

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

MARIA DEL PILAR BONILLA TOBAR

REAQUECIMENTO EM UM MODELO DE INFLAÇÃO QUINTESSENCIAL

São Paulo
2009



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/09

Reaquecimento em um modelo de Inflação Quintessencial

Maria del Pilar Bonilla Tobar

Orientador

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

Agosto de 2009



"A Elena,"
y a su fabulosa vida, cuya luz crea el reflejo que ilumina todo en mi universo.

"Homines, dum docent, discunt."

Seneca.

"We are in the universe, and the universe is in us."

Dr. Neil deGrasse Tyson.

Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer a Deus.

Ao professor Rogério Rosenfeld por ter me aceitado como sua aluna e por compartilhar seus conhecimentos comigo.

Ao Instituto IFT-Unesp.

À CAPES por ter financiado meu mestrado.

A Ju Min Kim, que colaborou comigo em partes do último capítulo desta dissertação.

Aos meus queridos amigos pela amizade, pelas discussões científicas que mantivemos e pela companhia ao longo do mestrado. Em especial gostaria de agradecer ao Daniel Noche pela ajuda com o Português.

Agradeço profundamente ao “Albertini”, Alberto Sanoja, por ser meu professor de inflação e muitos outros temas, grande parte deste trabalho foi desenvolvido após nossas discussões. Em especial agradeço por sempre querer responder as minhas dúvidas e por ter aumentado meu interesse na astronomia em geral, tomara que em mim fique algo da sua curiosidade e entusiasmo.

Agradeço ao meu bem mais estimado: a minha família, pela espera, às suas vozes e histórias contadas a distância, eles são a inspiração para os melhores atos da minha vida. A mi tia Evita siempre viva en mi corazon, por ser mi primer ejemplo de cuán fuerte una mujer es.

A Mariposa por ter sido a minha companhia em todo momento.

Finalmente agradeço a Mafrius meu adorado esposo, seu amor é o meu pilar. Muito obrigada por sempre tentar fazer de mim uma cientista rigorosa e pelas discussões científicas fundamentais na minha aprendizagem ao longo de todo o mestrado, también lhe agradeço pelas correções ortográficas ao presente texto e por me tornar uma grande fã do *Linux*..

Resumo

O modelo cosmológico inflacionário postula uma rápida expansão do universo primordial, denominada inflação, que pode resolver certas dificuldades da cosmologia padrão. Em modelos inflacionários mais simples a expansão acelerada é causada pela densidade de energia armazenada em um campo escalar denominado *inflaton*. Após a fase inflacionária, o universo encontra-se em um estado frio e sem partículas. Deve haver um mecanismo responsável pelo reaquecimento do universo.

Nesta dissertação, primeiramente fazemos uma revisão simples da cosmologia padrão e inflacionária. Posteriormente, realizamos um estudo detalhado de três diferentes processos de reaquecimento: ressonância paramétrica, instabilidades taquiônicas e reaquecimento perturbativo. Finalmente, fazemos uma análise deste processo para um modelo de inflação quintessencial usando o programa LATTICEASY.

Palavras Chaves: Inflação; Reaquecimento; Preaquecimento.

Áreas do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra; Física; Física Teórica; Cosmologia.

Abstract

The inflationary cosmological model postulates a fast expansion of the early universe, called inflation, which can solve some issues of the standard cosmological model. In simple inflationary models the accelerated expansion is caused by the energy density stored in a scalar field called *inflaton*. After the inflationary phase, the universe is in a cold state and without particles. There must be a mechanism responsible for its reheating.

In this dissertation we firstly review the standard and inflationary cosmologies. We then perform a detailed study of three different reheating processes: parametric resonance, tachyonic instabilities and perturbative reheating. Finally, we make an analysis of this process for a quintessential inflation model using the program LATTICEASY.

Notação

- O sinal da métrica é $g_{\mu\nu} = +, -, -, -$.
- $\hbar = c = K_B = 1$.
- $G^{-1} = m_p^2 = 1.22 \times 10^{19} GeV$

Sumário

Introdução	1
1 Breve Introdução à Cosmologia Padrão e seus problemas	3
1.1 A equação de Friedman	3
1.2 Sucessos do modelo padrão	6
1.2.1 O Universo Isotrópico e Homogêneo	6
1.2.2 Nucleossíntese Primordial	8
1.2.3 Formação de Estrutura	8
1.3 Problemas do modelo padrão	9
1.3.1 Problema da Platitude	9
1.3.2 Problema do Horizonte	11
1.3.3 Problema dos Monopolos Magnéticos	11
1.3.4 Problema da Constante Cosmológica	11
2 Cosmologia Inflacionária	12
2.1 Idéia da Inflação	12
2.2 Velha Inflação	14
2.3 Nova Inflação	15
2.3.1 Entropia em inflação	18
2.3.2 Solução do Problema da Platitude	19
2.3.3 Solução do Problema do Horizonte	19
2.3.4 Solução do Problema dos Monopolos Magnéticos	19
2.4 Inflação Caótica	19
2.5 Modelos de Inflação Quintessencial	22
3 Reaquecimento e Preaquecimento	25
3.1 Reaquecimento	25
3.1.1 Decaimento do Inflaton	28
3.1.2 Temperatura do reaquecimento	31
3.2 Preaquecimento	33
3.2.1 Banda de ressonância estreita	38
3.2.2 Banda de ressonância larga	40
3.2.3 Preaquecimento Taquônico	42

4	LATTICEEASY: Um programa para simulações de rede para campos escalares em um universo em expansão	44
4.1	Simulações de rede	44
4.2	LATTICEEASY	45
4.3	Parâmetros ajustáveis	48
4.4	Output	48
5	Reaquecimento no modelo de inflação quintessencial $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$	49
5.1	Parâmetros usados na simulação	52
5.2	Instabilidade taquiônica e quebra espontânea da simetria	52
5.3	Produção de Partículas	56
5.4	Estado Final do preaquecimento: Decaimento do inflaton em outros campos	59
6	Conclusão	61
A	Produção de Partículas e condições iniciais na rede	63
A.1	Produção de partículas	63
A.2	Condições iniciais para simulações numéricas	65
A.3	Considerações na rede	66

Introdução

A relação entre a cosmologia e a física de partículas vislumbra-se como uma união que providenciará uma explicação de como o universo começou e o porquê de muitas das suas características.

A cosmologia moderna se compõe basicamente do modelo Friedmann - Lemâitre - Robertson - Walker **FRLW**, também conhecido como modelo do Big Bang e da cosmologia inflacionária, esta última necessária para resolver certas questões abertas do modelo **FLRW** [1]. Basicamente, a cosmologia inflacionária propõe uma época na qual o universo experimentou uma expansão acelerada, em que cresceu cerca de e^{60} vezes seu tamanho inicial antes da *inflação* [2].

Existem muitos diferentes modelos inflacionários, os quais usualmente estão descritos por campos escalares. Embora é preciso ter em comum um campo escalar quântico conhecido como inflaton, o qual é o encarregado de conduzir inflação. Após o término da expansão acelerada o universo encontra-se totalmente vazio e dominado pela densidade de energia do inflaton. Obviamente este estado não é mantido sempre e contrariamente o universo encontra-se preenchido por estruturas maravilhosas, colossais e quentes capazes de gerar vida. Assim, o Big Bang tem grande sucesso nas suas predições e a união entre ele e o modelo inflacionário nos provêm uma descrição quase completa da evolução do universo desde seus primórdios. Portanto, precisamos relacionar estes dois modelos justamente no momento em que inflação termina, e achar um mecanismo através do qual se gere a matéria necessária para o desenvolvimento do universo de acordo com o Big Bang.

Com este fim foi formulado o mecanismo conhecido como reaquecimento, o qual é o encarregado de reesquentar o universo após inflação e também de gerar a matéria inicial que deu origem a matéria que conhecemos. É de esperar então que o reaquecimento tenha um profundo impacto sobre as predições cosmológicas nas subseqüentes eras do universo [3].

Inicialmente pensou-se o reaquecimento como um processo perturbativo através do qual o inflaton decaía em novas partículas que posteriormente termalizavam-se dando lugar à radiação. Análise análise mais profundas encontraram que tipicamente o mecanismo está composto por três estágios diferentes: O primeiro, conhecido como *preaquecimento* é um processo não perturbativo num estado de não equilíbrio no qual se gera grande números de ocupação do inflaton, levando à criação de partículas do mesmo campo. No segundo estágio o campo inflaton e as partículas do campo geradas no preaquecimento decaem num regime de ressonância paramétrica, levando à geração de partículas novas. O

terceiro estágio é a termalização das partículas criadas em uma temperatura denominada temperatura de reaquecimento T_R [4].

Dos três estágios do reaquecimento é o preaquecimento quem mais atenção leva, já que gera muitas possibilidades na dinâmica pós-inflacionária. Uma destas possibilidades sugere uma temperatura T_R muito maior que a encontrada mediante modelos perturbativos, o qual pode ajudar resolver problemas em modelos como GUT- Bariogênese [5].

O objetivo desta dissertação é fornecer um breve resumo sobre a cosmologia do universo primordial e dar algumas bases ao leitor sobre o mecanismo do reaquecimento, tentando explicar de uma maneira simples e auto-contida como funciona e o porquê da sua importância para a cosmologia moderna. Trabalhou-se também em uma pequena introdução às simulações de rede, um dos métodos usados para resolver as equações geradas desde o preaquecimento, e foi analisado um exemplo simples no qual aplicou-se a teoria desenvolvida nos capítulos deste texto.

A distribuição da dissertação é a seguinte: No capítulo 1 realizou-se uma pequena introdução à cosmologia padrão moderna, partindo desde o modelo FLRW e fazendo uso da teoria da relatividade para derivar as equações do modelo. Além disso, se fez um resumo sobre os principais sucessos do modelo e algumas características que não conseguem ser explicadas por este modelo e deram origem à necessidade da inflação.

No capítulo 2 foi introduzido o formalismo do modelo inflacionário e como este modelo resolve as características não resolvidas pelo Big Bang. O modelo de inflação caótica é estudado e também se faz menção à motivação dos modelos de inflação quintessencial, e também se introduz o potencial que se analisará nos capítulos seguintes.

No capítulo 3 se estuda de maneira simples os mecanismos de reaquecimento e preaquecimento e como eles geram partículas. No capítulo 4 se faz uma rápida introdução ao porquê e como são usadas as simulações de rede no estudo do preaquecimento, em especial se enfatiza o programa de distribuição gratuita LATTICEEASY [6], [7].

Finalmente no capítulo 5 usou-se a teoria fornecida nos capítulos 3 e 4, tomando como exemplo um potencial de inflação quintessencial. Para este exemplo se fez uma análise detalhada do processo do preaquecimento e se obteve a temperatura T_R para o processo. Esses resultados obtidos são discutidos no capítulo 5 e nas conclusões, onde também se faz menção a futuras direções para o trabalho realizado no capítulo 5.

Capítulo 1

Breve Introdução à Cosmologia Padrão e seus problemas

Pode-se dizer que a Cosmologia está numa fase grandes avanços. Nos anos anteriores o seu desenvolvimento foi lento devido à pouca qualidade e quantidade dos dados obtidos. Porém nos últimos anos tem-se tido um despertar da cosmologia devido a projetos como COBE (Cosmic Background Explorer), WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), e às novas explorações como PAMELA (Payload for Antimatter Matter Exploration and Light-nuclei Astrophysics), DES (Dark Energy Survey), a sonda Planck, SDSS (Sloan Digital Sky Survey) e muitas outras que prometem fornecer evidências para as atuais teorias. Na primeira seção desta dissertação farei uma pequena introdução aos fundamentos da Cosmologia moderna, enfatizando os pontos que julgo ser importantes na compreensão do tema central.

1.1 A equação de Friedman

Há dois pilares da cosmologia moderna. O primeiro é a Teoria da Relatividade Geral, que permitiu relacionar o tempo, o espaço e a matéria, e facilitou o entendimento do Universo como um todo. O segundo é formado pelos novos e potentes aparelhos que tem permitido observações e medições além do esperado.

Uma dessas medições, decisiva para o atual estado da cosmologia, foi feita por Hubble em 1929 após uma década de observações [8]. Ele encontrou que a velocidade na qual várias galáxias se afastavam da Terra era proporcional à distância destas galáxias ao nosso planeta. A interpretação que hoje se tem da observação feita por Hubble é que o Universo esta se expandindo.

Uma das principais hipótese do modelo padrão é que a evolução do Universo descreve-se pela homogeneidade e isotropia do espaço-tempo de **FLRW**. Os dados das medições de grande escala estão em acordo com esta hipótese. O conjunto de equações que descrevem o modelo padrão são as equações de Friedmann, as quais se derivam das equações de Einstein num espaço-tempo de **FLRW** com um tensor energia-momento de um fluido perfeito $T_{\mu\nu}$.

Pode-se considerar a simplicidade da métrica **FLRW** da dependência do fator de escala como a única variável dinâmica. Com o objetivo de obter as equações de Friedmann, vamos considerar um espaço-tempo em quatro dimensões (três espaciais e uma temporal). O elemento de linha neste modelo tem a forma,

$$ds^2 = a(t)^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala de expansão ou contração do Universo, r, θ, ϕ são coordenadas comóveis, denominadas assim já que a distância física entre objetos em coordenadas fixas mudar á proporcionalmente ao fator de escala, isto é :

$$\text{Distancia Física} = a(t) \cdot \text{Distância Comóvel} \quad (1.2)$$

e $k = 1, 0, -1$ é o sinal da curvatura espacial. $k = 1$ para um espaço fechado, $k = 0$ o espaço euclideano aberto plano, e $k = -1$ para um espaço hiperbólico aberto. O t é o tempo próprio medido por um observador comóvel.

Uma característica do modelo padrão é expressar a dinâmica do fator de escala global mediante o conteúdo de matéria do universo através das equações de Einstein e representar o conteúdo de densidade de energia pelo tensor energia - momento $T_{\mu\nu}$ [9];

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

onde $u_\mu = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2}(1, \vec{v})$, é a quadri velocidade.

Um fluido perfeito é tal que um observador que siga uma linha de fluxo sempre vai observar o fluido como isotrópico. Para um observador comóvel com $\vec{v} = 0$ as componentes deste fluido são;

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho \\ T_{ij} &= p\delta_{ij} \\ T_{i0} &= 0 \\ T_{0i} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde ρ é a densidade de energia do universo, e p é a pressão. Considerando o elemento de linha para **FLRW** e a forma do tensor $T_{\mu\nu}$ anteriormente introduzidos junto com a equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

obtemos as conhecidas equações de Friedmann,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.7)$$

Λ é a constante cosmológica que representa a densidade de energia do vácuo e H é o parâmetro de Hubble, que mede a taxa de expansão do Universo. Daqui em diante vai-se usar $\Lambda = 0$.

Destas duas equações é possível derivar importantes relações, como a equação de conservação da massa e a energia do Universo. Ela se obtém usando a equação da conservação da energia do tensor $T_{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu};\mu = 0, \quad (1.8)$$

onde ";" denota a derivada covariante. Obtém-se então a equação de continuidade, que é de fundamental importância:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(p + \rho) = 0 \quad (1.9)$$

Uma maneira mais simples de expressar esta relação é considerando a equação de estado para um fluido perfeito,

$$p = \omega\rho \quad (1.10)$$

Os valores característicos para ω são: $\omega_\Lambda = -1$ que em (1.11) descreve a densidade de energia para o vácuo, $\omega_r = 1/3$ e $\omega_m = 0$ que descrevem a densidade de energia para universos preenchidos por radiação ou matéria respectivamente. Assim é possível integrar (1.9) para obter,

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}. \quad (1.11)$$

As recentes observações dão conta de um universo preenchido na maior parte por matéria não relativística (DM), época que tem uma pressão nula como característica, $p = 0$. Substituindo na equação (1.9), se obtém $\rho \propto a^{-3}$ para a densidade de energia nesta época. No entanto o universo primordial estava dominado pela radiação (DR), cuja relação entre pressão e a densidade de energia é dada por $\rho = 3p$. Substituindo na equação de energia momento (1.9) se obtém $\rho \propto a^{-4}$, para este período. Para a densidade de energia do vácuo, $\rho \propto \text{constante}$. Quando o Universo é dominado pela radiação também é possível derivar uma relação simples para a sua temperatura. Usando-se a mecânica estatística obtém-se que $\rho \propto T^4$ e, conseqüentemente, $T \propto a^{-1}$. Ou seja, que para um Universo em expansão a temperatura e a densidade de energia são maiores em tempos iniciais.

Fazendo $k = 0$ em (1.6) e usando (1.11) se obtém a dinâmica do fator de escala, para $\omega \neq -1$,

$$a \sim t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (1.12)$$

Se $\omega = -1$ e $\rho > 0$,

$$a \sim e^{H_0 t} \quad (1.13)$$

onde $H(t_0) \equiv H_0$. A relação dada pela expressão anterior entre o fator de escala e o tempo é conhecido como espaço-tempo de De-Sitter. É fácil perceber que quando o tempo tende a zero o fator de escala também, portanto este modelo prediz uma singularidade espacial em $t = 0$ que é conhecida como o *Big Bang*.

Já que as medições observacionais são de fundamental importância na viabilidade de um modelo, é importante conhecer os principais parâmetros observáveis do modelo padrão: o parâmetro de Hubble H_0 , a idade do universo t_0 , a relação atual entre a quantidade de matéria fria relativa à densidade crítica no modelo Einstein- De Sitter plano $(k, \lambda) = 0$,

o parâmetro de desaceleração $q_0 = -(\ddot{a}/\dot{a}^2)_0$ e a contribuição da constante cosmológica para a presente taxa de expansão.

Esses parâmetros se relacionam mediante a equação de Friedmann segundo

$$\Omega_0 + \Lambda_0 - \frac{ka_0^2}{H_0^2} = 1 \quad (1.14)$$

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Lambda_0 \quad (1.15)$$

Ω_0^* é a densidade crítica atual do universo, a_0 é o fator de escala atual. Usualmente $H(t)$ se expressa em termos do parâmetro h , conhecido como parâmetro adimensional de Hubble o qual se obtém de dividir o valor de $H(t)$ pela constante $100Km/s/Mpc$. Por exemplo o presente valor para h é $h_0 = 0.72$ e H_0 se expressa: $H_0 = 100hKm/s/Mpc = 72Km/s/Mpc$.

O raio de curvatura R_{curv} se relaciona com H e Ω mediante:

$$R_{curv} = \frac{H^{-1}k}{|\Omega - 1|^{\frac{1}{2}}} \quad (1.16)$$

Vamos então estudar as principais características testadas observacionalmente do modelo padrão.

1.2 Sucessos do modelo padrão

1.2.1 O Universo Isotrópico e Homogêneo

O *Princípio Cosmológico* leva diretamente à lei de Hubble para um universo em expansão. Já que o fator de escala $a(t)$ deve ser o mesmo para todos os lugares do universo é simples obter a relação encontrada pelo Hubble conhecida como *Lei de Hubble*:

$$v(t) = H(t)l(t) \quad (1.17)$$

A figura 1.1, representa o comportamento encontrado por Hubble nas suas observações. As galáxias afastam-se umas das outras e a velocidade de recessão é maior quanto maior a distância entre elas. Um outro jeito de escrever a Lei de Hubble é usando o redshift z ,

$$z(t) = H_0 l(t) \quad (1.18)$$

onde a relação entre o redshift e o fator de escala é dado por:

$$1 + z(t_{emi}) = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emi}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{emi})} \quad (1.19)$$

t_{emi} o tempo em que foi emitida o sinal e t_{obs} o tempo em que o sinal é observado e λ é o comprimento de onda da radiação.

Pelo redshift é possível medir a distância até uma galáxia mediante a Lei de Hubble, por exemplo: $d(t) = z(t)H^{-1} \approx 3000zh^{-1}Mpc$, numa época determinada.

*O valor atual é $\Omega_0 = 3H^2 / 8\pi G = 1.88h^2 gcm^{-3}$.

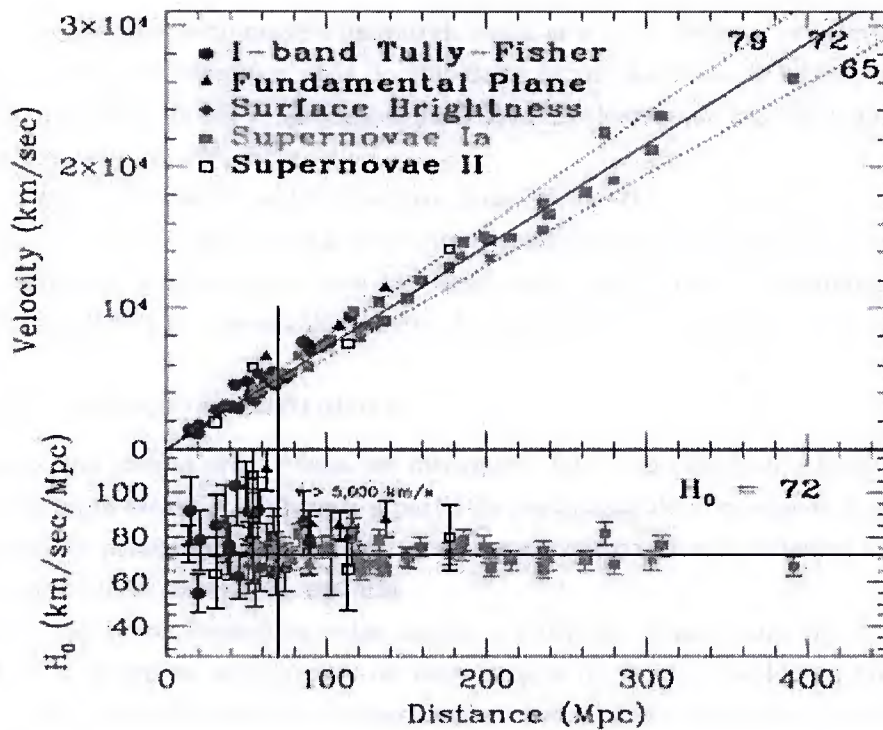


Figura 1.1: Diagrama de Hubble: Galáxias com redshift pequeno são usadas para estabelecer a expansão do Universo e o parâmetro de Hubble; a consistência dos cinco diferentes indicadores de distâncias é mostrado. A parte inferior do gráfico mostra o valor do parâmetro de Hubble de cada um dos objetos usados para a medição e seu valor convergente à 72 Km/s/Mpc . Figura tomada de [10].

As distâncias astronômicas costumam-se medir em termos de z . Por exemplo, até agora os objetos mais luminosos vistos, são os quasares com $z \sim 8.2$ [†], e se estima que os fótons observados na radiação cósmica de fundo foram emitidos em um $z \sim 1100$.

Os dados observacionais coletados por alguns dos projetos anteriormente mencionados geram mapas do universo feitos usando a Lei de Hubble, que representa um universo em expansão baseado no modelo padrão, o qual permite testar o universo visível a poucos bilhões de anos depois do Big Bang.

1.2.2 Nucleossíntese Primordial

Entre outros sucessos do modelo padrão encontra-se a nucleossíntese primordial. O modelo prediz que poucos segundos após do Big Bang foram possíveis as interações em temperaturas da ordem de MeV, levando às interações nucleares que dariam lugar à síntese de elementos como D , H^3 , H^4 e Li^7 .

Por meio do modelo padrão das partículas elementais calculou-se a abundância dos elementos formados nesta época tomando as condições iniciais dadas pelo modelo padrão da cosmologia. Encontrou-se uma excelente concordância entre a abundância atual dos elementos predita por esses cálculos e os dados obtidos das medições [11].

1.2.3 Formação de Estrutura

A cosmologia padrão proporciona um mecanismo físico para explicar a formação de estruturas em larga escala no Universo, a partir da postulação de pequenas in-homogeneidades de densidade presentes na matéria no momento em que o universo começou a ser dominado pela densidade de energia da matéria.

Graças a os dados fornecidos pelas sondas *COBE(91)*, *Boomerang(98)* e *WMAP(01)*, as quais mediram as anisotropias da temperatura do fundo cósmico de microondas, no desacoplamento entre matéria e radiação nos sabemos que no momento em que o universo começou ser dominado pela matéria existiam pequenos desvios da homogeneidade do universo do ordem de 10^{-5} .

Essas pequenas perturbações de densidade presentes na matéria foram amplificadas através da instabilidade gravitacional a qual eventualmente com o tempo deram origem a objetos ligados gravitacionalmente: galáxias, aglomerados de galáxias e super aglomerados de galáxias.

Na cosmologia padrão o crescimento das perturbações de densidade pequenas presentes na matéria, com comprimento de onda menor do que o horizonte de Hubble, é governada por:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\delta = 0 \quad (1.20)$$

[†]<http://www.eso.org/public/outreach/press-rel/pr-2009/pr-17-09.html>

onde δ é o contraste de densidade das in-homogeneidades presentes na matéria. Quando o universo esteve dominado pela densidade de energia da radiação a solução para (1.20) é:

$$\delta(a) \propto \ln a \quad (1.21)$$

No momento em que a densidade de energia da matéria começou a controlar a expansão do universo em $z \approx 10^4$, a solução é:

$$\delta(a) \propto a \quad (1.22)$$

Assim que o universo é dominado pela densidade de energia escura em $z \approx 0.5$ a solução é:

$$\delta \propto \text{constante} \quad (1.23)$$

Como podemos observar o crescimento efetivo das perturbações de densidade presentes na matéria começa assim que o universo esta dominado pela densidade de energia da matéria.

Esta análise é valida para algumas contrastes de densidade. Quando a amplitude das perturbações chega ser da ordem de um afastam-se da expansão de fundo e uma descrição não linear do crescimento das perturbações de densidade é necessário.

Tanto o formalismo linear conjuntamente com o formalismo não linear produzem estruturas com os parâmetros físicos observados e prevê a abundância das estruturas em larga escala com um grau de precisão muito bom.

1.3 Problemas do modelo padrão

Como se mencionou anteriormente, as principais previsões feitas pelo modelo padrão têm sucesso ao serem comparadas com as observações. Porém existem certas características que não conseguem ter uma explicação dentro do modelo. Por exemplo, não se consegue explicar por que o universo é tão uniforme em escalas muito grandes, e não-uniforme em pequenas. As maiores críticas são recebidas pelo *Princípio Cosmológico*, base principal do modelo padrão, e pelo ajuste fino que deve ter a constante de Hubble para poder determinar uma idade do universo que tenha concordância com as estimativas aceitas atualmente.

1.3.1 Problema da Platitude

O problema da platitude pode ser resumido com a insatisfação de ter que se considerar as condições únicas e especiais que segundo o modelo padrão permitiriam a evolução do universo como é conhecido hoje. Em geral, segundo a teoria da relatividade, se considera que existem três possíveis geometrias para o universo, segundo sua curvatura. Usando a equação (1.16), obtemos uma relação direta entre Ω e o valor da curvatura R . Na figura 1.2, encontram-se os diferentes tipos de curvatura e o valor de Ω correspondente.

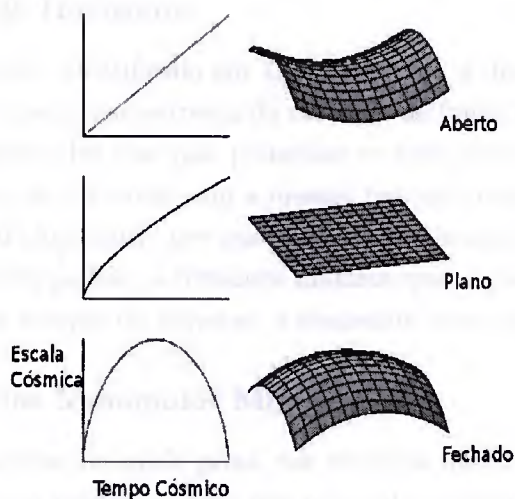


Figura 1.2: Diferentes geometrias do universo segundo o valor de Ω . Figura tomada de <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/cgro/epo/brochures/newwin/nw3.html>

Vamos analisar a equação (1.16) para entender qual é o problema da platitude. Essa equação pode-se escrever como:

$$[\Omega^{-1}(t) - 1]\rho(t)a^2(t) = \frac{3k}{8\pi G} \quad (1.24)$$

Como o lado direito da equação é constante, as quantidades à esquerda também devem ser constantes. Como que o universo se expande o fator de escala a fica maior e a densidade ρ menor, já que a matéria é dispersa em todo o universo. Segundo o modelo padrão, o universo sempre esteve preenchido pela radiação e a matéria, para estes dois componentes ρ diminui mais rápido do que a^2 , portanto o fator ρa^2 decresce e conseqüentemente a parte $(\Omega^{-1} - 1)$ deve aumentar com a expansão do universo. Calculando o valor de a e ρ para a época de Planck, temos:

$$|\Omega^{-1}(10^{-43}) - 1| \approx 10^{-60}. \quad (1.25)$$

Portanto para manter o valor constante de (1.25) constante o Ω requerido é: $\Omega \approx 10^{60}$. As atuais observações dão conta de um universo plano [‡], $k = 0$, ou seja o valor da densidade atual do universo é muito próxima da crítica. Segundo (1.24), se no começo o valor de Ω foi 1, então este valor iria manter-se constante até agora e concordaria perfeitamente com as medições atuais. Porém se o valor de $\Omega \neq 1$, pela expansão do universo iria se afastar rapidamente do seu valor inicial e conseqüentemente é de se esperar que o seu valor atual fosse muito diferente de 1, tendo como conseqüência um universo muito diferente do que conhecemos.

Resumindo, Ω tem que ser igual a 1 ou muito diferente de 1, e é esta a inconformidade que gerou o problema da platitude, já que somente um ajuste fino permitiria a evolução do universo que hoje observamos.

[‡]<http://map.gsfc.nasa.gov/>

1.3.2 Problema do Horizonte

O problema do horizonte, identificado em 1970, veio com a discussão dos dados obtidos da CMB. Quando se examina na isotropia da radiação de fundo vinda de diferentes partes do céu, regiões tão separadas que não poderiam se comunicar nem mesmo com sinais viajando na velocidade da luz estão com a mesma temperatura. Surge então a pergunta que leva ao problema do horizonte: por que regiões causalmente desconexas têm a mesma temperatura? No modelo padrão, a distância máxima que as partículas podem viajar até um observador desde a criação do universo, é conhecido como o horizonte de partículas.

1.3.3 Problema dos Monopolos Magnéticos

O problema dos monopolos ou, mais geral, dos vestígios não desejados, faz referência às partículas que segundo o modelo padrão das partículas elementares teriam sido criadas no universo primordial. Para descrever a matéria da qual o universo está composto a cosmologia usa o modelo padrão das partículas, tendo sucesso nas previsões que este modelo fornece na descrição da nucleossíntese e na assimetria matéria-antimatéria. Mesmo assim em teorias de partículas se manifestam certas simetrias em diferentes escalas de energia, o que representa problemas na hora de achar as conseqüências dessas simetrias.

Segundo a cosmologia padrão o universo primordial passou através de todas as escalas de quebras de simetria de altas energias. Portanto, defeitos topológicos como cordas cósmicas e monopólios magnéticos tiveram que ser gerados, porém ainda não se tem evidência de nenhum deles.

Se assumirmos que o modelo padrão de partículas provém de uma teoria de grande unificação, no universo primordial teriam sido criados monopólios magnéticos de 't Hooft-Polyakov, os quais teriam uma massa 10^{16} vezes maior do que a massa de um próton. Portanto haveria uma contribuição considerável à densidade do Universo, o que eventualmente iria levar ao colapso do universo num tempo menor do que a idade observada.

1.3.4 Problema da Constante Cosmológica

No terceiro termo da equação (1.5), Λ é conhecido como a constante cosmológica, introduzida por Einstein com o objetivo de que a evolução das suas equações descrevessem um universo estacionário. Porém após a descoberta da expansão do universo, ele tirou o termo. No entanto, quase dez anos atrás encontrou-se que o universo está se expandindo aceleradamente e incluir novamente Λ é uma das explicações mais plausíveis para essa aceleração.

O problema da constante cosmológica hoje realmente são dois. O primeiro é a diferença entre o valor da energia do vácuo calculado e o encontrado observacionalmente, os quais têm uma diferença de 120 ordens de magnitude. O segundo, conhecido como coincidência cósmica, procura entender por que o universo está justamente agora passando por uma época na qual a densidade de energia do vácuo tem a mesma ordem de grandeza do que a densidade de energia da matéria.

Capítulo 2

Cosmologia Inflacionária

2.1 Idéia da Inflação

Na seção anterior trabalhou-se no modelo padrão e percebeu-se que é um modelo que tem grande apoio experimental ao explicar a maior parte dos fenômenos da história do universo, pelo menos desde 0.01 s até agora. Porém ficam ainda no ar problemas como o problema do horizonte, o problema da planitude a grande escala e dos vestígios não desejados, sem serem resolvidos. É essa a razão porque nasceu a idéia da inflação.

Fazendo um breve resumo da história da inflação [12], pode-se considerar o modelo feito por Alan Guth em 1981 [13], conhecido como velha inflação, como o primeiro com uma motivação física clara para ser aplicado na cosmologia. Neste modelo a inflação é uma expansão exponencial do universo quando este se encontra em um estado frio de falso vácuo. Falso vácuo denota um “estado” sem partículas nem campos, mas com uma quantidade de densidade de energia muito grande. Antes da expansão uma região do universo de tamanho H^{-1} está causalmente conectada. Após a inflação essa região cresce a um tamanho determinado e posteriormente o falso vácuo decai em partículas do campo, o que leva ao aquecimento do universo para começar assim a época dominada pela radiação e igualar-se com as condições iniciais do modelo padrão.

Na velha inflação o período da expansão exponencial ocorre em momento no que o campo esteve “preso” em $\phi = 0$, em um falso vácuo. Portanto, para passar da fase do falso vácuo até o verdadeiro vácuo, deve-se ter um processo de tunelamento. Esse acontece pela formação e crescimento de bolhas de verdadeiro vácuo dentro das diferentes regiões do universo. O processo da formação de bolhas é aleatório e lento em comparação com a taxa de expansão do universo que se precisa para ter inflação, as bolhas expandem-se na velocidade da luz e sua distribuição é aleatória. As paredes das bolhas armazenam o calor latente necessitado para reaquecer as regiões do universo e, ao se expandir, geram-se entre elas colisões, e a energia do verdadeiro vácuo é liberada, para assim esquentar o universo e posteriormente termalizá-lo.

Apesar deste modelo de inflação solucionar alguns dos problemas do modelo padrão, encontrou-se uma falha no modelo: a expansão do universo faz que a temperatura caia,

portanto o sucesso da transição de fase depende da taxa de expansão do universo.

Vamos considerar $P(t)$ a fração do espaço que se mantém no falso vácuo no tempo t [14]:

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t dt_1 \lambda(t_1) a(t_1)^3 V(t, t_1)\right) \quad (2.1)$$

A integral no expoente denota o valor esperado do número de bolhas que se juntam em um ponto, $\lambda(t_1)$ é a taxa de formação das bolhas no tempo t_1 . $V(t, t_1) = \frac{4\pi}{3} \int_{t_1}^t \left(\frac{dt_2}{a(t_2)}\right)^3$, é o volume próprio no tempo t , de uma bolha formada no tempo t_1 .

Usualmente, quando $t \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow 0$, $P(t) \rightarrow 0$, portanto a região do espaço que passou à seguinte transição de fase, vai estar composta por falso vácuo [15]. Como o universo continua se expandindo, eventualmente as bolhas vão se afastar umas das outras, até o ponto que a probabilidade de elas colidirem é quase nula.

É por isso que a velha inflação não funciona: a taxa de crescimento das bolhas que se precisa para ter inflação não iria permitir ao universo se reaquecer. Portanto a transição de fase nunca iria se completar e a expansão iria durar para sempre.

Em 1981-1982 Andrei Linde achou uma solução ao problema, propondo o modelo conhecido como nova inflação [12], que resolve os problemas da velha inflação. O processo pode começar num estado de falso vácuo ou na instabilidade do topo de um potencial, o responsável de todo o processo é um campo escalar φ , o *inflaton*. Esse campo tem de cumprir algumas condições para chegar até o mínimo do potencial e no caminho gerar inflação. As condições são denominadas condições de "slow roll", e determinam quanto de inflação é produzido. O movimento do campo para o mínimo é muito importante, já que a densidade das perturbações produzidas neste percorrido são proporcionais a $(\dot{\phi})^{-1}$. Esta proporcionalidade explicaria a homogeneidade do universo e corrigiria o problema da velha inflação, modelo para o qual as densidades de perturbações são geradas em $\dot{\phi} = 0$.

Porém as condições de slow roll têm uma condição um tanto artificial já que elas derivam-se ao assumir que o valor do potencial efetivo do campo, deve ser muito plano nas proximidades de $\phi = 0$, levando que o inflaton na maior parte dos cenários vindos deste modelo, tenha uma constante de acoplamento muito pequena em relação as outras constantes de acoplamento dos outros campos. Conseqüentemente, o inflaton não ia conseguir entrar em equilíbrio térmico com o resto dos campos, e a teoria de transições de fase, cosmológicas que é a base do modelo inflacionário, não funciona se não se tem equilíbrio térmico no final da expansão.

Segundo as condições necessárias para inflação acontecer, o modelo inflacionário tinha as mesmas exigências de equilíbrio térmico que o modelo padrão e embora solucionam-se os problemas abertos do Big Bang, seu inicio resulta muito artificioso. Outro das desvantagens do modelo padrão e a cosmologia inflacionária é que não conseguem explicar as sementes que derem origem as perturbações iniciais e conseqüentemente à densidade de perturbações.

Em 1983, Linde propôs o modelo conhecido como inflação caótica, no qual não é preciso inflação começar desde o equilíbrio térmico, e os potenciais a testar podem ser tão simples

quanto $V(\varphi) = \lambda\phi^2$. Este modelo converteu-se num dos modelos inflacionários com mais aceitação [16].

2.2 Velha Inflação

Inflação faz referência ao período do universo no qual:

$$\ddot{a} > 0 \quad (2.2)$$

expressando esta desigualdade em termos do parâmetro de Hubble H , para entender o que implica este período em termos das variáveis já introduzidas:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.3)$$

$$\dot{a} = \frac{1}{H^{-1}/a} \quad (2.4)$$

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H^{-1}/a} \right) \quad (2.5)$$

então tendo em conta que \dot{a} em (2.4) é o recíproco reescalado para cada tempo do comprimento de Hubble comóvel, escrevendo este comprimento em termos da variável \mathbf{H} , definida: $\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{H^{-1}/a}$ e juntamente com (2.2), obtemos a expressão:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}^{-1} < 0 \quad (2.6)$$

ou seja para o período em que inflação acontece o comprimento de Hubble comóvel diminui. Este fato é suficiente para resolver quase todos os problemas da cosmologia padrão. Como mencionou-se anteriormente de uma maneira breve, no marco da velha inflação para o universo ter se expandido aceleradamente, teve que estar numa fase de super-esfriamento, preenchido por falso vácuo e depois passar por uma transição de fase a verdadeiro vácuo. Essa transição de fase eventualmente levaria a uma expansão acelerada. Após este processo a densidade de energia do vácuo vai dominar o universo. A equação de Friedmann ficará [2]:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} \rho_V \quad (2.7)$$

onde ρ_V é a densidade de energia do vácuo de valor constante na inflação. De (2.7) a constante de Hubble durante a era inflacionária, tem um valor constante. Portanto o fator de escala cresce exponencialmente:

$$a(t) \propto \exp(Ht) \quad (2.8)$$

Isso implicaria que, no momento em que ocorreu a transição para o verdadeiro vácuo, o universo aumentou seu fator de escala em muitas ordens de magnitude. Vamos agora analisar o quanto o universo tem que crescer para conseguir solucionar os problemas do

modelo padrão e gerar as condições iniciais que dão origem á nucleossíntese. Para isto é preciso analisar cada um dos problemas do modelo padrão, e como inflação iria resolvê-los.

Consideremos o problema da platitude. Na equação (1.24), considerou-se o termo ρa^2 , o qual sempre decresce para os casos de radiação e matéria. Agora considera-se que o fator de escala evolui como (2.8) se ele cresceu e^{60} vezes, obtemos em (1.25) a relação desejada $(\Omega - 1) \approx 1$.

A maneira usual de denominar o número de vezes que o $a(t)$ cresce exponencialmente é *e-folds*, nso nosso exemplo portanto, o número de vezes que o $a(t)$ precisa crescer para solucionar o problema da platitude é *60e-folds*.

Embora durante o super-esfriamento a entropia não tenha mudado, durante o reaquecimento devido que o processo é não adiabático, há um aumento na entropia. Como o volume da região cresceu como $a(t)^3$ s em (2.8), a entropia terá aumentado por um fator de $\exp(3H\Delta t)$, Δt é o período de duração da expansão exponencial. Do nosso exemplo, se o universo cresceu por um fator de *60e-folds*, a entropia teria aumentado num fator de 2.4×10^{83} . Este aumento na entropia vai solucionar os problemas de vestígios não desejados como os monopolos e também o problema da platitude.

Contudo, como já se mencionou anteriormente, a velha inflação levaria o universo para uma inflação eterna e portanto era preciso achar uma solução ao problema.

2.3 Nova Inflação

Em 1982 [12], Linde formulou a *Nova Inflação*. Este modelo também é conhecido como inflação slow roll, já que a maneira de evitar o problema que se apresenta na velha inflação é a lenta evolução do inflaton através de um potencial escalar plano, até alcançar o seu mínimo.

Em nova inflação o período inflacionário começa com o inflaton φ , numa região onde o potencial $V(\varphi)$ é muito plano, o φ , vai percorrer lentamente a parte plana do potencial. Se o potencial é suficientemente plano na região considerada, este mecanismo consegue resolver os problemas do modelo padrão. Após isto, o inflaton chega até a cima do potencial e desce até seu mínimo absoluto e começa oscilar em torno dele. A criação de novas partículas quânticas amortizam as oscilações, e a energia do vácuo é transferida as partículas criadas. A termalização destas partículas gera a subsequente era do universo dominada pela radiação, fazendo o mecanismo eficiente. A figura 2.1 representa um esquema completo do mecanismo.

Vamos começar a estudar o processo no qual o φ rola lentamente pela parte plana do potencial. A densidade lagrangiana para um campo escalar com um potencial efetivo $V(\varphi)$, é:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \quad (2.9)$$

Para obter a equação de movimento do φ , fazemos uso de:

$$D_\mu (\partial^\mu \varphi) = -V'(\varphi) \quad (2.10)$$

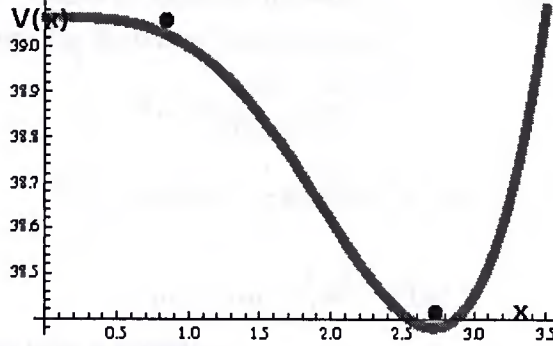


Figura 2.1: Representação do inflaton em um potencial em inflação slow roll

onde D_μ é a derivada covariante, definida como

$$D_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda,\rho}^\mu V^\rho \quad (2.11)$$

Assumindo que o campo φ é homogêneo, cumpre-se então a relação:

$$\nabla\varphi = 0 \quad (2.12)$$

De (2.10) obtemos:

$$\ddot{\varphi} + \Gamma_{i0}^i \dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (2.13)$$

Os termos diferentes de zero dos símbolos de Christoffel para a métrica FLRW são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \\ \Gamma_{j0}^i &= \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} = \Gamma_{0j}^i \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

A equação fica portanto:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (2.15)$$

Se o inflaton está se movimentando pela parte plana do potencial, o termo $3H\dot{\varphi}$, vai ser o mais importante já que o movimento é quase totalmente de fricção. Desprezando então o termo $\ddot{\varphi}$, a equação de movimento fica:

$$\dot{\varphi} = -\frac{V'(\varphi)}{3H} \quad (2.16)$$

De (2.15) vamos obter a condição necessária para desprezar o $\ddot{\varphi}$:

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \right| \ll 1 \quad (2.17)$$

Derivando com respeito ao tempo (2.16), para obter $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{3H} V''(\varphi) \dot{\varphi} + \frac{1}{3} H^{-2} \dot{H} V(\varphi) \quad (2.18)$$

No último termo aparece a derivada com respeito a H . Para usar (2.7) precisamos conhecer quem é ρ_V . Como se mostrou na seção (1.1), é possível obter a densidade de energia da componente T_{00} do tensor energia-momento,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} L \quad (2.19)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \varphi \partial^\lambda \varphi + g_{\mu\nu} V(\varphi) \quad (2.20)$$

Portanto,

$$\rho_V = T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (2.21)$$

Se obtém também para a pressão,

$$p = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (2.22)$$

Assumindo que a densidade de energia é dominada pela energia potencial,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} m_p^{-2} V(\varphi) \quad (2.23)$$

Então obtemos para \dot{H}

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi m_p^{-2}}{3} V'(\varphi) \dot{\varphi} \quad (2.24)$$

Portanto:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} = -\frac{1}{9H^2} V'(\varphi) + \frac{8\pi m_p^{-2}}{54} H^{-4} (V'(\varphi))^2 \quad (2.25)$$

Para satisfazer (2.17), precisa-se cumprir as condições:

$$\frac{|V''(\varphi)|}{9H^2} \ll 1 \quad (2.26)$$

$$\frac{8\pi m_p^2}{54} H^{-4} (V'(\varphi))^2 \ll 1 \quad (2.27)$$

Substituindo H^2 por $V(\varphi)$, de (2.23):

$$m_p^2 \frac{|V'(\varphi)|}{V(\varphi)} \ll 24\pi \quad (2.28)$$

$$m_p^2 \left(\frac{V''(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2 \ll 48\pi \quad (2.29)$$

Estas são as conhecidas condições de slow roll, que precisa cumprir o inflaton quando percorre a região plana do $V(\varphi)$.

Se as condições de slow roll são satisfeitas entre os tempos t_i e t_f , e o campo escalar evolui neste tempo desde φ_i até φ_f , a quantidade de inflação medida em termos de número de *e-folds*, é:

$$N_e \equiv \ln \frac{a_f}{a_i} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\dot{a}}{a} dt = \int_{t_i}^{t_f} H dt \quad (2.30)$$

Substituindo $\dot{\varphi}$ por $V'(\varphi)$, de (2.16),

$$N_e = \ln \frac{a_f}{a_i} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} H \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = - \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} 3H^2 \frac{d\varphi}{V'(\varphi)} \quad (2.31)$$

Finalmente,

$$N_e = -8\pi m_p^{-2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V(\varphi)}{V'(\varphi)} d\varphi \quad (2.32)$$

Já que o potencial é plano, pode-se fazer a aproximação:

$$V'(\varphi) \simeq V'(\varphi_i) + V''(\varphi_i)(\varphi - \varphi_i) \quad (2.33)$$

$$V'(\varphi) \simeq 0 \quad (2.34)$$

$$V'(\varphi) \simeq V''(\varphi_i)(\varphi - \varphi_i) \quad (2.35)$$

Substituindo este $V'(\varphi)$ em (2.16),

$$\frac{d\varphi}{dt} \simeq - \frac{V''(\varphi_i)(\varphi - \varphi_i)}{3H} \quad (2.36)$$

e integrando,

$$(\varphi - \varphi_i) \simeq \exp\left(-\frac{V''(\varphi_i)}{3H}(t - t_i)\right) \quad (2.37)$$

Então o período do tempo τ no qual o movimento do campo é lento, pode-se expressar:

$$\tau \sim \frac{3H}{|V''(\varphi_i)|} \quad (2.38)$$

Usando τ como o período de tempo no número de e-folds N_e , obtemos:

$$N_e = \ln \frac{a_f}{a_i} \sim H\tau \sim \frac{3H^2}{|V''(\varphi_i)|} \quad (2.39)$$

Substituindo H^2 como em (2.23) para obter o número de e-folds em termos do potencial:

$$\ln \frac{a_f}{a_i} \sim \frac{8\pi V(\varphi)}{m_p^2 |V''(\varphi_i)|} \quad (2.40)$$

O termo à direita é o inverso da condição de slow roll em (2.17). Portanto, se esta condição é satisfeita, o número de e-folds vai ser muito grande. Slow-roll termina quando o φ chega na região inclinada do potencial. Após o final do período de slow roll, o campo evolui mais rápido para o mínimo do potencial, e começa um mecanismo conhecido como reaquecimento para chegar até a desejada termalização.

2.3.1 Entropia em inflação

A grande produção de entropia durante o reaquecimento do universo é a encarregada de resolver três dos problemas do modelo padrão mencionados anteriormente. A entropia da região inicial que deu lugar ao universo que temos hoje se calcula era $S_i \simeq T_c^3 (H^{-1})^3 \simeq 10^{14}$, para os valores da temperatura crítica na escala da quebra de simetria de GUT, $T_c = 10^{14} GeV$ e considerando que o tamanho da região era $H^{-1} = 10^{-23} cm$. Este valor

para a entropia inicial, $\simeq 10^{14}$, é muito menor do que o atual valor da entropia no volume de Hubble. Portanto para o modelo inflacionário igualar a entropia inicial do universo e a atual tem que explicar a diferença entre esses valores e introduzir um mecanismo capaz de gerar a entropia necessária. Para isso a maneira em que o modelo propõe a geração da entropia é pelo reaquecimento do universo após o regime inflacionário.

Analisando rapidamente o processo de como se gerou a entropia segundo o modelo inflacionário, quando o universo se expande exponencialmente ele se super-esfria, a temperatura comporta-se como $T \propto \exp(-Ht)$ mas a entropia se mantém constante. No reaquecimento a temperatura tem que subir novamente até $10^{14} GeV$, e a entropia na região fica, $S_f \simeq \exp(3H\Delta t) T_R^3 (H^{-1})^3 \simeq 10^{144}$, com $\Delta t = 100H^{-1} = 10^{-32}$. Ou seja, o reaquecimento aumenta 10^{130} vezes a entropia inicial.

2.3.2 Solução do Problema da Platitude

Em (1.6) com a densidade de energia do universo constante, vamos considerar o termo $\frac{k}{a^2(t)}$. O fator de escala cresceu exponencialmente durante inflação, portanto esta fração deve decrescer numa quantidade muito grande [17]. Pode-se considerar então que atualmente o raio de curvatura é muito maior do que o valor de H_0 , o que eventualmente explica o valor de $\Omega_0 \approx 1$ em (1.24).

2.3.3 Solução do Problema do Horizonte

Inflação fez crescer o universo exponencialmente. Ou seja, regiões do universo muito distantes atualmente antes da inflação poderiam ter estado causalmente conectadas. Esta é a razão dada pelo modelo inflacionário para explicar a homogeneidade encontrada em grandes escalas do universo em diferentes direções.

2.3.4 Solução do Problema dos Monopolos Magnéticos

A maneira em que inflação resolve o problema dos vestígios não desejados é com o aumento da entropia. Suponhamos que partículas como monopolos forem gerados antes da inflação. A abundância destas partículas vai ser:

$$N_i = \frac{n}{s} \quad (2.41)$$

Após inflação a quantidade destas será:

$$N_f = e^{-3N_T} \left(\frac{n}{s} \right) = e^{-3N_T} N_i, \quad (2.42)$$

o que torna essas partículas quase indetectáveis.

2.4 Inflação Caótica

O sucesso do modelo de Inflação Caótica está baseado em que nas condições iniciais o campo não precisa se encontrar no mínimo do potencial numa fase de alta temperatura.

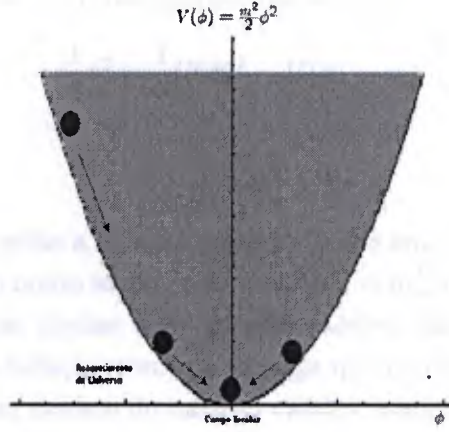


Figura 2.2: Figura: Inflação caótica para um potencial $V(\varphi) = \frac{1}{2}m\varphi^2$.

As características principais do modelo são quase independentes do potencial escolhido. Segundo ele, o universo está preenchido de regiões da ordem do comprimento de Planck, e os campos escalares em cada uma destas regiões podem ter desde uma energia baixa que não leve a inflação, ou ao contrário com densidades de energia muito grandes que provoquem uma expansão muito maior [12].

O modelo de inflação caótica é consideravelmente simples. Normalmente se escolhe um potencial do tipo polinomial,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2n}m^2m_{pl}^2 \left(\frac{\varphi}{m_{pl}} \right)^{2n} \quad (2.43)$$

n um inteiro positivo. O campo está dividido pela escala de Planck porque é nesta escala onde a inflação caótica começa, e ao final os valores do campo são da ordem da massa de Planck. Para $n = 1$ o potencial está representado na Figura 2.2. Nesta figura se diferenciam dois regimes: o primeiro na parte alta da parábola quando o inflaton percorre suavemente desde a parte de cima do potencial, o estado no qual se desenvolve a inflação, e o segundo, no qual o inflaton oscila rápido com um movimento comparado ao de um oscilador harmônico amortecido ao redor do mínimo do potencial. Neste exemplo em particular o mínimo encontra-se em $\phi = 0$.

Vamos imaginar um universo fechado com um comprimento $l = m_p^{-1}$. Este universo encontra-se em um estado quântico caótico o qual existe pelo tempo $t \lesssim t_p$, onde $t_p \equiv m_p^{-1}$ é o tempo de Planck, a densidade de energia neste tempo para um universo prestes a inflação caótica seria $\rho \sim m_p^4$. Para este valor de densidade pode-se considerar o sistema como um sistema clássico, a evolução de ϕ para $t > t_p$ nos dá o vínculo [12],

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + V(\phi) \sim m_p^4 \quad (2.44)$$

Agora se $V(\phi)$ é constante, ϕ vai ser invariante sob a transformação $\phi \rightarrow \phi + C$, ou seja que neste modelo todos os valores iniciais das componentes homogêneas do campo ϕ são igualmente prováveis mas se o potencial não for constante, se tem a condição para a amplitude do campo, $\phi \approx \phi_p$, que vem do vínculo $V(\phi_p) = m_p^4$.

Espera-se então que as condições iniciais típicas sejam:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \sim \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 \sim V(\phi) \sim m_p^4 \quad (2.45)$$

Caso se tenha

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 \lesssim V(\phi) \quad (2.46)$$

no domínio considerado, então a inflação começa. Tendo em conta no tempo de Planck, os termos $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ e $\frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2$, são muito menores do que $V(\phi) \sim m_p^4$, o que assegura a continuação da inflação, então pode-se divisar que, inflação caótica, não tem condições iniciais tão artificiais, quanto a nova inflação, somente se exige que no começo, $V(\phi) \sim m_p^4$.

Vamos desenvolver um modelo de inflação caótica usando no lagrangiano (2.9) o potencial:

$$V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \quad (2.47)$$

H para este potencial é:

$$H = \left(\frac{2}{3}\pi\lambda\right)^{1/2} \varphi^2 m_p^{-2} \quad (2.48)$$

Usando a condição de slow roll (2.16), $V'(\varphi) = \lambda\varphi^3$ e H como em (2.48):

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = -\left(\frac{\lambda}{6\pi}\right)^{1/2} m_p^2 \varphi \quad (2.49)$$

Portanto,

$$\varphi = \varphi(t_p) \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{6\pi}\right)^{1/2} m_p^2(t - t_p)\right] \quad (2.50)$$

Vamos a analisar o crescimento do fator de escala. De (2.30), (2.48) e (2.50):

$$N_e = \int_{t_p}^t H dt \quad (2.51)$$

$$= \int_{t_p}^t \frac{2}{3}(\pi\lambda)^{1/2} m_p^{-1} \varphi(t_p) \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{6\pi}\right)^{1/2} m_p^2(t - t_p)\right]^2 \quad (2.52)$$

$$= \frac{\pi}{m_p^2} \varphi(t_p)^2 \left(1 - \left[-\left(\frac{2\lambda}{3\pi}\right)^{1/2} m_p^2(t - t_p)\right]\right) \quad (2.53)$$

$$a(t) = a(t_p) \exp\left(\frac{\pi}{m_p^2} \varphi(t_p)^2 \left(1 - \left[-\left(\frac{2\lambda}{3\pi}\right)^{1/2} m_p^2(t - t_p)\right]\right)\right) \quad (2.54)$$

Para $t \sim t_p$

$$a(t) \simeq a(t_p) \exp\left[\left(\frac{2\pi\lambda}{3m_p^2}\right)^{1/2} \varphi(t_p)^2(t - t_p)\right] \quad (2.55)$$

Usando o período do percorrido na solução $\varphi(t)$ slow roll de (2.50),

$$\tau = \left(\frac{\lambda}{6\pi}\right)^{-1/2} m_p^{-2} \quad (2.56)$$

Substituindo em (2.53),

$$N_e = 2\pi \left(\frac{\varphi(t_p)^2}{m_p^2} \right)^2 \quad (2.57)$$

Se houver no mínimo *64-e-folds*, o campo no tempo de Planck tem que ter o valor

$$\varphi(t_p) \gtrsim 3.2m_p \quad (2.58)$$

Ou seja, que em alguma região do universo onde o campo tem este valor de $\varphi(t_p)$ pode-se gerar um universo como o nosso.

2.5 Modelos de Inflação Quintessencial

Nos últimos anos têm-se encontrado evidências fortes sobre a expansão acelerada do universo. Portanto, pode-se concluir que o universo tem experimentado no mínimo dois estados de expansão acelerada. O primeiro, no universo primordial durante inflação e o segundo nesta época. A atual expansão acelerada do universo também pode-se explicar mediante o uso de campos escalares, onde a energia potencial dos campos domina a densidade de energia do universo em certo tempo da sua evolução. De fato, como o inflaton φ é introduzido para o período inflacionário, a componente da energia escura pode-se explicar ao modificar a cosmologia padrão e incluir nas equações um campo escalar que evolui lentamente, conhecido como *Quintessência* [18].

Após analisar os dois estados de expansão acelerada, é natural considerar unificar em um modelo este comportamento devido a dois campos escalares diferentes, num só campo Φ . Esta consideração é a idéia principal dos modelos de inflação de quintessencial [19], [20], [21], [22].

Neste cenário se têm em geral duas propriedades: A primeira é que o potencial $V(\varphi)$ precisa dar conta pela falta de relação entre a evolução do campo no período inflacionário e no período quintessencial, especialmente pela diferencia entre as escalas de energia correspondentes a cada era.

A segunda propriedade trata sobre o processo do reaquecimento já que por estes modelos não ter um mínimo definido, este processo não pode acontecer da maneira anteriormente mencionada. A produção de partículas ocorre então produzido por produção gravitacional ou por preaquecimento ao incluir outros campos escalares no modelo. O modelo desenvolvido em [23] do qual vão analisar seu preaquecimento, usa a Lagrangiana:

$$L = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - V(\Phi) - M^4 [\cos(\text{Arg}(\Phi)) - 1] \quad (2.59)$$

Com o potencial,

$$V(\Phi) = \lambda \left(\Phi \Phi^* - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (2.60)$$

A Figura 2.3, representa o potencial. O Φ é um campo escalar complexo de um modelo com uma simetria global $U(1)$ tipo Peccei–Quinn, com uma quebra espontânea de simetria na

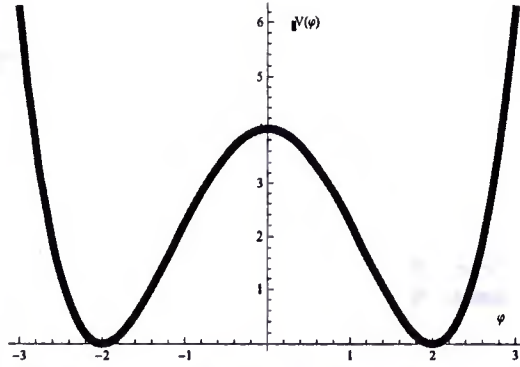


Figura 2.3: Potencial Inflação quintessencial

escala de energia $v = O(M_p)$. Esta quebra gera um potencial plano para a parte imaginária do campo, a qual se manifesta novamente em baixas energias,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta \exp(i\varphi/v) \quad (2.61)$$

A parte real do Φ é identificada com o inflaton e a imaginária com o campo de quintessência. Os dois mínimos em $\Phi = \pm v$, são os dois possíveis verdadeiros vácuos. Uma diferença essencial entre este modelo e outros de propostos de inflação quintessencial baseá-se em que, o valor homogêneo do campo nos outros modelos é $\langle \Phi \rangle = 0$. Porém, no modelo que estamos analisando tem um valor $\langle \Phi \rangle \gg v$, ou seja o inflaton começa seu percurso desde um ponto diferente do $\eta = 0$ em $t = 0$. Para $|\langle \Phi \rangle| \gg v$, o potencial comporta-se como um modelo $\lambda\phi^4$. O valor da constante de acoplamento tem de ser $\lambda \lesssim 10^{-15}$ para gerar a amplitude de densidade de perturbações correta [23]. Neste estado as equações clássicas de movimento são:

$$\ddot{\eta} + 3H\dot{\eta} - \frac{\dot{\varphi}^2}{v^2}\eta + V'(\eta) = 0 \quad (2.62)$$

$$\ddot{\varphi} + \left(3H + \frac{\dot{g}}{g}\right)\dot{\varphi} + \frac{1}{g(\eta)}V'(\varphi) = 0 \quad (2.63)$$

Com $g(\eta) = \eta^2/v^2$

$$V(\eta) = \frac{\lambda}{4}(\eta^2 - v^2)^2 \quad (2.64)$$

$$V(\varphi) = M^4 [\cos(\varphi/v) - 1] \quad (2.65)$$

O campo φ é congelado enquanto inflação acontece como se mostra na figura 2.4, quando este regime termina o η começa o percurso até o mínimo do potencial. O sistema tende ao processo de quebra espontânea de simetria para $|\Phi| \simeq f$, a partir deste ponto vamos estudar o processo de preaquecimento taquiônico no **Capítulo 5**.

A figura 2.4 foi obtida ao estudar a evolução do η e do ϕ em escalas de energia $v \approx m_{pl}$. Para resolver as equações de movimento numericamente usou-se *Mathematica*, fazendo as

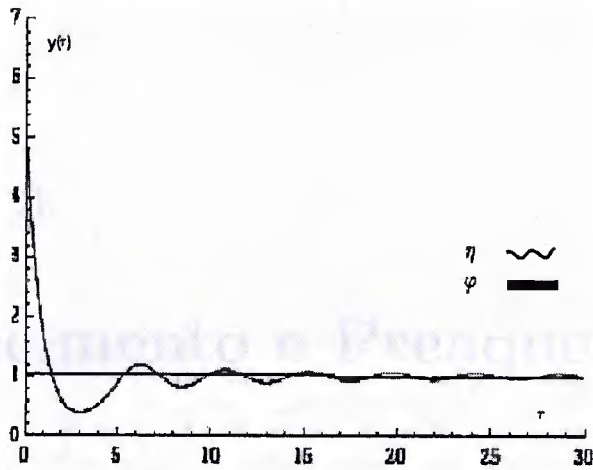


Figura 2.4: Evolução das componentes real η e imaginária φ do Φ .

seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\Phi(t)}{vm_{pl}} \\
 \tau &= \sqrt{\lambda}t
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$

também considerou-se a aproximação introduzida em [23]:

$$\dot{\varphi} \propto \frac{1}{a^3 g(\eta)}
 \tag{2.67}$$

Capítulo 3

Reaquecimento e Preaquecimento

3.1 Reaquecimento

Após o término da inflação o universo era um lugar frio e vazio *. Um panorama diferente do que temos hoje de um universo composto por múltiplas estruturas e processos que diferem totalmente da visão desolada que ficou após a inflação pelo que é preciso modelar um processo que faça o universo se reaquecer e emparelhar com as condições iniciais do modelo padrão, já brevemente estudado nesta dissertação no capítulo anterior.

Todos os modelos inflacionários após inflação têm como requisito uma fase final conhecida como reaquecimento na qual uma quantidade de produção de partículas tem que ocorrer para que o universo evolua até o presente estado. O processo de produção de partículas, depois da fase de expansão acelerada, é vital para que um modelo proposto para inflação seja viável, já que se espera que as partículas criadas pelo decaimento do inflaton terminem se termalizando e assim o universo fique com uma temperatura conhecida como *temperatura de reaquecimento* T_R a qual está diretamente relacionada com processos como criação de monopolos magnéticos e a bariogênese.

Pode-se considerar a teoria do reaquecimento após inflação como a aplicação mais importante da teoria quântica de campos em criação de partículas, já que todas as partículas existentes no seguinte estado do universo terão se criado no reaquecimento [24].

Nos primeiros cálculos sobre a produção de partículas foi usada a teoria de perturbações e a forma de expressar a diminuição das oscilações foi expressa nas equações de campo de onda como um termo dissipativo. Ao resolver estas equações encontra-se que a dependência temporal faz com que alguns modos apresentem ressonância paramétrica, o que faz a produção de partículas muito eficiente, contudo, as partículas não teriam tempo de se termalizar; para diferenciar está fase inicial dos processos seguintes como a termalização

*Com exceção de modelos de inflação morna, nos quais se têm produção de partículas durante a inflação [25], [26].

das partículas que vão decair, denominou-se o mecanismo como o preaquecimento.

O reaquecimento pode ser dividido em três estágios primeiramente, o preaquecimento, mecanismo que gera partículas de uma maneira muito eficiente devido à ressonância paramétrica ou quebra espontânea da simetria, dependendo do modelo inflacionário estudado. O segundo estágio é o decaimento das partículas geradas no preaquecimento e o terceiro é a termalização destas partículas.

No capítulo anterior assumiu-se que as oscilações do inflaton ao redor do mínimo são harmônicas simples. Portanto é possível usar o *Teorema do Virial* segundo o qual o valor médio da energia cinética sobre uma oscilação está relacionado com o valor médio da energia potencial sobre essa oscilação. O caso particular deste teorema para um potencial do tipo (2.43) de um campo escalar, expressa-se na forma [27] :

$$\langle \dot{\varphi}^2 \rangle_t = 2 \langle V(\varphi) \rangle_t \quad (3.1)$$

t sugere o valor médio temporal. Para conhecer a evolução temporal do fator de escala e do parâmetro de Hubble, multiplicamos (2.15) por $\dot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}^2 + V'(\varphi)\dot{\varphi} = 0 \quad (3.2)$$

Agora usando (3.1),

$$\langle 2\ddot{\varphi}\dot{\varphi} \rangle = \langle 2nV'(\varphi)\dot{\varphi} \rangle \quad (3.3)$$

Substituindo em (2.16), se obtém:

$$H\dot{\varphi} = \left(\frac{n+1}{3n} \right) \ddot{\varphi} \quad (3.4)$$

Usando a relação (2.7),

$$\dot{H} = \left(\frac{4\pi}{m_{pl}} \right) \dot{\varphi}^2 \quad (3.5)$$

$$H^2 = \frac{4\pi}{3m_{pl}} \left(\frac{n+1}{n} \right) \dot{\varphi}^2 \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) em (3.6):

$$\dot{H} = \left(\frac{3n}{n+1} \right) H^2 \quad (3.7)$$

Portanto,

$$H \propto \frac{n+1}{3n} \frac{1}{t} \quad (3.8)$$

Igualmente se obtém para a :

$$a \propto t^{(n+1)/3n} \quad (3.9)$$

Desde agora percebe-se que, para $n = 1$, o Universo evolui como um universo dominado por matéria. Este resultado vai ser analisado mais adiante. Usando uma solução para a equação (2.15) [24],

$$\varphi = \tilde{\Phi}(t) \sin mt \quad (3.10)$$

$$\tilde{\Phi}(t) = \frac{m_{pl}}{\sqrt{3\pi mt}} \quad (3.11)$$

vê-se que as oscilações do inflaton são amortecidas devido à expansão do universo. Isso faz com que em poucas oscilações o inflaton complete a relação $\varphi \lesssim m_{pl}$. Expressando o parâmetro de Hubble H em termos do potencial e fazendo uso da equação (2.23), se obtém, $H^2 \sim V(\varphi)/m_{pl}^2 \sim \varphi^2 V''(\varphi)/m_{pl}^2 \ll V''(\varphi)$. O qual implica que sobre um ciclo pode-se desprezar o termo $3H\dot{\varphi}$ em (2.15), obtendo a relação:

$$\ddot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (3.12)$$

Da equação (3.12), é possível obter (3.1), da seguinte maneira,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_f} \dot{\varphi}^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (3.13)$$

Seja $u = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)$ e $dv = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)$, então, $du = \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)$ e $v = \varphi$, fazendo integração por partes;

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_f} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{d\varphi}{dt} \varphi \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_f} - \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3.14)$$

O termo avaluado é igual a zero por periodicidade. Já que se esta considerando um ciclo, pode-se usar (3.12) para obter:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_f} \dot{\varphi}^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} \varphi V'(\varphi) \quad (3.15)$$

Para um potencial do tipo (2.43) é fácil chegar na relação (3.1).

De (2.21), (2.22) e (3.1), se obtém as expressões para a densidade de energia ρ e a pressão p , em termos do $\dot{\varphi}$:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2n} (n+1) \langle \dot{\varphi}^2 \rangle \quad (3.16)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2n} (n-1) \langle \dot{\varphi}^2 \rangle \quad (3.17)$$

A equação de estado ficaria,

$$\omega = \frac{n-1}{n+1} \quad (3.18)$$

Doravante, vamos usar $n = 1$, $V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$, a densidade de energia e a pressão serão:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (3.19)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (3.20)$$

Tomando as médias temporais de φ de (3.1), em (3.19) e (3.20), a densidade e a pressão serão: $\langle \rho \rangle = \langle \dot{\varphi}^2 \rangle$ e $p = 0$, o que infere que no início do reaquecimento, as oscilações coerentes do campo φ realmente comportam-se como matéria não-relativística neste modelo.

Usando as equações (3.10), (3.11), (3.19) e (3.1) se obtém que a densidade de energia comporta-se como:

$$\rho = \frac{1}{2}m^2\Phi(t)^2 + \frac{1}{2}\Phi'(t)^2 \sin^2 mt + 2m\Phi'(t)\Phi(t) \sin mt \cos mt \quad (3.21)$$

Mas é possível desprezar os dois últimos termos para escalas de tempo maiores do que m^{-1} , portanto:

$$\rho = \frac{1}{2}m^2\Phi(t)^2 = \frac{m_{pl}^2}{6\pi t^2} \quad (3.22)$$

Se adiantando na análise do reaquecimento e tendo uma visão quântica do inflaton como um condensado de partículas com momento zero e massa m , é possível calcular usando (3.22) a densidade em número de partículas n :

$$n = \frac{\rho}{m} = \frac{1}{2}m\Phi(t)^2 \quad (3.23)$$

Usando (3.9), para conhecer a dependência entre a densidade de energia e o fator de escala a para $n = 1$, se obtém:

$$\rho \propto a^{-3} \quad (3.24)$$

Portanto, como se mencionou anteriormente as oscilações coerentes do campo escalar, correspondem a uma equação de um estado dominado por matéria não relativística. Esta solução deve de ser modificada tendo em conta o decaimento do inflaton já que do contrário o universo iria evoluir para estados mais frios; diferentemente ao universo que conhecemos hoje. Além, não se teria o decaimento total do inflaton, e conseqüentemente o reaquecimento não teria-se completado da maneira necessária para dar lugar a o estado subseqüente do universo, dominado pela radiação.

3.1.1 Decaimento do Inflaton

Vamos considerar agora o decaimento do inflaton através de um exemplo de uma teoria de um campo escalar massivo φ , que interage com um campo escalar χ_k e um campo espinorial, ψ , [24]. A lagrangiana conseqüentemente é:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{m_\chi\chi^2}{2} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial_\mu - m_\psi)\psi + \frac{1}{2}g^2\varphi^2\chi^2 - h\bar{\psi}\psi\varphi - V(\varphi) \quad (3.25)$$

g e h são as constantes de acoplamento. Neste lagrangiano considera-se por geralidade que o potencial pode ter um mínimo em $\varphi = \sigma$, e que perto do mínimo do potencial é quadrático com respeito a φ , tipo $V(\varphi) \sim \frac{1}{2}m^2(\varphi - \sigma)^2$. Com a mudança, $\varphi - \sigma \rightarrow \varphi$, o potencial efetivo adquire a forma, $\frac{1}{2}m^2\varphi^2$, e a Lagrangiana adquire um termo de interação

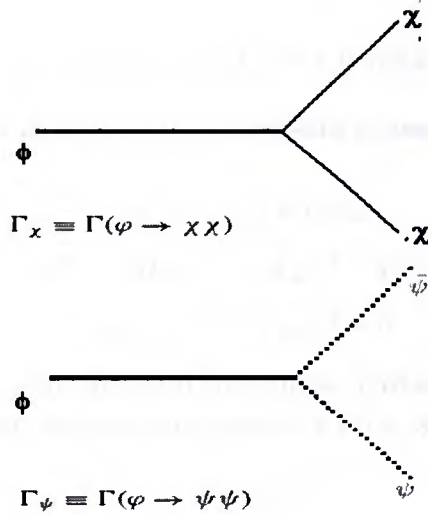


Figura 3.1: Diagramas de Feynmann para o decaimento do campo inflaton em bosons e fermions.

$\Delta L = -g^2 \sigma \varphi \chi^2$. Este termo vai ser diferente de zero para o caso do reaquecimento com quebra espontânea de simetria. As massas m_χ e m_ψ consideram-se muito menores do que m_φ , com o objetivo que o produto do seu decaimento seja relativístico e portanto encaixe com o estado de radiação.

Vamos então analisar o reaquecimento usando o *método perturbativo*, no qual se despreza a influencia do campo χ na evolução do inflaton φ . Essa aproximação é válida se considerar que os números de ocupação do campo χ são pequenos e assim usar o tratamento perturbativo do decaimento do inflaton em partículas χ . A equação do movimento do inflaton (2.15) incluindo os efeitos das correções quânticas vindas dos diagramas da Figura 3.1 fica:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \Pi(m_\varphi)\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (3.26)$$

$\Pi(m_\varphi)$ é o operador polarização de vácuo para o campo φ num quadrimomento $k = (k_0, 0, 0, 0)$, $k_0 = m_\varphi$, ver [3]. A parte real de $\Pi(m_\varphi)$ não dá uma contribuição considerável a m^2 , porém quando $k_0 > (2m_\chi, 2m_\psi)$, $\Pi(m_\varphi)$ vai ter uma parte imaginária a qual tem que ser considerada.

Existe uma relação bem conhecida em teoria quântica de campos que provem da uniparidade, a qual relaciona a parte imaginária da correção quântica com a largura total Γ , de decaimento da partícula φ [24], [37]:

$$Im\Pi(m_\varphi) = m_\varphi \Gamma_{total} \quad (3.27)$$

$$\Gamma_\varphi = \Gamma(\varphi \rightarrow \chi\chi) + \Gamma(\varphi \rightarrow \psi\psi) \quad (3.28)$$

Então usando (3.27), (3.26), se obtém:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m_\varphi \Gamma_\varphi \dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (3.29)$$

Multiplicando (3.29) por $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}^2 + m_\varphi\Gamma_\varphi\dot{\varphi}^2 + V'(\varphi)\dot{\varphi} = 0 \quad (3.30)$$

Derivando a densidade de energia (1.9) com respeito ao tempo e substituindo o termo $\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$ na derivada:

$$\dot{\rho}_\varphi = \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + V'(\varphi)\dot{\varphi} \quad (3.31)$$

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -3H\dot{\varphi}^2 - m_\varphi\Gamma_\varphi\dot{\varphi}^2 - V'(\varphi)\dot{\varphi} \quad (3.32)$$

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H\dot{\varphi}^2 + \Gamma_\varphi\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (3.33)$$

Agora, considerando a energia total como uma constante e substituindo o potencial por $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$, podem se usar as equações, (3.19) e (3.1), para obter:

$$\langle \rho \rangle = \langle \dot{\varphi}^2 \rangle \quad (3.34)$$

Finalmente se obtém a relação:

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H\rho_\varphi + \Gamma_\varphi\rho_\varphi = 0 \quad (3.35)$$

Esta relação descreve a mudança da densidade de energia do campo φ , enquanto ele oscila em torno do mínimo do potencial. Desprezando a dependência temporal de H , dada a expansão do universo durante a inflação a equação (3.35) pode ser resolvida da forma:

$$\int_{\rho_f}^{\rho_\varphi} \frac{d\rho_\varphi}{\rho_\varphi} = - \int_{t_f}^t (3H + \Gamma_\varphi) dt \quad (3.36)$$

ρ_f e t_f , são a densidade e o tempo no final da inflação, quando as oscilações coerentes do campo começam.

$$\ln\left(\frac{\rho_\varphi}{\rho_f}\right) = \ln\left(\frac{a(t)}{a(t_f)}\right)^{-3} - \Gamma_\varphi(t - t_f) \quad (3.37)$$

Portanto a solução equação de densidade de energia fica:

$$\rho_\varphi = B^4 \left(\frac{a(t)}{a(t_f)}\right)^{-3} \exp(-\Gamma_\varphi(t - t_f)) \quad (3.38)$$

B^4 é a energia do vácuo do inflaton no tempo t_f [3].

É interessante comparar o resultado em (3.38), com o resultado obtido anteriormente em (3.24). No primeiro caso, não se considerou o decaimento do φ , e a densidade de energia comporta se como $\rho_\varphi \sim t^{1/2}$, o qual não vai descrever com sucesso o processo do reaquecimento. Agora, ao considerar os efeitos das correções quânticas vindas pelo acoplamento de φ com outros campos, se obtém $\rho_\varphi \sim \exp(-\Gamma_\varphi(t - t_f))$, o qual descreve o comportamento esperado para um campo oscilando como uma onda coerente, formada por φ -partículas as quais estão decaindo, como mencionado se anteriormente, em particular χ e ψ . Descrição que concorda com o modelo.

Depois de fazer a análise para a densidade de energia do inflaton, vamos conhecer a solução para a equação (3.29), com o potencial já estudado na análise da densidade:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + [\Gamma_\varphi + m^2]\varphi = 0 \quad (3.39)$$

Esta corresponde à equação de um oscilador amortecido. Uma solução possível é dada por [3]:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(imt) \exp\left[-\frac{1}{2}(3H + \Gamma)t\right] \quad (3.40)$$

Nesta equação se aprecia claramente que a amplitude das oscilações de φ decresce como $\approx \exp\left[-\frac{1}{2}(3H + \Gamma)t\right]$, devido a produção de partículas, que têm lugar pelo decaimento do inflaton. O efeito do decaimento do inflaton no número de densidade de partículas pode se apreciar na seguinte equação, que é satisfeita pela amplitude de φ , em, (3.40) :

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(a^3 \Phi^2) = -\Gamma \Phi^2 \quad (3.41)$$

Mas, de (3.23), se obtém:

$$\frac{d}{dt}(a^3 n) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(a^3 \Phi^2) = -\Gamma a^3 n \quad (3.42)$$

$a^3 n$ é o número de densidade de partículas comóvel. Então se percebe de (3.42) que o número de φ -partículas no condensado cai exponencialmente.

3.1.2 Temperatura do reaquecimento

Agora, impõe-se como condição que as partículas χ e ψ interagem fortemente entre elas ou que decaem rápido em outras espécies. Os efeitos relacionados com estas interações fazem a matéria adquirir mediante o equilíbrio termodinâmico uma temperatura T_R , que vai ser a temperatura final do reaquecimento. É importante mencionar que as condições que foram assumidas anteriormente, sobre a forma na que as partículas interagem, correspondem ao modelo de reaquecimento instantâneo. Se assumir que as partículas nas que o φ decai são muito mais leves do que ele, o produto deste decaimento vai ser altamente relativístico, conseqüentemente é necessário incluir na análise do preaquecimento, o termo:

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = \Gamma_\varphi \rho_\varphi \quad (3.43)$$

com,

$$H^2 = 8\pi G(\rho_\varphi + \rho_R)/3 \quad (3.44)$$

onde ρ_R é a densidade de energia relativística do produto do decaimento do φ [28]. Já que estamos no começo do regime das oscilações coerentes o universo vai estar dominado por matéria e portanto:

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (3.45)$$

Pode-se obter uma solução a esta equação usando a aproximação:

$$\rho_\varphi \simeq B^4 \left(\frac{a(t)}{a(t_f)} \right) \quad (3.46)$$

Uma vez que:

$$(t - t_f) \ll \frac{1}{\Gamma_\varphi} \quad (3.47)$$

Considerando que desde o tempo em que as oscilações começam $t = t_f$, até $t \simeq \Gamma_\varphi^{-1}$, o universo ainda é dominado por partículas não relativísticas podemos usar $a(t)$ como em (3.45). Substituindo (3.45) em (3.46) obtemos:

$$\rho_\varphi \simeq B^4 \left(\frac{t}{t_f} \right)^{-2} \quad (3.48)$$

O parâmetro de Hubble é dado por:

$$H = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{2}{3}t^{-1} \quad (3.49)$$

Substituindo em (3.43) temos,

$$\dot{\rho}_R + \frac{8}{3}t^{-1}\rho_R = \Gamma_\varphi B^4 \left(\frac{t}{t_f} \right)^{-2} \quad (3.50)$$

para resolver esta equação pode-se usar o método de fator integrante, usando como *fator integrante* $F(t)$:

$$F(t) = \exp \left(\int_{t_f}^t \frac{8}{3}t^{-1} dt' \right) \quad (3.51)$$

Desta forma (3.50) fica:

$$\rho_R = \frac{\int_{t_f}^t F(t') \Gamma_\varphi B^4 \left(\frac{t'}{t_f} \right)^{-2} dt'}{F(t)} \quad (3.52)$$

Integrando esta expressão obtemos uma solução aproximada para ρ_φ :

$$\rho_\varphi \simeq \frac{\Gamma_\varphi m_{pl}^2}{10\pi t} \left[1 - \left(\frac{t}{t_f} \right)^{-5/3} \right] \quad (3.53)$$

onde se empregou $t_f^2 = H^{-2} = \frac{m_{pl}}{6\pi B^4}$. Em termos do $a(t)$ a expressão anterior fica:

$$\rho_\varphi \simeq \frac{(6/\pi)^{1/2} \Gamma_\varphi m_{pl} B^2}{10} \left(\frac{a(t)}{a(t_f)} \right)^{-3/2} \left[1 - \left(\frac{a(t)}{a(t_f)} \right)^{-5/2} \right] \quad (3.54)$$

Desta relação se nota que $\rho_R = 0$ para $t = t_f$ e que este valor cresce até $\approx m_{pl} \Gamma_\varphi B^2$ e depois decresce como $a(t)^{-3/2}$, ou seja que após o regime transitório inicial no que as partículas φ decaem e temos partículas relativísticas a temperatura começa a decrescer. Portanto a temperatura máxima que vamos ter vai ser para $t = t_f$ e após do tempo $t = \Gamma^{-1}$ o valor da temperatura começara decrescer. A relação entre ρ_R e T vem dada por [3], [29]:

$$\rho_R = \frac{\pi^2 N(T) T^4}{30} \quad (3.55)$$

$N(T)$ é o número efetivo de graus de liberdade para as espécies de partículas em equilíbrio na temperatura T , $N(T) = N_B(T) + \frac{7}{8}N_F(T)$. $N_B(T)$ é o número para bosons e $N_F(T)$, o número para fermions.

Portanto a temperatura máxima de reaquecimento usando (3.53) e (3.55) em $t = t_f$ é:

$$T_{max} = T(t = t_f) \simeq \frac{0.86m_{pl}B^2\Gamma_\varphi}{\pi^2N(T_{max})} \quad (3.56)$$

Para $t = \Gamma_\varphi^{-1}$, as partículas φ começam decair rapidamente, o universo começa ser dominado pela radiação e a entropia por volume comóvel estabiliza-se, é este o início da era do universo descrita pela cosmologia padrão. A temperatura inicial deste regime vem dada então por:

$$T_R \equiv T(t = \Gamma_\varphi^{-1}) \simeq \frac{0.56(m_{pl}\Gamma_\varphi)^{1/2}}{N(T_R)^{1/4}} \quad (3.57)$$

Se considerar $N(T_R) = 2$ que são os graus de liberdade para fótons, temos para T_R ,

$$T_R \equiv T(t = \Gamma_\varphi^{-1}) \simeq 0.5(m_{pl}\Gamma_\varphi)^{1/2} \quad (3.58)$$

Para este tempo relação entre ρ_R e T_R fica:

$$\rho_R \simeq \frac{(\Gamma_\varphi m_{pl})^2}{10\pi} \quad (3.59)$$

Se em (3.57) usamos o valor de $N(T)$ do modelo padrão de partículas, $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ [2], $N(T_R) \approx \frac{427}{4}$ ou seja $N(T_R) \gtrsim 100$, obtemos uma temperatura estimada do reaquecimento T_R do ordem de:

$$T_R \lesssim 0.17(\Gamma_\varphi m_{pl})^{1/2} \quad (3.60)$$

Se assumir que $\Gamma \ll m \lesssim 10^{-7}m_{pl}$, obtemos:

$$T_R \ll 10^{-3}m_{pl} \simeq T_{GUT} \quad (3.61)$$

Este é um dos resultados mais conhecidos do reaquecimento, e uma das causas pelas quais precisou se ter um estado inicial no reaquecimento, o qual gere de uma maneira mais efetiva partículas e aumente a temperatura do reaquecimento. Se a temperatura obtida em (3.61), fosse a temperatura que tinha o universo na época de radiação subsequente a inflação, não se gerariam defeitos na escala GUT, e portanto bariogênese em modelos GUT não aconteceria, embora se tenham outros modelos para bariogênese nos quais não é necessário ter $T_R \approx T_{GUT}$ para bariogênese ter acontecido.

3.2 Preaquecimento

O processo do reaquecimento, como se mostrou anteriormente é um processo intuitivo sobre o que pode-se sustentar o aquecimento do universo após inflação. Porém, se muitas

partículas ψ ou χ são geradas devido a efeitos relacionados com estatística de Bose, a probabilidade dos decaimentos seria maior. Isso poderia levar uma produção explosiva de partículas, impedindo uma análise perturbativa como a feita na seção anterior. A maior parte da energia do inflaton ao final da inflação é homogênea e esta armazenada no modo $k = 0$ do inflaton. Se o potencial do inflaton tiver um mínimo, esta energia vai oscilar de uma maneira perfeitamente coerente, é esta coerência a parte chave da matéria desta seção [30].

Para a análise desta seção vamos usar como potencial do inflaton,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (3.62)$$

Anteriormente estudou-se que, após inflação, o inflaton começa a oscilar ao redor de $\varphi = 0$, e que a amplitude das oscilações vai decrescer por causa da expansão do universo, da forma, (3.10), (3.11). Como o número de ocupação do inflaton no modo $k = 0$, é muito grande, após inflação pode-se considerá-lo el como um campo clássico. Portanto, em primeira aproximação, pode-se considerar o inflaton como uma força externa, clássica, atuando sob os campos ψ e χ_k , como o inflaton é dependente do tempo, as massas efetivas destes campos mudam rapidamente. Isto levaria uma excitação não -adiabática das flutuações do φ , por ressonância paramétrica. Então, a visão anterior do inflaton como uma grande coleção de partículas estatisticamente independentes, não existe mais, e a coerência espacial e temporal do inflaton pode causar um cenário diferente ao estudado na seção anterior, o qual evoca um novo processo, o “*preaquecimento*”.

Para fazer a análise mais simples, vamos considerar como termo de interação:

$$V(\varphi, \chi) = \frac{1}{2}g^2\varphi^2\chi^2 \quad (3.63)$$

que descreve a interação entre o campo clássico φ , e o campo quântico, χ , no lagrangiano (3.25). A representação de Heisenberg do campo quântico χ , é:

$$\hat{\chi}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \chi_k(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \chi_k^*(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \quad (3.64)$$

onde \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger , são os operadores de criação e destruição. O potencial total efetivo para este sistema, e a massa efetiva para o campo χ são:

$$V_{ef} = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{2}g^2\varphi^2\chi^2 \quad (3.65)$$

$$m_{\chi,ef}^2 \equiv \frac{\partial^2 V_{ef}(\varphi, \chi)}{\partial^2 \chi} = g^2\varphi^2(t) \quad (3.66)$$

Para um background de Friedmann plano, com fator de escala $a(t)$, as auto-funções $\chi_k(t)$, satisfazem a equação; †

$$\ddot{\chi}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + g^2\varphi^2 \right) \chi_k = 0 \quad (3.67)$$

† Nesta equação não se considerou a massa nua do campo χ ; normalmente ela é considerada em casos de produção de partículas super massivas durante o preaquecimento.

Uma forma de derivar esta equação é mediante a equação covariante de Euler-Lagrange, [2];

$$D_\mu(\partial^\mu \hat{\chi}) + V'(\hat{\chi}) = 0 \quad (3.68)$$

$$D_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu V^\rho \quad (3.69)$$

Portanto,

$$\partial_0(\partial^0 \hat{\chi}) + \partial_i(\partial^i \hat{\chi}) + \Gamma_{0\rho}^0(\partial^\rho \hat{\chi}) + \Gamma_{i\rho}^i(\partial^\rho \hat{\chi}) = -V'(\hat{\chi}) \quad (3.70)$$

Considerando as quantidades,

$$\partial^0 \hat{\chi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \dot{\chi}_k(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \dot{\chi}_k^*(t)(ik) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \quad (3.71)$$

$$\partial^i \hat{\chi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \chi_k(t) \left(\frac{-ik}{a}\right) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \chi_k^*(t) \left(\frac{ik}{a}\right) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \quad (3.72)$$

$$\partial_0(\partial^0 \hat{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \ddot{\chi}_k(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \ddot{\chi}_k^*(t)(ik) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \quad (3.73)$$

$$\partial_i(\partial^i \hat{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \chi_k(t) \left(\frac{-k^2}{a^2}\right) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \chi_k^*(t) \left(\frac{k^2}{a^2}\right) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \quad (3.74)$$

Para a parte que inclui os símbolos de Christoffel, se obtém;

$$\Gamma_{0\rho}^0(\partial^\rho \hat{\chi}) = 0 \quad (3.75)$$

$$\Gamma_{i\rho}^i(\partial^\rho \hat{\chi}) = \frac{3\dot{a}}{a} \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \dot{\chi}_k(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \dot{\chi}_k^*(t)(ik) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \right] \quad (3.76)$$

em que se considerou a métrica FLRW, para um espaço-tempo plano, $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t))$, e os Γ como;

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{il}}{2} (\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}) \quad (3.77)$$

$$\Gamma_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} = \Gamma_{0j}^i \quad (3.78)$$

Portanto $D_\mu(\partial^\mu \chi)$ fica;

$$\begin{aligned} D_\mu(\partial^\mu \chi) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \ddot{\chi}_k(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \ddot{\chi}_k^*(t)(ik) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \chi_k(t) \left(\frac{-k^2}{a^2}\right) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \chi_k^*(t) \left(\frac{k^2}{a^2}\right) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} + \\ &\frac{3\dot{a}}{a} \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \dot{\chi}_k(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \dot{\chi}_k^*(t)(ik) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

A derivada do potencial (3.63), com respeito a χ é;

$$-V'(\varphi) = -g^2 \varphi^2 \hat{\chi} = -g^2 \varphi^2 \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\hat{a}_k \chi_k(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \chi_k^*(t) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{k} \right] \quad (3.80)$$

Agora substituindo os resultado obtidos,(3.79) e (3.80) na equação (3.68), se obtém conseqüentemente, as equações:

$$\hat{a}_k^\dagger \left(\ddot{\chi}_k^*(t) + 3H\dot{\chi}_k^*(t) + g^2\varphi^2\hat{\chi}_k^* + \frac{-k^2}{a^2}\chi_k^*(t) \right) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = 0 \quad (3.81)$$

$$\hat{a}_k \left(\ddot{\chi}_k(t) + 3H\dot{\chi}_k(t) + g^2\varphi^2\hat{\chi}_k + \frac{-k^2}{a^2}\chi_k(t) \right) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = 0 \quad (3.82)$$

Da ultima destas equações se reproduz (3.67).

Agora introduzindo um novo campo escalar X_k , para simplificar os cálculos:

$$X_k = \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{3/2} \chi_k \quad (3.83)$$

Calculando as derivadas do χ_k , em termos do novo campo escalar;

$$\dot{\chi}_k = -\frac{3}{2} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-5/2} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a_0} \right) X_k + \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3/2} \dot{X}_k \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\chi}_k &= -\frac{15}{4} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-7/2} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a_0} \right)^2 X_k \\ &\quad -\frac{3}{2} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-5/2} \left(\frac{\ddot{a}(t)}{a_0} \right) X_k - \frac{3}{2} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-5/2} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a_0} \right) \dot{X}_k \\ &\quad -\frac{3}{2} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-5/2} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a_0} \right) \dot{X}_k + \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3/2} \ddot{X}_k \end{aligned} \quad (3.85)$$

Substituindo estas derivadas na equação (3.67), finalmente se obtém;

$$\ddot{X}_k + \omega_k^2(t)X_k = 0 \quad (3.86)$$

$$\omega_k^2(t) = -\frac{3}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{k^2}{a^2} + g^2\varphi^2 - \frac{3}{4}H^2 \quad (3.87)$$

Agora, considerando que no regime do preaquecimento a expansão do universo é gradualmente desprezível, vamos tomar o fator de escala como una constante, $a(t) = a_0(t) = 1$, portanto $X_k = \chi_k$. Uma solução para (2.15),com $H = 0$, e o potencial (3.62), é:

$$\varphi = \Phi_0 \sin mt \quad (3.88)$$

Substituindo a solução anterior em (3.86), e mudando á variável t por, $z = mt - \pi/4$, se obtém:

$$2m^2 X_k'' + \left(k^2 + \frac{g^2\Phi_0^2}{2} - \frac{g^2\Phi_0^2}{2} \cos 2z \right) X_k = 0 \quad (3.89)$$

Onde se fez uso da identidade $\sin^2(2z - \pi/2) = (1 - \cos 2z - \pi/2)/2$, e as primas denotam derivação com respeito z . Definindo as quantidades,

$$A_k = \frac{k^2 + g^2\Phi_0^2/2}{2m^2} \quad (3.90)$$

e

$$q = \frac{g^2 \Phi_0^2 / 2}{4m^2} \quad (3.91)$$

(3.89) fica:

$$\chi_k'' + (A_k - 2q \cos 2z)\chi_k = 0 \quad (3.92)$$

Esta equação têm a forma da conhecida *Equação de Mathieu*, a qual pode-se resolver usando o *Teorema de Floquet* [31], segundo o qual uma equação diferencial do tipo:

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (3.93)$$

na qual $Q(x)$ é uma função real ou complexa continua por tramos, definida para todos os valores da variável real x periódica e com um período mínimo de:

$$Q(x + \pi) = Q(x) \quad (3.94)$$

Temos então dois soluções diferenciáveis $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e a equação característica:

$$\rho^2 - [y_1(\pi) + y_2'(\pi)]\rho + 1 = 0 \quad (3.95)$$

com autovalores $\rho_1 = \exp(i\alpha\pi)$ e $\rho_2 = \exp(-i\alpha\pi)$. O teorema de Floquet plantea que se $\rho_1 \neq \rho_2$, então (3.93) tem duas soluções lineares independentes:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \exp(i\alpha\pi)p_1(x) \\ f_2(x) &= \exp(-i\alpha\pi)p_2(x) \end{aligned} \quad (3.96)$$

As soluções desta equação descrevem uma instabilidade exponencial dentro de um conjunto de bandas de ressonância. A interpretação física desta instabilidade no nosso assunto é que corresponde ao crescimento exponencial dos números de ocupação das flutuações quânticas, o qual pode-se interpretar como criação de partículas **Ap. A**. Portanto de (3.92) se obtêm duas soluções da forma:

$$\chi_1(t) = \exp(\mu t)h_1(t) \quad (3.97)$$

$$\chi_2(t) = \exp(-\mu t)h_2(t) \quad (3.98)$$

$h_1(t)$ e $h_2(t)$, são funções periódicas com período π ou 2π . μ é conhecido como o índice de Floquet ou expoente característico; em geral é um número complexo [32], em função dos parâmetros A_k e q , as regiões para as quais $Re(\mu) > 0$ são chamadas regiões instáveis, e as soluções nestas regiões estão sob ressonância paramétrica.

A intensidade da ressonância depende das variáveis A_k e q , esta descreve-se pelo mapa de estabilidade/instabilidade da equação de Mathieu, na figura 3.2. Segundo o teorema de Floquet, quando A_k e q caem em uma banda instável a perturbação χ_k , cresce exponencialmente. Fixando o k para um $q \lesssim 1$, a largura de estabilidade da banda é pequena e a expansão do universo reduz a ressonância do campo. Esta região é conhecida como banda de ressonância estreita. Do contrário, se tiver $q \gg 1$ o regime é conhecido como banda de ressonância larga. Se considerar o crescimento dos modos, a banda de ressonância larga pode ocorrer para uma região grande dos parâmetros espaço e momento, o que faz a taxa

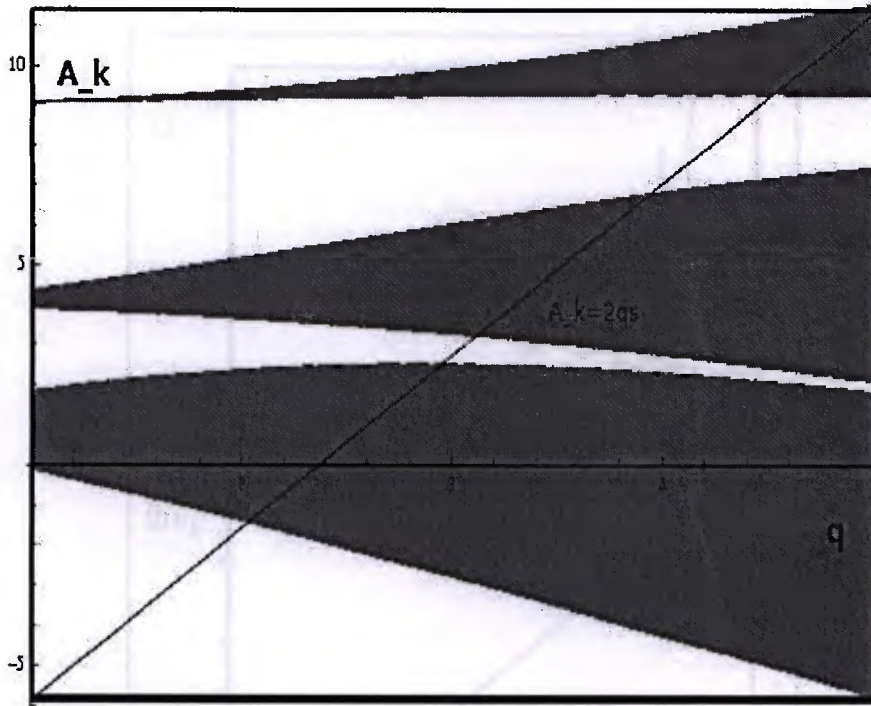


Figura 3.2: Gráfico de contorno de μ_k como função de A_k e q . As bandas de ressonância estreita e larga encontra-se na direita da reta $A=2q$.

de crescimento das partículas χ_k muito mais eficiente que na banda de ressonância estreita.

O objetivo é achar os valores de k que levariam a um crescimento exponencial dos modos (ressonância), para assim conhecer se o processo da criação de partículas é eficiente. Uma forma de fazer isto é fixando um valor para q e depois achar os valores de A_k para os quais a equação de Mathieu têm soluções $\mu = 0$. O padrão das regiões de estabilidade/instabilidade, no plano (A_k, q) , são simétricas com respeito a $q = 0$. Portanto, vamos ter em conta somente a região $q > 0$. As soluções pares tradicionalmente são rotuladas A_{kr} e os ímpares B_{kr} , r um inteiro positivo. Da teoria das funções de Mathieu conhecemos que $\mu > 0$ para valores de A_k que estejam entre A_{kr} e B_{kr} no mesmo valor de r .

3.2.1 Banda de ressonância estreita

Vamos assumir que para um q fixo variamos k , ou seja segundo a figura 3.2 estamos nos movimentando numa linha vertical no mapa de instabilidade. Para $q \ll 1$ a banda de ressonância é estreita e se cumpre a relação: $A_k \simeq r^2$.

O máximo expoente característico em cada banda μ_{kmax}^r e a largura de cada banda ΔA_{kr} , dependem ambos do fator q^r . Portanto, a primeira banda de instabilidade em $q = 1$ é a mais importante. Para $l = 1$ pode-se derivar a relação:

$$\mu_k = \frac{1}{2} \sqrt{q^2 - (A_k - 1)^2} \quad (3.99)$$

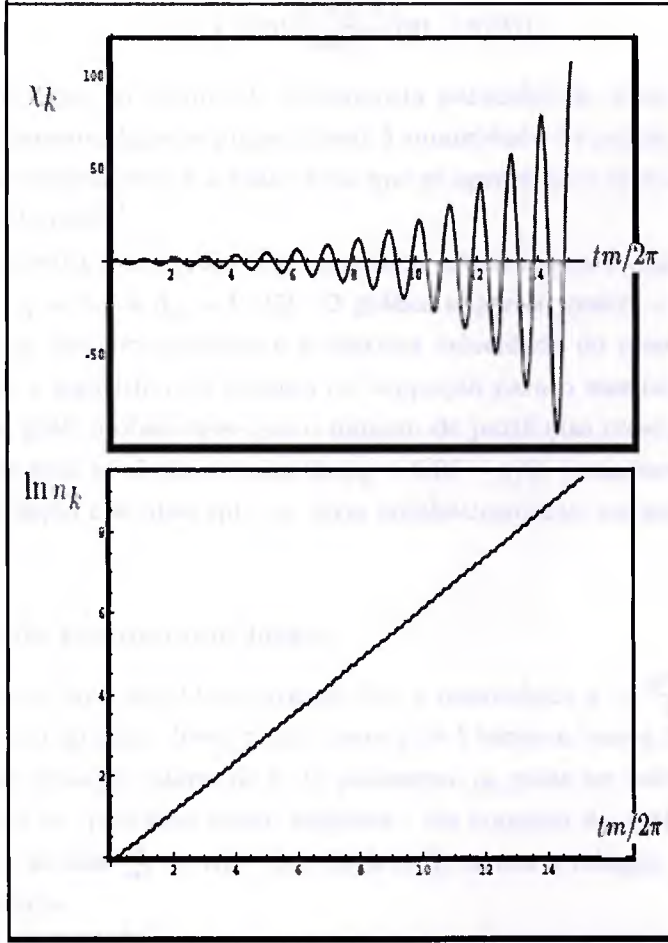


Figura 3.3: Ressonância paramétrica estreita para as partículas criadas, $q=0.1$. Figura tomada de [24].

As raízes reais estão no intervalo $1 - q \leq A_k \leq 1 + q$ e seu valor máximo é $q/2$.

Substituindo esses limites em (3.90), encontramos os valores do modelo para os quais se tem ressonância estreita:

$$E_\chi = (k^2 + m_\chi^2)^{1/2} \leq m \quad (3.100)$$

Ou seja os correspondentes modos X_k crescerão em uma taxa máxima de $\exp(qz/2)$. Uma interpretação simples deste termo é o espalhamento ($2 \rightarrow 2$) de partículas φ em partículas χ [33].

Vamos considerar n_k , o número de ocupação de partículas χ comóvel com momento k :

$$n_k = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{|\dot{X}_k|^2}{\omega_k^2} + |X_k|^2 \right) - \frac{1}{2} \quad (3.101)$$

Quando os modos crescem como $X_k \propto \exp(qz/2)$ o número de partículas χ cresce como

$\exp(qz)$. Substituindo os valores dados para q e z temos:

$$n_k \propto \exp\left(\frac{g^2\Phi_0^2/2}{4m^2}(mt - \pi/4)\right) \quad (3.102)$$

Concluimos então que, no regime de ressonância paramétrica, a taxa de produção de χ -partículas é exponencialmente proporcional à quantidade de partículas produzidas no início do preaquecimento, esta é a razão pela que se apresenta o crescimento exponencial do número de partículas.

A figura 3.3 mostra a ressonância paramétrica estreita para o campo χ no potencial $V(\varphi) = \frac{m^2\varphi^2}{2}$ em $q \sim 0.1$ e $A_k = 1$ [33]. O gráfico superior mostra o crescimento de χ_k para o momento k que correspondente á máxima velocidade do crescimento. O gráfico inferior mostra-se o logaritmo do número de ocupação para o mesmo modo, escolheu-se $n_k \text{ inicial} = 1$. Do gráfico observa-se que o número de partículas cresce exponencialmente e da inclinação da reta se obtém o valor de $\mu_k \sim 0.05 \sim q/2$, justamente como se derivou em (3.99). Esta relação nos disse que ω_k varia adiabaticamente, ou seja varia lentamente com o tempo.

3.2.2 Banda de ressonância larga

Para oscilações com uma amplitude grande Φ_0 , a quantidade $q = \frac{g^2\Phi_0^2/2}{4m^2}$ pode ser conseqüentemente muito grande. Neste regime para $q \gg 1$ temos a banda de ressonância larga a qual ocorre para grandes valores de k . O parâmetro μ_k pode ter valores muitos grandes e o reaquecimento ser portanto muito eficiente. Na equação de Mathieu a ressonância apresenta-se para modos $\frac{k^2}{m^2} = A_k - 2q$. Se $k > 1$, temos a relação $A_k > 2q$ para esta banda de ressonância.

Como $q \gg 1$ então $2g^2\Phi_0^2 \gg m^2$. Portanto a massa efetiva das partículas χ , $m_{ef}^2 = m_\chi^2 + g^2\varphi^2$, vai ser muito maior do que a massa do inflaton. Conseqüentemente, a freqüência de oscilação $\omega(t) = \sqrt{k^2 + g^2\varphi^2(t)}$ do campo χ é muito maior da que do campo φ , ou seja, dentro de um período do campo φ o campo χ faz um número de oscilações do ordem de $q^{1/2}$. A amplitude de χ_k cresce para $\varphi(t)$ muito pequeno e é mínima nos pontos nos que a freqüência é máxima já que: $|\chi_k| \propto \omega(t)^{-1/2}$. Para valores pequenos de $\varphi(t)$ a amplitude do χ é muito grande e ω deixa de cumprir com a condição de adiabaticidade. Da teoria WKB, sabemos que se ω varia devagar com o tempo a solução da equação pode-se aproximar àqueles valores nos quais ω_k^2 é constante. Para este caso, como analisou-se anteriormente, a amplitude de χ_k não cresce, ou seja não se tem produção de χ -partículas. Agora, se a massa efetiva mudar rápido, não é mais possível usar a aproximação WKB.

Vamos introduzir a razão:

$$R_a \equiv \frac{\dot{\omega}_k}{\omega_k^2} \quad (3.103)$$

Para $|R_a| \ll 1$ se tem a região de adiabaticidade e o n_k é um invariante adiabático que não muda com o tempo. Para $|R_a| \gg 1$ o n_k não é mais invariante adiabático e espera-se produção de partículas.

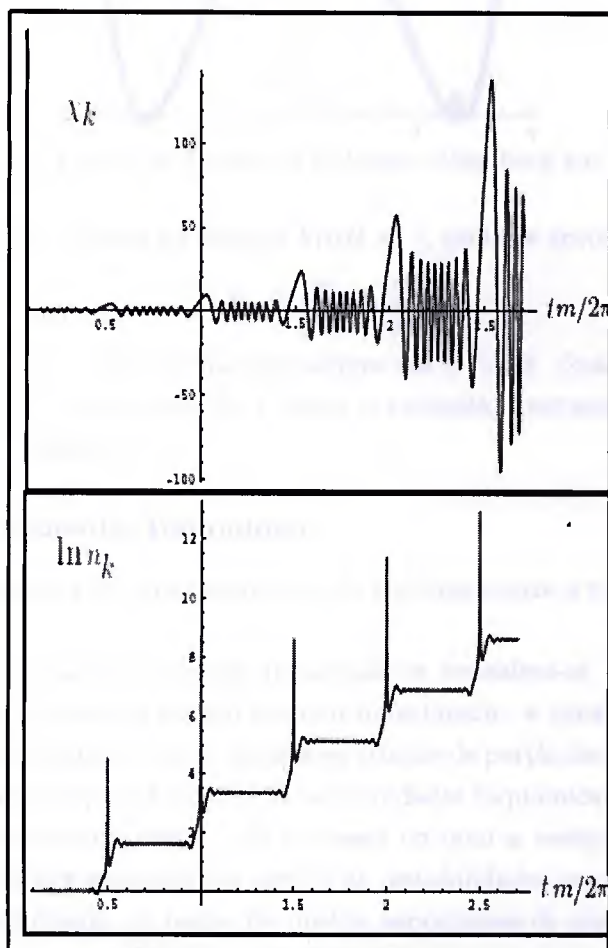


Figura 3.4: Ressonância paramétrica larga para as partículas criadas, $q= 200$. Figura tomada de [24]

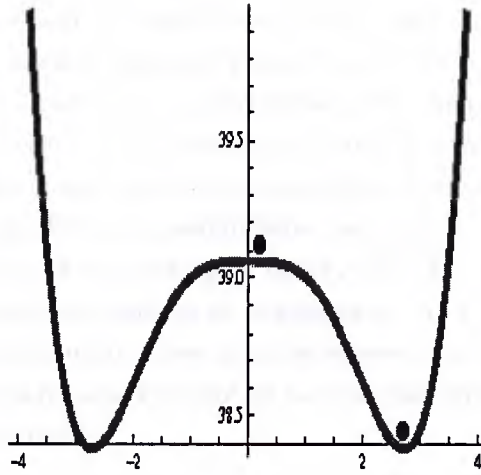


Figura 3.5: Figura do Potencial Coleman-Weimberg em função de x

No nosso exemplo, usando a condição $k/aH \ll 1$, pode-se aproximar:

$$R_a \simeq \frac{\dot{\varphi}}{g\varphi^2} \sim \frac{m_\varphi}{g\varphi} \quad (3.104)$$

fazendo $\dot{\varphi} \sim m_\varphi\varphi$, o R_a vai divergir sempre em $\varphi \rightarrow 0$. Como se ilustra na figura 3.4, em cada $\varphi = 0$, a amplitude do χ muda e aumenta: portanto, temos produção de partículas em cada oscilação.

3.2.3 Preaquecimento Taquiônico

No universo primordial a quebra espontânea da simetria ocorre a través de uma transição de fase térmica.

Recentemente em alguns modelos inflacionários considera-se que também pôde ter acontecido quebra de simetria após o período inflacionário, e atualmente é uma das melhores soluções para conseguir maior eficácia na criação de partículas. Usualmente a quebra espontânea da simetria aparece devido às instabilidades taquiônicas de um campo escalar perto do topo do potencial efetivo. O processo no qual a energia do campo escalar e transferido às oscilações inhomogêneas devido às instabilidades taquiônicas é denominado *preaquecimento taquiônico*. A teoria de quebra espontânea de simetria é muito complicada e tem de fazer-se contas além de métodos perturbativos, então usualmente são usadas simulações de rede na análise que incluem preaquecimento taquiônico.

Na figura 3.5 se mostra um dos exemplos mais representativos do preaquecimento taquiônico em nova inflação o potencial Coleman-Weimberg:

$$V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \left[\ln\left|\frac{\varphi}{v}\right| - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{16}\lambda v^4 \quad (3.105)$$

Do gráfico encontra-se que o potencial tem seu valor máximo em $V_0 = (1/16)\lambda v^4$, e seus mínimos, $V(\varphi) = 0$ em $\varphi = \pm v$. O termo no potencial: $\frac{-1}{16}\lambda\varphi^4$, implica a presença de fases taquiônicas. Este termo negativo de instabilidade leva que em uma parte

do potencial, os modos das flutuações quânticas do campo sejam muitos mais amplificadas. Em termos da ressonância paramétrica anteriormente estudada, a amplificação dos modos levava ter uma característica de Floquet μ_k muito maior após terminar o regime taquiônico. Portanto a produção de partículas φ do campo inflacionário pode levar a partículas muito massivas, e o número de partículas χ criadas pelo decaimento das φ -partículas vai ser muito maior que se tiver um modelo que apresente somente ressonância paramétrica. Como resultado das instabilidades taquiônicas se obtém flutuações quânticas com grandes comprimentos de onda $\varphi_k \sim \exp(t\sqrt{m^2 - k^2})$, para os primeiros modos de oscilação $k < m$. Portanto os números de ocupação n_k , $n_k + 1/2 = 1/2|\exp(t\sqrt{m^2 - k^2})|^2$ vão ter crescimento exponencial. Esses grandes números de ocupação permitem tratar os modos como ondas semiclássicas e encontrar soluções das equações da evolução do campo mediante simulações de rede.

Capítulo 4

LATTICEASY: Um programa para simulações de rede para campos escalares em um universo em expansão

4.1 Simulações de rede

Ao longo da análise desenvolvida nas seções anteriores tratou-se sobre o preaquecimento e a dificuldade em resolver suas equações, quando consideradas as interações mútuas entre as partículas criadas com grandes números de ocupação n_k , que não permitem tratar o processo perturbativamente. Esses fatores tornam quase impossível resolver as equações obtidas analiticamente. Existem porém os métodos de simulação de rede amplamente usados em modelos de matéria condensada.

No capítulo três encontrou-se que após inflação terminar temos que resolver equações auto-consistentes para o campo escalar φ , geradas devido à produção de partículas pelas oscilações do φ . Mas no preaquecimento taquiônico estas flutuações crescem exponencialmente levando a uma grande produção de números de partículas do campo.

Vamos considerar no potencial,

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2 \quad (4.1)$$

uma perturbação $\delta\varphi_k$ do campo φ . Se a componente homogênea do campo em $t = 0$ é $\langle\varphi\rangle = 0$, a massa do campo vai estar dada por [3]:

$$m_\varphi^2 = -m^2 + 3\lambda\langle\delta\varphi^2\rangle \quad (4.2)$$

Se numa oscilação $\langle\delta\varphi^2\rangle$ cresce até o valor de v^2 , o que pode acontecer porque as perturbações com $k < m$ apresentam crescimento taquiônico, a massa do campo em (4.2), passa a ser positiva:

$$m_\varphi^2 \approx -m^2 + 3\lambda v^2 \approx 2m^2 \quad (4.3)$$

Porém o resultado que se obteve usualmente na simulação é diferente: a simetria é quebrada após mais de uma oscilação. Essa diferença vai levar uma análise mais profunda do preaquecimento em modelos com preaquecimento taquiônico. Na simulação a média dos valores de $\langle \delta\varphi_k^2 \rangle$ e $\langle \varphi_k \rangle$, são calculados para obter os valores dos números de ocupação criados neste regime.

Então embora possam ser usados métodos perturbativos como as aproximações de Hartree ou $1/N$ para ter em conta os efeitos de *backreaction*, também é necessário se implementar os efeitos do espalhamento das partículas criadas as quais devido a seu grande número de ocupação não podem mais ser tratadas como perturbações. Pode-se resumir então que na análise do preaquecimento taquiônico é mais prático usar simulações. No desenvolvimento central deste trabalho vamos usar um programa de simulação de rede chamado LATTICEASY [6].

4.2 LATTICEASY

LATTICEASY é um programa feito na linguagem C_{++} desenvolvido especialmente para o estudo do preaquecimento, disponível gratuitamente no link [7]. Ele faz simulações de rede da evolução de campos escalares interagentes, em um universo em expansão.

Já se descreveu ao longo deste trabalho que a evolução do campo escalar* no regime do preaquecimento envolve interações não perturbativas, com números de ocupação exponencialmente grandes em estados longe do equilíbrio. Embora se possam usar nestas condições aproximações como a aproximação de Hartree entre outras, não é suficiente já que as flutuações do campo crescem até o ponto de não poderem ser mais consideradas pequenas perturbações. Esse fato faz que métodos como os anteriormente mencionados não descrevam bem o processo.

Dos estudos feitos em diferentes tipos de modelos inflacionários [6], se encontrou que o preaquecimento amplifica estas flutuações em grandes escalas em poucas oscilações do campo escalar. Uma maneira de trabalhar com esses sistemas é através de simulações de rede, as quais resolvem as equações clássicas do movimento geradas pelas flutuações do campo. Embora resolver estas equações classicamente exclua de possíveis efeitos quânticos, no começo do preaquecimento estes efeitos são exponencialmente pequenos.

O programa LATTICEASY usa o método *staggered leapfrog* para resolver as equações diferenciais. Vamos usar a variável f para representar o campo escalar na análise desta seção. O método é o seguinte. O programa armazena em cada passo os valores do campo f e as suas derivadas \dot{f} em dois instantes diferentes t e $t - dt/2$ respectivamente, o intervalo dt escolhe-se segundo conveniência em cada modelo. Os valores das derivadas são usados para avançar num dt e com os valores do campo calculam-se as segundas derivadas \ddot{f} em t , na sua vez com esses valores encontra-se o novo valor de \dot{f} em $t + dt/2$. E finalmente este novo valor de \dot{f} é usado para calcular f em $t + dt$ e recomeçar o processo novamente.

*Ou campos se considerar modelos inflacionários como inflação híbrida

Esquemáticamente seria:

$$\begin{aligned}
f(t) &= f(t - dt) + dt\dot{f}(t - dt/2) \\
\dot{f}(t - dt/2) &= \dot{f}(t - dt/2) + dt\ddot{f}[f(t)] \\
f(t + dt) &= f(t) + dt\dot{f}(t + dt/2)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A precisão e estabilidade deste método baseia-se em que a partir do f o \ddot{f} , possa ser calculado, portanto o programa inclui um reescalamiento das variáveis da maneira que o \dot{f} seja eliminado das equações. As equações que o LATTICEASY resolve são em primeiro lugar a equação de movimento do campo (2.15), esta expressão ficam em termos do f :

$$\ddot{f} + 3H\dot{f} + \frac{\partial V(f)}{\partial f} = 0 \tag{4.5}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{4.6}$$

Também se expansão é incluída de maneira auto-consistente o programa também calcula as equações de Friedmann:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi a}{4}(\rho + 3p) \tag{4.7}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho \tag{4.8}$$

Embora qualquer uma destas duas equações seja suficiente para calcular a expansão, o programa usa uma combinação das duas por conveniência computacional. As equações do campo são resolvidas no espaço das configurações com cada ponto de rede representando uma posição no espaço. As condições iniciais são escolhidas no espaço dos momentos usando a transformada de Fourier para obter os valores iniciais do campo e suas derivadas em cada ponto da rede. Os valores iniciais são dados por flutuações quânticas cuja dispersão é caracterizada por:

$$\langle |f_k|^2 \rangle = \frac{1}{2\omega_k} \tag{4.9}$$

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 \tag{4.10}$$

$$m^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} \tag{4.11}$$

onde f_k é a transformada de Fourier do f .

Vamos agora derivar as equações do programa e os reescalamentos usados. Do lagrangiano (2.9) para FLRW, em termos do f a equação de movimento, considerando variações espaciais do campo $\nabla\varphi = 0$, fica:

$$\ddot{f} + 3\frac{\ddot{a}}{a}\dot{f} - \frac{1}{a^2}\nabla^2 f + \frac{\partial V(f)}{\partial f} = 0 \tag{4.12}$$

Para facilitar os cálculos se usa o reescalamiento,

$$\begin{aligned}
f_{pr} &\equiv Aa^r f \\
\vec{x}_{pr} &\equiv B\vec{x} \\
dt_{pr} &\equiv Ba^s dt
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para expressar (4.12) nas novas variáveis, substituímos:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= Ba^s a' \\ \dot{f} &= Ba^s f' = \frac{B}{A}(a^{s-r} f'_{pr} - ra^{s-r-1} a' f_{pr}) \\ \ddot{f} &= \frac{B^2}{A}(a^{2s-r} f''_{pr} + (s-2r)a^{2s-r-1} a' f'_{pr} - r(s-r-1)a^{2s-r-2} a'^2 f_{pr} - ra^{2s-r-2} a'' f_{pr})\end{aligned}$$

Usando o potencial

$$V_{pr} \equiv \frac{A^2}{B^2} a^{-2s+2r} V \quad (4.14)$$

a (4.12) fica:

$$\begin{aligned}f''_{pr} + (s-2r+3)\frac{a'}{a}f'_{pr} - \\ a^{-2s-2}\nabla_{pr}^2 f_{pr} - \left(r(s-r+2)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + r\frac{a''}{a}\right)f_{pr} + \\ \frac{\partial V_{pr}}{\partial f_{pr}} = 0\end{aligned} \quad (4.15)$$

As constantes A, B, s e r , são escolhidas de tal maneira que eliminem a primeira derivada da equação acima e que cumpram com outros requerimentos que melhorem a precisão da simulação.

No final estas constantes ficam:

$$A = \frac{1}{f_0} \quad (4.16)$$

f_0 o valor inicial do campo f .

$$B = \sqrt{cpl} f_0^{-1+\beta/2} \quad (4.17)$$

$$r = \frac{6}{2+\beta} \quad (4.18)$$

$$s = 3\frac{2-\beta}{2+\beta} \quad (4.19)$$

Onde as constantes cpl e β são expressadas ao tomar o termo dominante do potencial, da maneira:

$$V_{dominante} = \frac{cpl}{\beta} f^\beta, \quad (4.20)$$

sendo β o expoente dominante do potencial. Como exemplo, no potencial $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2$ as constantes β e cpl serão, $\beta = 4$ e $cpl = \lambda$.

Então finalmente usando os valores anteriores para as constantes a equação que o programa resolve é:

$$f''_{pr} - a^{-4(4-\beta)/(2+\beta)}\nabla_{pr}^2 f_{pr} - \left(6\frac{4-\beta}{(2+\beta)^2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{6}{2+\beta}\frac{a''}{a}\right)f_{pr} + \frac{dV_{pr}}{df_{pr}} = 0 \quad (4.21)$$

$$V_{pr} = \frac{1}{cpl f_0^\beta} a^{6\beta/(2+\beta)} V \quad (4.22)$$

É necessário incluir condições iniciais na rede, as quais são: os valores homogêneos dos campos e as suas derivadas, as flutuações dos campos e das suas derivadas e o valor inicial da constante de Hubble. Os valores vêm escolhidos no programa embora possam ser mudados para a conveniência do modelo a tratar.

4.3 Parâmetros ajustáveis

Existem três tipos de parâmetros que podem se ajustar dependendo do modelo: parâmetros gerais como o tamanho da rede, parâmetros específicos do modelo e parâmetros que controlam a saída do programa.

Estes são alguns dos parâmetros gerais mais importantes:

- **NDIMS**- Número de dimensões. pode ser 1, 2 ou 3.
- **N**- número de pontos por dimensões.
número de pontos total na rede é: $N \cdot \text{NDIMS}$.
- **nflds**- número dos campos.
- **L**- O tamanho da caixa em unidades de distância reescaladas.
- **dt**- Tamanho do intervalo de tempo.
- **tf**- Tempo final até o qual o programa deve ser executado.

Uma parte importante destes parâmetros são os valores escolhidos para N , L e dt , os quais dependem do modelo que vai se analisar e da potência do computador em que se trabalhará. Por exemplo o valor do dt deve-se escolher de tal maneira que seja menor do que os períodos característicos do modelo. A escolha do número de pontos de rede depende muito do computador, por exemplo ao passar de N a $2N$ em 3 dimensões vai se usar 8! mais memória do computador. As dimensões físicas da caixa podem-se obter da maneira simples:

$$L_{físico} = \frac{L}{B} \quad (4.23)$$

4.4 Output

Após executar o programa se obtêm, entre outros, os seguintes dados:

spectra(), calcula n_k , ω_{k^2} , $|f_k^2|$ e $|f'_k|^2$ para os respectivos k num tempo dado, também n_k em função do tempo para diferentes modos k .

histograms(), cria histogramas da distribuição espacial do campo.

energy (), calcula as componentes da densidade de energia em instantes determinados.

Capítulo 5

Reaquecimento no modelo de inflação quintessencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$$

Como mencionou-se anteriormente no **Capítulo 2**, os modelos de inflação quintessencial tentam descrever mediante um só campo escalar as duas expansões aceleradas que segundo conhecemos tem experimentado o universo. Neste capítulo também foi introduzido o potencial (2.60) e os valores específicos para os quais a inflação teria acontecido neste modelo. Também foi mostrado, que para grandes escalas de energia no universo primordial, a parte imaginária do potencial que representa o campo de quintessencia não muda. Portanto este termo não vai representar nenhuma parte importante no estudo do reaquecimento e pode ser desprezado. Assim, o modelo o qual vai-se analisar fica:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \equiv \frac{-m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{m^4}{4\lambda} \quad (5.1)$$

Ou seja o potencial $V(\Phi)$ em 2.60 é expressado como o potencial da equação anterior com ϕ real, $m_\phi^2 \equiv \lambda v^2$, $\lambda \ll 1$. O valor do v foi escolhido convenientemente como $v = \sqrt{0.02}m_{pl}$, já que encontrou-se após uma análise simples que para valores maiores de v o campo ϕ não apresenta instabilidade taquiônica e para valores menores o campo ia se manter muito tempo na região taquiônica; este comportamento é mostrado na figura 5.1, na qual se graficou o campo ϕ em função do tempo para diferentes valores de v . Igualmente na figura 5.2 graficou-se ϕ em função de t para diferentes valores iniciais ϕ_0 , no mesmo valor do $v = \sqrt{0.02}m_{pl}$, como se mostra o comportamento do campo não apresenta grandes variações se mudar o ϕ_0 . Para o valor inicial do campo foi escolhido $\phi_0 = 2.83v = 0.4m_p$. Nestas duas figuras forem usadas as mesmas substituições que em (2.66).

Vamos obter de (5.1), dados do potencial para analisar os diferentes regimes do reaquecimento. $V(0) = \frac{m^4}{\lambda}$ é a energia potencial inicial do campo. O máximo encontra-se em $\phi = 0$ e têm dois mínimos em $\phi = \pm v$, figura como na 2.3. O valor da curvatura no máximo é $V''(0) = -m_\phi^2$ e a curvatura é nula para o valor do campo $\phi = v/\sqrt{3}$.

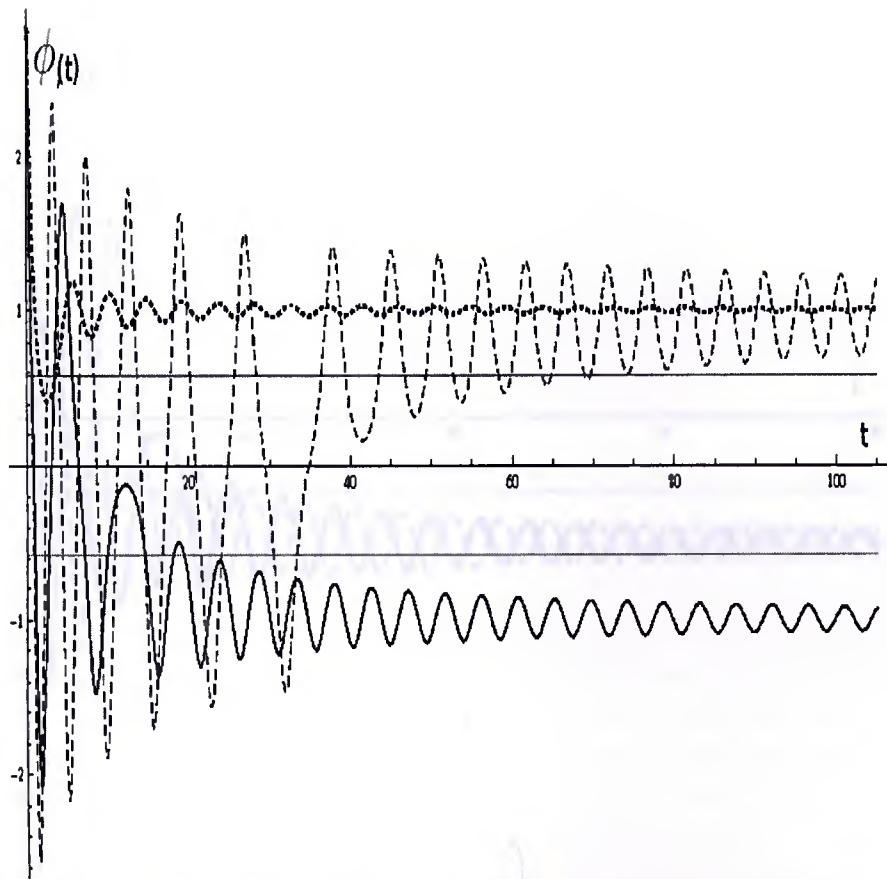


Figura 5.1: φ Vs. t para o valor fixo de $\phi_0 = 0.4m_{pl}$. e diferentes valores de v . Pontilhado $v = 1m_{pl}$, tracejado $v = 0.01m_{pl}$ e linha $v = \sqrt{0.02}m_{pl}$.

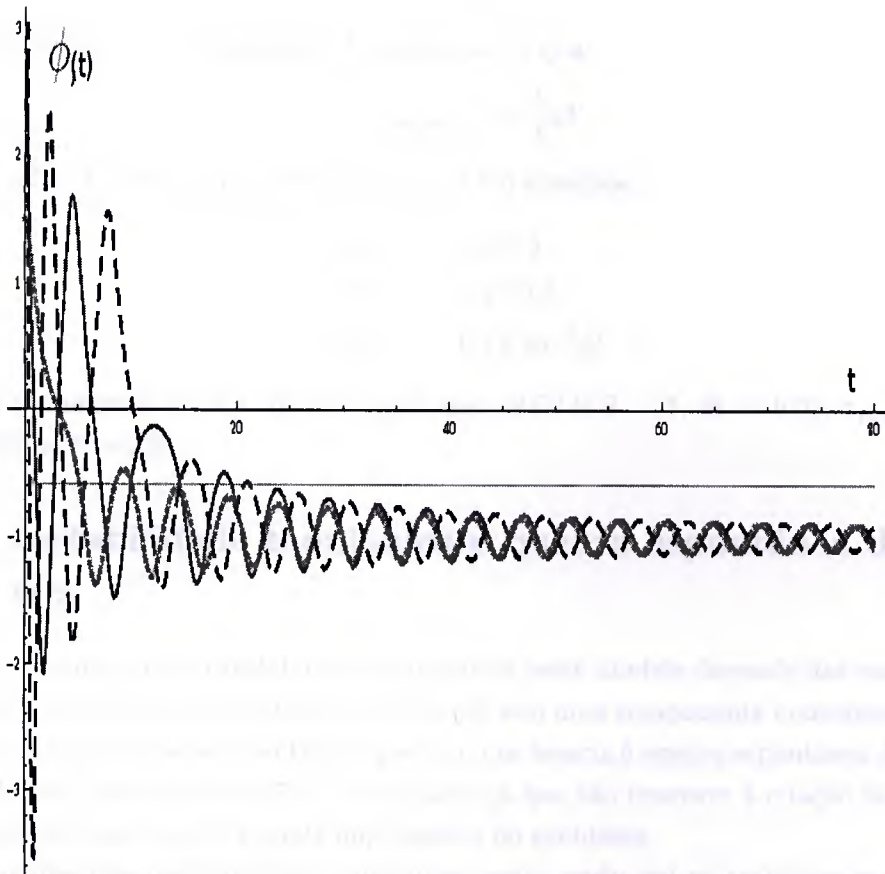


Figura 5.2: φ Vs. t para o valor fixo de $v = \sqrt{0.02}m_{pl}$ e diferentes valores de ϕ_0 . Pontilhado $\phi_0 = 8v$, tracejado $\phi_0 = 1.5v$ e linha $\phi_0 = 2.83v$.

5.1 Parâmetros usados na simulação

Para calcular a densidade de partículas geradas efetuou-se uma simulação de rede em LATTICEEASY. Os parâmetros do programa, que já foram explicados no Capítulo 4, para o potencial (5.1) ficam:

$$A = \frac{1}{0.4} \quad (5.2)$$

$$B = \sqrt{\lambda}(0.4)^{-1+4/2} = 0.4\sqrt{\lambda} \quad (5.3)$$

$$r = 1 \quad (5.4)$$

$$s = -1 \quad (5.5)$$

Tomando como termo dominante do potencial (5.1) a:

$$V_{dominante} = \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (5.6)$$

$\beta = 4$, $cpl = \lambda$, substituindo nas equações (4.13) obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_{pr} &= a\phi/0.4 \\ \vec{x}_{pr} &= 0.4\sqrt{\lambda}\vec{x} \\ dt_{pr} &= 0.4\sqrt{\lambda}a^{-1}dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

Outros parâmetros usados na simulação são: $NDIMS = 1$, $dt = 0.01$, $t_{final} = 200$ e $L = 1000$ e $N = 256$.

5.2 Instabilidade taquiônica e quebra espontânea da simetria

O desenvolvimento de instabilidades taquiônicas neste modelo depende das condições iniciais [34]. Usualmente considera-se o campo ϕ tem uma componente homogênea acompanhada por uma flutuação quântica pequena, o que levaria à quebra espontânea da simetria. Segundo [34], esta aproximação é inadequada já que não descreve a criação de efeitos topológicos, os quais são de grande importância no problema.

A análise das instabilidades taquiônicas nesta seção vai se trabalhar segundo [34]. Vamos considerar que inicialmente o campo não tem nenhuma componente homogênea $\langle \phi \rangle = 0$, consideremos a equação para as flutuações do campo escalar.

$$\ddot{\phi}_k + (k^2 + V'')\phi_k = 0 \quad (5.8)$$

Os modos com $k < m_\phi$ crescem exponencialmente, já que $V'' < 0$, estes modos descreveram flutuações quânticas na fase simétrica $\phi = 0$ perto de $t = 0$. Assumindo que os modos têm a mesma forma que as flutuações quânticas de um campo não massivo, $\phi_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}exp(-ik.t + i\vec{k}.\vec{x})$ a dispersão destes modos em $t > 0$ é:

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \int_0^m \frac{dk^2}{8\pi^2} exp(2t\sqrt{m^2 - k^2}) \quad (5.9)$$

Para calcular a dispersão $\Delta\phi$ pode-se usar a relação:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \sqrt{(\delta\phi(x))^2} \\ &= \sqrt{\phi^2 - \bar{\phi}^2}\end{aligned}\quad (5.10)$$

Assumindo que a componente homogênea do campo é igual a zero:

$$\Delta\phi = \sqrt{\phi^2} = \sqrt{\langle\delta\phi^2\rangle} = \sqrt{\langle\phi^2\rangle}$$

obtém-se:

$$\langle\delta\phi^2\rangle = \langle\phi^2\rangle \quad (5.11)$$

Já que estamos considerando as flutuações quânticas do campo, podemos considerar o valor meio do ϕ^2 como:

$$\langle\phi^2\rangle = \langle k|\phi^2|k\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(k)^2 \quad (5.12)$$

se tem então para $\phi(k, t)^2$,

$$\omega_k = i\sqrt{m^2 - k^2} \quad (5.13)$$

$$\phi^2 = \phi^* \phi = \frac{1}{2k} \exp(2\sqrt{m^2 - k^2}\tau) \quad (5.14)$$

Obtemos

$$\begin{aligned}\langle\phi^2\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(k)^2 \\ &= \int \frac{4\pi k^2 dk}{8\pi^3} \frac{1}{2k} \exp(2\sqrt{m^2 - k^2}\tau) \\ &= \int \frac{4\pi k dk}{8\pi^3} \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{m^2 - k^2}\tau) \\ &= \int \frac{dk^2}{8\pi^2} \exp(2\sqrt{m^2 - k^2}\tau)\end{aligned}\quad (5.15)$$

Os limites de integração serão desde 0 a m já que até esses valores do k a teoria nos diz que teríamos perturbações taquiônicas. Fica então a expressão para a dispersão das flutuações quânticas crescentes da seguinte maneira:

$$\langle\delta\phi^2\rangle = \int_0^m \frac{dk^2}{8\pi^2} \exp(2\sqrt{m^2 - k^2}\tau) = \frac{\exp(2mt)(2mt - 1) + 1}{16\pi^2 t^2} \quad (5.16)$$

Para perturbações iniciais usa-se $\tau = 0$ no expoente,

$$\langle\delta\phi^2\rangle_{per.ini.} = \int_0^m \frac{dk^2}{8\pi^2} = \frac{m^2}{8\pi} \quad (5.17)$$

A dispersão inicial é

$$\langle\delta\phi^2\rangle = \frac{m^2}{8\pi} \quad (5.18)$$

e a amplitude média inicial das flutuações:

$$\delta\phi = \frac{m}{2\pi} \quad (5.19)$$

Se a amplitude desta onda cresce exponencialmente até chegar a o ordem do $v \approx m_\phi/\sqrt{\lambda}$, o universo vai se dividir em domínios de tamanho do ordem m_ϕ^{-1} , nos quais os valores do campo variam desde $O(v)$ até $O(-v)$. Grande parte da energia $V(0)$ é transferida ao gradiente da energia do campo quando ele percorre até o mínimo do potencial. Uma das previsões do modelo é que o preaquecimento taquiônico pode-se completar somente numa oscilação, devido que o estado inicial contém um grande numero de flutuações quânticas com diferentes fases crescendo em diferentes taxas o que leva eventualmente para uma distribuição gaussiana aleatória do campo, portanto não pode-se ter a energia total de volta para o campo alcançar novamente o valor $\phi = 0$.

O crescimento taquiônico das flutuações deve parar em $\sqrt{\langle \delta\phi^2 \rangle} \sim v/2$. já que após o valor da curvatura em $\phi \sim v/(\sqrt{3})$, é nulo e posteriormente passa a ser positivo, terminando assim o regime taquiônico. O crescimento taquiônico para e passa-se ao crescimento das oscilações descritas pela ressonância paramétrica. O tempo no qual o regime taquiônico para t_* , pode-se derivar da equação (5.16),

$$t_* = \frac{1}{2m_\phi} \ln \frac{C}{\lambda} \quad (5.20)$$

C uma constante do ordem $\sim 10^2$. O objetivo da análise no preaquecimento em um modelo determinado é encontrar se o processo é efetivo e consegue a criação de partículas do campo inflacionário. Então vamos estudar o número de ocupação de partículas criadas n_k . Embora para o regime taquiônico não se tenham de maneira estrita criação de partículas pode-se interpretar este como o número de ocupação de partículas criadas após o fim deste regime. Para $m_\phi^2 \geq 0$ o n_k é descrito por (3.101), para $m_\phi^2 < 0$, ω_k seria imaginário portanto esta definição para n_k não funciona, porem equivalentemente podem-se usar $\omega_k = \sqrt{k^2 + |m_\phi|^2}$ ou $\omega_k = |k|$ [34]. A o mudar do regime taquiônico ao de ressonância paramétrica $m_\phi^2 > 0$ os valores de ω_k e n_k têm um bom emparelhamento entre ambos regimes.

Uma possível maneira de estimar n_k é supor que o crescimento para $k \ll m$, é exponencial, usando o tempo t_* tem-se então:

$$n_k \sim \exp(2m_\phi t_*) = O(10^2)\lambda^{-1} \gg 1 \quad (5.21)$$

Para o valor de λ considerado no modelo que usamos, percebe-se que o valor de n_k para as flutuações com $k \ll m_\phi$ é muito grande. Os modos das flutuações que crescem no início do regime taquiônico vão ter uma amplitude consideravelmente maior.

Uma análise completa do processo do preaquecimento inclui também ter em conta backreaction e efeitos de re-espalhamento como já foi mencionado no **Capítulo 4**, é preciso usar simulações de rede como LATTICEASY. Na figura 5.3 representa-se o valor meio do inflaton $\langle \phi \rangle$ em função de t . As linhas horizontais indicam os valores até os quais vamos ter o crescimento das flutuações taquiônicas $\approx \phi_0/2 = \pm 0.2$. Os valores do $\langle \phi \rangle$ e n_k nas figuras estão em unidades do programa, ϕ em unidades de ϕ_0 e k em unidades de $(\phi_0\sqrt{\lambda}a^{-1})^{-1}$

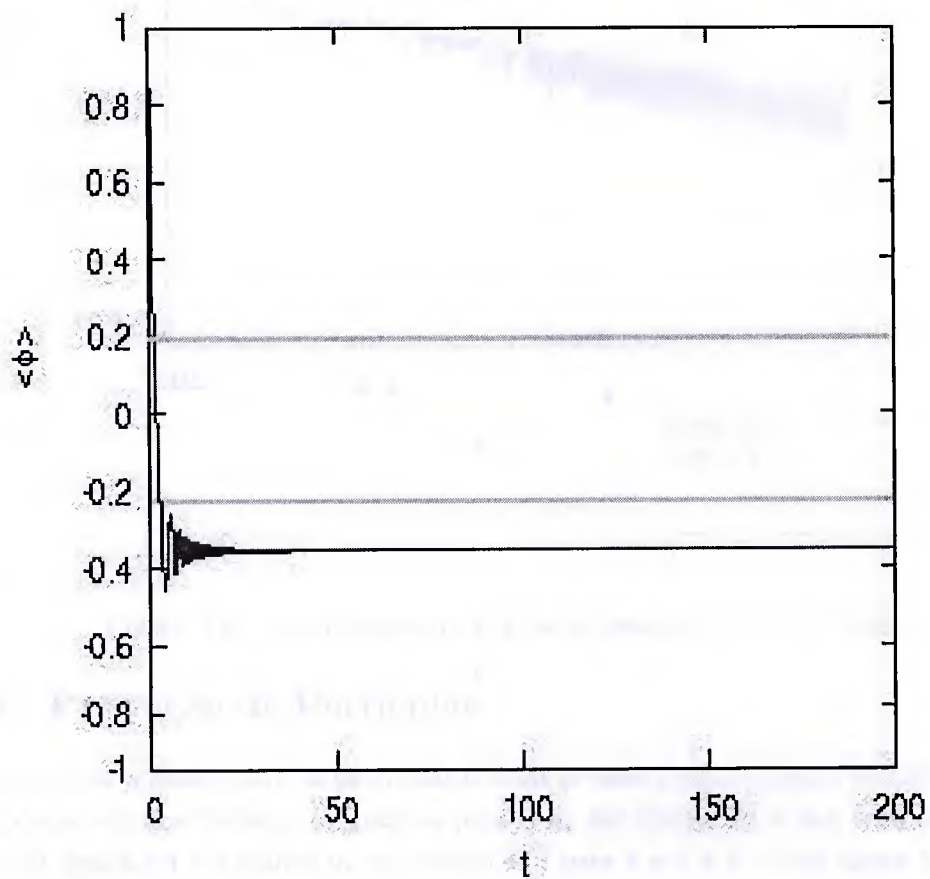


Figura 5.3: Valor médio do campo em função do tempo. As linhas horizontais indicam as regiões do regime taquiônico.

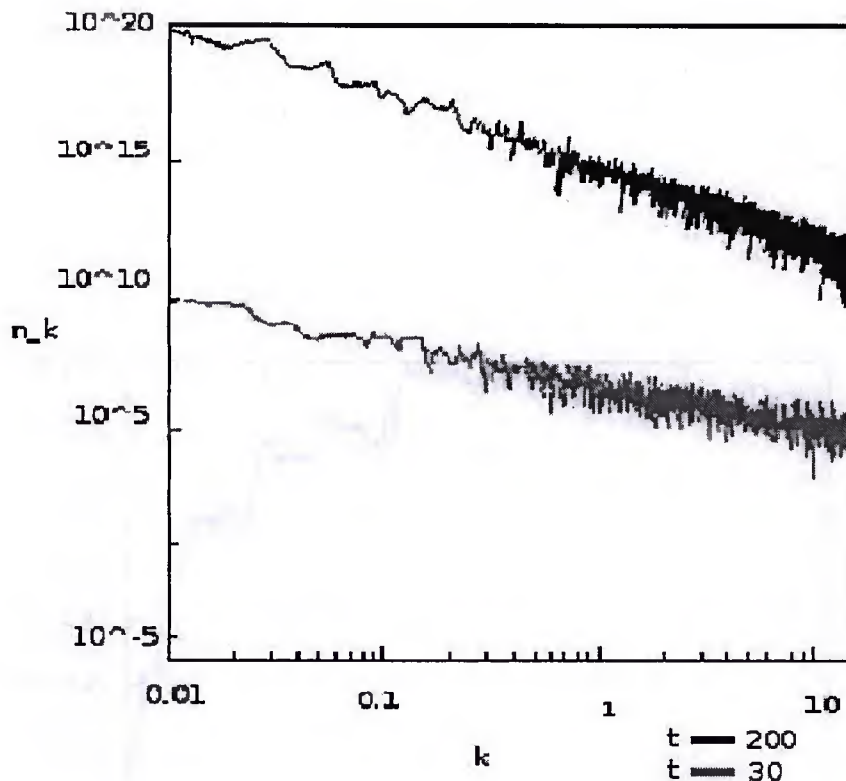


Figura 5.4: n_k em função de k , para os tempos $t = 30$ e $t = 200$.

5.3 Produção de Partículas

Para calcular a quantidade de partículas criadas se usou o n_k do output de LATTICEASY. Dos dados obtidos fizemos os gráficos para o n_k em função de k nos tempos $t = 30$ e $t = 200$, figura 5.4 e o gráfico n_k em função de t para $k = 1$ e $k = 0.05$ figura 5.5.

Analisando a figura 5.4 vemos que como esperava-se da teoria, os modos k menores produzem um crescimento maior dos n_k , e após do campo sair da região taquiônica o crescimento dos n_k atua a ressonância paramétrica nos modos k maiores. Para o tempo $t = 30$ o campo está no percurso desde o ϕ_0 até o mínimo, os modos com $k < |m_\phi|$, ou seja $k < 1$ na figura pela substituição feita no programa, são excitados rapidamente. Após este valor de k os modos já não são mais excitados taquiônicamente e o crescimento é regido pela ressonância paramétrica, este comportamento se confirma no tempo posterior $t = 200$ no qual o crescimento dos n_k para os $k < 1$ foi muito mais excitado do que para os $k > 1$, já que os primeiros passaram muito mais tempo no regime taquiônico. Na

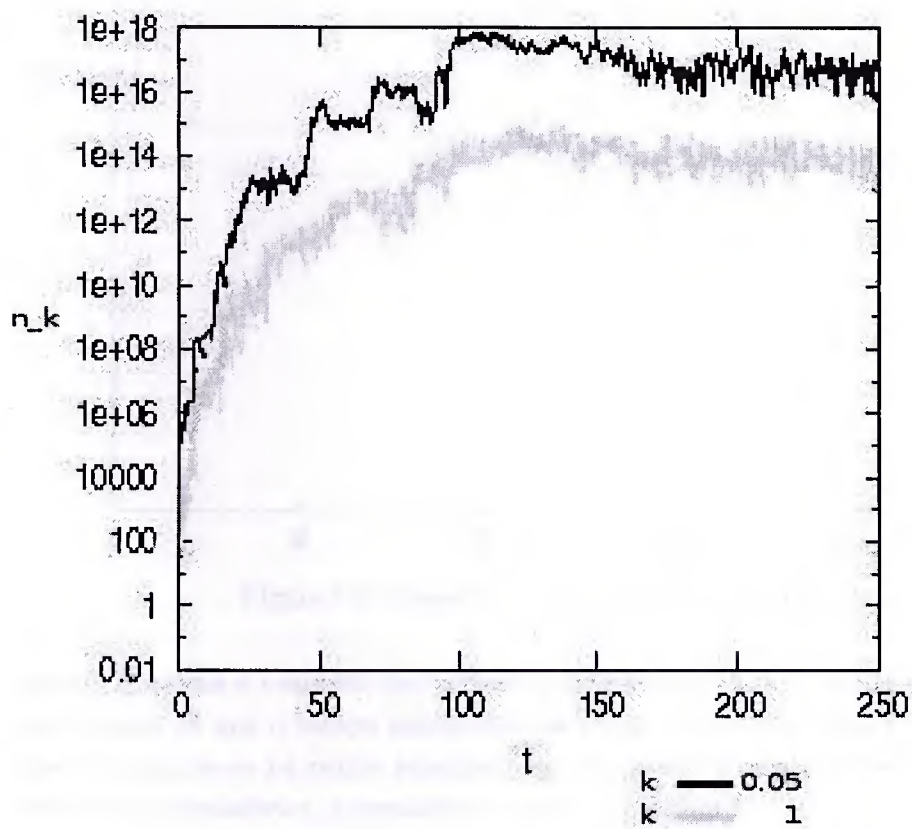


Figura 5.5: n_k em função do t , para os $k = 0.05$ e $k = 1$.

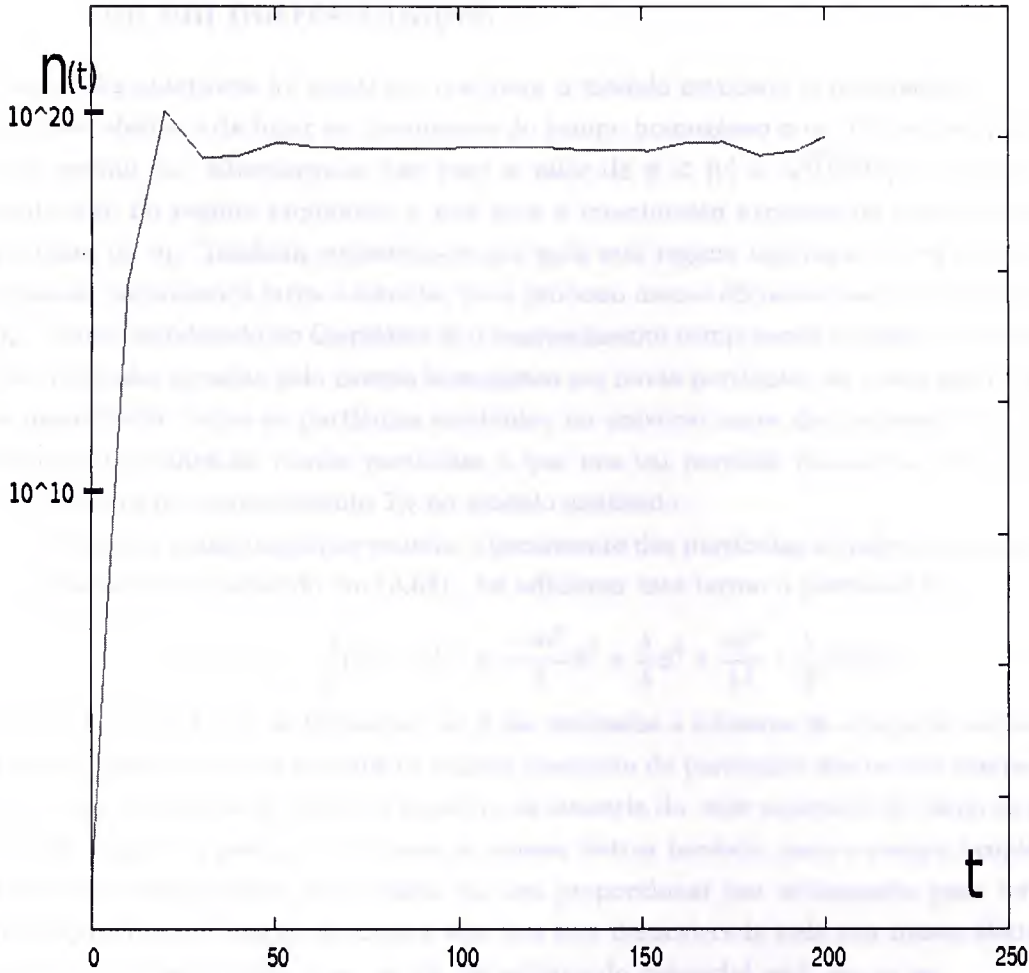


Figura 5.6: Número de densidade de partículas $n(t)$.

figura 5.5, temos a evolução dos n_k para dois diferentes k , a evolução para o $k = 0.5$ é muito maior já que o campo encontra-se na região taquiônica, para $k = 1$ esses modos ainda encontram-se na região taquiônica embora estejam prestes a serem excitados pela ressonância paramétrica, o crescimento é menor que para $k < 1$.

Em conclusão, as flutuações do campo atravessam diferentes regimes para $k < m_\phi$ são excitadas taquiônica e para $k > m_\phi$ são excitados pela ressonância paramétrica. Um dos resultados obtidos na figura 5.5 é de grande interesse já que confirma a suposição feita ao estudar o preaquecimento por simulação de rede, que as flutuações do inflaton decaem com números de ocupação exponencialmente grandes, ou seja, que o campo homogêneo decai em ondas semi-clássicas do campo ϕ .

Na figura 5.6 se mostra o número de densidade de partículas do inflaton n em função do tempo, nela se mostra o crescimento exponencial de n e após um decréscimo gradual até se estabilizar. O comportamento exponencial inicial da figura é consequência da produção explosiva de partículas.

5.4 Estado Final do preaquecimento: Decaimento do inflaton em outros campos

Nas seções anteriores foi mostrado que para o modelo estudado o preaquecimento é um processo efetivo e dá lugar ao decaimento do campo homogêneo ϕ em flutuações quânticas dele mesmo ϕ_k . Encontrou-se que para o valor de $\phi < |v| = \sqrt{0.02}Mp$ o campo entra facilmente no regime taquiônico o que gera o crescimento exponencial das flutuações e portanto do n_k . Também encontrou-se que após este regime têm lugar os regimes de ressonância paramétrica larga e estreita, num processo menos eficiente mas que também gera n_k . Como introduzido no **Capítulo 3**, o reaquecimento compreende também o decaimento das partículas geradas pelo campo homogêneo em novas partículas, as quais geraram subsequentemente todas as partículas existentes no universo antes da nucleossíntese. Além temos a termalização destas partículas o que nos vai permitir chegar até um valor da temperatura do reaquecimento T_R no modelo analisado.

A maneira mais simples de estudar o decaimento das partículas do inflaton é considerar o acoplamento introduzido em (3.63). Ao adicionar este termo o potencial fica:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \equiv \frac{-m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{m^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2 \quad (5.22)$$

Segundo [35] e [36], se as flutuações do ϕ são excitadas a números de ocupação exponencialmente grandes se terá portanto a rápida produção de partículas dos outros campos que estejam acoplados ao ϕ . Embora a quebra da simetria do valor esperado do vácuo no nosso modelo implica a geração de termos de massa efetiva também para o campo acoplado χ Então é a massa efetiva do χ quem vai nos proporcionar um acotamento para ter uma produção eficiente destas partículas sem que seja desacelerada pela sua massa efetiva. A massa do χ desde (5.22) é, $m_\chi = g\phi$, no mínimo do potencial será: $m_\chi = gv$.

Da seção 3.2.2, temos o vínculo: $2g^2\Phi_0^2 \gg m_\phi^2$, necessário para ressonância paramétrica larga, usando esta condição para a massa dos campos no mínimo do potencial temos então a condição:

$$g^2 \leq \lambda \quad (5.23)$$

para que modos do χ sejam suficientemente excitados. Ou seja, somente vai se ter decaimento de partículas do campo ϕ em partículas do χ se a taxa do decaimento é amortecida por uma constante de acoplamento pequena $g^2 \leq 10^{-15}$.

O número de partículas criadas χ , sempre vai se manter exponencialmente menor do que o número de partículas criadas do ϕ , ou seja que o decaimento das partículas do campo homogêneo ϕ vai poder sempre ser descrito mediante efeitos não perturbativos, como tem sido feito na análise deste capítulo. Porém no seu estado final de decaimento em novas partículas por exemplo χ , não pode ser mais tida em conta a consideração de efeitos perturbativos.

Na referência [4] é feito uma análise sobre o decaimento do inflaton para o momento em que os regimes de instabilidade taquiônica e ressonância paramétrica larga não atuam mais sob o campo ϕ . Em (3.91) para um $q \ll 1$ na banda de ressonância estreita, os

autores mencionam como resultado que o decaimento do campo ϕ para em $\Phi \lesssim g^{-1}m_\phi$, já que a auto-interação do campo ϕ devido á interação com partículas vindas do termo no acoplamento $\approx \phi^2$, se torna pouco eficiente se o ϕ é pequeno. Alias, os autores mencionam que para um potencial que inclua quebra espontâneas de simetria e interação com fermions como no nosso modelo, o campo ϕ , somente vai decair completamente se a partícula escalar ϕ pode decair em outras partículas pelo processo descrito em (3.28).

Então para este caso tomando os resultados mencionados anteriormente, a temperatura final do reaquecimento segundo a equação (3.60) sera, $T_R \lesssim 0.17\sqrt{\Gamma m_{pl}}$, com $\Gamma = \frac{g^4 v^2}{8\pi m_\phi}$, como no processo mostrado na figura 3.1. Tomando $m_\phi = \sqrt{\lambda}v$, $\Gamma = \frac{g^4 m}{8\pi \lambda}$. Resultando então numa temperatura de reaquecimento $T_R \lesssim 10^9 GeV$: Esse valor é o valor típico da temperatura de reaquecimento na maior parte dos modelos do preaquecimento. Segundo a relação (3.61) este valor é baixo e não satisfaz a relação $T_R \approx T_{GUT}$. Embora seja possível fazer algumas outras considerações como as referidas em [36], que tornem o processo do reaquecimento muito mais rápido resultando numa temperatura de reaquecimento maior.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação trabalhou-se em uma descrição simples sobre a cosmologia moderna, com ênfase no mecanismo do reaquecimento após inflação.

Atualmente a cosmologia representa um dos campos com mais previsões da ciência. Nos últimos anos se tem feito do cosmos um laboratório desde o qual é possível encontrar dados que foram gerados há milhões de anos. Neste momento se têm muitos projetos com motivações variadas. Alguns tem o objetivo de testar modelos e formalismos como os desenvolvidos nesta dissertação, e outros tentam descobrir muito mais informação que nos permita engrandecer nosso conhecimento, fazendo da cosmologia uma das ciências mais promissoras em curto e longo prazo. Então para se ter um conhecimento geral sobre o modelo cosmológico moderno se faz necessário compreender toda a informação procurada no céu.

As simulações de rede representam também um papel básico na modelagem dos mecanismos usados para descrever processos, por isso a importância de se ter um conhecimento sobre como funcionam e por que são tão necessárias.

Já fazendo referência ao reaquecimento, este texto abordou os dois regimes principais usados neste mecanismo: ressonância paramétrica e instabilidades taquiónicas. Além disso se fez um estudo sobre as características de cada processo de uma maneira introdutória.

Encontrou-se que o mecanismo de preaquecimento no modelo de inflação quintessencial para o potencial escolhido atravessa ambos regimes mencionados no parágrafo anterior, o que leva a um crescimento exponencial do número de ocupação de partículas, primeiro por causa da instabilidade taquiónica e posteriormente pela ressonância. Para modos menores, devido à quebra espontânea de simetria o crescimento dos n_k é exponencial. Portanto o mecanismo é eficiente e posteriormente usou-se a teoria desenvolvida em [4] para encontrar a temperatura de reaquecimento, obtendo $T_R < 10^9 GeV$. Este valor para a temperatura é típico dos modelos inflacionários e consegue ser suficiente para ser relacionada com o seguinte estado da matéria criada: bariogênese em pequenas escalas.

Trabalhou-se com o potencial e se conferiu que o termo do campo escalar que representa quintessência se mantém congelado para a escala de energia em que ocorre o preaquecimento, portanto foi desprezado da análise feita. Também se encontrou que a entrada do

campo ínflaton no regime taquiônico no modelo analisado não depende do valor inicial do ínflaton, mas do valor esperado da energia do vácuo.

Para ampliar os nossos resultados gostaríamos, como um projeto no futuro, considerar diferentes mecanismos para o segundo estado do reaquecimento, como o acoplamento com mais campos [4].

Apêndice A

Produção de Partículas e condições iniciais na rede

Neste apêndice vamos dar uma descrição quântica de um campo escalar em um espaço-tempo FLRW, e mostrar como esta descrição pode-se interpretar e levar até uma forma apropriada para as simulações de rede [33].

A.1 Produção de partículas

No **Capítulo 3**, introduzimos a representação de Heisenberg para o campo χ e derivamos sua equação de movimento (3.67). Implicitamente para derivar estas equações foi considerada a relação de comutação:

$$[\chi(t, x), \pi(t, y)] = i\delta^3(ax - ay) = ia^{-3}(t)\delta^3(x - y) \quad (\text{A.1})$$

que determina a normalização das autofunções:

$$\chi_k \dot{\chi}_k^* - \chi_k^* \dot{\chi}_k = ia^{-3} \quad (\text{A.2})$$

Ou em termos da nova variável X_k , (3.83):

$$X_k \dot{X}_k^* - X_k^* \dot{X}_k = i \quad (\text{A.3})$$

Usando a aproximação adiabática (**WKB**) em (3.86) se obtém uma solução para esta equação:

$$X_k = \frac{\alpha_k(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp(-i \int_0^t \omega_k dt) + \frac{\beta_k(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp(i \int_0^t \omega_k dt) \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\alpha}_k = \frac{\dot{\omega}_k}{2\omega_k} \exp(2i \int_0^t \omega_k dt) \beta_k \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{\beta}_k = \frac{\dot{\omega}_k}{2\omega_k} \exp(-2i \int_0^t \omega_k dt) \alpha_k \quad (\text{A.6})$$

Com a relação de normalização:

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \quad (\text{A.7})$$

Os coeficientes α_k e β_k , coincidem com os coeficientes da transformação de Bogoliubov dos operadores de criação e destruição. Expressando (A.8) em termos de α_k e β_k :

$$\begin{aligned} \chi(t, \mathbf{x}) = & \frac{1}{(2a\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[(\alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \int_0^t \omega_k dt)) \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[(\beta_k a_k + \alpha_k^* a_k^\dagger) \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \int_0^t \omega_k dt)) \right] d^3\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

levando às equações dos operadores de criação e destruição:

$$a_k(t) = \alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger \quad (\text{A.9})$$

$$a_k^\dagger(t) = \beta_k a_k + \alpha_k^* a_k^\dagger \quad (\text{A.10})$$

Cumprindo com a relação de comutação:

$$[a_k(t), a_p^\dagger(t)] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (\text{A.11})$$

Após certas considerações sobre o estado do vácuo, chegamos na expressão para o operador número:

$$N_k = a_k^\dagger(t) a_k(t) \quad (\text{A.12})$$

Vamos considerar o campo χ em $t = 0$, escolhendo $\alpha_k(0) = 1$ e $\beta_k(0) = 0$, portanto $a_k(0)$ e $a_p^\dagger(0)$ definem o estado do vácuo $|0\rangle$, de Fock. Embora o estado inicial do χ é o vácuo em tempos posteriores devido á que $|0\rangle \neq |0, t\rangle$, apresenta-se presença de partículas.

Definindo n_k como o número de ocupação de partículas comóvel com momento k :

$$\begin{aligned} n_k \equiv \langle 0 | N_k(t) | 0 \rangle &= \langle 0 | a_k^\dagger(t) a_k(t) | 0 \rangle \\ &= |\beta_k|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Conseqüentemente:

$$n_k = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{|\dot{X}_k|^2}{\omega_k^2} + |X_k|^2 \right) - \frac{1}{2} \quad (\text{A.14})$$

expressão que já se tinha introduzido no **capítulo 3**. Este resultado nos permite identificar a amplificação das flutuações do campo como produção de partículas. A densidade de número de partículas é:

$$n_\chi = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\pi} n_k(t) \quad (\text{A.15})$$

A.2 Condições iniciais para simulações numéricas

Como mencionamos no **Capítulo 4**, embora estejamos estudando o comportamento clássico da evolução do campo, as condições iniciais das flutuações quânticas são flutuações de vácuo. Nesse capítulo mencionou-se que as condições iniciais são escolhidas no espaço dos momentos usando a transformada de Fourier para obter os valores iniciais.

Vamos então derivar estas condições:

Considerando X_k como o campo quântico no lugar de χ_k , em $t = 0$:

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{X}_k = -i\omega_k X_k \quad (\text{A.17})$$

Agora com o objetivo de quântizar as flutuações, vamos passar da descrição contínua para a discreta, para isso usam-se as relações:

$$\int d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3 \rightarrow \Sigma_k/V \quad (\text{A.18})$$

$$a_k \rightarrow a_k \sqrt{V}/(2\pi)^{3/2} \quad (\text{A.19})$$

Então:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k e^{ik \cdot x} + a_k^\dagger e^{-ik \cdot x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k + a_{-k}^\dagger) e^{ik \cdot x} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a_k e^{ik \cdot x} + a_k^\dagger e^{-ik \cdot x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma_k -i \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a_k - a_{-k}^\dagger) e^{ik \cdot x} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$a(0) = 1$, $\omega \equiv \omega_k(0)$. Agora, voltando na descrição clássica para X , escolhemos da transformada de Fourier do campo clássico:

$$a_k \pm a_{-k}^\dagger \rightarrow |A_k| e^{2i\pi r_k} \quad (\text{A.22})$$

A_k é um número aleatório tomado de uma distribuição Gaussiana com média = 0 e variância = 1. e r_k é um caminho aleatório entre o intervalo [0,1]. Da definição do χ , (A.8) pode-se interpretar este campo como uma coleção de osciladores harmônicos com frequências diferentes, como queremos derivar as condições iniciais podemos pensar em osciladores harmônicos no seu estado fundamental, a amplitude destes estados sera uma distribuição Gaussiana, portanto o fator $\exp(2i\pi r_k)$ da conta por todas as fases da evolução. Finalmente temos para X :

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} |A_k| e^{i\omega_k} \quad (\text{A.23})$$

$$\dot{X}_k = -i\omega_k X_k \quad (\text{A.24})$$

O valor esperado do vácuo do operador quântico X^2 é igual á média espacial do campo clássico X^2 . Ou seja o valor esperado no vácuo da densidade Hamiltoniana é igual á densidade de energia média da configuração clássica.

Finalmente obtemos em termos de χ , as condições iniciais para o campo clássico:

$$\chi_k = X_k \quad (\text{A.25})$$

$$\dot{\chi} = \dot{X}_k - \frac{3}{2} H(0) X_k \quad (\text{A.26})$$

A.3 Considerações na rede

Quando consideram-se simulações de rede teoria quântica de campos e simultaneamente renormalizada, já que os cut-off são escolhidos em acordo com os parâmetros da rede. Por exemplo o cut-off infravermelho defini-se como o $k_{min} = 2\pi/L$, e o cut-off ultravioleta, $k_{max} = \pi/\Delta x$, Δx é o espaçamento da rede.

Vamos calcular a variância do X , isto é:

$$\langle X^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_k} \approx \int_{k < k_{max}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k}$$

e a densidade esperada de energia:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{V} \sum_k \frac{\omega_k}{2} \approx \int_{k < k_{max}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2}$$

para uma simulação ter uma boa resolução dinâmica é necessário ter, $K_{max} \gg M(0)$, $H(0)$, portanto os valores mínimos para $\langle X^2 \rangle$, $\langle H \rangle$ tomando ω_k de (3.87) com $a(t) = 1$, serão:

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \frac{2\pi}{8} \left(k\sqrt{M^2 + k^2}(M^2 + 2k^2) - M^2 \log(k + \sqrt{k^2 + M^2}) \right) |_{k_{max}} \\ &\approx \Delta x^{-4} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

e

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \pi \left(k\sqrt{M^2 + k^2} - M^2 \log(k + \sqrt{k^2 + M^2}) \right) |_{k_{max}} \\ &\approx \frac{1}{8} \Delta x^{-2} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Estas expressões são muito importantes porque dão as condições necessárias para o espaçamento preciso na rede.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Linde, *Inflationary Cosmology*, *Physica Scripta*. Vol. T85, 168-176, 2000.
- [2] D. Bailin and A. Love, *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*, *Graduate Student Series in Physics*, 2004.
- [3] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, *Contemp. Concepts Phys.* 5 (2005) 1-362 [hep-th/0503203v1].
- [4] L. Kofman, A. Linde and A. Starobinsky, *Reheating after Inflation*, *Phys.Rev.Lett.* 73, 3195-3198, (1994) [hep-th/9405187v2].
- [5] L. Kofman, *The Origin of Matter in the Universe: Reheating after Inflation* [astro-ph/9605155v1].
- [6] G. Felder and I. Tkachev, *LATTICEASY: A Program for Lattice Simulations of Scalar Fields in an Expanding Universe*, *Comput.Phys.Commun.*178, 929.2008 [hep-th/0011159v1].
- [7] LATTICEASY, <http://www.science.smith.edu/departments/Physics/fstaff/gfelder/latticeasy>.
- [8] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, *Proc. N.A.S.* 15, 168(1929).
- [9] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, *An introductory course on physical cosmology*, *Instituto de Física Teórica - UNESP*, 2006.
- [10] W. L. Freedman, M. S. Turner, *Measuring and Understanding the Universe*, 10.1103, *RevModPhys.* 75.1433[astro-ph/0308418v1].
- [11] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, *Cambridge University Press*,(2005).
- [12] A. Linde, *Inflationary Cosmology*, *Lect.NotesPhys.* 738, 1-54, 2008 [hep-th/arXiv:0705.0164v2].
- [13] A. H. Guth, *Phys. Rev.*, D23,347, 1981.
- [14] A. Sanoja, *Standard and Inflationary Cosmology*. *Diploma course thesis ICTP*, 2006.
- [15] A. H. Guth, E. J. Weinberg, *Phys. Rev.*, D23,876, 1981.

- [16] E. Komatsu et All., *FIVE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP1) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL INTERPRETATION*, *ApJS* 180, 330-376 2009 [astro-ph/0803.0547v2].
- [17] M. S. Turner, *Cosmology: Standard and Inflationary*, *ECONFC940808:001,1994* [astro-ph/9703196v1].
- [18] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1582 (1998).
- [19] M. Peloso and F. Rosati, *JHEP* 9912, 026 (1999) [hep-ph/9908271].
- [20] G. Huey and J. E. Lidsey, *Phys. Lett. B* 514,217 (2001) [arXiv:astro-ph/0104006].
- [21] K. Dimopoulos and J. W. F. Valle, *Astropart. Phys.* 18, 287 (2002) [astro-ph/0111417].
- [22] G. R. Farrar and Peebles, *Interacting Dark Matter and Dark Energy*, *Astrophys. J.* 604 (2004) 1-11 [astro-ph/0307316v2].
- [23] R. Rosenfeld, J. A. Frieman, *A Simple Model for Quintessential Inflation*, *JCAP* 0509 (2005) 003 [astro-ph/0504191v2].
- [24] L. Kofman, A. Linde and A. Starobinsky, *Towards the Theory of Reheating After Inflation*, *Phys.Rev. D*56 (1997) 3258-3295 [hep-th/9704452v2].
- [25] A. Berera, *Phys. Rev. D* 55, 3346 (1997).
- [26] A. Berera and T.W. Kephart, *Phys. Rev. Lett.* 83, 1084 (1999).
- [27] S. Tsujikawa, *Introductory Review of Cosmic Inflation* [hep-th/0304257v1].
- [28] E. W. Kolb, Michael S. Turner, *The Early Universe*, *Wetsview*, 1994
- [29] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, *Pergamon, London* (1968).
- [30] B. A. Bassett, S. Tsujikawa and D. Wands, *Inflation Dynamics and Reheating*, *Rev.Mod.Phys.* 78:537-589,2006 [astro-ph/0507632v2].
- [31] N.W. Mac Lachlan, *Theory and applications of Mathieu functions* *Dover, New York*, (1961).
- [32] P. R. Anderson, C. Molina-París, D. Evanich, and G. B. Cook, *Study of the preheating phase of chaotic inflation*, *Phys.Rev.D*78, 083514, 2008 [hep-th/08010730v2].
- [33] M. F. Parry, *Topics in Inflationary Preheating*, *Dissertation Brown University*, 1999.
- [34] G. Felder, L. Kofman and A. Linde, *Tachyonic Instability and Dynamics of Spontaneous Symmetry Breaking*, *Phys.Rev. D*64 (2001) 123517 [hep-th/0106179].
- [35] M. Desroche, G. Felder, J. M. Kratochvil and A. Linde, *Preheating in New Inflation*, *Phys.Rev. D*71 (2005) 103516 [hep-th/0501080v1].

- [36] G. Felder and L. Kofman. *The Development of Equilibrium After Preheating*, *Phys.Rev. D63 (2001) 103503* [hep-th/0011160v2].
- [37] M.E Peskin and D.V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Westley PC, New York, 1995.

