



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

EXPLORANDO O ACOPLAMENTO ULTRAFORTE NO MODELO DE RABI
QUÂNTICO PARA A CONVERSÃO DE FÓTONS

Enzzo Perez

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos
Prof. Dr. Daniel Zini Rossatto

Rio Claro (SP)

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

ENZZO PEREZ

EXPLORANDO O ACOPLAMENTO ULTRAFORTE NO MODELO DE
RABI QUÂNTICO PARA A CONVERSÃO DE FÓTONS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de bacharel em Física.

Rio Claro (SP)

2024

P438e Perez, Enzzo
Explorando o acoplamento ultraforte no modelo de Rabi quântico para a conversão de fótons / Enzzo Perez. -- Rio Claro, 2024
56 p. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos
Coorientador: Daniel Zini Rossatto

1. Óptica Quântica. 2. Modelo de Rabi quântico. 3. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 4. Acoplamento ultraforte. I. Título.

Enzzo Perez

Explorando o acoplamento ultraforte no modelo de Rabi quântico para a conversão de fótons

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de bacharel em Física.

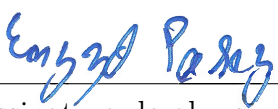
Comissão Examinadora

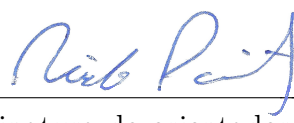
Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Prof. Dr. Daniel Zini Rossatto

Prof. Dr. Lucas Fugikawa-Santos

Rio Claro, 21 de novembro de 2024.


Assinatura do aluno


Assinatura do orientador

*Dedico esse trabalho e o meu diploma inteiramente ao meu pai Cecilio e a minha tia
Andreia*

AGRADECIMENTOS

Meu pai Cecilio Perez Júnior e minha tia Andreia Ponce Perez: sem a ajuda dessas duas pessoas eu jamais teria entrado no curso de física e por eles terei uma eterna gratidão.

Agradeço aos meus irmãos, Enricco e Victor, duas pessoas geniais que tive a honra de conhecer nesta vida.

Agradeço também ao todo restante da minha família, dentre eles minha madrastra Danusa e minha Vó Carmen, que me ajudaram sempre independentemente de meus diagnósticos físicos ou mentais ao longo da minha vida e graduação.

Agradeço a minha namorada, Renata, que assim como meus amigos com os quais convivo diariamente fazem questão de estar ao meu lado independente de meus erros: Gustavo, Catarina, Giovana e Pedro Mourão.

Agradeço também a todos os meus colegas, que aceitaram participar no ano de 2023 do Centro Acadêmico ao meu lado, espero que no restante da minha vida eu nunca mais tente uma loucura tal qual aquela. Por mais que tenha sido um trabalho muito prazeroso ao longo prazo.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que também tive contato ao longo da minha graduação, por mais que sejam muitos para listarem aqui, guardarei sempre suas caras e nomes para o resto da vida.

Agradeço também ao professor Daniel, em um mundo acadêmico muitas vezes cruel e repleto de ego e arrogância, eu me considero muito sortudo por ter sido orientado tanto tempo por uma pessoa tão sábia e paciente.

Finalmente, tenho que agradecer à FAPESP, a CNPq e a Unesp Reitoria por acreditarem bancando as minhas pesquisas de Iniciação Científica ao longo da minha graduação.

O leitor também tem o meu agradecimento de antemão pela sua atenção.

processo nº 2023/09171-4, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

processo nº 7369, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

"Eu não quero levar essas coisas a sério, acho que deveríamos apenas... nos divertir imaginando isso, sem nos preocupar... não há professor que vai te fazer uma pergunta no final, caso contrário, é só um assunto horrível."

Richard Feynman (1983)

RESUMO

Durante as duas últimas décadas, um número crescente de experimentos vem demonstrando o alcance de uma interação radiação-matéria cada vez mais intensa, disponibilizando novas fronteiras para o estudo dos regimes de acoplamento ultraforte e extremamente forte em diversas plataformas quânticas. O presente projeto de pesquisa teve como objetivo investigar teoricamente o espectro de emissão do modelo de Rabi quântico nesses regimes de acoplamento, explorando a potencialidade de empregar esse sistema como um conversor de fótons. Para analisar o sistema, foi utilizado o formalismo microscópico da equação mestra e programação em linguagem *Python*, principalmente o pacote *QuTiP* (Quantum Toolbox in Python), um pacote de *software open-source* para a simulação da dinâmica de sistemas quânticos abertos. De acordo com a análise desse sistema, percebe-se que, quando observamos os comportamentos dos autoestados do sistema do modelo de Rabi no acoplamento ultraforte, acontece um cruzamento entre níveis excitados do sistema, o que permite que um fóton absorvido pelo sistema seja convertido em três, os quais têm em geral frequências distintas e são convertidos em cascata. Investigamos aqui o espectro dessas emissões a partir das taxas de transição entre os autoestados, transições as quais são induzidas pelo acoplamento da cavidade/ressonador com seu reservatório. Analisamos a dependência não só com a variação da constante de acoplamento, mas também com relação à dessintonia entre as frequências da cavidade (ω_c) e do átomo de dois níveis (ω_q). Obtemos que a conversão de fótons se torna o processo predominante para certo intervalo de acoplamentos ultraforte e extremamente forte somente quando átomo e cavidade são não ressonantes e desde que $\omega_q > \omega_c$.

Palavras-chave: Óptica Quântica; Modelo de Rabi quântico; Eletrodinâmica quântica de cavidades; Acoplamento ultraforte.

ABSTRACT

Over the past two decades, a growing number of experiments have demonstrated increasingly intense radiation-matter interactions, unveiling new frontiers for studying the ultra-strong and extremely strong coupling regimes across various quantum platforms. This research project aimed to theoretically investigate the emission spectrum of the quantum Rabi model in these coupling regimes, exploring the potential of employing this system as a photon converter. To analyze the system, we used the microscopic formalism of the master equation and programming in *Python*, mainly the *QuTiP* (Quantum Toolbox in Python) package, an open-source software for simulating the dynamics of open quantum systems. According to the analysis of this system, it is observed that when examining the behaviors of the eigenstates of the Rabi model in the ultra-strong coupling regime, a crossing occurs between excited states of the system, allowing an absorbed photon to be converted into three photons, generally of distinct frequencies and converted in a cascade. Here, we investigate the spectrum of these emissions from the transition rates between eigenstates, with transitions induced by the coupling of the cavity/resonator with its reservoir. We analyze not only the dependence on the variation of the coupling constant but also the detuning between the frequencies of the cavity (ω_c) and the two-level atom (ω_q). We find that photon conversion becomes the predominant process within a certain range of ultra-strong and extremely strong couplings only when the atom and cavity are non-resonant, with $\omega_q > \omega_c$.

Keywords: Quantum Optics; Cavity-QED; Quantum Rabi model; Ultrastrong coupling;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – (a) Diagrama de níveis de energia do sistema qubit-ressonador em função da razão entre o acoplamento qubit-ressonador e sua energia livre ($\hbar = 1$). As setas indicam as transições permitidas e não permitidas por dipolo que podem ser induzidas através de um campo de prova sobre o sistema. (b) Para $g_0 < g_c \approx 0.5$, induzindo o sistema de $ 0\rangle$ para $ 2\rangle$, a única possibilidade é o sistema relaxar de $ 2\rangle$ para $ 0\rangle$ emitindo um fóton com mesma frequência do fótons absorvido inicialmente. Para $g_0 > g_c$, induzindo a transição $ 0\rangle \rightarrow 2\rangle$, ou (c) o sistema reemite um fóton com a mesma frequência do fóton absorvido ou (d) o sistema emite três fótons em cascata, os quais têm em geral frequências distintas.	14
Figura 2 – Esquematização simples do átomo de dois níveis.	22
Figura 3 – Evolução temporal para o número médio de fótons e para a probabilidade de encontrar o átomo no estado excitado no modelo do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, considerando dois estados iniciais $ e, 0\rangle$ (painel superior) e $ g, 1\rangle$ (painel inferior).	25
Figura 4 – Evolução temporal dos mesmos valores esperados considerados na Figura 3, porém considerando efeitos dissipativos.	26
Figura 5 – Esboço de um sistema eletrodinâmico quântico de cavidade com um único átomo de dois níveis (qubit). Retirado a partir do artigo <i>Ultrastrong coupling between light and matter</i> (MITRA; ZUPA; GARCÍA, 2018).	27
Figura 6 – Espectro de energia do modelo de Rabi ressonante em função de $\eta = g_0/\omega_c$. Excitando a transição $ 0\rangle \rightarrow 2\rangle$, as setas indicam os possíveis processos de emissões de fótons pelo sistema quando $\eta < \eta_c$ e $\eta > \eta_c$, sendo $\eta_c \approx 0.4$.	32
Figura 7 – Frequências de transição em função de η .	33
Figura 8 – Taxas de transição Γ_c^{jk}/κ em função de η .	33
Figura 9 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi ressonante ($\omega_q = \omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, Δ_{kj}/κ , em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η .	34
Figura 10 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi não ressonante ($\omega_q = 0.5\omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, Δ_{kj}/κ , em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η .	35

Figura 11 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi não ressonante ($\omega_q = 1.5\omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, Δ_{kj}/κ , em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η 35

Figura 12 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi não ressonante ($\omega_q = 1.99\omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, Δ_{kj}/κ , em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η 36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MECÂNICA QUÂNTICA PARA INICIANTEs	15
2.1	A função de onda	15
2.2	A equação de Schrödinger	16
2.3	Normalização e o princípio da incerteza	16
2.4	Ferramentas para Mecânica quântica	17
2.4.1	O espaço de Hilbert	17
2.4.2	Notação de Dirac	18
2.4.3	Operadores lineares	19
3	ÓPTICA QUÂNTICA	21
3.1	Visão geral da óptica quântica	21
3.2	O átomo de dois níveis	21
3.3	A frequência de Rabi	22
3.4	Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	24
3.5	A aproximação de onda girante e o modelo de Rabi quântico	25
3.6	Eletrodinâmica Quântica de Cavidades	27
3.7	Regra de seleção para transição de elétrons	28
4	SIMULAÇÃO DO SISTEMA	29
4.1	QuTiP	29
5	EXPLORANDO O MODELO DE RABI QUÂNTICO	30
5.1	O regime ultraforte	30
5.2	A dinâmica do modelo de Rabi quântico	30
5.2.1	O problema da utilização do Gauge de Dipolo	31
5.3	O Modelo de Rabi no acoplamento ultraforte	31
5.3.1	Espectro de energia / Decaimentos	31
5.3.2	Frequências de transição	32
5.3.3	Taxas de transição	32
5.4	O Modelo de Rabi não ressonante no acoplamento ultraforte	34
6	CONCLUSÃO	37
	REFERÊNCIAS	38

APÊNDICES	43
APÊNDICE A – CÁLCULO DAS DERIVADAS DAS AMPLITUDES $c_1(t)$ E $c_2(t)$	44
APÊNDICE B – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO DA EVOLUÇÃO TEMPORAL DA HAMILTONIANA DE JAYNES CUMMINGS SEM EFEITOS DISSIPATIVOS	45
APÊNDICE C – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO DA EVOLUÇÃO TEMPORAL DA HAMILTONIANA DE JAYNES CUMMINGS CONSIDERANDO OS EFEITOS DISSIPATIVOS	47
APÊNDICE D – CÓDIGO DA COMPARAÇÃO ENTRE O ESPECTRO DE ENERGIA, A FREQUÊNCIA DOS FÓTONS EMITIDOS E AS TAXAS DE TRANSIÇÃO	49

1 INTRODUÇÃO

Desde que Max Planck propôs a quantização da radiação, abrindo então um campo extremamente essencial e denso da física, a física quântica vem sendo um tema de estudo presente hodiernamente em quase todas as áreas de pesquisa da física, ela se torna mais uma vez indispensável para o estudo de partículas fotônicas e para as crescentes tecnologias computacionais. Nessas, a óptica quântica e os sistemas de cavidade eletrodinâmicos quânticos são considerados vertentes de pesquisa extremamente importantes para a computação e informação quântica, e consequentemente recebem cada vez mais atenção no mundo acadêmico.

Já no campo da interação radiação-matéria o acesso experimental ao chamado regime de acoplamento fraco (quando a intensidade do acoplamento é dominado pelas taxas de dissipação presentes no sistema) já permitiu grandes avanços no ramo de tecnologias quânticas como, por exemplo, na construção de fontes de fótons únicos (SALTER *et al.*, 2010; SOMASCHI *et al.*, 2016; SENELLART; SOLOMON; WHITE, 2017; TOMM *et al.*, 2021). Já com a obtenção do regime de acoplamento forte, onde a intensidade do acoplamento radiação-matéria ultrapassa as perdas pelo sistema, foi possível observar a troca coerente de energia entre radiação e matéria (oscilações de Rabi), o que propiciou o início do desenvolvimento da segunda geração de tecnologias quânticas (BULUTA; ASHHAB; NORI, 2011; GEORGESCU; NORI, 2012; JAEGER, 2018). Nas últimas décadas, o regime de acoplamento ultraforte (energia de interação entre radiação e matéria agora se torna uma fração substancial da energia livre do sistema ou mesmo a ultrapassa – *deep strong coupling regime*) evoluiu de uma proposta teórica para uma realidade experimental, sendo alcançado em diferentes plataformas quânticas (FORN-DIAZ *et al.*, 2019; KOCKUM *et al.*, 2019; MUELLER *et al.*, 2020). Nesse regime surgem novos e contraintuitivos fenômenos físicos, alguns com potenciais aplicações em ciência da informação quântica (FORN-DIAZ *et al.*, 2019; KOCKUM *et al.*, 2019). Em especial, no contexto de sistemas de dois níveis (qubit) interagindo com radiação confinada em ressonadores (modelo de Rabi quântico) (XIE *et al.*, 2017; ROSSATTO *et al.*, 2017a), verifica-se uma mudança drástica no espectro de emissão do sistema quando este se adentra ao regime de acoplamento ultraforte (RIDOLFO *et al.*, 2012; RIDOLFO; SAVASTA; HARTMANN, 2013; SANCHEZ-BURILLO *et al.*, 2014; BOITÉ *et al.*, 2016; YOSHIHARA *et al.*, 2017; MAGAZZÙ; GRIFONI, 2019; SALMON *et al.*, 2022a; MAGAZZÙ; FORN-DÍAZ; GRIFONI, 2021).

A presente proposta de pesquisa se enquadra nesse último contexto, visando explorar aplicações decorrentes das características do espectro de emissão do modelo de Rabi quântico no regime de acoplamento ultraforte. Em particular, dadas as regras de seleção para a transição induzida por dipolo entre os autoestados do sistema a partir de

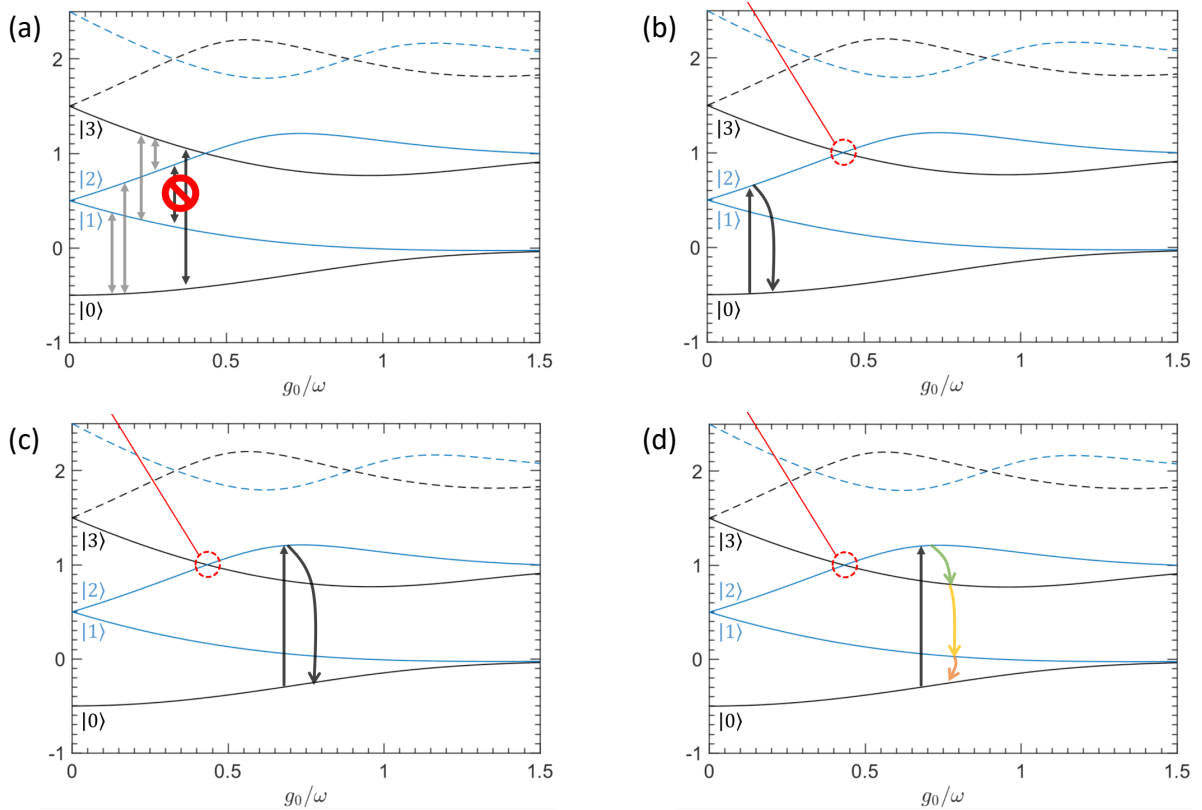


Figura 1 – (a) Diagrama de níveis de energia do sistema qubit-ressonador em função da razão entre o acoplamento qubit-ressonador e sua energia livre ($\hbar = 1$). As setas indicam as transições permitidas e não permitidas por dipolo que podem ser induzidas através de um campo de prova sobre o sistema. (b) Para $g_0 < g_c \approx 0.5$, induzindo o sistema de $|0\rangle$ para $|2\rangle$, a única possibilidade é o sistema relaxar de $|2\rangle$ para $|0\rangle$ emitindo um fóton com mesma frequência do fóton absorvido inicialmente. Para $g_0 > g_c$, induzindo a transição $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$, ou (c) o sistema reemite um fóton com a mesma frequência do fóton absorvido ou (d) o sistema emite três fótons em cascata, os quais têm em geral frequências distintas.

um campo de prova externo e dado g_c , um valor crítico de acoplamento qubit-ressonador (g_0) para o qual há cruzamento entre os níveis (autoestados) excitados $|2\rangle$ e $|3\rangle$ do sistema [Fig. 1(a)], tem-se que, considerando o sistema inicialmente no estado de mais baixa energia ($|0\rangle$) e estimulando a transição $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, o sistema sempre emite um fóton com a mesma frequência do fóton absorvido quando $g_0 < g_c$ [Fig. 1(b)]. Já para $g_0 > g_c$, pode haver dois processos distintos: ou ocorre o mesmo efeito anterior [Fig. 1(c)] ou o sistema emite três fótons em cascata, os quais têm em geral frequências distintas [Fig. 1(d)]. Nesse último caso, um processo será dominante sobre o outro não só dependendo do valor do acoplamento qubit-ressonador, mas também de como o ressonador se acopla com o meio ambiente (reservatório térmico).

2 MECÂNICA QUÂNTICA PARA INICIANTE

O nascimento da física quântica é datado a partir de uma apresentação realizada por Max Planck chamada “Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal”. Por mais que seu artigo inicialmente não recebeu muita atenção, diversos caminhos na física convergiam para seus resultados, principalmente devido à falta de explicações que a física clássica era incapaz de fornecer. Eventualmente, a física quântica se tornou indispensável para qualquer um que quisesse entender mais profundamente os fenômenos da termodinâmica, mecânica estatística, eletromagnetismo, física de partículas e muitas outras subdivisões de extrema importância da física.

Neste capítulo, entraremos em contato com algumas das ideias iniciais da mecânica quântica, para inteirar brevemente o leitor na teoria essencial que sustenta este trabalho. Além do mais, entraremos também em contato com alguns conceitos de álgebra linear que não serão explicados. Se o leitor ainda não entrou em contato com estes conceitos, uma leitura sobre os conceitos iniciais de álgebra linear são recomendados. Dentre ótimos cursos de álgebra linear é sugerido o livro *Álgebra Linear. 3. ed.* (BOLDRINI *et al.*, 1980), por José Luiz Boldrini, Sueli Costa, Vera Figueiredo e Henry Wetzler, e o curso gratuito disponível no *Youtube*, *Essence of linear algebra* (3BLUE1BROWN, 2016), realizado pelo canal *3Blue1Brown*.

2.1 A FUNÇÃO DE ONDA

Normalmente, quando calculamos o movimento de um corpo na mecânica clássica, imaginamos um corpo com um certo valor de massa se deslocando em um determinado eixo. Isto normalmente nos dá uma equação de movimento caracterizada pelas variáveis determinadas pela direção e deslocamento do corpo, como por exemplo a equação sugerida pela Segunda Lei de Newton, $F(x, t) = ma = m \frac{dx}{dt}$. Assim se precisamos encontrar um valor futuro da posição do corpo que estamos calculando ($x(t)$), basta analisar então as condições iniciais e separar as variáveis da equação para obtermos uma equação que descreve, ao longo do tempo, o movimento do corpo estudado, resultando como, por exemplo na equação de movimento clássico $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ quando a é uma constante.

Na mecânica quântica ainda temos a mesma abordagem, contudo ela é abordada de maneira probabilística a partir da função de onda $\Psi(x, t)$ que descreve, de maneira similar às equações da mecânica clássica, todas as informações que podem ser obtidas sobre a partícula estudada.

2.2 A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A equação que descreve a subsequente evolução da equação de onda $\Psi(x, t)$ é a equação de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

em que m representa a massa da partícula estudada, $V(x, t)$ a função que retrata o potencial que interage com o sistema e $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π , ([GRIFFITHS; FREITAS, 2011](#))

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054572 \times 10^{-34} Js. \quad (2.2)$$

Assim, quando resolvemos a equação 2.1 em uma situação-problema, iremos obter a equação de onda $\Psi(x, t)$ para nosso respectivo contexto.

2.3 NORMALIZAÇÃO E O PRINCÍPIO DA INCERTEZA

Diferente da mecânica clássica que já conhecemos, quando estudamos partículas na área da mecânica quântica, elas terão uma propriedade incerta, se comportando em alguns momentos como onda e em outros como uma partícula. Então como uma única equação consegue descrever as duas propriedades de uma vez só? Isso pode ser explicado pela interpretação estatística fornecida ao analisarmos a base da mecânica quântica, no livro *Mecânica Quântica. 2. ed.* (pág. 14) ([GRIFFITHS; FREITAS, 2011](#)), David Griffiths nos fornece um excelente exemplo de como podemos analisar este problema:

Imagine que você está segurando a ponta de uma corda muito longa e produz uma onda, ao chacoalhá-la para cima e para baixo ritmicamente. Se alguém perguntar "onde precisamente está a onda?" você vai achar que essa pessoa é meio louca: a onda não está precisamente em lugar nenhum. Ela está distribuída por cerca de 45 m ou mais. Mas se essa pessoa perguntar qual é o comprimento de onda, você poderia dar uma resposta razoável: algo em torno de 7 m. Por outro lado, se você der um safanão na corda, terá um pulso relativamente estreito viajando pela corda. Nesse caso, a primeira questão (onde precisamente está a onda?) faz sentido, e a segunda (qual é o comprimento de onda?) parece sem sentido; já que o pulso não é sequer vagamente periódico, como você poderia determinar um comprimento de onda para ele? Claro que você pode esboçar casos intermediários nos quais a onda está razoavelmente bem localizada e o comprimento dela está razoavelmente bem definido, mas há um dilema inevitável aqui: quanto mais precisa é a posição da onda, menos preciso é o comprimento de onda e vice-versa.

Este exemplo nos revela uma verdade indiscutível que a mecânica quântica nos apresenta, tudo que ela nos descreve são resultados estatísticos, nada é de fato

especificamente determinado. Com isso, nota-se que mesmo quando temos a equação de onda, a mesma só pode determinar com exatidão a posição da partícula ou o seu momento.

Logo, como o exemplo da corda, tendo em mente que a partícula age de uma maneira extremamente semelhante, temos uma equação que estabelece uma base para as interpretações estatísticas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (2.3)$$

O processo que a equação (2.3) retrata é o de normalização da função de onda, nota-se que o que elas nos diz é que quando estamos lidando com uma função de onda, ela diz que se uma partícula existe em um certo espaço, certamente esta partícula está em algum lugar (dados os limites infinitos da integral)! Além de ser uma equação muito útil, ela certamente estabelece um chão para a interpretação estatística da mecânica quântica.

2.4 FERRAMENTAS PARA MECÂNICA QUÂNTICA

2.4.1 O espaço de Hilbert

Diferente das teorias expressas até agora, a notação de Dirac ou o espaço de Hilbert se tratam mais de ferramentas que irão nos auxiliar matematicamente, diferente das teorias expressas até agora, contudo, explicar tais conceitos se torna essencial para nossa pesquisa uma vez que seu uso é indispensável nos cálculos feitos na mecânica quântica.

Primeiramente, nota-se que a equação (2.3) exibida no subcapítulo anterior ainda deve ser reformulada.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(r, t)|^2 d^3r = 1. \quad (2.4)$$

Vemos então que a equação (2.4) retrata uma função de onda em três dimensões em função do tempo dentro de uma integral que abrange toda a região possível do sistema. Consequentemente teremos uma partícula que se encontra em um determinado espaço vetorial (BOLDRINI *et al.*, 1980). Isso pode se tornar um problema! Na mecânica quântica, quando estamos descrevendo uma partícula, estamos definindo um estado quântico, logo nesta equação temos uma combinação linear de todos os possíveis resultados que podem ser medidos (poderíamos supor, por exemplo, que é possível decompor as medidas de energia de Ψ em $\Psi = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3$, sendo $E_{1,2,3}$ as medidas de energia possíveis e $c_{1,2,3}$ seus respectivos coeficientes de probabilidade).

O problema se encontra quando testamos os limites dessa superposição: e se o número de possíveis medidas for infinito? Em maioria das vezes quando temos uma soma de termos infinitos, os mesmos podem então convergir para um resultado fora do nosso

espaço vetorial (da mesma maneira que uma soma infinita de polinomiais pode convergir pela série de Taylor em um resultado como e^x , que não é polinomial e dessa maneira é fora do espaço vetorial dos termos somados) (GUIDORIZZI, 2001), uma comparação teórica dessa situação seria dizer que se um dia o leitor juntasse um número infinito de moedas ele teria então um pedaço de bolo.

Para impedir esse erro, o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é definido como um espaço vetorial, que com um produto interno, é capaz de se originar uma métrica para o espaço estudado (logo, não tangenciando para fora do espaço estabelecido).

2.4.2 Notação de Dirac

A notação de Dirac se trata de uma ferramenta para definirmos matrizes e subsequentemente, vetores mais facilmente. Primeiramente temos a utilização de *kets*, representados pelo símbolo $|\rangle$, que representam uma matriz vertical, ou em outras palavras um vetor coluna, assim como temos a utilização de *bras*, representados pelo símbolo $\langle|$, que por sua vez representam matrizes horizontais, ou em outras palavras uma transposta conjugada do vetor coluna (BOLDRINI *et al.*, 1980), logo podemos descrever o estado quântico agora como $|\Psi\rangle$.

Essas vetores fazem parte do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e similarmente aos vetores do espaço euclidiano, estes também estão sujeitos a operações de somas e multiplicações por escalares, tendo propriedades de comutatividade, associatividade e distributiva. Supondo que os *kets* $\{|\Psi\rangle, |\phi\rangle, |\varphi\rangle\} \in \mathcal{H}$ e que as constantes $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$ temos que (pág. 17)(FRANÇA, 2022):

$$|\Psi\rangle + |\phi\rangle = |\varphi\rangle, \quad (2.5)$$

$$\alpha |\Psi\rangle = |\varphi\rangle, \quad (2.6)$$

$$|\Psi\rangle + |\phi\rangle = |\phi\rangle + |\Psi\rangle, \quad (2.7)$$

$$|\Psi\rangle + (|\phi\rangle + |\varphi\rangle) = (|\Psi\rangle + |\phi\rangle) + |\varphi\rangle, \quad (2.8)$$

$$\alpha(\beta |\Psi\rangle) = (\alpha\beta) |\Psi\rangle = \alpha |\Psi\rangle \beta, \quad (2.9)$$

$$\alpha(|\Psi\rangle + |\phi\rangle) = \alpha |\Psi\rangle + \alpha |\phi\rangle, \quad (2.10)$$

$$|0\rangle = 0 |\Psi\rangle. \quad (2.11)$$

Nota-se também que o espaço $\mathcal{H}$ é um espaço dual, ou seja, para todo *ket* existe um *bra* (BOLDRINI *et al.*, 1980). Dessa maneira, se também temos uma operação de produto escalar entre um ket e um bra, o resultado é um número complexo, resultado da operação *braket* (por exemplo $\langle\Psi|\Psi\rangle$). Onde podemos transformar um ket em um bra se calcularmos o seu complexo conjugado:

$$(\alpha |\Psi\rangle)^\dagger = \alpha^* \langle\Psi|. \quad (2.12)$$

Onde temos também, por exemplo, de acordo com as propriedades dos kets e bras mencionadas anteriormente:

$$\langle\Psi|\phi\rangle = \langle\phi|\Psi\rangle, \quad (2.13)$$

$$\langle\Psi|\alpha\phi + \beta\varphi\rangle = \alpha\langle\Psi|\phi\rangle + \beta\langle\Psi|\varphi\rangle, \quad (2.14)$$

$$\langle\alpha\Psi + \beta\phi|\varphi\rangle = \alpha^*\langle\varphi|\Psi\rangle + \beta^*\langle\varphi|\phi\rangle. \quad (2.15)$$

2.4.3 Operadores lineares

Um operador linear $\hat{A}$ é uma função que tem como objetivo transformar vetores em outros vetores deste mesmo espaço. Em outras palavras, um operador linear $\hat{A}$ associa cada ket $|\Psi\rangle \in \mathcal{E}$ com um outro ket $|\Psi'\rangle \in \mathcal{E}$ (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1991).

Assim, notam-se nesses operadores as propriedades de linearidade:

$$\hat{A}(\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle) = \alpha \hat{A} |\psi_1\rangle + \beta \hat{A} |\psi_2\rangle, \quad (2.16)$$

onde nota-se que os operadores operam pela esquerda do ket. Percebe-se também que um operador pode ser hermitiano, significando que se calcularmos a sua transposta conjugada, (cuja a operação pode ser também exemplificada com o símbolo $\dagger$, elevado ao operador) ainda teremos exatamente o mesmo operador com os mesmos valores:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger. \quad (2.17)$$

Ressalta-se também a sua propriedade comutativa, pois se temos um produto de dois operadores como em (2.18), temos que nos atentar a ordem em que ambos se

operam no ket estudado, nesse caso temos que $\hat{B}$ opera no ket $|\Psi\rangle$, resultando em outro ket, e este por sua vez interage com o operador $\hat{A}$.

$$(\hat{A}\hat{B})|\Psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\Psi\rangle). \quad (2.18)$$

Nota-se a importância desta ordem justamente pelo comutador dos operadores, já que

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.19)$$

3 ÓPTICA QUÂNTICA

3.1 VISÃO GERAL DA ÓPTICA QUÂNTICA

A óptica quântica é um ramo da física que aplica a mecânica quântica aos fenômenos que envolvem a luz e sua interação com a matéria. Em particular, a eletrodinâmica quântica de cavidades estuda a interação da luz confinada em uma cavidade/ressonador com átomos. Podemos caracterizar as respostas dos átomos após a interação com a luz? O que acontece com a luz que deixa a cavidade? E o que acontece com a luz que é espalhada a partir dos átomos dentro da câmara? Dentre o gama de assuntos que existe nessa divisão da física, estas são perguntas que normalmente aparecem nesse ramo de pesquisa de acordo com o sistema estudado.

Para responder tais perguntas temos que também escolher com que modelo iremos estudar os comportamentos do sistema e da luz. Poderíamos escolher o modelo clássico para estudar os átomos como um oscilador clássico (Dipolo de Hertz) ([IEEE Journals Magazine, 2024](#)) onde temos uma luz equivalente a uma onda clássica como vista em um curso de eletromagnetismo por exemplo, mas isso não seria ideal para os nossos estudos porque um campo clássico não consegue nos descrever radiação de corpo negro ou efeitos não-lineares no átomo; Poderíamos então ter o modelo semiclássico de um átomo quantizado (que é classificado pelos níveis/estados internos quantizados do átomo) interagindo com a mesma luz no modelo clássico dito previamente, mas isso também não é ideal pois a descrição semiclássica não é capaz de descrever campos de luz não-clássicos; Utilizaremos então um modelo quântico, tendo um átomo quantizado interagindo com um campo de luz quantizado, isso nos dará uma descrição completa de uma luz encarada com a mecânica quântica interagindo com um átomo também descrito pela mecânica quântica.

Este capítulo também é necessário por uma segunda razão: traçar as origens do modelo de Rabi quântico, jogando luz também em seu modelo antecessor sendo este o de Jaynes-Cummings, que é também de grande importância para nossa pesquisa.

3.2 O ÁTOMO DE DOIS NÍVEIS

Tendo em mente que futuramente neste trabalho iremos estudar o hamiltoniano de Rabi quântico extensivamente, é importante mencionar que nesse sistema o campo de luz interage com um átomo de dois níveis. Primeiramente, nota-se que já que temos um átomo composto por níveis de energia (quantizado), temos então um átomo que tem apenas os primeiros dois níveis iniciais de energia $|1\rangle; |2\rangle$ com energias $E_1 = \hbar\omega_1; E_2 = \hbar\omega_2$. Isso pode ser observado na esquematização do átomo encontrado na Figura 2:

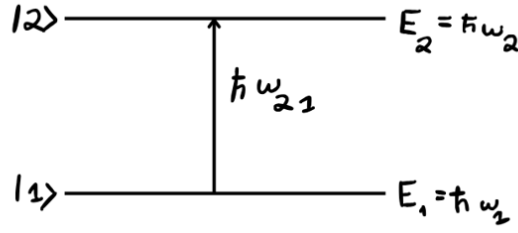


Figura 2 – Esquemática simples do átomo de dois níveis.

Também temos (exemplificado na Figura 2) que para excitar o nível atômico, é necessário superar a energia $E = \hbar\omega_{12}$, onde a frequência pode ser determinada por uma fórmula simples exibida em (3.1), onde n é o nível inicial e k o final,

$$w_{nk} = \frac{E_n - E_k}{\hbar}. \quad (3.1)$$

Supondo que emitimos um campo de luz clássico nesse átomo agora determinado (onde teremos então um modelo semiclássico do sistema), teremos o seguinte hamiltoniano que descreve a interação luz-átomo (3.2) (SCULLY; ZUBAIRY, 1997) :

$$\hat{H}_I = \hat{H}_0 - \vec{d} \cdot \vec{E}(t), \quad (3.2)$$

que podemos separar (3.2) em duas partes: a energia da hamiltoniana atômica $\hat{H}_0$ e o termo do campo da interação luz-átomo $\vec{d} \cdot \vec{E}(t)$ (na aproximação de dipolo clássico de um campo). No último termo teremos então d que representa o momento dipolar clássico em um campo elétrico

$$\vec{d} = q\vec{r}, \quad (3.3)$$

e $\vec{E}(t)$ representa o campo clássico da interação em (3.4):

$$\vec{E}(t) = \vec{\varepsilon} E_0 \cos(wt), \quad (3.4)$$

onde temos que $\vec{\varepsilon}$ é um vetor de polarização, E_0 a amplitude do campo estudado e w a frequência do campo.

3.3 A FREQUÊNCIA DE RABI

Agora, vamos começar a emissão desse campo de luz no átomo de dois níveis, qual é o resultado? Bom, para observarmos a mudança do sistema ao longo do tempo, precisamos fazer uma expansão geral da função de onda, no caso então do átomo de dois níveis, a base é composta simplesmente pelos primeiros dois estados

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-iw_1t}|1\rangle + c_2(t)e^{-iw_2t}|2\rangle. \quad (3.5)$$

Já que a equação (3.5) pode ser escrita dessa maneira pois a equação de onda pode ser escrita através da superposição dos estados de energia $|n\rangle$, como pode ser visto a seguir:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)e^{\frac{-iE_n}{\hbar}}|n\rangle, \quad (3.6)$$

onde $c_n(t)$ representa a amplitude de cada nível representado pelo sistema. Logo, para obtermos o comportamento do átomo, assim como a amplitude desses níveis variando sobre o tempo em (3.5), precisamos encontrar sua variável derivada em função do tempo, para isso devemos pegar nosso $|\Psi(t)\rangle$ e substituí-lo na equação de Schrödinger dependente do tempo (A.1) (assim como nosso hamiltoniano definido anteriormente). Como resultado final, teremos as soluções (3.7) e (3.8) (o cálculo realizado detalhadamente, pode ser analisado no Apêndice A)

$$\dot{c}_1(t) = i\frac{d_{12}^\varepsilon E_0}{\hbar}e^{-iw_2t}\cos(wt)c_2(t), \quad (3.7)$$

$$\dot{c}_2(t) = i\frac{d_{12}^\varepsilon E_0}{\hbar}e^{+iw_2t}\cos(wt)c_1(t), \quad (3.8)$$

$$d_{12}^\varepsilon = |1\rangle\vec{d}\cdot\vec{\varepsilon}\langle 2|, \quad (3.9)$$

onde o termo d_{12}^ε é o elemento de matriz de dipolo que nos diz o quão forte é o acoplamento entre os dois estados. Em outras palavras, ele diz qual é o valor esperado do operador de dipolo projetado sob o vetor de polarização do nosso campo de luz, como definido em (3.9). Finalmente, nota-se a repetição do termo $\frac{d_{12}^\varepsilon E_0}{\hbar}$, que além das equações (3.7) e (3.8), é repetido além de diversas outras equações muito importantes, dessa maneira vamos transformar este termo em uma nova variável Ω_0 chamada de "frequência de Rabi", definida por

$$\Omega_0 = \frac{d_{12}^\varepsilon E_0}{\hbar}. \quad (3.10)$$

Logo, podemos substituir a variável da equação (3.10), nas equações (3.7) e (3.8), substituindo também o termo $\cos(wt)$ de acordo com a fórmula de Euler para escrevê-lo de uma forma exponencial, dada pela igualdade

$$\cos(wt) = \frac{1}{2}(e^{iwt} + e^{-iwt}).$$

Onde temos então como resultado final

$$\dot{c}_1(t) = i\frac{\Omega_0}{2}(e^{i(w-w_{21})t} + e^{-i(w+w_{21})t})c_2(t), \quad (3.11)$$

$$\dot{c}_2(t) = i\frac{\Omega_0}{2}(e^{i(w-w_{21})t} + e^{-i(w+w_{21})t})c_1(t), \quad (3.12)$$

que descrevem então a taxa com a qual os estados oscilam quando ligamos um campo de luz no modelo semiclássico.

3.4 HAMILTONIANO DE JAYNES-CUMMINGS

Agora, vamos estudar o caso de um único modo de campo de radiação eletromagnética interagindo com um átomo quantizado impondo uma aproximação de onda girante (que será definida mais detalhadamente na seção 3.5). O hamiltoniano desse modelo ressonante ($\hbar = 1$) é (JAYNES; CUMMINGS, 1963):

$$H_{JC} = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_{21}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hbar g_0(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (3.13)$$

sendo ω a frequência do modo do ressonador e também da transição atômica, g_0 o acoplamento entre átomo e ressonador (que será explorado mais detalhadamente na próxima seção), a e $a^\dagger$, respectivamente, o operador aniquilação e o operador criação do modo do ressonador, enquanto σ_- e σ_+ sendo os operadores abaixamento e levantamento atômico, com $\sigma_z = \sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+$. Percebe-se ainda na equação (3.13) que temos um termo em que temos uma excitação de nível a custo de um fóton ($a\sigma_+$) e uma reemissão de um fóton com a diminuição de um nível atômico ($a^\dagger\sigma_-$). Nota-se, além do mais, que esta equação é composta por três termos que descrevem os sistemas que compõem essa imagem geral. Estas podem ser decompostas no hamiltoniano de interação do átomo $\hbar\omega_{21}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$, o hamiltoniano do campo de radiação eletromagnética $\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ e o hamiltoniano de interação átomo-campo $\hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma} + \hat{a}\hat{\sigma}^\dagger)$ (JAYNES; CUMMINGS, 1963).

Logo, podemos concluir que em um sistema ideal, onde o hamiltoniano de Jaynes-Cummings não considera nenhuma perda de energia, temos um comportamento constante de um fóton absorvido (onde ocorre uma excitação de um nível no átomo), seguido da emissão de um fóton com a mesma frequência. Essa situação pode ser simulada de maneira em que podemos de acordo com a oscilação do sistema encontrar a probabilidade de observarmos o átomo no estado excitado $\langle \sigma_+\sigma_- \rangle$ e a probabilidade do número de fótons $\langle a^\dagger a \rangle$. Essa simulação é exibida na Figura 3 e pode ser estudada no Apêndice B (JOHANSSON; NATION; NORI, 2013).

Contudo, nota-se que podemos fazer uma análise muito mais precisa utilizando a dissipação total do sistema pelo formalismo da equação mestra. Para isso teremos que

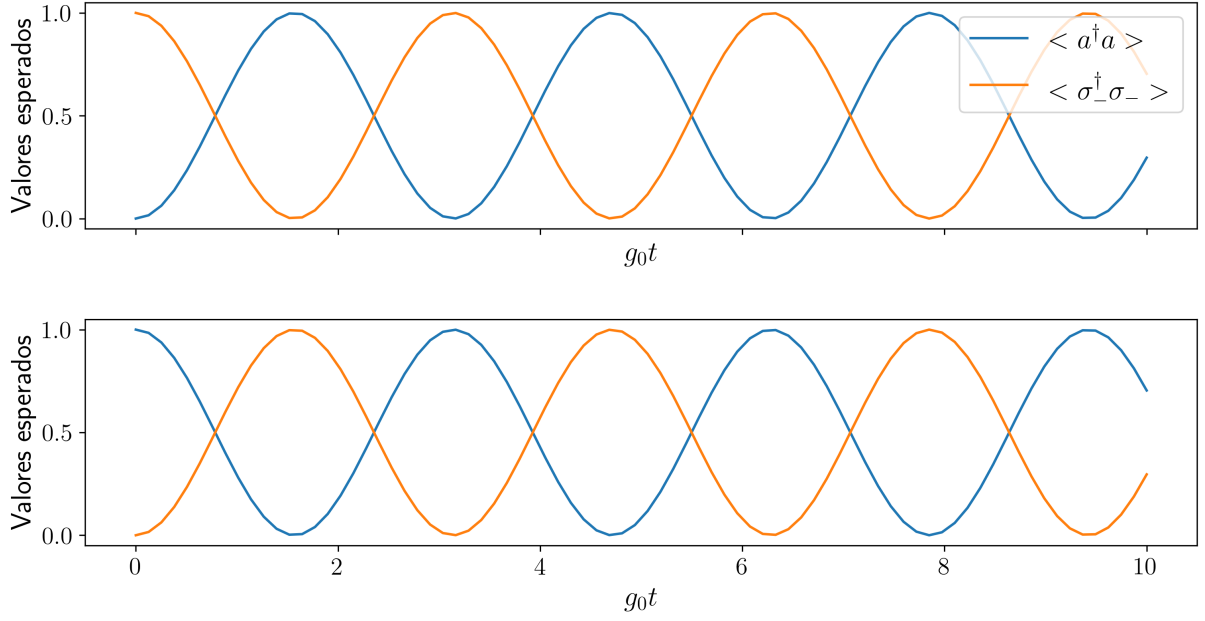


Figura 3 – Evolução temporal para o número médio de fótons e para a probabilidade de encontrar o átomo no estado excitado no modelo do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, considerando dois estados iniciais $|e, 0\rangle$ (painel superior) e $|g, 1\rangle$ (painel inferior).

levar em conta uma nova dinâmica do sistema que não só calcula o hamiltoniano do sistema, mas também a sua dissipação. Nesse caso, a dinâmica do sistema é governada pela seguinte equação mestra na forma de Lindblad, na representação de interação (BREUER; PETRUCCIONE, 2002)

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_n \frac{1}{2} (2C_n \rho C_n^\dagger - \rho C_n^\dagger C_n - C_n^\dagger C_n \rho), \quad (3.14)$$

$$H = \rho(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (3.15)$$

onde H na representação de interação é definido por (3.15) e C_n são os diferentes operadores de colapso do sistema e ρ descreve a matriz densidade do sistema. No nosso caso temos $C_1 = \sqrt{2\kappa}a$, sendo κ a taxa de decaimento da amplitude do campo intracavidade, $C_2 = \sqrt{2\gamma}\sigma_-$, sendo γ a taxa de decaimento da polarização atômica e $C_3 = \sqrt{\gamma_\phi}\sigma_z$, em que γ_ϕ é a taxa de decaimento da defasagem atômica. Considerando o estado inicial $|g, 1\rangle$, e os parâmetros $g = \kappa$ e $\gamma = \gamma_\phi = \kappa$, obteve-se a evolução temporal ilustrada na Figura 4, e a sua simulação pode ser estudada mais profundamente no Apêndice C (JOHANSSON; NATION; NORI, 2013):

3.5 A APROXIMAÇÃO DE ONDA GIRANTE E O MODELO DE RABI QUÂNTICO

Há 88 anos atrás, Rabi (FERMI, 1936) introduziu um modelo para solucionar uma rápida variância de um campo magnético fraco de um átomo orientado possuindo um

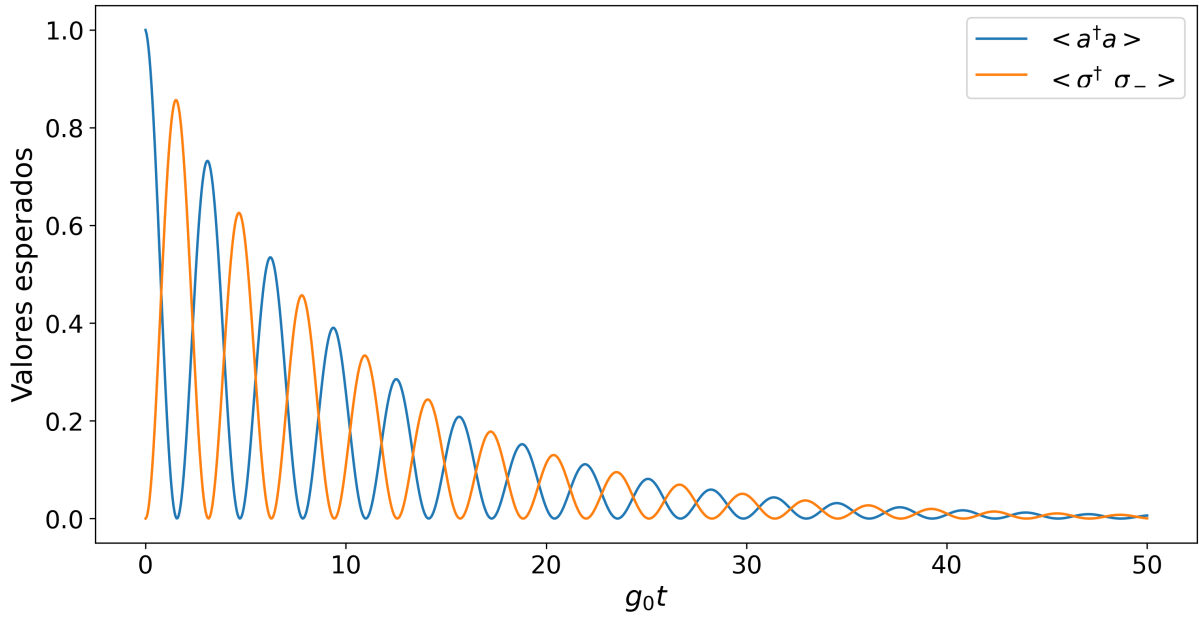


Figura 4 – Evolução temporal dos mesmos valores esperados considerados na Figura 3, porém considerando efeitos dissipativos.

spin nuclear. Sendo o átomo quantizado interagindo com um campo clássico rotacional. Jaynes e Cummings ([JAYNES; CUMMINGS, 1963](#)) introduziram então um modelo quântico similar descrevendo um átomo de dois níveis interagindo com um modo quantizado em uma cavidade óptica. O objetivo inicial destes cientistas era estudar o modelo quântico e então relacioná-lo com o modelo semi-clássico, contudo percebeu-se que o modelo de Rabi quântico não era possível de ser solucionado. Para resolvê-lo, uma aproximação foi necessária, esta é chamada da "aproximação de onda girante" e nela o termo contra-girante do modelo inicial é ignorado. Esta aproximação define o que hoje é conhecido como o modelo de Jaynes-Cummings e na verdade é uma aproximação muito válida quando estamos lidando com acoplamentos perturbativos perante as energias livres do átomo e do campo (o que era o padrão para os experimentos realizados).

Eventualmente, com o aumento dos valores experimentais alcançados para o acoplamento luz-matéria, como em resultados relatados pela utilização de osciladores-qubits supercondutores ([KIRCHMAIR *et al.*, 2017](#); [GIRVIN *et al.*, 2017](#)), essas aproximações não são mais válidas e o termo contra-girante não deve ser mais ignorado. Dessa maneira, se torna necessário utilizar o modelo de Rabi quântico, um modelo que foi de fato resolvido por Braak em 2011 ([CASANOVA *et al.*, 2011](#); [ASPELMEYER; KIPPENBERG; MARQUARDT, 2013](#)). Em seu trabalho, Braak apresenta que é possível ter uma solução analítica para o modelo no espaço Bargmann-Fock de funções analíticas ([COLES *et al.*, 2017](#)).

3.6 ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CAVIDADES

Até agora, foi apenas mencionado nesse trabalho que todas as dinâmicas descritas até agora se passam em uma "cavidade/ressonador" indefinida até o momento, então vamos defini-la nessa subseção,

Nos voltando brevemente para o hamiltoniano de interação do modelo que utiliza a aproximação de onda girante (que descreve a interação do campo eletromagnético com o átomo),

$$\hat{H}_I = \hbar g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} + \hat{a} \hat{\sigma}^\dagger), \quad (3.16)$$

onde g descreve a força de acoplamento definido pela seguinte equação (3.17):

$$g = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} \vec{d}_{12} \cdot \vec{\epsilon}. \quad (3.17)$$

Assim, nota-se que seria ideal para nossos experimentos se e a cavidade pudesse atingir uma grande janela de valores possíveis de g , vendo então que o valor dele depende diretamente do inverso da raiz quadrada do volume V , percebe-se que o volume da nossa cavidade precisa ser o menor possível. Além do mais, seria importante também reter o máximo de energia possível dentro da cavidade, evitando a perda por dissipação, para isso vamos confinar o átomo e o campo de luz entre espelhos (já idealmente muito próximos um do outro) para que os fótons possam interagir diversas vezes com o átomo na cavidade. Dessa maneira, quanto mais ideal forem nossas condições, menor será o decaimento de energia e maior o valor de g encontrado no nosso sistema. Um esquema deste sistema é exibido na Figura 5.

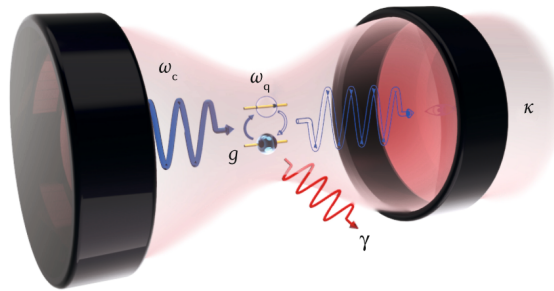


Figura 5 – Esboço de um sistema eletrodinâmico quântico de cavidade com um único átomo de dois níveis (qubit). Retirado a partir do artigo *Ultrastrong coupling between light and matter* (MITRA; ZUPA; GARCÍA, 2018).

3.7 REGRA DE SELEÇÃO PARA TRANSIÇÃO DE ELÉTRONS

Um conceito que deve ser explicado mais precisamente são as regras de seleção que comandam as transições de níveis realizadas pelos elétrons no átomo. Se um fóton de uma frequência suficientemente alta é absorvido por um elétron e este é excitado para um nível maior de energia, ele eventualmente decairá para seu nível inicial reemitindo um fóton de uma determinada frequência. Contudo, esses elétrons possuem caminhos de transições mais prováveis que outros, esses caminhos de transições são denominados de "transições permitidas" e "transições proibidas".

Logo, na mecânica quântica temos duas regras de seleção que determinam estas transições:

- A primeira regra nos diz que a mudança dos números quânticos orbitais l (do estado inicial e do suposto excitado) deve ser $\Delta l = \pm 1$
- A segunda regra nos diz que a mudança dos números quânticos magnéticos n_l (do estado inicial e do suposto estado excitado) deve ser $\Delta n_l = 0, \pm 1$

Essas regras impedem algumas transições do tipo $2p^3 \rightarrow 2p^2$ de acontecer e então permite transições do tipo $2p \rightarrow 2s$ ([EISBERG; RESNICK, 1979](#); [SHANKAR, 2012](#); [FREEMAN; BUCKSBAUM, 1985](#)).

4 SIMULAÇÃO DO SISTEMA

Ao longo deste projeto, devido ao enorme custo de equipamento necessário para realizar experimentos no campo da eletrodinâmica quântica, o trabalho realizado neste documento é teórico e baseado em simulações redigidas com a linguagem de programação *Python* (FOUNDATION, 2024). Dessa maneira, nessa seção será discorrido sobre as ferramentas computacionais utilizadas nesse projeto.

4.1 QUTIP

O "Quantum Toolbox in Python", conhecido também como *QuTiP*, é um software *Open-Source* gratuito utilizado para simular dinâmicas de sistemas quânticos abertos. A ideia do pacote foi inicialmente sugerido pelo estudante de doutorado Paul Nation, que irritado ao utilizar o pacote de óptica quântica do *MATLAB*, resolveu escrever um segundo software em Python com seu colega Robert Johansson (JOHANSSON; NATION; NORI, 2012). A biblioteca do sistema depende de alguns sistemas também muito populares em Python como o *Numpy* e o *Scipy* colabora com outros excelentes pacotes como o *Matplotlib*. Além do mais, ele pode ser utilizado em todos os sistemas operacionais comumente utilizados como *Linux*, *Mac OSX* e *Windows*.

Sua grande gama de simulações numéricas e variedade de hamiltonianas que podem ser facilmente acessadas graças à ajuda de um manual de usuário ("*Quantum Toolbox in Python Documentation*") (JOHANSSON; NATION; NORI, 2013) atualizado frequentemente, torna este pacote extremamente útil para realizarmos diversas contas, gráficos e simulações de extrema importância para este trabalho.

5 EXPLORANDO O MODELO DE RABI QUÂNTICO

5.1 O REGIME ULTRAFORTE

Primeiramente, o parâmetro $\eta = \frac{g}{w_0}$ (a força de acoplamento dividida pela frequência de transição) é usado para quantificar os regimes de acoplamento para o sistema de cavidades eletrodinâmicos quânticos. Normalmente nesses experimentos são encontrados valores baixos como $\eta \leq 0.1$, que se comportam de acordo com o modelo da aproximação de onda girante.

Em 2009, experimentos envolvendo microcavidades (KOCH *et al.*, 2009) conseguiram alcançar valores $\eta \approx 0.11$, dando início a uma terceira revolução nas chamadas "forças de acoplamento ultraforte", onde a força de acoplamento g passa a ser da ordem da energia livre do sistema. E dessa maneira, diferentes sistemas conseguiram chegar em valores de $\eta = 1.83$ utilizando cristais de nanopartículas plasmônicas, com o potencial de chegarem até à $\eta = 2.2$ (NORI; YOSHIHARA; ASHHAB, 2019).

5.2 A DINÂMICA DO MODELO DE RABI QUÂNTICO

Utilizando então todo o contexto teórico dos capítulos anteriores, podemos começar a analisar o hamiltoniano de Rabi quântico. Sua dinâmica é dada pela equação (5.2) (BREUER; PETRUCCIONE, 2002), com seu hamiltoniano no gauge de dipolo sendo definido em (5.1) (BEAUDOIN; GAMBETTA; BLAIS, 2011; SALMON *et al.*, 2022b) (ROSSATTO *et al.*, 2017b; FORN-DÍAZ *et al.*, 2019; KOCKUM *et al.*, 2019)

$$H_R = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2} \sigma_z + g_0(a + a^\dagger) \sigma_x, \quad (5.1)$$

$$\dot{\rho}_t = -i[H_R] + \mathcal{L}_{c,\rho_t} + \mathcal{L}_{a,\rho_t}, \quad (5.2)$$

onde o lindblidiano $\mathcal{L}_c$ se refere ao canal dissipativo acoplado a cavidade e $\mathcal{L}_a$ ao do átomo do sistema. Ambos são definidos em (5.3)

$$\mathcal{L}_{c,a}\rho_t = \sum_{j,k>j} \frac{\Gamma_{c,a}^{kj}}{2} (2|j\rangle\langle k|\rho_t|k\rangle\langle j| - |k\rangle\langle k|\rho_t - \rho_t|k\rangle\langle k|). \quad (5.3)$$

Onde nota-se também em (5.3) que cada canal dissipativo possui uma taxa que são definidas por (5.4) e (5.5),

$$\Gamma_c^{kj} = \kappa \frac{\Delta_{kj}}{\omega_c} |\langle j | i(a^\dagger - a) | j \rangle|^2, \quad (5.4)$$

$$\Gamma_a^{kj} = \gamma \frac{\Delta_{kj}}{\omega_q} |\langle j | \sigma_x | j \rangle|^2, \quad (5.5)$$

sendo $\Delta_{kj} = \omega_k - \omega_j$ a frequência de transição de estado $|k\rangle \rightarrow |j\rangle$, bem como também as taxas de decaimento κ e γ do ressonador e do átomo quando desacoplados, respectivamente.

5.2.1 O problema da utilização do Gauge de Dipolo

Na maioria dos artigos e livros bibliográficos, o hamiltoniano de Rabi é exibido de acordo com o gauge de dipolo como foi exibido aqui em (5.1). Contudo, tendo em mente que estamos lidando nesta pesquisa com um acoplamento ultraforte, muitas das dinâmicas convencionais utilizadas com outros acoplamentos não são mais aplicáveis, e no caso do "ponto de vista" do gauge de dipolo, quando calculamos a dinâmica mestra do sistema, esta quebra a invariância das equações Maxwell-Schrödinger intrinsecamente ligadas a dinâmica dissipativa do sistema.

Logo, para prosseguir, será necessário converter o hamiltoniano visto para o gauge de Coulomb,

$$H_R = \omega_c a^\dagger a + \frac{\omega_q}{2} (\sigma_z \cos[2\eta(a + a^\dagger)] + \sigma_y \sin[2\eta(a + a^\dagger)]). \quad (5.6)$$

5.3 O MODELO DE RABI NO ACOPLAMENTO ULTRAFORTE

Todos os códigos das simulações apresentadas a seguir nestas subseções podem ser analisados no Apêndice D.

5.3.1 Espectro de energia / Decaimentos

Utilizando as equações vistas até agora, podemos calcular o espectro de energia de (5.6) ressonante ($\omega_q = \omega_c$), conforme Figura 6. Nota-se que os níveis $|2\rangle$ e $|3\rangle$ do sistema acabam se cruzando para um valor de acoplamento crítico ($\eta_c \approx 0.45$). Dadas as regras de seleção para a transição induzida por dipolo entre os autoestados do sistema a partir de um campo de prova externo e considerando que o sistema absorva inicialmente um fóton pela transição $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$, tem-se que o sistema reemitirá um fóton com a mesma frequência do fóton absorvido quando $\eta_0 < \eta_c$ (quando ainda não atingimos o cruzamento que acontece em η_c). Já para $\eta_0 > \eta_c$ (depois de atingir o cruzamento), pode haver dois processos distintos: ou ocorre o mesmo efeito anterior ou o sistema emitirá três fótons em cascata ($|2\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |1\rangle \rightarrow |0\rangle$).

Esse decaimento em cascata ocorre pois ao invés de termos um decaimento de $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$, temos uma probabilidade devido a frequência do campo e do átomo do sistema que o fóton caia do estado $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, tendo em mente que o acoplamento ultraforte realiza uma troca entre esses estados, permitindo este decaimento. A partir desse ponto, dado a regra de seleção de dipolo, só restará como opção do fóton no estado $|3\rangle$ cair para o estado $|1\rangle$ e então para o $|0\rangle$. Logo, esses três fótons são emitidos em momentos diferentes, com frequências diferentes, mas sempre serão emitidos desde que $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$.

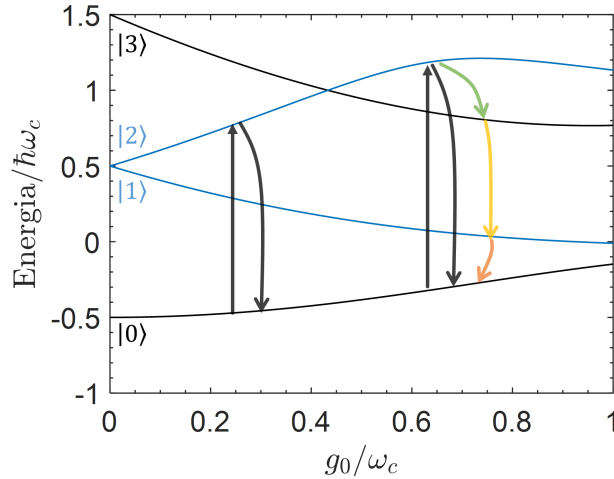


Figura 6 – Espectro de energia do modelo de Rabi ressonante em função de $\eta = g_0/\omega_c$. Excitando a transição $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$, as setas indicam os possíveis processos de emissões de fótons pelo sistema quando $\eta < \eta_c$ e $\eta > \eta_c$, sendo $\eta_c \approx 0.4$.

5.3.2 Frequências de transição

Tendo em mente os dois possíveis decaimentos: Primeiro o decaimento com a reemissão de um único fóton com frequência Δ_{20} ; E o segundo com a reemissão de três fótons em cascata, que tem frequências específicas e muito menores que o primeiro caso, pois as três em conjunto se equivalem à frequência do único fóton reemitido no primeiro caso, como exibe a Figura 7.

5.3.3 Taxas de transição

O gráfico das taxas de transição, localizada na Figura 8, talvez seja a simulação mais importante deste trabalho, é utilizando essa simulação que podemos observar as probabilidades de emissão de cada fóton, observando qual é o caminho mais provável que o decaimento pode ter.

Assumindo $\kappa \gg \gamma$, asseguramos que, quando o sistema absorver um fóton, este transmita-o através do ressonador, canalizando-o em um modo espacial bem definido.

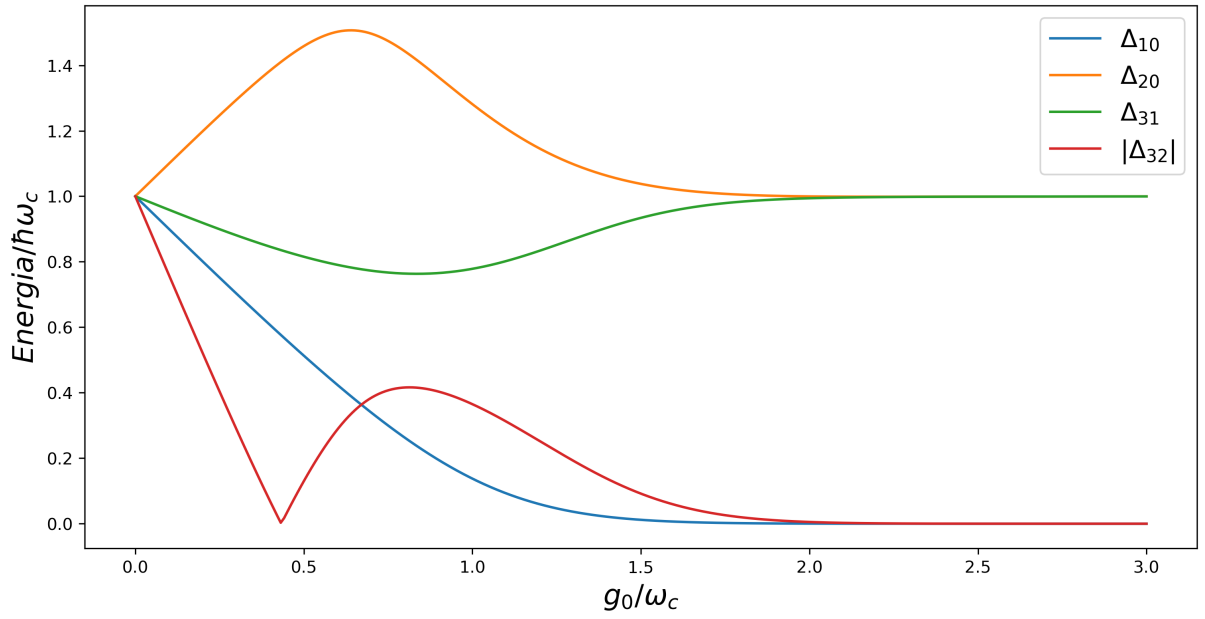


Figura 7 – Frequências de transição em função de η .

Nesse cenário, calculou-se a taxa de transição Γ_c^{kj} , a qual explicita qual processo de emissão (direto ou em cascata) será dominante quando $\eta > \eta_c$:

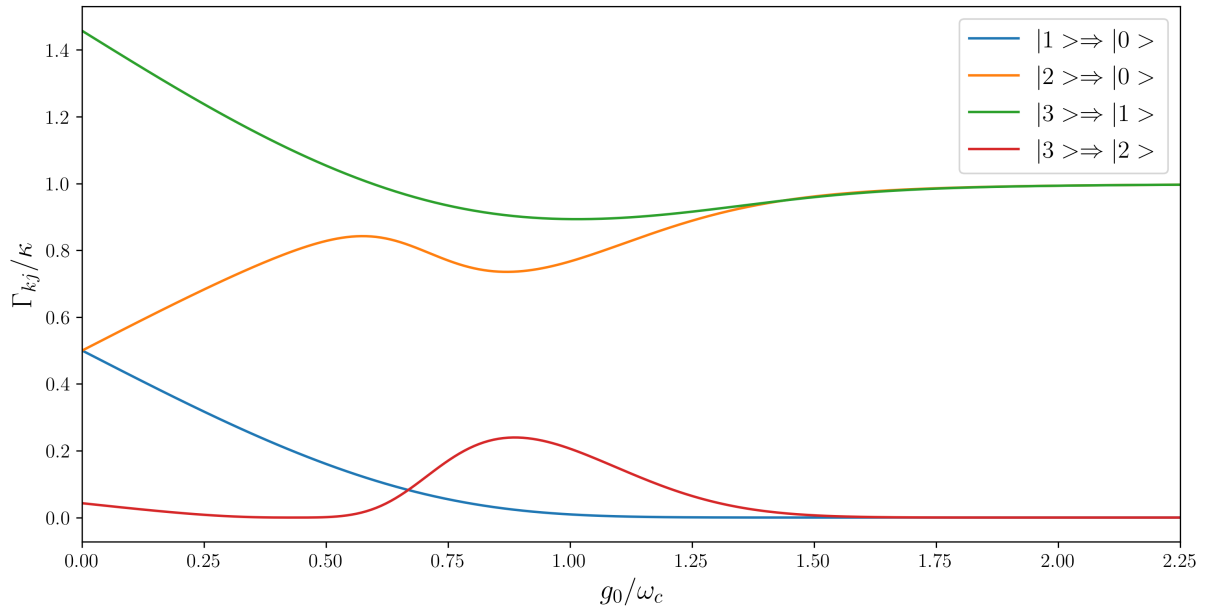


Figura 8 – Taxas de transição Γ_c^{jk}/κ em função de η .

Conforme mostrado na Figura 8, observa-se que, dentre as taxas observadas, temos uma maior probabilidade no momento para a ocorrência da emissão de apenas um único fóton pelo sistema, pois $\Gamma_c^{20} > \Gamma_c^{32}$ para qualquer valor de η . Mas nota-se que mesmo nesse caso ressonante com pouca interferência das frequências temos ainda uma chance considerável de obter um decaimento em cascata, demonstrado pela curva Γ_c^{32} .

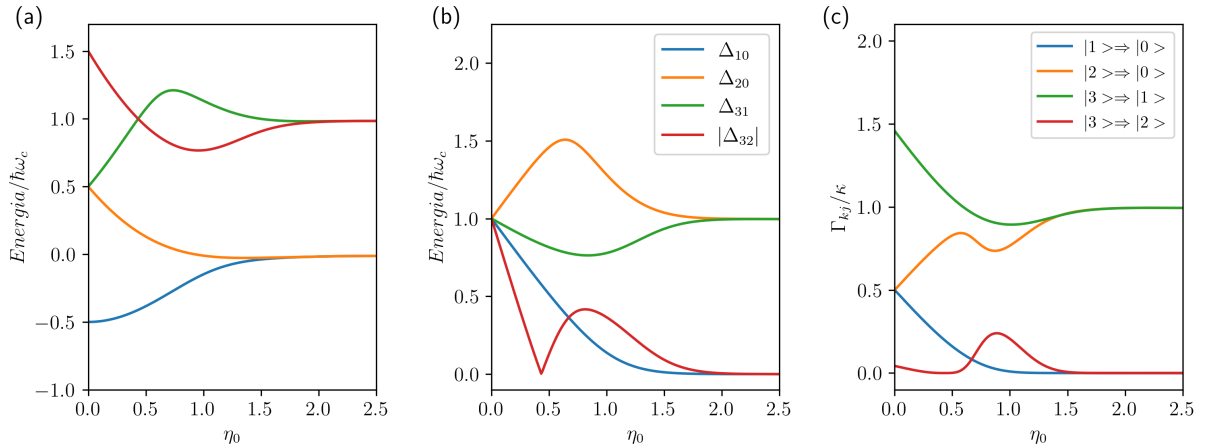


Figura 9 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi ressonante ($\omega_q = \omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, $\Delta_{kj}/\hbar\omega_c$, em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η .

5.4 O MODELO DE RABI NÃO RESSONANTE NO ACOPLAMENTO ULTRAFORTE

Depois desses resultados, foi pesquisado de que maneira poderíamos aumentar o valor da taxa de transição que permite o decaimento em cascata. Dessa maneira, uma técnica que se demonstrou muito efetiva foi alterar as frequências da cavidade e do átomo, modificando o sistema para um não-ressonante ($\omega_q \neq \omega_c$). Contudo, restringimo-nos ao intervalo $0 \leq \omega_q < 2\omega_c$, já que, para $\omega_q \geq 2\omega_c$, não há mais cruzamento entre os estados $|2\rangle$ e $|3\rangle$, de modo que emissões multifotônicas seriam esperadas para qualquer regime de acoplamento.

Nos casos em que $\omega_q \leq \omega_c$, obtém-se que, quanto menor a razão ω_q/ω_c , mais dominante ainda se torna o processo de reemissão do fóton absorvido. Por exemplo, a Fig. 10 mostra as mesmas figuras de mérito da Fig. 9, porém para o caso em que $\omega_q = 0.5\omega_c$. Da Fig. 10(c) observa-se que $\Gamma_c^{20} \gg \Gamma_c^{32}$ para qualquer valor de η , mostrando uma maior dominância do processo de reemissão direta em comparação com o caso ressonante.

Por outro lado, quando $\omega_q > \omega_c$, o sistema começa a apresentar a resposta oposta em certos intervalos de acoplamento, isto é, o processo de emissão de três fótons em cascata se torna dominante perante o de reemissão direta, tornando-se cada vez mais dominante nessas regiões à medida que $\omega_q \rightarrow 2\omega_c$. Esse comportamento é exemplificado nas Figs. 11 e 12, as quais ilustram as mesmas figuras de mérito que o caso ressonante (Fig. 9), porém considerando $\omega_q = 1.5\omega_c$ e $\omega_q = 1.99\omega_c$, respectivamente.

Embora o cruzamento entre os autoestados $|2\rangle$ e $|3\rangle$ ocorra para valores cada vez menores de η à medida que $\omega_q \rightarrow 2\omega_c$, tem-se que o processo de emissão em cascata sempre se torna dominante somente no regime de acoplamento ultraforte e extremamente forte.

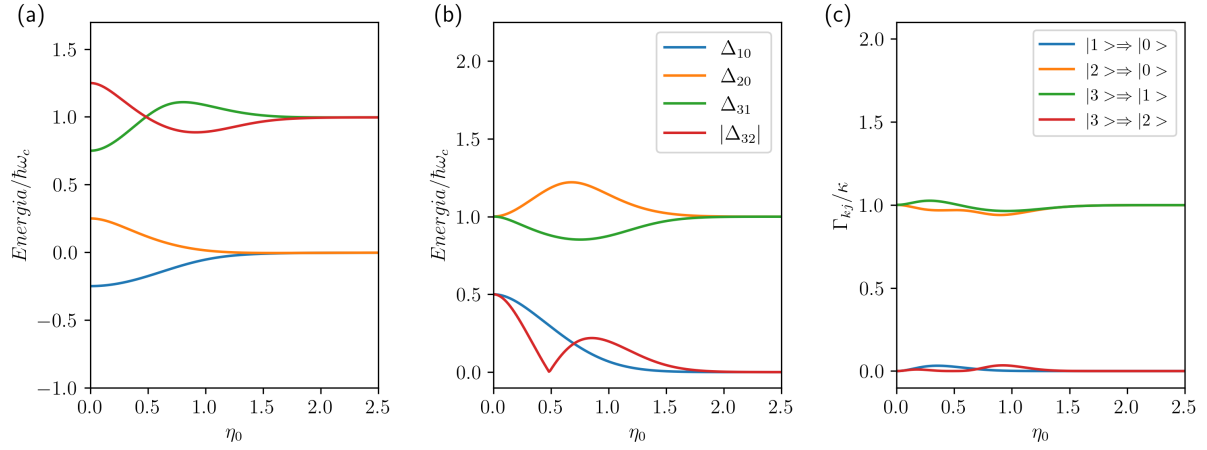


Figura 10 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi não ressonante ($\omega_q = 0.5\omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, Δ_{kj}/κ , em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η .

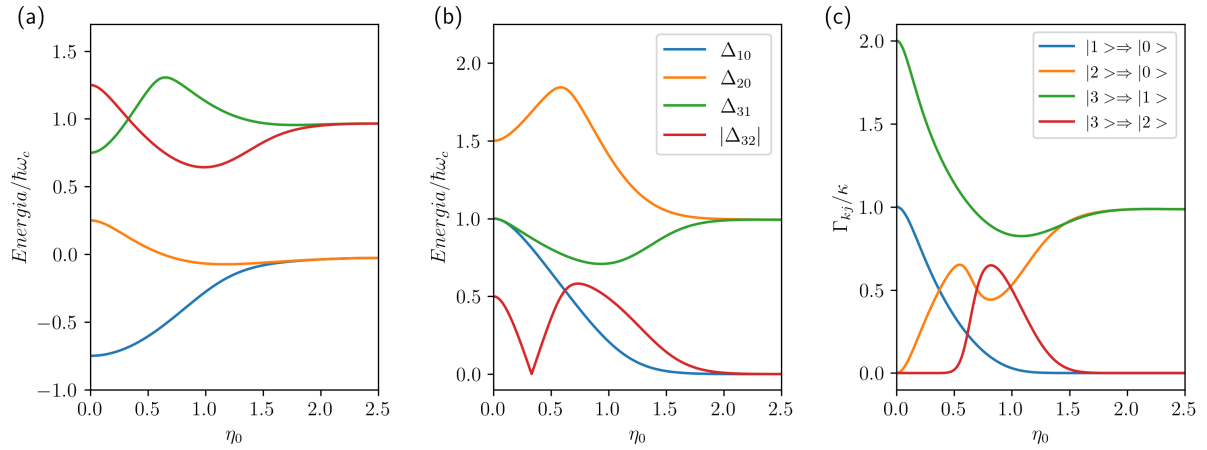


Figura 11 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi não ressonante ($\omega_q = 1.5\omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, Δ_{kj}/κ , em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η .

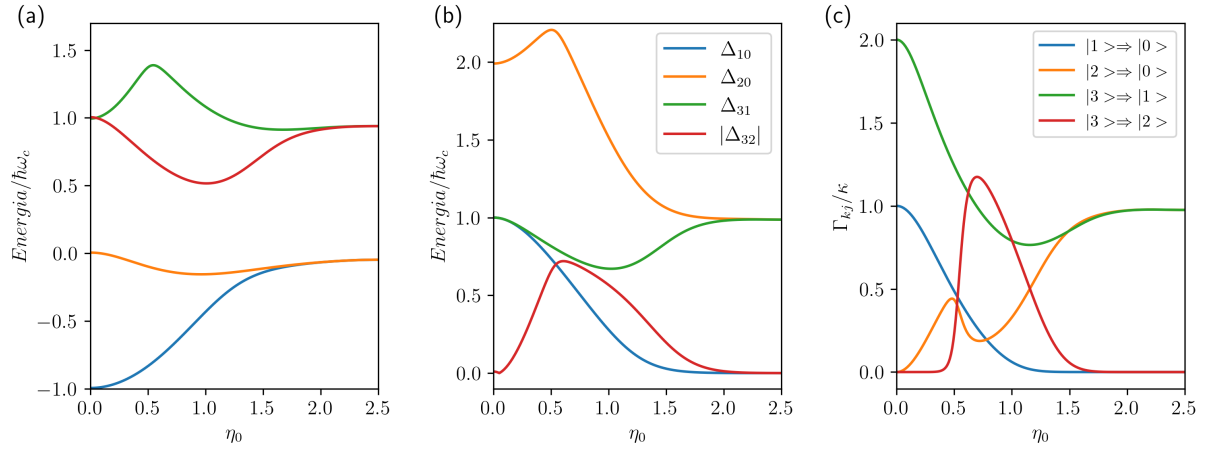


Figura 12 – (a) Espectro de energia do modelo de Rabi não ressonante ($\omega_q = 1.99\omega_c$) em função de $\eta = g_0/\omega_c$. (b) Frequências dos fótons emitidos devido a cada transição, Δ_{kj}/κ , em função de η . (c) Taxas de transição espontânea entre os autoestados, Γ_c^{kj}/κ , em função de η .

6 CONCLUSÃO

Neste projeto, investigamos o espectro de emissão do modelo de Rabi no regime de acoplamento ultraforte e extremamente forte para o caso em que o sistema é inicialmente preparado no segundo estado excitado (do ponto de vista de baixo valor de acoplamento átomo-campo – $\eta \ll 1$). Devido a um cruzamento entre o segundo e o terceiro nível excitado, surge a possibilidade de que um fóton absorvido pelo sistema seja não só reemitido, mas seja convertido em três emitidos espontaneamente em cascata. Enquanto que o processo de reemissão direta é sempre dominante quando a frequência do átomo (ω_q) é menor que a da cavidade (ω_c), mostramos que o processo de emissão em cascata se torna dominante em certos intervalos de acoplamento ultraforte e extremamente forte quando $\omega_q > \omega_c$. Dessa forma, para certas regiões de acoplamento, o espectro de emissão do sistema se altera drasticamente dependendo se a dessintonia entre átomo e campo é positiva ou negativa. Nossos resultados apresentam mais uma característica peculiar do espectro de emissão do modelo de Rabi no regime de acoplamento ultraforte e extremamente forte, diferente das já investigadas na literatura ([RIDOLFO *et al.*, 2012](#); [RIDOLFO; SAVASTA; HARTMANN, 2013](#); [SANCHEZ-BURILLO *et al.*, 2014](#); [BOITÉ *et al.*, 2016](#); [YOSHIHARA *et al.*, 2017](#); [MAGAZZÙ; GRIFONI, 2019](#); [MAGAZZÙ; FORN-DÍAZ; GRIFONI, 2021](#)), auxiliando ainda mais na compreensão desse tópico e abrindo caminho para novas aplicações desses sistemas ultrafortemente acoplados, como conversores de fótons ou mesmo a construção de uma fonte anunciada de fótons.

REFERÊNCIAS

- 3BLUE1BROWN. *Essence of linear algebra*. [S.l.]: YouTube, 2016. https://youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab.
- ASPELMEYER, M.; KIPPENBERG, T. J.; MARQUARDT, F. Cavity optomechanics. *Annalen der Physik*, v. 525, n. 3, p. 215–233, 2013. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.201200270>.
- BEAUDOIN, F.; GAMBETTA, J. M.; BLAIS, A. Dissipation and ultrastrong coupling in circuit qed. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 84, n. 4, p. 043832, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.043832>.
- BOITÉ, A. L.; HWANG, M.-J.; NHA, H.; PLENIO, M. B. Fate of photon blockade in the deep strong-coupling regime. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 94, p. 033827, Sep 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.033827>.
- BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. Harper & Row, 1980. Disponível em: <https://www.cin.ufpe.br/~brgccf/archive/Algebra%20Linear%20Boldrini.pdf>.
- BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001>.
- BULUTA, I.; ASHHAB, S.; NORI, F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 74, n. 10, p. 104401, set. 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- CASANOVA, J.; SABÍN, C.; LEÓN, J.; EGUSQUIZA, I. L.; GERRITSMA, R.; ROOS, C. F.; GARCÍA-RIPOLL, J. J.; SOLANO, E. Quantum simulation of the majorana equation and unphysical operations. *Physical Review Letters*, v. 107, n. 10, p. 100401, 2011. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.107.100401>.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics: Volume 1*. 2nd. ed. Wiley, 1991. Disponível em: https://www.amazon.com.br/Quantum-Mechanics-Claude-Cohen-Tannoudji/dp/3527345531/ref=asc_df_3527345531/?tag=googleshopp00-20&linkCode=df0&hvadid=709857900441&hvpos=&hvnetw=g&hvrand=357779424063491357&hvpone=&hvptwo=&hvqmt=&hvdev=c&hvdvcmdl=&hvlocint=&hvlocphy=9100502&hvtargid=pla-850576445234&psc=1&mcid=7bd18ac1eaf351f954d780a4e84f644&gad_source=1.
- COLES, P. J.; BERTA, M.; TOMAMICHEL, M.; WEHNER, S. Entropic uncertainty relations and their applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 50, n. 11, p. 113001, 2017. Disponível em: <http://iopscience.iop.org/1751-8121/50/11/113001>.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica*. Campus, Rio de Janeiro, 1979. Disponível em: <https://www.amazon.com.br/F%C3%ADsica-Qu%C3%A2ntica-Robert-Eisberg/dp/0857503823>.

FERMI, E. Thermodynamics of irreversible processes in a nuclear reaction chain. *Physical Review*, v. 49, n. 4, p. 324–333, 1936. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.49.324>.

FORN-DIAZ, P.; LAMATA, L.; RICO, E.; KONO, J.; SOLANO, E. Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 91, p. 025005, Jun 2019. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.025005>.

FORN-DÍAZ, P.; LAMATA, L.; RICO, E.; KONO, J.; SOLANO, E. Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 91, p. 025005, Jun 2019. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.025005>.

FOUNDATION, P. S. *Python Language Reference, version 3.x*. 2024. Online; accessed 10-Sep-2024. Disponível em: <https://www.python.org/>.

FRANÇA, G. H. d. *Estudo da correlação de fótons e controle óptico a partir do fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida em cavidades para um átomo de três níveis*. Universidade Federal de São Carlos, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/16108>.

FREEMAN, R. R.; BUCKSBAUM, P. H. Selection rules for multiphoton processes in atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics*, v. 57, n. 3, p. 683–719, 1985. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00684641>.

GEORGESCU, I.; NORI, F. Quantum technologies: an old new story. *Physics World*, IOP Publishing, v. 25, n. 05, p. 16–17, maio 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/2058-7058/25/05/28>.

GIRVIN, S. M.; KIRCHMAIR, G.; SCHOELKOPF, R. H.; HOUCK, O. Quantum coherent interactions and entanglement in superconducting qubits. *Nature Physics*, v. 13, n. 2, p. 115–119, 2017. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/nphys3905>.

GRIFFITHS, D. J.; FREITAS, L. *Mecânica Quântica*. Pearson Prentice Hall, 2011. Disponível em: <http://sampa.if.usp.br/~suaide/MecQuantica1/Mecanica%20Quantica%20-%20David%20Griffiths.pdf>.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo: Volume 4*. 5ª edição. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2001. Disponível em: <https://www.amazon.com.br/Curso-Cálculo-Hamilton-Luiz-Guidorizzi/dp/852161330X>.

IEEE Journals Magazine. The evolution of antenna technology: History, dipoles, and loops. *IEEE Xplore*, 2024. [IEEE Xplore - The Evolution of Antenna Technology](https://ieeexplore.ieee.org/document/10525216). Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10525216>.

JAEGER, L. *The Second Quantum Revolution*. New York: Springer, 2018.

JAYNES, E.; CUMMINGS, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.

JOHANSSON, J. R.; NATION, P. D.; NORI, F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, v. 183, n. 8, p. 1760–1772, 2012.

JOHANSSON, J. R.; NATION, P. D.; NORI, F. *QuTiP: Quantum Toolbox in Python*. [S.l.], 2013. Online; accessed 11-Sep-2024. Disponível em: <https://qutip.readthedocs.io/en/qutip-5.0.x/>.

KIRCHMAIR, G.; HOUCK, O.; SCHOELKOPF, R. H.; GIRVIN, S. M. Quantum bath engineering with superconducting circuits. *Nature Physics*, v. 13, n. 2, p. 155–159, 2017. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/nphys3906>.

KOCH, J.; HARTMANN, M.; LEHNERT, K.; AL. et. Dynamics of the rabi model under extreme coupling conditions. *Physical Review B*, v. 79, n. 20, p. 201303, 2009. Disponível em: <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.79.201303>.

KOCKUM, A. F.; MIRANOWICZ, A.; LIBERATO, S. D.; SAVASTA, S.; NORI, F. Ultrastrong coupling between light and matter. *Nature Reviews Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 1, n. 1, p. 19–40, jan. 2019. ISSN 2522-5820. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/s42254-018-0006-2>.

MAGAZZÙ, L.; FORN-DÍAZ, P.; GRIFONI, M. Transmission spectra of the driven, dissipative rabi model in the ultrastrong-coupling regime. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 104, p. 053711, Nov 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.053711>.

MAGAZZÙ, L.; GRIFONI, M. Transmission spectra of an ultrastrongly coupled qubit-dissipative resonator system. *J. Stat. Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2019, n. 10, p. 104002, out. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1742-5468/ab3da8>.

MITRA, S.; ZUPA, I. L. M. D.; GARCÍA, J. C. Improved classical and quantum bounds for the total variation distance. *Nature Machine Intelligence*, v. 1, n. 4, p. 160–167, 2018. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/s42254-018-0006-2>.

MUELLER, N. S.; OKAMURA, Y.; VIEIRA, B. G. M.; JUERGENSEN, S.; LANGE, H.; BARROS, E. B.; SCHULZ, F.; REICH, S. Deep strong light–matter coupling in plasmonic nanoparticle crystals. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 583, n. 7818, p. 780–784, jul. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2508-1>.

NORI, F.; YOSHIHARA, F.; ASHHAB, S. Exploring ultrastrong coupling physics and the rabi model. *Reviews of Modern Physics*, v. 91, n. 2, p. 025005, 2019. Disponível em: <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.91.025005>.

RIDOLFO, A.; LEIB, M.; SAVASTA, S.; HARTMANN, M. J. Photon blockade in the ultrastrong coupling regime. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 193602, Nov 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.193602>.

RIDOLFO, A.; SAVASTA, S.; HARTMANN, M. J. Nonclassical radiation from thermal cavities in the ultrastrong coupling regime. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 163601, Apr 2013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.163601>.

ROSSATTO, D. Z.; VILLAS-BÔAS, C. J.; SANZ, M.; SOLANO, E. Spectral classification of coupling regimes in the quantum rabi model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 96, p. 013849, Jul 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.013849>.

ROSSATTO, D. Z.; VILLAS-BÔAS, C. J.; SANZ, M.; SOLANO, E. Spectral classification of coupling regimes in the quantum rabi model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 96, p. 013849, Jul 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.013849>.

SALMON, W.; GUSTIN, C.; SETTINERI, A.; STEFANO, O. D.; ZUECO, D.; SAVASTA, S.; NORI, F.; HUGHES, S. Gauge-independent emission spectra and quantum correlations in the ultrastrong coupling regime of open system cavity-QED. *Nanophotonics*, Walter de Gruyter GmbH, v. 11, n. 8, p. 1573–1590, mar. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0718>.

SALMON, W.; GUSTIN, C.; SETTINERI, A.; STEFANO, O. D.; ZUECO, D.; SAVASTA, S.; NORI, F.; HUGHES, S. Gauge-independent emission spectra and quantum correlations in the ultrastrong coupling regime of open system cavity-qed. *Nanophotonics*, Walter de Gruyter GmbH, v. 11, n. 8, p. 1573–1590, mar. 2022. ISSN 2192-8614.

SALTER, C. L.; STEVENSON, R. M.; FARRER, I.; NICOLL, C. A.; RITCHIE, D. A.; SHIELDS, A. J. An entangled-light-emitting diode. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 465, n. 7298, p. 594–597, jun. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nature09078>.

SANCHEZ-BURILLO, E.; ZUECO, D.; GARCIA-RIPOLL, J. J.; MARTIN-MORENO, L. Scattering in the ultrastrong regime: Nonlinear optics with one photon. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 113, p. 263604, Dec 2014. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.263604>.

SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. Cambridge university press, 1997. Disponível em: <https://www.amazon.com.br/Quantum-Optics-Marlan-Scully/dp/0521435951>.

SENEILLART, P.; SOLOMON, G.; WHITE, A. High-performance semiconductor quantum-dot single-photon sources. *Nature Nanotechnology*, Springer Science and Business Media LLC, v. 12, n. 11, p. 1026–1039, nov. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nnano.2017.218>.

SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2. ed. New York: Springer, 2012. ISBN 9780306447907. Disponível em: <https://www.amazon.com/Principles-Quantum-Mechanics-Second-Shankar/dp/0306447908>.

SOMASCHI, N.; GIESZ, V.; SANTIS, L. D.; LOREDO, J. C.; ALMEIDA, M. P.; HORNECKER, G.; PORTALUPI, S. L.; GRANGE, T.; ANTÓN, C.; DEMORY, J.; GÓMEZ, C.; SAGNES, I.; LANZILLOTTI-KIMURA, N. D.; LEMAÎTRE, A.; AUFFEVE, A.; WHITE, A. G.; LANCO, L.; SENEILLART, P. Near-optimal single-photon sources in the solid state. *Nature Photonics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 10, n. 5, p. 340–345, mar. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2016.23>.

TOMM, N.; JAVADI, A.; ANTONIADIS, N. O.; NAJER, D.; LÖBL, M. C.; KORSCH, A. R.; SCHOTT, R.; VALENTIN, S. R.; WIECK, A. D.; LUDWIG, A.; WARBURTON, R. J. A bright and fast source of coherent single photons. *Nature Nanotechnology*, Springer Science and Business Media LLC, v. 16, n. 4, p. 399–403, jan. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41565-020-00831-x>.

XIE, Q.; ZHONG, H.; BATCHELOR, M. T.; LEE, C. The quantum rabi model: solution and dynamics. *J. Phys. A: Math. Theor.*, IOP Publishing, v. 50, n. 11, p. 113001, fev. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa5a65>.

YOSHIHARA, F.; FUSE, T.; ASHHAB, S.; KAKUYANAGI, K.; SAITO, S.; SEMBA, K. Characteristic spectra of circuit quantum electrodynamics systems from the ultrastrong- to the deep-strong-coupling regime. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 95, p. 053824, May 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.053824>.

Apêndices

APÊNDICE A – CÁLCULO DAS DERIVADAS DAS AMPLITUDES $c_1(t)$ $c_2(t)$

Tendo primeiramente que temos as superposições

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\omega_n t} |n\rangle,$$

vamos substituí-la na equação de Schrödinger dependente do tempo :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(x, t). \quad (\text{A.1})$$

Assim, tendo também que:

$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle,$$

Teremos

$$i\hbar \sum_n \left\{ \dot{c}_n e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} |n\rangle - \frac{iE_n}{\hbar} c_n e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} |n\rangle \right\} = \sum_n \left\{ c_n e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} E_n |n\rangle + c_n e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} \frac{t}{\hbar} \hat{H}_I |n\rangle \right\}.$$

Simplificando a equação teremos:

$$i\hbar \sum_n \dot{c}_n e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} |n\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} \hat{H}_I |n\rangle,$$

onde podemos multiplicar os dois lados da equação por $\langle k|$, e então tendo que o resultado do produto $\langle k|n\rangle = \delta_{kn}$:

$$i\hbar \dot{c}_k e^{-iE_k \frac{t}{\hbar}} = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} \langle k| \hat{H}_I(t) |n\rangle.$$

Onde finalmente teremos como resultado:

$$i\hbar \dot{c}_k = \sum_n c_n(t) e^{-iE_{nk} \frac{t}{\hbar}} \delta_{kn},$$

Tendo que H_I é a hamiltoniana de interação, $E_{nk} = E_n - E_k$ e que δ_{kn} representa a força de acoplamento desses estados.

APÊNDICE B – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO DA EVOLUÇÃO TEMPORAL DA HAMILTONIANA DE JAYNES CUMMINGS SEM EFEITOS DISSIPATIVOS

```
#importando pacotes
from qutip import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

plt.rcParams['text.usetex'] = True
#como ja está implícito no código inteiro que todos w=1, falta adequar o valor
de N

N=10
w=1

a = tensor(qeye(2), destroy(N))

sm = tensor(sigmam(), qeye(N))
sz = tensor(sigmaz(), qeye(N))

#nota-se que segue a hamiltoniana de jaynes-cummings com wc=wq=w=1, que faz com
que seja só g=0.5

g = 1

Hjc = (g/w)*(a.dag()*sm + a*sm.dag())

#definindo agora a quantidade de valores e os limites dos valores do tempo

times = np.linspace(0.0, 10.0, 80)

#em um primeiro caso, temos o estado excitado com o fóton absorvido

psi0 = tensor(basis(2,0),basis(N,0))

#neste segundo caso, temos o fóton em evidência e não é possível observar o estado
```

```

psi1 = tensor(basis(2,1),basis(N,1))

#obtendo agora os resultados por sesolve

result0 = sesolve(Hjc, psi0, times, [a.dag()*a, sm.dag()*sm])

result1 = sesolve(Hjc, psi1, times, [a.dag()*a, sm.dag()*sm])

#começamos agora a montar o gráfico da solução de psi0

fig = plt.figure(figsize=(12, 6), dpi=300)
gs = fig.add_gridspec(2, hspace=0.4)
ax = gs.subplots(sharex=True, sharey=True)
ax[0].plot(result0.times, result0.expect[0])
ax[0].plot(result0.times, result0.expect[1])
ax[0].set_xlabel('$g_0t$', fontsize=17)
ax[0].set_ylabel('Valores esperados', fontsize=17)
ax[0].legend(('<math>a^\dagger a>', '<math>\sigma_{-}^\dagger \sigma_{-}>'), loc=1,
            fontsize=17)
ax[0].tick_params(axis='y', labelsize=15)
ax[0].tick_params(axis='x', labelsize=15)

ax[1].plot(result1.times, result1.expect[0])
ax[1].plot(result1.times, result1.expect[1])
ax[1].set_xlabel('$g_0t$', fontsize=17)
ax[1].set_ylabel('Valores esperados', fontsize=17)
ax[1].tick_params(axis='x', labelsize=15)
ax[1].tick_params(axis='y', labelsize=15)

plt.show()

```

APÊNDICE C – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO DA EVOLUÇÃO TEMPORAL DA HAMILTONIANA DE JAYNES CUMMINGS CONSIDERANDO OS EFEITOS DISSIPATIVOS

```
#importando pacotes
from qutip import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy.interactive import printing
printing.init_printing(use_latex = True)

#defini-se os valores iniciais
N=10
w=1

a = tensor(qeye(2), destroy(N))

sm = tensor(sigmam(), qeye(N))
sz = tensor(sigmaz(), qeye(N))

#força de acoplamento aqui definida como
g = 1

#hamiltoniano de interação com os ajustes necessários
Hjc = (g/w)*(a.dag()*sm + a*sm.dag())

#definindo os valores e o passo da variação do tempo para o gráfico
times = np.linspace(0, 50, 1000)

#definindo psi0
psi0 = tensor(basis(2,1),basis(N,1))

#Calculando a dinâmica total do sistema
result = mesolve(Hjc, psi0, times, [np.sqrt(0.1*g)*a, np.sqrt(0.1*g)*sm], [a.dag()*
```

#começa o plot da figura, nota-se que foi definida o tamanho


```

fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 6), dpi=300)

#ajustando a figura plotada
ax.plot(result.times, result.expect[0])
ax.plot(result.times, result.expect[1])
ax.set_xlabel('$g_0$ t$', fontsize=17)
ax.set_ylabel('Valores esperados', fontsize=17)

#criando a legenda utilizando latex e definindo a sua posição no gráfico
ax.legend(('<math>a^{\dagger}</math>', '<math>\sigma_-^{\dagger}\sigma_-</math>'), loc=1, fontsize=17)
ax.tick_params(axis='x', labelsize=15)
ax.tick_params(axis='y', labelsize=15)

plt.show()

```

APÊNDICE D – CÓDIGO DA COMPARAÇÃO ENTRE O ESPECTRO DE ENERGIA, A FREQUÊNCIA DOS FÓTONS EMITIDOS E AS TAXAS DE TRANSIÇÃO

```
#importando pacotes:

from qutip import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import datetime
from sympy.interactive import printing

#permitindo o uso de LaTeX:

plt.rcParams['text.usetex'] = True

#começando a contar o tempo para saber a eficiência do código (caso necessário):
startTime = datetime.datetime.now()

#começamos escrevendo as características básicas do sistema

#Número de estados de fock
N = 25

a = tensor(qeye(2), destroy(N))

sy = tensor(sigmay(), qeye(N))
sz = tensor(sigmaz(), qeye(N))
sx = tensor(sigmoid(), qeye(N))

#frequencias que serão utilizadas (aqui, temos o caso mais satisfatório):
wc = 1
wq = 1.99

#criando variáveis que serão utilizadas em branco para evitar lixo nelas

x = []
```

```
eta = 0
```

```
V = []
```

```
auto0 = []
```

```
auto1 = []
```

```
auto2 = []
```

```
auto3 = []
```

```
dif10 = []
```

```
dif20 = []
```

```
dif31 = []
```

```
dif32 = []
```

```
tax10 = []
```

```
tax20 = []
```

```
tax31 = []
```

```
tax32 = []
```

```
X10 = []
```

```
X20 = []
```

```
X31 = []
```

```
X32 = []
```

```
freq10 = []
```

```
freq20 = []
```

```
freq31 = []
```

```
freq32 = []
```

```
res10 = []
```

```
res20 = []
```

```
res31 = []
```

```
res32 = []
```

```
test = []
```

```
#determinando o valor de eta, nota-se que não começa em zero:
```

```

x = np.linspace(0.0001, 3, 300)

#X1 = 1j*(a.dag() - a), pouco satisfatório
X1 = (a + a.dag()) #satisfatório

#aqui é feito a função paridade:

Par = -sz*(1j*np.pi*(a.dag())*a).expm();

#colocamos que eta são os valores definidos por x,
e então passaremos cada um dos cálculos a seguir
por cada valor de eta:

for eta in x:

#calcula-se primeiro a "parte do cosseno" da hamiltoniana e depois a do seno:

    cosseno = (2*eta*(a+a.dag())).cosm()

    senao = (2*eta*(a+a.dag())).sinm()

    H = wc*a.dag()*a + (wq/2)*(sz*cosseno + sy*senao)

#armazena o autoestado da hamiltoniana de
cada um valor dos valores de eta na variável V:

    V = H.eigenstates()

#checa a paridade para cada um dos autovetores criados:

    P = expect(Par, V[1]).real

#aqui, é determinado que somente depois do cruzamento, se a paridade não
for satisfeita, os valores dos autoestados 2 e 3 trocam entre si:

    P2 = ((1j)**2).real

    if abs(P2 - P[2]) >= 1e-8:

```

```

aux1 = V[0][2];
V[0][2] = V[0][3];
V[0][3] = aux1;

```

```

aux2 = V[1][2];
V[1][2] = V[1][3];
V[1][3] = aux2;

```

#antes do cruzamento, se eta é de fato menor que 0.4 o código roda normalmente

#Obtendo os valores dos primeiros 4 autoestados:

```

auto0.append(V[0][0])
auto1.append(V[0][1])
auto2.append(V[0][2])
auto3.append(V[0][3])

```

#Obtendo as frequências dos fótons emitidos a partir dos autoestados:

```

freq10 = V[0][1] - V[0][0]
freq20 = V[0][2] - V[0][0]
freq31 = V[0][3] - V[0][1]
freq32 = abs(V[0][3] - V[0][2])

```

```

dif10.append( freq10 )
dif20.append( freq20 )
dif31.append( freq31 )
dif32.append( freq32 )

```

#Obtendo as taxas de transição:

```

X10 = (abs( X1.matrix_element(V[1][0], V[1][1]) ))**2
X20 = (abs( X1.matrix_element(V[1][0], V[1][2]) ))**2
X31 = (abs( X1.matrix_element(V[1][1], V[1][3]) ))**2
X32 = (abs( X1.matrix_element(V[1][2], V[1][3]) ))**2

```

```

res10= ( freq10*X10)
res20= ( freq20*X20)
res31= ( freq31*X31)
res32= ( np.heaviside(freq32,0)*freq32*X32)

```

```

tax10.append( (res10) )
tax20.append( (res20) )
tax31.append( (res31) )
tax32.append( (res32) )

#este endTime calcula a quantidade do tempo que demorou
para rodar o código até tal momento, no caso daqui
ele desconsidera o tempo para criar o gráfico

endTime = datetime.datetime.now()
print(f"Total runtime: {endTime - startTime}")
fig, axis = plt.subplots(1, 3, figsize=(11.69, 4), dpi=300)

# Altura ajustada para manter os gráficos quadrados

# Define o tamanho da fonte dos números (ticks) para 12
plt.rc('font', size=12)

# Ajuste dos ticks no eixo x para intervalos de 0.5
x_ticks = np.arange(0, 2.51, 0.5) # Marcas de 0.5 em 0.5
y_ticks_taxa = np.arange(0, 2.1, 0.5) # Ticks de -0.1 a 2.1 com passo de 0.5
y_ticks_dif = np.arange(0, 2.26, 0.5) # Ticks para o gráfico de diferenças

# Plot dos gráficos na disposição horizontal

#Este primeiro gráfico se trata sobre o espectro de energia

axis[0].plot(x, auto0)
axis[0].plot(x, auto1)
axis[0].plot(x, auto2)
axis[0].plot(x, auto3)
axis[0].set_ylim(-1, 1.7)
axis[0].set_xlim(0, 2.25)
axis[0].set_xticks(x_ticks)
axis[0].set_xlabel('$ \eta_0$', fontsize=12)
axis[0].set_ylabel('$Energia / \hbar \omega_c$', fontsize=12);

#O segundo gráfico a seguir é sobre a frequência dos fótons emitidos

```

```

axis[1].plot(x, dif10)
axis[1].plot(x, dif20)
axis[1].plot(x, dif31)
axis[1].plot(x, dif32)
axis[1].legend(('$\Delta_{10}$', '$\Delta_{20}$', '$\Delta_{31}$', '$|\Delta_{32}|$'))
axis[1].set_ylim(-0.1, 2.25)
axis[1].set_xlim(0, 2.25)
axis[1].set_xticks(x_ticks)
axis[1].set_yticks(y_ticks_dif)
axis[1].set_xlabel('$\eta_0$', fontsize=12);
axis[1].set_ylabel('$Energia / \hbar \omega_c$', fontsize=12);

```

#Este terceiro gráfico é sobre as taxas de transição

```

axis[2].plot(x, tax10)
axis[2].plot(x, tax20)
axis[2].plot(x, tax31)
axis[2].plot(x, tax32)
axis[2].legend('$|1\rangle \rightarrow |0\rangle$', '$|2\rangle \rightarrow |0\rangle$', '$|3\rangle \rightarrow |0\rangle$')
axis[2].set_xlim(0, 2.25)
axis[2].set_ylim(-0.1, 2.1)
axis[2].set_xticks(x_ticks)
axis[2].set_yticks(y_ticks_taxa)
axis[2].set_xlabel('$\eta_0$', fontsize=12);
axis[2].set_ylabel('$\Gamma_{kj} / \kappa$', fontsize=12);

```

Define o tamanho da fonte dos ticks

```

for ax in axis:
    ax.tick_params(axis='both', labelsize=12)

```

Ajustando as etiquetas "(a)", "(b)" e "(c)"

```

axis[0].text(-0.15, 1.05, '(a)', transform=axis[0].transAxes,
             fontsize=14, va='top', ha='right')
axis[1].text(-0.1, 1.05, '(b)', transform=axis[1].transAxes,
             fontsize=14, va='top', ha='right')
axis[2].text(-0.15, 1.05, '(c)', transform=axis[2].transAxes,
             fontsize=14, va='top', ha='right')

```

```
# Ajusta o espaçamento entre os subplots para garantir que os gráficos  
fiquem quadrados
```

```
plt.subplots_adjust(wspace=0.4)
```

```
plt.show()
```