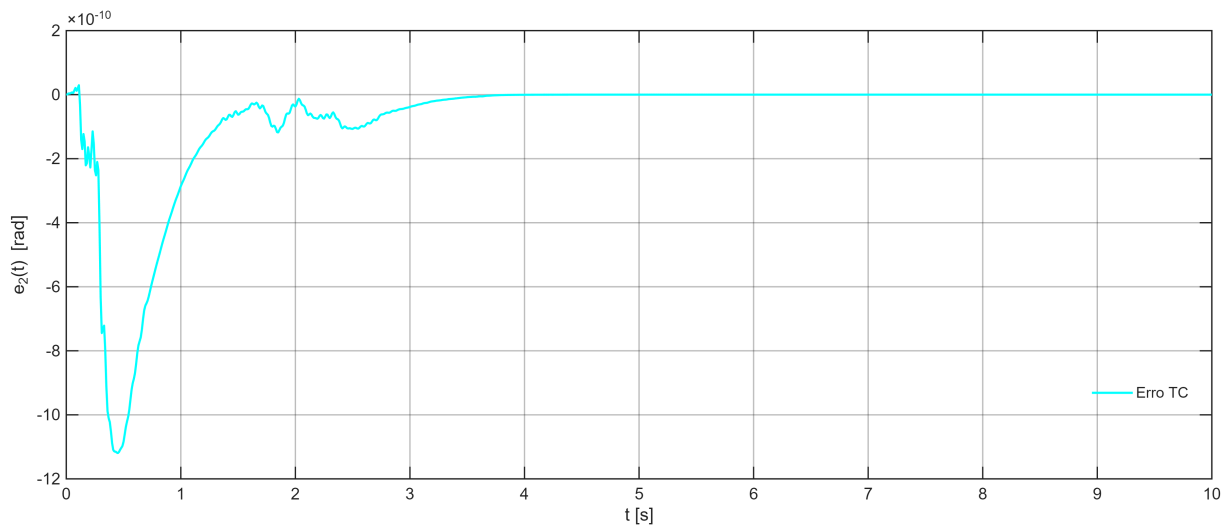
Já o erro de θ_2 (Figura 34) apresenta oscilações mais pronunciadas no início, decorrentes do efeito da singularidade. Após esse período transitório, o erro diminui progressivamente e converge para zero, demonstrando que, apesar da condição desfavorável, o controlador é capaz de estabilizar o sistema.

Figura 33 – Erro de seguimento de θ_1 - PID (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 34 – Erro de seguimento de θ_2 - PID (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

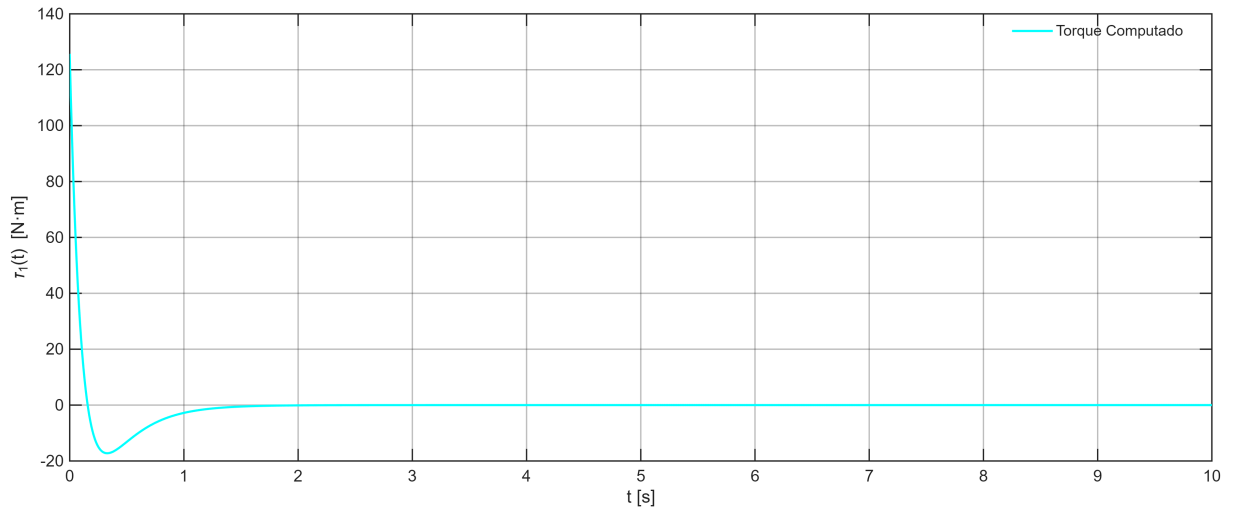
4.2.2.3 Torques aplicados

Os torques aplicados nas juntas são ilustrados na Figura 35 e Figura 36. A junta 1 apresenta um torque inicial elevado, seguido de amortecimento rápido, compatível com a necessidade de compensar os termos gravitacionais e de Coriolis da configuração inicial.

O torque aplicado à junta 2 apresenta oscilações iniciais mais evidentes, refletindo o efeito amplificado da singularidade sobre a dinâmica. Como o termo feedforward do torque computado inclui $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ e $G(q)$, qualquer imprecisão numérica ou descontinuidade causada pela proximidade da singularidade produz variações visíveis no sinal de torque. Após a acomoda-

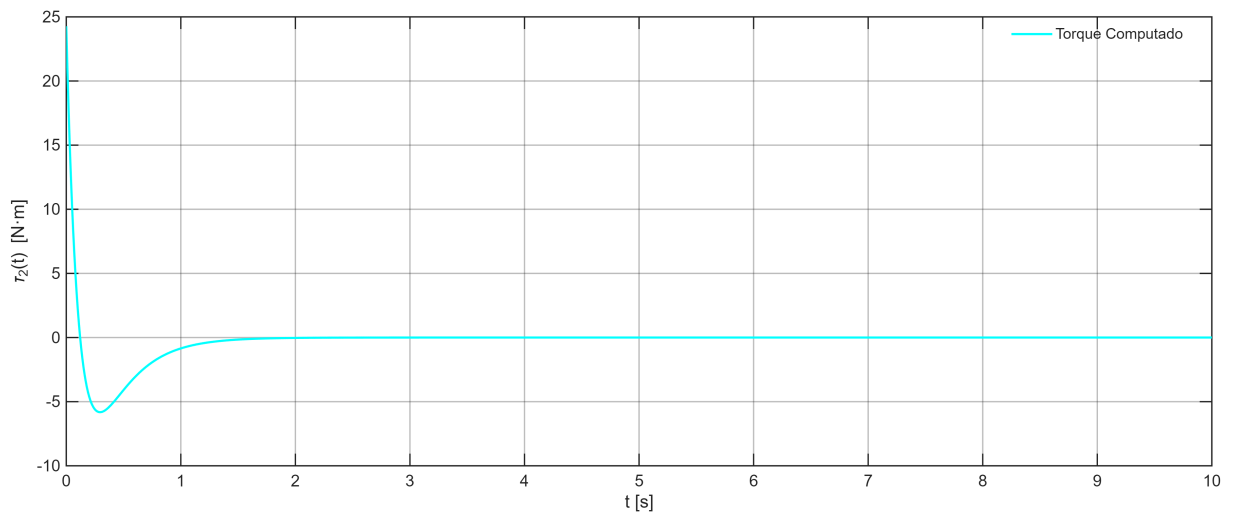
ção inicial, ambos os torques tendem a zero em regime permanente, como esperado para um movimento para set-point.

Figura 35 – Torques da junta 1 - CTC (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 36 – Torques da junta 2 - CTC (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.2.3 Comparação entre os Controladores

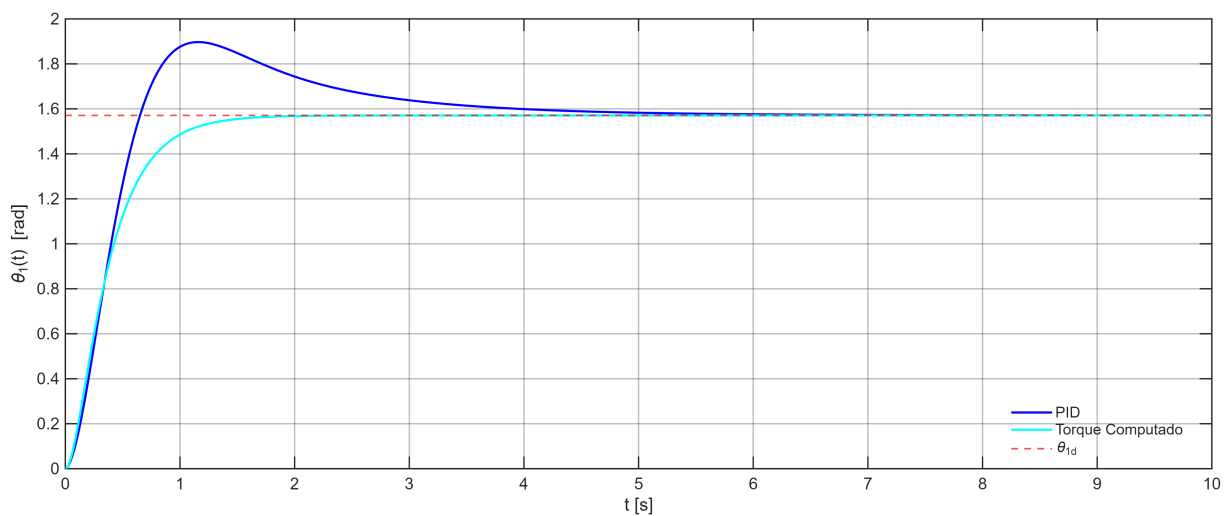
4.2.3.1 Comparação das respostas temporais

Assim como observado na Simulação 1, a comparação entre os controladores indica novamente um desempenho superior do método por torque computado. Na resposta de θ_1 , o controlador PID apresenta um sobresinal elevado e um tempo de acomodação mais longo. A

resposta obtida pelo torque computado, por outro lado, demora ligeiramente mais para cruzar o valor desejado, mas se acomoda rapidamente e sem oscilações, devido ao caráter linearizado do sistema sob essa lei de controle.

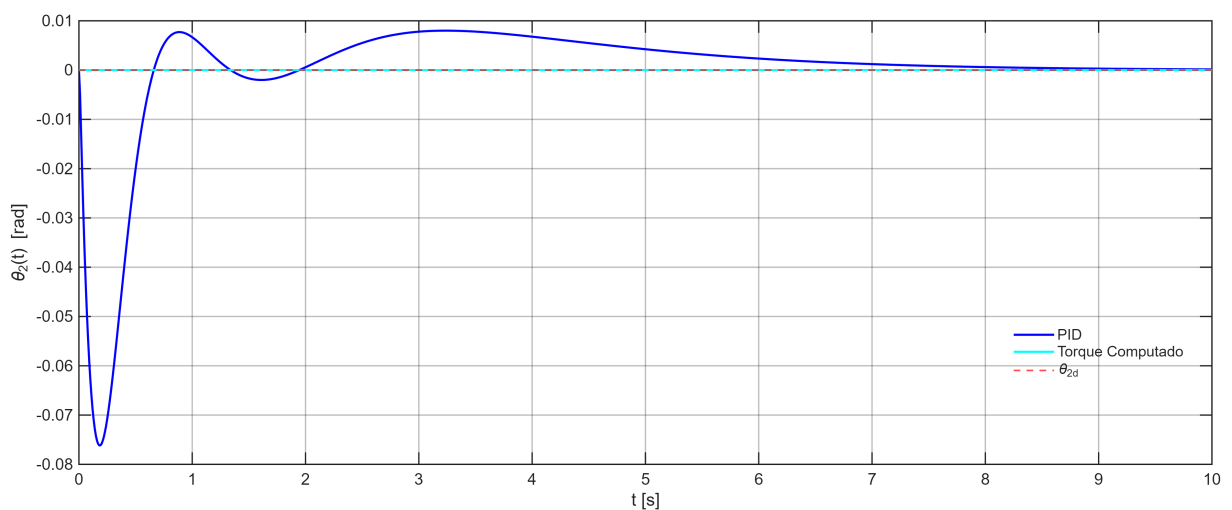
Conforme discutido anteriormente, a maior diferença entre os controladores ocorre na resposta de θ_2 . A Figura 38 ilustra claramente esse comportamento. As oscilações em θ_2 para o método por torque computado são pequenas quando comparadas àquelas obtidas com o PID. Esse resultado demonstra que, embora exista amplificação dinâmica devido ao Jacobiano mal condicionado na configuração singular, o torque computado ainda é capaz de reduzir significativamente os efeitos de acoplamento e melhorar o rastreamento.

Figura 37 – Comparação de θ_1 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 38 – Comparação de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).

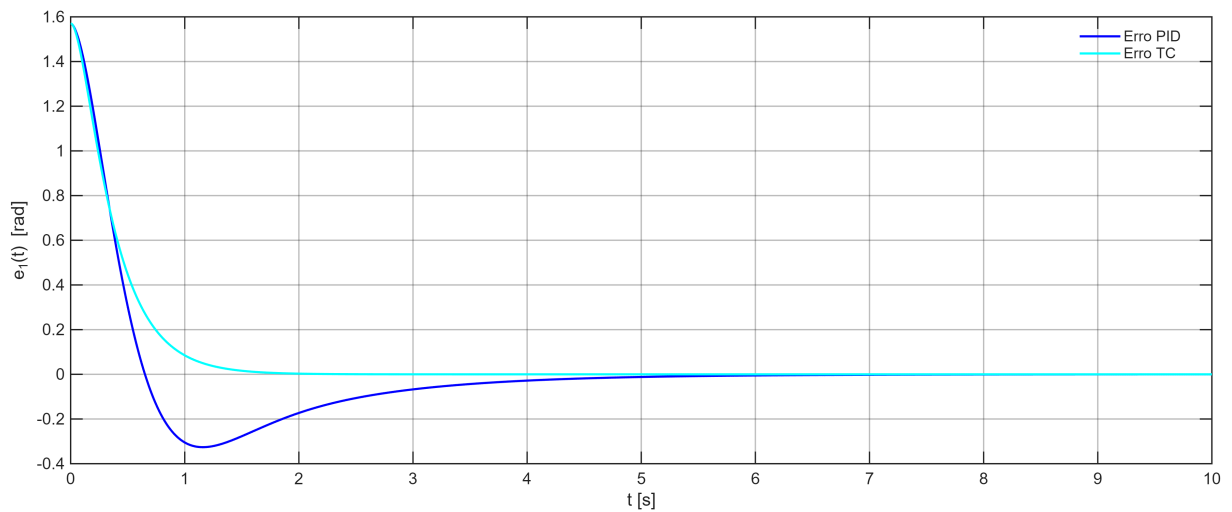


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.2.3.2 Comparação do erro de seguimento

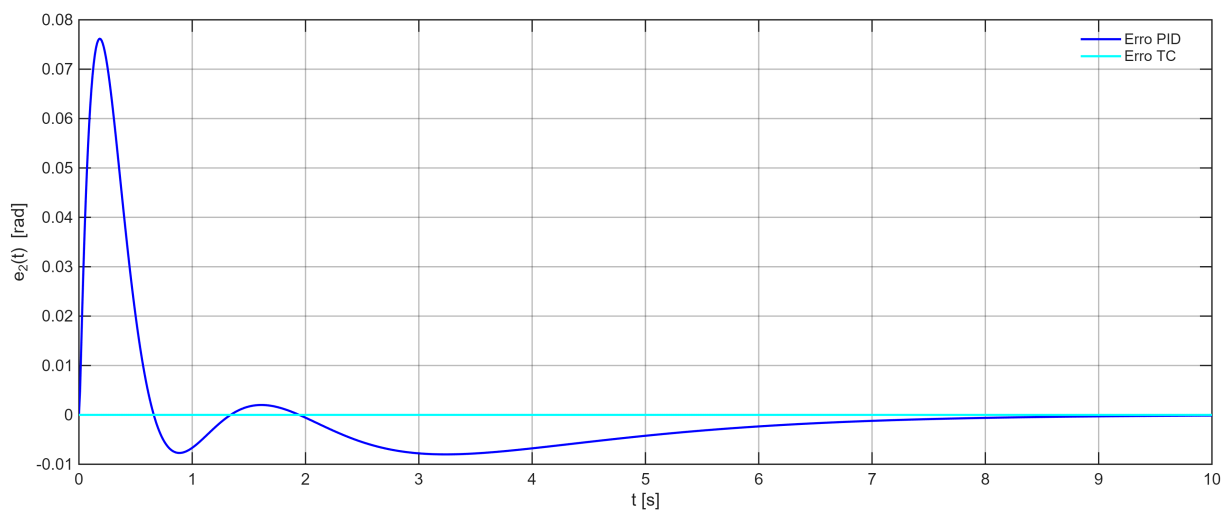
O erro de seguimento apresenta comportamento semelhante ao observado nas respostas temporais. Para θ_1 , ambos os controladores convergem para zero, mas o PID apresenta maior erro transitório. Para θ_2 , o erro associado ao PID é amplamente oscilatório, enquanto o torque computado reduz significativamente a amplitude das oscilações e converge mais rapidamente.

Figura 39 – Comparação do erro de θ_1 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 40 – Comparação do erro de θ_2 - PID $\times$ CTC (Simulação 2).



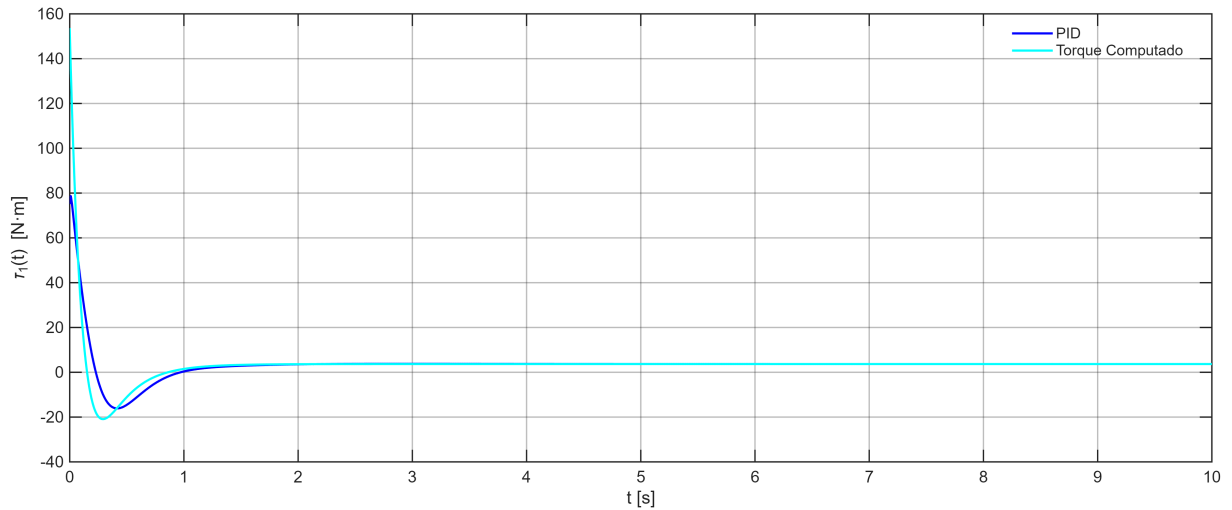
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.2.3.3 Comparação dos torques aplicados

A análise do torque evidencia novamente a diferença entre as estratégias de controle. O controlador PID produz sinais de torque mais irregulares e sujeitos a oscilações prolongadas,

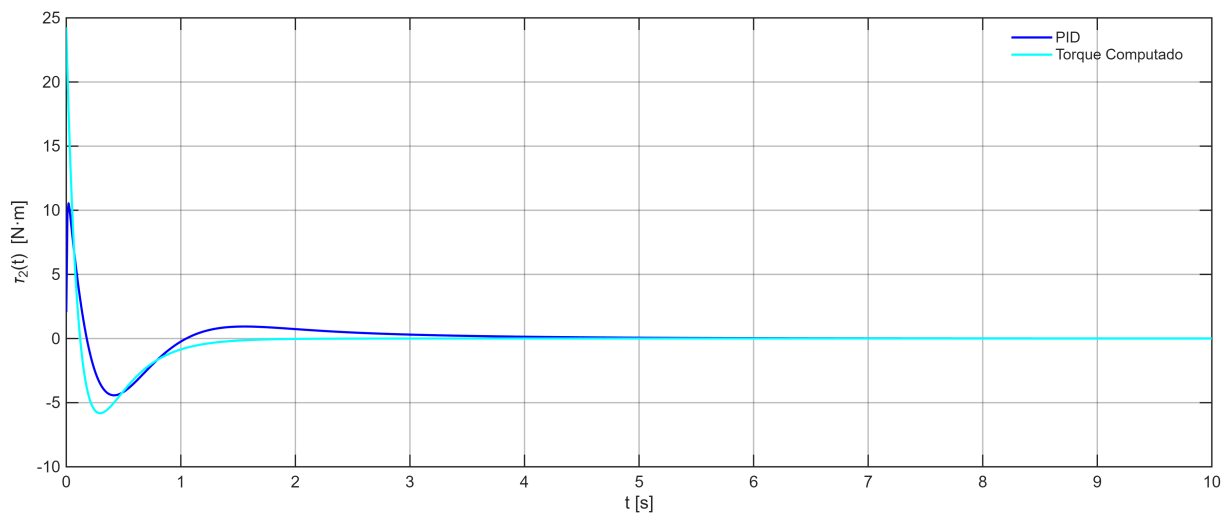
consequência da ausência de compensação das não linearidades e dos efeitos de acoplamento. Em contrapartida, o torque computado gera sinais mais suaves e com rápida estabilização, mesmo na presença da singularidade.

Figura 41 – Comparação dos torques da junta 1 - PID × CTC (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Figura 42 – Comparação dos torques da junta 2 - PID × CTC (Simulação 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.2.3.4 Tabela comparativa das métricas de desempenho

A 5 apresenta a métricas obtidas na Simulação 2.

Tabela 5 – Comparação das métricas de desempenho para a Simulação 2.

Métrica	PID	Torque Computado	Melhor Desempenho
Overshoot (%)	20.76 / –	≈ 0	Torque Computado
Tempo de subida (s)	0.45 / 0.00	0.72 / 0.00	Ambos (depende da junta)
Acomodação 2% (s)	3.88 / –	1.30 / –	Torque Computado
Acomodação 5% (s)	2.83 / –	1.03 / –	Torque Computado
IAE	1.05 / 0.06	0.64 / ≈ 0	Torque Computado

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A análise dos resultados da Simulação 2 novamente evidencia que o método de torque computado apresenta desempenho superior em cenários fortemente não lineares mesmo em condições de jacobiano mal condicionado.

4.3 SÍNTESE GERAL

A análise conjunta das Simulações 1 e 2 evidencia diferenças fundamentais entre os controladores avaliados. O controlador PID, apesar da simplicidade e facilidade de implementação, demonstra limitações importantes diante das não linearidades intrínsecas à dinâmica do manipulador. Em especial, observa-se:

- maior overshoot e maior tempo de acomodação;
- maior sensibilidade ao acoplamento dinâmico entre as juntas;
- torques mais irregulares e com oscilações mais intensas;
- degradação significativa em regiões próximas a singularidades.

Por outro lado, o controlador por torque computado apresenta vantagens claras:

- compensação explícita dos termos não lineares ($M(q)$, $C(q, \dot{q})$ e $G(q)$);
- linearização da dinâmica fechada, com resposta semelhante a sistemas de segunda ordem;
- menor oscilações, menor overshoot e melhor amortecimento;
- maior robustez em configurações geometricamente desfavoráveis, como a singularidade estudada.

A comparação geral reforça que o torque computado oferece desempenho superior na maioria das métricas avaliadas. Embora exija maior conhecimento do modelo dinâmico e maior esforço computacional, sua aplicação torna-se vantajosa quando se busca precisão, suavidade na resposta e maior estabilidade.

Com base nos resultados, observa-se que:

- a modelagem matemática via formalismo de Lagrange foi fundamental para a implementação correta do torque computado;
- o estudo em condições singulares permitiu avaliar a robustez dos controladores, enriquecendo a análise comparativa;
- o comportamento observado nas simulações é coerente com o que se espera da teoria clássica de controle de manipuladores.

No capítulo seguinte, apresenta-se a conclusão do trabalho, destacando as principais contribuições obtidas, bem como sugestões para estudos futuros baseados na modelagem e simulação realizadas.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo realizar a modelagem matemática e a simulação de um manipulador robótico planar com dois graus de liberdade, bem como analisar o desempenho de diferentes estratégias de controle aplicadas ao sistema. Inicialmente, desenvolveu-se a descrição cinemática por meio da abordagem clássica de transformações coordenadas e, em seguida, aplicou-se o formalismo de Lagrange para a obtenção das equações dinâmicas do manipulador, contemplando explicitamente os efeitos de inércia, acoplamento e gravidade.

A partir do modelo obtido, foi implementado um ambiente de simulação em MATLAB, o qual permitiu avaliar o comportamento dinâmico do manipulador sob diferentes condições operacionais. As respostas obtidas validaram o modelo desenvolvido, especialmente no que se refere às características não lineares, como a presença de termos acoplados e a influência significativa das forças gravitacionais.

No que diz respeito às estratégias de controle, analisaram-se comparativamente o controlador PID e o método do torque computado. Os resultados mostraram que o controlador PID, apesar de sua simplicidade e ampla aplicação industrial, apresenta limitações diante das não linearidades do manipulador, evidenciadas pelo maior sobressinal, maior tempo de acomodação e maior sensibilidade às interações dinâmicas entre as juntas.

Por outro lado, o método de torque computado apresentou desempenho superior em diversos aspectos. A compensação explícita dos termos dinâmicos proporcionou respostas mais rápidas, suaves e com menores erros de rastreamento, além de um esforço de controle mais bem distribuído. Entretanto, observou-se que seu desempenho depende diretamente da precisão do modelo matemático, sendo suscetível a degradações em condições próximas a singularidades geométricas ou em casos de mau condicionamento da matriz de inércia.

A análise das singularidades constituiu um ponto relevante deste estudo, demonstrando que ambos os controladores sofrem degradação de desempenho nessas regiões, embora o CTC apresente maior robustez. Verificou-se aumento do acoplamento dinâmico, torques amplificados e maior sensibilidade a perturbações externas, evidenciando a importância de se considerar tais efeitos na operação de manipuladores próximos a configurações críticas.

De forma geral, os resultados obtidos permitem concluir que a modelagem matemática do manipulador, associada às simulações computacionais, foi eficaz para avaliar o desempenho das estratégias de controle estudadas. A comparação entre os métodos permitiu identificar vantagens, limitações e condições de melhor aplicação, contribuindo para o entendimento aprofundado do comportamento dinâmico de manipuladores robóticos planares.

Por fim, como trabalhos futuros, sugere-se a simulação de trajetórias mais complexas definidas no espaço cartesiano, como movimentos em forma de semicircunferência, permitindo avaliar a resposta dos controladores diante de trajetórias mais suaves e dinâmicas. Recomenda-se também a inclusão de modelos mais realistas de atrito, como atrito viscoso, Coulomb e efeitos estáticos, a fim de aproximar o comportamento simulado das condições físicas reais. Além disso,

destaca-se a investigação de controladores robustos, como o Controle Deslizante (*Sliding Mode Control*) ou técnicas adaptativas, com o objetivo de aumentar a robustez do sistema frente a incertezas e perturbações.

REFERÊNCIAS

- ABB Robotics. **ABB IRB 6600 Industrial Robot**. 2024. Acesso em: 15 nov. 2025. Disponível em: <https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-6600>.
- Agrobot. **Agrobot E-Series**. 2025. Acesso em: 15 nov. 2025. Disponível em: <https://www.agrobot.com/e-series>.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: uma introdução com aplicações usando MATLAB**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.
- CORKE, P. **Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB**. 2. ed. Cham: Springer, 2017.
- COSTA, G. S. R. **Modelagem Matemática de um Protótipo MEARM V0.4**. 2016.
- CRAIG, J. J. **Robótica: mecânica e controle**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2013.
- DIMEAS, F.; ASHER, T.; MONTES, H. Recent advances in robotic manipulator control. **Robotics and Autonomous Systems**, v. 150, p. 104–114, 2022.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. Edição brasileira.
- Endeavor Robotics. **PackBot Robot Platform**. 2025. Acesso em: 15 nov. 2025. Disponível em: <https://www.endeavorrobotics.com/packbot>.
- IEEE Robotics and Automation Society. **IEEE Transactions on Robotics**. 2025. Acesso em: 8 nov. 2025. Disponível em: <https://www.ieee-ras.org/publications/t-ro>.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 8373: Robots and robotic devices — Vocabulary**. Geneva, 2021.
- Intuitive Surgical. **Da Vinci Surgical System**. 2025. Acesso em: 15 nov. 2025. Disponível em: <https://www.intuitive.com/en-us/products-and-services/da-vinci>.
- KHALIL, W.; DOMBRE, E. **Modeling, Identification and Control of Robots**. London: Butterworth-Heinemann, 2002.
- MATHWORKS. **MATLAB & Simulink Documentation**. Natick: The MathWorks Inc., 2024. Acesso em: 8 nov. 2025. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help>.
- MURPHY, R. **Introduction to AI Robotics**. 2. ed. Cambridge: MIT Press, 2019.
- NASA. **Mars Rover Missions: Perseverance and Curiosity**. 2025. Acesso em: 15 nov. 2025. Disponível em: <https://mars.nasa.gov/>.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 6. ed. New Jersey: Pearson, 2021.
- ORIN, D.; MCGINLEY, M. Dynamics and control of robotic manipulators. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 5, n. 2, p. 142–150, 1989.
- Robotics and Autonomous Systems Journal. 2025. Acesso em: 8 nov. 2025. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/robotics-and-autonomous-systems>.

- SICILIANO, B.; KHATIB, O. **Springer Handbook of Robotics**. 2. ed. Cham: Springer, 2016.
- SICILIANO, B. et al. **Robotics: Modelling, Planning and Control**. 2. ed. London: Springer, 2010.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **Applied Nonlinear Control**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.
- SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. **Robot Modeling and Control**. 2. ed. Hoboken: Wiley, 2020.
- SPONG, M. W.; VIDYASAGAR, M. **Robot Dynamics and Control**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2008.
- ZILL, D. G. **Advanced Engineering Mathematics**. 6. ed. Burlington: Jones & Bartlett Learning, 2011.

APÊNDICE A – MODELAGEM CINEMÁTICA E DINÂMICA

A.1 CINEMÁTICA DE VELOCIDADES

A velocidade angular do elo 1 é:

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}.$$

A velocidade linear do centro de massa do elo 1 é:

$${}^0v_{C_1} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 r_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A velocidade angular do elo 2 é:

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

A velocidade da origem do elo 2:

$${}^2v_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 L_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 L_1 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A velocidade do centro de massa do elo 2 é:

$${}^0v_{C_2} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 L_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) r_2 \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_2 L_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) r_2 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A.2 TENSOR DE INÉRCIA

O tensor de inércia geral de cada elo é:

$${}^cI = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

Transformado para o sistema da base:

$$I = {}^cI + m_i (P_{ci}^T P_{ci} I_3 - P_{ci} P_{ci}^T).$$

Tensor do elo 1:

$$I_1 = \begin{bmatrix} I_{1xx} + m_1 r_1^2 \sin^2 \theta_1 & -m_1 r_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 & 0 \\ -m_1 r_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 & I_{1yy} + m_1 r_1^2 \cos^2 \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{1zz} + m_1 r_1^2 \end{bmatrix}.$$

Tensor do elo 2:

$$I_2 = \begin{bmatrix} I_{2xx} + m_2 r_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) & -m_2 r_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -m_2 r_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) & I_{2yy} + m_2 r_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & I_{2zz} + m_2 r_2^2 \end{bmatrix}.$$

A.3 ENERGIAS

Energia cinética total:

$$H = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \right).$$

Energia potencial:

$$U = m_1 g r_1 \sin \theta_1 + m_2 g (L_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

A.4 LAGRANGIANA

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = H - U.$$

A.5 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações escalares obtidas pelo método de Euler–Lagrange são:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - 2\alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + g_1(q) = \tau_1,$$

$$(\alpha_2 + \alpha_3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \alpha_2 \ddot{\theta}_2 + \alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + g_2(q) = \tau_2,$$

onde

$$g_1(q) = m_1 g r_1 \cos \theta_1 + m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$g_2(q) = m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)).$$

A.6 FORMA MATRICIAL

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 \cos \theta_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \cos \theta_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \cos \theta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -2\alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ \alpha_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}.$$

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)].$$

APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE MOVIMENTO NO ESPAÇO DOS ESTADOS E DETERMINAÇÃO DOS GANHOS ÓTIMOS

B.1 - EQUAÇÃO DE MOVIMENTO NO ESPAÇO DE ESTADOS

A dinâmica do manipulador planar de dois graus de liberdade é dada por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (1)$$

Para obter uma representação no espaço dos estados define-se o vetor de estado

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

de forma que

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{bmatrix} = f(x, \tau). \quad (2)$$

Essa forma ainda é não linear devido a $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ e $G(q)$. Para aplicação de técnicas de controle linear (LQR/LQI), é necessária sua linearização.

B.2 - LINEARIZAÇÃO EM TORNO DO PONTO DE OPERAÇÃO

Considere um sistema não linear contínuo:

$$\dot{x} = f(x, u).$$

A expansão de Taylor de primeira ordem em torno de (x_0, u_0) produz:

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}. \quad (3)$$

Neste trabalho utiliza-se o ponto de operação:

$$q_0 = [0, 0]^\top, \quad \dot{q}_0 = [0, 0]^\top, \quad \tau_0 = [0, 0]^\top.$$

Nesse ponto:

- os termos de Coriolis avaliam-se como zero, - as derivadas do vetor gravitacional são nulas (seno), - obtém-se uma dinâmica linear equivalente a um duplo integrador por junta.

Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ M(q_0)^{-1} \end{bmatrix}.$$

A matriz de inércia e sua inversa em q_0 são:

$$M(q_0) = \begin{bmatrix} 2.6042 & 0.5625 \\ 0.5625 & 0.1875 \end{bmatrix}, \quad M(q_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.09086942 & -3.27260827 \\ -3.27260827 & 15.15115814 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.09086942 & -3.27260827 \\ -3.27260827 & 15.15115814 \end{bmatrix}.$$

B.3 - CONSTRUÇÃO DO SISTEMA AUMENTADO (LQI) PARA CONTROLE PID

Para obter um controlador PID via LQR é necessário incluir a integral do erro no estado aumentado. Neste trabalho define-se o integrador como:

$$z = \int (q - q_d) dt.$$

Para referências constantes ($q_d = 0$ na linearização):

$$\dot{z} = q.$$

O vetor de estado aumentado é:

$$X_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$A_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.09086942 & -3.27260827 \\ -3.27260827 & 15.15115814 \end{bmatrix}.$$

B.4 - PESOS UTILIZADOS

Os pesos escolhidos foram:

$$Q_{\text{aug}} = \text{diag}(100, 100, 100, 100, 10, 10),$$

$$R = \text{diag}(0.1, 0.1).$$

B.5 - GANHOS PID OBTIDOS VIA LQR (LQI)

A solução da Equação Algébrica de Riccati fornece:

$$K_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 31.6227766 & 0 & 46.5339341 & 1.3132969 & 18.4539737 & 1.8153941 \\ 0 & 31.6227766 & 1.3132969 & 40.8915438 & 1.8153941 & 10.6543950 \end{bmatrix}.$$

Particionamento:

$$K_{\text{aug}} = [K_I \ K_P \ K_D].$$

Logo:

$$K_I = \begin{bmatrix} 31.6228 & 0 \\ 0 & 31.6228 \end{bmatrix}, \quad K_P = \begin{bmatrix} 46.5339 & 1.3133 \\ 1.3133 & 40.8915 \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} 18.4540 & 1.8154 \\ 1.8154 & 10.6544 \end{bmatrix}.$$

B.6 - PROJETO LQR PARA O CONTROLADOR POR TORQUE COMPUTADO

Com o cancelamento dinâmico, a lei auxiliar satisfaz:

$$\ddot{q} = \mu.$$

Modelo linear:

$$\dot{x} = Ax + B\mu, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Aplicando LQR com pesos:

$$Q = \text{diag}(100, 100, 10, 10), \quad R = \text{diag}(0.1, 0.1),$$

obtem-se:

$$K = \begin{bmatrix} 31.6228 & 0 & 12.7768 & 0 \\ 0 & 31.6228 & 0 & 12.7768 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$\mu = -K_P(q - q_d) - K_D(\dot{q} - \dot{q}_d).$$

O torque aplicado é:

$$\tau = M(q)(\ddot{q}_d + \mu) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q).$$

B.8 - IMPLEMENTAÇÃO NO MATLAB

Todos os cálculos foram feitos com:

```
[K, P, eig_cl] = lqr(A, B, Q, R);
```

Para o PID via LQI:

```
[K_aug, P, eig_cl] = lqr(A_aug, B_aug, Q_aug, R);
K_I = K_aug(:, 1:2);
K_P = K_aug(:, 3:4);
K_D = K_aug(:, 5:6);
```

APÊNDICE C – MÉTRICAS DE DESEMPENHO

Neste apêndice apresentam-se as métricas utilizadas para avaliar o desempenho dos controladores PID e por torque computado nas simulações do manipulador de dois graus de liberdade. Todas as métricas são definidas em termos do erro de seguimento

$$e(t) = q_d(t) - q(t),$$

onde $q_d(t)$ é a trajetória desejada e $q(t)$ é a resposta da junta.

C.1 - OVERSHOOT (SOBRE-ELEVAÇÃO)

O overshoot quantifica a máxima ultrapassagem da resposta em relação ao valor desejado. Para referência de regime estacionário constante, define-se:

$$M_p = \frac{\max_{t \geq 0} (q(t)) - q_d}{q_d} \times 100\%.$$

Valores elevados de overshoot indicam comportamento oscilatório e menor amortecimento.

C.2 - IAE (INTEGRAL DO ERRO ABSOLUTO)

A métrica IAE (Integral of Absolute Error) mede o erro acumulado ao longo do tempo, penalizando tanto erros pequenos quanto persistentes:

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt.$$

Valores menores de IAE indicam melhor convergência e menor erro total ao longo da trajetória.

C.3 -TEMPO DE ACOMODAÇÃO

O tempo de acomodação quantifica a rapidez com que o sistema permanece dentro de uma banda de erro estabelecida em torno do valor desejado. Adota-se a definição clássica de banda de 2%:

$$t_s = \min \{t : |e(t')| < 0.02 |q_d|, \forall t' \geq t\}.$$

Quanto menor o tempo de acomodação, mais rápida é a resposta do sistema.

C.4 - ERRO MÁXIMO (PEAK ERROR)

Além das métricas anteriores, considera-se ainda o erro máximo, importante para avaliar desvios iniciais e comportamento transitório:

$$e_{\max} = \max_{t \in [0, T]} |e(t)|.$$

Essa métrica auxilia na comparação direta entre controladores no instante de maior desvio.

C.5 - TEMPO DE SUBIDA (RISE TIME)

O tempo de subida mede a rapidez com que a resposta do sistema vai do início da transição até atingir uma fração significativa do valor final. Para sistemas de referência em regime estacionário constante, adota-se a definição clássica:

$$t_r = t(q(t) = 0.9 q_d) - t(q(t) = 0.1 q_d),$$

isto é, o intervalo de tempo necessário para que a resposta evolua de 10% para 90% do valor final desejado.

Quando a trajetória desejada é positiva, utiliza-se:

$$t_r = \min\{t : q(t) \geq 0.9 q_d\} - \min\{t : q(t) \geq 0.1 q_d\}.$$

Valores menores de tempo de subida indicam respostas mais rápidas.