UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU - FEB
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

DIEGO ROBERTO CINTRA DA SILVA

UTILIZAÇÃO DO *DENTREDED FLUCTUATION ANALYSIS* E DO *DENTREDED CROSS-CORRELATION ANALYSIS* PARA ESTUDO DO ESPECTRO DE CORRELAÇÃO DE AÇÕES CONSTANTES NO IBOVESPA NO PERÍODO DE CRISE DO SUBPRIME

BAURU
2017

DIEGO ROBERTO CINTRA DA SILVA

UTILIZAÇÃO DO *DENTREDED FLUCTUATION ANALYSIS* E DO *DENTREDED CROSS-CORRELATION ANALYSIS* PARA ESTUDO DO ESPECTRO DE CORRELAÇÃO DE AÇÕES CONSTANTES NO IBOVESPA NO PERÍODO DE CRISE DO *SUBPRIME*

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Engenharia de Produção da Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista, UNESP, para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Produção.

Prof. Dr. Antônio Fernando Crepaldi (Orientador)

BAURU
2017

Silva, Diego Roberto Cintra.
Utilização do Dentreded Fluctuation Analysis e do Dentreded Cross-Correlation Analysis para estudo do espectro de correlação de ações constantes no Ibovespa no período de crise do *subprime* / Diego Roberto Cintra da Silva, 2017
87 f.

Orientador: Antonio Fernando Crepaldi

Dissertação (Mestrado)–Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Bauru

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE DIEGO ROBERTO CINTRA DA SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.

Aos 02 dias do mês de dezembro do ano de 2016, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO CREPALDI - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia de Produção / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. PEDRO CARLOS OPRIME do(a) Departamento de Engenharia de Produção / Universidade Federal de São Carlos, Prof. Dr. JOSE DE SOUZA RODRIGUES do(a) Departamento de Engenharia de Produção / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de DIEGO ROBERTO CINTRA DA SILVA, intitulada **UTILIZAÇÃO DO DENTREDED FLUCTUATION ANALYSIS E DO DENTREDED CROSS-CORRELATION ANALYSIS PARA ESTUDO DO ESPECTRO DE CORRELAÇÃO DE AÇÕES CONSTANTES NO IBOVESPA NO PERÍODO DE CRISE DO SUBPRIME**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO CREPALDI

Prof. Dr. PEDRO CARLOS OPRIME

Prof. Dr. JOSE DE SOUZA RODRIGUES

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os amigos e familiares pela paciência e compreensão ao longo do trabalho.

Aos colegas pelas trocas de conhecimento e companheirismo diante das mais diversas dificuldades.

A todos os funcionários e professores, especialmente a meu orientador Antonio Fernando Crepaldi pelo apoio, conhecimento e dedicação ao longo do processo, que apesar de curto, foi bastante intenso.

Aos professores Renato de Campos, Pedro Carlos Oprime e José de Souza Rodrigues por toda contribuição na qualificação e apresentação final dessa dissertação.

A CAPES, pelo apoio financeiro

Sobretudo gostaria de agradecer a fonte de todo conhecimento, inspiração, intelecto, determinação, criatividade e tudo o que existe, Deus, ou força divina que habita em cada um, por permitir que as coisas sejam como são e que eu seja quem EU SOU.

Resumo

As crises que ocorrem no mercado de ações são prejudiciais não só à parte monetária da economia de um país, mas ao desenvolvimento do país como um todo. A crise do *subprime* em 2008, que se iniciou nos Estados Unidos da América, atingiu o mundo todo, muitos países tiveram quedas significativas do PIB e vários entraram em recessão. Existe, então, o interesse em se compreender a dinâmica das séries temporais de variáveis como retorno e volatilidade das ações negociadas nesse mercado, a fim de compreender as diferenças de seu comportamento em momentos de crise econômica. Com o objetivo de analisar o espectro de correlação da volatilidade de ações no período da crise de 2008 e em suas vizinhanças, foram verificadas 31 ações de empresas pertencentes a diversos setores da economia brasileira, que compuseram entre 2007 e 2011 o Índice Bovespa. Para tal foram utilizados os métodos do *Detrended Fluctuation Analisys* – DFA e do *Detrended Cross-Correlation Analisys* – DCCA. Ambos métodos evidenciaram uma significativa mudança na função de probabilidade no período de crise comparativamente aos períodos de sua vizinhança.

Palavras-Chave: Bovespa, Crise do *subprime*, *Detrended Cross-Correlation Analysis*, *Detrended Fluctuation Analysis*.

Abstract

Crises occurring in the stock market are harmful not only to the monetary part of a country's economy, but to the development of the country as a whole. The subprime crisis in 2008, which began in the United States of America, hit the whole world, many countries had significant declines in GDP and several went into recession. There is, therefore, an interest in understanding the dynamics of time series of variables such as return and volatility of the shares traded in this market, in order to understand the differences in their behavior in times of economic crisis. With the objective of analyzing the correlation spectrum of stock volatility in the period of the 2008 crisis and its neighborhoods, 31 stocks of companies belonging to various sectors of the Brazilian economy were verified, which made up the Bovespa Index between 2007 and 2011. The methods of Detrended Fluctuation Analyzes - DFA and Detrended Cross-Correlation Analyzes - DCCA were used for this. Both methods evidenced a significant change in the probability function in the period of crisis compared to the periods of its neighborhood.

Keywords: Bovespa, Crisis of subprime, Detrended Cross-Correlation Analysis, Detrended Fluctuation Analysis.

Lista de Figuras

Figura 1.....11
Figura 2.....11
Figura 3.....12
Figura 4.....14
Figura 5.....15
Figura 6.....16
Figura 7.....17
Figura 8.....18
Figura 9.....21
Figura 10.....21
Figura 11.....22
Figura 12.....25
Figura 13.....34
Figura 14.....35
Figura 15.....35
Figura 16.....36
Figura 17.....36
Figura 18.....37
Figura 19.....38
Figura 20.....40
Figura 21.....40
Figura 22.....41
Figura 23.....42
Figura 24.....42
Figura 25.....46
Figura 26.....47
Figura 27.....51
Figura 28.....54
Figura 29.....55
Figura 30.....56
Figura 31.....56
Figura 32.....57
Figura 33.....57
Figura 34.....58
Figura 35.....58
Figura 36.....59
Figura 37.....60
Figura 38.....60

Figura 39.....61
Figura 40.....64
Figura 41.....65
Figura 42.....66
Figura 43.....667

Lista de Tabelas

Tabela 1 26
Tabela 2 63
Tabela 3 63
Tabela 4 68
Tabela 5 70
Tabela 6 71
Tabela 7 71
Tabela 8 72
Tabela 9 73

Lista de Quadros

Quadro 1.....23
Quadro 2.....48

Lista de Equações

Equação 1.....10
Equação 2.....13
Equação 3.....14
Equação 4.....14
Equação 5.....14
Equação 6.....15
Equação 7.....15
Equação 8.....16
Equação 9.....16
Equação 10.....18
Equação 11.....18

Equação 12.....**18**
Equação 13.....**23**
Equação 14.....**23**
Equação 15.....**24**
Equação 16.....**24**
Equação 17.....**26**
Equação 18.....**26**
Equação 19.....**26**
Equação 20.....**27**
Equação 21.....**27**
Equação 22.....**27**
Equação 23.....**27**
Equação 24.....**27**
Equação 25.....**34**
Equação 26.....**37**
Equação 27.....**38**
Equação 28.....**38**
Equação 29.....**40**
Equação 30.....**40**
Equação 31.....**41**
Equação 32.....**41**
Equação 33.....**50**
Equação 34.....**55**
Equação 35.....**60**
Equação 36.....**61**
Equação 37.....**62**
Equação 38.....**62**

Sumário

Lista de Figuras 2
Lista de Tabelas 3
Lista de Quadros 3
Lista de Equações 3
1 Introdução 6
1.1 Justificativa 8
1.2 Objetivos 9
1.3 Estrutura do trabalho 9
2 Revisão Bibliográfica 10
2.1 Análise de séries temporais 10
2.2 Decomposição clássica de séries temporais 20
2.2.1 Tendência 23
2.2.2 Sazonalidade 25
2.3 A análise estatística de dados financeiros 28
2.4 Memória de longo alcance em séries temporais financeiras– Do expoente de Hurst ao DFA e DCCA. 30
2.5 *Detrended Fluctuation Analysis* – DFA 33
2.6 *Detrended Cross-Correlation Analysis* - DCCA 39
2.7 Outras aplicações para memória de longo alcance em séries financeiras 43
3 Método de pesquisa 44
3.1 Crise 2008 45
3.2 Fonte de dados 46
3.3 Procedimentos 47
4 Resultados e Discussão 54
4.1 *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA) 54
4.2 *Detrended Cross-Correlation Analysis* (DCCA) 61
4.3 Antes da Crise de 2008 65
4.4 Durante a Crise de 2008 66
4.5 Após a Crise de 2008 67
4.6 Comparativo 68
4.7 Comparativo por Setor 69
5 Considerações Finais 74
Referências 76

1 Introdução

De acordo com Fonseca (2012), nessa era em que modelos computacionais traçam novas fronteiras para o conhecimento humano, o reducionismo simples já não é a única possibilidade para estudos de para vários sistemas tais como, sociais, biológicos, econômicos, entre outros. Anderson (1972) argumenta que entender as características individuais dos agentes que compõem determinado sistema complexo não garante, necessariamente, o entendimento deste como um todo. Esta afirmação resume a ideia de que, em tais sistemas, o “todo é diferente da soma das partes”.

Um sistema formado por uma grande população de agentes conectados é dito complexo se existe uma dinâmica global emergente, resultante da ação de suas partes, ao invés de ser imposta por um controle central (BOCCARA, 2008). De acordo com Mitchell (2009), os sistemas complexos são redes de componentes sem controle central, em que simples regras de operação geram comportamento coletivo complexo, avançado processamento de informação e adaptação via aprendizagem ou evolução.

A Ecologia, a estrutura política dos países e a economia são alguns exemplos de sistemas complexos. Na economia, por exemplo, os agentes (consumidores, empresas, governos, produtores, etc) buscam constantemente otimizar seus próprios objetivos individuais. Cada ação individual afeta, por sua vez, todos os demais agentes, originando um comportamento coletivo adaptativo e complexo. Assim, pode-se pensar na teoria da complexidade como sendo a chave para compreensão da emergência dos padrões coletivos (FONSECA, 2012). O interesse reside em estabelecer uma abordagem alternativa em que se busca compreender inúmeros fenômenos por meio de ingredientes microscópicos, como as regras de interação dos agentes constituintes desses sistemas, com o objetivo de compreender padrões ou estrutura macroscópicas.

Os mercados financeiros também podem ser tratados como sistemas complexos adaptativos. Do ponto de vista microscópico, a interação dos agentes que vão ao mercado negociar ativos é traduzida em um conjunto de séries de preços, taxas de juros, câmbio, índices, volumes negociados, etc. O preço, por exemplo, é influenciado pela expectativa positiva ou negativa dos compradores. Neste cenário, Mantegna e Stanley (2000) classificam os mercados financeiros como sistemas complexos cujos agentes interagem de maneira não linear. Além disso, os autores argumentam que os

mercados possuem regras subjacentes estáveis e sua evolução temporal é continuamente monitorada. De forma complementar, Boccara (2008) classifica os mercados financeiros como sistemas complexos, cujos agentes podem ser divididos em duas grandes categorias: comerciantes e ativos. Bancos, corretoras, fundos mútuos e investidores comerciais são classificados como comerciantes. Ações, títulos, futuros e opções são classificados como ativos.

De acordo com Sornete (2003), é essencial perceber que o comportamento temporal de sistemas complexos econômicos é muitas vezes controlado por eventos raros. Os temidos "*crashes*" de mercado são exemplos destes eventos que podem destruir em instantes trilhões de dólares, moldando o estado psicológico de investidores, empresas e governos. Tais eventos são interessantes e dão identidade à classe de eventos conhecida como "eventos extremos" (FONSECA, 2012). Preis e Stanley (2011) afirmam que a valorização insustentável de um mercado de ações pode gerar uma bolha financeira que irá eventualmente estourar. Os autores classificam *crashes* como violentas flutuações no preço dos ativos, causando grande impacto na Economia. É possível citar como exemplos de *crashes*, as famosas *Black Monday* de 28 de outubro de 1929 e Black Thursday de 19 de outubro de 1987, onde alguns dos principais índices de ações nos EUA caíram mais de 20% (FONSECA, 2012). Mantegna e Stanley (1995) ainda argumentam que muitos pesquisadores, por razões teóricas e práticas, têm se dedicado à distribuição da variação dos preços das ações, além de sua evolução dinâmica. Desta forma, a teoria de sistemas complexos pode ser útil em explicar e prevenir essas falhas financeiras, que são comportamentos emergentes repentinos, inesperados e que ocorrem durante curtos intervalos de tempo (FONSECA, 2012).

Segundo Horvatic et al. (2011), os dados sobre muitos sistemas do mundo real exibem duas importantes propriedades: correlações e periodicidade, que podem ser analisadas em uma única série de dados, ou em mais de uma, por meio de funções de autocorrelação ou funções de correlação cruzada, respectivamente. Mas, como muitas outras técnicas, estes métodos foram desenvolvidos para identificar correlações em dados que são estacionários e lineares. Apesar de sua popularidade e aplicabilidade, a análise de correlação tem limitações quando aplicada aos dados do mundo real associados com os sistemas físicos, biológicos, hidrológicos, econômicos e sociais, uma vez que esses são geralmente não estacionários e não lineares, (MA et al., 2010; SCHMITT ; IVANOV, 2007).

Como exemplo de série não estacionária e não linear, que também pode ser entendida como a tradução da interação dos agentes atuantes no mercado financeiro, em sua visão microscópica, têm-se os preços de fechamento diário das ações negociadas na bolsa de valores. Para o presente trabalho serão considerados os valores das ações de empresas que compõe o Índice Bovespa (Ibovespa), mais importante indicador do desempenho do mercado de ações brasileiro. Ele mostra o comportamento dos principais papéis negociados na BM&FBovespa.

O Ibovespa serve como indicador médio do comportamento do mercado. Para tanto, sua composição procura aproximar-se o mais possível da real configuração das negociações à vista na BM&FBovespa (WOLFF et al., 2011). Para Fortuna (2008), o Ibovespa funciona como um indicador antecedente, ou seja, um índice que antecipa a tendência, que se pode denominar genericamente de índice de mercado, e serve como principal referência para os investidores, principalmente pessoas físicas, muitas vezes funcionando como indicador balizador da tomada de decisão de investimento.

1.1 Justificativa

É de fundamental importância que se compreenda melhor a dinâmica do mercado de ações a fim de extrair dele um prenúncio de possível crise, uma vez que as crises no mercado de ações são extremamente prejudiciais aos outros processos que se desenvolvem em uma economia. A contaminação de variáveis reais pela crise financeira ocorrida a partir do ano de 2008 pôde ser observada em escala mundial. É interessante para a sociedade evitar grandes prejuízos, a partir de modelos que possam indicar alterações significativas do comportamento do mercado acionário.

O presente estudo será aplicado ao mercado de ações brasileiro (Bovespa), sendo o Brasil atualmente classificado como o maior país e maior potência econômica da América Latina, ocupando a 9º posição no hanking mundial de produto interno bruto (PIB).

1.2 Objetivos

O presente estudo tem por objetivo principal analisar a possível existência de mudanças no espectro de correlação dos valores de fechamento de todas as ações (31 empresas) que compuseram o IBOVESPA durante o período da crise do *subprime* e suas vizinhanças, utilizando os métodos DFA *(Detrended Fluctuation Analysis)* e DCCA *(Detrended Cross-Correlation Analysis)* para tratar a não linearidade e não estacionariedade dos dados.

1.3 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está dividido da seguinte forma: O capítulo 2 apresenta a revisão da literatura com uma breve revisão de séries temporais (ST), memória de longo alcance e os métodos utilizados, DFA e DCCA. O capítulo 3 é dedicado a fonte de dados, sua descrição e os procedimentos realizados para obter a série temporal que será utilizada para análise. O capítulo 4 apresenta os resultados e discussões gerais dos métodos aplicados, bem como os resultados por período de análise: antes, durante e após a crise do subprime. O capítulo 5 traz as considerações finais. Por fim são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas.

2 Revisão Bibliográfica

Nessa sessão busca-se cobrir os principais pontos sobre séries temporais, análise de séries e os métodos que são aplicados no presente trabalho: DFA (*Dentrended Fluctuation Analysis*) e DCCA (*Detrended Cross Correlation Analysis*).

2.1 Análise de séries temporais

As investigações empíricas dependem, em grande extensão, de dados arranjados em forma cronológica e análise de séries temporais (AST) e têm como objetivo descrever e analisar os comportamentos passados da série, visando à compreensão do comportamento da série e à consequente previsão de movimentos futuros (FONSECA et al., 1985). A análise de séries temporais tem sido de grande importância em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, economia, ciências sociais, demografia, epidemiologia, entre outras.

Para Morettin e Toloi (2004), série temporal é um conjunto de observações ordenadas no tempo. Seja Y a variável aleatória (v.a.) observada e t a variável tempo. Uma série temporal é definida pelos valores, Y_1, Y_2, Y_3... Y_n; nos tempos, t_1, t_2, t_3... t_n. Assim Y é uma função de t simbolizada pela Equação 1:

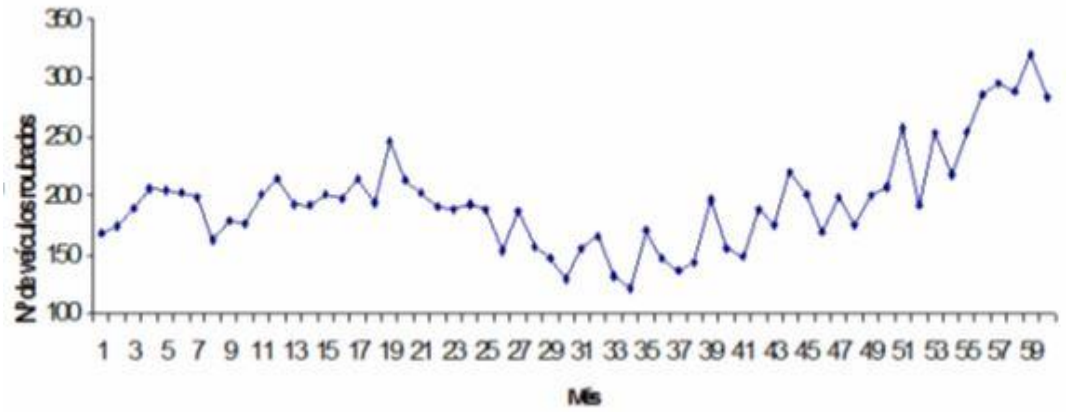
$$\boldsymbol{Y = F(t)} \tag{1}$$

Como exemplos de séries temporais, pode-se citar:

(i) Valores diários de temperaturas médias;
(ii) Incidência mensal dos acidentes de trânsito;
(iii) Taxa mensal de homicídios dolosos por mil habitantes;
(vi) Índice diário da Bolsa de valores de São Paulo;
(vii) Número médio de pessoas transportadas diariamente em veículos coletivos;
(viii) Valores diários do consumo de energia elétrica;

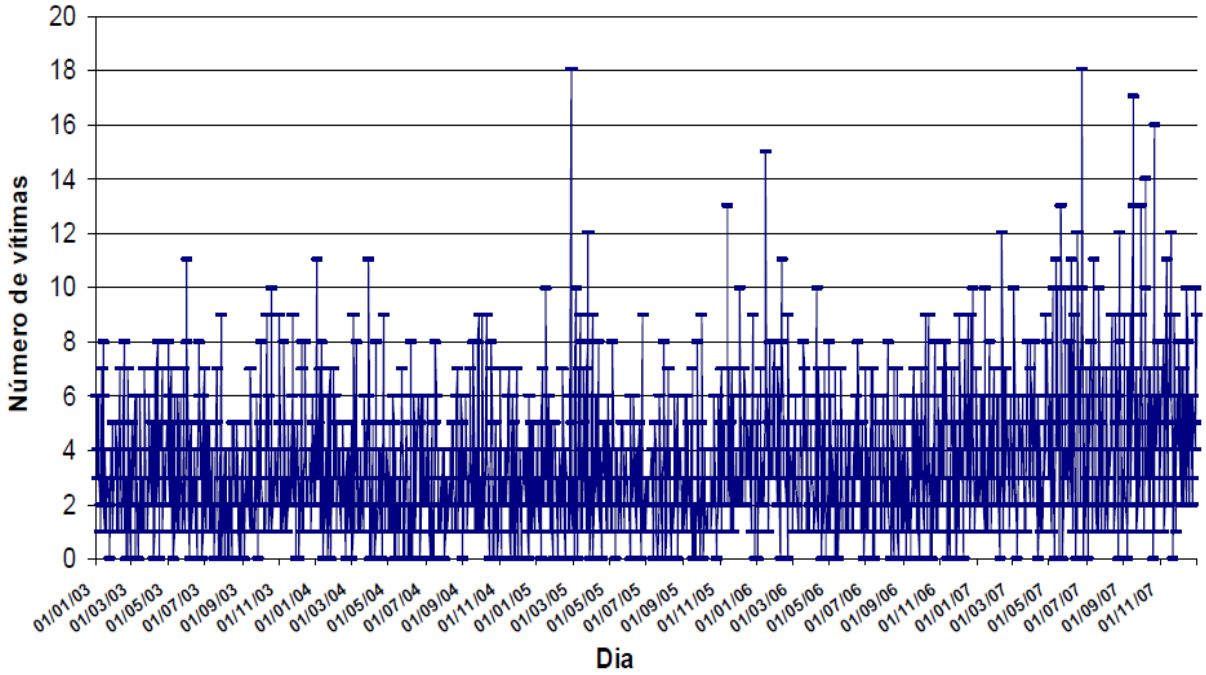
Ainda como exemplos de comportamento de séries temporais podem-se mostrar a Figura 1 e a Figura 2.

Figura 1 - Número de veículos roubados mensalmente em Salvador - BA



Fonte: Silva Filho (2009).

Figura 2 - Homicídios dolosos registrados diariamente na Região Metropolitana de Salvador.



Fonte: Silva Filho (2009).

De acordo com Silva Filho (2009), a AST é o procedimento que identifica os fatores relacionados ao tempo e que influenciam os valores observados na série. Uma vez identificados, podem ser usados para auxiliar na interpretação e na projeção de

valores da série temporal. Segundo Morettin e Toloi (2004), existem, basicamente, dois enfoques utilizados nos procedimentos de análise de séries temporais, ambos com objetivos determinados. No primeiro enfoque, a análise é realizada no domínio temporal, ou seja, é considerada a evolução temporal do processo e os modelos propostos são modelos paramétricos (com um número finito de parâmetros); já no segundo enfoque a análise é concebida no domínio de frequência e os modelos propostos são modelos não paramétricos. Por exemplo, pode-se citar a análise espectral (SILVA FILHO, 2009).

Obtida a série temporal, pode-se estar interessado em:

a) investigar o mecanismo gerador da série temporal;

b) fazer previsões de comportamento futuro da série;

c) descrever apenas o comportamento da série; neste caso, pode-se citar como ferramentas úteis: a utilização de medidas estatísticas descritivas, a construção de gráficos, a verificação de tendências, ciclos e variações sazonais, etc;

d) procurar periodicidades relevantes nos dados.

Em variadas situações no campo das ciências exatas, biológicas e humanas é frequente o conceito de sistema dinâmico, submetendo-se a uma série de entrada X(t), uma série de saída Z(t) e uma função de transferência υ (t), conforme Figura 3.

Figura 3 - Sistema dinâmico - representação

$$X(t) \longrightarrow v(t) \longrightarrow Z(t)$$

Fonte: Morettin e Toloi (2004).

Os sistemas lineares, segundo Veiga e Sáfadi (1999), são de relevante importância, onde a saída está relacionada com entrada por meio de um funcional linear envolvendo $v(t)$. Segundo estes, um exemplo característico é a chamada função de transferência, representada pela Equação 2.

$$\boldsymbol{Z(t)} = \sum_{\boldsymbol{t=0}}^{\infty} \boldsymbol{v(\tau)X(t-\tau)} \qquad (2)$$

Segundo Silva Filho (2009), daí surgem os problemas de interesse que são:

a) estimar a função de transferência v(t) conhecendo as séries de entrada e de saída;

b) fazer previsões da série Z(t), com o conhecimento de observações da série de entrada X(t);

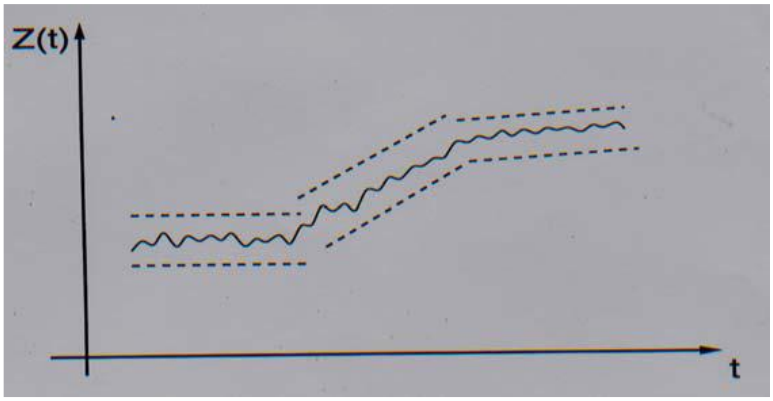
c) estudar o comportamento do sistema, simulando-se a série de entrada;

d) controlar a série de saída Z(t), de modo a trazê-la o mais próximo possível de um valor desejado, ajustando-se convenientemente a série de entrada X(t); este controle é necessário devido a perturbações que normalmente afetam um sistema dinâmico.

Um aspecto relevante no estudo de séries temporais é identificar se a série é estacionária, ou seja, se ela desenvolve aleatoriamente no tempo em torno de uma média constante, caracterizando assim algum padrão de equilíbrio estável. Entretanto, na maioria das vezes as séries temporais apresentam característica de não estacionariedade (SILVA FILHO, 2009). Outra característica importante ao analisar uma série temporal é detectar componentes periódicos e separar componentes determinísticos, dos puramente estocásticos (ANTENEODO, 2004).

Os modelos utilizados em séries cronológicas fundamentam-se fortemente no conceito de estacionariedade. Sendo assim, em sua maioria, os modelos considerados são lineares e estacionários, como os modelos autorregressivos (AR), de médias móveis (MA) e mistos (ARMA) (SILVA FILHO, 2009). Existem, também, modelos capazes de descrever estatisticamente séries estacionárias e não estacionárias, por exemplo, o modelo ARIMA (modelos autorregressivos integrados e de médias móveis) desde que não apresentem comportamento explosivo (MORETTIN ; TOLOI, 2004). Uma série temporal pode apresentar característica de estacionariedade durante um período longo ou apenas em períodos muito curtos, mudando de nível e/ou de inclinação como mostra a Figura 4.

Figura 4 - Série não-estacionária quanto ao nível e inclinação.



Fonte: Morettin e Toloi (2004).

Devido ao fato de grande parte dos modelos estatísticos de AST supor que as séries sejam estacionárias é preciso transformar os dados não estacionários originais em uma série estacionária. O procedimento de transformação mais elementar é estabelecer diferenças sucessivas da série original, até conseguir a desejada estacionariedade (MORETTIN ; TOLOI, 2004).

Assim, a primeira diferença de Z(t) é definida pela Equação 3:

$$\boldsymbol{\Delta Z(t) = Z(t) - Z(t-1)} \tag{3}$$

E a segunda diferença pela Equação 4:

$$\boldsymbol{\Delta^2 Z(t) = \Delta[Z(t) - Z(t-1)]} \tag{4}$$

De forma geral, a n-ésima diferença de Z(t), conforme Equação 5 é:

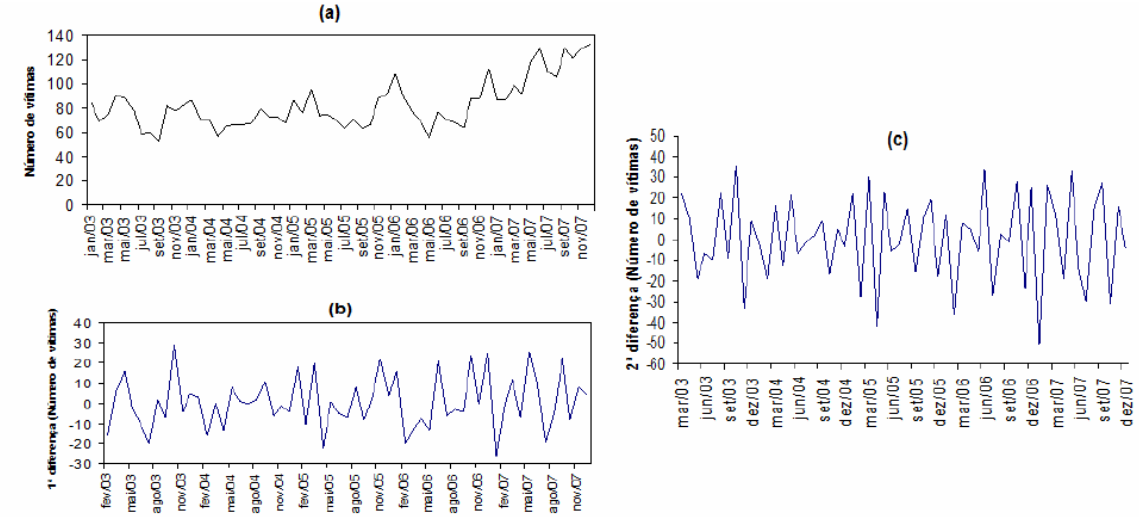
$$\boldsymbol{\Delta^n Z(t) = \Delta[\Delta^{n-1} Z(t)]} \tag{5}$$

Ainda segundo Morettin e Toloi (2004), é frequente em séries temporais econômicas e financeiras, por exemplo, a presença de tendências, podendo gerar um acréscimo de variância ao longo do tempo. Neste caso, uma transformação não linear, como a logarítmica pode ser aplicada.

Existem, basicamente, dois motivos para se transformar os dados originais de uma série temporal: estabilizar a variância e tornar o efeito sazonal aditivo. Uma outra razão de se transformar os dados, de acordo com Morettin e Toloi (2004), é obter uma

série mais próxima possível de uma distribuição aproximadamente Normal, ou seja, μ = 0 (média igual a 0) e σ^2 = 1 (variância igual a 1). Silva Filho (2009) traz uma ilustração de tal tratamento por meio da Figura 5, que apresenta: (a) os homicídios dolosos registrados em Salvador – BA de Janeiro de 2003 a Dezembro de 2007, (b) a primeira e (c) a segunda diferença, respectivamente, da série de homicídios dolosos de Salvador – BA, agora estacionária (em b e c).

Figura 5 - (a) Homicídios dolosos registrados mensalmente em Salvador – BA, (b) primeira e (c) segunda diferença.



Fonte: Silva Filho (2009).

Caso se conside Z_1, Z_2,..., Z_n como variáveis aleatórias, tendo uma distribuição conjunta $f(Z_1,...,Z_n)$ e distribuições marginais $f(Z_1),...,f(Z_n)$, a série será estacionária se, para qualquer momento de tempo t e n , tiver $f(Z_1) = f(Z_{t+n})$, n = ±1,±2,..., isto é, as distribuições de $Z_1,Z_2,...,Z_n$ são invariantes por translações ao longo do tempo. Assim, Z_t e Z_{t+n} terão os mesmos parâmetros (SILVA FILHO, 2009). Considere $E(Z_t)$ o valor esperado da variável e $Var(Z_t)$ a variância de Z.

$$\boldsymbol{E(Z_t) = E(Z_{t+n})}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{Var(Z_t) = Var(Z_{t+n})}, \tag{7}$$

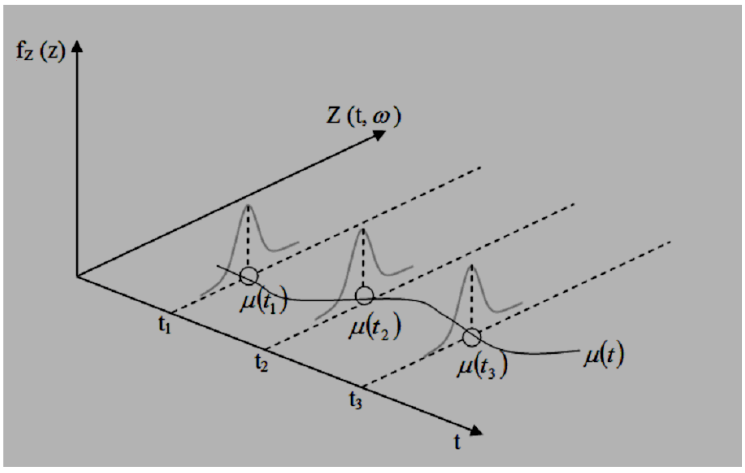
Ou seja, a média e a variância de uma série estacionária são constantes, independentemente do instante de tempo t, e pode-se representá-las da seguinte forma:

$$\boldsymbol{E(Z_t) = \mu, \quad \forall t} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Var(Z_t) = \sigma^2, \quad \forall t} \tag{9}$$

Algumas séries temporais são baseadas em processos estocásticos, isto é, processos controlados por leis probabilísticas. Se relacionar T como um conjunto arbitrário, um processo estocástico seria uma família Z = {Z(t), t ∈T}, tal que, para cada t∈T, Z(t) é uma variável aleatória (MORETTIN ; TOLOI, 2004; PEREIRA, 1984). Nestas condições um processo estocástico pode ser considerado uma família de variáveis aleatórias e pode-se supor que elas sejam definidas no mesmo espaço amostral de probabilidade (Ω) (SILVA FILHO, 2009). Na realidade, Z(t) é uma função de dois argumentos, Z(t,ω),t ∈ T, ω ∈ Ω, conforme ilustra Figura 6.

Figura 6 - Um processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias



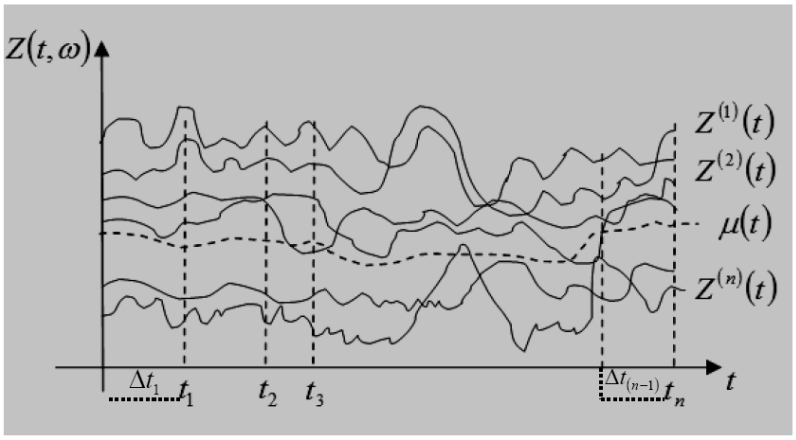
Fonte: Morettin e Toloi (2004).

Silva Filho (2009) explica que para cada t ∈T, tem-se uma variável aleatória Z(t, ω), como uma distribuição de probabilidade, ou seja, é possível que a função densidade de probabilidade f(Z) no momento t_1 difira da f(Z) no momento t_2.

Se forem designadas as possíveis realizações de $Z(t,\omega)$ por $Z^{(1)}(t),Z^{(2)}(t),...,Z^{(n)}(t)$, pode-se chamar o conjunto de todas as possíveis trajetórias como um "*ensemble*". E, além disso, pode-se observar que cada realização $Z^{(j)}(t)$ é uma função do tempo t não aleatória e, para cada t fixo, $Z^{(j)}(t)$ é um número real (SILVA FILHO, 2009).

Segundo Morettin e Toloi (2004), uma forma de analisar uma distribuição de probabilidade $Z(t,\omega)$, para um t fixo, é levar em consideração, durante a análise, a quantidade de trajetórias que passam por uma janela de amplitude Δt de modo que, tal quantidade de trajetórias será relacionada à $f_z(Z)\Delta t$. Onde $\Delta t=t_j-t_{(j-1)}$, j variando de 1,...,n pontos da série conforme a Figura 7.

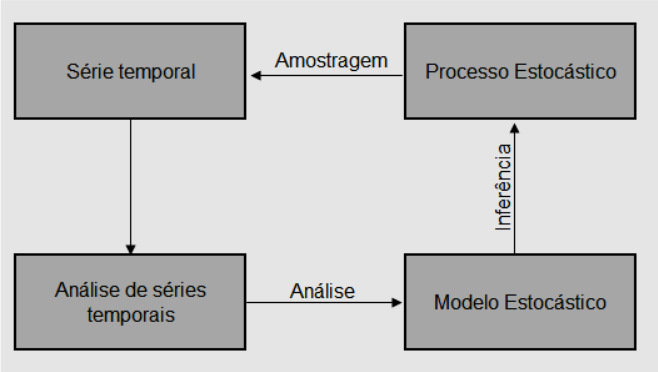
Figura 7 - Um processo estocástico interpretado como uma família de trajetórias



Fonte: Silva Filho (2009).

Um processo estocástico está estatisticamente determinado quando são conhecidas suas funções de distribuição até a N-ésima ordem. Por exemplo, dado um processo estocástico Z = {Z(t),t ∈T}, o mesmo estará especificado se, para todo n>1, forem conhecidas as distribuições finito-dimensionais. Isto denota que, para n = 1, são conhecidas as distribuições unidimensionais da variável aleatória (v.a.) $Z(t_1)$, t ∈ T; para n = 2, são conhecidas as distribuições bidimensionais da v.a. $(Z(t_1), Z(t_2))$, t ∈ T e assim por diante (MORETTIN ; TOLOI, 2004; PEREIRA, 1984). Porém, na prática, segundo Souza e Camargo (2004), dificilmente se conhecem todas as funções de distribuição até a N-ésima ordem e frequentemente tem-se apenas uma realização do processo estocástico em análise. Com esta realidade, é necessário realizar uma inferência do mecanismo gerador da série (Figura 8).

Figura 8 - Processo estocástico e Série temporal



Fonte: Souza e Camargo (2004).

A Figura 8 ilustra a sequência e o objetivo do estudo de séries temporais. Isto é, considerando um processo estocástico em análise, retira-se uma amostra finita de observações (série temporal), e, por meio do estudo dessa amostra, é possível atribuir um modelo com propósito de inferir sobre o comportamento da realidade (GUJARATI, 2000). Uma relevante classe de modelos estocásticos corresponde ao processo estacionário, que pode ser explicado algebricamente da seguinte forma:

Um processo estocástico Z = {Z(t), t ∈ T} é considerado estacionário, se para todo t tiver:

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t})] = \mu, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{V}[\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t})] = \boldsymbol{V}[\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\mu}]^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{2}}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t-k}) - \boldsymbol{\mu})] = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \ldots \tag{12}$$

onde μ é a média amostral esperada por E{Z(t)} e σ^2 a variância esperada em V[Z(t)], que são invariantes ao longo do tempo. A Equação 12 exprime que as autocovariâncias independem no tempo. Ou seja, elas variam apenas em função da distância ou ordem k que afasta as duas observações consideradas (ENDERS, 2003).

De acordo com Silva Filho (2009), além das propriedades mencionadas, outra propriedade importante em uma série temporal (ST) é a autocorrelação, que determina se a série possui memória de longa duração ou não, ou seja, se ela é persistente, antipersistente ou descorrelacionada. Uma série temporal pode ser caracterizada como persistente se observações adjacentes estão correlacionadas

positivamente. A ST é denominada como antipersistente se a série apresentar correlação inversa, ou seja, se existir a tendência de valores grandes serem seguidos por valores pequenos como, por exemplo, o batimento cardíaco. Se uns dos casos supracitados não ocorrerem a série é dita descorrelacionada, como ocorre com o ruído branco (ANTENEODO, 2004).

Comumente os modelos de previsão de ST fundamentam-se na suposição de que observações passadas contêm propriedades sobre o padrão de comportamento da ST. O objetivo dos métodos, neste caso, é estabelecer diferença entre o padrão de qualquer ruído que possa estar contido nas observações para daí então usar esse padrão para prever valores ou movimentos futuros da série (SILVA FILHO, 2009).

A classificação por meio dos modelos de ST, de acordo com o número de parâmetros envolvidos, se dá através de duas classes: modelos paramétricos (aqueles para os quais este número de parâmetro é finito) e não-paramétricos (os que envolvem um número infinito de parâmetros). Na classe de modelos paramétricos, cuja análise é realizada no domínio do tempo, entre os mais frequentes na utilização estão os modelos de erro (ou de regressão), os modelos autorregressivos e de médias móveis (ARMA), os modelos autorregressivos integrados e de médias móveis (ARIMA), modelos de memória longa (ARFIMA), modelos estruturais e modelos não-lineares. E os métodos não-paramétricos comumente utilizados são a função de autocovariância (autocorrelação) e a transformada de Fourier (SILVA FILHO, 2009).

Ainda segundo Silva Filho (2009), pode-se classificar, também, os modelos de ST em duas categorias: modelos automáticos e modelos não automáticos. Os modelos automáticos correspondem àqueles cuja aplicação se dá diretamente com o auxílio do computador. Já os não automáticos exigem a intervenção de pessoal especializado, para serem modelados, devido à dificuldade de automatização do modelo. Entre os modelos automáticos pode-se citar os modelos de alisamento exponencial simples, os modelos autorregressivos *stepwise* e a filtragem adaptativa. No rol de modelos não-automáticos pode-se mencionar o chamado método Box-Jenkins e o Bayesiano. Por sua simplicidade, eficiência computacional e razoável previsão, os modelos automáticos de ST são bastante utilizados (MORETTIN ; TOLOI, 1987; VEIGA ; SÁFADI, 1999).

Grande parte dos métodos de ST estão fundamentados apenas na análise de uma série temporal visando especificar algum modelo que a descreva, porém existem alguns procedimentos de previsão que tentam modelar o comportamento de uma ST

por meio de outras séries (SILVA FILHO, 2009). Com essa premissa, Souza (1989) classifica os modelos de ST, dependendo do número de STs envolvidas na análise, em modelos univariados e multivariados. A modelagem de uma única série temporal denomina-se análise univariada, enquanto que a análise de mais de uma série distinta trata-se de uma análise multivariada (MADDALA, 2003).

Existe na literatura uma significativa variedade de modelos de séries temporais, cada um com suas peculiaridades, ou seja, capacidades e limitações (WHEELWRIGHT ; MAKRIDAKIS, 1985). Diante disso, fica evidente que qualquer que seja a classificação do modelo de ST, é possível modelar estatisticamente um número significativo de diferentes modelos para analisar o comportamento de uma série particular (SILVA FILHO, 2009).

A construção e seleção de modelos de ST dependem de diversos fatores como, comportamento do fenômeno ou conhecimento *a priori* de sua natureza e do objetivo do estudo e, também, da acessibilidade a *softwares* adequados (MORETTIN ; TOLOI, 2004).

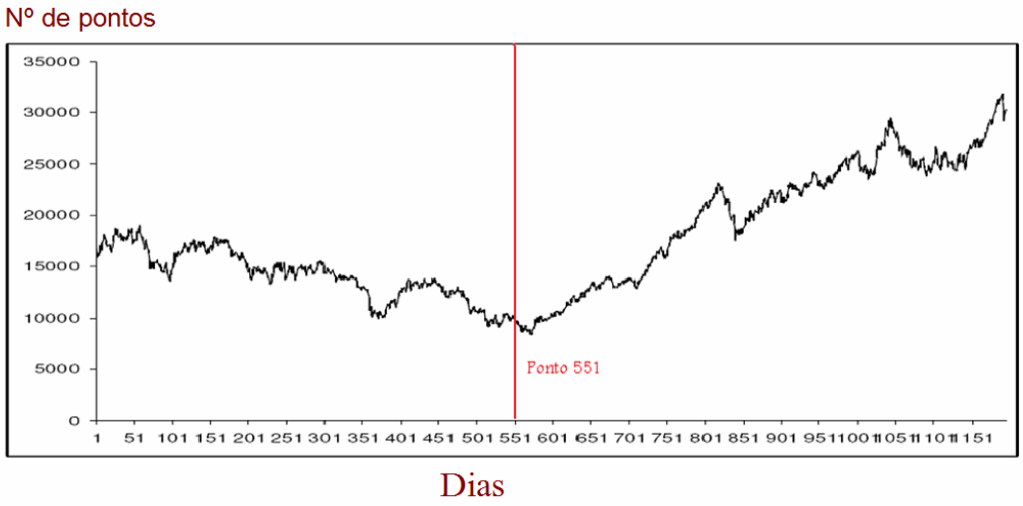
2.2 Decomposição clássica de séries temporais

Até o início da década de 70, a maior parte dos trabalhos envolvendo séries temporais procuravam decompô-las em tendência (T_t), ciclo (C_t), sazonalidade (S_t) e termo errático (E_t) (SILVA FILHO, 2009). Uma série temporal (Y_t) pode resultar na combinação de todas as quatro componentes mencionadas anteriormente ou por parte delas. Em formato aditivo tem-se $y_t = T_t + C_t + S_t + E_t$, já no multiplicativo pode-se expressar $y_t = T_t \times C_t \times S_t \times E_t$, t =1,...n. O modelo aditivo é recomendado, por exemplo, quando S_t não depende das outras componentes, como a tendência. Caso as amplitudes sazonais variem com a tendência, o modelo mais adequado é o multiplicativo (SILVA FILHO, 2009).

Silva Filho (2009) também explica que uma ST está intimamente ligada a uma mudança no nível da série em longo prazo. Ou seja, a tendência pode refletir o acréscimo, a redução ou a estabilidade em torno de um valor médio da série temporal em longo prazo (Figura 9).

A Figura 9 representa uma série temporal sem movimento cíclico aparente, com uma quebra de estrutura expressiva (troca abrupta de movimento de tendência em torno do ponto 551) e não estacionária (ARNAUD, 2007).

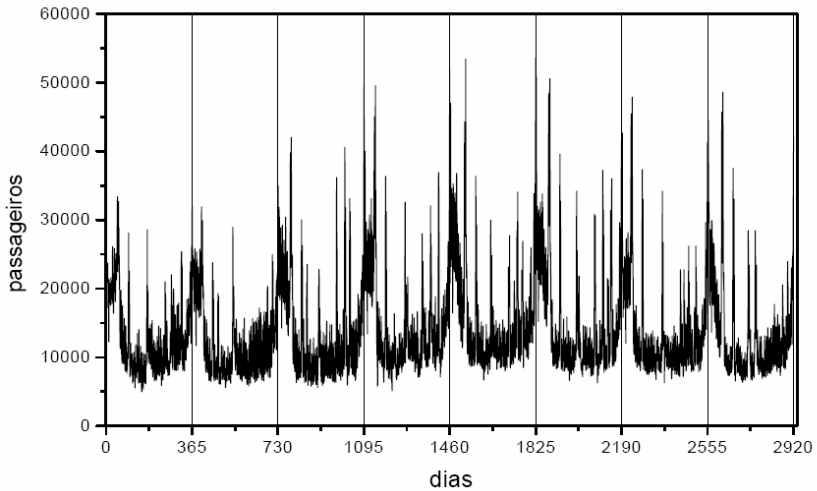
Figura 9 - Cotações diárias do índice IBOVESPA



Fonte: Silva Filho (2009).

A sazonalidade ocorre quando padrões cíclicos de flutuação se repetem em intervalos relativamente constantes de tempo (Figura 10).

Figura 10 - Passageiros transportados diariamente pelo sistema ferryboat.

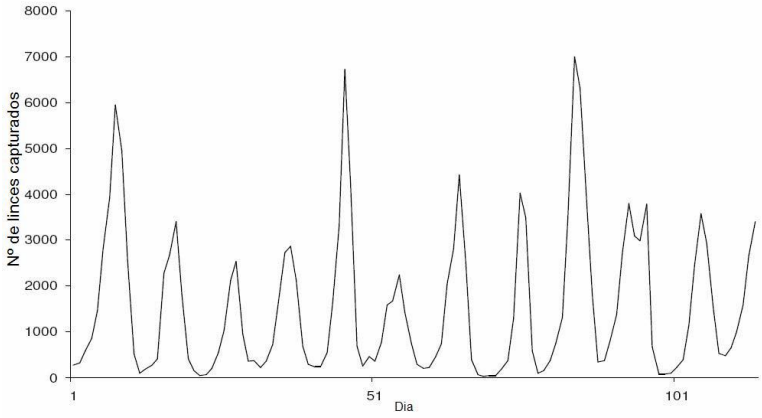


Fonte: Silva Filho (2009).

A característica cíclica é evidenciada quando a série temporal manifesta variações ascendentes e descendentes, mas em intervalos não regulares de tempo (Figura 11). Qualquer variação em uma série temporal que não possa ser relacionada com uma das características anteriormente mencionada ocorre devido ao chamado ruído aleatório no processo gerador da série (SILVA FILHO, 2009). O termo ruído denota algo irregular. Para uma ST ruído é uma variação aleatória do sinal ao redor do seu valor médio. A hipótese usual é que essa variação resulte em uma série puramente aleatória ou ruído branco, com média zero e variância constante (SILVA FILHO, 2009).

Na Figura 10 é possível observar um comportamento sazonal, pois existem movimentos semelhantes a cada 365 dias. A Figura 11 demonstra claro movimento cíclico, sem movimento de tendência relevante e é estacionária.

Figura 11 - Número de linces capturados no Noroeste do Canadá, 1821 - 1934



Fonte: Arnaud (2007).

A título de exemplo, o Quadro 1 apresenta as quatro componentes que podem influenciar uma ST econômica ou de negócios e suas respectivas características (LEVINE et al., 2000).

Quadro 1 - Fatores que influenciam dados de séries econômicas ou de negócios

Componente	Classificação do componente	Definição	Razão para a Influência	Duração
Tendência	Sistemático	Geral ou persistente, padrão de movimento de longo prazo para cima ou para baixo	Modificações na tecnologia, na produção, na renda ou no valor	Vários anos
Sazonal	Sistemático	Flutuações periódicas relativamente regulares que ocorrem dentro de cada período de 12 meses ano após ano	Condições climáticas, costumes sociais, costumes religiosos	Dentro de 12 meses, mensal ou trimestral
Cíclico	Sistemático	Oscilações ou movimentos repetidos para cima e para baixo através de quatro fases, pico, para a contratação, para o fundo e para a expansão	Interação de inúmeras combinações de fatores que influenciam a economia	Geralmente de 2 a 10 anos com diferentes intensidades para um ciclo completo
Irregular	Não-sistemático	Flutuações erráticas ou "residuais" em uma série temporal que existem após se levarem em conta os efeitos sistemáticos, tendência sazonal e cíclico.	Variação aleatória nos dados ou devido a eventos não-previstos, como greves, furações, assassinatos políticos, etc	Curta duração e sem repetição

Fonte: Levine et al. (2000).

2.2.1 Tendência

Considere a Equação 13.

$$\boldsymbol{Z_t = T_t + S_t + a_t,} \tag{13}$$

onde T_t e S_t denotam a tendência e sazonalidade, respectivamente, enquanto a_t, a componente aleatória, com média zero e variância constante. O principal objetivo em considerar o modelo acima é estimar S_t e modelar uma série livre de sazonalidade ou sazonalidade ajustada (SILVA FILHO, 2009). Com o objetivo de se estimar a tendência, pode-se supor que a componente sazonal não esteja presente e assim representa Z_t como na Equação 14.

$$\boldsymbol{Z_t = T_t + a_t,} \tag{14}$$

Silva Filho (2009) diz que as componentes T_t e S_t são comumente relacionadas, onde a influência da tendência sobre a sazonalidade pode ser significativa, por dois motivos. Primeiro porque modelos de estimação de sazonalidade podem ser consideravelmente afetados se não levarmos em conta a componente tendência e, em segundo lugar, a descrição das características de S_t depende da especificação de T_t.

Os métodos destinados à estimação de tendência (T_t) mais frequentes tem o propósito de:

(i) modelar uma série temporal, com um polinômio de grau m, uma função exponencial ou outra função suave de t;

(ii) suavizar (ou filtrar) as observações da série ao redor de um ponto visando a estimação da tendência naquele ponto;

(iii) suavizar, por meio de sucessivos ajustes de retas de mínimos quadrados ponderados ("*lowess*"), as observações da série objeto de estudo.

Aplicando um dos procedimentos anteriormente citados, pode-se estimar a tendência através de $\hat{T}$ obtendo assim uma série livre de tendência ou ajustada, conforme Equação 15,

$$\boldsymbol{Y_t = Z_t - \hat{T}_t} \tag{15}$$

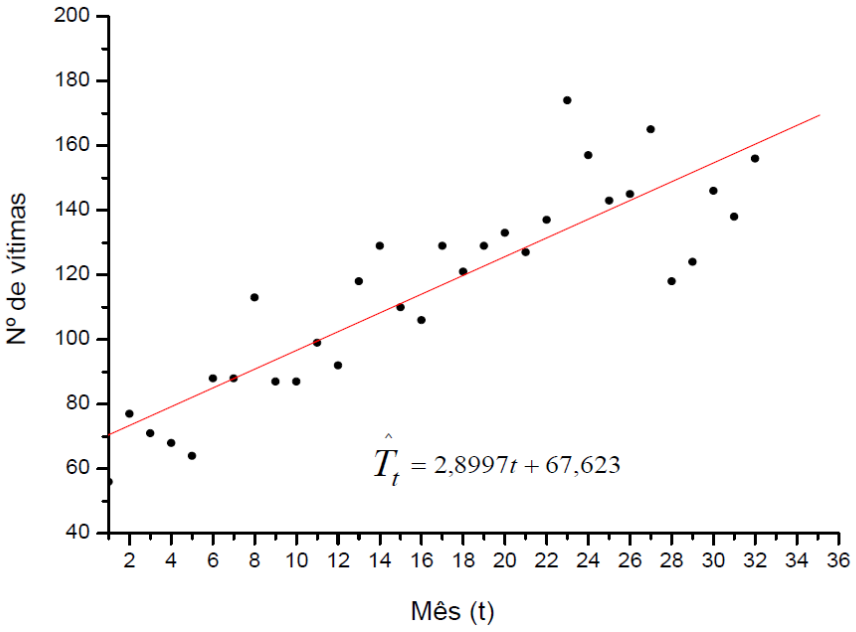
Uma técnica comumente utilizada na estimação de tendência $(\boldsymbol{\hat{T}_t})$ de uma ST é o ajuste de uma curva aos valores observados da série. As funções mais utilizadas são: a exponencial, a logística e um polinômio de grau m. Esta dissertação se limita a descrever o ajuste através de um polinômio. Assim supondo que a tendência de uma série possa ser representada pelo seguinte polinômio de grau m:

$$\boldsymbol{\hat{T}_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m} \tag{16}$$

Ressalta-se que o grau m do polinômio deve ser bem menor que o número de observações N. Na estimação dos parâmetros β_j, o método mais utilizado é Método dos Mínimos Quadrados.

Como exemplo da aplicação do método dos mínimos quadrados (polinômio de grau um) para estimar a tendência $\hat{T}_t$, Silva Filho (2009) traz os dados dos homicídios dolosos registrados em Salvador – BA de maio de 2006 a dezembro de 2008 (Figura 12).

Figura 12 - Ajuste linear através dos mínimos quadrados na série de homicídios dolosos registrados em Salvador – BA, maio/2006 - dez/2008.



Fonte: Silva Filho (2009).

2.2.2 Sazonalidade

Sabendo que uma ST pode ser expressa por $Z_t = T_t + S_t + a_t$, com t = 1,2,3...N, pode-se estimar a componente sazonal S_t subtraindo a série estimada de Z_t. Utilizando essa premissa, um procedimento de ajustamento sazonal consiste em obter $\hat{S}_t$ de S_t e calcular $S_t^{SA} = Z_t - \hat{S}_t$, sendo S_t^{SA}, a série principal depois de desconsiderada a sazonalidade. Com base em Morettin e Toloi (2004), ao estimar a componente sazonal, comete-se o erro de ajuste sazonal, expresso por $\delta_t = S_t - \hat{S}_t$. O procedimento de ajustamento sazonal é conceituado ótimo se for capaz de minimizar o erro de ajustamento. Empiricamente denotam-se como sazonalidade em uma série temporal os eventos que ocorrem regularmente em intervalos constantes como, por

exemplo, o aumento do furto e do roubo e das vendas de dezembro a fevereiro ano a ano (SILVA FILHO, 2009). Entre os diversos métodos de estimação de sazonalidade, os mais frequentes na utilização são: os métodos de regressão e os de médias móveis (VEIGA ; SÁFADI, 1999; MORETTIN ; TOLOI, 2004).

O método de médias móveis é recomendado na estimação da sazonalidade quando a série temporal apresenta sazonalidade estocástica (varia com o tempo). Para a compreensão do método de estimação da sazonalidade através da média móvel, considere a Tabela 1, que representa observações de uma série temporal com p anos.

Tabela 1 - Observações de uma série temporal com p anos

	Jan	Fev	Mar	...	Dez	
Anos	1	2	3	...	12	Médias
1	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	...	$Z_{1.12}$	$\bar{Z}_{1.}$
2	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	...	$Z_{2.12}$	$\bar{Z}_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
p	Z_{p1}	Z_{p2}	Z_{p3}	...	$Z_{p.12}$	$\bar{Z}_{p.}$
Médias	$\bar{Z}_{.1}$	$\bar{Z}_{.2}$	$\bar{Z}_{.3}$	...	$\bar{Z}_{.12}$	$\bar{Z}$

Fonte: Moretin e Toloi (2004).

A Tabela 1 representa dados mensais e o número total de observações N. Sendo N o múltiplo de 12, isto é, N =12 p; p = número de anos. Se calcularmos médias mensais, utilizando a notação da Tabela 1 chegaremos às seguintes expressões:

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{l.}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\mathbf{12}} \boldsymbol{Z_{ij}} \quad \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2} \ldots, \boldsymbol{p}, \tag{17}$$

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{.j}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{Z_{ij}} \quad \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2} \ldots, \mathbf{12}, \tag{18}$$

$$\bar{\boldsymbol{Z}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}\boldsymbol{p}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{p}}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\mathbf{12}} \boldsymbol{Z_{ij}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{Z_t} \tag{19}$$

Ainda utilizando a notação da mesma tabela representa-se Z_{ij} como modelo sazonal constante (não varia muito ano a ano) pela Equação 20:

$$\boldsymbol{Z_{ij} = T_{ij} + S_j + a_{ij}, \quad i = 1 \ldots, p, j = 1, \ldots, 12.} \tag{20}$$

Já para modelo sazonal não-constante é possível representar Z_{ij} da seguinte forma:

$$\boldsymbol{Z_{ij} = T_{ij} + S_{ij} + a_{ij}, \quad i = 1 \ldots, p, j = 1, \ldots, 12.} \tag{21}$$

Ao considerar a série $Y_t = Z_t - \hat{T}_t$ este procedimento fornecerá meios para estimar a sazonalidade (S_t). Se a partir de Y_t forem tomadas as médias dos meses: janeiro, fevereiro, março etc., utilizando a notação da Tabela 1, chega-se à Equação 22:

$$\boldsymbol{\overline{Z}_{.j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}, \quad j = 1, \ldots, 12,} \tag{22}$$

Como em geral a soma dos $\widehat{Y_{.J}}$ não é zero, é possível estimar as constantes sazonais considerando $\widehat{S_{.J}} = \overline{Y_{.J}} - \bar{Y}$, onde:

$$\boldsymbol{\overline{Y} = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12} \overline{Y}_{.j}} \tag{23}$$

O modelo, neste caso, pode ser escrito como $Z_t = T_t + S_j + a_t$ com t =12i +j = 0,1..., p−1, j =1,...,12, existindo p anos. Sendo assim pode-se escrever $\overline{Y_{.J}}$ como:

$$\boldsymbol{\overline{Y}_{.j} = \frac{1}{P-1}\sum_{i=1}^{p-1} Y_{12i+j}, j = 1, \ldots, 6,} \tag{24}$$

A série livre de sazonalidade é: $Z_t^{SA} = Z_t - \hat{S}_t$

2.3 A análise estatística de dados financeiros

As séries de dados temporais dos índices de mercado de ações são não-estacionárias com propriedades estatísticas que mudam sob diferentes campos de análise. Assim, a série de dados é dita heterogênea, o que significa que se pode obter diferentes valores de média, desvio padrão, etc., dependendo do intervalo de tempo em que são calculados. A análise e estudo de tais séries temporais é mais complicada porque os diversos métodos estatísticos comumente utilizados são baseados no pressuposto de estacionariedade dos dados analisados (YIN et al., 2015).

Grech e Mazur (2004) explicam que os mercados financeiros são sistemas dinâmicos, complexos, não-lineares e abertos, descritos por um enorme número de parâmetros, em sua maioria desconhecidos, tais autores ainda explicam que muitos destes parâmetros são externos ao mercado, o que dificulta ainda mais a descrição completa do sistema. Os parâmetros externos são aqueles completamente fora do controle de investidores, esses parâmetros normalmente têm origens aleatórias relacionadas com, por exemplo, distúrbios políticos, ataques terroristas, falências de empresas líderes, guerras, etc. Além dos externos, Grech e Mazur (2004) defendem que há também os parâmetros internos, dependentes dos investidores, que impulsionam o mercado, mesmo na ausência de outros fenômenos externos inesperados. O pleno conhecimento de tais parâmetros internos é, por si só, um grande desafio para os economistas.

Grech e Mazur (2004) afirmam ainda que a evolução de um sistema financeiro ao longo do tempo é complexa e não pode ser prevista com detalhes. No entanto, mesmo que não se possa prever com exatidão o cenário e a evolução detalhada do mercado, é possível extrair algumas informações macroscópicas úteis do sistema. Esses autores fazem, inclusive, uma analogia com a mecânica estatística, onde não é necessário saber com precisão a velocidade e localização de uma partícula para determinar o estado do sistema, por meio de parâmetros macroscópicos. Tais parâmetros são basicamente suficientes para aplicações práticas, como por exemplo, determinar a temperatura ou pressão do sistema em determinado momento.

A aplicação de conceitos de física a sistemas econômicos e financeiros forma uma área de pesquisa denominada Econofísica. Conceitos como lei de escala, universalidade, sistemas auto-organizados, etc., têm sido úteis na análise e

modelagem de sistemas econômicos e financeiros. Outra importante contribuição dessa área de pesquisa é a ênfase à análise empírica de dados (MANTEGNA; STANLEY, 2000).

A análise estatística de dados financeiros não é um tema de estudos recente. A tese de doutorado de Bachelier (1964) já abordava o assunto. O modelo de Bachelier assume que os incrementos no preço de uma ação são variáveis aleatórias independentes e com distribuição normal, com média zero e variância proporcional ao intervalo de tempo, o que implica que a probabilidade de ocorrerem grandes flutuações é mínima.

Mandelbrot (1972), no entanto, após um grande acúmulo de dados, posteriores ao trabalho de Bachelier, propôs uma nova abordagem, em que dados financeiros não podem ser modelados utilizando-se distribuição gaussiana. Mandelbrot sugeriu a modelagem dos log-retornos, LogX(t+T) - logX(t), como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Lévy. Em estudos mais recentes, Mantegna e Stanley (1995), confirmaram que a distribuição de probabilidades dos retornos do índice S&P500 não deve ser ajustada por meio de uma distribuição normal (Gaussiana), mas sim por um processo de Lévy truncado. Eles observaram ainda que as caudas da distribuição de probabilidade da série de retornos seguem uma lei de potência (universalidade). Seus resultados, assim como os apresentados por Mandelbrot (1972), são uma clara oposição ao modelo de Bachelier (1964), defendendo que um processo aleatório simples não pode descrever por completo a dinâmica de sistemas financeiros. No final dos anos 1990, Gopikrishnan et al. (1998) e Plerou et al. (1999) encontraram que grandes flutuações são mais comuns do que se pensava, o que reforçou ainda mais o fato de que o modelo proposto por Bachelier não é capaz de explicar a variação dos preços das ações (FONSECA, 2012).

Norouzadeh e Jafari (2004) afirmam que os mercados financeiros possuem uma grande variedade de regras de negociação e mercadorias comercializadas, de forma que eles são caracterizados por algumas características genéricas de suas séries financeiras. Cont (2001) aponta que o conjunto de propriedades que são comuns a muitos instrumentos, mercados e períodos de tempo tem sido observado por muitos estudos em quase todos os mercados e foram classificados como fatos estilizados (regularidades estatísticas). Alguns exemplos de fatos estilizados presentes em

muitas séries seriam: caudas pesadas, ganho/perda de simetria, normalidade agregada, intermitência, caudas pesadas condicionais, efeito alavancagem, etc.

Segundo Fonseca (2012) um fato estilizado de grande importância para o estudo de séries temporais financeiras é a correlação de longo alcance. Essa caraterística é revelada por meio de estudos de leis de potência presente nos dados. Mantegna e Stanley (2000) afirmam que apesar das leis de potência serem contra intuitivas, uma vez que não apresentam escala característica, elas têm grande aplicação na descrição de sistemas abertos como os econômicos e financeiros.

2.4 Memória de longo alcance em séries temporais financeiras– Do expoente de Hurst ao DFA e DCCA.

O estudo de correlações de longo alcance em séries temporais foi evoluindo ao longo do tempo. Na década de 1950 foi proposta uma forma capaz de detectar tais correlações: a Análise R/S clássica de Hurst, técnica proposta por Henry Hurst, em 1951, com intuito de testar a presença de correlações de longo alcance em séries temporais empíricas. Segundo Fonseca (2012) a técnica, em resumo, compara a hipótese nula de que a série é aleatória com o comportamento escalar dos desvios cumulativos re-escalados pela média (intervalo em que o sistema varia em função do tempo). Isso é feito por meio do expoente H de Hurst estimado.

A estatística R/S (HURST, 1951), originalmente aplicada em hidrologia, tem aplicação em diversas áreas da ciência, como por exemplo, estudo de temperaturas globais, volatilidade de ativos financeiros, entre outras (MORETTIN, 2004). Segundo Li et al. (2016), a análise R/S de Hurst tem sido usada para detectar e definir previsíveis estruturas de mercado, identificar ciclos periódicos regulares, bem como identificar memória de longo alcance; parâmetros esses que revelam as tendências dos mercados financeiros e contribuem com sua caracterização.

Norouzadeh e Jafari (2004) fazem uma revisão ampla do método R/S de Hurst e alertam que esse método tende a superestimar o expoente H de Hurst, para séries temporais cujos valores observados são pequenos. Segundo Lahmiri (2015), essa limitação ocorre porque a análise R/S de Hurst assume que a série de dados é estacionária e, além disso, o método se utiliza de valores de máximo e mínimo, o que

faz com que ele seja bastante sensível a valores atípicos (*outliers*). Cajueiro e Tabak (2005), afirmam que apesar da robustez matemática, o modelo de Hurst necessita de filtragem antes da aplicação para retificação de possíveis tendências.

Lahmiri (2015) explica que tais limitantes à análise R/S clássica de Hurst foram superados pelo DFA, pois contrariamente à estatística R/S de Hurst, ele é adequado para tratar séries de dados não estacionários e é menos sensível a *outliers*. Por conta do exposto, o DFA tem sido bastante utilizado para calcular o expoente de Hurst.

Usando expoente de Hurst, vários trabalhos na literatura têm investigado a eficiência do mercado de ações no contexto de queda de mercado. Grech e Mazur (2004) utilizaram o DFA para estimar o expoente de Hurst do índice de ações DJIA (*Dow Jones Industrial Average*). Os autores investigaram se esta medida é capaz de gerar com antecedência indícios para a ocorrência de um *crash* de mercado. Para isso, eles analisaram o comportamento do expoente de Hurst local, antes de grandes mudanças na série temporal do índice. Os autores analisaram os *crashes* de 1929 e 1987, além de alguns períodos de crises menos graves. Eles concluíram que uma análise cuidadosa do expoente local de Hurst pode ajudar significativamente a determinar a maneira com que o mercado se comportará em cada instante, uma vez que tendências muito claras puderam ser distinguidas, o que confirmou que expoente de Hurst local pode ser utilizado como uma medida real do estado de excitação do mercado. Conclusões semelhantes foram alcançados por Kristoufek (2010) e Domino (2011) nas Bolsas de Valores de Varsóvia e Praga. Cajueiro et al. (2009) descobriram que o colapso do mercado de ações grego em períodos turbulentos foi acompanhado por um aumento do expoente de Hurst para valores que já estavam acima de 0,5. Kumar e Deo (2013) confirmaram essas descobertas por meio da investigação de 20 índices financeiros globais durante a crise financeira de 2008. Horta et al. (2014) analisaram a dinâmica do expoente de Hurst do mercado de capitais na Bélgica, França, etc. no contexto do *subprime* e da crise da dívida europeia. Eles também identificaram um aumento significativo no expoente de Hurst durante a crise de 2008, enquanto um aumento nas correlações no período da crise de 2010 foi menos intenso. (PENGCHENG et al., 2016).

Muitos métodos diferentes foram utilizados para quantificar autocorrelação e correlação cruzada em séries temporais de ações. Peters (1991 e 1994) utilizou a análise gama *rescaled* R/S para encontrar evidências de autocorrelação de longo alcance em vários mercados financeiros. No entanto, como já elucidado, o método de

R/S não é adequado para análise de autocorrelação de longo alcance para séries não-estacionárias, devido à sua dependência de valores extremos nas amostras utilizadas e a sua sensibilidade para valores anormais na série. Peng et al. (1994) utilizou o DFA para superar estas desvantagens. O DFA tem sido amplamente utilizado para detectar autocorrelação de longo alcance em diversas áreas, especialmente nos mercados financeiros, como se pode observar em Alvarez et al. (2008) e Wang et al. (2010). Já a correlação cruzada entre índices de ações tem sido investigada por meio de vários métodos tais como: agrupamento estudado por Mantegna (1999) e Tumminello et al. (2007) e teoria da matriz aleatória utilizado por Plerou et al. (1999) e Plerou et al. (2002). No entanto, estas técnicas tradicionais têm limitações e não podem fornecer informações sobre possíveis mudanças nos índices de escala (GUAN et al., 2007). O método de análise de correlação cruzada DCCA foi proposto por Podobnik e Stanley (2008) para a análise da lei de potência entre séries temporais não-estacionárias. Os métodos DFA e DCCA foram utilizados para investigar autocorrelação e correlação cruzada em muitos estudos anteriores (LIN et al., 2012). Podobnik et al. (2011) sugeriram um novo teste para quantificar a significância estatística de correlação cruzada. Horvatic et al. (2011) demonstraram que a lei de potência de correlação cruzada entre diferentes séries temporais gravadas simultaneamente pode ser quantificada com precisão na presença de tendências sobrepostas senoidais e polinomiais altamente não-estacionárias usando DCCA com polinômios de ordem variada. Podobnik et al. (2009) estudaram o efeito das tendências periódicas em sistemas com lei de potência em correlação cruzada e descobriram que propriedades periódicas podem afetar gravemente a análise quantitativa de correlações de longo alcance, levando a passagens e outros desvios da leis de potência. (YIN ; SHANG, 2013).

Os mercados de ações são considerados sistemas dinâmicos, complexos, com muitos fatores de ambientes externos e internos. Várias técnicas, métodos e modelos teóricos têm sido desenvolvidos para caracterizar os diferentes aspectos da dinâmica financeira, a fim de clarificar os seus potenciais mecanismos. Nos últimos anos, o DFA e o DCCA tornaram-se os métodos mais amplamente adotados para medir a correlação de longo alcance e a correlação cruzada entre os mercados de ações. Esses métodos revelam propriedades importantes de volatilidades dos mercados de ações. (XU et al., 2016).

2.5 *Detrended Fluctuation Analysis* – DFA

A abordagem de sistemas complexos envolve mapear interconexões e as relações entre os agentes que formam o sistema. O resultado da dinâmica desses sistemas pode ser traduzido em uma quantidade muito grande de informações a serem processadas. Em especial os sistemas econômicos são traduzidos em inúmeras séries temporais, como índice de mercado, preços de ativos, volume de negociações, etc. (FONSECA, 2012). Conforme argumenta Bouchad e Potters (2000), a possibilidade de acessar e processar facilmente grandes quantidades de informações de mercados em todo o mundo abriu caminho para novas metodologias, onde a comparação sistemática entre a teoria e os dados reais não só se torna possível, mas obrigatória. Essa perspectiva tem estimulado a aplicação de ferramentas, advindas da física estatística, em problemas econômicos, com a esperança de se desenvolver novas metodologias para lidar com sistemas complexos (FONSECA, 2012).

Como já mencionado, o método DFA foi desenvolvido porque a análise de flutuação convencional, tal como a análise R/S de Hurst, não pode ser usada com confiabilidade para estudar dados não estacionários. Como vantagem do método DFA, tem-se que ele permite a detecção de correlações de longo alcance em sinais ruidosos com as tendências polinomiais embutidas, que podem mascarar as verdadeiras correlações nas flutuações de um sinal (SHAYEGANFAR, 2012).

O método DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*) foi proposto por Peng et al. em 1994 com o objetivo de detectar correlações de longo alcance em sequência de DNA. Consiste em um método de análise de escala utilizado para estimar expoentes que caracterizam as correlações de longo alcance, além de possuir a vantagem - em relação a métodos como análise de autocorrelação, razões de variância e decomposições espectrais - de permitir a identificação de autossemelhança em séries temporais não estacionárias (ALVES SILVA, 2009).

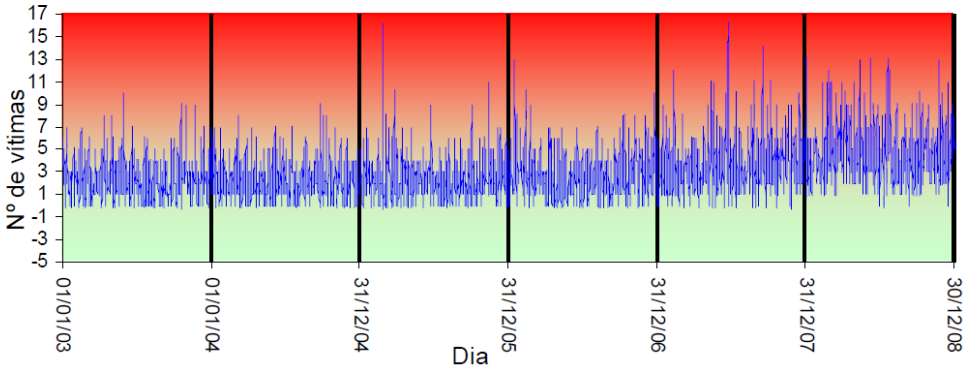
O DFA tem sido utilizado com sucesso em diversas áreas do conhecimento. No rol de trabalhos nacionais, pode-se citar aplicação do método, por exemplo: no estudo de sistemas biológicos (NASCIMENTO, 2008; TAKAKURA, 2007), no mercado financeiro (CREPALDI, 2007; CREPALDI; FERREIRA, 2007; SIQUEIRA JÚNIOR et al., 2008b), em climatologia (DA SILVA et al., 2008), em computação científica

(PORTUGAL, 2006), no estudo de imagens (FREITAS et al., 2009), etc. Já no conjunto de trabalhos internacionais é possível citar os seguintes: em séries biológicas (MARÍA et al., 2004; PENG et al., 1998; CONTRERAS NUÑO, 2007), em climatologia (TALKNER ; WEBER, 2000), análise de raios-X estelares oriundos de sistemas binários (MORET et al., 2003), economia e mercados de capitais (LIU et al., 1999; MANTEGNA ; STANLEY, 1995; MANTEGNA ; STANLEY, 2000), em fenômenos físicos (ZEBENDE et al., 2004), em computação cientifica (ZEBENDE et al., 1998), estratégia de negociação baseada em finanças (DEWANDARU et al., 2015), além de diversos outros campos de aplicação.

Segundo Peng et al. (1994), para proceder à aplicação do DFA é preciso seguir ao menos três passos principais que serão descritos a seguir.

Seja uma série temporal u_i com i variando de 1 a N (número total de pontos da série) (Figura 13).

Figura 13 - Série de homicídios em Salvador.



Fonte: Silva Filho (2009).

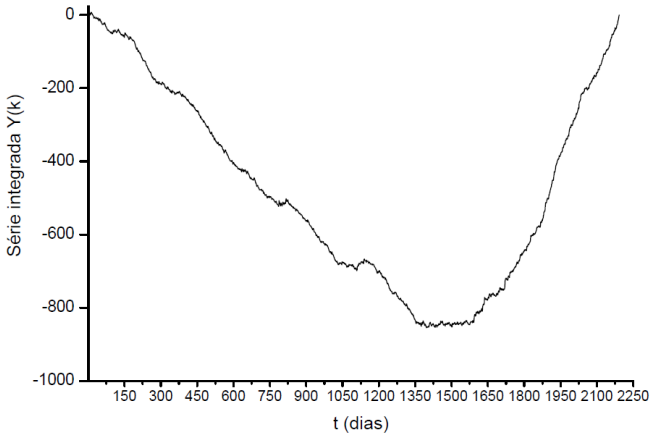
Passo 1: Inicialmente define-se a série integrada $Y(i)$**,** a partir da série temporal original conforme Equação 25:

$$\boldsymbol{Y(i) = \sum_{i=1}^{N} u_i - \langle u \rangle} \qquad (25)$$

Onde $\langle u \rangle$ é valor médio de u_i .

Originando, assim, a série integrada conforme ilustrada pela Figura 14.

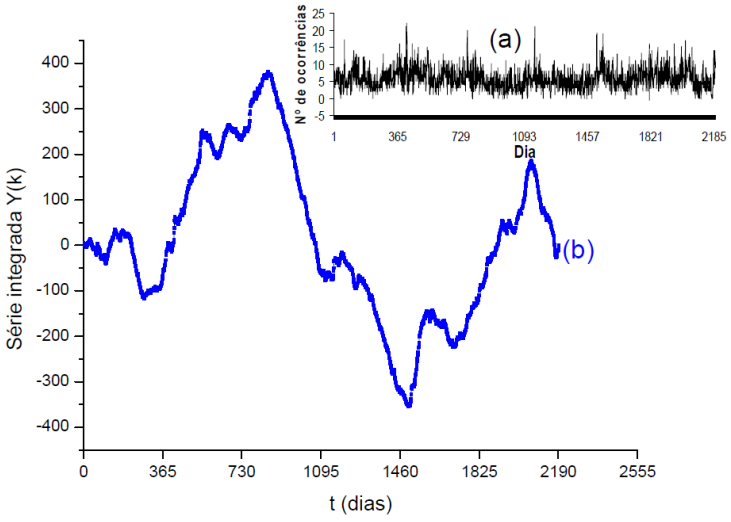
Figura 14 - Série integrada y(i) dos homicídios dolosos diários em Salvador – BA.



Fonte: Silva Filho (2009).

Assim, da série temporal original obtém-se a série temporal integrada, cujos gráficos são mostrados na Figura 15.

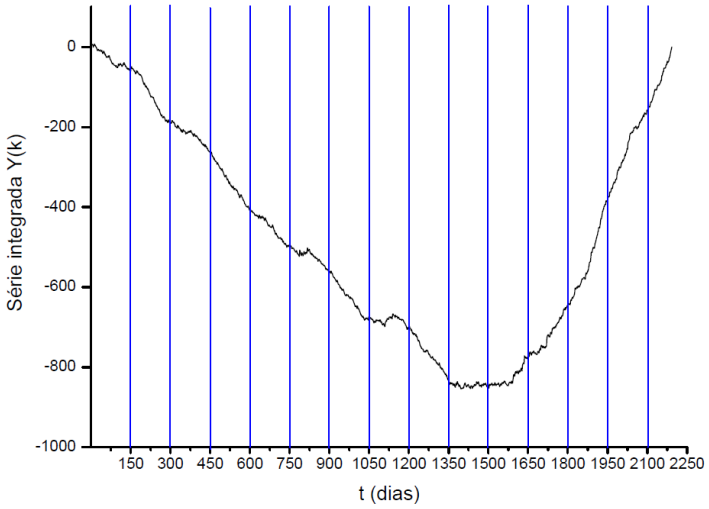
Figura 15 - (a) Série original de roubo em Salvador – BA (b) Série integrada



Fonte: Silva Filho (2009).

Esse procedimento permite eliminar o grande número de oscilações e assim obter uma série estacionária, portanto, apropriada para aplicar o método. Em seguida, a série integrada Y é dividida em intervalos de igual amplitude não sobrepostos, como apresentado na Figura 16.

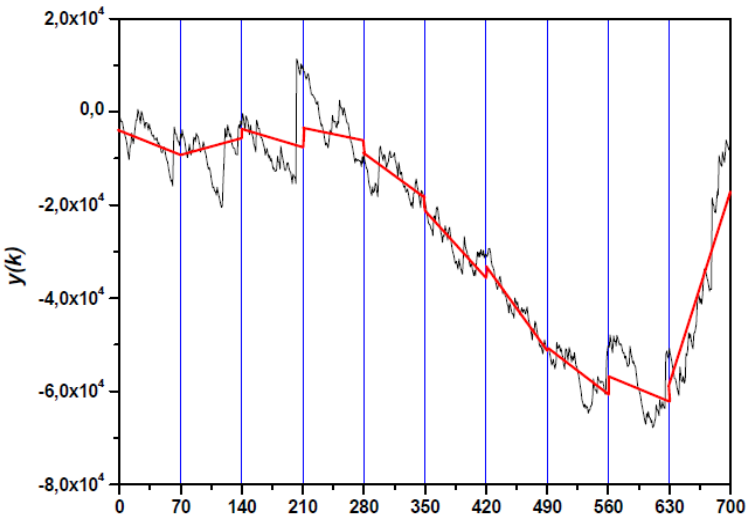
Figura 16 - Série integrada Y dos homicídios dolosos registrados diariamente em Salvador – BA, 2003 - 2008) dividida em (box) de tamanho 150



Fonte: Silva Filho (2009).

Passo 2: A série integrada será dividida em intervalos de igual amplitude n denominados “janela” ou “box”. Para cada intervalo é feito um ajuste linear que representa a tendência local $Y_n(i)$, em que $Y_n(i) = a_n + b_n \mathrm{u}(i)$, ou seja, os coeficientes são calculados para cada um dos intervalos, conforme Figura 17.

Figura 17 - Exemplo de divisão da série temporal integrada a sua relação com a tendência de cada “janela” com tamanho 70.



Fonte: Alves Silva (2009).

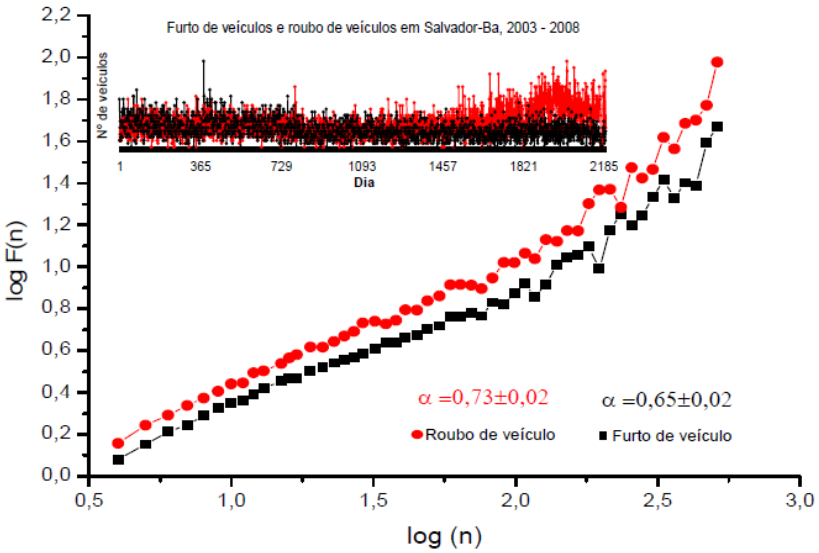
Por fim, subtrai-se a tendência local da série integrada, calculando a raiz quadrática média, isto é, a função de flutuação F_n em que:

$$\boldsymbol{F(n) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[y(k) - y_n(k)]^2}} \quad (26)$$

É importante destacar que o cálculo descrito anteriormente deve ser repetido sistematicamente para diferentes amplitudes de janelas. E, além disso, o ajuste $y_n(i)$ pode ser modelado para diferentes polinômios de grau m (PERAZZO et al., 2004).

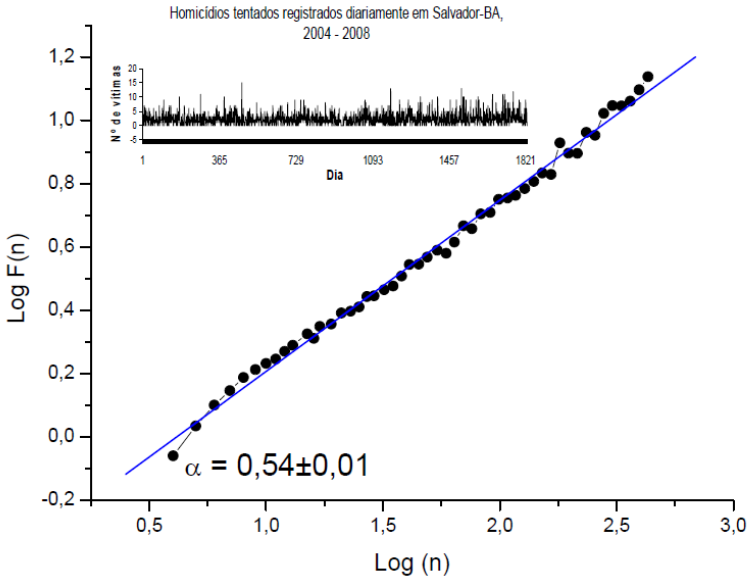
Passo 3: Por fim, verifica-se se a função F(n) comporta-se como uma lei de potência, do tipo F (n) ~ n^{α}, em que α é o expoente de correlação de longo alcance. Esta relação pode ser linearizada em um gráfico log F(n) × log(n) e é representada por uma reta cuja inclinação α representa o expoente procurado (Figura 18 e Figura 19)

Figura 18 - Comportamento do expoente α do furto de veículo e do roubo de veículo registrados diariamente em Salvador – BA



Fonte: Silva Filho (2009).

Figura 19 - Comportamento do expoente α dos homicídios tentados registrados diariamente em Salvador – BA



Fonte: Silva Filho (2009).

A F(n) está relacionada à função de autocorrelação C(n) pela seguinte relação (PENG et al., 1995; TAQQU et al., 1995):

$$\boldsymbol{F^2(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C(j-i)} \qquad (27)$$

Para séries estacionárias, o espectro de potências S(f) é a transformada de Fourier da função de autocorrelação C(n). Se existir correlação de longo alcance na série (comportamento tipo lei de potência), então $S(f) \sim (1/f)^{\beta}$ e $C(n) \sim (1/n)^{\gamma}$.

Finalmente, neste caso, α, β e γ estão relacionados da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1+\beta}{2} = \frac{2-\gamma}{2}} \qquad (28)$$

Isto para o caso em que $0 < \alpha < 1$. Mais detalhes podem ser vistos em Peng et al. (1994), Taquu et al. (1995), Makse et al. (1996) e Eke et al. (2002).

Grech e Mazur (2004) explicam que o expoente de Hurst (α), extraído da série temporal por meio do método do DFA, mede o nível de persistência da série, ou seja, permite avaliar em que medida a tendência observada em dados passados da série temporal implica em manutenção do comportamento no futuro, indicando um efeito de

memória de longa duração na série. Para séries não correlacionadas, espera-se α = 0,50, caso típico do *random walk* 1-D. Em contrapartida, o valor $\alpha \neq {}^{1}/_{2}$ implica na existência de correlações de longo alcance. Em particular, a série é dita antipersistente, se $\alpha < {}^{1}/_{2}$ e persistente se $\alpha > {}^{1}/_{2}$ no sinal da série.

2.6 *Detrended Cross-Correlation Analysis* - DCCA

O interesse de estudo de séries temporais pode residir muito além da autocorrelação. Duas séries temporais poderiam, por exemplo, ser caracterizadas por sua correlação cruzada. Em analogia ao DFA, que é utilizado para uma única série temporal, o *detrended cross-correlation analysis* (DCCA) foi proposto para estimar parâmetros que representam as propriedades de correlação cruzada entre duas séries não-estacionárias com o mesmo número de pontos N (SHAYEGANFAR, 2012). E, além disso, é possível identificar, por meio do DCCA, componentes sazonais (ZEBENDE ; MACHADO FILHO, 2009).

Embora relativamente recente, o método DCCA tem sido aplicado em diversas áreas das ciências para detectar correlação cruzada, tais como: bolsa de valores (WANG et al., 2013; REBOREDO et al., 2014), transporte rodoviário (KRISTOUFEK, 2014), medicina (PODOBNIK et al., 2011), comportamentos humanos (JIANG ; ZHOU, 2011), séries financeiras (PODOBNIK ; STANLEY, 2008; ZHOU, 2008; SIQUEIRA JÚNIOR et al., 2008a; ARAÚJO et al., 2008), em sinais biológicos (URSULEAN; LAZAR, 2009), em teste de aleatoriedade de constantes matemáticas (ZEBENDE et al., 2013). Para séries financeiras, o método já vem sendo aplicado com diversos objetivos, como por exemplo: verificar a correlação cruzada entre preço e volume de negociação de ações (PODOBNIK et al., 2009), entre ações e *commodities* agrárias brasileiras (SIQUEIRA JÚNIOR et al., 2010), entre o valor do petróleo bruto e o dólar americano (WANG; XIE, 2012), entre energia e emissões de gases (WANG et al., 2014), entre outros.

De posse de duas séries $\{Y_i\}$ (Figura 20) e $\{Y_i'\}$ (Figura 21) com o mesmo N (mesmo número de pontos), em regime não estacionário, é necessário seguir os seguintes passos para modelar estatisticamente o DCCA.

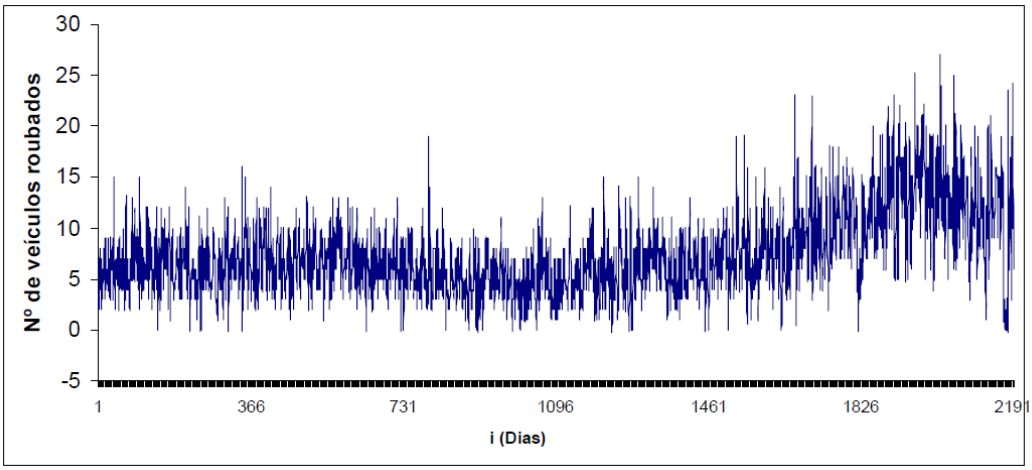
Passo 1: Integram-se as duas séries $\{Y_i\}$ e $\{Y_i'\}$ por meio das seguintes expressões:

$$\boldsymbol{R_k = \sum_{i=1}^{k} y_i} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{R'_k = \sum_{j=1}^{k} y'_j} \quad (30)$$

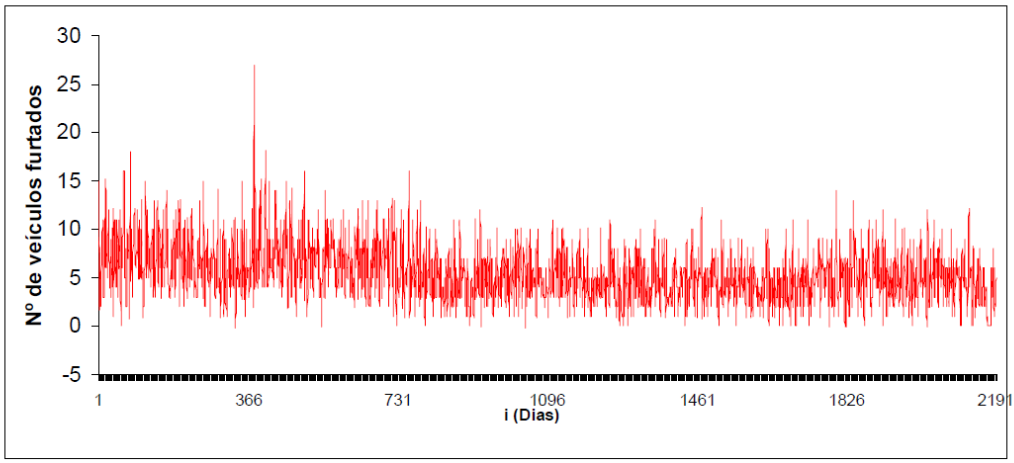
onde K =1,...,N.

Figura 20 - Roubo diário de veículo em Salvador – BA. Série $\boldsymbol{Y_i}$



Fonte: Silva Filho (2009).

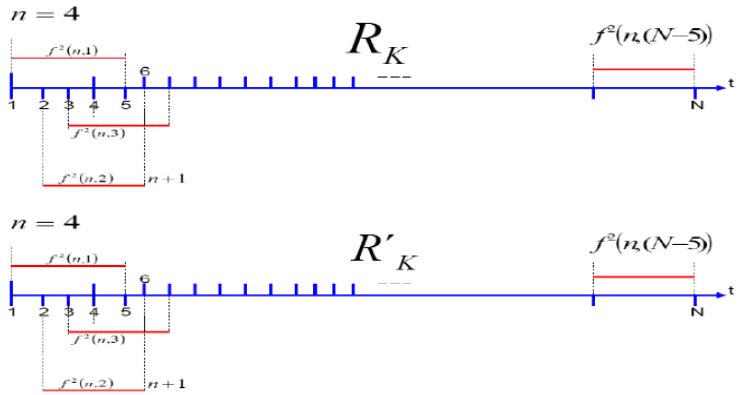
Figura 21 - Furto diário de veículo em Salvador – BA. Série $\boldsymbol{Y'_i}$



Fonte: Silva Filho (2009).

Passo 2: Divide-se os sinais integrados R_k e R'_k em N − n boxes de tamanho n, cada um contendo n + 1 valores (Figura 22). Para ambas as séries temporais, em cada box (que inicia em i e termina em i + n) definem-se as “tendências locais”, isto é, $\widetilde{R_{kl}}$ e $\widetilde{R'_{kl}}$ (ajuste linear de R_k *e* R'_k, respectivamente), com (i ≤ K ≤ i + n) como sendo a ordenada do ajuste linear (processo dos mínimos quadrados) da série somada (SILVA FILHO, 2009).

Figura 22 - Divisão dos sinais integrados $\boldsymbol{R_k}$ e $\boldsymbol{R'_k}$ em N − n boxes (com superposição) de tamanho n = 4 , cada um contendo n +1 valores



Fonte: Silva Filho (2009).

Passo 3: Assim, efetua-se o cálculo da covariância dos resíduos em cada intervalo da seguinte forma:

$$\boldsymbol{f^2DCCA(n,i) = \frac{1}{n+1}\sum_i^{i+n}(R_k - \widetilde{R}_{k,i})(R'_k - \widetilde{R}'_{k,i})} \quad (31)$$

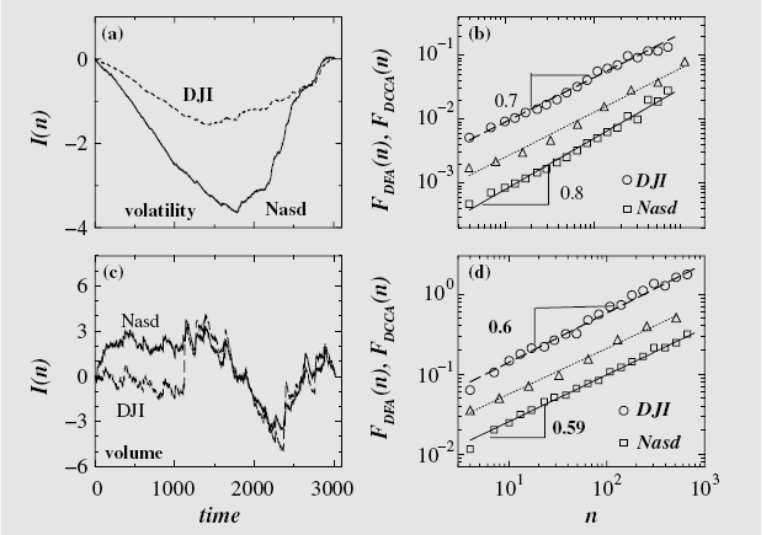
Passo 4: Determina-se a função de correlação (*detrended covariance*) conforme expressão 32:

$$\boldsymbol{F^2_{DCCA}(n) \equiv \frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{N-n} f^2DCCA(n,i)} \quad (32)$$

De posse de duas séries temporais idênticas é possível obter o mesmo resultado do método DFA (PENG et al., 1994) aplicado para uma única série temporal. Ou seja, se o procedimento anteriormente descrito for repetido para diferentes tamanhos de

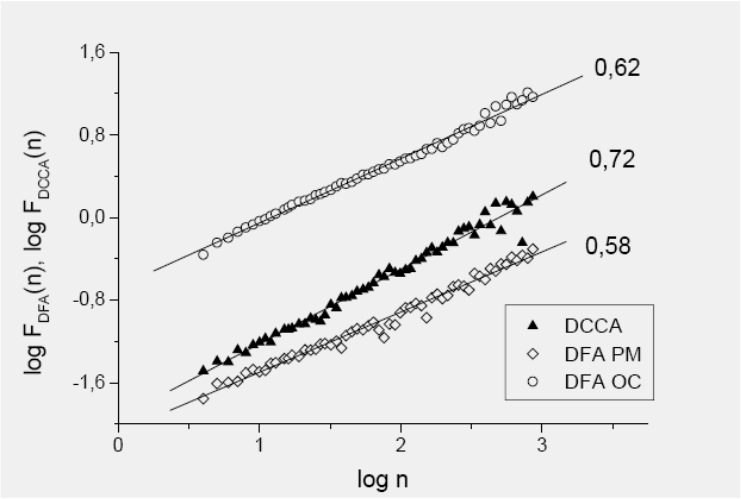
box n sistematicamente, é possível verificar se existe lei de potência, isto é, se $F_{DCCA} \propto n^{\lambda}$ (Figura 23 e Figura 24) (SILVA FILHO, 2009).

Figura 23 - Autocorrelação individual e cruzada em valores absolutos de diferença de preços e volumes negociados (Dow Jones e Nasdaq) diariamente, 1993 – 2003.



Fonte: Podobnik e Stanley (2008).

Figura 24 - Autocorrelação individual e cruzada das diferenças entre valores diários de abertura e de fechamento e pontos médios do IBOVESPA, 1993 – 2008.



Fonte: Araújo et al. (2008).

Uma das vantagens do DCCA em relação a outros métodos de detecção de correlação cruzada como, por exemplo, o coeficiente de correlação de Pearson, é a possibilidade de identificação e mensuração de correlação entre dois sinais em diferentes escalas de tempo n (SILVA FILHO, 2009).

2.7 Outras aplicações para memória de longo alcance em séries financeiras

Os métodos que possibilitam a identificação do expoente de Hurst são ferramentas importantes para investigar tanto a eficiência de mercado, quanto a memória de longo alcance (LI et al., 2014). Amplamente abordados por pesquisadores, já se encontram muitos resultados empíricos sobre esses métodos. Em geral, a previsão, por meio desses métodos, é mais eficaz nos mercados emergentes que nos países desenvolvidos. Couillard e Davison(2005) e Alvarez et al. (2008) usaram o expoente de Hurst para testar os retornos logarítmicos da S&P500 nos EUA, onde concluíram que a hipótese nula do uso de movimento Browniano para modelar o retorno não pode ser rejeitada. O expoente de Hurst apresenta uma dinâmica irregular com alguns episódios alternados entre o comportamento de baixa e alta persistência. O grande avanço sobre a tendência de longo prazo do comportamento de escala ocorreu em 1972, quando o expoente de Hurst passou de um resultado positivo para uma tendência negativa a longo prazo (LI et al., 2016).

Segundo Cajueiro e Tabak (2004) e Di Matteo et al. (2005) em comparação com as pesquisas realizadas em mercados desenvolvidos, os estudos empíricos sobre mercados emergentes, examinados através da análise de escala, indicam resultados diferentes. A tendência de longo prazo em mercados emergentes continua positiva e persistente a maior parte do tempo. Na pesquisa de Eom et al. (2008), 60 índices de mercados de vários países são examinados. Os resultados empíricos indicam uma relação entre o grau de eficiência e a previsibilidade do mercado, ou seja, quanto mais eficiente for um determinado mercado menos previsível ele será. O expoente de Hurst é útil para distinguir mercados de capitais emergentes dos mercados de capitais maduros, uma vez que os mercados desenvolvidos tendem a ter um valor de expoente de Hurst menor em relação aos emergentes (HULL; MCGROARTY, 2014). Além disso, o expoente local de Hurst tem sido adotado para descrever os fenômenos críticos nos mercados de ações, ou seja, tem sido usado como um indicador do início de grandes eventos que afetam os mercados mundiais (LI et al., 2016).

3 Método de pesquisa

Pesquisa empírica é a pesquisa dedicada ao tratamento empírico e factual; produz e analisa dados, procedendo sempre pela via do controle empírico e factual (DEMO, 2000). A valorização desse tipo de pesquisa se dá pela possibilidade de oferecer maior concretude às argumentações, por mais tênue que possa ser a base factual. O significado dos dados empíricos depende do referencial teórico, mas estes dados agregam impacto pertinente, sobretudo no sentido de facilitarem a aproximação com a prática (DEMO, 1994).

O atual trabalho é uma pesquisa empírica obtida de dados das correlações de ações negociadas na BOVESPA. As correlações foram calculadas por meio de ferramentas específicas, o *Dentrended Fluctuation Analysis* (DFA) e o *Dentrended Cross-Correlation Analysis* (DCCA).

As ferramentas foram aplicadas aos valores de fechamento das ações em períodos anteriores, durante e posteriores à crise de 2008. Foram analisadas as ações de um grupo de empresas que representam diversos setores da economia brasileira e tiveram ações negociadas durante toda a janela de tempo em estudo. A análise procura verificar possíveis mudanças no espectro de correlação das ações.

A *Detrended Cross-Correlation Analysis* é uma extensão do conceito de *Detrended Fluctuation Analysis* para aplicações em mais de uma série temporal (PODOBNIC ; STANLEY, 2008; PODOBNIK et al., 2009). Em termos resumidos, calcula-se a covariância dos resíduos (diferença entre os valores da série integrada e a reta de mínimos quadrados) em cada respectiva subdivisão das séries temporais originais. E, finalmente, estima-se a lei de potência entre os valores médios dos resíduos para diferentes estruturas de subdivisões (PODOBNIC ; STANLEY, 2008).

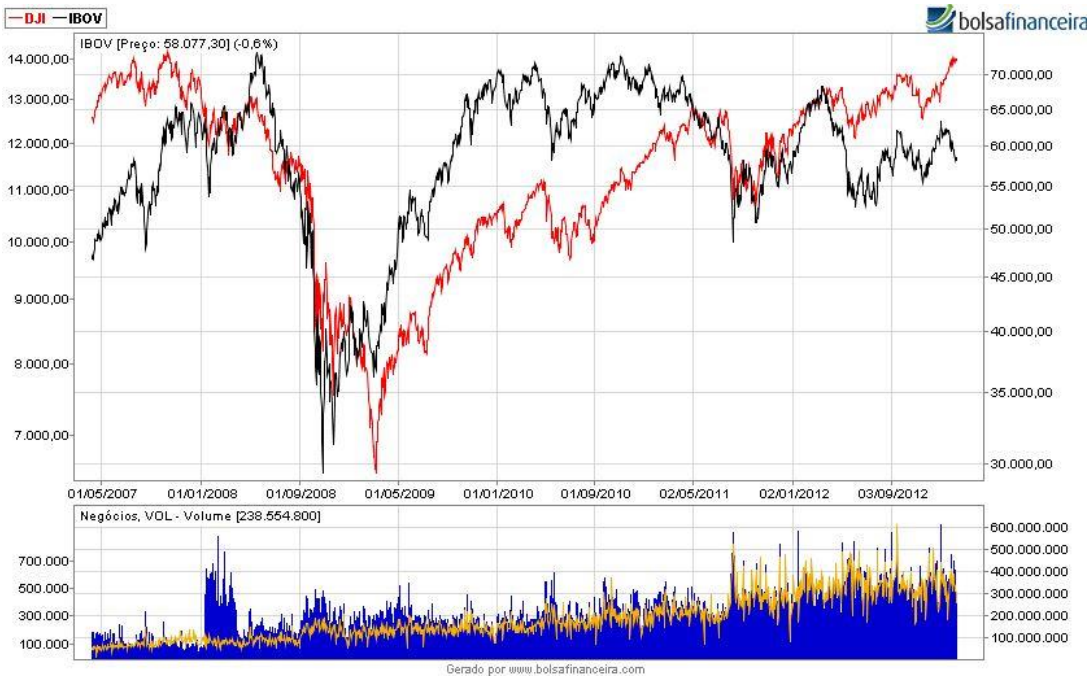
Os métodos DFA e DCCA foram implementados utilizando o software de computação algébrica MatLab. Esse software permite a construção de algoritmos estruturados para se obter a lei de potência entre os valores médios dos resíduos para diferentes estruturas de subdivisões, bem como gráficos e tabelas para análises.

3.1 Crise 2008

Sabe-se que a crise financeira de 2008 foi a segunda maior crise do capitalismo, sendo precedida, em importância, apenas pela Grande Depressão de 1929. Tudo começou nos Estados Unidos (EUA), com o colapso da bolha especulativa no mercado imobiliário, causada principalmente pela abundância de crédito financeiro e imobiliário. Como resultado da crise de 2008, a produção industrial e o PIB diminuíram rapidamente no último trimestre de 2008 em vários países. O auge da crise foi a falência do banco de investimento Lehman Brothers em 15 de Setembro de 2008, após a recusa do *Federal Reserve* (Banco Central dos EUA) em resgatar esta instituição. Após esse evento, os mercados financeiros entraram em uma situação de pânico, uma vez que se esperava que o *Federal Reserve* ajudaria todas as instituições que estavam falindo. Isso levou a um aumento significativo na preferência por liquidez, especialmente no caso dos bancos comerciais. O aumento da procura por liquidez provocou um processo de venda de ativos financeiros em grande escala, com uma queda súbita e violenta nos preços de ativos financeiros, e uma contração do crédito bancário para as transações comerciais e industriais. Essa evaporação de crédito resultou em uma queda rápida e profunda na produção industrial e do comércio internacional em todo o mundo (FERNANDES DA SILVA, 2016).

Assim, considerou-se, para o atual trabalho, como período da crise do *subprime* o intervalo temporal de 15 set. 2008 a 31 dez. 2009. A primeira data corresponde à divulgação da concordata do Banco Lehman Brothers, que era o quarto maior banco dos EUA. O início de 2010 já foi considerado como um período de pós-crise, apesar de ocorrência de tendência de queda no Ibovespa que aconteceu no primeiro semestre. Essa tendência possui uma taxa de decréscimo significativamente inferior ao que se verifica no primeiro semestre de 2008. Além disso, houve uma retomada da cotação das ações no restante do ano de 2010. A Figura 25 mostra a evolução dos índices da Bovespa e Dow Jones no período da crise de 2008 e sua vizinhança.

Figura 25 - Índice Bovespa e Dow Jones no período da crise de 2008 e suas vizinhanças.



Fonte: Bolsa financeira

Poderia ter-se considerado o início da crise em vários outros momentos. O Ibovespa já apresentava tendência de queda desde o início de 2008, mas existe uma quebra de tendência a partir de setembro. Outra data relevante foi o dia 29 de setembro de 2008, pois as operações na bolsa foram interrompidas, dado o significativo decréscimo do Ibovespa naquele dia. Porém, optou-se por um dia intermediário entre o início de setembro e o dia de interrupção de negociações na Bolsa de Valores de São Paulo e que foi claramente um símbolo do início da crise do *subprime* – a concordata do banco Lehman Brothers.

3.2 Fonte de dados

Os dados utilizados no estudo foram provenientes do site oficial da bolsa de valores (BM&FBOVESPA, 2015b), extraídos no formato TXT no dia 5 de fevereiro de 2015, tratados e exportados para Excel (XLS) conforme orientação do próprio site. O período total a que os dados originalmente se referem foi de janeiro de 2002 a janeiro

de 2015. As tabelas fornecem dados como nome das empresas; código do papel; data; preços mínimo, máximo e de fechamento; quantidade e volume negociados etc. conforme ilustra a Figura 26.

Figura 26 - Dados brutos extraídos do site da IBOVESPA e exportados para Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Ano	Mês	Dia	BD	CODNEG	TPI	NOMRES	ESPECI		PRA	MC	PREABE	PREMAX	PREMIN	PREMED	PREULT	PREOFC	PREOFV	TOTNE	QUATOT	VOLTOT
2	2009	1	2	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	505	530	495	509	530	520	530	40	241000	122849600
3	2009	1	5	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	540	560	519	525	549	544	550	82	657800	345513700
4	2009	1	6	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	560	620	550	600	610	610	622	130	1333600	800533400
5	2009	1	7	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	600	610	588	604	605	588	606	128	791900	478453000
6	2009	1	8	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	603	615	591	600	591	591	607	148	1753100	1053321900
7	2009	1	9	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	611	615	595	605	610	600	610	89	653700	395917200
8	2009	1	12	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	600	605	570	584	570	570	582	27	87000	50811400
9	2009	1	13	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN EJ N2			R$	570	570	559	562	561	561	567	38	80600	45320700
10	2009	1	14	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	560	560	545	548	546	546	552	38	87900	48185300
11	2009	1	15	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	550	554	549	550	553	553	575	17	68500	37710400
12	2009	1	16	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	565	565	550	552	550	550	561	9	12500	6907500
13	2009	1	19	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	550	550	545	548	545	546	555	9	26400	14490000
14	2009	1	20	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	545	545	520	539	535	510	535	49	388000	209328100
15	2009	1	21	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	530	530	510	524	525	506	525	35	108200	56763600
16	2009	1	22	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	520	520	475	507	510	500	510	44	163700	83149800
17	2009	1	23	2	ABCB4	10	ABC BRASIL	PN N2			R$	500	500	480	498	500	480	500	38	155500	77461700

Fonte: Adaptado pelo autor

3.3 Procedimentos

Inicialmente buscou-se formar a base de dados das séries temporais de preços de fechamento e volume de transação de ações que foram negociadas na BOVESPA e que no período de 2007 a 2011 pertenceram ao índice IBOVESPA.

O Ibovespa é um indicador do desempenho médio das cotações das ações de empresas com maior número de negociações e representatividade no mercado de ações brasileiro (BM&FBOVESPA, 2016). O índice é construído a partir de uma carteira teórica de ativos, ou seja, há um critério estabelecido pela BM&FBovespa para considerar, ou não, uma determinada ação como pertencente a essa carteira. A vigência dessa carteira teórica é de 4 meses (janeiro a abril, maio a agosto e setembro a dezembro), de forma que uma determinada ação que pertencia à carteira teórica no primeiro quadrimestre de 2007, por exemplo, poderia não fazer mais parte do índice no terceiro quadrimestre de 2009. Do site da BM&FBovespa foi extraído um relatório que mostra, período a período de quatros meses, quais são as empresas que compuseram o índice Ibovespa. Por falta de continuidade, ações que não estiveram na composição do IBOVESPA ao longo de todo o período de análise, 2007 a 2011,

foram excluídas da base de dados utilizada no presente trabalho. O Quadro 2 especifica as empresas que compuseram a base de dados utilizada.

Quadro 2 – Empresas pesquisadas

Ordem	**Código**	**Empresa**	**Setor/Segmento**
1	AMBV4	Companhia de Bebidas das Américas - AmBev	Bebidas Comércio e Distribuição
2	BBAS3	Banco do Brasil	Bancos
3	BBDC4	Bradesco	Bancos
4	BRAP4	Bradespar	Financeiro e Outros/Holdings diversificadas
5	BRKM5	Braskem	Petroquímico
6	CCRO3	Companhia Concessões Rodoviárias – CCR	Exploração de Rodovias
7	CEMIG4	Companhia Energética de Minas Gerais – CEMIG	Energia Elétrica
8	CPFE3	CPFL Energia	Energia Elétrica
9	CPLE6	Companhia Paranaense de Energia – COPEL	Energia Elétrica
10	CRUZ3	Souza Cruz	Fabricante de Cigarros
11	CSAN3	Cosan Industria e Comércio	Açúcar e Álcool

12	CSNA3	Companhia Siderúrgica Nacional	Siderurgia e Metalurgia
13	CYRE3	Cyrela Brazil Realty	Construção Civil
14	ELET3	Eletrobrás	Energia Elétrica
15	ELET6	Eletrobrás	Energia Elétrica
16	EMBR3	Embraer	Material Aeronáutico e de Defesa
17	GGBR4	Gerdau SA	Siderurgia e Metalurgia
18	GOAU4	Metalúrgica Gerdau	Siderurgia e Metalurgia
19	GOLL4	GOL	Transporte Aéreo
20	ITSA4	Itaúsa investimentos	Bancos
21	LAME4	Lojas Americanas	Comércio/Produtos diversos
22	LREN3	Lojas Renner	Tecidos. Vestuário e Calçados
23	NATU3	Natura Cosméticos	Produtos de Uso Pessoal
24	PETR3	Petróleo Brasileiro – Petrobrás	Petróleo. Gás e Biocombustíveis/Exploração e/ou refino
25	PETR4	Petróleo Brasileiro – Petrobrás	Petróleo. Gás e Biocombustíveis/Exploração e/ou refino
26	RSID3	Rossi Residencial	Construção Civil
27	TAMM4	TAM	Transporte Aéreo
28	TNLP4	Tele Norte Leste Participações	Telecomunicações/Telefonia Fixa

29	USIM5	Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais – Usiminas	Siderurgia e Metalurgia
30	VALE3	Companhia Vale do Rio Doce – Vale	Mineração/Minerais Metálicos
31	VALE5	Companhia Vale do Rio Doce – Vale	Mineração/Minerais Metálicos

Fonte: Elaborada pelo autor.

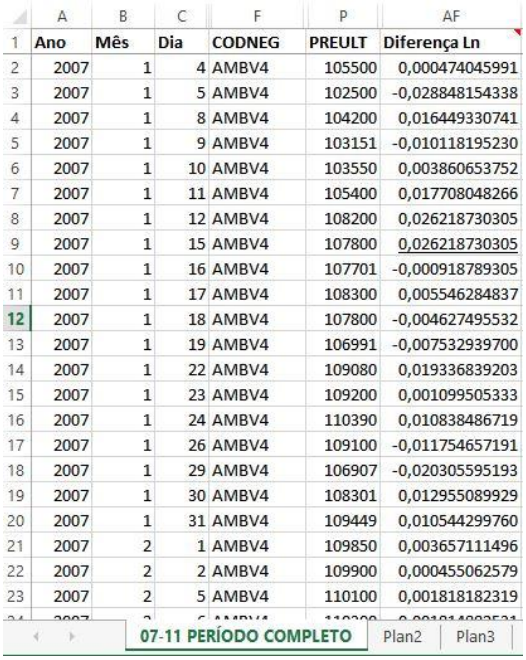
Atualmente (2016), as ações CRUZ3 e TNLP4 não são mais negociadas na BM&FBovespa. A Souza Cruz teve 90% de suas ações adquiridas pela British American Tobacco e a empresa deixou de ter cotações na BM&FBovespa a partir do ano de 2016 (UMPIERES, 2016). A Tele Norte Leste Participações foi incorporada pela Oi S.A. no ano de 2012 (TORRES, 2016). Assim, foi utilizado o setor/segmento de classificação atual da Oi S.A. para a ação TNLP4. O setor/segmento, no Quadro 2, ao qual cada empresa pertence foi obtido no próprio site da BM&FBovespa em 27/06/2016 (BM&FBOVEPSPA, 2016).

Após obtenção das séries temporais de preços de fechamento, com frequência diária, das empresas listadas no Quadro 2, obtidos diretamente no site da BM&FBovespa em 5 de fevereiro de 2015 (BM&FBOVESPA, 2015a), calculou-se a série correspondente de valores de retorno a partir da diferença do logaritmo (natural) dos preços conforme a Equação 33 e ilustrado pela Figura 27.

$$r(t) = \ln\left(\mathrm{p(t)} \middle/ \mathrm{p(t-1)}\right) = \ln(\mathrm{p(t)}) - \ln(\mathrm{p(t-1)}) \tag{33}$$

onde r é o retorno, p o preço e t o tempo (diário).

Figura 27 - Série de valores de retorno calculada por meio da diferença de Ln



	A	B	C	F	P	AF
1	Ano	Mês	Dia	CODNEG	PREULT	Diferença Ln
2	2007	1	4	AMBV4	105500	0,000474045991
3	2007	1	5	AMBV4	102500	-0,028848154338
4	2007	1	8	AMBV4	104200	0,016449330741
5	2007	1	9	AMBV4	103151	-0,010118195230
6	2007	1	10	AMBV4	103550	0,003860653752
7	2007	1	11	AMBV4	105400	0,017708048266
8	2007	1	12	AMBV4	108200	0,026218730305
9	2007	1	15	AMBV4	107800	0,026218730305
10	2007	1	16	AMBV4	107701	-0,000918789305
11	2007	1	17	AMBV4	108300	0,005546284837
12	2007	1	18	AMBV4	107800	-0,004627495532
13	2007	1	19	AMBV4	106991	-0,007532939700
14	2007	1	22	AMBV4	109080	0,019336839203
15	2007	1	23	AMBV4	109200	0,001099505333
16	2007	1	24	AMBV4	110390	0,010838486719
17	2007	1	26	AMBV4	109100	-0,011754657191
18	2007	1	29	AMBV4	106907	-0,020305595193
19	2007	1	30	AMBV4	108301	0,012955089929
20	2007	1	31	AMBV4	109449	0,010544299760
21	2007	2	1	AMBV4	109850	0,003657111496
22	2007	2	2	AMBV4	109900	0,000455062579
23	2007	2	5	AMBV4	110100	0,001818182319

07-11 PERÍODO COMPLETO | Plan2 | Plan3

Fonte: Elaborada pelo autor

É relativamente comum que as empresas realizem mudanças na quantidade de suas ações que existem no mercado realizando um processo conhecido como *split* ou desdobramento. A motivação para realizar esse procedimento é o alto preço unitário que a ação da empresa pode assumir, fazendo com que um investidor precise desembolsar um valor muito alto para adquirir um lote de ações. Assim, o desdobramento permite diminuir o preço unitário da ação para possibilitar maior número de negociações. Os detentores das ações que circulam no mercado antes do processo de *split* devem ter o seu patrimônio preservado, portanto, quando há desdobramento eles recebem uma quantidade a mais de ações na proporção inversa da diminuição dos preços, de tal forma que o patrimônio se mantenha inalterado.

Também existe o processo inverso, chamado *inplit* ou grupamento. Nesse caso, de maneira oposta ao anterior, as ações apresentam valores muito baixos. Com o propósito de aumentar o preço unitário das ações, os acionistas têm o número de suas ações reduzidas por um processo de junção. Assim, supondo um grupamento de 2 para 1, os acionistas terão, após o *inplit,* metade do número de ações com cada uma delas valendo o dobro, de tal maneira que o patrimônio, assim como no processo de *split*, permaneça inalterado.

Esses processos, tanto o desdobramento quanto o grupamento, provocam grandes variações nos preços de fechamento das ações de um dia para o outro, não sendo fruto das forças de demanda e oferta por ações, e sim resultado de um mecanismo administrativo que altera substancialmente o preço, sem alterar o patrimônio da empresa. No caso do desdobramento, tem-se uma redução significativa de preços, já no caso do grupamento, tem-se um aumento. Esses valores apareceram na série de retornos como picos e quedas pontuais de grande magnitude. Assim, buscou-se valores extremos nas séries de retorno e pesquisou-se, individualmente e para todos os casos, se tais valores decorriam de um processo de desdobramento ou um grupamento, que teria ocorrido naquele dia, em caso afirmativo o valor foi expurgado da série de retornos da ação.

O resultado dessa etapa foi uma matriz de tamanho 1228 linhas por 31 colunas, contendo os valores de retorno diário das ações apresentadas no Quadro 2. As linhas representam a sequência dos dias de cotações das ações no período da pesquisa e as colunas representam as diferentes ações pesquisadas. Com o propósito de trabalhar com a série de valores de volatilidade, não importando se a variação foi para mais ou para menos, mas apenas a amplitude da variação do valor de fechamento, tomou-se o valor absoluto dos retornos (variação de preços).

Já com a base de dados pronta - arquivo em Excel (XLS) contendo a matriz de valores da volatilidade do preço de fechamento das 31 empresas ao longo dos 5 anos (2007 a 2011) - iniciou-se o processo de criação dos algoritmos em MatLab R2015a a fim de implementar os métodos DFA e DCCA. Buscou-se, então, realizar o cálculo de DFA para apenas uma empresa, a correspondente a primeira coluna da matriz de retornos (AmBev), com o intuito de testar o código em condições reduzidas e com a técnica mais simples; uma vez que o DFA calcula apenas a autocorrelação, e o DCCA é um pouco mais complexo por calcular correlação cruzada. Tentando garantir o bom funcionamento do programa, verificou-se se o valor obtido era coerente com a literatura em que se utiliza o DFA para análise de séries temporais, assim, buscou-se um trabalho que além de identificar a base de dados com clareza, usasse uma base de fácil acesso. Assim, utilizou-se para comparação o trabalho de Podobnik et al. (2009). O artigo de Podobnik et al (2009). utiliza tanto os valores de preços como de volume de transação do S&P500 no período de jan/1959 a jul/2009. Para evitar problemas com a base de preços, como desdobramentos e grupamentos, utilizou-se a base de dados do volume de transação. O valor obtido foi 0,6892. Em Podobnik et

al. (2009), não está muito claro qual é o DFA do volume, uma vez que não há uma legenda. Consegue-se apenas saber que existem dois valores de DFA em sua figura, um deles é 0,65 e o outro é inicialmente 0,65 e depois há uma quebra de tendência, com novo coeficiente angular de 0,88. Assim, considerou-se que o algoritmo escrito conseguia obter resultados consistentes, ou pelo menos coerentes com a literatura para o método DFA. Uma vez funcionando o algoritmo que calculasse o DFA, desenvolveu-se o algoritmo para cálculo do DCCA.

4 Resultados e Discussão

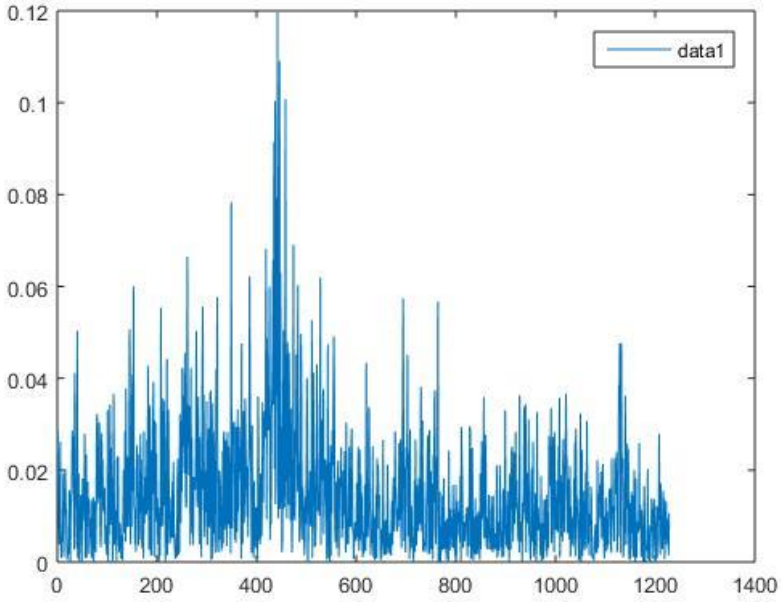
Serão apresentados, na sequência de implementação dos algoritmos, os resultados do cálculo de autocorrelação e correlação cruzada, obtidos por meio dos métodos DFA e DCCA, respectivamente.

4.1 *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA)

O método do DFA foi aplicado por meio dos seguintes passos:

1 – Tomou-se a série temporal original x(i), i = 1, 2,..., N, série de volatilidade de todas as ações, conforme Figura 28 que ilustra o comportamento da série de volatilidade da primeira empresa, Ambev, cuja ação é a AMBV:

Figura 28 - Série de volatilidade do valor de fechamento diário da AMBV em número absoluto



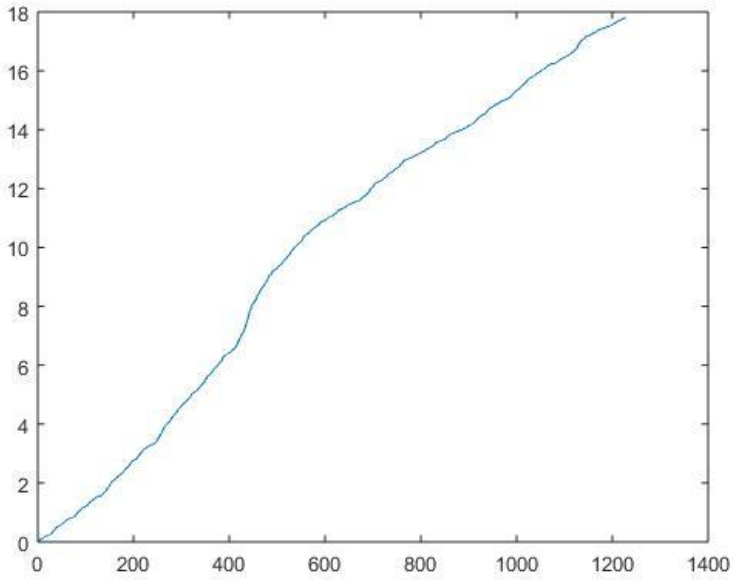
Fonte: Elaborada pelo autor.

2 - Definiu-se, então, a série temporal integrada y(j) conforme Equação 34:

$$y(j) = \sum_{i=1}^{j} x(i) \tag{34}$$

No caso específico dessa pesquisa os valores $x(i)$ são os valores absolutos dos retornos (volatilidade), calculados utilizando a Equação 33 com a cotação de preços (valor de fechamento) em dias subsequentes, a série acumulada, para a AMBV, é representada pela Figura 29.

Figura 29 - Série integrada da volatilidade do valor de fechamento da AMBV.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A tabela de dados da série é parcialmente apresentada na Figura 30, onde se observa o valor de fechamento, a diferença de Ln em módulo e o valor da série integrada.

Figura 30 - Exemplo de valores da série de retorno e da série de retorno integrada

Ano	Mês	Dia	CODNEG	PREULT	Diferença Ln	Integrado
2007	1	4	AMBV4	105500	0,000474045991	0,000474045991
2007	1	5	AMBV4	102500	0,028848154338	0,029322200329
2007	1	8	AMBV4	104200	0,016449330741	0,045771531070
2007	1	9	AMBV4	103151	0,010118195230	0,055889726299
2007	1	10	AMBV4	103550	0,003860653752	0,059750380051
2007	1	11	AMBV4	105400	0,017708048266	0,077458428317
2007	1	12	AMBV4	108200	0,026218730305	0,103677158622
2007	1	15	AMBV4	107800	0,003703707937	0,107380866559
2007	1	16	AMBV4	107701	0,000918789305	0,108299655864
2007	1	17	AMBV4	108300	0,005546284837	0,113845940701
2007	1	18	AMBV4	107800	0,004627495532	0,118473436233
2007	1	19	AMBV4	106991	0,007532939700	0,126006375933
2007	1	22	AMBV4	109080	0,019336839203	0,145343215135
2007	1	23	AMBV4	109200	0,001099505333	0,146442720469
2007	1	24	AMBV4	110390	0,010838486719	0,157281207188
2007	1	26	AMBV4	109100	0,011754657191	0,169035864380
2007	1	29	AMBV4	106907	0,020305595193	0,189341459573
2007	1	30	AMBV4	108301	0,012955089929	0,202296549502
2007	1	31	AMBV4	109449	0,010544299760	0,212840849262
2007	2	1	AMBV4	109850	0,003657111496	0,216497960758
2007	2	2	AMBV4	109900	0,000455062579	0,216953023337

Fonte: Autor

O bloco de programação para o cálculo da série integrada y(j), que foi definida no algoritmo como aint, está mostrado na Figura 31.

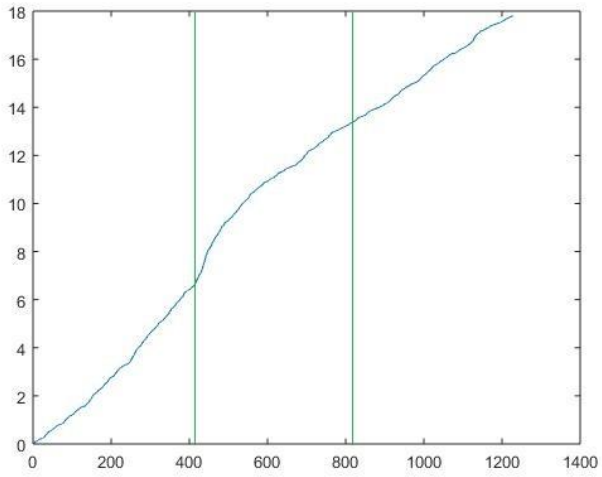
Figura 31 - Cálculo da série integrada

```
for i=1:(linha-1)
    soma=0;
    for j=1:i
        soma=soma+(a(j));
    end
    aint(i)=soma;
end
```

Fonte: Elaborada no software MatLab pelo autor.

3 - Dividiu-se a série temporal integrada de tamanho N em n = N/l, sendo l o número de caixas em que a série é dividida sem intersecção, ou seja, em cada uma das l caixas, contém n dados, conforme Figura 32, que ilustra a divisão da série AMBV em caixas.

Figura 32 - Divisão da série integrada de volatilidade (AMBV) em 3 blocos ou caixas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando que posteriormente será necessário que se estabeleça uma relação entre o número de caixas e o resultado do DFA, definiu-se diferentes quantidades de caixas (l), que consequentemente terão diferentes tamanhos.

No algoritmo, tomou-se a série aint(i) e considerou-se um tamanho mínimo de 5 dados em cada caixa, a partir daí construiu-se uma série h(w) com os diferentes tamanhos de caixa, como pode ser visto na Figura 33.

Figura 33 - Série dos diferentes tamanhos de caixas

```
data_window=5;
w=1;
while fix(length(aint)/(w*data_window))>=1
    h(w)=fix(length(aint)/(w*data_window));
    w=w+1;
end
```

Fonte: Elaborada no software MatLab pelo autor.

O último valor de h(w) será 1, correspondendo a uma única caixa cobrindo todos os dados. Como se utiliza a função fix que resulta em valor inteiro para a divisão, pode haver valores de h(w) em duplicidade. Para trabalhar com h(w) contendo valores únicos realizou-se uma avaliação dos valores e criou-se uma série l(s) com tamanhos de caixa que não se repetissem (Figura 34).

Figura 34 - Série com tamanhos de caixas – sem repetição

```
s=0;
for i=1:(length(h)-1)
    if (h(i+1)~=h(i))
        l(i-s)=h(i);
        l(i+1-s)=h(i+1);
    else
        s=s+1;
    end
end
```

Fonte: Elaborada no software MatLab pelo autor.

Com os tamanhos das caixas definidos, construiu-se as retas de mínimos quadrados em cada conjunto de dados pertencente a cada caixa, conforme algoritmo da Figura 35.

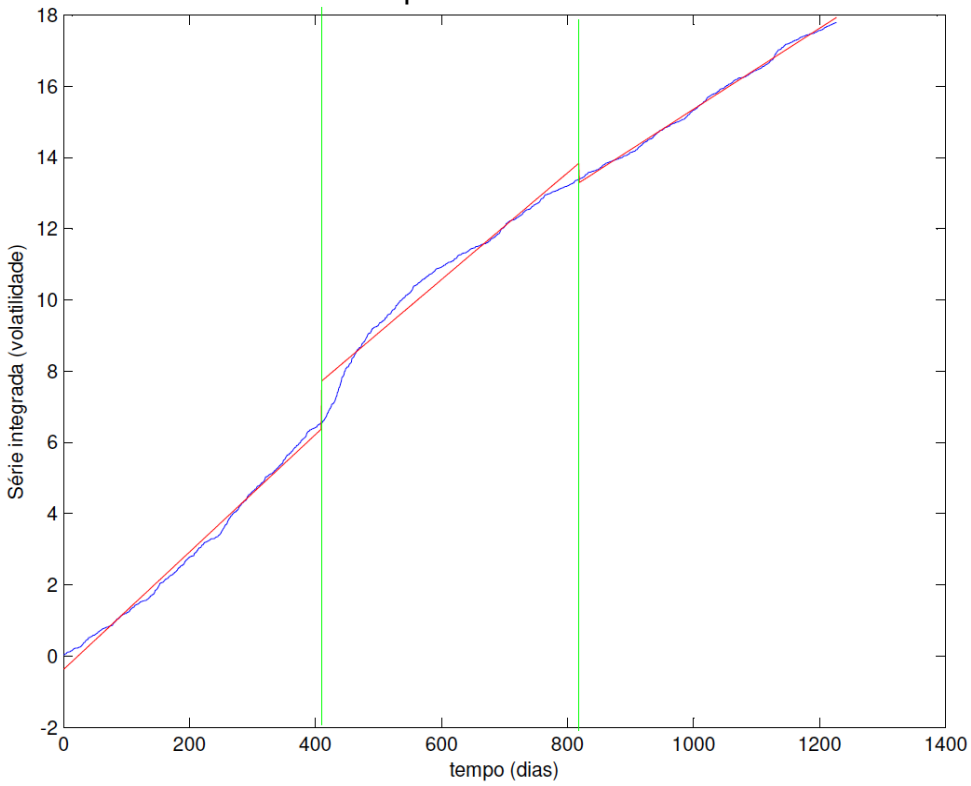
Figura 35 - Reta dos mínimos quadrados

```
for k=1:length(l);
    f(k)=fix(length(aint)/l(k));
    for j=1:l(k)
        somax=0;
        %somax=(1+f(k))*(f(k)/2);
        somay=0;
        for i=((j*f(k))-(f(k)-1)):(j*f(k))
            somax=somax+i;
            somay=somay+aint(i);
        end
        mediax=somax/f(k);
        mediay=somay/f(k);
        numer=0;
        denom=0;
        for i=((j*f(k))-(f(k)-1)):(j*f(k))
            numer=numer+(i-mediax)*aint(i);
            denom=denom+power((i-mediax),2);
        end
        coefb(j)=numer/denom;
        %coefa(j)=mediay-(coefb(j)*((1+f(k))/2));
        coefa(j)=mediay-(coefb(j)*mediax);
        p(j,k)=0;
        for i=((j*f(k))-(f(k)-1)):(j*f(k))
            %z(i,k)=coefa(j)+(coefb(j)*(i-((j-1)*f(k))));
            z(i,k)=coefa(j)+(coefb(j)*i);
            r(i,k)=(aint(i)-z(i,k))*(aint(i)-z(i,k));
            p(j,k)=p(j,k)+r(i,k);
        end
    end
```

Fonte: Elaborada no software MatLab pelo autor.

Os valores de coeficiente linear e angular das retas de mínimos quadrados são dados por coefa(j) e coefb(j), respectivamente. Os pontos de construção da reta em cada caixa são dados por z(i,k). A Figura 36 apresenta a série integrada de volatilidade da AMBV dividida em 3 caixas. Cada caixa possui a sua reta de mínimos quadrados.

Figura 36 - Série integrada de volatilidade da AMBV dividida em 3 caixas, com retas de mínimos quadrados em cada caixa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 - Definiu-se, então, o caminho sem tendência como a diferença entre a série integrada, $y(j)$ e os valores estimados a partir do método dos mínimos quadrados $y_{fit}(j)$, para cada caixa;

Observando o código do programa apresentado no item 3, o caminho sem tendência é dado, em termos quadráticos, pelo valor de r(i,k). Esse termo quadrático

será necessário para a soma das diferenças entre o valor da série integrada e o valor que a reta de mínimos quadrados assume em cada tempo t, conforme Equação (35).

5 - Calculou-se, então, o desvio padrão dessa flutuação por meio da Equação 35:

$$F_{DFA}(l) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=kl+1}^{(k+1)l}[y(j)-y_{fit}(j)]^2\right]} \qquad (35)$$

A soma entre colchetes foi calculada em p(j,k) no loop descrito na Figura 37.

Figura 37 – Soma diferenças entre valor no ponto e valor estimado

```
for i=((j*f(k))-(f(k)-1)):(j*f(k))
    %z(i,k)=coefa(j)+(coefb(j)*(i-((j-1)*f(k))));
    z(i,k)=coefa(j)+(coefb(j)*i);
    r(i,k)=(aint(i)-z(i,k))*(aint(i)-z(i,k));
    p(j,k)=p(j,k)+r(i,k);
end
```

Fonte: Elaborada no software MatLab pelo autor.

Já a média e a posterior raiz quadrada foi executada como na Figura 38.

Figura 38 – Raiz quadrada da soma das diferenças

```
somap(k)=0;
for j=1:l(k)
    somap(k)=somap(k)+p(j,k);
end
F(k) = power((somap(k)/(l(k)*f(k))),0.5);
```

Fonte: Elaborada no software MatLab pelo autor.

Repetiu-se o cálculo da equação para diferentes valores de l e assim foi estabelecida a relação entre FDFA(l) e l. O coeficiente angular da reta de mínimos quadrados no ajuste dos pontos estabelecidos entre FDFA(l) e l , ambos em escala

logarítmica, é o valor do DFA. Obteve-se o DFA utilizando a seguinte parte de código, presente na Figura 39.

Figura 39 - Resultados

```
Y=log(F);
X=log(f);
g=fit(X',Y','poly1')
plot(g,X',Y','*')
```

Fonte: Elaborada no software MatLab pelo autor.

4.2 *Detrended Cross-Correlation Analysis* (DCCA)

Com o programa para o cálculo do DFA funcionando e gerando valores condizentes com a literatura, passou-se a adequar o programa para o cálculo do DCCA.

Uma vez que o processo das partições em caixas e a construção das retas de mínimos quadrados já estavam prontos, restava realizar o cálculo da covariância.

O método do DCCA, resumidamente, se inicia integrando duas séries conforme Equação 36 (PODOBNIK ; STANLEY, 2008):

$$\tilde{x}(j) = \sum_{i=1}^{j} x(i) \quad \text{e} \quad \tilde{z}(j) = \sum_{i=1}^{j} z(i) \tag{36}$$

Similarmente ao DFA, as séries integradas $\tilde{x}$ e $\tilde{z}$ foram divididas em n caixas de tamanho $l = {}^{N}/_{n}$. Em cada caixa foram construídas retas de tendência x(j) e z(j) utilizando o método de mínimos quadrados. As séries sem tendência são conseguidas a partir das diferenças $x(j) - \tilde{x}_{fit}(j)$ e $z(j) - \tilde{z}_{fit}(j)$ e para cada caixa. Calculou-se, então, a covariância entre as séries, para os l diferentes tamanhos de caixas conforme Equação 37 e Equação 38 (HORVATIC et al., 2011; PODOBNIC ; STANLEY, 2008):

$$F^2_{DCCA^{(l)}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=kl+1}^{(k+1)l}[x(j) - \tilde{x}_{fit}(j)][z(j) - \tilde{z}_{fit}(j)]\right] \quad (37)$$

E, portanto,

$$F_{DCCA^{(l)}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=kl+1}^{(k+1)l}[x(j) - \tilde{x}_{fit}(j)][z(j) - \tilde{z}_{fit}(j)]\right]} \quad (38)$$

Verificou-se que o F_{DCCA} retoma o cálculo do F_{DFA} para valores de x=z. Como observado para o DFA, no DCCA os valores de $F_{DCCA}(l)$ escalam como $F_{DCCA}(l) \sim l^{\lambda}$.

Uma dificuldade que se encontrou ao realizar o cálculo do $F_{DCCA}(l)$ é a possível ocorrência de valores com sinais diferentes em $\left[x(j) - \tilde{x}_{fit}(j)\right]\left[z(j) - \tilde{z}_{fit}(j)\right]$, o que levaria a ocorrência de números imaginários, dado o cálculo da raiz quadrada de números negativos. Pal et al. (2014) toma as diferenças entre as séries integradas e a respectivas retas de mínimos quadrados em módulo, o que solucionou o problema anterior.

Após finalização do algoritmo, iniciado pela implementação do DFA e seguido pela implementação do DCCA, obteve-se, inicialmente, o resultado geral do cálculo para todas as 31 empresas consideradas pelo presente trabalho e listadas no Quadro 2, para toda a janela de tempo (2007 a 2011) conforme Tabela 2 e Tabela 3. Os resultados estão ilustrados de tal forma que a diagonal principal, destacada em azul, corresponde ao resultado do DFA; método que leva em consideração apenas os dados de uma série e seu desvio das restas de tendência, autocorrelação; e a triangular superior, sem destaque, corresponde ao resultado do DCCA; método que leva em consideração duas séries e seus desvios das retas de tendência, correlação cruzada. Para saber o valor da correlação cruzada entre duas empresas basta encontrar uma na coluna e a outra na linha, o valor encontrado será o resultado do DCCA da volatilidade do valor de fechamento das respectivas ações. Assim, por exemplo, o valor do DFA da empresa Ambev (primeira empresa na Tabela 2– ação AMBV) está na primeira linha e primeira coluna, já o valor do DCCA entre as empresas Ambev (AMBV) e Banco do Brasil (BBAS3), respectivamente primeira e segunda empresas descritas no Quadro 2, está na primeira linha e segunda coluna da matriz.

Tabela 2 - Resultado geral das 15 primeiras empresas consideradas pelo trabalho, listadas no Quadro 2

	AMBV4	BBAS3	BBDC4	BRAP4	BRKM5	CCRO3	CMIG4	CPFE3	CPLE6	CRUZ3	CSAN3	CSNA3	CYRE3	ELET3	ELET6
AMBV4	0,8664	0,8883	0,8714	0,8867	0,8771	0,8554	0,8435	0,8467	0,8591	0,8605	0,8947	0,8932	0,9086	0,8647	0,8536
BBAS3	0	0,9287	0,9111	0,9188	0,9006	0,9052	0,9116	0,9087	0,917	0,9095	0,9188	0,9236	0,9482	0,8938	0,9008
BBDC4	0	0	0,9076	0,8863	0,8662	0,8604	0,8661	0,8795	0,878	0,8685	0,8988	0,8934	0,9149	0,8614	0,8575
BRAP4	0	0	0	0,911	0,8947	0,8946	0,9011	0,8943	0,9088	0,9032	0,9139	0,9164	0,9446	0,8949	0,8965
BRKM5	0	0	0	0	0,826	0,8206	0,8413	0,8507	0,8484	0,8348	0,8437	0,8483	0,8823	0,8242	0,8271
CCRO3	0	0	0	0	0	0,7476	0,7855	0,7968	0,8049	0,8021	0,837	0,8296	0,8491	0,7986	0,7883
CMIG4	0	0	0	0	0	0	0,81	0,8414	0,8609	0,8715	0,9009	0,8935	0,914	0,8668	0,8572
CPFE3	0	0	0	0	0	0	0	0,8351	0,8685	0,8811	0,9	0,8997	0,9162	0,8748	0,8639
CPLE6	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8833	0,9006	0,9161	0,9158	0,9301	0,8926	0,8865
CRUZ3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8407	0,852	0,8508	0,8742	0,8168	0,807
CSAN3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8473	0,847	0,8513	0,8228	0,8288
CSNA3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9518	0,9728	0,8951	0,894
CYRE3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9237	0,8728	0,8911
ELET3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8047	0,8261
ELET6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8339

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que a lista de empresas calculadas era bastante grande, o resultado foi dividido em duas tabelas: Tabela 2 e Tabela 3, para apresentação.

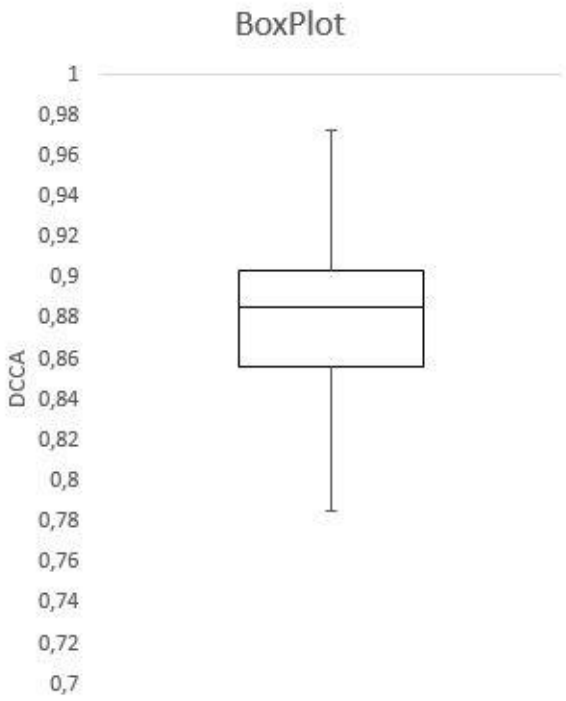
Tabela 3 - Resultado geral das 16 empresas restantes, listadas no Quadro 2

	EMBR3	GGBR4	GOAU4	GOLL4	ITSA4	LAME4	LREN3	NATU3	PETR3	PETR4	RSID3	TAMM4	TNLP4	USIM5	VALE3	VALE5
EMBR3	0,8798	0,8671	0,8637	0,8779	0,8574	0,8601	0,8688	0,8432	0,867	0,8694	0,8913	0,867	0,839	0,8525	0,8672	0,8627
GGBR4	0	0,9197	0,8892	0,9067	0,9037	0,8937	0,8998	0,8937	0,9039	0,9054	0,9231	0,8889	0,8813	0,8822	0,9017	0,8996
GOAU4	0	0	0,8957	0,895	0,8862	0,8776	0,8891	0,8696	0,8846	0,8854	0,9151	0,8776	0,8633	0,8695	0,8875	0,8846
GOLL4	0	0	0	0,8882	0,856	0,8382	0,8413	0,8478	0,8568	0,8588	0,8831	0,8375	0,8457	0,8357	0,8606	0,86
ITSA4	0	0	0	0	0,9361	0,8952	0,9029	0,8709	0,894	0,8903	0,9241	0,9069	0,8703	0,8966	0,8984	0,892
LAME4	0	0	0	0	0	0,9024	0,8847	0,8856	0,8966	0,8974	0,915	0,8896	0,8723	0,8805	0,8974	0,8917
LREN3	0	0	0	0	0	0	0,8775	0,8822	0,8954	0,8976	0,8747	0,8563	0,8732	0,8511	0,8849	0,8854
NATU3	0	0	0	0	0	0	0	0,8117	0,8347	0,8353	0,8707	0,8529	0,7982	0,8364	0,8371	0,8296
PETR3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9469	0,9116	0,9649	0,9466	0,9036	0,9356	0,9341	0,9259
PETR4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9479	0,9657	0,9468	0,9092	0,9395	0,9346	0,927
RSID3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8641	0,8579	0,8849	0,8769	0,8943	0,895
TAMM4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8564	0,8546	0,8228	0,8677	0,8735
TNLP4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,853	0,8879	0,888	0,8792
USIM5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8595	0,8702	0,8706
VALE3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9113	0,8949
VALE5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8968

Fonte: Elaborada pelo autor.

A princípio já se pode notar que os valores apresentados nas Tabelas 2 e 3, resultados do cálculo do DFA e do DCCA, foram, em sua maioria, muito próximos de 1, o que evidencia a existência de autocorrelação e correlação cruzada, ou memória de longo alcance, entre as séries de dados estudadas. A Figura 40 sintetiza a distribuição dos dados por meio de um gráfico *Boxplot*, mostrando os resultados concentrados em valores próximos a 1,em que a escala do gráfico inicia em 0,7.

Figura 40 - BoxPlot dos resultados gerais



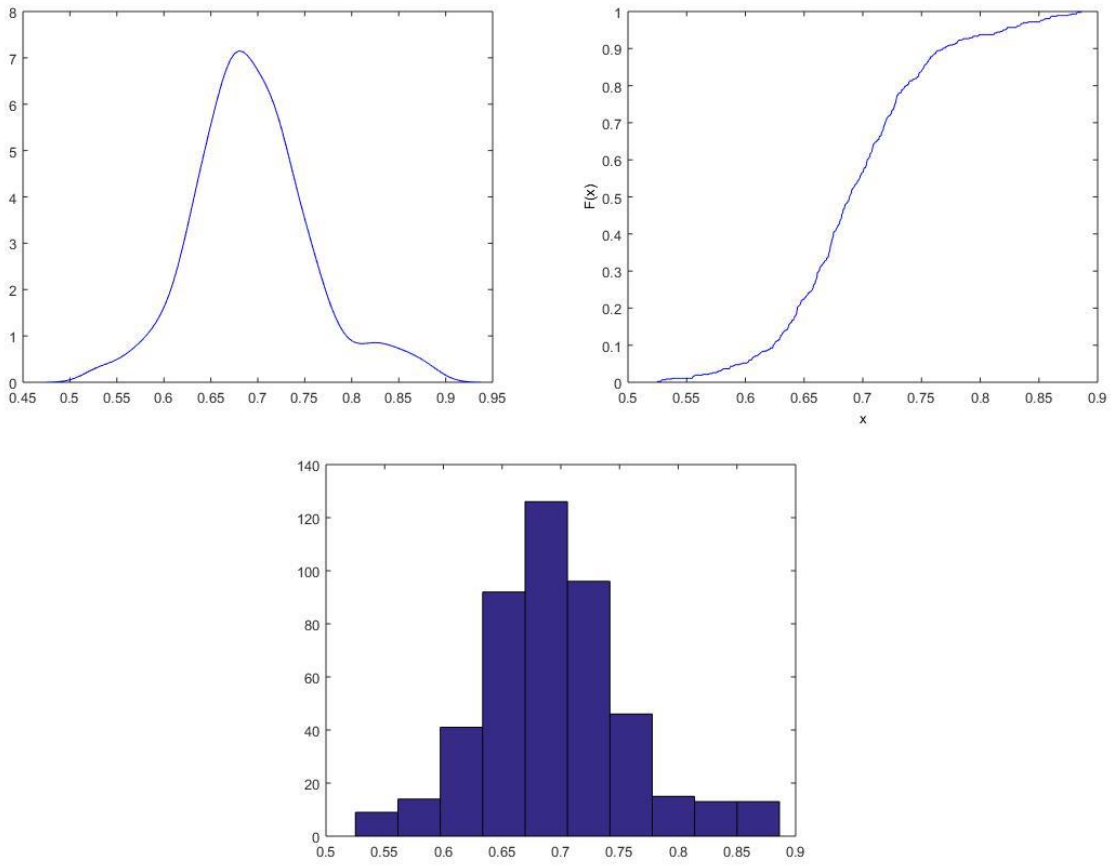
Fonte: Autor

Após esse resultado inicial, dividiu-se a série de dados em janelas de tempo menores, a fim de se analisar as diferenças no espectro de correlação em períodos anteriores, durante e posteriores a crise do *subprime*.

4.3 Antes da Crise de 2008

Nota-se que para o período considerado como anterior à crise os resultados de todas as empresas apresentam valores maiores que 0,5, o que indica a existência de autocorrelação e correlação cruzada, no entanto, apresentam média de aproximadamente 0,7, e poucos valores acima de 0,85 e nenhum acima de 0,90 (Figura 41). Os dados são assimétricos, se comparados a uma distribuição Normal, com cauda pesada, além disso, a distribuição apresenta caudas gordas.

Figura 41 - Resultados dos métodos em período anterior à crise.

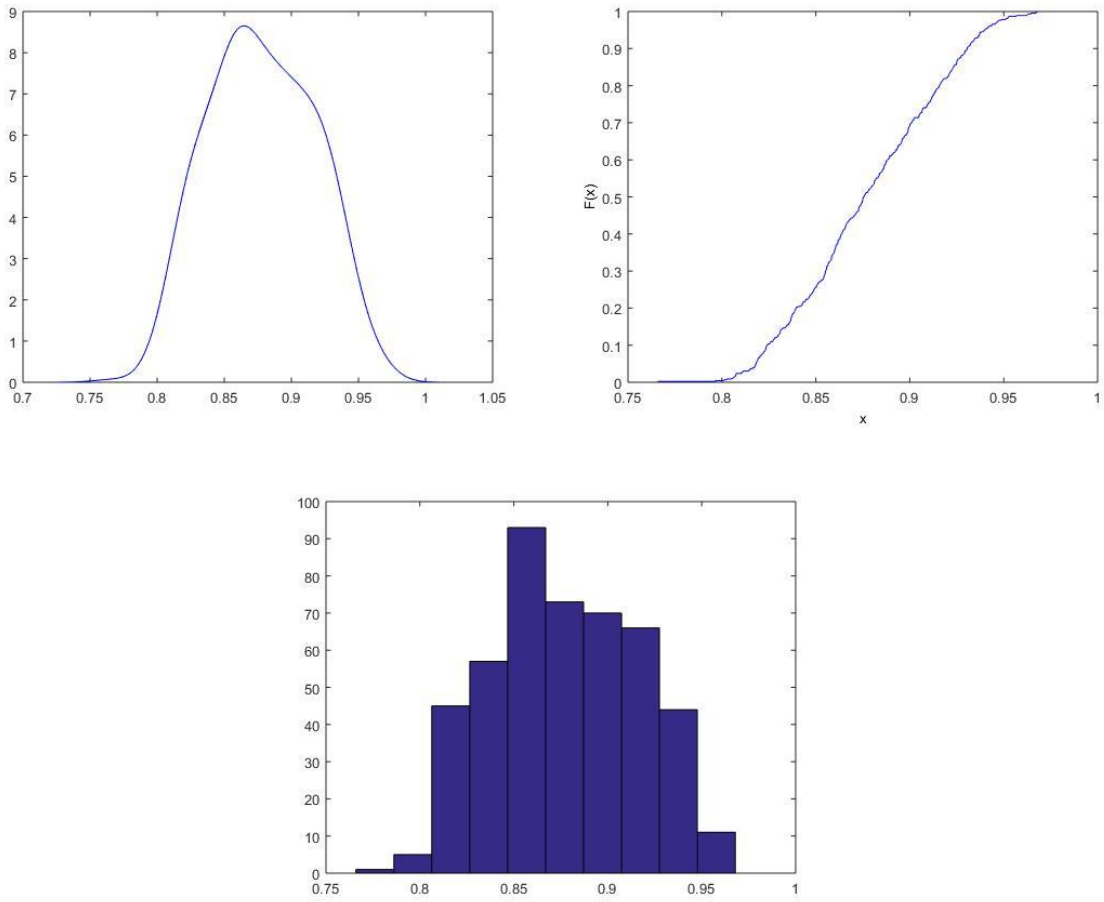


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4 Durante a Crise de 2008

Para o período de crise, nota-se que a autocorrelação e correlação cruzada apresentam significativo aumento, se comparado com o período anterior à crise. Com média de 0,88, os valores já partem de quase 0,8, o que, por si só, já é maior que a média em período anterior à crise, há empresas com correlação cruzada, inclusive, chegando a mais de 0,95 (Figura 42). Percebe-se que há uma concentração nos dados, com caudas mais leves que a distribuição do período anterior à crise.

Figura 42 - Resultados dos métodos em período de crise.

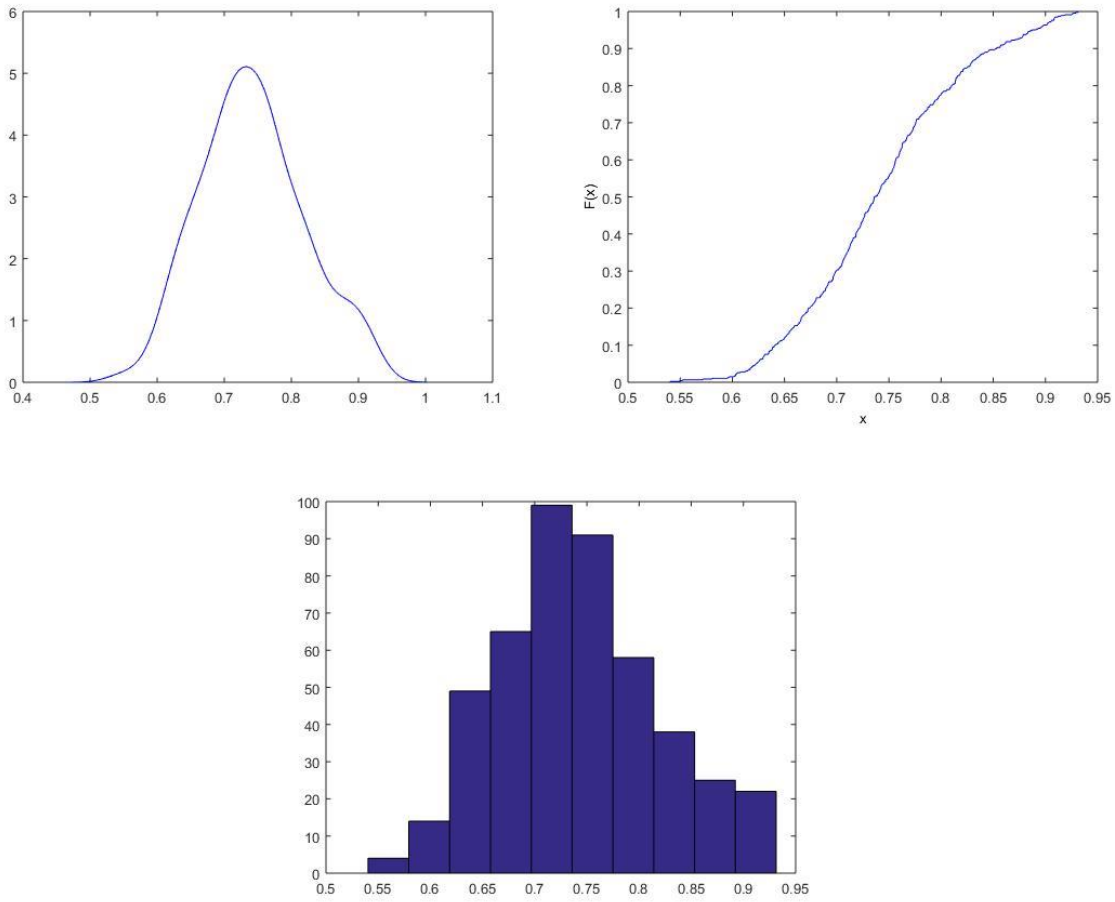


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5 Após a Crise de 2008

Após a crise, os métodos mostram que os valores de autocorrelação e correlação cruzada voltaram a diminuir, com média 0,74, valores mínimos em torno de 0,5 e nenhum passando de 0,95 (Figura 43). Embora não tenham retornado ao patamar inicial, apresentam valores menores que no período mais crítico, de crise. Valores extremos, mais espaçados, voltaram a aparecer, o que torna a cauda mais gorda que em momento de crise.

Figura 43 - Resultados dos métodos em período posterior à crise.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6 Comparativo

Percebe-se que houve uma grande mudança no espectro de correlação das séries em períodos de crise (Tabela 4), ou seja, evidenciou-se uma tendência a que os resultados financeiros das empresas sejam mais correlacionados em períodos de crise. Analisando a média, o desvio padrão e a curtose; medidas populacionais correspondentes aos resultados dos métodos nos diferentes momentos; antes, durante e após a crise, dispostos na Tabela 4, fica evidente que em momentos de crise há um agrupamento dos dados em valores relativamente altos. Enquanto a média em momento de crise é aproximadamente 27% maior que em momento anterior à crise e 19% maior que em momento posterior, as medidas de dispersão foram menores, com desvio padrão em torno de 40% menor que o período anterior e aproximadamente 50% com relação ao posterior, de maneira análoga, a curtose em momento de crise é 40% menor que em período anterior e 18% menor que em momento posterior à crise, o que mostra que há menos valores extremos em momentos de crise se comparado à sua vizinhança (caudas mais magras em momentos de crise). Dos valores de *skewness* pode-se notar que em momentos de crise há um substancial aumento de simetria nos resultados.

Tabela 4 - Comparativo dos espectros de correlação para os diferentes períodos.

	Antes da Crise	Crise	Pos Crise
Média (μ)	0,6940	0,8779	0,7422
Desvio Padrão (σ)	0,0631	0,0389	0,0777
Skewness	0,4142	0,0483	0,2399
Curtose	3,7744	2,2079	2,6820

Fonte: Cálculos do autor

Nota-se que há uma mudança clara nas correlações em período de crise, quando comparadas ao período anterior, e que após a crise há uma tendência a que o comportamento volte a ser como anteriormente, no entanto os valores não voltaram a se equiparar (quantitativamente) ao que havia sido antes da crise, o que sugere que embora a economia estivesse em um momento de recuperação, ainda não havia

voltado aos patamares anteriores no período considerado como pós crise pelo presente estudo.

4.7 Comparativo por Setor

Ao separar os resultados previamente apresentados nas Tabelas 2 e 3 por setor, construiu-se as seguintes tabelas: Tabela 5 com empresas correspondentes ao setor bancário, Tabela 6 com empresas do setor de energia elétrica, Tabela 7 com empresas de metalurgia e siderurgia, Tabela 8 representando o setor aeroespacial e a Tabela 9 com empresas de varejo. Nota-se que o espectro de correlação varia de diferentes maneiras, para os diferentes segmentos considerados

Para o setor de bancos, o de energia elétrica e o aeroespacial se observa um comportamento similar, ao se considerar momentos de crise as correlações cruzadas (DCCA) aumentam suas médias aproximadamente em 25%, 29% e 2%, respectivamente, se comparadas ao momento anterior à crise - sendo o aumento nas correções cruzadas das empresas do setor aeroespacial o menor dentre os setores. Esse aumento pequeno se deve ao fato de que que as correlações cruzadas das empresas do setor aeroespacial já apresentavam valores muito altos antes da crise, nota-se que seus valores antes da crise já estavam no patamar dos valores dos demais setores em momento de crise. Já após a crise, as correlações cruzadas das empresas desses três setores apresentam uma diminuição substancial, chegando a patamares inferiores ao momento anterior à crise, com diminuição das médias em aproximadamente 32%, 39% e 12%, respectivamente.

Já as correlações cruzadas das empresas dos setores de siderurgia e varejo apresentaram comportamento mais parecido com o global, onde em momentos de crise há um grande aumento na média das correlações cruzadas 31% e 30%, respectivamente, retornando, após a crise, a valores inferiores, mas sem voltar ao patamar de antes da crise.

As diferenças no espectro de correlação cruzada de setor para setor, comparando o momento anterior com o posterior à crise, indicam que a crise afetou de maneira diferente cada um dos setores considerados fazendo com que após a crise nem todos voltem com a mesma velocidade ou ao mesmo patamar de correlação que existia

anteriormente à crise. No entanto, todos os setores apresentam em comum o fato de terem uma média das correlações cruzadas em momento de crise maior que a média em momento anterior ou posterior à crise, de maneira análoga, todos os setores tiveram considerável redução no desvio padrão das correlações cruzadas, o que indica uma diminuição na variação de correlações cruzadas.

Para os bancos (Tabela 5) observa-se que todas as empresas tiveram comportamento similar, uma vez que durante a crise as correlações cruzadas são sempre maiores que em momento anterior ou posterior à crise. Observa-se que todos os resultados ficam muito próximos durante a crise, diminuindo substancialmente o desvio padrão.

Tabela 5 – Comparativo, Bancos

	Bancos						
		BBAS3	**BBDC4**	**BRAP4**	**ITSA4**	**Média (μ)**	**Dsv. Pad (σ)**
Antes da Crise	**BBAS3**		0,7856	0,6611	0,7363	0,6914	0,0597
	BBDC4			0,6848	0,6211		
	BRAP4				0,6595		
	ITSA4						
Durante a Crise	**BBAS3**		0,8747	0,855	0,8811	0,8706	0,0095
	BBDC4			0,8677	0,8781		
	BRAP4				0,8668		
	ITSA4						
Após a Crise	**BBAS3**		0,6585	0,6688	0,6656	0,6614	0,0338
	BBDC4			0,6386	0,6185		
	BRAP4				0,7185		
	ITSA4						

Fonte: Cálculos do autor

Para o setor de energia elétrica (Tabela 6), embora o desvio padrão das correlações cruzadas tenha reduzido pouco durante a crise, sua média aumentou bastante, após a crise os valores ficam ainda menores que no momento anterior à crise.

Tabela 6 – Comparativo setor de energia elétrica

	Energia Elétrica							
		CMIG4	CPFE3	CPLE6	ELET3	ELET6	Média (μ)	Dsv. Pad (σ)
Antes da Crise	CMIG4		0,6428	0,6191	0,6874	0,6804	0,6743	0,0343
	CPFE3			0,6382	0,7158	0,6955		
	CPLE6				0,674	0,6632		
	ELET3					0,7265		
	ELET6							
Durante a Crise	CMIG4		0,8491	0,8542	0,8811	0,8848	0,8679	0,0224
	CPFE3			0,8609	0,8892	0,8806		
	CPLE6				0,8741	0,8865		
	ELET3					0,8181		
	ELET6							
Após a Crise	CMIG4		0,6077	0,5433	0,5719	0,5497	0,6228	0,0634
	CPFE3			0,677	0,6968	0,6704		
	CPLE6				0,6123	0,5807		
	ELET3					0,7183		
	ELET6							

Fonte: Cálculos do autor

As empresas do setor de metalurgia (Tabela 7) apresentam aumento nos valores de correlação cruzada em momentos de crise com redução posterior, sem voltar ao patamar inicial, similarmente aos demais setores, o desvio padrão ficou reduzido em momento de crise.

Tabela 7 – Comparativo, setor de metalurgia e siderurgia

	Siderurgia/Met						
		CSNA3	GGBR4	GOAU4	USIM5	Média (μ)	Dsv. Pad (σ)
Antes da Crise	CSNA3		0,6846	0,6578	0,6071	0,6455	0,0276
	GGBR4			0,6611	0,6326		
	GOAU4				0,63		
	USIM5						
Durante a Crise	CSNA3		0,863	0,8582	0,8551	0,8440	0,0175
	GGBR4			0,8178	0,8345		
	GOAU4				0,8356		
	USIM5						
Após a Crise	CSNA3		0,7531	0,7596	0,7721	0,7308	0,0349
	GGBR4			0,6962	0,7122		
	GOAU4				0,6918		
	USIM5						

Fonte: Cálculos do autor

Quando as empresas são comparadas, duas a duas, em seus três momentos considerados no trabalho, observa-se um comportamento similar: durante a crise a correlação cruzada é maior que nos outros momentos. Como exceção a esse padrão, tem-se a correlação cruzada da EMBRAER (EMBR3) com a GOL (GOLL4) e a TAM (TAMM4) apresentadas na Tabela 8. Supõe-se que tal diferença de comportamento seja explicada pela natureza do negócio das empresas, uma vez que tanto a GOL quanto a TAM são clientes da EMBRAER, onde a crise afeta cada uma delas em momentos diferentes, em outras palavras, a negociação de compra e venda acontece vários meses antes de sua entrega, o que faz com que haja um atraso entre a percepção de crise pelas companhias aéreas, quando deixam de comprar, e a fabricante de aeronaves, quando tem menos aviões em fabricação. Também se poderia pensar no alcance das empresas, sendo que a EMBRAER tem atuação globalizada, realizando negociações em praticamente todo o globo, não só na aviação comercial, mas também na executiva, agrícola e militar.

Tabela 8 – Comparativo, setor aeroespacial

	Transp. Aéreo + material aeronáutico e defesa					
		EMBR3	GOLL4	TAMM4	Média (μ)	Dsv. Pad (σ)
Antes da Crise	EMBR3		0,8653	0,8599	0,8194	0,0749
	GOLL4			0,733		
	TAMM4					
Durante a Crise	EMBR3		0,8461	0,8317	0,8351	0,0098
	GOLL4			0,8275		
	TAMM4					
Após a Crise	EMBR3		0,76	0,7039	0,7435	0,0345
	GOLL4			0,7666		
	TAMM4					

Fonte: Cálculos do autor

O espectro de correlação das empresas do setor de varejo (Tabela 9), assim como o setor de metalurgia e siderurgia, apresentou comportamento muito parecido com o geral, em que há um aumento significativo nos valores de DCCA em momento de crise, com posterior redução, sem voltar ao patamar inicial. O desvio padrão também ficou reduzido em momentos de crise.

Tabela 9 – Comparativo, varejo

	Varejo (Americanas, Rener e Natura)					
		LAME4	LREN3	NATU3	Média (μ)	Dsv. Pad (σ)
Antes da Crise	LAME4		0,7121	0,6737	0,7013	0,0241
	LREN3			0,7182		
	NATU3					
Durante a Crise	LAME4		0,9051	0,9343	0,9117	0,0202
	LREN3			0,8956		
	NATU3					
Após a Crise	LAME4		0,721	0,8283	0,8191	0,0939
	LREN3			0,9081		
	NATU3					

Fonte: Cálculos do autor

5 Considerações Finais

As empresas pesquisadas apresentaram correlações cruzadas (DCCA) sempre acima de 0,5, o que corresponde à correlação persistente de longo prazo.

O valor do DCCA médio de todas as empresas pesquisadas, anteriormente à crise, é próximo a 0,7. Há um aumento significativo no período de crise, cuja média fica em torno de 0,88 e decresce para 0,74 no período pós-crise. Ou seja, ocorre um aumento com posterior queda, cujo valor não retoma os valores iniciais, como um processo de inércia da crise.

A distribuição torna-se mais concentrada na crise, uma vez que o desvio padrão diminui de 0,63 (antes da crise) para 0,39 (na crise), e após a crise há uma nova dispersão, onde o desvio padrão situa-se em 0,78. De maneira similar, tanto a skewness quanto a curtose diminuem no período de crise e voltam a crescer após a crise, mas nesses casos sem retomar o patamar de valores que exibiam em momento anterior à crise.

O espectro de correlação dos valores do DCCA apresenta características diferentes quando analisados em clusters setoriais. Existem setores, como o aeroespacial, que tem valor de DCCA já bastante alto desde antes da crise (média de 0,82) e setores em que o DCCA é relativamente baixo antes da crise, apresentando uma alta muito expressiva durante a crise, como é o caso do setor de varejo (valores médios de 0,7 para 0,91). Além disso, após a crise alguns setores não voltam ao patamar de antes da crise (varejo, aeroespacial e siderurgia) enquanto outros setores ultrapassam o que havia sido antes da crise (bancos e energia elétrica). Mantendo como característica comum a todos os setores o aumento, ainda que marginalmente no caso do setor aeroespacial, dos valores do DCCA em momento de crise.

Uma vez evidenciado que há uma mudança significativa no espectro de correlações em períodos de crise, recomenda-se, para trabalhos futuros, o estudo da possível criação de um método para verificar o prenúncio de uma crise.

Uma possibilidade seria identificar um padrão de comportamento, valores similares de resultados do DFA e DCCA, em períodos que não sejam de crise; uma vez que um padrão seja estabelecido, um possível indicador de rompimento do padrão poderia ser criado ao verificar a tendência de comportamento dos resultados ao longo do tempo por meio de uma janela móvel, ou seja, por meio da criação de um range de

dados que se mova ao longo do tempo, sempre atualizado, que identifique o momento em que o resultado dos cálculos seja tal que evidencie a iminência de uma crise. Para isso, haveria de se verificar um tamanho adequado de *range*, frequência de atualização, principais setores e valores de parâmetros que indiquem a ruptura, ou sirvam de divisores, para que se considere o início de uma crise.

Referências

ALVAREZ-RAMIREZ, J.; ALVAREZ, E.; RODRIGUEZ, G.; FERNANDEZ-ANAYA. **Time-varying Hurst exponent for US stock markets**. Physica A, v. 387, p. 6159–6169, 2008.

ALVES SILVA, P. **Indicadores Sociais e Econômicos em uma cooperativa de táxis (Salvador – BA) por meio de Análise das Séries Temporais**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Tecnologia Senai Cimatec, Salvador, 2009.

ANDERSON, P.W. **More is Different**. Science New Series, v. 177 (4047), p. 393-396, 1972.

ANTENEODO, C. **Processos estocásticos**. V Escola do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2004.

ARAÚJO, L.H.D; BEJAN, L.B; STOSIC, T. Aplicação do método Detrended Cross-Correlation Analysis para dados do IBOVESPA. In: **18º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística-SINAPE**, Estância de São Pedro, 2008.

ARNAUD, A.L. **Abordagem hibrida para otimização de redes neurais artificiais para previsão de séries temporais.** Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

BACHELIER L. **Théorie de la spéculation**. Paris: Gauthier – Villars, 1900. English translation by BONESS, A. James, in **The Random Character of Stock Market Prices**. Cambridge MA: The Mit Press, p. 17-78, 1964.

BM&FBOVESPA. **Classificação setorial**. Site Oficial da BM&FBovespa [on-line], 2016. Disponível em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/ renda-variavel/acoes/classe-setorial> Acesso em 27 jun. 16.

BM&FBOVESPA. **Séries Históricas**. Site Oficial da BM&FBovespa [on-line], 2015a. Disponível em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/servicos/market-data/historico/mercado-a-vista/series-historicas> Acesso em 05 fev. 2015.

BM&FBOVESPA. **Site oficial da BM&FBovespa** [on-line], 2015b. <http://www.bmfbovespa. com.br> Acesso em 05 fev. 2015.

BOCCARA, N. **Modeling Complex Systems**. New Ypork: Springer – Verlag, 2008.

BOLSA FINANCEIRA. Divergência entre IBOV (Ibovespa) e DJI (Dow Jones) no início deste ano. Disponível em <http://www.bolsafinanceira.com/blog/2013/02/-divergencia-entre-ibov-ibovespa-e-dji-no-inicio-deste-ano/> Acesso em 25 mai. 16.

BOUCHAD, J.P.; POTTERS, M. Theory of financal risks. Cambridge University Press, Cambrige, UK, 2000.

CAJUEIRO, D.O.; GOGAS, P.; TABAK, B.M. **Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of the Athens stockexchange, Int.** Rev. Financ. Anal., v. 18, p. 50–57, 2009.

CAJUEIRO, D.O.; TABAK, B.M. **Possible causes of long-range dependence in the Brazilian stock market**. Physica A, v. 345, p. 635–645, 2005.

CAJUEIRO, D.O.; TABAK, B.M. **Ranking efficiency for emerging markets.** Chaos Solitons Fractals, v. 22, p. 349–352, 2004.

CONT, R. **Empirical Properties of Asset Returs: Stylized Facts and Statistical Issues**. Quantitative Finance. v. 1, p. 223-236, 2001.

CONTRERAS NUÑO, G. **La variación del ritmo cardiaco**. Cinvestav, v. 26, núm. 01, p. 24-27, enero-março 2007.

COUILLARD, M.; DAVISON, M. **A comment on measuring the Hurst exponent of financial time series**. Physica A, v. 348, p. 404–418, 2005.

CREPALDI, A.F. **Abordagem de Modelos Baseados em Agentes no Estudo de Séries Temporais Financeiras**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, São Paulo, 2007.

CREPALDI, A.F.; FERREIRA, F.F. Estudo de Fatos Estilizados no Jogo da Minoria. In: **XXVII Encontro nacional de engenharia de produção**, Foz do Iguaçu, 2007.

DA SILVA, L.R; STOSIC, T.; STOSIC, B. Escalonamento, lei de potências e correlações de focos de queimadas no Brasil. In: **8º Encontro regional de matemática aplicada e computacional**, Natal, 2008.

DEMO, P. **Metodologia do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2000.

DEMO, P. **Pesquisa e construção do conhecimento: metodologia científica no caminho de Habermas**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1994.

DEWANDARU, G, et al. **Developing trading strategies based on fractal finance: An application of MF-DFA in the context of Islamic equities**.Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 438, p. 223-235, 2015.

DI MATTEO, T.; ASTE, T.; DACOROGNA, M.M. **Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development**. J. Bank. Finance, v. 29, p. 827–851, 2005.

DOMINO, K. **The use of the Hurst exponent to predict changes in trends on the Warsaw Stock Exchange**. Physica A, v. 390, p. 98–109, 2011.

EKE, A.; HERMAN, P.; KOCSIS, L.; KOZAK, L.R. **Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals.** Physiological Measurement, n.1, v. 23, p. 1-38, 2002.

ENDERS, W. **Applied econometric time series**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, , 2003.

EOM, C.; CHOI, S.; OH, G.; JUNG, W.S. **Hurst exponent and prediction based on weak-form efficient market hypothesis of stock markets**. Physica A, v. 387, p. 4630–4636, 2008.

FERNANDES DA SILVA, M. et al. **Quantifying the contagion effect of the 2008 financial crisis between the G7 countries (by GDP nominal)**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 453, p. 1-8, 2016.

FONSECA, E.L. **O estudo das propriedades multifractais de séries temporais financeiras**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

FONSECA, J.S.; MARTINS, G.A.; TOLEDO, G.S. **Estatística aplicada.** 2ª.ed. São Paulo: Atlas, 1985.

FORTUNA, E. **Mercado Financeiro**. 17ª ed. - Rio de Janeiro: Qualitymark, 2008.

FREITAS, R.M. et al. Análise de anisotropia de imagens utilizando o método DFA: um estudo de caso na área de exploração de petróleo. In: **XIV Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto**. São José dos Campos, 2009.

GRECH, D., MAZUR, Z. **Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?.** Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 336.1, p. 133-145, 2004.

GUAN, L.; YANG, J.; BELL, J.M. **Cross-correlations between weather variables in Australia**. Build. Environ., v. 42, p. 1054–1070, 2007.

GUJARATI, D.N. **Econometria básica**. Tradução: Ernesto Yoshida; Revisão técnica: Eliezer Martins Diniz. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2000.

HORTA, P.; LAGOA, S.; L. MARTINS. **The impact of the 2008 and 2010 financial crises on the Hurst exponents of international stock markets: Implications for efficiency and contagion**. Int. Rev. Financ. Anal., v. 35, p. 140–153, 2014.

HORVATIC, D., STANLEY, H.E., PODOBNIK, B. **Detrended cross-correlation analysis for non-stationary time series with periodic trends**.EPL (Europhysics Letters), v. 94.1, p. 18007, 2011.

HULL, M.; MCGROARTY, F. **Do emerging markets become more efficient as they develop? Long memory persistence in equity indices**. Emerg. Mark. Rev., v. 18, p. 45–61, 2014.

HURST, E. **Long term storage capacity of reservoirs.** Transactions of the American Society of Civil Engineers, v. 116, p. 770-799, 1951.

JIANG, Z.Q.; ZHOU, W.X. **Multifractal detrending moving-average cross-correlation analysis**. Phys. Rev . E, n. 1, v. 84, p. 016106, 2011.

KRISTOUFEK, L. **Local scaling properties and market turning points at Prague stock exchange**. Acta Phys. Polon., v. B 41, p. 1223–1236, 2010.

KRISTOUFEK, L. **Measuring cross-correlation between non-stationary series with dcca coefficient**. Physica A, v. 402, p. 291–298, 2014.

KUMAR, S.; DEO, N. **Analyzing Crisis in Global Financial Indices, Econophysics of Systemic Risk and Network Dynamics**. Milan: Springer, 2013.

LAHMIRI, S. **Long memory in international financial markets trends and short movements during 2008 financial crisis based on variational mode decomposition and detrended fluctuation analysis.** Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 437, p. 130-138, 2015.

LEVINE, D.M.; BERENSON, M.L.; STEPHAN, D. **Estatística: Teoria e Aplicações usando o Microsoft Excel em português**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

LI, D.; NISHIMURA, Y.; MEN, M. **Fractal markets: Liquidity and investors on different time horizons**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 407, p. 144-151, 2014.

LI, D.; NISHIMURA, Y.; MEN, M. **The long memory and the transaction cost in financial markets.** Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 442, p. 312-320, 2016.

LIN, A.; SHANG, P.; ZHAO, X. **The cross-correlations of stock markets based on DCCA and time-delay DCCA**. Nonlinear Dynam, v. 67, p. 425–435, 2012.

LIU, Y. et al. **Statistical properties of the volatility of price fluctuation**. Physical Review E, vol. 60, 1999.

MA, Q.D.; BARTSCH, R.P.; BERNAOLA-GALVÁN, P.; YONEYAMA, M.; IVANOV, P.C. **Effect of extreme data loss on long-range correlated and anticorrelated signals quantified by detrended fluctuation analysis**. Physical Review E, n. 3, v. 81, p. 031101, 2010.

MADDALA, G.S. **Introdução à econometria**. Tradução e revisão técnica: Leonardo Weller e Paulo Tafner. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

MAKSE, H.A. et al**. Long-range correlations in permeability fluctuations in porous rock.** Phys. Rev. E, n. 54, p. 3129 – 3134, 1996.

MANDELBROT, B.B. **Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis.** Annals of Economic and Social Measurement, v. 1, p. 259-290, 1972.

MANTEGNA, R.N. **Hierarchical structure in financial markets**. Eur. Phys. J., v. B 11, p. 193–197, 1999.

MANTEGNA, R.N.; STANLEY, H.E. **An Introduction to Econophysics: correlations and complexity in finance**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

MANTEGNA, R.N.; STANLEY, H.E. **Scaling Behaviour in the Dynamic of a Economic Index. Letters to Nature**. v.376, p 46-49, 1995.

MARÍA, G.A.; ESCÓS, J.; ALADOS, C.L. **Complexity of behavioural sequences and their relation to stress conditions in chickens (Gallus gallus domesticus): a noninvasive technique to evaluate animal welfare**. Applied Animal Behaviour Science, v. 86, p. 93-104, 2004.

MORET, M.A. et al. **Fluctuations Analysis of Stellar X-Ray Binary Systems**. Physical Review E, n. 68, p. 41104, 2003.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. **Análise de Séries Temporais, ABE - Projeto Fisher**. Editora Edgard Blucher LTDA, São Paulo, 2004.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. **Previsão de séries temporais**. 2ª ed. São Paulo:Atual, 1987.

MITCHELL, M. **Complexity - A Guided Tour**. Oxford: Oxford University Press, 2009.

NASCIMENTO, R.S. **Análise de Correlação de Longo Alcance no Registro da Atividade Elétrica Cortical no Fenômeno da Depressão Alastrante em Ratos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, UFRPE, Recife, 2008.

NOROUZZADEH, P.; JAFARI, G.R. **Application of Multifractal Measures to Teheran Price**. Quantitative Finance Papers, 2004.

PAL, M.; RAO, P.M.; MARIMARAN, P. **Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis on Gold, Crude Oil and Foreign Exchange Rate Times Series**. Physica A, v. 416, p. 452-460, 2014.

PENG, C.K. et al. **On the mosaic organization of DNA sequences**. Physical Review E, n. 49, p. 1685-1689, 1994.

PENG, C.K. et al. **Scaling and universality in heart rate variability distribution**. Physica A, n. 249, p. 241, 1998.

PENG, C.K. et al. **Statistical Properties of DNA Sequences**. Physica A, n. 221, p. 180, 1995.

PENG, C.K., Ma; LI, D.; LI, S. **Efficiency and cross-correlation in equity market during global financial crisis: Evidence from China**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 444, p. 163-176, 2016.

PERAZZO, C.A.; FERNANDEZ E.A.; WILLSHAW, Y.P. Determinación de Correlaciones a Largo Plazo Utilizando DFA. In: **Procesamiento de señales e imágenes: Teoría y Aplicaciones**, Buenos Aires: Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, 2004.

PEREIRA, B.B. Séries temporais Multivariadas. In: **SINAPE-Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística**, Rio de Janeiro, 1984.

PETERS, E. **Chaos and Order in the Capital Market**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

PETERS, E. **Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics**. New York: John Wiley & Sons,1994.

PLEROU, V.; GOPIKRISHNAN, P.; AMARAL, L.A.N.; MEYER, M.; STANLEY, H.G. **Scaling of the Distribution of Price Fluctuations of Individual Companies**. Physical Review E, v.60, p. 6519-6529, 1999.

PLEROU, V.; GOPIKRISHNAN, P.; ROSENOW, B.; AMARAL, L.A.N.; GUHR, T.; STANLEY, H.E. **A random matrix approach to financial cross-correlations**, Phys. Rev., v. E 65, p. 066126, 2002.

PODOBNIK, B.; HORVATIC D.; PETERSEN A.; STANLEY H.E. **Cross-correlation between volume change and price change**, PNAS, v. 106, p. 22079–22084, 2009.

PODOBNIK, B.; STANLEY, H.E. **Detrended Cross-Correlation Analysis: A New Method for Analyzing Two Nonstationary Time Series**. Phys. Rev. Let, v. 100, p. 084102, 2008.

PODOBNIK, B.; JIANG, Z.Q.; ZHOU, W.X.; STANLEY H.E. **Statistical tests for power-law cross-correlated processes**. Phys. Rev. E, v. 84, p. 066118, 2011.

PORTUGAL, A.G. **DFA Prognósticos - Um Software para medir Correlação de Longo Alcance dos Acordos de Níveis de Serviço usando Análise de Flutuação sem Tendências**. Dissertação de Mestrado, CEPPEV - Fundação Visconde de Cairu, Salvador, 2006.

PREIS, T.; STANLEY, H.E. **Bubble Trouble: Can a Law Describe Bubbles and Crashes in Financial Markets?** Physics Worls, v. 24(5), p. 29-32, 2011.

REBOREDO, J.; MIGUEL A.R.C.; ZEBENDE, G.F. **Oil and US dollar exchange rate dependence: A detrended cross-correlation approach**. Energy Economics, v. 42, p. 132-139, 2014.

SCHMITT D.T.; IVANOV P.C. **Fractal scale-invariant and nonlinear properties of cardiac dynamics remain stable with advanced age: a new mechanistic picture of cardiac control in healthy elderly**. American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology., v. 293(5), p. R1923-37, 2007.

SHAYEGANFAR, F. **Levels of complexity in turbulent time series for weakly and high Reynolds number**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 391.11, p. 3151-3158, 2012.

SILVA FILHO, A. **Correlaçao de Longo Alcance em Indicadores de Criminalidade de Salvador – BA: DFA E DCCA**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Tecnologia Senai Cimatec, Salvador, 2009.

SIQUEIRA JÚNIOR., E.L.; STOŠIĆ, T.; BEJAN, L.; STOŠIĆ, B.B. **Correlations and cross-correlations in the brazilian agrarian commodities and stocks**. Physica A, n. 14, v. 389, p. 2739–2743, 2010.

SIQUEIRA JÚNIOR, E.L. et al. Correlações cruzadas em mercadorias brasileiras: um estudo econofísico. In: **VIII Encontro regional de matemática aplicada e computacional-ERMAC**, Natal, 2008b.

SIQUEIRA JÚNIOR, E.L.; BEJAN, L.B.; STOSIC, T. Comparando produtos agropecuários e ações no mercado brasileiro usando Detrended Fluctuation Analysis em séries históricas de preços. In: **VIII Encontro regional de matemática aplicada e computacional**, Natal, 2008a.

SORNETE, D. **Why Stock Markets Crash? Critical Events in Complex Financial Systems**. Princeton: Princeton University Press, 2003.

SOUZA, R.C. Modelos Estruturais para Previsão de Séries Temporais: Abordagens Clássica e Bayesiana. In: **17° Colóquio Brasileiro de Matemática**. Rio de Janeiro, 1989.

SOUZA, R.C.; CAMARGO, M.E. **Análise e Previsão de Séries Temporais: Os Modelos ARIMA**, Ijuí, RS: Sedigraf, 2ª edição, 2004.

TAKAKURA, I.T. **Variabilidade da frequência cardíaca no domínio do caos preditora de morbimortalidade em pacientes submetidos à cirurgia de revascularização do miocárdio**. Dissertação de mestrado, Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto, São José do Rio Preto, 2007.

TALKNER, P.; WEBER, R.O. **Power spectrum and detrended fluctuation analysis: Application to daily temperatures**. Phys. Rev. E, n. 62, p. 150 - 160, 2000.

TAQQU, M.S. et al. **Estimators for long-range dependence: an empirical study**. Fractals, London, v. 3, n. 4, p. 785 - 798, 1995.

TORRES, F. **Tele Norte Leste Participações aprova incorporação pela futura Oi S.A.** Revista Valor Econômico [versão on-line], São Paulo, 27 fev. 2012. Disponível em <http://www.valor.com.br/empresas/2544496/ tele-norte-leste-participacoes-aprova-incorporacao-pela-futura-oi-sa> Acesso em 27 jun. 2016.

TUMMINELLO, M.; DI MATTEO, T.; ASTE, T.; MANTEGNA, R.N. **Correlation based networks of equity returns sampled at different time horizons**. Eur. Phys. J., v. B 55, p. 209–217, 2007.

UMPIERES, R. T. **Velório na Bolsa: "melhor ação da história", Souza Cruz vai deixar saudades?** Portal InfoMoney [on-line], 16 out. 2015. Disponível em <http://www.infomoney.com.br/mercados/acoes-e-indices/noticia/4349737/velorio-bolsa-melhor-acao-historia-souza-cruz-vai-deixar-saudades> Acesso em 27 jun. 2016.

URSULEAN, R; LAZAR, A.M. Detrended Cross-Correlation Analysis of Biometric Signals used in a new Authentication Method. In: **The 13th International Conference Electronics and Electrical Engineering**, Lithuania, 2009.

VEIGA, R.D.; SÁFADI, T. **Análise de regressão e séries temporais**. UFLA/FAEPE, Lavras, 1999.

WANG, G.; XIE, C. **Cross-correlations between WTI crude oil market and US stock market: A perspective from econophysics**. Acta Phys. Pol. B Elem. Part. Phys., n. 10, v. 43, p. 2021–2036, 2012.

WANG, G.; XIE, C.; CHEN, S.; HAN, F. **Cross-correlations between energy and emissions markets: New evidence from fractal and multifractal analysis**. Math. Probl. Eng., v. 2014 (197069), p. 1–13, 2014.

WANG, G.; XIE, C.; CHEN, S.; YANG, J.; YANG, M.J.W. **Random matrix theory analysis of cross-correlations in the US stock market: Evidence from Pearson's correlation coefficient and detrended cross-correlation coefficient**. Physica A n.17, v. 392, p. 3715–3730, 2013.

WANG, Y.; LIU, L.; GU, R.; CAO, J.; WANG, H. **Analysis of market efficiency for the Shanghai stock market over time**. Physica A, v. 389, p. 1635–1642, 2010.

WHEELWRIGHT, S.C.; MAKRIDAKIS, S**. Forecasting Methods for Management**. 4th edition. New York : John Wiley & Sons Inc, 1985.

WOLFF, L.; ALMEIDA, S.G.D.; ZANINI, R.R.; Macedo, J.H.S.; SOUZA, A.M. **Análise do Índice Bovespa sob Enfoque de Séries Temporais**. Global Manager, v. 11(1), 2011.

XU, M.; SHANG, P.; LIN, A. **Cross-correlation analysis of stock markets using EMD and EEMD**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 442, p. 82-90, 2016.

YIN, Y.; SHANG, P. **Modified DFA and DCCA approach for quantifying the multiscale correlation structure of financial markets**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 392.24, p. 6442-6457, 2013.

YIN, Y.; SHANG, P.; XIA, J. **Compositional segmentation of time series in the financial markets**. Applied Mathematics and Computation, v. 268, p. 399-412, 2015.

ZEBENDE, G.F. et al. **Study of Long Range Correlations in a Liquid-Vapor Phase Transition**. Physica A: Statistical and Theoretical Physics, v. 342, n. 1-2, p. 322, 2004.

ZEBENDE, G.F.; DA SILVA, M.F.; FILHO, A.M. **DCCA cross-correlation coefficient differentiation: Theoretical and practical approaches**. Physica A, n. 8, v. 392, p. 1756–1761, 2013.

ZEBENDE, G.F.; de OLIVEIRA, P.M.C.; PENNA, T.J.P**. Long-range Correlation in Computer Diskettes.** Physical Review E, v. 57, p. 3311-3314, 1998.

ZEBENDE, G.F.; MACHADO FILHO, A. **Cross-correlation between time series of vehicles and passengers**. Physica A, n.3, v.88, p. 4863-4866, 2009.

ZHOU, W.X. **Multifractal detrended cross-correlation analysis for two nonstationary signals**. Physical Review E, v. 77, p. 066211, 2008.