

Rafael Necchi Silva

Sobre Pavimentações do Plano Euclidiano

São José do Rio Preto

2014

Rafael Necchi Silva

Sobre Pavimentações do Plano Euclidiano

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Weber Flávio Pereira

São José do Rio Preto
2014

Silva, Rafael Necchi.

Sobre pavimentações do plano euclidiano / Rafael Necchi Silva. --
São José do Rio Preto, 2014
62 f. : il.

Orientador: Weber Flávio Pereira

Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria euclidiana.
3. Geometria plana - Estudo e ensino. 4. Polígonos. 5. Matemática –
Metodologia. I. Pereira, Weber Flávio. II. Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.81

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Rafael Necchi Silva

Sobre Pavimentações do Plano Euclidiano

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof^a. Dr^a. Flávia Souza Machado da Silva
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler
Professor Adjunto
Universidade Federal de Uberlândia - Uberlândia

São José do Rio Preto, 26 de setembro de 2014.

Dedico este trabalho a Deus, minha mãe Tânia e a minha esposa Caroline, que em nenhum momento me deixaram desanimar e sempre me apoiaram.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, pela oportunidade para iniciar essa nova etapa em minha vida, pela calma, serenidade e força para elaboração do trabalho e a disposição de chegar até o final.

Agradeço a minha mãe pelo incentivo, o apoio e a confiança para que tudo fosse possível.

Agradeço a minha esposa pelo tempo dedicado, pela inspiração, paciência e apoio que sem os quais o trabalho não teria chegado ao fim.

Agradeço ao Prof. Dr. Weber Flávio Pereira pela orientação, dedicação, trabalho e paciência para realizar e revisar este trabalho.

Agradeço ao meu irmão, cunhada e sobrinhas pelos momentos de descontração para me lembrar dos verdadeiros motivos de estar realizando esta etapa.

Agradeço a toda minha família e amigos por sempre estarem presente e ajudarem mesmo que indiretamente para que tudo sempre desse certo.

Agradeço a coordenação do PROFMAT e a todos os professores do curso pelos conhecimentos repartidos.

Agradeço todos os funcionários da UNESP, campus de São José o Rio Preto, pelo apoio, manutenção e conservação do ambiente de estudo.

Agradeço a CAPES, pelo apoio e incentivo financeiro durante o curso.

Agradeço a todos que participaram desta fase de minha vida mesmo que indiretamente e que os nomes aqui, por algum motivo, não foram citados. Obrigado!

Resumo

Este trabalho tem o propósito de desenvolver e auxiliar o estudo sobre pavimentações no Plano Euclidiano, mostrando diversos tipos de pavimentações e algumas aplicações.

Analizamos algumas classes de polígonos convexos e não convexos para que possamos entender melhor o porquê eles são ou não aceitáveis na pavimentação.

O objetivo central do trabalho é aplicar o estudo da pavimentação em sala de aula, onde é mostrado maneiras diferentes para aprendizagem em diferentes faixas etárias.

Palavras-chave: Pavimentações, Polígonos, Plano Euclidiano.

Abstract

This work has the purpose to develop and assist the study about tessellations in Euclidean Plane, showing various types of paving and some applications.

We analyze some classes of convex polygons and not convex so we can better understand why they are or not acceptable in paving.

The central objective in this work is the application the study of paving in the classroom, where it is shown different ways to learning at different ages.

Keywords: Paving, Polygons, Euclidean Plane.

Lista de Símbolos

- $\overline{AB}$: segmento de vértices nos pontos A e B ;
- $m(\overline{AB})$: medida do segmento $\overline{AB}$;
- $\overrightarrow{AB}$: vetor formado pelos pontos A e B ;
- $\cong$: congruência entre dois objetos;
- $\cap$: Interseção de dois conjuntos;
- $\hat{A}$: Ângulo interno do vértice A de um polígono;
- $\emptyset$: Conjunto vazio;
- $\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
1.1 Colinearidade, Intersecção e Linha Poligonal	12
1.2 Polígono	14
1.3 Transformações Geométricas	15
2 Pavimentação do Plano Euclidiano	18
2.1 Pavimentações Monoédricas do Plano Euclidiano por polígonos convexos	21
2.1.1 Triângulos que Pavimentam o Plano Euclidiano	22
2.1.2 Quadriláteros convexos que Pavimentam o Plano Euclidiano	23
2.1.3 Pentágonos Convexos que Pavimentam o Plano Euclidiano	24
2.1.4 Hexágonos Convexos que Pavimentam o Plano Euclidiano	38
2.2 Pavimentações Regulares do Plano Euclidiano	43
3 Polígonos que não pavimentam o plano	46
4 Aplicações	57
4.1 Pavimentações na natureza	57
4.2 Pavimentações em sala de aula	59
Referências Bibliográfica	61

Introdução

Para o homem a pavimentação existe desde que ele começou a usar pedras para cobrir o chão e as paredes de sua casa, chamando estas pedras posteriormente de ladrilhos. As mais antigas peças de ladrilhos conhecidas datam de 5000 anos a.C. e foram encontradas no Egito. Romanos e outros povos mediterrâneos retratavam pessoas e cenas naturais; Mouros e Árabes usavam figuras geométricas complexas e entrelaçadas. Apesar da arte ser bem antiga e bem desenvolvida, a ciência é recente, aproximadamente 100 anos, tendo aspectos que ainda não foram desenvolvidos. Já na natureza, a pavimentação é encontrada de diversas formas, como em células de tecidos biológicos, nas colméias, no arranjo das escamas de peixes, nas pinhas das coníferas, nos arranjos dos cristais, nas bolhas de sabão, etc.

O homem usa essa técnica em uma grande variedade de aplicações, sendo algumas delas: papel de parede, pisos decorativos com cerâmicas ou pedras, forros de madeira, estamparia de tecidos, malharias, crochet e no empacotamento ou empilhamento de objetos iguais, etc.

O objetivo desse trabalho é fazer um estudo rigoroso de alguns tipos de pavimentações do plano euclidiano e finalizar apresentando algumas aplicações na natureza e em sala de aula. A seguir, descrevemos de forma mais detalhada, o conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 1, apresentamos todas as definições e resultados preliminares que serão utilizados no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos as pavimentações monoédricas, onde é mostrado que é possível pavimentar o plano euclidiano com qualquer triângulo ou quadrilátero. Mostramos outras formas de polígonos que pavimentam o plano euclidiano, como os pentágonos e hexágonos convexos, mostrando as diferenças entre eles e a história de como foram estudados e descobertos. Este capítulo também aborda as diferentes formas de polígonos regulares que pavimentam e os que não pavimentam o plano euclidiano mostrando, a partir dos seus ângulos internos, o porque desses polígonos serem ou não compatíveis com a definição de pavimentação.

No Capítulo 3, provamos porque apenas polígonos de três, quatro, cinco ou seis lados, podem pavimentar o plano.

Por fim, no Capítulo 4, discutimos algumas aplicações dessas pavimentações. É mostrada uma nova visão dos conceitos pedagógicos sobre a pavimentação. Para mostrar a importância

da introdução desses conceitos na educação é apresentada diversas formas de aplicação em sala de aula, usando materiais e conceitos simples, que ajudam na formação cognitiva e lúdica dos alunos. Além de desenvolver e despertar o interesse nos conceitos matemáticos por verem e entenderem as aplicações dos mesmos em seu dia-a-dia.

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições fundamentais que precisaremos ao longo do desenvolvimento do assunto. Como é costume na Geometria Euclidiana, denotaremos pontos por letras maiúsculas do alfabeto latino, como A , B por exemplo, e o segmento de extremidades A e B será indicado por $\overline{AB}$, assim como, em alguns casos, o seu comprimento.

1.1 Colinearidade, Intersecção e Linha Poligonal

Consideramos A , B e C três pontos distintos no espaço euclidiano, queremos determinar condições para que tais pontos sejam colineares. Sabemos que três pontos distintos A , B e C são colineares se, e somente se, pertencem a uma mesma reta l , isto equivale a dizer, na linguagem da geometria analítica, que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm a mesma direção, ou ambos estão contidos em l .

Portanto, os pontos distintos A , B e C são colineares se, e somente se, existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

Exemplo 1.1 Os pontos $A = (2, 0)$, $B = (1, 2)$ e $C = (0, 4)$ são pontos colineares, pois $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 4)$, logo para $\lambda = \frac{1}{2}$, temos $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

Outro conceito importante que tratamos aqui é o conceito de intersecção de conjuntos. Dizemos que dois conjuntos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ se intersectam se eles possuem um elemento em comum, neste caso, denotamos por $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Caso contrário, isto é, se esses conjuntos não têm nenhum elemento em comum, dizemos que eles são *disjuntos* e denotamos por $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Exemplo 1.2 Os conjuntos $\mathcal{U} = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{V} = \{2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$ são disjuntos, pois um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.

Uma *linha poligonal* é a união de um número finito de segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, ..., $\overline{P_nP_{n+1}}$, tais que três pontos consecutivos P_{i-1} , P_i e P_{i+1} , não são colineares. Os pontos P_i são os *vértices* da linha poligonal.

Uma linha poligonal $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, ..., $\overline{P_nP_{n+1}}$ é chamada de *fechada* se $P_{n+1} = P_1$, caso contrário, ela é dita *aberta*.

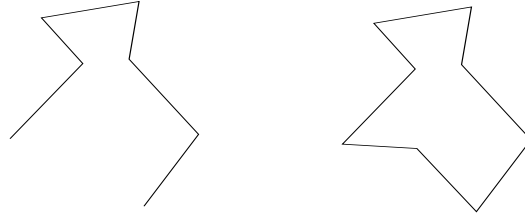


Figura 1.1: Exemplo de Linha Poligonal Aberta e Linha Poligonal Fechada.

Uma linha poligonal $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, ..., $\overline{P_nP_{n+1}}$ é chamada de *simples* se dois segmentos não consecutivos que a compõem são disjuntos.

Observação 1.1 Note que, das definições acima, é permitido uma linha poligonal se intersectar em um ponto diferente do vértice, porém se essa linha poligonal for simples, isso já não é mais permitido.

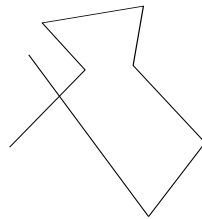


Figura 1.2: Exemplo de Linha Poligonal não simples.

Uma linha poligonal simples e fechada divide o plano em três conjuntos: uma região limitada, uma região ilimitada e a própria poligonal. Dizemos que os pontos da região limitada estão no *interior* da linha poligonal, e que os pontos da região ilimitada estão no *exterior* da linha poligonal.



Figura 1.3: Regiões do plano dividida por uma linha poligonal

1.2 Polígono

Definição 1.1 Um polígono é uma linha poligonal fechada e simples $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \dots, \overline{P_{i-1}P_i}, \overline{P_iP_{i+1}}, \dots, \overline{P_nP_1}$. Os pontos P_i são os vértices do polígono e os segmentos $\overline{P_{i-1}P_i}$ são as arestas do polígono.

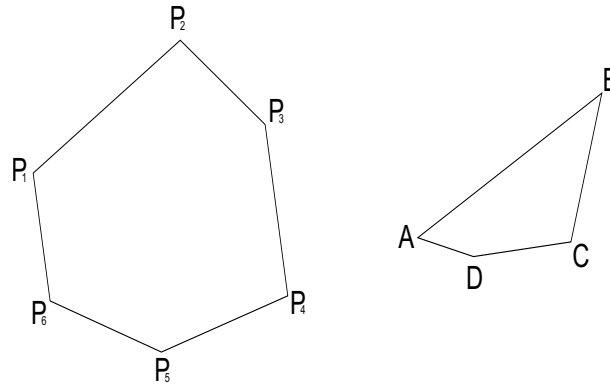


Figura 1.4: Exemplos de polígonos com, respectivamente, 6 e 4 arestas.

Observação 1.2 Um polígono delimita uma região do plano, chamada de região poligonal. As vezes, a palavra “polígono” também é usada para designar a região poligonal. Por abuso de notação, chamaremos de polígono, tanto a linha poligonal quanto a região poligonal.

Dois polígonos são congruentes quando a medida de seus lados e seus ângulos correspondentes são iguais.

Um polígono é *convexo* se cada reta determinada por dois de seus vértices consecutivos não intersecta os seus outros lados, caso contrário o polígono é *não convexo*.

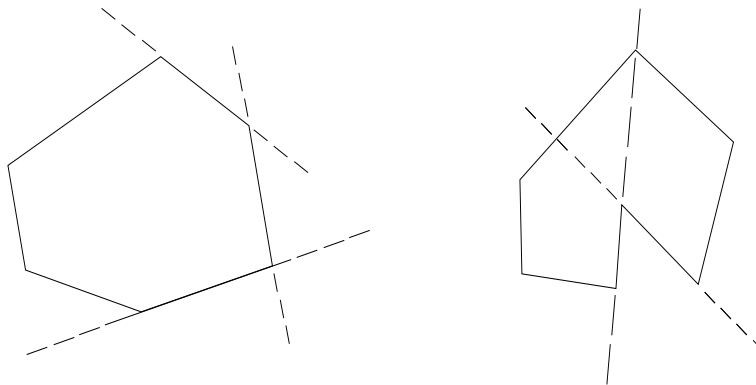


Figura 1.5: Exemplos de polígonos respectivamente, convexo e não convexo.

Um polígono pode ser classificado quanto ao seu número de lados, e a quantidade mínima de lados para se ter um polígono são três. Começando por três lados e até dez lados, temos respectivamente: triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono e decágono.

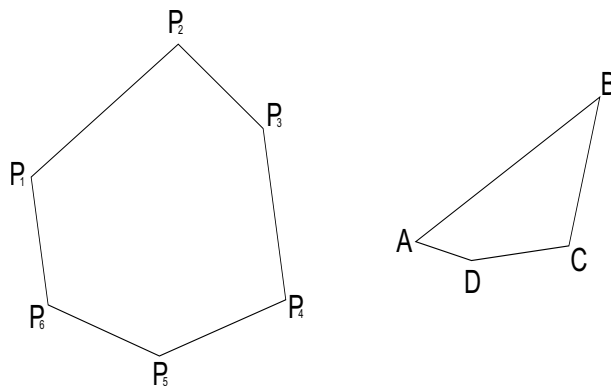


Figura 1.6: Exemplos de um hexágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ e um quadrilátero $ABCD$.

Definição 1.2 *Os ângulos internos de um polígono são os ângulos formados por dois lados consecutivos e os ângulos externos de um polígono são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo.*

Definição 1.3 *Um polígono diz-se regular se tiver todos os seus lados e ângulos congruentes, isto é, com mesma medida, sejam eles internos ou externos.*

Definição 1.4 *O perímetro de um polígono é o comprimento da linha poligonal que o forma, ou seja, é a soma das medidas de suas arestas.*

1.3 Transformações Geométricas

Nesta seção, definiremos algumas transformações geométricas que serão utilizados nos capítulos posteriores.

Transformações geométricas são aplicações bijetivas entre as duas figuras geométricas no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual ou semelhante. Logo temos duas classes de transformações geométricas, as isometrias (que não altera o tamanho das figuras, preservando as distâncias entre os pontos) e as homotetias (que altera o tamanho da figura, sem alterar suas características principais, como forma e ângulos). Para o nosso estudo, trabalharemos somente com isometrias, mas para isso, vamos defini-las.

Definição 1.5 *Uma isometria é uma transformação geométrica que preserva distância entre pontos, ou seja, $T : \pi \rightarrow \pi$ é uma isometria no plano π , se a distância entre $T(A)$ e $T(B)$ é igual a distância entre A e B .*

Observação 1.3 *Um resultado possível de se mostrar a respeito das isometrias é que elas preservam a amplitude dos ângulos, isto é, o ângulo formado pelos pontos não colineares A , B e C é o mesmo que o ângulo formado pelas suas imagens. Uma consequência disso é que se P é um polígono e $T(P)$ a sua imagem pela isometria T , então P e $T(P)$ são figuras congruentes.*

Dentro da classe das isometrias, temos as reflexões, rotações e translações.

Definição 1.6 No plano, uma reflexão, de eixo r é uma transformação geométrica que a cada ponto C faz corresponder um ponto C' , tal que, se $C \in r$, então $C = C'$, caso contrário, $\overline{CC'}$ é perpendicular ao eixo r e as distâncias de C e de C' ao eixo r são iguais.

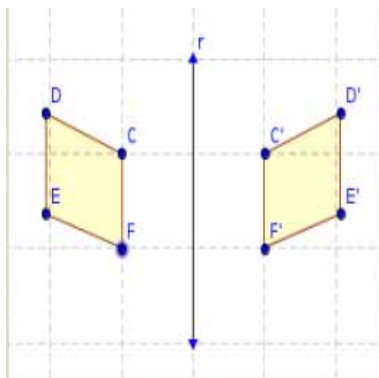


Figura 1.7: Reflexão de eixo r .

Definição 1.7 No plano uma rotação de centro D e amplitude α é uma transformação geométrica que a cada ponto B faz corresponder um ponto B' de tal forma que:

- $\overline{DB} \cong \overline{DB'}$;
- $\angle BDB' \cong \alpha$.

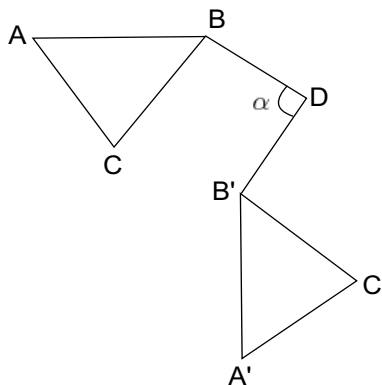


Figura 1.8: Rotação de centro D e amplitude α .

Observação 1.4 Note que da definição 1.7, a partir de um ponto B , temos dois possíveis pontos para a sua imagem, uma obtida por meio da rotação no sentido anti-horário (positiva) e a outra no sentido horário (negativa).

Definição 1.8 A translação associada ao vetor $\vec{u}$ pode ser representada por $T_{\vec{u}}$ e faz corresponder a cada ponto P um ponto P' tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$.

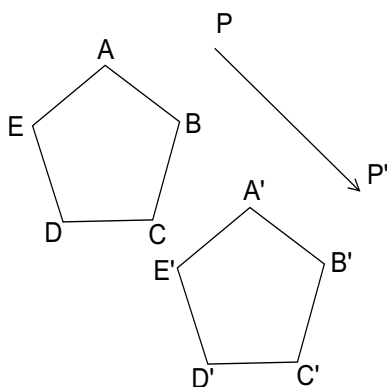


Figura 1.9: Translação associada ao vetor $\vec{u}$.

Pavimentação do Plano Euclidiano

Neste capítulo, definimos pavimentações parciais e ideais, focando principalmente no segundo tipo. Trabalhamos também com pavimentações monoédricas, que consiste em pavimentar todo o plano euclidiano somente com polígonos congruentes. Construimos pavimentações do plano por meio de triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Para o caso especial de pavimentações por pentágonos apresentamos todo o histórico matemático desse problema, que ainda está em aberto. Construimos passo-a-passo algumas dessas pavimentações e ilustramos outras. Por fim, terminamos o capítulo mostrando as pavimentações do plano somente por polígonos regulares e quais delas é possível.

A seguir vamos apresentar algumas importantes definições.

Definição 2.1 *Pavimentar é preencher completamente uma superfície plana com figuras geométricas, de modo que não haja sobreposição nem espaço entre elas.*

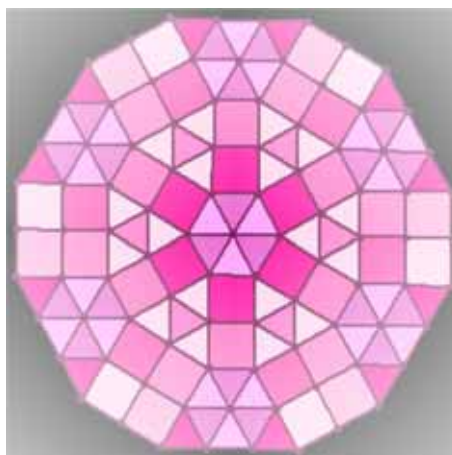


Figura 2.1: Exemplo de uma pavimentação qualquer.

As pavimentações podem ser parciais ou ideais.

Definição 2.2 *Uma pavimentação parcial de uma região poligonal P , delimitada pela linha poligonal L , simples e fechada consiste de uma partição de P em um número finito de polígonos, onde a união desses polígonos e suas fronteiras é igual a P e a intersecção dois a dois desses polígonos é vazia.*

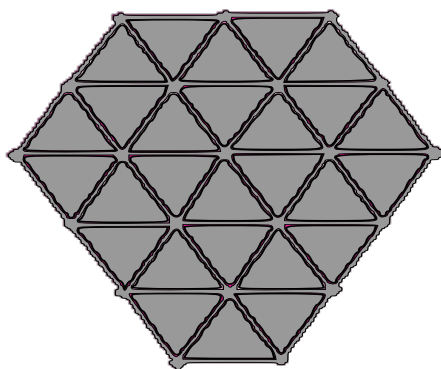


Figura 2.2: Exemplo de pavimentação parcial.

Definição 2.3 *Pavimentação ideal é quando preenchemos todo o plano com uma quantidade enumerável de polígonos de tal forma que a união dos polígonos e suas fronteiras seja todo o plano euclidiano e a intersecção dois a dois desses polígonos seja vazia.*



Figura 2.3: Exemplo de pavimentação ideal.

Em uma pavimentação qualquer, alguns elementos são essenciais e serão definidos a seguir.

Definição 2.4 *Os nós de uma pavimentação são todos os vértices dos polígonos da pavimentação. As arestas de uma pavimentação são os segmentos de retas que tem como extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de um polígono.*

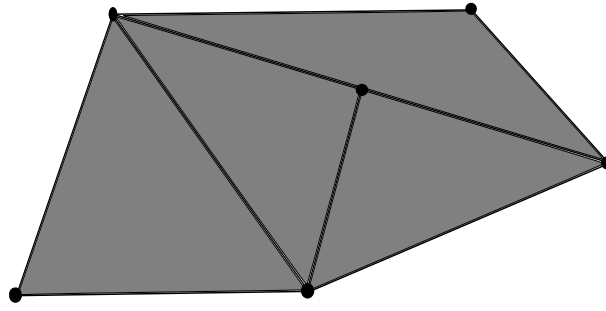


Figura 2.4: Nós e arestas de uma pavimentação

Note que, em um dado polígono da pavimentação, pode aparecer, na sua fronteira, uma quantidade de nós maior que a quantidade de vértices, conforme a Figura 2.4. Observe também, nessa mesma figura, que um lado do polígono pode ser formado por mais de uma aresta da pavimentação.

Dentro dessas duas classes de pavimentações, as ideais e as parciais, existe uma subclassificação, da qual destacamos as pavimentações *lado-a-lado*, *monoédrica*, *regular* e *transitiva*.

Definição 2.5 *Uma pavimentação é dita lado-a-lado quando todo nó na fronteira de um polígono da pavimentação é vértice deste.*

Observação 2.1 *Note que da definição 2.5, em uma pavimentação lado-a-lado não é possível termos nós sobre um lado de um polígono, consequentemente, cada aresta da pavimentação é lado de um polígono que a define.*

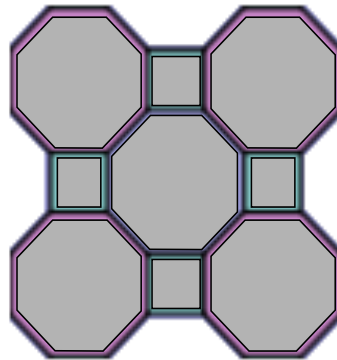


Figura 2.5: Exemplo de pavimentação lado-a-lado.

Definição 2.6 *Uma pavimentação é dita monoédrica quando ela for constituída de polígonos todos congruentes entre si.*

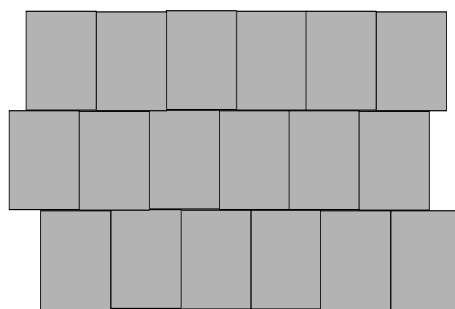


Figura 2.6: Exemplo de pavimentação monoédrica.

Definição 2.7 *Uma pavimentação é dita regular, quando ela é, ao mesmo tempo, uma pavimentação monoédrica e lado-a-lado, além disso, os polígonos que a definem são todos regulares.*

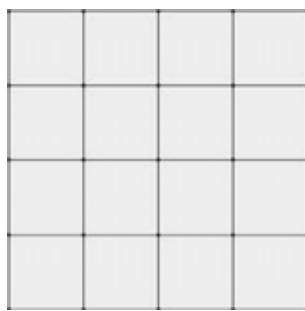


Figura 2.7: Exemplo de pavimentação regular.

Definição 2.8 *Uma pavimentação é transitiva se dadas duas peças quaisquer da pavimentação existir uma isometria do plano Euclidiano que preserva a pavimentação e que leva uma destas peças na outra.*

Observação 2.2 *Toda pavimentação do plano tem um domínio fundamental, que é a figura geométrica que define uma repetição na pavimentação para completar todo o plano através de translações desta figura geométrica.*

2.1 Pavimentações Monoédricas do Plano Euclidiano por polígonos convexos

Nesta seção, vamos demonstrar as pavimentações monoédricas até hoje encontradas. Vamos também mostrar que é possível fazer pavimentações monoédricas do plano por qualquer triângulo e qualquer quadrilátero convexo, assim como por pelo menos quatorze tipos de pentágonos convexos, encontrados até os dias de hoje, e três tipos de hexágonos convexos.

2.1.1 Triângulos que Pavimentam o Plano Euclidiano

Pavimentações através de triângulos são sempre possíveis e independe do tipo de triângulo tomado. Vamos ver os passos da construção de uma pavimentação com um triângulo qualquer.

Passo 1: Tome um triângulo ABC qualquer.

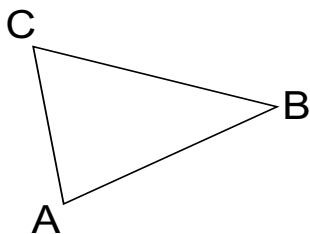


Figura 2.8: Triângulo ABC qualquer tomado como modelo.

Passo 2: Pela rotação de 180° em torno do ponto médio do lado $\overline{BC}$, obtenha um novo triângulo $A'B'C'$, congruente ao primeiro, onde coincidam os vértices B com C' e C com B' .

Estes dois triângulos formam juntos o *domínio fundamental* da pavimentação.

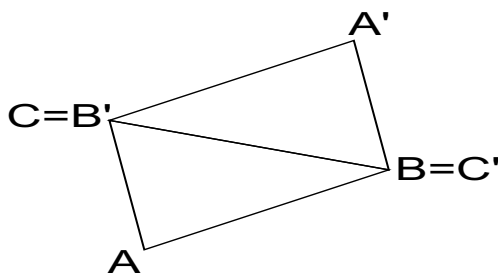


Figura 2.9: Domínio Fundamental.

Através de translações desse domínio por todo o plano, obtemos a pavimentação ideal do Plano Euclidiano.

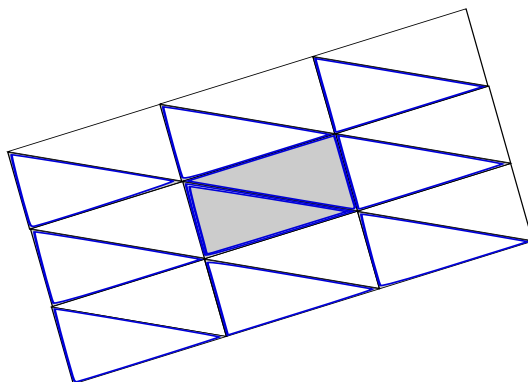


Figura 2.10: Pavimentação ideal.

Note que em cada nó desta pavimentação temos dois ângulos equivalentes a $\hat{A}$, dois a $\hat{B}$ e dois a $\hat{C}$.

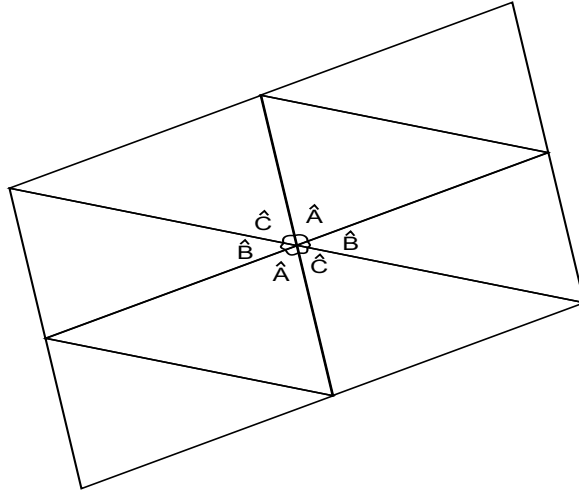


Figura 2.11: Ângulos de cada nó da pavimentação.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , temos um ângulo total de 360° por nó, o que nos dá um encaixe perfeito dos polígonos.

Portanto, demonstramos o seguinte resultado.

Teorema 2.1 *O Plano Euclidiano pode ser pavimentado monoedricamente por qualquer triângulo.*

2.1.2 Quadriláteros convexos que Pavimentam o Plano Euclidiano

De modo análogo ao que mostramos na seção anterior, nesta seção, iremos mostrar que o plano Euclidiano pode ser pavimentado monoedricamente por qualquer quadrilátero convexo.

Para fazermos esta demonstração, iremos considerar um quadrilátero convexo qualquer $ABCD$.

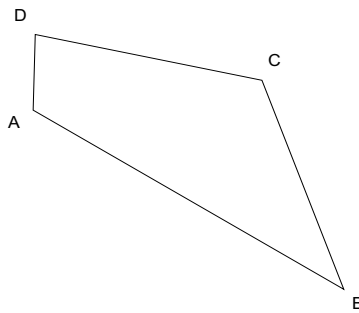


Figura 2.12: Quadrilátero $ABCD$.

A partir do quadrilátero dado, construímos um novo quadrilátero $A'B'C'D'$ rotacionando-o em 180° em torno do ponto médio do lado $\overline{BC}$, de modo que coincidam os vértices B com C' e C com B' . Como a rotação é uma isometria, temos que $\overline{CD}$ é congruente a $\overline{C'D'}$, $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{A'B'}$ e $\overline{AD}$ é congruente a $\overline{A'D'}$. Estes dois quadriláteros formam juntos o domínio fundamental da pavimentação.

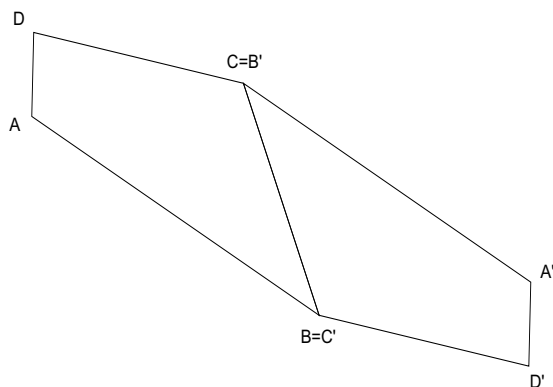


Figura 2.13: Domínio fundamental da pavimentação.

Assim, conseguimos a pavimentação ideal do Plano Euclidiano, transladando o domínio fundamental por todo o plano.

Note, na Figura 2.14, que os nós desta pavimentação são formados pelos quatro ângulos internos do quadrilátero inicial, e como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° , a pavimentação torna-se possível.

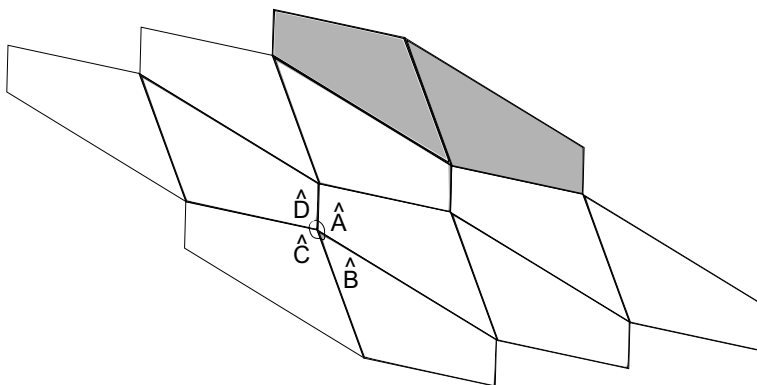


Figura 2.14: Pavimentação ideal e angulação dos nós.

Portanto, temos demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 2.2 *O plano Euclidiano pode ser pavimentado monoedricamente por qualquer quadrilátero convexo.*

2.1.3 Pentágonos Convexos que Pavimentam o Plano Euclidiano

Nessa seção vamos tratar o problema de pavimentação do plano Euclidiano por meio de pentágonos. Para esse tipo de pavimentação, a história nos trás algumas descobertas inusitadas e muito trabalho por conta de alguns matemáticos, além de não ser completamente definida até hoje, deixando em aberto a pergunta de que os pentágonos descobertos até hoje são todos os que podem pavimentar o plano, ou se ainda surgirão novas pavimentações?

Resumidamente, desde 1918, em uma tese de doutorado desenvolvida por Karl Reinhardt (ver [9]), vem se descobrindo novos pentágonos que pavimentam o plano. Nessa tese, Reinhardt apresentou cinco classes de pentágonos convexos, classes essas definidas através de algumas condições sobre os ângulos e os lados de um pentágono convexo, no qual todo pentágono pertencente a uma dessas classes, poderia ser utilizado para pavimentar o plano euclidiano.

É importante lembrar que podem existir vários pentágonos, não congruentes de um mesmo tipo, e que pavimentam o plano, tendo então várias pavimentações não congruentes do plano, com um mesmo tipo de pentágono convexo.

Posteriormente, problemas que envolviam pavimentações de todo tipo vinham sendo discutidos e em um livro de 1963 (ver [6]), lançado por Heinrick Heesch e Otto Kienzle, utilizando um esquema classificatório, desenvolvido em 1932 pelo próprio Heesch, os autores demonstraram que as pavimentações obtidas por Reinhardt, eram as únicas pavimentações do plano, por pentágonos convexos, que são transitivas, isto é, dadas duas peças da pavimentação, existe uma isometria do plano Euclidiano que preserva a pavimentação e que leva uma das peças na outra.

Parecia que os tipos de pentágonos encontrados por Reinhard, eram os únicos pentágonos que pavimentavam o plano, porém, após 35 anos de trabalho, o assistente do Laboratório de Física Aplicada da Universidade Johns Hopkins, Richard Brandon Kershner, demonstrou que esta ideia estava errada, pois ele havia encontrado outros três tipos de pentágonos convexos que pavimentavam o plano só que de maneira não transitiva. Além da descoberta, Kershner conjectura que existem somente esses oito tipos de pentágonos convexos que servem de peças para uma pavimentação monoédrica do plano.

Assim, em 1968, Kershner pensava que havia resolvido completamente o problema de pavimentação do plano por pentágonos convexos. Porém, aproximadamente sete anos mais tarde, um artigo publicado por Martin Gardner, em uma coluna de revista de divulgação científica chamada *Scientific American* (ver [4]), trouxe os oito tipos de pentágonos convexos que pavimentava o plano a um público mais geral, fazendo com que qualquer tipo de pessoa, seja ela da área de exatas ou não, tivesse acesso a esse problema.

Este artigo, fez com que o cientista da área de computação Richard James III, ao tentar descobrir um desses oito tipos de pentágonos convexos sem olhar a lista, encontrasse um nono tipo, enviando sua descoberta a Gardner, que publicou mais esta descoberta em um novo artigo da mesma revista. Assim, o problema que já era dado como resolvido, volta a se tornar um problema em aberto.

Este novo artigo fez despertar o interesse da dona-de-casa, Marjorie Rice, que não tinha nem sequer formação específica em matemática, a fazer uma bela pesquisa sobre quais tipos de pentágonos convexos poderiam pavimentar o plano. Rice fez várias descobertas sobre o assunto, a se destacar, quatro novos tipos de pavimentações do plano por pentágonos convexos.

O último pentágono encontrado até os dias de hoje, foi descoberto em 1985 pelo estudante

de matemática da Universidade de Dortmund, Rolf Stein, que compôs os 14 tipos de pentágonos convexos que pavimentam o plano euclidiano. Apesar de não ter sido descoberto nenhum outro pentágono convexo que pavimente o plano euclidiano, a demonstração de que essa lista está finalizada também está em aberto.

Apresentaremos, nessa seção, os cinco primeiros tipos de pentágonos que pavimentam o plano descobertos por Reinhardt, a construção do domínio fundamental de cada um deles e o esboço da pavimentação ideal. Finalizamos a seção apresentando o esboço de todas as pavimentações formadas por pentágonos convexos descobertas até hoje.

Tipo 1.

O primeiro tipo de pentágono de Reinhardt são aqueles que possuem três ângulos consecutivos que somam juntos 360° . Para construir uma pavimentação, com este tipo de pentágono, considere um pentágono $ABCDE$ qualquer tal que os três ângulos consecutivos $\hat{E}$, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ somem 360° , conforme Figura 2.15.

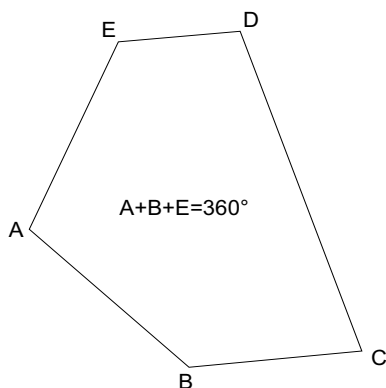


Figura 2.15: Pentágono que possui três ângulos consecutivos que somam juntos 360° .

A partir de $ABCDE$, construa um novo pentágono $A'B'C'D'E'$, congruente ao primeiro, através da rotação em 180° em torno do ponto médio do segmento $\overline{CD}$, de modo que coincidam os vértices C com D' e D com C' .

Esses dois pentágonos formam juntos o domínio fundamental da pavimentação.

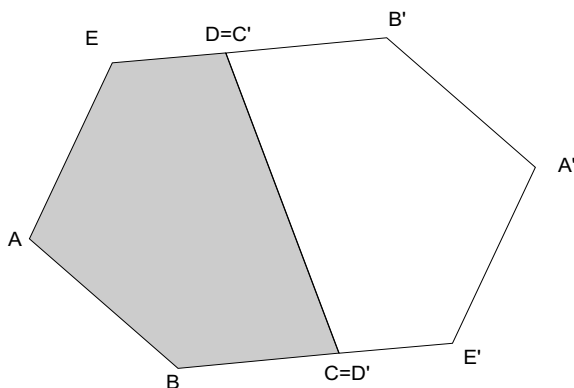


Figura 2.16: Domínio fundamental.

Assim, através de translações obtemos a pavimentação ideal do plano, conforme Figura 2.17.

Da Figura 2.17, note que os dois tipos de nós desta pavimentação são formados pelos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{E}$, que, por construção, somam juntos 360° , e pelos ângulos $\hat{C}$, $\hat{D}$ e 180° , que também somam juntos 360° , pois $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ por construção, tornando assim, possível a pavimentação.

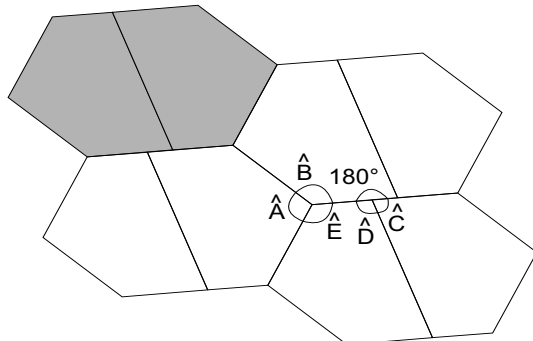


Figura 2.17: Pavimentação Ideal e ângulos de cada tipo de nó

Tipo 2.

O segundo tipo de pentágono de Reinhardt, são aqueles que possuem dois lados congruentes e três ângulos, dois consecutivos e um não, que somam juntos 360° . Considere um pentágono $ABCDE$ qualquer satisfazendo essas condições, de modo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ sejam congruentes e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ somem 360° , conforme Figura 2.18.

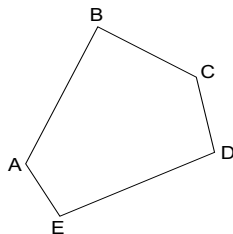


Figura 2.18: Segundo tipo de pentágono de Reinhardt.

Descrevemos a seguir, o processo construtivo para a pavimentação com esse pentágono.

A partir de $ABCDE$, obtenha um novo pentágono $A'B'C'D'E'$, congruente ao primeiro, através da rotação em 180° em torno do ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e tal que coincida os vértices C com D' e D com C' .

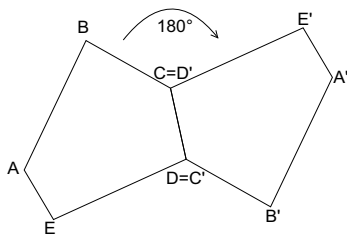


Figura 2.19: Rotação de 180° .

Em seguida, construa um novo pentágono $A''B''C''D''E''$, congruente ao primeiro através de uma reflexão de $ABCDE$ por um eixo vertical, uma rotação de 90° no sentido horário e uma translação tal que coincida os vértices D' com A'' e E' com B'' . Note que isto é possível, pois por construção, $\overline{A''B''} \cong \overline{D'E'}$ e o segmento $\overline{E''A''}$ sobrepõe o segmento $\overline{BC}$, pois por hipótese, $\hat{C} + \hat{D}' + \hat{A}'' = 360^\circ$.

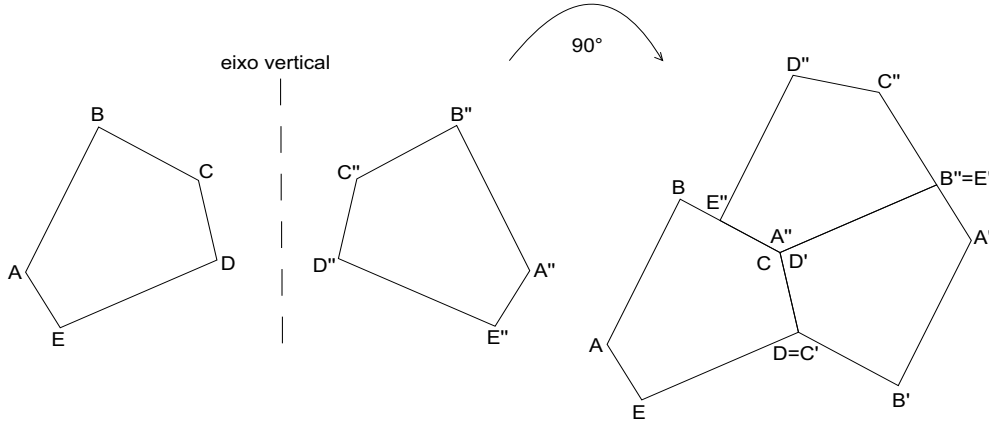


Figura 2.20: Reflexão no eixo vertical, rotação de 90° e translação.

Por fim, construa um novo pentágono $A'''B'''C'''D'''E'''$, congruente ao primeiro e através de uma reflexão de $ABCDE$ por um eixo horizontal, uma rotação de 90° no sentido horário e uma translação tal que coincida os vértices D com A''' e E com B''' . Note que isto é possível, pois por construção, $\overline{A'''B'''} \cong \overline{DE}$ e o segmento $\overline{E'''A'''}$ sobrepõe o segmento $\overline{B'C'}$, além disso, $\hat{D} + \hat{C}' + \hat{A}''' = 360^\circ$.

Esses quatro pentágonos formam juntos o domínio fundamental da pavimentação.

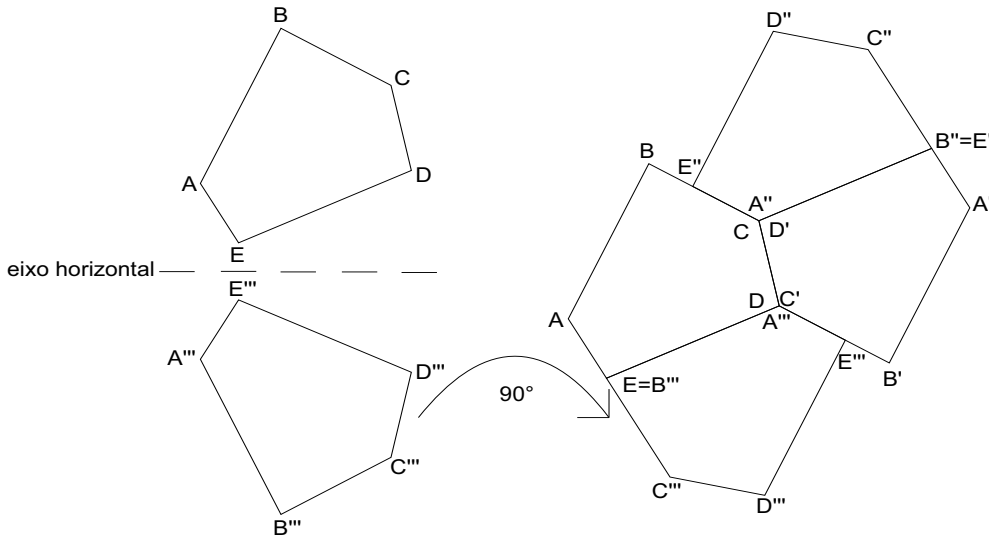


Figura 2.21: Construção do domínio fundamental da pavimentação.

Assim, através de translações de figuras congruentes a esse domínio por todo o plano, ver Figura 2.22.

Note que esta pavimentação é constituída por 2 tipos de nós. O primeiro é formado pelos ângulos $\hat{A}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, que, por hipótese, somam juntos 360° , e o segundo é formado pelos ângulos $\hat{B}$, $\hat{E}$ e 180° , que também somam juntos 360° , pois $\hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$, tornando possível a pavimentação.

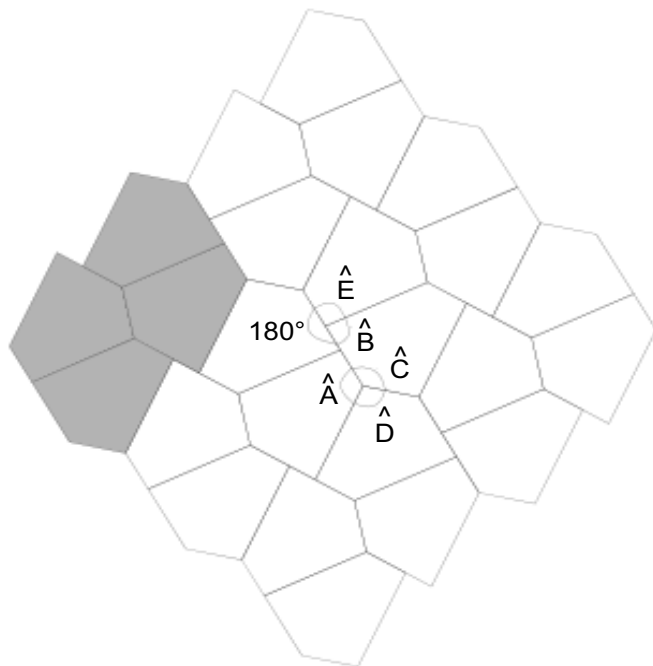


Figura 2.22: Pavimentação Ideal e os ângulos de cada tipo de nó.

Tipo 3.

O terceiro tipo de pentágono de Reinhardt, são aqueles que possuem um par de lados congruentes, a soma da medida de dois de seus lados igual a medida de um terceiro lado e três ângulos que medem 120° . Considere um pentágono $ABCDE$ qualquer satisfazendo essas condições, de modo que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $m(\overline{CD}) + m(\overline{EA}) = m(\overline{DE})$ e os ângulos $\hat{B}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$ medem 120° , conforme Figura 2.23.

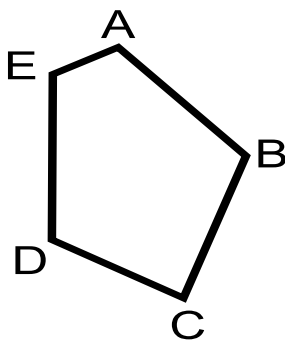


Figura 2.23: Terceiro tipo de pentágono de Reinhardt.

Descrevemos a seguir, o processo construtivo para a pavimentação do plano euclidiano com esse pentágono.

A partir de $ABCDE$, obtenha um novo pentágono $A'B'C'D'E'$, congruente ao primeiro, através da rotação em 120° , no sentido horário, em torno do vértice B , tal que coincidam os vértices B com B' e A com C' . Note que isto é possível pois os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes por hipótese.

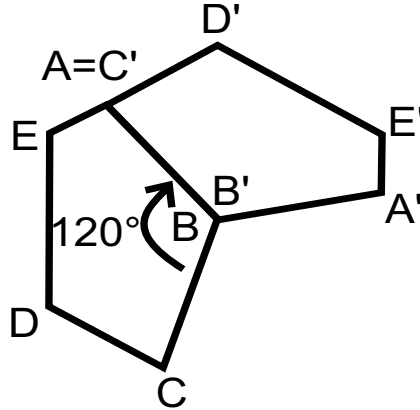


Figura 2.24: Rotação de 120° no sentido horário.

Em seguida, construa um novo pentágono $A''B''C''D''E''$ congruente ao primeiro através da rotação de $ABCDE$ em 120° no sentido anti-horário em torno do vértice B , tal que coincidam os vértices B com B'' e C com A'' . Novamente, isto é possível pois os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes por hipótese.

Os três pentágonos obtidos formam juntos o domínio fundamental da pavimentação, ver Figura 2.25. Agora a pavimentação ideal é obtida através de translações desse domínio fundamental pelo plano todo, ver Figura 2.26.

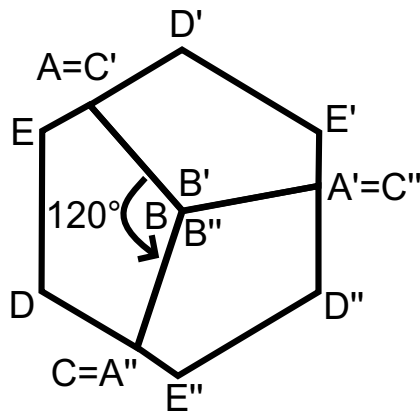


Figura 2.25: Domínio fundamental da pavimentação.

Note que esta pavimentação é constituída por 4 tipos de nós. Três deles são formados por três ângulos iguais, a saber, um nó com três ângulos $\hat{B}$, um com três ângulos $\hat{E}$ e outro com três ângulos $\hat{D}$, aonde a soma de três desses ângulos é, por hipótese, 360° . O quarto nó é formado pelos ângulos $\hat{A}$, $\hat{C}$ e 180° , que também somam juntos 360° , pois $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$.

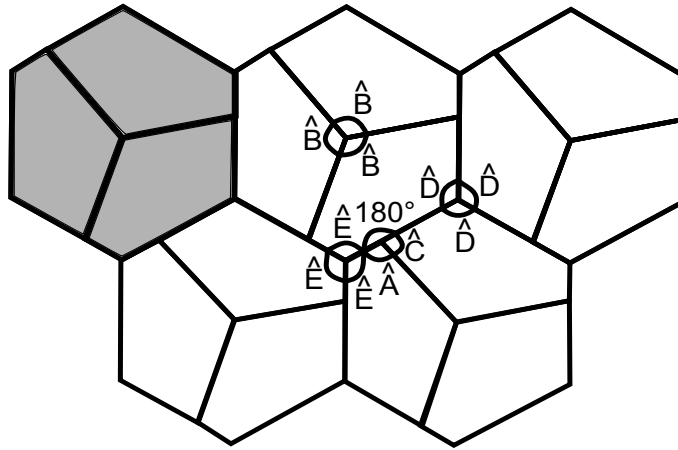


Figura 2.26: Pavimentação Ideal e os ângulos de cada tipo de nó.

Observação 2.3 Note que o domínio fundamental desta última pavimentação é um hexágono regular, pois $m(\overline{CD}) + m(\overline{EA}) = m(\overline{DE})$ e os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{E}$ são 120° , fazendo com que os seis lados sejam congruentes, assim como os seis ângulos internos. Pavimentações desse tipo, com polígonos regulares, serão estudados mais adiante.

Tipo 4.

O quarto tipo de pentágono de Reinhardt, são aqueles que possuem dois pares de lados congruentes e dois ângulos que medem 90° . Como um exemplo, considere um pentágono $ABCDE$ qualquer satisfazendo essas condições, de modo que $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, $\overline{DE} \cong \overline{EA}$ e os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{E}$ correspondam a 90° , conforme Figura 2.27.

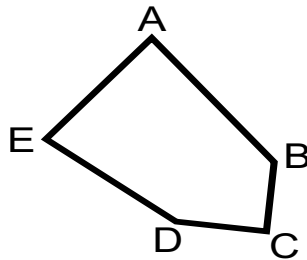
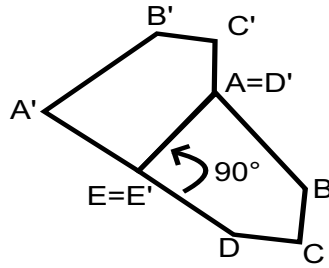


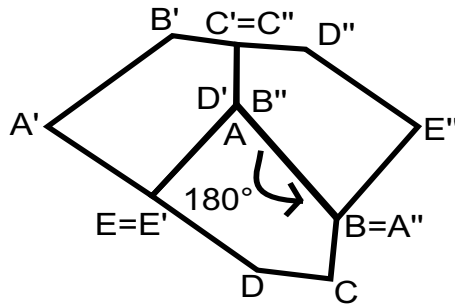
Figura 2.27: Quarto tipo de pentágono de Reinhardt.

Descrevemos a seguir, o processo construtivo para a pavimentação do plano euclidiano com esse pentágono.

A partir de $ABCDE$, obtenha um novo pentágono $A'B'C'D'E'$, congruente ao primeiro, através da rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do vértice E , tal que coincidam os vértices E com E' e A com D' . Note que como $\overline{EA} \cong \overline{D'E'}$ e o ângulo $\hat{E} = 90^\circ$, por hipótese, $\overline{D'E'}$ ficará sobreposta à $\overline{EA}$.

Figura 2.28: Rotação de 90° no sentido anti-horário.

Em seguida, construa outro pentágono $A''B''C''D''E''$, congruente a $ABCDE$, através de uma rotação deste de 180° em torno do ponto médio do segmento $\overline{AB}$, tal que coincida os vértices A com B'' e B com A'' . Note que, como por hipótese $\overline{AB} \cong \overline{A''B''}$, $\overline{C'D'} \cong \overline{B''C''}$ e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{D'}$ e $\hat{B''}$ somam juntos 360° , $\overline{A''B''}$ ficará sobreposta à $\overline{AB}$ assim como $\overline{B''C''}$ ficará sobreposta à $\overline{C'D'}$.

Figura 2.29: Rotação de 180° no sentido anti-horário.

Por fim, construa um quarto pentágono $A'''B'''C'''D'''E'''$, congruente a $ABCDE$, através de uma rotação deste de 90° no sentido horário em torno do vértice C , tal que coincida os vértices C com C''' e B com D''' . Note que, como por construção $\overline{BC} \cong \overline{C'''D'''}$, $\overline{E''A''} \cong \overline{D'''E'''}$, o ângulo $\hat{C} = 90^\circ$ e os ângulos $\hat{B}$, $\hat{A''}$ e $\hat{D'''}$ somam juntos 360° , $\overline{C'''D'''}$ ficará sobreposta à $\overline{BC}$ assim como $\overline{D'''E'''}$ ficará sobreposta à $\overline{E''A''}$.

Estes quatro pentágonos formam juntos o domínio fundamental da pavimentação, ver Figura 2.30.

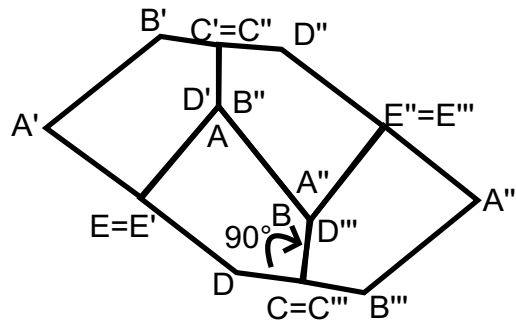


Figura 2.30: Domínio fundamental da pavimentação.

Assim, a pavimentação ideal é obtida através de translações desse domínio fundamental pelo plano todo, ver Figura 2.31.

Note que esta pavimentação é constituída por 3 tipos de nós, o primeiro é formado pelos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$, que somam juntos 360° , os outros dois tipos de nós são formados por quatro ângulos $\hat{C}$ ou quatro ângulos $\hat{E}$. Como tanto $\hat{C}$ quanto $\hat{E}$ são retos por hipótese, eles somam juntos 360° , tornando possível a pavimentação.

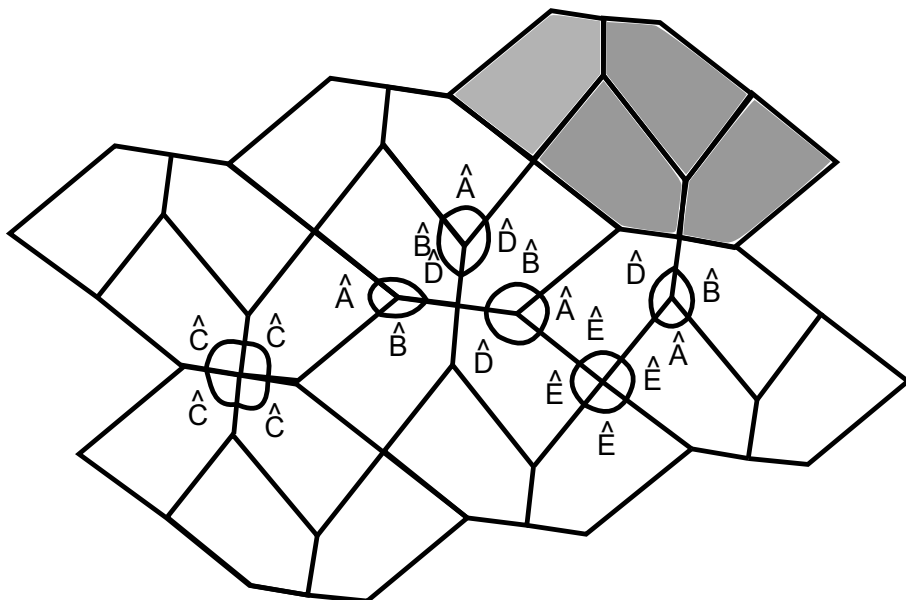


Figura 2.31: Pavimentação Ideal e os ângulos de cada tipo de nó.

Tipo 5.

Por fim, o quinto tipo de pentágono de Reinhardt, são aqueles que possuem dois pares de lados congruentes, com um dos ângulos entre estes lados medindo 120° e o outro medindo 60° . Como um exemplo, considere um pentágono $ABCDE$ qualquer satisfazendo essas condições, de modo que $\overline{EA} \cong \overline{AB}$, $\overline{CD} \cong \overline{DE}$, $\hat{A} = 120^\circ$ e $\hat{D} = 60^\circ$, conforme Figura 2.32.

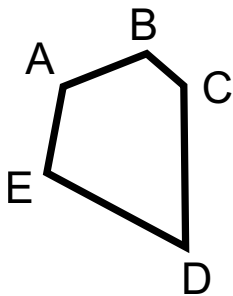


Figura 2.32: Quinto tipo de pentágono de Reinhardt.

Descrevemos a seguir, o processo construtivo para a pavimentação do plano euclidiano com esse pentágono.

Para obter o domínio fundamental desta pavimentação, construa 5 pentágonos congruentes ao primeiro através de rotações de 60° , 120° , 180° , 240° e 300° , no sentido horário, em torno do vértice D , respectivamente. Note que, como $\overline{CD} \cong \overline{DE}$ e o ângulo $\hat{D} = 60^\circ$, os lados respectivos a $\overline{DE}$ ficarão sobrepostos aos lados respectivos a $\overline{CD}$.

Estes quatro pentágonos formam juntos o domínio fundamental da pavimentação, ver Figura 2.33.

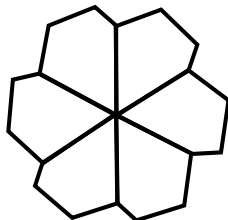


Figura 2.33: Domínio fundamental da pavimentação.

Assim, a pavimentação ideal é obtida através de translações desse domínio fundamental pelo plano todo, ver Figura 2.34.

Note que esta pavimentação é constituída por três tipos de nós, o primeiro é formado por seis ângulos $\hat{D}$ que somam juntos 360° , o segundo é formado por três ângulos $\hat{A}$ que por hipótese, somam juntos 360° e o terceiro é formado pelos ângulos $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{E}$, que também somam juntos 360° .

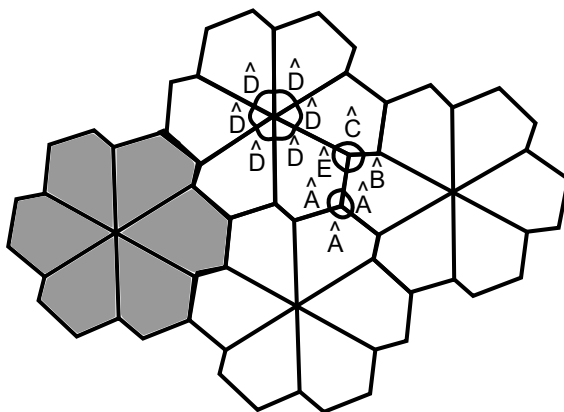


Figura 2.34: Pavimentação Ideal e os ângulos de cada tipo de nó.

Apresentamos portanto, os cinco pentágonos de Karl Reinhard que pavimentam o plano euclidiano, exposto por ele em sua tese de doutorado. Fizemos também a construção do domínio fundamental e esboçamos a pavimentação ideal para cada um desses casos. A seguir, falaremos dos demais casos de pavimentação com pentágonos que foram surgindo após o trabalho de Reinhard. Ao total, são nove casos e para tais, apresentaremos apenas as condições que determinam o pentágono e parte da pavimentação ideal.

Os pentágonos de Richard Kershner.

O primeiro dos pentágonos de Kershner e sexto no total são aqueles formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.35. Um pentágono $ABCDE$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{DE} \cong \overline{EA}$, $\overline{BC} \cong \overline{BD}$, $\hat{A} \cong 2\hat{C}$ e $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 360^\circ$.

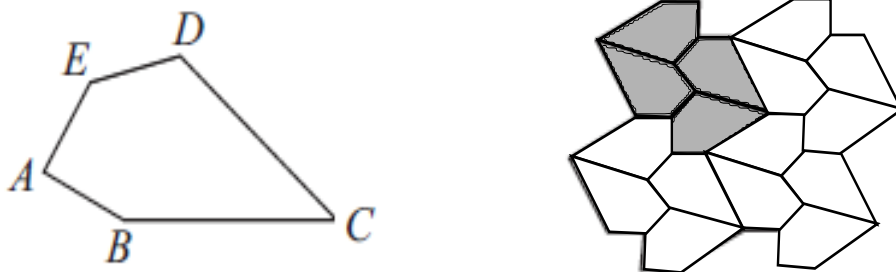


Figura 2.35: Primeiro pentágono de Kershner e sua pavimentação ideal.

O segundo dos pentágonos de Kershner e sétimo no total são aqueles formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.36. Um pentágono $ABCDE$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{EA}$, $2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$ e $2\hat{D} + \hat{A} = 360^\circ$.

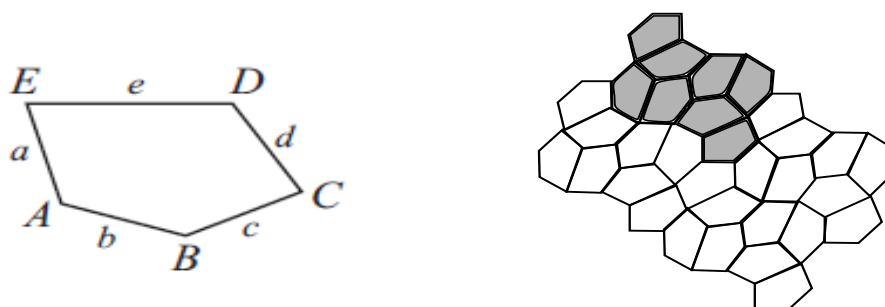


Figura 2.36: Segundo pentágono de Kershner e sua pavimentação ideal.

O terceiro dos pentágonos de Kershner e oitavo no total são aqueles formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.37. Um pentágono $ABCDE$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{EA}$, $2\hat{A} + \hat{B} = 360^\circ$ e $2\hat{D} + \hat{C} = 360^\circ$.

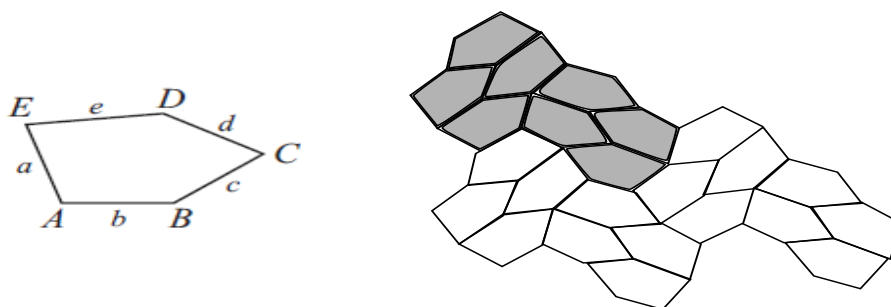


Figura 2.37: Terceiro pentágono de Kershner e sua pavimentação ideal.

O pentágono de Richard James.

O pentágono de Richard James é o nono pentágono no total e é aquele formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.38. Um pentágono $ABCDE$ qualquer, tal que $\overline{AB} \cong \overline{EA}$, $m(\overline{AB}) = m(\overline{BC}) + m(\overline{DE})$, $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$, $2\hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$ e $2\hat{C} + \hat{B} = 360^\circ$.

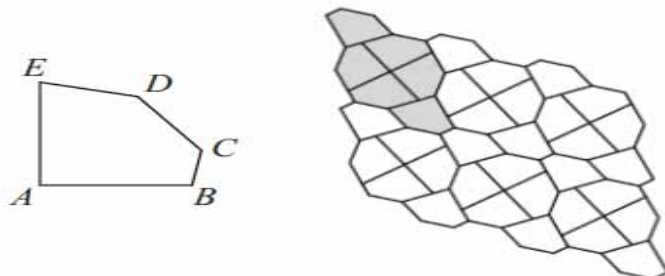


Figura 2.38: Pentágono de Richard James e sua pavimentação ideal.

Os pentágonos de Majorie Rice.

Como já foi dito, Majorie Rice, uma dona-de-casa, por curiosidade, entre 1976 e 1977, descobriu outros quatro pentágonos que pavimentam o plano, aumentando com isso a lista para treze e deixando o problema em aberto. Descrevemos, a seguir, as condições impostas sobre esses pentágonos, seus domínios fundamentais e a pavimentação ideal destes.

O primeiro dos pentágonos de Majorie e décimo no total são aqueles formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.39. Um pentágono $ABCDE$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{EA}$, $2\hat{E} + \hat{B} = 360^\circ$ e $2\hat{D} + \hat{C} = 360^\circ$.

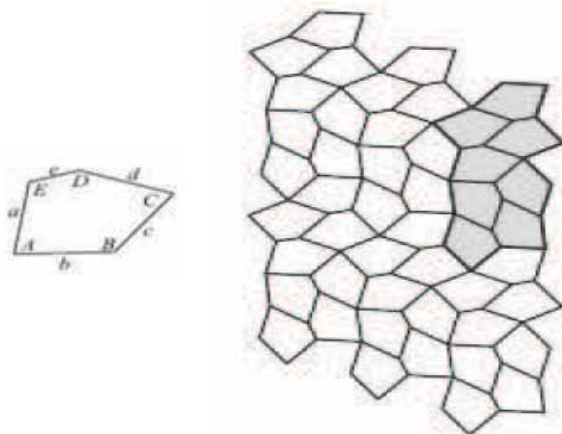


Figura 2.39: Primeiro pentágono de Majorie, seu domínio fundamental e sua pavimentação.

O segundo dos pentágonos de Majorie e décimo primeiro no total são aqueles formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.40. Um pentágono $ABCDE$ tal que $\overline{CD} \cong \overline{AD}$, $m(\overline{AD}) = 2m(\overline{EA}) + m(\overline{BC})$, $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$ e $2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$.

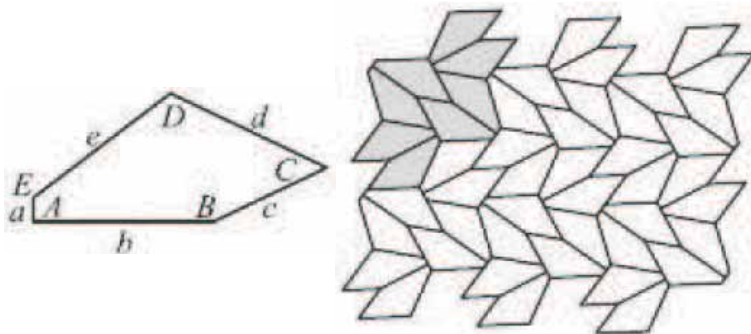


Figura 2.40: Segundo pentágono de Majorie, seu domínio fundamental e sua pavimentação.

O terceiro dos pentágonos de Majorie e décimo segundo no total são aqueles formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.41. Um pentágono $ABCDE$ tal que $2\overline{AE} \cong \overline{DC}$, $m(\overline{DC}) = m(\overline{BC}) + m(\overline{DE})$, $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$ e $2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$.

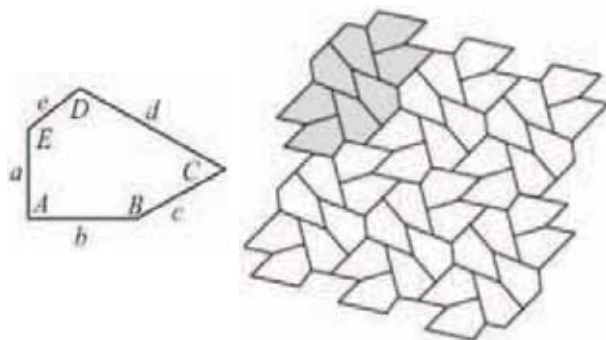


Figura 2.41: Terceiro pentágono de Majorie, seu domínio fundamental e sua pavimentação.

O quarto dos pentágonos de Majorie e décimo terceiro no total são aqueles formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.42. Um pentágono $ABCDE$ tal que $2\overline{BC} \cong 2\overline{DC} \cong \overline{DE}$, $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{B} = \frac{360^\circ - \hat{D}}{2}$ e $\hat{E} = \frac{360^\circ - \hat{D}}{2}$.

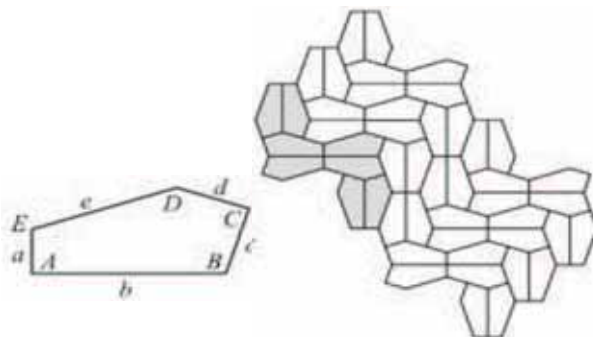


Figura 2.42: Quarto pentágono de Majorie, seu domínio fundamental e sua pavimentação.

O pentágono de Rolf Stein.

O último pentágono descoberto é datado de 1985 e foi obtido pelo estudante Rolf Stein, formando os quatorze pentágonos até então conhecidos. Ele é formado por pentágonos que apresentam as mesmas características do exemplo da figura 2.43. Um pentágono $ABCDE$ tal que $2\overline{BC} \cong 2\overline{EA} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE}$, $\hat{A} = 90^\circ$, $2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$, $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$.

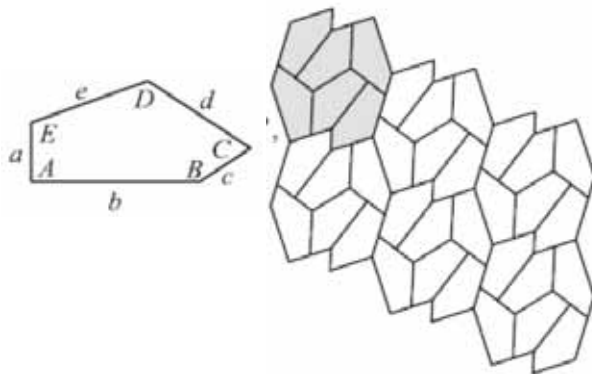


Figura 2.43: Pentágono de Rolf Stein, seu domínio fundamental e sua pavimentação.

2.1.4 Hexágonos Convexos que Pavimentam o Plano Euclidiano

Na mesma tese de doutorado citada anteriormente [9], Reinhardt provou a existência de apenas três tipos de hexágonos convexos que pavimentam o plano, estes resultados também foram demonstrado posteriormente por Bellá Bollobás em 1963 (ver [2]). Vejamos agora, uma rápida construção da pavimentação monoédrica por cada um desses três tipos e a diferença entre eles.

Caso1.

Esse caso é formado por hexágonos que possuem dois lados opostos, congruentes e paralelos. Considere um hexágono $ABCDEF$ qualquer, tal que $\overline{BC}$ é paralelo e congruente a $\overline{EF}$.

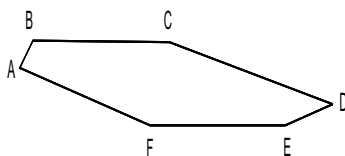


Figura 2.44: Hexágono que possui dois lados opostos, congruentes e paralelos

Em seguida, construa outro hexágono $A'B'C'D'E'F'$, congruente ao primeiro, através de uma rotação de $ABCDEF$ de 180° em torno do ponto médio de $\overline{AF}$, tal que coincida os vértices A com F' e F com A' , obtendo assim o domínio fundamental, conforme Figura 2.45.

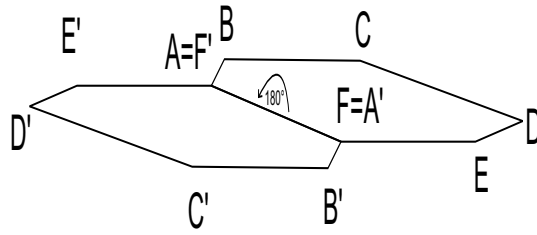


Figura 2.45: Domínio fundamental

Assim, através de translações do domínio fundamental por todo o plano, temos a pavimentação ideal.

Note que nessa pavimentação, todos os nós são formados pelos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{F}$ ou pelos ângulos $\hat{C}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$.

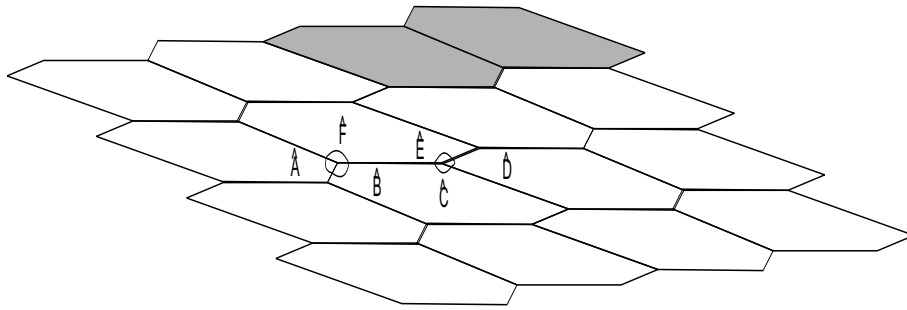
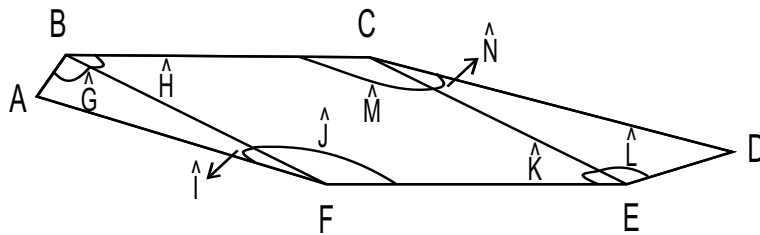


Figura 2.46: Pavimentação ideal e angulação de cada tipo de nó da pavimentação.

Vamos mostrar que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{F} = \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$. Observe que no hexágono tomado, se traçarmos os segmentos $\overline{BF}$ e $\overline{CE}$, dividindo o ângulo $\hat{B}$ em $\hat{G}$ e $\hat{H}$, o ângulo $\hat{F}$ em $\hat{I}$ e $\hat{J}$, o ângulo $\hat{C}$ em $\hat{M}$ e $\hat{N}$ e o ângulo $\hat{E}$ em $\hat{K}$ e $\hat{L}$, conforme Figura 2.47, temos que $\hat{A} + \hat{G} + \hat{I} = 180^\circ$ e $\hat{L} + \hat{N} + \hat{D} = 180^\circ$, pois são ângulos internos dos triângulos ABF e CDE . Observe também que o quadrilátero $BCEF$ é um paralelogramo, pois $\overline{BC}$ e $\overline{FE}$ são paralelos e tem mesma medida, e com isso $\hat{H} + \hat{J} = 180^\circ$ e $\hat{K} + \hat{M} = 180^\circ$. Portanto, temos que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{F} = \hat{A} + \hat{G} + \hat{H} + \hat{I} + \hat{J} = (\hat{A} + \hat{G} + \hat{I}) + (\hat{H} + \hat{J}) = (180^\circ) + (180^\circ) = 360^\circ \text{ e}$$

$\hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = \hat{N} + \hat{M} + \hat{D} + \hat{L} + \hat{K} = (\hat{D} + \hat{L} + \hat{N}) + (\hat{K} + \hat{M}) = (180^\circ) + (180^\circ) = 360^\circ$, como queríamos demonstrar.

Figura 2.47: Demonstração de que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{F} = \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$.

Caso 2:

Esse caso é formado por hexágonos que possuem dois pares de lados congruentes e três ângulos internos somando 360° .

Considere um hexágono $ABCDEF$ qualquer, tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\hat{A} + \hat{C} + \hat{F} = 360^\circ$.

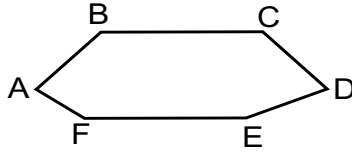


Figura 2.48: Hexágono que possui dois pares de lados congruentes e três ângulos internos somando 360°

Construa outro hexágono $A'B'C'D'E'F'$, congruente a $ABCDEF$, através de uma rotação deste em 180° em torno do ponto médio de $\overline{DE}$, tal que coincida os vértices D com E' e E com D' , conforme Figura 2.49.

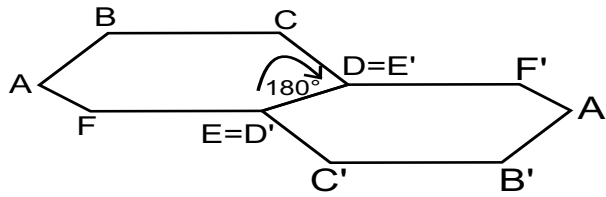


Figura 2.49: Rotação de 180° de $ABCDEF$.

Em seguida, construa outro hexágono $A''B''C''D''E''F''$, congruente ao primeiro, através de uma reflexão deste em torno de um eixo horizontal, uma rotação de 180° e uma translação, tal que coincida os vértices B'' com E e C'' com F . Note que, $\overline{EF} \cong \overline{B''C''}$, $\overline{C'D'} \cong \overline{A''B''}$ e $\hat{E} + \hat{D'} + \hat{B''} = 360^\circ$, por hipótese, com isto, $\overline{B''C''}$ ficará sobreposto a $\overline{EF}$, assim como $\overline{A''B''}$ ficará sobreposto a $\overline{C'D'}$.

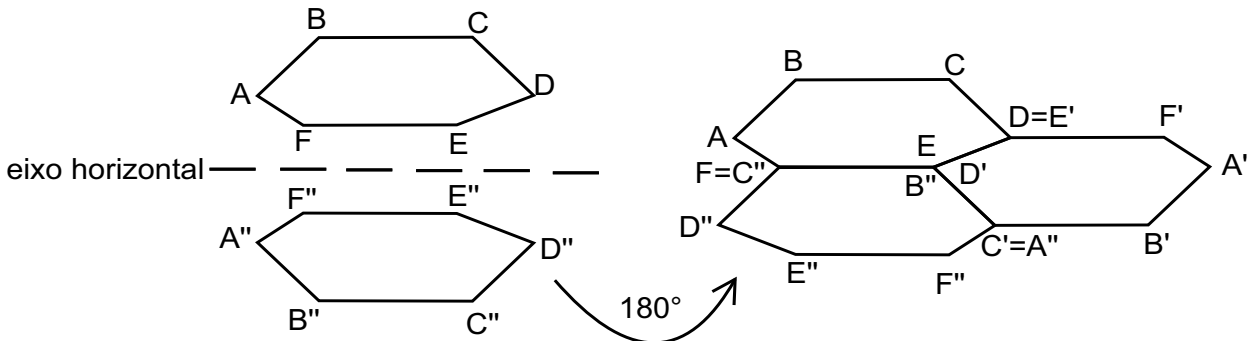


Figura 2.50: Reflexão de eixo horizontal, rotação de 180° e translação.

Por fim, construa outro hexágono $A'''B'''C'''D'''E'''F'''$, congruente à $A''B''C''D''E''F''$, através da rotação deste em 180° em torno do ponto médio do lado $\overline{A''F''}$, tal que coincida os vértices F'' com A''' e A'' com F''' . Note que, $\overline{F''A''} \cong \overline{F'''A'''}$, $\overline{B'C'} \cong \overline{E'''F'''}$ e $\hat{C}' + \hat{A}'' + \hat{F}''' = 360^\circ$, com isto, $\overline{F'''A'''}$ ficará sobreposto a $\overline{F''A''}$, assim como $\overline{E'''F'''}$ ficará sobreposto a $\overline{B'C'}$.

Estes quatro hexágonos formam juntos o domínio fundamental da pavimentação.

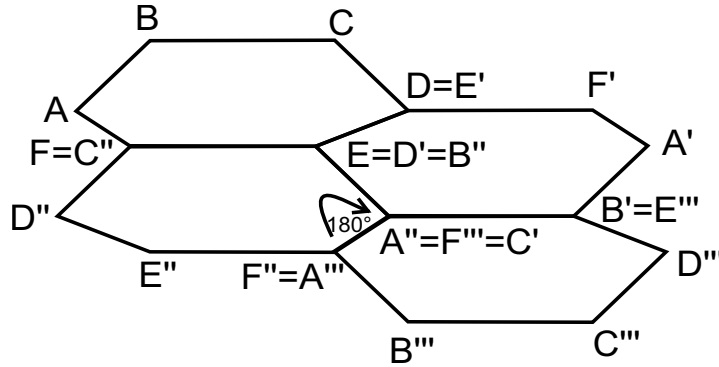


Figura 2.51: Domínio fundamental da pavimentação.

Assim, através de translações desse domínio por todo o plano, conseguimos a pavimentação ideal do Plano Euclidiano.

Note que todos os nós desta pavimentação são formados pelos ângulos $\hat{A}$, $\hat{C}$ e $\hat{F}$ ou $\hat{B}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$ e por construção temos $\hat{A} + \hat{C} + \hat{F} = \hat{B} + \hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$, o que mostra o encaixe perfeito dos hexágonos em cada nó.

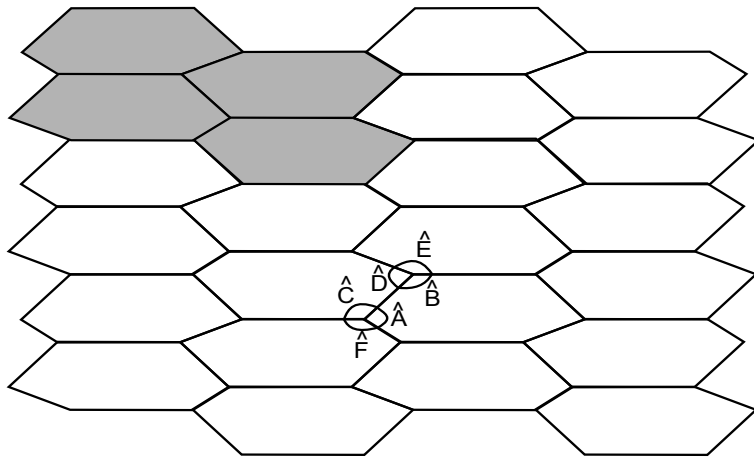


Figura 2.52: Pavimentação ideal.

Caso3.

Esse caso é formado por hexágonos que possuem três pares de lados congruentes e três ângulos congruentes de medida igual a 120° .

Considere um hexágono $ABCDEF$ qualquer, tal que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{CD} \cong \overline{DE}$, $\overline{EF} \cong \overline{FA}$ e $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = 120^\circ$.

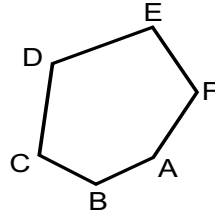


Figura 2.53: Hexágono que possui três pares de lados congruentes e três ângulos congruentes de medida igual a 120°

Construa outro hexágono $A'B'C'D'E'F'$, congruente a $ABCDEF$, através de uma rotação deste em 120° , no sentido horário e sobre o vértice F , tal que coincida os vértices F com F' , E com A' . Note que $\overline{EF} \cong \overline{F'A'}$ e com isto, $\overline{F'A'}$ ficará sobreposto a $\overline{EF}$, conforme Figura 2.54.

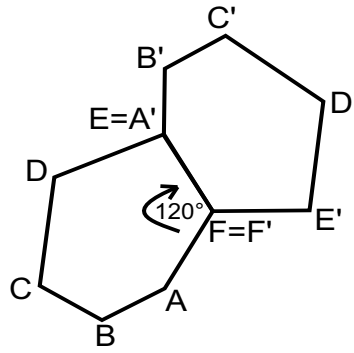


Figura 2.54: Rotação de 120° .

Agora, construa um hexágono $A''B''C''D''E''F''$ congruente a $A'B'C'D'E'F'$ através de uma rotação de 120° deste, no sentido horário, sobre o vértice F' , tal que coincida os vértices F' e F'' , E' com A'' e A com E'' . Note que, $\overline{E'F'} \cong \overline{F''A''}$, $\overline{E''F''} \cong \overline{FA}$ e $\hat{F} + \hat{F}' + \hat{F}'' = 360^\circ$ e, com isto, $\overline{F''A''}$ ficará sobreposto a $\overline{E'F'}$, assim como $\overline{E''F''}$ ficará sobreposto a $\overline{AF}$.

Estes três hexágonos formam o domínio fundamental da pavimentação.

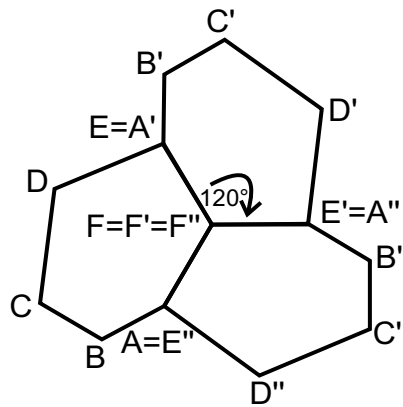


Figura 2.55: Domínio fundamental da pavimentação.

Assim, através da translação de tal domínio por todo o plano, obtemos a pavimentação.

Note que esta pavimentação possui quatro tipos de nós, o primeiro é formado por três ângulos $\hat{B}$, o segundo por três ângulos $\hat{D}$, o terceiro por três ângulos $\hat{F}$ e o quarto pelos ângulos $\hat{A}$, $\hat{C}$ e $\hat{E}$. Por hipótese, nos três primeiros tipos de nós, os ângulos somam 360° . Já no quarto tipo de nó, temos a soma dos três ângulos complementares que também somam 360° , pois a soma dos ângulos internos de um hexágono é 720° , o que mostra o encaixe perfeito dos hexágonos em cada nó.

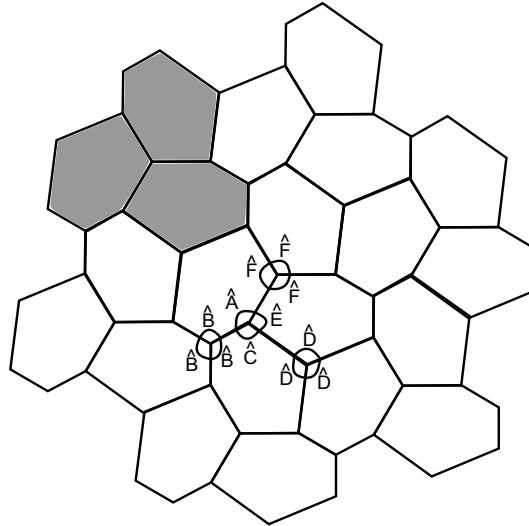


Figura 2.56: Pavimentação ideal.

E assim temos os tipos de hexágonos convexos que pavimentam todo o Plano Euclidiano monoédricamente.

2.2 Pavimentações Regulares do Plano Euclidiano

Na seção anterior, mostramos que o plano Euclidiano pode ser pavimentado por triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos, porém até então, não sabemos se podemos tomá-los como polígonos regulares. Nesta seção, vamos responder essa indagação e mostrar quais polígonos regulares pavimentam o Plano Euclidiano.

Primeiramente, vamos mostrar quais deles são possíveis candidatos a pavimentar o plano utilizando as medidas dos ângulos internos de cada um.

Em um polígono regular qualquer de n lados, encontramos o seu ângulo interno θ através da expressão $\theta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Assim, se pavimentarmos o plano exclusivamente por um polígono regular de n lados, em cada nó dessa pavimentação teremos m polígonos e a soma dos ângulos internos desses polígonos neste nó deve ser igual à 360° . Logo, temos que

$$\theta m = 360^\circ \Rightarrow \frac{180^\circ(n-2)}{n} m = 360^\circ \Rightarrow 180^\circ(n-2)m = 360^\circ n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{180^\circ(2n)}{180^\circ(n-2)} \Rightarrow m = \frac{2n}{n-2}.$$

Como o número de polígonos em um nó é maior ou igual a 3, ou seja, $m \geq 3$ e como $n - 2 > 0$, pois $n \geq 3$, temos que

$$\frac{2n}{n-2} \geq 3 \Rightarrow 2n \geq 3n - 6 \Rightarrow 6 \geq 3n - 2n \Rightarrow 6 \geq n$$

e concluímos que os únicos polígonos *candidatos* a pavimentação regular do plano são os triângulos equiláteros, os quadrados, os pentágonos regulares e os hexágonos regulares.

Para $n = 3$, temos $m = \frac{2n}{n-2} = 6$. E assim, temos que em uma pavimentação regular do plano, por um triângulo equilátero qualquer, é possível e em cada nó se encontra seis vértices.

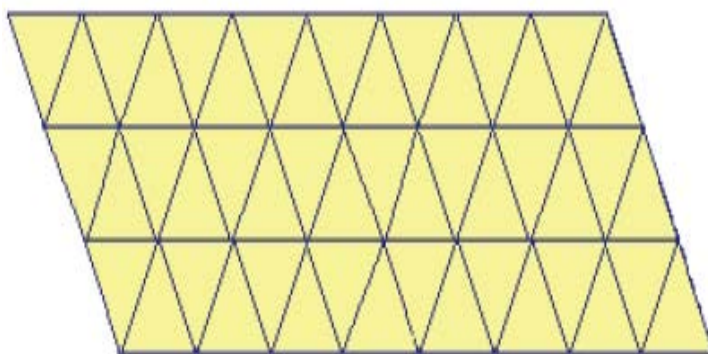


Figura 2.57: Pavimentação regular do plano com triângulos equiláteros.

Para $n = 4$, temos $m = \frac{2n}{n-2} = 4$. E assim, temos que em uma pavimentação regular do plano, por um quadrado qualquer, é possível e em cada nó se encontra quatro vértices.

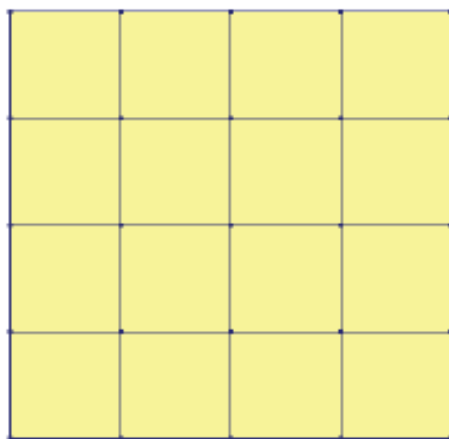


Figura 2.58: Pavimentação regular do plano com quadrados.

Para $n = 5$, temos $m = \frac{2n}{n-2} = 3,33\dots$. E assim, temos que em uma pavimentação regular do plano, por um pentágono regular qualquer, não é possível. Note, na Figura 2.59, que ao

tentarmos colocar um quarto pentágono, este se sobrepõe a figura, não tornando possível a pavimentação.

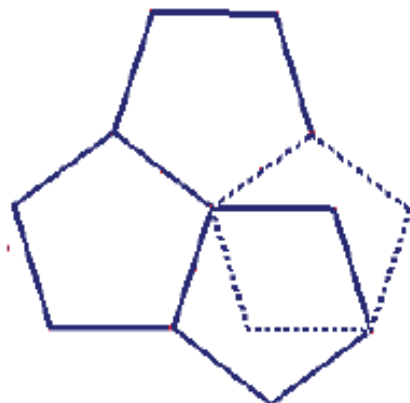


Figura 2.59: Pavimentação regular do plano com pentágonos.

Para $n = 6$, temos $m = \frac{2n}{n-2} = 3$. E assim, temos que em uma pavimentação regular do plano, por um hexágono regular qualquer, é possível e em cada nó se encontra 3 vértices.

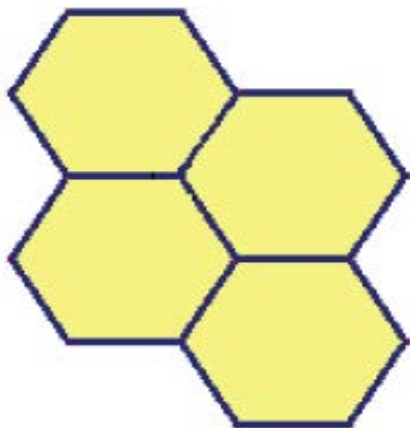


Figura 2.60: Pavimentação regular do plano com hexágonos.

Concluimos assim, que é possível pavimentar o plano com apenas três tipos de polígonos regulares: **triângulo equilátero**; **quadrado** e **hexágono regular**.

Polígonos que não pavimentam o plano

Vimos no capítulo anterior que existem pavimentações monoédricas do plano com triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. E para polígonos com sete ou mais lados? Neste capítulo, vamos apresentar um teorema e sua demonstração, que prova que não é possível termos uma pavimentação monoédrica com polígonos de sete ou mais lados.

Teorema 3.1 *(a) Sejam α e β quaisquer números reais positivos, é impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β .*

(b) Se qualquer uma das condições descritas no item anterior não for satisfeita, é possível pavimentar o plano com polígonos que satisfaçam as demais condições.

Durante esta demonstração, usaremos as seguintes afirmações cuja demonstrações podem ser encontradas em [7].

Teorema 3.2 (Teorema de Euler) *Seja dada uma pavimentação parcial do plano com p polígonos, v nós e a arestas, então é válida a seguinte igualdade $v - a + p = 1$.*

Lema 3.1 *Se R é uma região poligonal de perímetro menor que β , então a área de R é menor que β^2 .*

Iniciaremos agora a demonstração do item (a) do Teorema 3.1.

Suponha que é possível pavimentar o plano com uma coleção de polígonos convexos, cada um com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β , onde α e β são números reais positivos definidos na parte (a) do teorema. Como o teorema diz que tal pavimentação não é possível, chegaremos, no final da demonstração, em alguma contradição.

Considerando o sistema de coordenadas (x, y) no plano que queremos pavimentar e uma região quadrangular $Q(r)$, que corresponde a região com vértices $(\pm r, \pm r)$, onde r é um número real positivo escolhido para dar a contradição desejada.

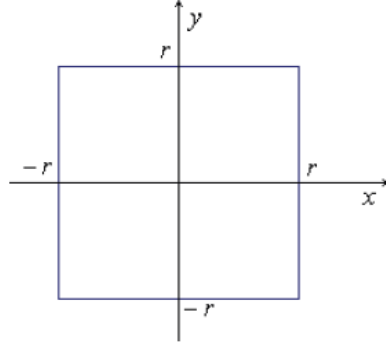


Figura 3.1: Região Quadrangular $Q(r)$.

Seja P a pavimentação parcial do plano, tal que, se um polígono da pavimentação contém algum ponto da região quadrangular $Q(r)$, então este polígono faz parte da pavimentação parcial P , além disso, caso algum polígono da pavimentação não tenha ponto em comum com $Q(r)$, mas seja cercado por peças que tenham pelo menos um ponto em comum com $Q(r)$, então esse polígono também faz parte da pavimentação P . Note que assim, a pavimentação será simplesmente conexa (sem buracos).

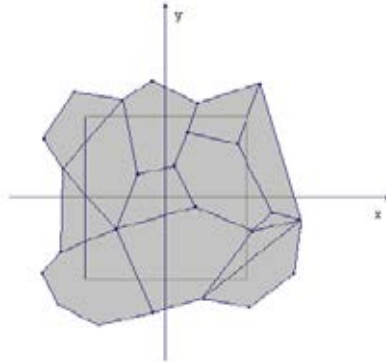


Figura 3.2: Pavimentação parcial P que cobre a região quadrangular $Q(r)$.

Vamos também considerar uma região quadrangular $Q(r + \beta)$, que corresponde à região quadrada com vértices $(\pm(r + \beta), \pm(r + \beta))$. Como por hipótese, o perímetro de cada polígono é menor que β , temos que a pavimentação P está toda contida no interior da região quadrangular $Q_1(r + \beta)$, pois cada lado do polígono será menor que $\frac{\beta}{2}$ e a união de qualquer polígono de P com $Q(r)$ é diferente de vazia.

Note que o número de polígonos da pavimentação P é finito, pois como a área de cada polígono é, por hipótese, maior que α , a área da pavimentação P é maior que $m\alpha$, onde m é o número de polígonos da pavimentação P , e como $\text{área}(P) < \text{área}(Q_1(r + \beta))$, concluímos que m é finito.

Vamos agora definir uma pavimentação parcial P_1 como sendo aquela que cobre, sem buracos, a região quadrangular $Q_1(r + \beta)$, ver Figura 3.3.

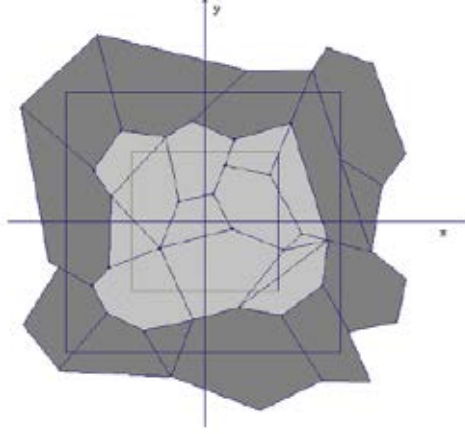


Figura 3.3: Pavimentação parcial P_1 do plano que cobre a região quadrangular $Q_1(r + \beta)$.

De modo análogo a pavimentação P , podemos mostrar que a pavimentação P_1 também possui uma quantidade finita de polígonos.

Definindo como p , v e θ_i , respectivamente, o número de polígonos, o número de nós e os ângulos internos de cada nó, da pavimentação P ; e a_1 , p_1 e v_1 , respectivamente, o número de arestas, o número de polígonos e o número de nós da pavimentação P_1 , temos, pelo Teorema de Euler, que $v_1 + p_1 = a_1 + 1 \Rightarrow a_1 < v_1 + p_1$.

Como o número de polígonos de P é finito, temos que a quantidade de ângulos internos também é finito, logo a soma de todos esses ângulos, $\sum \theta_i$, é limitada inferiormente e superiormente. Vamos encontrar tais limitantes.

Vimos na definição de nós, que o número de nós na fronteira de um polígono de uma pavimentação é sempre maior do que ou igual a quantidade de seus vértices. Sabemos também, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é $(n - 2)\pi$, com n sendo o número de vértices do polígono. Assim, a soma de todos os ângulos internos de um polígono é maior do que ou igual a $(n - 2)\pi$.

Logo, como temos p polígonos na pavimentação P e cada polígono tem pelo menos 7 vértices, temos $\sum \theta_i \geq (n - 2)\pi p \geq (7 - 2)\pi p \geq 5\pi p$ e assim $\sum \theta_i \geq 5\pi p$.

Sabemos também, que em cada nó da pavimentação P , a soma dos ângulos internos é menor que ou igual a 2π , assim, somando todos os v nós desta pavimentação, temos $\sum \theta_i \leq 2\pi v$.

Portanto, com essas duas desigualdades temos

$$5\pi p \leq \sum \theta_i \leq 2\pi v \Rightarrow 5\pi p \leq 2\pi v \Rightarrow 5p \leq 2v. \quad (3.1)$$

Temos também, que na pavimentação P_1 , cada aresta está ligada a dois vértices, cada vértice v_1 esta sendo contado duas vezes pelo número $2a_1$ e cada nó em seu interior, pertence a pelo menos três polígonos desta pavimentação, sendo contado assim, pelo menos três vezes pelo número $2a_1$. Portanto, por P ser interior a P_1 , P_1 tem pelo menos v vértices interiores. Assim,

contando cada v vértice de P três vezes e os demais $(v_1 - v)$ vértices duas vezes, temos

$$3v + 2(v_1 - v) \leq 2a_1 \Rightarrow 2v_1 + v \leq 2a_1. \quad (3.2)$$

Do Teorema de Euler, temos que $2a_1 = 2v_1 + 2p_1 - 2 < 2v_1 + 2p_1$, da equação (3.2), temos

$$2v_1 + v < 2v_1 + 2p_1 \Rightarrow v < 2p_1.$$

Multiplicando esta desigualdade por dois e substituindo na equação (3.1), temos

$$5p < 4p_1. \quad (3.3)$$

Analisando a pavimentação P_1 , existem $p_2 = p_1 - p$ polígonos que não fazem parte da pavimentação P . Multiplicando esta igualdade por quatro, obtemos $4p_2 = 4p_1 - 4p$. Isolando $4p_1$ e substituindo esse valor na equação (3.3), temos

$$5p < 4p_2 + 4p \Rightarrow p < 4p_2. \quad (3.4)$$

Temos também, que cada polígono tem perímetro menor que β e pelo Lema 3.1, segue que cada um desses polígonos tem área menor que β^2 . Consequentemente os p polígonos na pavimentação P tem área total menor que $\beta^2 p$. Mas esses polígonos cobrem a região quadrangular $Q(r)$ com área $4r^2$ e assim concluímos que

$$4r^2 < \text{area}(P) \leq \beta^2 p \Rightarrow 4r^2 < \beta^2 p. \quad (3.5)$$

Agora, vamos estudar a área limitada pelos polígonos p_2 , que pertence à pavimentação P_1 mas não a pavimentação P . Note que esses polígonos estão compreendidos no interior do anel retangular, formado pela região interior ao quadrado $Q_2(r + 2\beta)$ e exterior do quadrado $Q(r)$, conforme Figura 3.4.

Como a área desse anel é $4(r + 2\beta)^2 - 4r^2$, vemos que a área da soma desses p_2 polígonos é menor que $4(r + 2\beta)^2 - 4r^2$. Sabemos também que, cada um dos p_2 polígonos tem área maior que α , assim, a área total desses p_2 polígonos é maior que αp_2 . Portanto,

$$\alpha p_2 \leq \sum \text{area}(p_2) \leq 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2 \Rightarrow \alpha p_2 \leq 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2.$$

Desenvolvendo esta desigualdade, temos $\alpha p_2 \leq 16\beta r + 16\beta^2$, multiplicando por $4\beta^2$ obtemos $4\alpha\beta^2 p_2 < 64\beta^3 r + 64\beta^4$. Assim, das desigualdades (3.4) e (3.5), multiplicando-as respectivamente por $\beta^2 \alpha$ e α temos

$$4\alpha r^2 < \beta^2 \alpha p < 4\alpha p_2 \beta^2 \leq 64\beta^3 r + 64\beta^4 \Rightarrow 4\alpha r^2 < 64\beta^3 r + 64\beta^4,$$

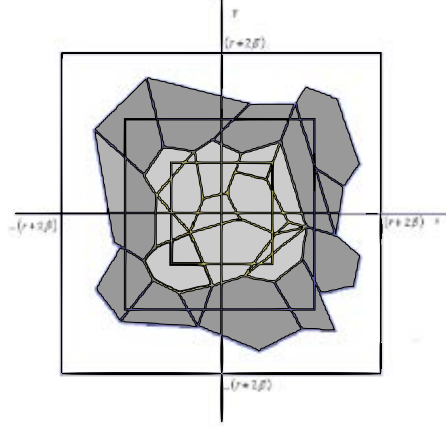


Figura 3.4: Anel que comporta os polígonos de $P_1 \setminus P$.

dividindo esta última desigualdade por $4\alpha r$, temos $r < 16\frac{\beta^3}{\alpha} + 16\frac{\beta^4}{\alpha r}$.

Note que substituindo $r = \beta + 16\frac{\beta^3}{\alpha}$ na desigualdade encontrada e desenvolvendo, obtemos

$$\beta + 16\frac{\beta^3}{\alpha} < 16\frac{\beta^3}{\alpha} + 16\frac{\beta^4}{\alpha(\beta + 16\frac{\beta^3}{\alpha})} \Rightarrow \alpha\beta^2 < 0,$$

o que é um absurdo, pois $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Note também que r é uma função crescente e $16\frac{\beta^3}{\alpha} + 16\frac{\beta^4}{\alpha r}$ é uma função decrescente de r .

Portanto, a desigualdade $r < 16\frac{\beta^3}{\alpha} + 16\frac{\beta^4}{\alpha r}$ é um absurdo para qualquer valor de $r > \beta + 16\frac{\beta^3}{\alpha}$.

Com isso, terminamos a demonstração da parte (a) do Teorema 3.1 e iniciamos a demonstração da parte (b) desse teorema.

Na parte (a) do teorema, mostramos que não é possível pavimentar o plano euclidiano com polígonos da pavimentação satisfazendo as quatro condições seguintes:

1. ser convexo;
2. possuir sete ou mais lados;
3. ter área maior que uma constante positiva α ;
4. ter perímetro menor que uma constante positiva β .

Na demonstração da parte (b) do teorema, mostraremos a possibilidade da pavimentação se os polígonos satisfizerem somente três dessas quatro condições. Para isso, necessitaremos dividir a demonstração em quatro casos, onde em cada caso, os polígonos satisfazem três dessas condições e não satisfaz a outra.

Caso 1. Pavimentação com polígonos que satisfazem as condições (2), (3) e (4) mas que não satisfazem a condição (1).

É possível pavimentar o plano com polígonos não convexos com 7 ou mais lados assim como mostra a Figura 3.5. As hipóteses da área maior que α e perímetro menor que β pode ser obtida aplicando uma homotopia a essa figura de forma conveniente a ter as duas condições satisfeitas.

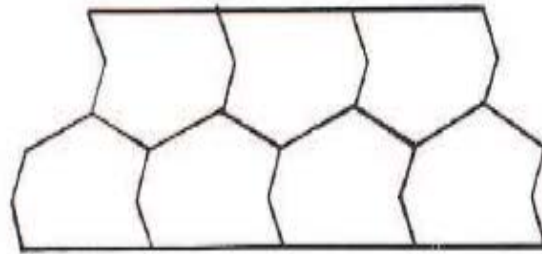


Figura 3.5: Pavimentação com polígonos não convexo

Caso 2. Pavimentação com polígonos que satisfazem as condições (1), (3) e (4) mas que não satisfazem a condição (2).

No Capítulo 2, estudamos pavimentações do plano com polígonos convexos de 3, 4, 5 e 6 lados. Além dessas pavimentações apresentadas, em [1] e [5] outras pavimentações do plano com polígonos de até 6 lados podem ser encontradas.

Caso 3. Pavimentação com polígonos que satisfazem as condições (1), (2) e (4) mas que não satisfazem a condição (3).

Para fazer esta demonstração será contruída uma pavimentação do plano por heptágonos convexos tal que cada um dos seus polígonos tenha perímetro menor do que β , com $\beta > 0$, mas que tenha polígonos de área arbitrariamente pequena. Para isso, será considerado um sistema de coordenadas cartesiano no plano Euclidiano e será representado cada ponto nesse plano através de coordenadas polares (ρ, θ) .

Considerando uma circunferência C_1 de centro na origem e raio $\rho_1 > 0$. Considere agora o polígono Q , cujos vértices possuem coordenadas polares $(0, 0)$, $(\rho_1, 0)$, $(\rho_1, \frac{\pi}{10})$, $(\rho_1, \frac{\pi}{5})$, $(\rho_1, \frac{3\pi}{10})$, $(\rho_1, \frac{2\pi}{5})$ e $(\rho_1, \frac{\pi}{2})$.

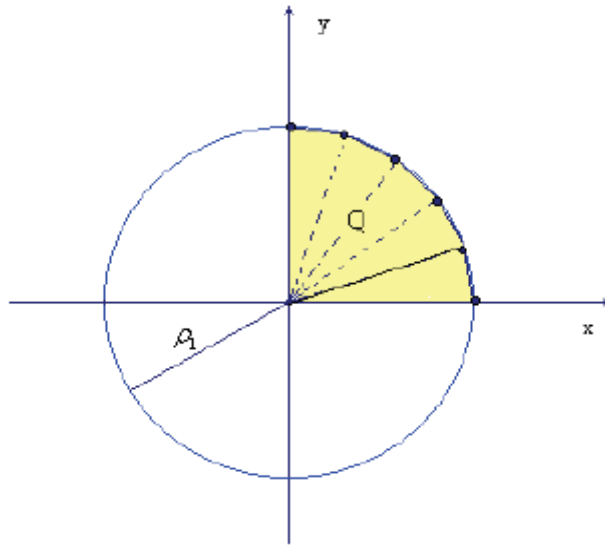


Figura 3.6: Polígono Q

Note que os vértices de Q sobre a circunferência C_1 estão igualmente espaçados e dois desses vértices consecutivos formam um arco de ângulo central $\frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}$. Rotacionando Q ao redor da origem, com ângulos $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$, temos uma pavimentação parcial do plano ao redor da origem com 20 vértices sobre a circunferência C_1 .

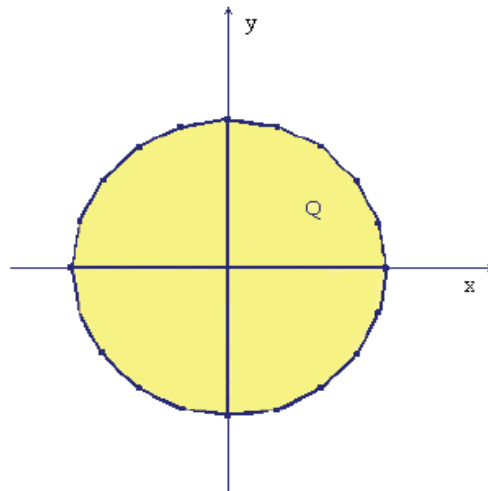


Figura 3.7: Pavimentação parcial do plano ao redor da origem.

Considerando agora uma circunferência C_2 de centro na origem e raio $\rho_2 > \rho_1$ e dividindo o arco de C_2 de ângulo central $\frac{\pi}{10}$, indicado na Figura 3.8 em quatro partes iguais, podemos formar o heptágono P_1 cujos vértices possuem coordenadas polares $(\rho_1, \frac{\pi}{10})$, $(\rho_1, 0)$, $(\rho_2, 0)$, $(\rho_2, \frac{\pi}{40})$, $(\rho_2, \frac{\pi}{20})$, $(\rho_2, \frac{3\pi}{40})$ e $(\rho_2, \frac{\pi}{10})$.

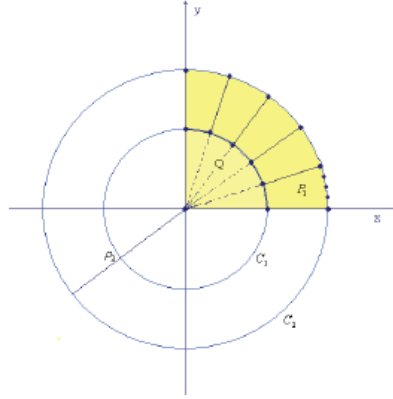


Figura 3.8: Circunferência C_2 de centro na origem e raio $\rho_2 > \rho_1$.

Rotacionando P_1 ao redor da origem, temos a pavimentação de uma região ao redor das quatro cópias de Q .

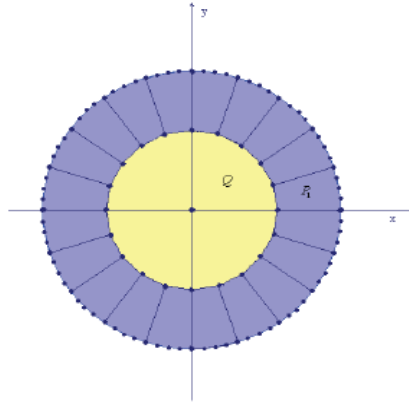


Figura 3.9: Quatro cópias de Q e as vinte cópias de P_1 .

Seguindo este raciocínio, tome uma circunferência C_n de centro na origem e raio ρ_n e o polígono P_n de vértices $(\rho_n, \frac{\pi}{4^{n-1}10})$, $(\rho_n, 0)$, $(\rho_{n+1}, 0)$, $(\rho_{n+1}, \frac{\pi}{4^n 10})$, $(\rho_{n+1}, \frac{2\pi}{4^n 10})$, $(\rho_{n+1}, \frac{3\pi}{4^n 10})$ e $(\rho_{n+1}, \frac{4\pi}{4^n 10})$, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$

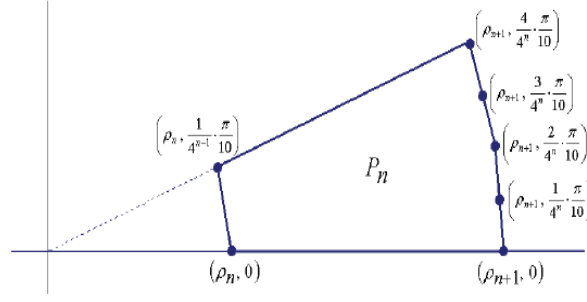


Figura 3.10: Polígono P_n .

Note que os vértices $(\rho_n, \frac{\pi}{4^{n-1}10})$ e $(\rho_{n+1}, \frac{4\pi}{4^n 10})$ são colineares com a origem e assim como os vértices $(\rho_n, 0)$ e $(\rho_{n+1}, 0)$.

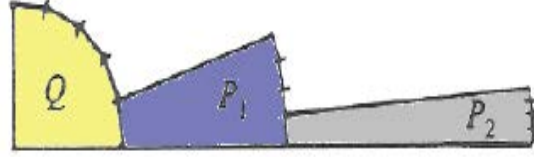


Figura 3.11: Polígonos Q , P_1 e P_2 .

Rotacionando o polígono P_n ao redor da origem, repetidamente pelo ângulo $\frac{\pi}{4^{n-1}10}$, obtemos um anel de polígonos em torno da origem. Este anel é fechado depois de repetirmos $20 \cdot 4^{n-1} - 1$ vezes esta rotação. Note que os vértices de fora do anel de polígonos formados pela rotação de P_n coincidem com os vértices internos do anel de polígonos formados pela rotação de P_{n+1} , para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Assim, concluímos que os polígonos convexos $Q, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, e os polígonos formados pelas rotações em torno da origem, cobrem o plano inteiro sem espaço ou sobreposição, desde que, ρ_n seja uma sequência crescente e que tenha limite infinito quando n tende a mais infinito.

Agora, definiremos os valores de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, para que esta pavimentação satisfaça a condição (4) deste teorema, ou seja, para que cada um dos seus polígonos desta pavimentação tenha perímetro menor que β , sendo β um número real positivo previamente fixado.

Seja $\beta > 0$, defina $\rho = \frac{n\beta}{8}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, e note que (ρ_n) é uma sequência crescente que tende ao infinito quando n tende ao infinito.

Demonstraremos agora, que o polígono Q e cada um dos polígonos P_n têm perímetro menor que β , mostrando que cada lado desses polígonos tem comprimento menor que $\frac{\beta}{7}$.

Assim, unindo os vértices $\left(\rho_n, \frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right)$ e $(\rho_n, 0)$, temos um lado de P_n de comprimento menor que o arco do círculo C_n de raio ρ_n e ângulo central $\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}$. Esse arco tem comprimento igual a $\rho_n \cdot \frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}} = \frac{n\beta\pi}{20 \cdot 4^n}$. Como $\frac{n\beta\pi}{20 \cdot 4^n} < \frac{\beta}{7}$ para todo $n \geq 1$, esse lado do polígono P_n tem comprimento menor que $\frac{\beta}{7}$.

Temos também que o lado do polígono P_n de vértices $(\rho_n, 0)$ e $(\rho_{n+1}, 0)$ e o lado de vértice $\left(\rho_n, \frac{\pi}{4^{n-1}10}\right)$ e $\left(\rho_{n+1}, \frac{4\pi}{4^n10}\right)$ tem comprimento $\rho_{n+1} - \rho_n = \frac{(n+1)\beta}{8} - \frac{n\beta}{8} = \frac{\beta}{8} < \frac{\beta}{7}$.

Por último, temos que os quatro lados restantes, que unem os vértices $(\rho_{n+1}, 0)$, $\left(\rho_{n+1}, \frac{\pi}{4^n10}\right)$, $\left(\rho_{n+1}, \frac{2\pi}{4^n10}\right)$, $\left(\rho_{n+1}, \frac{3\pi}{4^n10}\right)$ e $\left(\rho_{n+1}, \frac{4\pi}{4^n10}\right)$ tem comprimento do tipo $\rho_n \cdot \frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}} = \frac{n\beta\pi}{20 \cdot 4^n}$ com n sendo substituído por $n+1$. Como vimos acima, a expressão $\frac{n\beta\pi}{20 \cdot 4^n}$ é sempre menor que $\frac{\beta}{7}$ e esses quatro lados de P_n têm comprimento menor que $\frac{\beta}{7}$.

Usando o mesmo raciocínio para os lados de Q , demonstramos que esta pavimentação ideal por heptágonos convexos é tal que cada um dos seus polígonos tem perímetro menor que β . Portanto essa pavimentação satisfaz às condições (1), (2) e (4), mas não satisfaz à condição (3), pois para construir essa pavimentação foi usados polígonos com área arbitrariamente pequena.

Caso 4. Pavimentação com polígonos que satisfazem as condições (1), (2) e (3) mas que não satisfazem a condição (4).

Neste caso, construiremos uma pavimentação do plano por heptágonos convexos onde cada um dos seus polígonos tenha área maior do que α , com $\alpha > 0$, mas que tenha polígonos de perímetro arbitrariamente grande. Faremos esta construção de maneira bem parecida com a anterior, mas com uma escolha diferente das constantes $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$ de modo que cada um dos polígonos da pavimentação tenha área maior do que α , sendo α um número real positivo previamente fixado.

Sabemos que a área de qualquer heptágono convexo ultrapassa a área do triângulo formado por três dos seus vértices. Consideremos então o triângulo formado pelos vértices $(0, 0)$, $(\rho_1, 0)$ e $\left(\rho_1, \frac{\pi}{2}\right)$ do heptágono Q . Como esse triângulo tem área $\frac{\rho_1^2}{2}$, vamos escolher ρ_1 de tal maneira que essa área ultrapasse α .

Definindo de maneira recursiva

$$\rho_{n+1} = n + \rho_n + 2\alpha\rho_n^{-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4^{n-1} \cdot 10}\right) \quad (3.6)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Vamos provar que a sequência (ρ_n) é crescente e ilimitada.

Como $n + 2\alpha\rho_n^{-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4^{n-1} \cdot 10}\right) > 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ temos que $\rho_{n+1} > \rho_n$. Daí (ρ_n) é uma sequência crescente, além disso, pela mesma condição anterior, temos que $\rho_{n+1} > n$ e

consequentemente, (ρ_n) é uma sequência que tende ao infinito com n .

Como mostramos anteriormente, se (ρ_n) é uma sequência crescente e ilimitada, podemos construir uma pavimentação do plano por heptágonos convexos. Para concluir o que queremos, basta mostrar que cada polígono P_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ desta pavimentação tem área maior do que α , o que é verdade, pois o heptágono P_n tem área maior que a área do triângulo formado pelos vértices $(\rho_n, \frac{\pi}{4^{n-1}10})$, $(\rho_n, 0)$, $(\rho_{n+1}, 0)$, e esta área é dada por

$$A_n = \frac{1}{2}(\rho_{n+1} - \rho_n) \cdot \rho_n \sin\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right).$$

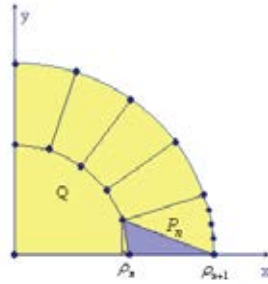


Figura 3.12: Comparação entre a área do heptágono e do triângulo.

Agora, da equação (3.6), temos que

$$A_n = \frac{1}{2} \left(n + \rho_n + 2\alpha\rho_n^{-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4^{n-1} \cdot 10}\right) - \rho_n \right) \cdot \rho_n \sin\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right),$$

e assim,

$$A_n = \frac{1}{2} \left[n\rho_n \sin\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right) + 2\alpha\rho_n^{-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4^{n-1} \cdot 10}\right) \rho_n \sin\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right) \right].$$

Como $\rho_n^{-1} = \frac{1}{\rho_n}$ e $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right)}$ temos,

$$A_n = \frac{1}{2} \left(n\rho_n \sin\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right) + 2\alpha \right) = \frac{n\rho_n \sin\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right)}{2} + \alpha.$$

Portanto, temos que A_n é maior do que α , para todo n , concluindo assim, que a área do polígono P_n é maior que α .

Observe que esta pavimentação não satisfaz a condição (4) deste teorema, pois o polígono P_n tem um lado de comprimento $(\rho_{n+1} - \rho_n) = n + 2\alpha\rho_n^{-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4^{n-1}10}\right)$, que é maior que n , não possuindo assim, perímetro limitado superiormente. Dessa forma, ela satisfaz às condições (1), (2) e (3) mas não satisfaz a condição (4).

Os quatro exemplos acima constituem a demonstração da parte (b) deste teorema.

Aplicações

Apresentaremos nesse capítulo, duas aplicações envolvendo o conceito de pavimentação. A primeira delas está na natureza, mostramos que, de certa forma, as abelhas possuem um conhecimento de pavimentação ao construir o favo de mel, além disso, a escolha delas para pavimentar com hexágonos não é ao acaso. Uma outra aplicação que apresentamos nesse capítulo, está relacionado ao uso do Tangram em sala de aula. Como esse importante instrumento pedagógico pode ser útil para apresentar os conceitos de pavimentação? Elaboramos dois exercícios/jogos que podem ser utilizados em sala de aula para fixar esses conceitos.

4.1 Pavimentações na natureza

Há uma vasta área de aplicações da pavimentação na natureza. Nesta sessão, mostraremos a aplicação da pavimentação nos favos de mel das abelhas, e porque elas utilizam os hexágonos regulares para construí-los. O geômetra grego Papus de Alexandria mostra que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem o maior número de lados tem maior área, e como vimos anteriormente, os únicos polígonos regulares que pavimentam o plano, são os triângulos, os quadrados e os hexágonos.

Mostremos agora, que dentre os três polígonos regulares que pavimentam o plano, se fixarmos o perímetro igual a p , o que tem maior área é o hexágono. Primeiro encontraremos a área do triângulo equilátero de perímetro p , que consequentemente tem lado $l = \frac{p}{3}$.

Como o triângulo é equilátero e o perímetro é igual a p , concluímos que o o lado desse triângulo tem medida $\frac{p}{3}$ e a altura é $h = \frac{\sqrt{3}}{6}p$ e assim, a área será igual a

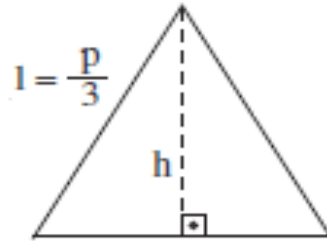


Figura 4.1: Triângulo equilátero de perímetro p .

$$A = \frac{\frac{p}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} p}{2} = \frac{\sqrt{3}}{36} p^2 \simeq 0,0481 p^2.$$

Encontrando agora a área de um quadrado de perímetro p e lados $l = \frac{p}{4}$, temos

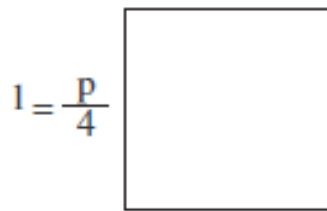


Figura 4.2: Quadrado de perímetro p .

$$A = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16} \simeq 0,0625 p^2.$$

E por último, encontramos a área do hexágono de perímetro p e lado $l = \frac{p}{6}$, que como sabemos, pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros iguais com esse mesmo lado l . Assim, temos que a área A procurada é 6 vezes a área A' desse triângulo. Encontrando a área do triângulo, temos

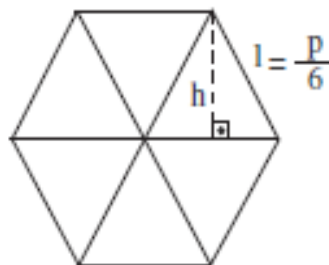


Figura 4.3: Hexágono regular de perímetro p .

$$A' = \frac{\frac{p}{6} \frac{\sqrt{3}}{12} p}{2} = \frac{\sqrt{3}}{144} p^2.$$

Assim, a área A desejada é

$$A = 6A' = \frac{6\sqrt{3}}{144} p^2 = \frac{\sqrt{3}}{24} p^2 \simeq 0,0721p^2.$$

Portanto, dos polígonos regulares que pavimentam o plano, o hexágono é o de maior área. Como o perímetro é o mesmo, para os três polígonos, temos que a área das faces laterais dos poliedros formados com essas três bases é a mesma, o que nos mostra que as abelhas teriam um maior volume de mel, utilizando a mesma quantidade de cera, mostrando assim, um pequeno conhecimento de matemática ao construir seus favos de mel.

4.2 Pavimentações em sala de aula

Nessa sessão são apresentadas formas de incluir a pavimentação na vida escolar de um aluno, onde serão passados conceitos de área, sistema métrico e figuras geométricas, mostrando assim, conteúdos necessários para o procedimento e também os benefícios que a introdução destes podem ocasionar na formação acadêmica desse aluno.

Nas séries iniciais, é possível introduzir esses conceitos à partir de jogos estimulantes como o Tangram, que é um quebra-cabeça chinês, formado por 7 peças geométricas denominadas Tans, sendo elas 5 triângulos e 2 paralelogramos, onde um deles é um quadrado.

Este jogo possui apenas duas regras:

- Todas as peças devem ser utilizadas na formação de uma nova figura;
- Nenhuma peça pode ser sobreposta.

Normalmente o quebra-cabeça é utilizado em sala de aula para a melhor compreensão das formas geométricas, mas nessa seção será apresentada uma diferente forma de aplicação desse jogo, onde podemos iniciar o conceito de pavimentação de uma forma divertida e de fácil compreensão. O tangram, também será utilizado para apresentar as figuras geométricas e depois que o aluno estiver familiarizado com as peças, formatos e regras do jogo, ele pode ser utilizado para apresentar as formas simples de pavimentação, já que a segunda regra do jogo é uma parte principal da definição de pavimentação. Segue abaixo algumas atividades propostas.

Exercício 4.1 *Pavimentar nada mais é que preencher uma figura com outras figuras geométricas sem sobrepor nenhuma delas e sem deixar espaços entre elas. Utilizando todas as peças do Tangram, pavimente a área em azul em cada um dos casos.*

A atividade proporciona ao aluno a capacidade de pensar nas diferentes maneiras de encaixar as peças sobre uma determinada área proposta. Sabendo que não pode fugir das regras de

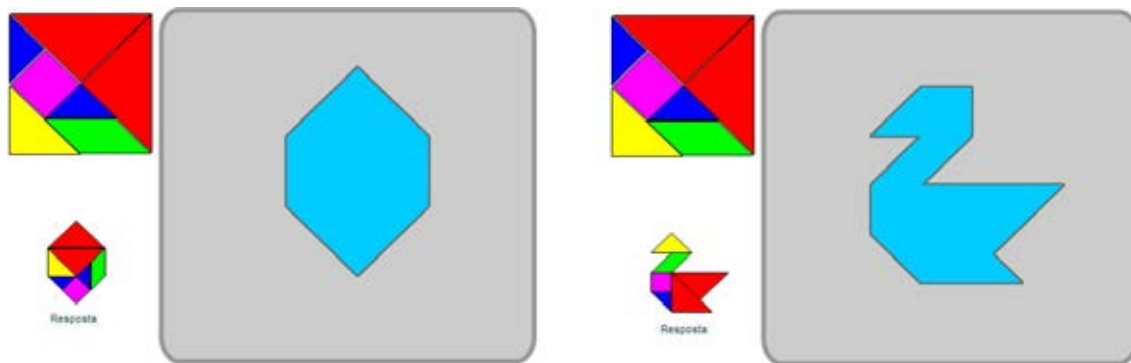


Figura 4.4: A pavimentação abordada com o Tangram.

pavimentação e tendo que usar todas as peças, o jogo se torna um desafio interessante, o que desenvolve o lado lúdico e lógico do aluno.

Uma forma alternativa de usar as peças do Tangram para ensinar conceitos de pavimentação, sendo mais estimulante e aumentando o nível de dificuldade, é determinar uma figura, o formato das peças e a quantidade dessas que o aluno deve usar.

Situações que podem ser trabalhadas.

- a) Com dois triângulos menores, cobrir um quadrado;
- b) Com dois triângulos menores, cobrir um triângulo médio;
- c) Com dois triângulos menores, cobrir o paralelogramo;
- d) Com dois triângulos menores e o quadrado, cobrir o triângulo maior;
- e) Com 2 peças montar um quadrado;
- f) Com 3 peças montar um quadrado;
- g) Com 4 peças montar um quadrado;
- h) Com 5 peças montar um quadrado;
- i) Construa um triângulo usando duas peças, três peças e quatro peças.

A atividade estimula a lógica e a criatividade do aluno. Aumentando o nível de dificuldade, podemos ver o crescimento intelectual e ajudar o aluno com as possíveis dificuldades e os obstáculos que irão apresentar.

Já nas séries mais avançadas, podemos dispor de conceitos já ensinados como área e sistema métrico e juntá-los com figuras geométricas e regras de pavimentação, para aplicação e melhor compreensão de conceitos matemáticos e da própria geometria, mostrando aplicações no dia a dia do aluno, como, por exemplo, exercícios que envolvem a pavimentação de uma sala.

Exercício 4.2 *Uma sala retangular medindo 3m por 4,25m deve ser pavimentada com ladrilhos em forma de quadrados congruentes. Supondo que não haja espaço entre os ladrilhos vizinhos, pergunta-se:*

- a) *Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros, de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser pavimentada sem cortar nenhum ladrilhos?*

b) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

Solução:

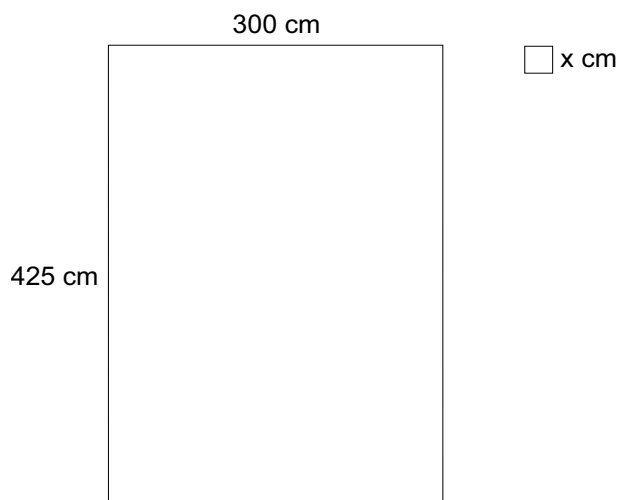


Figura 4.5: Esboço da região a ser pavimentada.

a) Como os ladrilhos são quadrados congruentes, o tamanho de seus lados tem que encaixar estando na vertical como na horizontal. Assim, para encontrar a dimensão máxima desejada dos quadrados, temos que encontrar o máximo divisor comum entre os dois lados da sala. Como $3m = 300cm$ e $4,25m = 425cm$ temos:

$$mdc(300 \text{ e } 425) = 5 \times 5 = 25 \text{ pois, } 300 = 2 \times 2 \times 3 \times \mathbf{5} \times \mathbf{5} \text{ e } 425 = \mathbf{5} \times \mathbf{5} \times 17.$$

Portanto, cada ladrilho tem que ser um quadrado de lados $25cm$ para pavimentar toda a sala sem cortar nenhum ladrilho.

b) Para encontrar quantos quadrados são necessários nesta pavimentação, basta encontrar a área total da sala e dividir pela área de cada ladrilho. Assim, $A_s = 300cm \times 425cm = 127500cm^2$ e $A_l = (25cm)^2 = 625cm^2$ e o número de ladrilhos é $\frac{127500}{625} = 204$ quadrados.

Essa atividade é importante porque mostra os conceitos ensinados em sala de aula em uma aplicação simples no dia-a-dia do aluno. Todos eles possuem uma visão clara de um chão ladrilhado, e podem pensar no desperdício de material que ocorre quando não se dá a devida atenção para o tamanho da sala e dos ladrilhos. Além disso, são esses conceitos teóricos que estimulam mais conhecimentos e também a curiosidade de suas aplicações, enriquecendo assim não só o aprendizado do aluno, mas também o conhecimento que ele levará para a vida.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, R.M. *Descobrendo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.
- [2] BOLLOBAS, B. Filling the plane with congruent convex hexagons without overlapping. *Annals Universitatis Scientiarum Budapestinensis. Sector Mathematic*, Budapest, V. 6, p. 117-123, 1963.
- [3] CASTRO, R. F. C. R. *Pavimentação do plano euclidiano*. Monografia (Especialização em Matemática)-Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- [4] GARDNER, M. On tessellating the plane with convex polygon tiles. *Scientific American*, New York, v. 233, n.1, p.112-117, July 1975.
- [5] GRUNBAUM, B., SHEPARD, G. C. *Tilings by regular polygons*, Mathematics Magazine, Washington, v. 50, p. 227-247, 1977.
- [6] HEESCH, H., KIENZLE, O. *Flächenschulss*, Berlin: Springer-Verlag, 1963.
- [7] LIMA, E.L. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2000. v. 2, p. 231-250.
- [8] MARQUES, E. C. *Tópicos sobre polígonos*. 2012. n. f. Trabalho de Conclusão do Curso (Licenciatura em Matemática)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.
- [9] REINHARDT, K. *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*. 1918. n. f. Dissertation (Dokortitel in Naturwiss)-Universität Frankfurt, 1918.