UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
1975

1110000194

UM MÉTODO PARA A SIMULAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES DE CONTROLE EM COMPUTADORES DIGITAIS

SANTIAGO ALVES TAVARES

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá para a obtenção do Título de Livre-docente.

00194

Guaratinguetá - São Paulo
Junho de 1975

194

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Livre-docente e aprovada em sua forma final pela Comissão Examinadora.

Presidente da Comissão Examinadora:

Diretor da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá:

Prof. Antonio Gilberto Felippo Fernandes

DEA

MICHEL, MAURÍCIO, SAMIA

SUMÁRIO

O estudo dos sistemas de controle envolve a resolução de sistemas de equações diferenciais. Para os problemas onde a solução analítica não é conhecida lança-se mão do cálculo numérico. Neste trabalho é apresentado um método numérico que pode ser usado para simular em computador digital os sistemas de controle lineares. A principal característica deste método é não acumular erro a medida que vai efetuando a integração das equações. Isto é, o erro não é acumulado a medida que se aumenta o número de iterações. A escolha adequada do passo e do polinômio de integração permite que a integração seja feita com grandes deslocamentos em cada iteração.

Í N D I C E

Capítulo 1 : INTRODUÇÃO

1.1 Fases de estudo de um sistema de controle ... 1
1.2 Modelo físico 1
1.3 Comportamento do modelo matemático 2
1.4 Métodos usados 3
1.5 Solução numérica 3
1.6 Método numérico 4
1.7 Descrição do método 5
1.8 Desenvolvimento da matéria 6

Capítulo 2 : SISTEMA DESCRITO POR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM

2.1 Interpolação por meio de um polinômio de primeiro grau 7
2.2 Aplicação aos osciladores 11
22.1 Algorítimo para o oscilador simples ... 11
22.2 Comparação com o método de Newmark 13
22.3 Solução exata para o oscilador simples. 13
22.4 Matriz de erro do algorítimo, no caso do oscilador simples 16
22.5 Análise da convergência no caso do oscilador simples 18
22.6 Matriz estável para o oscilador simples 21
2.3 Interpolação por meio de um polinômio do terceiro grau 23
2.4 Aplicação ao oscilador simples..... 25
24.1 Algorítimo para o oscilador simples ... 25
24.2 Matriz de erro 27
2.5 Generalização para qualquer polinômio 30
25.1 Integração com passo negativo 30
25.2 Comparação entre os dois casos 32

25.3 Relações entre a_i, b_i e c_i 33
25.4 Condições de estabilidade do algorítimo 35
25.5 Cálculo dos coeficientes a_i 36
25.6 Cálculo dos coeficientes c_i 37
25.7 Cálculo dos coeficientes b_i 39
2.6 Algorítimo para um sistema de múltiplos graus de liberdade, interpolado por um polinômio do primeiro grau 39
2.7 Algorítimo para um sistema de múltiplos graus de liberdade, interpolado por um polinômio do terceiro grau 41
2.8 Algorítimo para um sistema de múltiplos graus de liberdade, interpolado por um polinômio do quinto grau 43
2.9 Relações de recorrência para o cálculo da derivada de ordem n de R 46
29.1 Obtenção dos coeficientes a_i^j 47
29.2 Obtenção dos coeficientes b_i^j 48
29.3 Sequência de cálculo doe a_i^j e b_i^j 49
2.10 Algorítimo para um sistema de múltiplos graus de liberdade, interpolado por um polinômio de sétimo grau 49
2.11 Algorítimo para um sistema de g graus de liberdade interpolado por um polinômio de grau q 54

Capítulo 3 : SISTEMA DESCRITO POR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR DE ORDEM p

3.1 Expressão geral 56
3.2 Cálculo dos coeficientes a_{jk}^o e a_{jk}^1 57

32.1 Relações entre os coeficientes a^{o}_{jk} e a^{1}_{jk} 57
32.2 Relações entre os coeficientes para que o algorítimo seja estável 59
32.3 Cálculo dos coeficientes a^{1}_{jk} 62
3.3 Cálculo dos coeficientes b^{j}_{i} e c^{j}_{i} 63

Capítulo 4 : EXEMPLOS

4.1 Sistema oscilante amortecido com entrada em degrau 68
41.1 Formulação do problema 68
41.2 Solução teórica do problema 68
4.2 Sistema oscilante amortecido com entrada em rampa 80
42.1 Formulação do problema 80
42.2 Solução teórica do problema 80

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 FASES DE ESTUDO DE UM SISTEMA DE CONTROLE

O estudo dos sistemas de controle pode ser feito de acordo com as seguintes fases {1} .

Elaboração de um modelo físico cujo comportamento seja o mais representativo possível do sistema real. O modelo físico será tanto mais sofisticado quanto melhor representar o sistema real.

Obtenção do modelo matemático representante do modelo físico. Isto é, escrever as equações diferenciais do modelo físico.

Estudar o comportamento do modelo matemático pela resolução das equações diferenciais.

Escolha dos parâmetros físicos, baseado no comportamento do modelo matemático, de modo que o sistema venha a ter as características desejadas.

1.2 MODELO FÍSICO

Para construir o modelo físico são feitas várias simplificações ou aproximações, que normalmente são ditadas pela experiência do engenheiro de controle. Entre elas temos

Desprezar pequenos efeitos. É o caso do estudo do equilíbrio de forças num avião, onde se desprezam os efeitos do vento solar. Já no caso de um satélite com grandes paineis de ba-

terias solares este efeito não pode ser desprezado, pois é de grande importância para a sua estabilidade em órbita. Com isto conseguimos reduzir o número de equações diferenciais e o seu grau de complexidade.

É feita a hipótese de que o meio não é afetado pelo sistema. Como no caso do estudo do controle da temperatura de um forno, supomos que o ambiente (atmosfera) influencia na temperatura do forno, mas que o forno não influencia na temperatura atmosférica.

Quando os sistemas são contínuos costumamos discretiza-los. No caso de uma viga oscilando podemos supor que a massa está concentrada em alguns pontos. No caso de um amortecedor a gas, podemos substituir o gas por uma mola. Isto equivale a substituir as equações de derivadas parciais por ordinárias.

Para simplificar o modelo matemático costumamos linearizar o problema, isto é, supor que o comportamento dos fenômenos é linear. O que nos fornece equações diferenciais lineares que são de solução mais simples.

1.3 COMPORTAMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

Para se estudar o comportamento do modelo matemático necessitamos resolver as equações diferenciais, que nos problemas de controle fornece o comportamento das variáveis do problema em relação ao tempo.

Em geral, o projetista quer um sistema de controle estável. Do ponto de vista matemático este sistema deve ter a caracterÍstica de amortecer os efeitos de qualquer pertubação, isto é, os termos da solução da equação diferencial que dependem do tempo, excluidos os termos correspondentes a função de entrada, tendem para zero quando o tempo tende para infinito.

Um dos métodos de análise do comportamento do sistema consiste em usar como função de entrada ou a função impulso, ou a função degrau ou a função senoidal, e verificar de que mo

do o sistema atinge o regime permanente, se atingir.

1.4 MÉTODOS USADOS

No caso dos sistemas lineares normalmente se recorre à transformada de Laplace para se resolver as equações diferenciais. No caso não linear são usados os métodos do plano de fase e o de Liapunov.

Um outro modo de resolver as equações diferenciais é por meio de simulação em computador analógico. Ele tem a vantagem de podermos variar com facilidade os parâmetros físicos chegando-se ao projeto de características desejadas.

Uma das desvantagens do computador analógico é que os parâmetros não são calculados pelo computador e sim fornecidos pelo programador. Por outro lado há a imprecisão dos componentes eletrônicos que compõem o computador.

Com o desenvolvimento do computador digital, que cada vez são mais rápidos e de maior memória central, foi possível começar a simular neles os sistemas de controle.

1.5 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução das equações diferenciais em computador digital é feita numericamente.

Sendo os problemas de controle problemas do tipo em que as condições de contorno são especificadas de um lado sómente do intervalo (em geral em t=0), os métodos numéricos começam a apresentar erro cada vez maior (acumulação) à medida que se avança no tempo {2}.

Neste trabalho apresentamos um método para a solução numérica de equações diferenciais lineares de ordem p, do tipo das usadas em sistemas de controle, onde o erro permanece aproximadamente constante com o tempo.

1.6 MÉTODO NUMÉRICO

Newmark {5} em 1959 sugere um método de integração numérica para a resolução de problemas dinâmicos estruturais. Este método apresenta boa precisão e trabalha bem em problemas mais complicados

Chan e Firmin {3} em 1970 usaram polinômios de interpolação de Hermitian para descrever o comportamento de um elemento tronco-cônico de torre de refrigeração.

Argyris e Chan {4} em 1972 usaram os polinômios de interpolação de Hermitian na solução do problema dinâmico estrutural pelo método de elementos finitos.

Bathe e Wilson {6} em 1973 analisam o problema da propagação de erro com o tempo (estabilidade) dos métodos de Newmark, Houbolt e Wilson , propondo condições a que os métodos devem satisfazer para serem estáveis.

Argyris, Dunne e Angelopoulos {7} em 1973 sugerem um método para a solução dos problemas dinâmicos estruturais, que é uma evolução do método proposto em {4}. O método proposto mostra-se estável para pequenos passos. O apêndice deste trabalho sugere um modo de tornar estável o método, segundo {6}. Neste mesmo ano é publicado pelos tres, {8} um trabalho, que é uma evolução do apêndice do trabalho anterior, onde é sugerido um método estável para sistemas lineares.

Em nosso trabalho, partindo de {8} , desenvolvemos o método de modo a se ter um algorítimo de uso prático e de programação simples para qualquer grau de polinômio de interpolação, para uma equação linear diferencial de segunda ordem.

Apresentamos uma justificativa para a estabilidade do método, mostrando que o erro permanece aproximadamente constante com o tempo.

Desenvolvemos, também, o algorítimo para equação diferenciais lineares de qualquer ordem, interpoladas por polinômios de qualquer grau.

Apresentamos um programa de computador, em Algol, para a integração de sistemas de equações lineares.

Uma segunda vantagem deste método é que ele resolve tanto uma equação quanto um sistema de n equações com o mesmo algorítimo (portanto mesmo programa de computador), sendo, portanto, particularmente vantajoso para a simulação de sistemas de controle lineares em computador digital.

1.7 DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Sejam dois instantes t_o e t_1 , para os quais a função adquire os valores r_o e r_1 . Neste método supomos que o termo de mais alta ordem da equação diferencial é descrito, no intervalo de t_o a t_1, por um polinômio de grau q, e que este polinômio satisfaz a função e suas derivadas nos extremos do intervalo (em t_o e t_1). Isto permite montar o algorítimo ma forma

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r^{(n)} \end{Bmatrix} = \mathbb{A} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \\ \vdots \\ \vdots \\ r_o^{(n)} \end{Bmatrix} + \mathbb{B} \qquad (17.1)$$

onde $\mathbb{B}$ engloba a função de entrada. Dada as condições no instante t_o, por meio de (17.1) determinam-se os valores no instante t_1.

A condição de estabilidade é assegurada pelas condições impostas na construção das matrizes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, que são: o algorítimo deve integrar com passo positivo ou negativo, e que a combinação das derivadas de maior ordem do polinômio interpolante

para os extremos do intervalo devem se anular quando o passo tender para o infinito.

1.8 DESENVOLVIMENTO DA MATÉIRA

No capítulo 2 está desenvolvida a idéia inicial do método, com aplicações ao oscilador simples. É mostrado em detalhes a obtenção do algorítimo estável no caso da equação diferencial linear de segunda ordem e a generalização para qualquer polinômio de interpolação. É também analisado o problema da estabilidade e erro do método.

No capítulo 3 é feita a generalização do algorítimo para a integração de sistemas de equações diferenciais lineares de qualquer ordem, com polinômios de interpolação de qualquer grau.

No capítulo 4 são dados alguns exemplos, comparando-se a solução numérica pelo algorítimo com a solução exata. Observando-se que em todos os casos, mesmo para um tempo igual a 50 vezes a constante de tempo, o algorítimo ainda fornece um valor de regime, que coincide com o teórico.

CAPÍTULO 2

SISTEMA DESCRITO POR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM.

2.1 - INTERPOLAÇÃO POR MEIO DE UM POLINOMIO DO PRIMEIRO GRAU

A equação diferencial de um sistema em vibração com multíplos graus de liberdade é da forma

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = f \tag{21.1}$$

onde, no caso do sistema massa-mol -amortecedor

M = matriz contendo as massas do sistema
C = matriz contendo os amortecimentos do sistema
K = matriz contendo as constantes de mola do sistema
f = vetor das forças aplicadas ao sistema
r = vetor dos deslocamentos do sistema

A equação (1) pode ser colocada na forma

$$M\ddot{r} = - Kr - C\dot{r} + f = R \tag{21.2}$$

ou

$$\ddot{r} = - M^{-1}Kr - M^{-1}C\dot{r} + M^{-1}f \tag{21.3}$$

Suponhamos que R seja descrito por um polinômio, no intervalo de tempo Δt.

No caso de ser descrito por um polinômio do primeiro grau temos

$$R = a_o + a_1 t \tag{21.4}$$

Colocando em função da variável admensional

$$\xi = (t - t_o)/\tau \rightarrow d\xi = dt/\tau$$

$$\xi = 0 \text{ para } t = t_o \tag{21.5}$$

$$\xi = 1 \text{ para } t = t_o + \tau$$

onde τ é o intervalo de tempo considerado no qual (21.4) é válido. Assim

$$R(\xi) = a_o + a_1 \tau \xi \tag{21.6}$$

As constantes a_o e a_1 são obtidas pelas condições de contorno nos extremos do intervalo τ.

Então

$$R_o = R(\xi)\Big|_{\xi = 0} \tag{21.7}$$

$$R_1 = R(\xi)\Big|_{\xi = 1}$$

donde

$$R_o = a_o$$

$$R_1 = a_o + a_1 \tau \tag{21.8}$$

e

$$a_o = R_o$$

$$a_1\tau = R_1 - R_o \tag{21.9}$$

Substituindo em (21.6)

$$R(\xi) = R_o + \xi(R_1 - R_o) \tag{21.10}$$

ou

$$R(\xi) = (1 - \xi)\, R_o + \xi\, R_1 \tag{21.11}$$

De (21.2) temos

$$\ddot{Mr} = R(t) \tag{21.12}$$

integrando

$$\int_{t_o}^{t_o + \tau} Mr\,dt = \int_{t_o}^{t_o + \tau} R(t)\,dt \tag{21.13}$$

$$\dot{Mr}\Big|_{t_o + \tau} - \dot{Mr}\Big|_{t_o} = \int R(t)\,dt\Big|_{t_o}^{t_o + \tau} \tag{21.14}$$

chamando

$$\dot{Mr}_o = Mr\Big|_{t_o} \tag{21.15}$$

temos

$$M\dot{r} = \int_{t_o}^{t_o+\tau} R(t)dt + M\dot{r}_0 \qquad (21.16)$$

tornando a integrar

$$\int_{t_o}^{t_o+\tau} M\dot{r}dt = \iint_{t_o}^{t_o+\tau} R(t)dt^2 + \int_{t_o}^{t_o+\tau} M\dot{r}_o dt \qquad (21.17)$$

$$Mr\Big|_{t_o+\tau} - Mr\Big|_{t_o} = \left[\iint R(t)dt^2 + \int M\dot{r}_o dt \right]_{t_o}^{t_o+\tau} \qquad (21.18)$$

Chamando

$$M\dot{r}_1 = M\dot{r}\Big|_{t_o+\tau} \qquad Mr_1 = Mr\Big|_{t_o+\tau} \quad Mr_o = Mr\Big|_{t_o} \qquad (21.19)$$

temos

$$M\dot{r}_1 = \int_{t_o}^{t_o+\tau} R(t)dt + M\dot{r}_o \qquad (21.20)$$

$$Mr_1 = \left| \iint R(t)dt^2 + \int M\dot{r}_o dt \right|_{t_o}^{t_o+\tau} + Mr_o \qquad (21.21)$$

onde r_o e $\dot{r}_o$ são os valores no início do intervalo (no instante t_o) e r_1 e $\dot{r}_1$ são os valores no fim do intervalo (no instante $t_o+\tau$).

Mudando da variável t para a variável admensional ξ, temos

$$\tau\xi = t - t_o \qquad dt = \tau d\xi \qquad (21.22)$$

$$\dot{R} = \frac{dR(t)}{dt} = \frac{dR(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{R'}{\tau} \quad \text{onde } R' = \frac{dR(\xi)}{d\xi} \qquad (21.23)$$

Substituindo em (21.20) e (21.21) Obtemos

$$M\dot{r}_1 = \int_{\xi=0}^{\xi=1} \tau R(\xi)d\xi + M\dot{r}_o \qquad (21.24)$$

$$Mr_1 = \left| \iint \tau^2 R(\xi)d\xi + \int \tau M\dot{r}_o d\xi \right|_{\xi=0}^{\xi=1} + Mr_o \qquad (21.25)$$

Substituindo a expressão $R(\xi)$ de (21.11) em (21.24) obtemos

$$\dot{Mr}_1 = \int_0^1 \tau \left| (1-\xi)R_0 + \xi R_1 \right| d\xi + \dot{Mr}_0 \qquad (21.26)$$

$$\dot{Mr}_1 = \left[\tau(\xi - \frac{\xi^2}{2})R_0 + \frac{\tau\xi^2}{2} R_1 \right]_0^1 + \dot{Mr}_0 \qquad (21.27)$$

$$\dot{Mr}_1 = \frac{\tau}{2} R_0 + \frac{\tau}{2} R_1 + \dot{Mr}_0 \qquad (21.28)$$

Substituindo (21.11) em (21.24) e fazendo as integrações vem

$$Mr_1 = \left[\iint \tau \left| (1-\xi)R_0 + \xi R_1 d\xi + \int \tau \dot{Mr}_0 d\xi \right]_{\xi=0}^{\xi=1} + Mr_0 \qquad (21.29)$$

$$Mr_1 = \left[\iint \{ \tau^2 (\xi - \frac{\xi^2}{2}) R_0 + \frac{\xi^2}{2} R_1 \right| + \tau \dot{Mr}_0 \Big]_{\xi=0}^{\xi=1} + Mr_0 \qquad (21.30)$$

$$Mr_1 = \tau^2 \left[\frac{1}{3} R_0 + \frac{1}{6} R_1 \right] + \tau \dot{Mr}_0 + Mr_0 \qquad (21.31)$$

$$Mr_1 = Mr_0 + \tau \dot{Mr}_0 + \frac{\tau^2}{3} R_0 + \frac{\tau^2}{6} R \qquad (21.32)$$

Grupando os resultados

$$\dot{Mr}_1 = \dot{Mr}_0 + \frac{\tau}{2} R_0 + \frac{\tau}{2} R_1 \qquad (21.33)$$

$$Mr_1 = Mr_0 + \tau \dot{Mr}_0 + \frac{\tau^2}{3} R_0 + \frac{\tau^2}{6} R_1 \qquad (21.34)$$

Onde r_0 e $\dot{r}_0$ são os valores nb instante t_0 (condições iniciais) e r_1 e $\dot{r}_1$ são os valores no instante $t_0+\tau$ (a serem calculados).

2.2 APLICAÇÃO AO OSCILADOR SIMPLES

22.1 Algorítimo para o oscilador simples

A equação diferencial do oscilador simples é

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0 \tag{22.1}$$

Explicitando o valor de R temos

$$R = \ddot{r} = - \omega^2 r \tag{22.2}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} R_o &= - \omega^2 r_o \\ R_1 &= - \omega^2 r_1 \end{aligned} \tag{22.3}$$

substituindo em (21.33) e (21.34) e observando que neste caso M=1, obtemos

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + \frac{\tau}{2} (-\omega^2 r_o) + \frac{\tau}{2} (-\omega^2 r_1) \tag{22.4}$$

$$r_1 = r_o + \tau \dot{r}_o + \frac{\tau^2}{3} (-\omega^2 r_o) + \frac{\tau^2}{6} (-\omega^2 r_1) \tag{22.5}$$

Colocando na forma matricial temos

$$\frac{\tau\omega^2}{2} r_1 + \dot{r}_1 = - \frac{\tau\omega^2}{2} r_o + \dot{r}_o \tag{22.6}$$

$$\frac{\tau^2\omega^2}{6} r_1 + \dot{r}_1 = (1 - \frac{\tau^2\omega^2}{3}) r_o + \tau \dot{r}_o \tag{22.7}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\tau\omega^2}{2} & 1 \\ 1 + \frac{\tau^2\omega^2}{6} & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} - \frac{\tau\omega^2}{2} & 1 \\ (1 - \frac{\tau^2\omega^2}{3}) & \tau \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \tag{22.8}$$

invertendo a matriz de r_1 , $\dot{r}_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 - \frac{\tau^2\omega^2}{6} & \frac{\tau\omega^2}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{-(1+\frac{\tau^2\omega^2}{6})} \qquad (22.9)$$

premultiplicando a matriz de r_o $\dot{r}_o$ por (22.9) vem

$$\frac{-1}{(1+\frac{\tau^2\omega^2}{6})} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -(1+\frac{\tau^2\omega^2}{6}) & \frac{\tau\omega^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\tau\omega^2}{2} \\ (1-\frac{\tau^2\omega^2}{3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tau \end{Bmatrix} \qquad (22.10)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\tau^2\omega^2}{3} & \tau \\ -\tau\omega^2(1-\frac{\tau^2\omega^2}{12}) & (1-\frac{\tau^2\omega^2}{3}) \end{bmatrix} \frac{1}{(1+\frac{\tau^2\omega^2}{6})} \qquad (22.11)$$

O sistema (22.8) pode ser escrito então como

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1+\frac{\tau^2\omega^2}{6})} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\tau^2\omega^2}{3} & \tau \\ -\tau\omega^2(1-\frac{\tau^2\omega^2}{12}) & (1-\frac{\tau^2\omega^2}{3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad (22.12)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \mathbb{A} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad (22.13)$$

onde $\mathbb{A}$ é dada por (22.11).

A expressão (22.13) é o algorítimo para o oscilador. Dado os valores no instante t_o (r_o e $\dot{r}_o$) calculamos os valores no instante $t_o+\tau$ (r_1 e $\dot{r}_1$). Com estes valores, usando outra vez o algorítimo calculamos os valores no instante $t_o+2\tau$, isto é, fazendo os valores do instante $t_o+\tau$ como entrada (condições iniciais) no algorítimo.

22.2 Comparação com o método de Newmark

As equações (21.34) e (21.35) são equivalentes ao método de Newmark para $\gamma=1/2$ e $\beta=1/6$, que é o caso onde foi considerada a aceleração linear ao longo do intervalo. As expressões de Newmark são

$$v_{n+1} = v_n + (1-\gamma)a_n h + \gamma a_{n+1} h \tag{22.14}$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + (1/2-\beta)a_n h^2 + \beta a_{n+1} h^2 \tag{22.15}$$

Fazendo a equivalência com a notação que estamos usando, temos

$$h=\tau \qquad v=\dot{r} \qquad x=r \qquad a=\ddot{r}=R/M \tag{22.16}$$

donde

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + \frac{1}{2}\frac{R_o}{M}\tau + \frac{1}{2}\frac{R_1}{M}\tau \tag{22.17}$$

$$r_1 = r_o + \tau\dot{r}_o + \frac{1}{3}\frac{R_o}{M}\tau^2 + \frac{1}{6}\frac{R_1}{M}\tau^2 \tag{22.18}$$

No caso da aceleração ter um valor médio ao longo do intervalo, dado pela média entre os valores no início e no fim do intervalo, Newmark toma $\gamma=1/2$ e $\beta=1/4$.

Para este caso temos

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + \frac{1}{2}\frac{R_o}{M}\tau + \frac{1}{2}\frac{R_1}{M}\tau \tag{22.19}$$

$$r_1 = r_o + \tau\dot{r}_o + \frac{1}{4}\frac{R_o}{M}\tau^2 + \frac{1}{2}\frac{R_1}{M}\tau^2 \tag{22.20}$$

22.3 Solução exata para o oscilador simples

Analisemos agora qual seria a solução exata. A solução exata da equação diferencial

$$\ddot{r} = -\omega^2 r \tag{22.21}$$

é do tipo

$$r = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \tag{22.22}$$

Sejam r_o e $\dot{r}_o$ as condições iniciais (no instante $t=t_o$). Como estas condições devem satisfazer a solução, temos

$$r_o = A \cos \omega t_o + B \operatorname{sen} \omega t_o \tag{22.23}$$

$$\dot{r}_o = - A\omega \operatorname{sen} \omega t_o + B\omega \cos \omega t_o \tag{22.24}$$

donde obtemos de (22.23)

$$A = \frac{r_o - B \operatorname{sen} \omega t_o}{\cos \omega t_o} \tag{22.25}$$

Substituindo em (22.24) vem

$$\dot{r}_o \cos \omega t_o = -(r_o - B \operatorname{sen} \omega t_o)\omega \operatorname{sen} \omega t_o + B\omega \cos^2 \omega t_o \tag{22.26}$$

$$\dot{r}_o \cos \omega t_o = -r_o \omega \operatorname{sen} \omega t_o + B\omega \operatorname{sen}^2 \omega t_o + B\omega \cos^2 \omega t_o \tag{22.27}$$

$$\dot{r}_o \cos \omega t_o = -r_o \omega \operatorname{sen} \omega t_o + \omega B \tag{22.28}$$

Obtendo-se assim o valor de B como

$$B = \frac{r_o}{\omega} \cos \omega t_o + r_o \operatorname{sen} \omega t_o \tag{22.29}$$

e, substituindo em (22.25) obtemos o valor de A, que é

$$A = \frac{r_o}{\cos \omega t_o} - \frac{1}{\cos \omega t_o} \left(\frac{\dot{r}_o}{\omega} \operatorname{sen} \omega t_o \cos \omega t_o + r_o \operatorname{sen}^2 \omega t_o \right) \tag{22.30}$$

$$A = - \frac{r_o}{\omega} \operatorname{sen} \omega t_o + r_o \cos \omega t_o \tag{22.31}$$

Substituindo os valores de A e B dados respectivamente por (22.31) e (22.29) em (22.22) podemos escrever a solução em fun-

ção das condições iniciais como

$$r = \left(-\frac{r_o}{\omega} \operatorname{sen} \omega t_o + r_o \cos \omega t_o\right) \cos \omega t + \left(\frac{r_o}{\omega} \cos \omega t_o + r_o \operatorname{sen} \omega t_o\right) \operatorname{sen} \omega t \qquad (22.32)$$

$$r = (\cos \omega t_o \cos \omega t + \operatorname{sen} \omega t_o \operatorname{sen} \omega t)\, r_o + \frac{1}{\omega}(-\operatorname{sen} \omega t_o \cos \omega t + \cos \omega t_o \operatorname{sen} \omega t)\, \dot{r}_o \qquad (22.33)$$

$$r = \cos(\omega t - \omega t_o)\, r_o + \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t - \omega t_o)\, \dot{r}_o$$
$$= \cos \omega(t - t_o)\, r_o + \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega(t - t_o)\, \dot{r}_o \qquad (22.34)$$

Sendo o intervalo tomado de t_o a $t_o+\tau$, a variação de tempo $t-t_o$ é igual a τ. Substituindo em (22.34) temos

$$r = (\cos \omega\tau)\, r_o + \frac{1}{\omega} (\operatorname{sen} \omega\tau)\, \dot{r}_o \qquad (22.35)$$

Para obtermos a expressão da derivada, basta derivarmos (22.35), o que fornece

$$\dot{r} = -\omega \operatorname{sen} \omega\tau\, r_o + \cos\omega\tau\ \dot{r}_o \qquad (22.36)$$

As expressões (22.35) e (22.36) podem ser colocadas na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega\tau & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega\tau \\ -\omega \operatorname{sen} \omega\tau & \cos \omega\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad (22.37)$$

Chamemos esta matriz de $\mathbb{A}_o$

$$\mathbb{A}_o = \begin{bmatrix} \cos \omega\tau & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega\tau \\ -\omega \operatorname{sen} \omega\tau & \cos \omega\tau \end{bmatrix} \qquad (22.38)$$

22.4 Matriz de erro do algorítimo, no caso do oscilador simples

Retornando à expressão (22.12) podemos colocar a matriz na forma

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_o + \mathbb{A}_e \qquad (22.39)$$

onde $\mathbb{A}_o$ é a matriz da solução exata, dada por (22.38), e o erro será dado por

$$\mathbb{A}_e = \mathbb{A} - \mathbb{A}_o \qquad (22.40)$$

Para calcularmos este erro desenvolveremos, inicialmente, $\mathbb{A}_o$ em série, para depois efetuarmos a subtração. Consideraremos como erro o primeiro termo da série diferença, isto é, desprezaremos os outros termos devido a $(\omega\tau)^{n+1}$ serem pequenos em relação a $(\omega\tau)^n$.

O desenvolvimento de sen $\omega\tau$ e cos$\omega\tau$ no entorno de $\tau=0$ (início do intervalo) é dado por

$$\cos \omega\tau = 1 - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2 + \frac{1}{24}\omega^4\tau^4 + \ldots. \qquad (22.41)$$

$$\text{sen } \omega\tau = \omega\tau - \frac{1}{6}\omega^3\tau^3 + \frac{1}{120}\omega^5\tau^5 + \ldots \qquad (22.42)$$

a) Análise do termo (1.1)

O termo (1.1) da matriz $\mathbb{A}$ é dado por

$$\frac{1 - \frac{\omega^2\tau^2}{3}}{1 + \frac{\omega^2\tau^2}{6}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2 + \frac{1}{12}\omega^4\tau^4 + \ldots \qquad (22.43)$$

O termo (1.1) da matriz $\mathbb{A}_o$ é dado por cos $\omega\tau$

Obtemos, então, para termo (1.1) de e

$$\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2 + \frac{1}{12}\omega^4\tau^4\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2 + \frac{1}{24}\omega^4\tau^4\right) = \frac{1}{24}\omega^4\tau^4 \qquad (22.44)$$

b) Análise do termo (1,2)

O termo (1,2) da matriz $\mathbb{A}$ é dado por

$$\frac{1}{\omega}\,\frac{\omega\tau}{1+\frac{\omega^2\tau^2}{6}} = \frac{1}{\omega}\{\omega\tau - \frac{\omega^3\tau^3}{6} + \frac{\omega^5\tau^5}{36}\} \qquad (22.45)$$

O termo (1,2) da matriz $\mathbb{A}_o$ é $\frac{1}{\omega}(\text{ sen } \omega\tau)$

$$\frac{1}{\omega}\{\omega\tau - \frac{\omega^3\tau^3}{6} + \frac{\omega^5\tau^5}{36}\} - \frac{1}{\omega}\{\omega\tau - \frac{1}{6}\omega^3\tau^3 + \frac{1}{120}\omega^5\tau^5\} =$$

$$= \frac{1}{\omega}\{\frac{7}{360}\omega^5\tau^5\} \qquad (22.46)$$

c) Análise do termo (2,1)

O termo (2,1) da matriz $\mathbb{A}$ é dado por

$$-\omega\,\frac{\omega\tau - \frac{\omega^3\tau^3}{12}}{1+\frac{\omega^2\tau^2}{6}} = -\omega\{\omega\tau - \frac{\omega^3\tau^3}{4} + \frac{\omega^5\tau^5}{24} \qquad (22.47)$$

O termo (2,1) de $\mathbb{A}_o$ é $-\omega$ (sen $\omega\tau$)

Portanto o termo (2,1) da matriz $\mathbb{A}_e$ é dado por

$$-\omega\{\omega\tau - \frac{\omega^3\tau^3}{4} + \frac{\omega^5\tau^5}{24}\} + \omega\{\omega\tau - \frac{1}{6}\omega^3\tau^3 + \frac{1}{120}\omega^5\tau^5\} =$$

$$= -\omega\{-\frac{\omega^3\tau^3}{12} + \frac{\omega^5\tau^5}{30}\} \simeq \omega\{\frac{\omega^3\tau^3}{12}\} \qquad (22.48)$$

onde o termo $\omega^5\tau^5$ foi desprezado, comparado com $\omega^3\tau^3$, no caso de τ pequeno.

d) Análise do termo (2,2)

O termo (2,2) é análogo ao termo (1,1)

Escrevendo o resultado obtido na forma de (22.39), temos

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1 - \dfrac{\omega^2\tau^2}{3}}{1 + \dfrac{\omega^2\tau^2}{6}} & \dfrac{\tau}{1 + \dfrac{\omega^2\tau^2}{6}} \\ \dfrac{-\omega\{\omega\tau - \dfrac{\omega^2\tau^2}{12}\}}{1 + \dfrac{\omega^2\tau^2}{6}} & \dfrac{1 - \dfrac{\omega^2\tau^2}{3}}{1 + \dfrac{\omega^2\tau^2}{6}} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \cos\omega\tau & \dfrac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega\tau \\ -\omega\operatorname{sen}\omega\tau & \cos\omega\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\omega^4\tau^4}{24} & \dfrac{1}{36}\omega^4\tau^5 \\ \dfrac{\omega^4\tau^3}{12} & \dfrac{\omega^4\tau^4}{24} \end{bmatrix} \tag{22.49}$$

22.5 Análise da convergência no caso do oscilador simples

Conforme visto em (22.13) o algorítimo para o oscilador simples é dado por

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \mathbb{A} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \tag{22.50}$$

Onde, partindo-se das condições iniciais, obtemos os valores no fim do primeiro intervalo. Estes valores são condições iniciais para o segundo intervalo. Os valores no fim do segundo intervalo são dados por

$$\begin{Bmatrix} r_2 \\ \dot{r}_2 \end{Bmatrix} = \mathbb{A} \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \mathbb{A}\,\mathbb{A} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} = \mathbb{A}^2 \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \tag{22.51}$$

No fim do intervalo n, os valores serão dados, em função das condições iniciais, por

$$\begin{Bmatrix} r_n \\ \dot{r}_n \end{Bmatrix} = \mathbb{A}^n \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \tag{22.52}$$

Para que o algorítimo seja estável é necessário que não haja propagação de erro de um intervalo para outro, isto é, a matriz $\mathbb{A}$ deve permanecer estável, ou seja

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_n \tag{22.53}$$

onde $\mathbb{A}_n$ é a matriz correspondente a irmos da condição inicial à final (por n intervalos) num único passo. Para que esta condição ocorra deveremos ter o valor próprio da matriz $\mathbb{A}$ igual a um. O valor próprio é obtido por meio de

$$|\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}| = 0 \tag{22.54}$$

Sendo $\lambda = 1$ este determinante fica

$$|\mathbb{A} - \mathbb{I}| = 0 \tag{22.55}$$

ou $$|\mathbb{A}| = |\mathbb{I}| = 1 \tag{22.56}$$

O que significa que o determinante da matriz $\mathbb{A}$ deve ser unitário.

No caso do oscilador simples, a matriz $\mathbb{A}_o$ da solução exata (22.38) tem o determinante igual a um.

$$\begin{bmatrix} \cos \omega\tau & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega\tau \\ -\omega \operatorname{sen} \omega\tau & \cos \omega\tau \end{bmatrix} = \cos^2 \omega\tau + \operatorname{sen}^2 \omega\tau = 1 \tag{22.57}$$

No caso de dois intervalos teríamos

$$\begin{bmatrix} \cos \omega\tau & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega\tau \\ -\omega \operatorname{sen} \omega\tau & \cos \omega\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\omega\tau & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} 2\omega\tau \\ -\omega \operatorname{sen} 2\omega\tau & \cos 2\omega\tau \end{bmatrix} \tag{22.58}$$

onde o passo para dois intervalos é 2τ .

Verifiquemos agora o que ocorre com a matriz $\mathbb{A}$. Sendo

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_o + \mathbb{A}_e{}^n = \mathbb{A}_o^n + \alpha_{n-1}\mathbb{A}_o^{n-1}\mathbb{A}_e + \alpha_{n-2}\mathbb{A}_o^{n-2}\mathbb{A}_e^2 + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_2\mathbb{A}_o^2\mathbb{A}_e^{n-2} + \alpha_1\mathbb{A}_o\mathbb{A}_e^{n-1} + \mathbb{A}_e^n \tag{22.59}$$

ou, colocando na forma

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_o^n \left[\mathbb{I} + \alpha_{n-1}\frac{\mathbb{A}_e}{\mathbb{A}_o} + \alpha_{n-2}\frac{\mathbb{A}_e^2}{\mathbb{A}_o^2} + \ldots + \alpha_2\frac{\mathbb{A}_e^{n-2}}{\mathbb{A}_o^{n-2}} + \frac{\mathbb{A}_e^n}{\mathbb{A}_o^n} \right] \tag{22.60}$$

Sendo o valor próprio de $\mathbb{A}_e$ menor que um $\mathbb{A}_e^2 < \mathbb{A}_e$ a série $\mathbb{A}_o^n$ converge com n tendendo para infinito. Desprezando os termos de potência superior a dois, temos

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_o^n \left[\mathbb{I} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_e}{\mathbb{A}_o} \right] \tag{22.61}$$

o que nos mostra que o erro, após n passos, é aproximadamente o mesmo e dado por

$$\frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_e}{\mathbb{A}_o} \tag{22.62}$$

Podemos usar como critério para escolha de um valor tal que o erro seja pequeno, isto é

$$\frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_e}{\mathbb{A}_o} << \mathbb{I} \tag{22.63}$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz unitária.

22.6 Matriz estável para o oscilador simples

Para obtermos esta matriz, partiremos da matriz $\mathbb{A}$ do oscilador simples (22.38), na qual introduzimos as constantes c_1 e c_2 que serão calculadas pela aplicação da condição (22.56). A nova forma da matriz $\mathbb{A}$ foi obtida comparando-se a matriz antiga com a matriz exata $\mathbb{A}_o$. Assim a matriz $\mathbb{A}$ deve ter a forma

$$\frac{1}{1+c_1\omega^2\tau^2}\begin{bmatrix} 1 - c_2\omega^2\tau^2 & \tau \\ -\omega^2\tau^2 & 1 - c_2\omega^2\tau^2 \end{bmatrix} \tag{22.64}$$

Usando (22.56) obtemos

$$(1 - c_2\omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2 = (1 + c_1\omega^2\tau^2)^2 \tag{22.65}$$

$$1 - 2c_2\omega^2\tau^2 + c_2^2\omega^4\tau^4 + \omega^2\tau^2 = 1+2c_1\omega^2\tau^2 + c_1^2\omega^4\tau^4 \tag{22.66}$$

Igualando os coeficientes dos termos $\omega\tau$ obtemos

$$(-2c_2 + 1)\omega^2\tau^2 = 2c_1\omega^2\tau^2 \tag{22.67}$$

$$c_2^2\omega^4\tau^4 = c_1^2\omega^4\tau^4 \tag{22.68}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} -2c_2 + 1 &= 2c_1 \\ c_2^2 &= c_1^2 \end{aligned} \tag{22.69}$$

Obtemos $c_1 = c_2 = 1/4$

Por outro lado, como consequência das constantes c_1 e c_2, (22.64) toma a forma

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_o + \alpha\tau R_o + \beta\tau R_1 \\ r_1 &= r_o + \tau\dot{r}_o + a\tau^2 R_o + b\tau^2 R_1 \end{aligned} \tag{22.70}$$

que para o caso do oscilador simples e n=1 tem a forma

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + \alpha\tau(-\omega^2 r_o) + \beta\tau(-\omega^2 r_1)$$
$$r_1 = r_o + \tau\dot{r}_o + a\tau^2(-\omega^2 r_o) + b\tau^2(-\omega^2 r_1) \qquad (22.71)$$

Colocando na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \beta\tau\omega^2 & 1 \\ 1+b\omega^2\tau^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\omega^2\tau & 1 \\ 1-a\omega^2\tau^2 & \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad (22.72)$$

Invertendo a primeira matriz e pré-multiplicando pela segunda, temos

$$\mathbb{A} = \frac{-1}{1+b\omega^2\tau^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -(1+b\omega^2\tau^2) & \beta\omega^2\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha\omega^2\tau & 1 \\ 1-a\omega^2\tau^2 & \tau \end{bmatrix} \qquad (22.73)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1-a\omega^2\tau^2 & \tau \\ -\{(\alpha+\beta)\omega^2\tau+(\alpha b-\beta)\omega^4\tau^3\} & 1-(\beta-b)\omega^2\tau^2 \end{bmatrix} \frac{1}{1+b\omega^2\tau^2} \qquad (22.74)$$

Comparando (22.74) com (22.64) obtemos

$b = c_1 = 1/4$ $\qquad$ $\beta - b = c_2$ $\qquad$ $\beta = 1/2$

$a = c_2 = 1/4$

$\alpha + \beta = 1$ $\qquad$ $\alpha = 1 - \beta = 1 - 1/2 = 1/2$

Logo podemos escrever (22.70) como

$$M\dot{r}_1 = M\dot{r}_o + \frac{1}{2}\tau R_o + \frac{1}{2}\tau R_1$$
$$Mr_1 = Mr_o + \tau M\dot{r}_o + \frac{1}{4}\tau^2 R_o + \frac{1}{4}\tau^2 R_1 \qquad (22.75)$$

2.3 INTERPOLAÇÃO POR MEIO DE UM POLINÔMIO DO TERCEIRO GRAU

Neste caso temos R descrito por um polinômio do terceiro grau, ou seja, por

$$R = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \tag{23.1}$$

ou, na forma adimensional

$$R(\xi) = a_o + a_1 \tau\omega + a_2 \tau^2 \xi^2 + a_3 \tau^3 \xi^3 \tag{23.2}$$

Neste caso imporemos a condição de que a equação diferencial deve satisfazer a R e sua derivada nos extremos do intervalo (em $\xi=0$ e $\xi=1$). Isto significa que devemos usar duas condições em cada extremo, o que implica que o polinômio consistente deva ter quatro parâmetros a serem determinados, isto é, o polinômio de interpolação deve ser do terceiro grau.

Usando um procedimento análogo ao do item anterior, temos para condições de contorno as expressões abaixo

$$\begin{aligned}
&R\big|_{\xi=0} = R_o = a_o \\
&R\big|_{\xi=1} = R_1 = a_o + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 \\
&\frac{dR}{d\xi}\Big|_{\xi=0} = R'\big|_{\xi=0} = R'_o = a_1\tau \\
&\frac{dR}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = R'\big|_{\xi=1} = R'_1 = a_1\tau + 2a_2\tau^2 + 3a_3\tau^3
\end{aligned} \tag{23.3}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned}
a_o &= R_o \\
a_1\tau &= R'_o \\
a_2\tau^2 &= 3R_1 - 3R_o - 3R'_o - R'_1 + R'_o \\
a_3\tau^3 &= R'_1 - R'_o - 2R_1 + 2R_o + 2R'_o
\end{aligned} \tag{23.4}$$

Substituindo em (23.2) temos

$$R(\xi) = R_o + R'_o\xi + (3R - 3R_o - 3R'_o - R' + R'_o)\xi^2 + (R' - R'_o - 2R + 2R_o + 2R'_o)\xi^3 \qquad (23.5)$$

rearranjando vem

$$R(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)R_o + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)R'_o + (3\xi^2 - 2\xi^3)R_1 + (-\xi^2 + \xi^3)R'_1 \qquad (23.6)$$

Procedendo a integração como feito no item anterior, isto é, substituindo (23.6) em (21.24) e (21.25) obtemos :

Para $M\dot{r}$

$$M\dot{r}_1 = \int_0^1 \tau\{(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)R_o + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)R'_o + (3\xi^2 - 2\xi^3)R_1 + (-\xi^2 + \xi^3)R'_1\}\, d\xi + M\dot{r}_o$$

$$M\dot{r}_1 = \tau\left[(\xi - \xi^3 + \frac{1}{2}\xi^4)R_o + (\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4)R'_o + (\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^4)R_1 + (-\frac{1}{3}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4)R'_1\right]_0^1 + M\dot{r}_o$$

$$M\dot{r}_1 = \tau\{\frac{1}{2}R_o + \frac{1}{12}R'_o + \frac{1}{2}R_1 - \frac{1}{12}R'_1\} + M\dot{r}_o \qquad (23.7)$$

Usando (21.23) temos

$$M\dot{r}_1 = M\dot{r}_o + \tau\{\frac{1}{2}(R_o + R_1) + \frac{1}{12}\tau(\dot{R}_o - \dot{R}_1)\} \qquad (23.8)$$

Comparando com

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + d\dot{r} \qquad (23.9)$$

podemos dizer que

$$d\dot{r} = \tau M^{-1}\{\frac{1}{2}(R_o + R_1) + \frac{1}{12}\tau(\dot{R}_o - \dot{R}_1)\} \qquad (23.10)$$

Para Mr_1 teremos

$$Mr_1 = \int\int\int \tau\{(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)R_o + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)R'_o + (3\xi^2 - 2\xi^3)R_1 + (-\xi^2 + \xi^3)R'_1\}\, d\xi + \int \tau M\dot{r}_o d\xi \Big]_{\xi=0}^{\xi=1} + Mr_o$$

$$Mr_1 = \Big[\tau^2\{(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{10}\xi^5)R_o + (\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{6}\xi^4 + \frac{1}{20}\xi^5)R'_o + (\frac{1}{4}\xi^4 - \frac{1}{12}\xi^5)R_1 + (-\frac{1}{12}\xi^4 + \frac{1}{20}\xi^5)R'_1 + \tau M\dot{r}_o\xi\Big]_0^1 + Mr_o \quad (23.11)$$

Substituindo o valor de ξ, e considerando (21.23) obtemos

$$Mr_1 = Mr_o + \tau M\dot{r}_o + \tau^2\{(\frac{7}{20}R_o + \frac{3}{20}R_1) + \tau(\frac{1}{20}\dot{R}_o - \frac{1}{30}\dot{R}_1)\} \quad (23.12)$$

Comparando com

$$r_1 = r_o + dr \quad (23.13)$$

temos

$$dr = \tau\dot{r}_o + M^{-1}\tau^2\{(\frac{7}{20}R_o + \frac{3}{20}R_1) + \tau(\frac{1}{20}\dot{R}_o - \frac{1}{30}\dot{R}_1)\} \quad (23.14)$$

2.4 APLICAÇÃO AO OSCILADOR SIMPLES

24.1 Algorítimo para o oscilador simples

A equação diferencial do oscilador simples é

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0 \quad (24.1)$$

Explicitando o valor de R temos

$$R = \ddot{r} = -\omega^2 r \quad (24.2)$$

donde obtemos

$$R_o = -\omega^2 r_o$$
$$R_1 = -\omega^2 r_1 \qquad (24.3)$$
$$\dot{R}_o = -\omega^2 \dot{r}_o$$
$$\dot{R}_1 = -\omega^2 \dot{r}_1$$

Substituindo em (23.8) e (23.11) obtemos

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + \tau\{\frac{1}{2}(-\omega^2 r_o - \omega^2 r_1) + \frac{1}{12}\tau(-\omega^2 \dot{r}_o + \omega^2 \dot{r}_1)\} \qquad (24.4)$$

$$r_1 = r_o + \tau \dot{r}_o + \tau^2\{(\frac{7}{20}(-\omega^2 r_o) + \frac{3}{20}(-\omega^2 r_1)) + \tau(\frac{1}{20}(-\omega^2 \dot{r}_o) + \frac{1}{30}\omega^2 \dot{r}_1)\} \qquad (24.5)$$

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o - \frac{1}{2}\tau\omega^2 r_o - \frac{1}{2}\tau\omega^2 r_1 - \frac{1}{12}\tau^2\omega^2 \dot{r}_o + \frac{1}{12}\tau^2\omega^2 \dot{r}_1 \qquad (24.6)$$

$$r_1 = r_o + \tau \dot{r}_o - \frac{7}{20}\tau^2\omega^2 r_o - \frac{3}{20}\tau^2\omega^2 r_1 - \frac{1}{20}\tau^3\omega^2 \dot{r}_o + \frac{1}{30}\tau^3\omega^2 \dot{r} \qquad (24.7)$$

Colocando na forma matricial vem

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega^2\tau}{2} & 1-\frac{\omega^2\tau^2}{12} \\ 1+\frac{3\omega^2\tau^2}{20} & -\frac{\omega^3\tau^2}{30} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega^2\tau}{2} & 1-\frac{\omega^2\tau^2}{12} \\ 1-\frac{7\omega^2\tau^2}{20} & -\frac{\omega^2\tau^3}{20} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad (24.8)$$

Resolvendo este sistema obtemos o algorítimo para o caso do oscilador simples interpolado por um polinômio do terceiro grau como

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\frac{13}{30}\omega^2\tau^2+\frac{1}{80}\omega^4\tau^4}{1+\frac{1}{15}\omega^2\tau^2+\frac{1}{240}\omega^4\tau^4} & \frac{\tau(1-\frac{1}{10}\omega^2\tau^2+\frac{1}{720}\omega^4\tau^4)}{1+\frac{1}{15}\omega^2\tau^2+\frac{1}{240}\omega^4\tau^4} \\ \frac{\omega^2\tau(1-\frac{1}{10}\omega^2\tau^2)}{1+\frac{1}{15}\omega^2\tau^2+\frac{1}{240}\omega^4\tau^4} & \frac{1-\frac{13}{30}\omega^2\tau^2+\frac{1}{80}\omega^4\tau^4}{1+\frac{1}{15}\omega^2\tau^2+\frac{1}{240}\omega^4\tau^4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad (24.9)$$

24.2 Matriz de erro

Procedendo de modo análogo ao item 22.4, temos

a) Análise do termo (1.1)

$$\mathbb{A}_e(1.1) = \{1-\frac{1}{2}\omega^2\tau^2+\frac{1}{24}\omega^4\tau^4-\frac{1}{1440}\omega^6\tau^6\}-\{1-\frac{1}{2}\omega^2\tau^2+\frac{1}{24}\omega^4\tau^4-\frac{1}{720}\omega^6\tau^6\}$$

$$= (\frac{1}{720} - \frac{1}{1440})\omega^6\tau^6 = \frac{1}{1440}\omega^6\tau^6 \qquad (24.10)$$

b) Análise do termo (1,2)

$$\mathbb{A}_e(1,2) = \{\omega\tau-\frac{1}{6}\omega^3\tau^3+\frac{1}{120}\omega^5\tau^5+\frac{1}{7200}\omega^7\tau^7\}-\{\omega\tau-\frac{1}{6}\omega^3\tau^3+\frac{1}{120}\omega^5\tau^5-$$

$$\frac{1}{5040}\omega^7\tau^7\} = (\frac{1}{7200} + \frac{1}{5040})\omega^7\tau^7 = \frac{17}{50400}\omega^7\tau^7 \qquad (24.11)$$

c) Análise do termo (2,1)

$$\mathbb{A}_e(2,1) = \{\omega\tau -\frac{1}{6}\omega^3\tau^3+\frac{5}{720}\omega^5\tau^5\}-\{\omega\tau-\frac{1}{6}\omega^3\tau^3+\frac{1}{120}\omega^5\tau^5\}=$$

$$=(\frac{5}{720}-\frac{1}{120})\omega^5\tau^5 = -\frac{1}{720}\omega^5\tau^5 \qquad (24.12)$$

Escrevendo o resultado na forma matricial temos, conforme (22.39)

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega\tau & \frac{1}{\omega}\,\text{sen}\,\omega\tau \\ -\omega\,\text{sen}\,\omega\tau & \cos\omega\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega^6\tau^6}{1440} & \frac{17\omega^7\tau^7}{50400} \\ -\frac{\omega^5\tau^5}{720} & \frac{\omega^6\tau^6}{1440} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad (24.13)$$

22.6 Matriz estável para o oscilador simples

A matriz $\mathbb{A}$ dada por (24.9) para ser estável deve ser da forma

$$\mathbb{A} = \frac{1}{(1+c_3\omega^2\tau^2+c_4\omega^4\tau^4)} \begin{bmatrix} (1-c_1\omega^2\tau^2+c_2\omega^4\tau^4) & \tau(1-c_5\omega^2\tau^2) \\ -\omega^2\tau(1-c_5\omega^2\tau^2) & (1-c_1\omega^2\tau^2+c_2\omega^4\tau^4) \end{bmatrix} \qquad (24.14)$$

unesp

Para que o valor próprio seja unitário deveremos ter

$$(1-c_1\omega^2\tau^2+c_2\omega^4\tau^4)^2+\omega^2\tau^2(1-c_5\omega^2\tau^2)^2=(1+c_3\omega^2\tau^2+c_4\omega^4\tau^4)^2$$

$$1-2c_1\omega^2\tau^2+2c_2\omega^4\tau^4+c_1^2\omega^4\tau^4-2c_1c_2\omega^6\tau^6+c_2^2\omega^8\tau^8+\omega^2\tau^2-2c_5\omega^4\tau^4+$$

$$c_5\omega^6\tau^6 = 1+c_3^2\omega^4\tau^4+c_4^2\omega^8\tau^8+2c_3\omega^2\tau^2+2c_4\omega^4\tau^4+2c_3c_4\omega^6\tau^6 \qquad (24.15)$$

Equacionando os coeficientes de igual potência

$$\begin{aligned} -2c_1 + 1 &= 2c_3 \\ 2c_2 + c_1^2 - 2c_5 &= c_3^2 + 2c_4 \\ -2c_1c_2 + c_5^2 &= 2c_3c_4 \\ c_2^2 &= c_4^2 \end{aligned} \qquad (24.16)$$

que são quatro equações em cinco incógnitas de c_1 a c_5. A quinta equação é obtida comparando-se o termo $\mathbb{A}(2,1)$ com $\mathbb{A}_0(2,1)$, isto é

$$\frac{-\omega^2\tau(1-c_5\omega^2\tau^2)}{1+c_3\omega^2\tau^2+c_4\omega^4\tau^4} = -\omega\left[\omega\tau-(c_5+c_3)\omega^3\tau^3+\{c_4-c_3(c_5+c_3)\}\omega^5\tau^5\right] =$$

$$= \omega\tau-\frac{1}{6}\omega^3\tau^3+\frac{1}{120}\omega^5\tau^5+\ldots. \qquad (24.17)$$

tomando $c_5 + c_3 = 1/6$ como última equação obtemos

$$c_1 = 5/12 \quad c_2 = c_4 = 1/144 \quad c_3 = c_5 = 1/12 \qquad (24.18)$$

donde

$$\mathbb{A} = \frac{1}{1+\frac{1}{12}\omega^2\tau^2+\frac{\omega^4\tau^4}{144}} \begin{bmatrix} 1-\frac{5}{12}\omega^2\tau^2+\frac{\omega^4\tau^4}{144} & \tau(1-\frac{\omega^2\tau^2}{12}) \\ -\omega^2\tau(1-\frac{\omega^2\tau^2}{12}) & 1-\frac{5}{12}\omega^2\tau^2+\frac{\omega^4\tau^4}{144} \end{bmatrix} \qquad (24.19)$$

De (23.8) e (23.11) temos que r_1 e $\dot{r}_1$ devem ter a forma

$$r_1 = r_o+\tau\dot{r}_o+\tau^2(aR_o+b\tau\dot{R}_o+cR-d\tau\dot{R}_1) \tag{24.20}$$

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o+\tau(\alpha R_o+\beta\tau\dot{R}_o+\gamma R-\tau\delta\dot{R}_1) \tag{24.21}$$

que no caso do oscilador simples é

$$r_1=r_o+\tau\dot{r}_o+a\tau^2(-\omega^2 r_o)+b\tau^2(-\omega^2\dot{r}_o)+\tau^2 c(-\omega^2 r_1)-d\tau^3(-\omega^2\dot{r}_1) \tag{24.22}$$

$$\dot{r}_1=\dot{r}_o+\alpha\tau(-\omega^2 r_o)+\beta\tau^2(-\omega^2\dot{r}_o)+\gamma\tau(-\omega^2 r_1)-\delta\tau^2(-\omega^2\dot{r}_1) \tag{24.23}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \gamma\tau\omega^2 & 1-\delta\omega^2\tau^2 \\ 1+\omega^2\tau^2 c & -d\omega^2\tau^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\tau\omega^2 & 1-\beta\omega^2\tau^2 \\ 1-a\omega^2\tau^2 & \tau-b\omega^2\tau^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \tag{24.24}$$

Resolvendo o sistema e comparando com (24.9) obtemos

$$a=1/3 \quad b=1/24 \quad c=1/6 \quad d=-1/24$$
$$\alpha=\gamma=1/2 \qquad \beta=-\delta=1/12 \tag{24.25}$$

Logo podemos escrever (24.20) e (24.21) como

$$M\dot{r}_1 = Mr_o+\tau\{(\tfrac{1}{3}R_o+\tfrac{1}{6}R_1)+\tau(\tfrac{1}{24}\dot{R}_o-\tfrac{1}{24}\dot{R}_1)\} \tag{24.26}$$

$$Mr_1 = Mr_o+\tau M\dot{r}_o+\tau^2\{\tfrac{1}{2}(R_o+R_1)+\tfrac{1}{12}\tau(\dot{R}_o-\dot{R}_1)\} \tag{24.27}$$

2.5 GENERALIZAÇÃO PARA QUALQUER POLINÔMIO

25.1 Integração com passo negativo

O algorítimo deve ser tal que ao efetuarmos a integração do ponto t_o ao ponto t_1 ou do ponto t_1 ao ponto t_o o resultado deva ser o mesmo. Para fazer esta análise verifiquemos primeiro o algorítimo no caso do passo negativo. Consideremos a figura 25.1

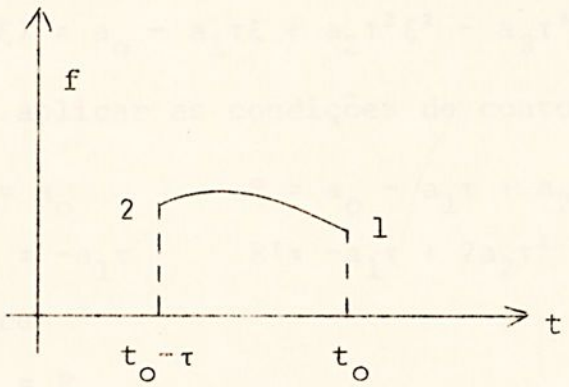


Fig 25.1 Passo negativo

A integração é feita de t_o a $t_o-\tau$, isto é

$$\int_{t_o}^{t_o-\tau} M\ddot{r}dt = \int_{t_o}^{t_o-\tau} R(t)dt \qquad (25.1)$$

Chamando

$$t = t_o - \tau\xi \qquad (25.2)$$

temos

$$t = t_o \Rightarrow \xi = 0$$
$$t = t_o - \tau \Rightarrow \xi = 1 \qquad (25.3)$$

$$dt = -\tau d\xi \qquad (25.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{dR}{d\xi}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \qquad \dot{R}=\frac{dR}{dt} \quad R' \frac{dR}{d\xi} \qquad (25.5)$$

$$\frac{dR}{d\xi} = - \frac{dR}{dt} \qquad \text{ou} \qquad R' = -\tau\dot{R} \tag{25.6}$$

Para uma interpolação com um polinômio do terceiro grau em t, temos

$$R(t) = a_o + a_1 t + a_2 t + a_3 t \tag{25.7}$$

entre os pontos t_o e $t_o - \tau$ deveremos ter

$$R(\xi) = a_o - a_1\tau\xi + a_2\tau^2\xi^2 - a_3\tau^3\xi^3 \tag{25.8}$$

donde, apos aplicar as condições de contorno

$$\begin{aligned} R_o &= a_o & R &= a_o - a_1\tau + a_2\tau^2 - a_3\tau^3 \\ R'_o &= -a_1\tau & R' &= -a_1\tau + 2a_2\tau^2 - 3a_3\tau^3 \end{aligned} \tag{25.9}$$

o que fornece

$$\begin{aligned} a_o &= R_o \\ a_1\tau &= -R'_o \\ a_2\tau^2 &= 3R_1 - 3R_o - 2R'_o - R'_1 \\ a_3\tau^3 &= -R'_1 + R'_o + 2R_1 - 2R_o - 2R'_o \end{aligned} \tag{25.10}$$

e para a expressão de R temos

$$\begin{aligned} R(\xi) &= R_o + R'_o\xi + (3R_1 - 3R_o - 2R'_o - R'_1)\xi^2 + \\ &\quad (R'_1 + R'_o - 2R_1 + 2R_o)\xi^3 \\ &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)R_o + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)R'_o + \\ &\quad (3\xi^2 - 2\xi^3)R_1 + (-\xi^2 + \xi^3)R'_1 \end{aligned} \tag{25.11}$$

que é uma expressão análoga a do caso anterior (23.6), passo positivo.

Para a velocidade temos

$$\int_{t_o}^{t_o-\tau} M\ddot{r}dt = \int_{t_o}^{t_o-\tau} R(t)dt = \int_{\xi=0}^{\xi=1} (-\tau)R(\xi)d\xi \tag{25.12}$$

integrando

$$M\dot{r}\Big|_{t_o-\tau} - M\dot{r}\Big|_{t_o} = \{(-\tau)\ (\xi-\xi^3+\frac{\xi^4}{2})R_o+(\frac{\xi^2}{2}-\frac{2\xi^3}{3}+\frac{\xi^4}{4})R'_o + (\xi^3-\frac{\xi^4}{2})R_1+(-\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^4}{4})R'_1 \qquad (25.13)$$

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o+\{M^{-1}(-\tau)[\ \frac{1}{2}(R_o+R\ )+\frac{1}{12}(R'_o-R')]\} \qquad (25.14)$$

$$\dot{r} = \dot{r}_o+\{M^{-1}(-\tau)[\ \frac{1}{2}(R_o+R_1)+\frac{1}{12}(-\tau)(\dot{R}_o-\dot{R}_1)]\} \qquad (25.15)$$

De modo análogo, para o deslocamento temos

$$r_1 = r_o+(-\tau)\dot{r}_o+ M^{-1}(-\tau)[\ (\frac{7}{20}R_o+\frac{3}{20}R_1)+(-\tau)(\frac{1}{20}\dot{R}_o-\frac{1}{30}R_1)]\}$$

Observemos que essas expressões são análogas as expressões para passo positivo, com a diferença que o acréscimo é $-\tau$, e o ponto final (ξ=1) do caso de passo positivo corresponde ao ponto inicial (ξ=0) no caso de passo negativo.

25.2 Comparação entre os dois casos

Tanto para o caso do passo positivo quanto negativo, as expressões são da forma

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + M^{-1}\tau[\ a_o(R_o+R_1)+a_1(\dot{R}_o-\dot{R}_1)+.... \ldots+a_{n-1}\tau^{n-1}(R_o^{(n-1)} + (-1)^{n-1}\ R_1^{(n-1)})] \qquad (25.17)$$

$$r_1 = r_o + \tau\dot{r}_o + M^{-1}\tau^2[\ b_oR_o+c_oR_1+ (b_1\dot{R}_o-c_1\dot{R}_1)+... \ldots+\tau^{n-1}(b_{n-1}R_o^{(n-1)}+c_{n-1}R_1^{(n-1)})] \qquad (25.18)$$

onde

$$R^{(n)} = \frac{d^nR}{dt^n} \qquad (25.19)$$

No caso do passo positivo o passo é igual a τ

No caso do passo negativo o passo é igual a $-\tau$

Estes dois casos estão ilustrados nas figuras 25.2 e 25.3.

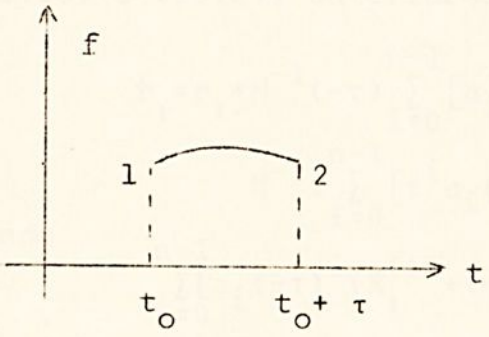


Fig 25.2 Passo positivo

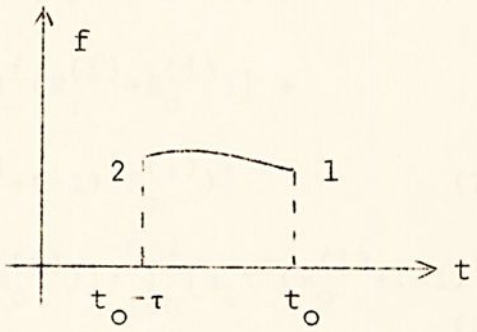


Fig 25.3 Passo negativo

25.3 Relações entre a_i , b_i e c_i

Consideremos a figura 25.4

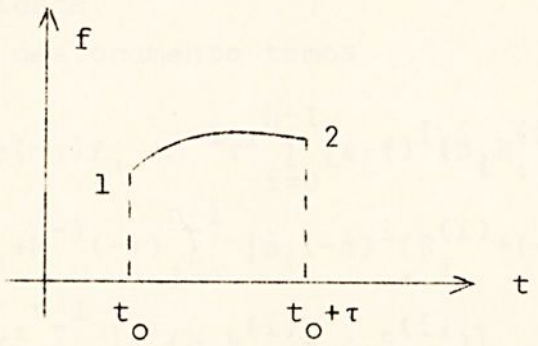


fig 25.4 Base de comparação

Para o passo positivo as expressões são dadas por

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + M^{-1}\tau\sum_{i=0}^{n-1}\left[a_i\tau^i(R_o^{(i)} + (-1)^i R_1^{(i)})\right] \quad (25.20)$$

$$r_1 = r_o+\tau\dot{r}_o+M^{-1}\tau^2\sum_{i=o}^{n-1}\left[\tau^i(b_i R_o^{(i)}+c_i R_1^{(i)})\right] \quad (25.21)$$

Para o passo negativo, temos, para a mesma figura 25.4

$$\dot{r}_o= \dot{r}_1 +M^{-1}(-\tau)\sum_{i=0}^{n-1}\left[a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+(-1)^i R_o^{(i)})\right] \quad (25.22)$$

$$r_o=r_1+(-\tau)\dot{r} +M^{-1}\tau^2\sum_{i=0}^{n-1}\left[(-\tau)^i(b_i R_1^{(i)}+c_i R_o^{(i)})\right] \quad (25.23)$$

Substituindo estes valores de $\dot{r}_o$ e r_o nas expressões (25.20) e (25.21) anteriores, vem, para a velocidade

$$\dot{r}_1=\dot{r}_1+M^{-1}(-\tau)\sum_{i=0}^{n-1}[a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+R_o^{(i)})]+$$

$$M^{-1}\tau\sum_{i=0}^{n-1}[\tau^i a_i(R_o^{(i)}+(-1)^i R_1^{(i)})] \qquad (25.24)$$

donde

$$\sum_{i=0}^{n-1}[a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+(-1)^i R_o^{(i)})]=\sum_{i=0}^{n-1}[a_i\tau^i(R_o^{(i)}+(-1)^i R_1^{(i)})] \qquad (25.25)$$

e, para cada i temos

$$a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+(-1)^i R_o^{(i)})=a_i\tau^i(R_o^{(i)}+(-1)^i R_1^{(i)}) \qquad (25.26)$$

$$\tau^i a_i(R_o^{(i)}+(-1)^i R_1^{(i)})=a_i\tau^i(R_o^{(i)}+(-1)^i R_1^{(i)}) \qquad (25.27)$$

que é uma identidade.

Para o deslocamento temos

$$r_1 = r_1+(-\tau)\dot{r}_1+M^{-1}\tau^2\sum_{i=0}^{n-1}[(-\tau)^i(b_i R_1^{(i)}+c_i R_o^{(i)})] +$$

$$\tau\{\dot{r}_1+M^{-1}(-\tau)\sum_{i=0}^{n-1}[a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+(-1)^i R_o^{(i)})\} +$$

$$+M^{-1}\tau^2\sum_{i=0}^{n-1}[\tau^i(b_i R_o^{(i)}+ c_i R_1^{(i)})] \qquad (25.28)$$

$$\tau^2\sum_{i=0}^{n-1}[(-\tau)^i(b_i R_1^{(i)}+c_i R_o^{(i)})]+(-\tau^2)\sum_{i=0}^{n-1}[a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+$$

$$+(-1)^i R_o^{(i)})] +\tau^2\sum_{i=0}^{n-1}[\tau^i(b_i R_o^{(i)}+c_i R_1^{(i)})] = 0$$

$$(-\tau)^i(b_i R_1^{(i)}+c_i R_o^{(i)})-[a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+(-1)^i R_o^{(i)}] +$$

$$\tau^i(b_i R_o^{(i)}+c_i R_1^{(i)}) = 0$$

$$(-\tau)^i b_i R_1^{(i)}+(-\tau)^i c_i R_o^{(i)}+\tau^i b_i R_o^{(i)}+\tau^i c_i R_1^{(i)} =$$

$$= a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)}+(-1)^i R_o^{(i)})$$

$$b_i((-\tau)^i R_1^{(i)} + \tau^i R_o^{(i)}) + c_i(\tau^i R_1^{(i)} + (-\tau)^i R_o^{(i)}) =$$

$$= a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)} + (-1)^i R_o^{(i)})$$

$$b_i((-\tau)^i R_1^{(i)} + \tau^i R_o^{(i)}) + (-1)^i c_i((-\tau)^i R_1^{(i)} + \tau^i R_o^{(i)}) =$$

$$= a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)} + (-1)^i R_o^{(i)})$$

e finalmente

$$b_i(-\tau)^i(R_1^{(i)} + (-1)^i R_o^{(i)}) + (1-)^i c_i(-\tau)^i(R_1^{(i)} + (-1)^i R_o^{(i)}) =$$

$$= a_i(-\tau)^i(R_1^{(i)} + (-1)^i R_o^{(i)})$$

donde a relação

$$b_i + (-1)^i c_i = a_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (25.29)$$

25.4 Condições de estabilidade do algorítimo

Para que a soma da sequência

$$a_i \tau^i (R_o^{(i)} + (-1)^i R_1^{(i)}) \qquad (25.30)$$

seja convergente para qualquer τ, precisamos que

$$R_o^{(i)} + (-1)^i R_1^{(i)} \longrightarrow 0 \quad \text{com} \tau \to \infty \text{ para } i=n-1 \qquad (25.31)$$

O que implica em

$$R_o^{(n-1)} = -(-1) R_1^{(n-1)} \quad \text{com } \tau=\infty \qquad (25.32)$$

Do mesmo modo, para que a sequência abaixo seja convergente, devemos ter

$$b_i R_o^{(i)} + c_i R_1^{(i)} \longrightarrow 0 \text{ com } \tau \longrightarrow \infty \qquad (25.33)$$

ou seja

$$b_{n-1} R_o^{(n-1)} + c_{n-1} R_1^{(n-1)} = 0 \quad \text{com } \tau=\infty \qquad (25.34)$$

donde vem

$$b_{n-1} - (-1)^{n-1} R_1^{(n-1)} + c_{n-1} R_1^{(n-1)} = 0 \qquad (25.35)$$

donde a relação entre os últimos coeficientes

$$-(-1)^{n-1} b_{n-1} + c_{n-1} = 0$$

e

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} c_{n-1} \qquad (25.36)$$

Como devemos ter, por (25.29), para i=n-1

$$b_{n-1} + (-1)\, c_{n-1} = a_{n-1} \qquad (25.37)$$

vem

$$b_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} \qquad (25.38)$$

e

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} c_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} \qquad (25.39)$$

Resumindo, a_i , b_i e c_i devem satisfazer a

$$b_i + (-1)^i c_i = a_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-2 \qquad (25.40)$$

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} c_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} \qquad (25.41)$$

25.5 Cálculo dos coeficientes a_i

Fazendo $\dot{r}_o=0$, $\tau=1$, M=1 e $R=t^n, t^{n+1}, \ldots, t^{2n-1}$ sucessivamente em (25.20) temos, para $R=t^n$

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} \left[a_i (R_o^{(i)} + (-1)^i R_1^{(i)})\right] = \dot{r}_1 \qquad (25.42)$$

Calculando no intervalo $t_o=0$ a $t_o+\tau=1$ vem

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i a_i R_1^{(i)}\right] = \dot{r} \qquad (25.43)$$

desenvolvendo

$$a_o t^n - n a_1 t^{n-1} + n(n-1) a_2 t^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} n! a_{n-1} = \dot{r} \qquad (25.44)$$

fazendo t=1 e considerando que

$$\dot{r}_1 = \int_{t=0}^{t=1} \ddot{r}dt = \int_0^1 Rdt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \qquad (25.45)$$

obtemos para a primeira equação

$$a_o - na_1 + n(n-1)a_2 - \ldots + (-1)^{n-1} n! a_{n-1} = \frac{1}{n+1} \qquad (25.46)$$

Procedendo de modo analogo para $R=t^{n+1}$, etc., obtemos o sistema abaixo, de n incógnitas $a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}$ e e equações que nos permite calcular os a's.

$$\begin{aligned}
&a_o - na_1 + n(n+1)a_2 - \ldots + (-1)^{n-1} n! a_{n-1} = \frac{1}{n+1} \\
&a_o - (n+1)a_1 + (n+1)na_2 - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n+1)!}{2} = \frac{1}{n+2} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&a_o - (2n-1)a_1 + (2n-1)(2n-2)a_2 - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{n!} = \frac{1}{2n}
\end{aligned} \qquad (25.47)$$

De modo resumido, podemos escrever este sistema como

$$\sum_{j=0}^{n-1} e_{ij}\, a_j = p_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (25.48)$$

onde

$$e_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{se } j = 0 \text{ e } i=0,1,\ldots,n-1 \\ = \prod_{r=1}^{j} (-1)^j (n+i-r+1) & \text{se } \begin{cases} j=1,2,\ldots,n-1 \\ i=0,1,\ldots,n-1 \end{cases} \end{cases} \qquad (25.49)$$

$$p_i = \frac{-1}{n+i+1} \qquad i=0,1,\ldots,n-1 \qquad (25.50)$$

Observemos que as expressões (25.49) e (25.50) são mais práticas para cálculo em computador.

25.6 Cálculo dos coeficientes c_i

O procedimento para o cálculo dos coeficientes c's é análogo ao do item anterior até a equação n-1. A última relação é dada pela expressão (25.41) que expressa uma das condições de

estabilidade do algorítimo.

Fazendo $r_o=\dot{r}_o=0$, $M=\tau=1$ e $R=t^n,t^{n+1},t^{n+2},\ldots,t^{2n-2}$ em (25.21), obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
&c_o+nc_1+n(n-1)+\ldots..+n!c_{n-1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&c_o+(n+1)c_1+(n+1)nc_2+\ldots.+\frac{(n+1)!}{2}\,c_{n-1} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&c_o+(2n-2)c_1+(2n-2)(2n-3)c_2+\ldots+\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(2n-1)2n}
\end{aligned} \tag{25.51}$$

onde temos n incógnitas $c_o,c_1,\ldots,c_{n-1}$ e n-1 equações. A última equação é,tendo em vista (25.41)

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2}\,a_{n-1} \tag{25.52}$$

De modo resumido, este sistema pode ser escrito como

$$\sum_{j=0}^{n-1} g_{ij}\,c_j = q_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \tag{25.53}$$

onde

$$g_{ij}\quad\begin{cases} =1 \text{ se } j=0 \text{ e } i=0,1,\ldots,n-2\\ =0 \text{ se } j=0,1,\ldots,n-2 \text{ e } i=n-1\\ =1 \text{ se } j=i=n-1\\ \\ =\prod_{r=0}^{j-1}(n+i-r) \text{ se } \begin{matrix} i=0,1,\ldots,n-2\\ j=1,2,\ldots,n-1\end{matrix}\end{cases} \tag{25.54}$$

$$q_i\quad\begin{cases} =\dfrac{L}{(n+i+1)(n+i+2)} & \text{se } i=0,1,\ldots,n-2\\ \\ =(-1)^{n-1}\,\dfrac{1}{2}\,a_{n-1}\end{cases} \tag{25.55}$$

Observemos que para calcular os c's precisamos primeiro calcular os a's.

25.7 Cálculo dos coeficientes b_i

Uma vez conhecidos os coeficientes a_i e c_i, podemos calcular os b_i por meio das relações (25.29) e (25.41), ou seja

$$b_i \begin{cases} = a_i - (-1)^i c_i & \text{para } i=0,1,\ldots,n-2 \\ = \frac{1}{2} a_i & \text{para } i=n-1 \end{cases} \qquad (25.26)$$

2.6 ALGORÍTIMO PARA UM SISTEMA DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE, INTERPOLADO POR UM POLINÔMIO DO PRIMEIRO GRAU

Usanado as expressões (25.20) e (25.21) com os coeficientes calculados por (25.47) e observando que neste caso n=1, temos

$$\dot{r} = \dot{r}_o + M^{-1}\frac{\tau}{2}(R_o+R_1) \qquad (26.1)$$

$$r_1 = r_o + \dot{r}_o + M^{-1}\frac{\tau^2}{4}(R_o+R_1) \qquad (26.2)$$

sendo

$$R = -Kr - C\dot{r} + f \qquad (26.3)$$

temos

$$\begin{aligned} R_o &= -Kr_o - C\dot{r}_o + f_o \\ R_1 &= -Kr_1 - C\dot{r}_1 + f_1 \end{aligned} \qquad (26.4)$$

Substituindo em (26.1) e (26.2) vem

$$M\dot{r}_1 = M\dot{r}_o + \frac{\tau}{2}\{-Kr_o - C\dot{r}_o + f_o - kr_1 - C\dot{r}_1 + f_1\} \qquad (26.5)$$

$$Mr_1 = Mr_o + M\tau\dot{r}_o + \frac{\tau^2}{4}\{-Kr_o - C\dot{r}_o - f_o - Kr_1 - C\dot{r}_1 + f_1\} \qquad (26.6)$$

donde, para o deslocamento

$$(M+\frac{\tau^2}{4}K)r_1 + \frac{\tau^2 C}{4}\dot{r}_1 = (M-\frac{\tau^2 k}{4})r_o + (M - \frac{\tau^2 C}{4})\dot{r}_o + \frac{f_o\tau}{4} + \frac{f_1\tau}{4} \qquad (26.7)$$

para a velocidade

$$\frac{\tau K}{2}r_1 + (M+\frac{\tau C}{2})\dot{r}_1 = -\frac{\tau K}{2}r_o + (M-\frac{\tau C}{2})\dot{r}_o + \frac{f_o\tau}{2} + \frac{f_1\tau}{2} \qquad (26.8)$$

ou,na forma matricial

$$\begin{bmatrix} M+\frac{\tau^2 K}{4} & \frac{\tau^2 C}{4} \\ \frac{\tau K}{2} & M+\frac{\tau C}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M-\frac{\tau^2 K}{4} & M-\frac{\tau^2 C}{4} \\ -\frac{\tau K}{2} & M-\frac{\tau C}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{4} & \frac{\tau^2}{4} \\ \frac{\tau}{2} & \frac{\tau}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_o \\ f_1 \end{Bmatrix} \tag{26.9}$$

De modo resumido podemos escrever (26.9) como

$$\mathbb{D}_1 \vec{r}_1 = \mathbb{D}_o \vec{r}_o + \mathbb{F}_1 \vec{f}_o \tag{26.10}$$

onde

$$\mathbb{D}_1 = \begin{bmatrix} M + \frac{\tau^2 K}{4} & \frac{\tau^2 C}{4} \\ \frac{\tau K}{2} & M + \frac{\tau C}{2} \end{bmatrix} \tag{26.11}$$

$$\mathbb{D}_o = \begin{bmatrix} M - \frac{\tau^2 K}{4} & M - \frac{\tau^2 C}{4} \\ -\frac{\tau K}{2} & M - \frac{\tau C}{2} \end{bmatrix} \tag{26.12}$$

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{4} & \frac{\tau^2}{4} \\ \frac{\tau}{2} & \frac{\tau}{2} \end{bmatrix} \tag{26.13}$$

$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} \qquad \vec{r}_o = \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad \vec{f}_o = \begin{Bmatrix} f_o \\ f_1 \end{Bmatrix} \tag{26.14}$$

Resolvendo (26.10) obtemos o algorítimo na forma computacional como

$$\vec{r}_1 = \mathbb{D}_1^{-1} \mathbb{D}_o \vec{r}_o + \mathbb{D}_1^{-1} \mathbb{F}_o \vec{f}_o \tag{26.15}$$

2.7 ALGORÍTIMO PARA UM SISTEMA COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE, INTERPOLADO POR UM POLINÔMIO DO TERCEIRO GRAU

De modo análogo ao anterior, e observando que neste caso n=2, temos, de (25.20) e (25.21)

$$\dot{r}_1 = r_o + M^{-1}\tau\{a_o(R_o+R_1)+a_1\tau(\dot{R}_o-\dot{R}_1)\} \tag{27.1}$$

$$r_1 = r_o + \dot{r}_o + M^{-1}\tau^2\{(b_oR_o+c_oR_1)+\tau(b_1\dot{R}_o-c_1\dot{R}_1)\}$$

onde os coeficientes calculados por meio de (25.47), (25.51) e (25.56) valem

$$\begin{aligned} a_o &= 1/2 & a_1 &= 1/12 \\ b_o &= 1/3 & b_1 &= 1/24 \\ c_o &= 1/6 & c_1 &= 1/24 \end{aligned} \tag{27.3}$$

Sendo

$$R = -Kr - C\dot{r} + f \tag{27.4}$$

temos

$$R_o = -Kr_o - C\dot{r}_o + f_o$$

$$R_1 = -Kr_1 - C\ddot{r}_1 + f_1$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= -K\dot{r}_o - Cr_o + f_o = -K\dot{r}_o - C\{-M^{-1}Kr_o - M^{-1}C\dot{r}_o + M^{-1}f_o\} + \dot{f}_o \\ &= CM^{-1}Kr_o + (CM^{-1}C-K)\dot{r}_o - CM^{-1}f_o + f_o \end{aligned} \tag{27.5}$$

$$\dot{R}_1 = CM^{-1}Kr_1 + (CM^{-1}C-K)\dot{r}_1 - CM^{-1}f_1 + \dot{f}_1$$

Substituindo em (27.2), vem

$$\begin{aligned} Mr_1 = {} & Mr_o + M\tau\dot{r}_o + \\ & \frac{\tau^2}{3}(-Kr_o - C\dot{r}_o + f_o) + \frac{\tau^2}{6}(-Kr_1 - C\dot{r}_1 + f_1) + \\ & \frac{\tau^3}{24}\{CM^{-1}Kr_o + (CM^{-1}C-K)\dot{r}_o - CM^{-1}f_o + \dot{f}_o\} - \\ & - \frac{\tau^3}{24}\{CM^{-1}Kr_1 + (CM^{-1}C-K)\dot{r}_1 - CM^{-1}f_1 + \dot{f}_1\} \end{aligned} \tag{27.6}$$

Substituindo em (27.1), vem

$$M\dot{r}_1 = M\dot{r}_o + \frac{\tau}{2}(-Kr_o - C\dot{r}_o + f_o - Kr_1 - C\dot{r}_1 + f_1) +$$
$$+ \frac{\tau^2}{12}\{CM^{-1}Kr_o + (CM^{-1}C-K)\dot{r}_o - CM^{-1}f_o + f_o\} -$$
$$- \frac{\tau^2}{12}\{CM^{-1}Kr_1 + (CM^{-1}C-K)\dot{r}_1 - CM^{-1}f_1 + \dot{f}_1\} \qquad (27.7)$$

Colocando na forma matricial, temos

$$\mathbb{D}_1 \vec{r}_1 = \mathbb{D}_o \vec{r}_o + \mathbb{F}_o \vec{f}_o + \mathbb{F}_1 \vec{\dot{f}}_1 \qquad (27.8)$$

onde

$$\mathbb{D}_1 = \begin{bmatrix} M+\frac{\tau^2K}{6}+\frac{\tau^3CM^{-1}K}{24} & \frac{\tau^2C}{6} - \frac{\tau^3}{24}(K-CM^{-1}C) \\ \frac{\tau K}{2}+\frac{\tau^2}{12}CM^{-1}K & M+\frac{\tau C}{2} - \frac{\tau^2}{12}(K-CM^{-1}C) \end{bmatrix} \qquad (27.9)$$

$$\mathbb{D}_o = \begin{bmatrix} M-\frac{\tau^2K}{3}+\frac{\tau^3}{24}CM^{-1}K & M\tau - \frac{\tau^2C}{3} - \frac{\tau^3}{24}(K-CM^{-1}C) \\ -\frac{\tau K}{2} + \frac{\tau^2}{12}CM^{-1}K & M-\frac{\tau C}{2} - \frac{\tau^2}{12}(K-CM^{-1}C) \end{bmatrix} \qquad (27.10)$$

$$\mathbb{F}_o = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{3} - \frac{\tau^3}{24}CM^{-1} & \frac{\tau^2}{6} + \frac{\tau^3}{24}CM^{-1} \\ \frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{12}CM^{-1} & \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{12}CM^{-1} \end{bmatrix} \qquad (27.11)$$

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{24} & -\frac{\tau^3}{24} \\ \frac{\tau^2}{12} & -\frac{\tau^2}{12} \end{bmatrix} \qquad (27.12)$$

$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} \quad \vec{r}_o = \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \quad \vec{f}_o = \begin{Bmatrix} f_o \\ f_1 \end{Bmatrix} \quad \vec{\dot{f}}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{f}_o \\ \dot{f}_1 \end{Bmatrix} \qquad (27.13)$$

$\mathbb{I}$ matriz unitária de mesma ordem que CM^{-1}. isto é, se o sistema tiver NV variáveis a matriz $\mathbb{I}$ e as matrizes M,C,K são

2.8 ALGORÍTIMO PARA UM SISTEMA DE MULTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE, INTERPOLADO POR UM POLINÔMIO DO QUINTO GRAU

Usando (25.20) e (25.21) e relembrando que neste caso n=3, temos

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_o + M^{-1}\tau\{a_o(R_o+R_1)+a_1\tau(\dot{R}_o+\dot{R}_1)+a_2\tau^2(\ddot{R}_o+\ddot{R}_1)\} \quad (28.1)$$

$$r_1 = r_o + \dot{r}_o + M^{-1}\tau^2\{(b_oR_o+c_oR_1)+(b_1\dot{R}_o+c_1\dot{R}_1)+(b_2\ddot{R}_o+c_2\ddot{R}_1)\} \quad (28.2)$$

De (25.47), (25.51) e (25.56) obtemos

$$\begin{array}{lll} a_o=1/2 & a_1=1/10 & a_2=1/120 \\ b_o=7/20 & b_1=7/120 & b_2=1/240 \\ c_o=3/20 & c_1=-1/24 & c_2=1/240 \end{array} \quad (28.3)$$

Sendo

$$\begin{aligned} R &= -Kr - C\dot{r} + f \\ \dot{R} &= CM^{-1}Kr+(CM^{-1}C-K)\dot{r} - CM^{-1}f + \dot{f} \\ \ddot{R} &= -K\ddot{r} - C\ddot{r} + \ddot{f} \\ &= -K(-Kr-C\dot{r}+f) - CM^{-1}CM^{-1}Kr+M^{-1}(CM^{-1}C-K)\dot{r} - \\ &\quad M^{-1}CM^{-1}f + M^{-1}\dot{f} + \ddot{f} \\ &=(KM^{-1}K-CM^{-1}CM^{-1}K)r+(KM^{-1}C-CM^{-1}CM^{-1}C+CM^{-1}K)\dot{r} + \\ &\quad (-KM^{-1} + CM^{-1}CM^{-1})f - CM^{-1}\dot{f} + \ddot{f} \end{aligned} \quad (28.4)$$

e observando que

$$\begin{array}{lll} M\ddot{r} = R & \text{donde} & \ddot{r} = M^{-1}R \\ M\dddot{r} = \dot{R} & \text{donde} & \dddot{r} = M^{-1}\dot{R} \end{array} \quad (28.5)$$

A expressão (28.2) fica, após a substituição de (28.4) e (28.5)

$$\begin{aligned} Mr_1 &= Mr_o + M\tau\dot{r}_o + \\ &\frac{7}{20}\tau^2(-Kr_o-C\dot{r}_o+f_o)+\frac{3}{20}\tau^2(-Kr_1-C\dot{r}_1+f_1) + \end{aligned}$$

$$\frac{7}{120}\tau^3\{CM^{-1}Kr_o+(CM^{-1}C-K)\dot{r}_o-CM^{-1}f_o+\dot{f}_o\}-$$

$$-\frac{1}{24}\tau^3\{CM^{-1}Kr_1+(CM^{-1}C-K)\dot{r}_1-CM^{-1}f_1+\dot{f}_1\}+$$

$$\frac{1}{2402}\tau^4\{(KM^{-1}K-CM^{-1}CM^{-1}K)r_o+(KM^{-1}C-CM^{-1}CM^{-1}C+CM^{-1}K)\dot{r}_o+$$

$$+(-KM^{-1}+CM^{-1}CM^{-1})f_o-CM^{-1}\dot{f}_o+\ddot{f}_o\}+$$

$$+\frac{1}{240}\tau^4\{(KM^{-1}K-CM^{-1}CM^{-1}K)r_1+(KM^{-1}C-CM^{-1}CM^{-1}C+CM^{-1}K)\dot{r}_1+$$

$$(-KM^{-1}+CM^{-1}CM^{-1})f_1-CM^{-1}\dot{f}_1+\ddot{f}_1\} \qquad (28.6)$$

A expressão (28.1) fica

$$M\dot{r}_1=M\dot{r}_o+\frac{\tau}{2}\{(-Kr_o-C\dot{r}_o+f_o)+(-Kr_1-C\dot{r}_1+f_1)\}+$$

$$\frac{\tau^2}{10}\Big[\{CM^{-1}Kr_o+(CM^{-1}C-K)\dot{r}_o-CM^{-1}f_o+\dot{f}_o\}-$$

$$-\{CM^{-1}Kr_1+(CM^{-1}C-K)\dot{r}_1-CM^{-1}f_1+\dot{f}_1\}\Big]+$$

$$+\frac{\tau^3}{120}\Big[\{(KM^{-1}K-CM^{-1}CM^{-1}L)r_o+(KM^{-1}C-CM^{-1}CM^{-1}C+M^{-1}K)\dot{r}_o+$$

$$+(-KM^{-1}+CM^{-1}CM^{-1})f_o-CM^{-1}\dot{f}_o+\ddot{f}_o\}+$$

$$\{(KM^{-1}K-CM^{-1}CM^{-1}K)r_1+(KM^{-1}C-CM^{-1}CM^{-1}C+CM^{-1}K)\dot{r}_1+$$

$$(-KM^{-1}+CM^{-1}CM^{-1})f_1-CM^{-1}\dot{f}_1+\ddot{f}_1\}\Big] \qquad (28.7)$$

Colocando na forma matricial temos

$$\mathbb{D}_1\vec{r}=\mathbb{D}_o\vec{r}_o+\mathbb{F}_o\vec{f}_o+\mathbb{F}_1\vec{f}_1+\mathbb{F}_2\vec{f}_2 \qquad (28.8)$$

onde

$$\mathbb{D}_1=\begin{vmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 \end{vmatrix} \qquad (28.9)$$

e

$$d_{11}^1=M+\frac{3\tau^2}{20}K+\frac{\tau^3}{24}CM^{-1}K-\frac{\tau^4}{240}(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)K$$

$$d_{12}^{1}=\frac{3\tau^2}{20}-\frac{\tau^3}{24}(K-CM^{-1}C)-\frac{\tau^4}{240}\{CM^{-1}K+(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)C\}$$

$$d_{21}^{1}=\frac{\tau}{2}K+\frac{\tau^2}{10}CM^{-1}K-\frac{\tau^3}{120}(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)K \qquad (28.10)$$

$$d_{22}^{1}=M+\frac{\tau}{2}C-\frac{\tau^2}{10}(K-CM^{-1}C)+\frac{\tau^4}{120}\{CM^{-1}K+(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)C\}$$

$$\mathbb{D}_o=\begin{bmatrix} d_{11}^{o} & d_{12}^{o} \\ d_{21}^{o} & d_{22}^{o} \end{bmatrix}$$

$$d_{11}^{o}=M-\frac{7\tau^2}{20}K+\frac{7\tau^3}{120}CM^{-1}K+\frac{\tau^4}{240}(KM^{-1}-(CM^{-1}))K$$

$$d_{12}^{o}=\tau M-\frac{7\tau^2}{20}C-\frac{7\tau^3}{120}(K-CM^{-1}C)+\frac{\tau^4}{240}\{CM^{-1}K+(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)C\}$$

$$d_{21}^{o}=-\frac{\tau}{2}K+\frac{\tau^2}{10}CM^{-1}K+\frac{\tau^3}{120}(KM^{-1}-(CM^{-1}))K \qquad (28.12)$$

$$d_{22}^{o}=M-\frac{\tau}{2}C-\frac{\tau^2}{10}(K-CM^{-1}C)+\frac{\tau^3}{120}\{CM^{-1}K+(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)C\}$$

$$\mathbb{F}_1=\begin{bmatrix} F_{11}^{o} & F_{12}^{o} \\ F_{21}^{0} & F_{22}^{o} \end{bmatrix} \qquad (28.13)$$

onde

$$F_{11}^{o}=\frac{7\tau^2}{20}-\frac{7\tau^3}{120}CM^{-1}-\frac{\tau^4}{240}(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)$$

$$F_{12}^{o}=\frac{3\tau^2}{20}+\frac{\tau^3}{24}CM^{-1}-\frac{\tau^4}{240}(KM^{-1}-(CM^{-1})^2) \qquad (28.14)$$

$$F_{21}^{o}=\frac{\tau}{2}-\frac{\tau^2}{10}CM^{-1}-\frac{\tau^3}{120}(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)$$

$$F_{22}^{o}=\frac{\tau}{2}+\frac{\tau^2}{10}CM^{-1}-\frac{\tau^3}{120}(KM^{-1}-(CM^{-1})^2)$$

$$\mathbb{F}=\begin{bmatrix} \frac{7\tau^3}{120} & -\frac{\tau^4}{240}CM^{-1} \\ \frac{\tau^2}{10} & -\frac{\tau^3}{120}CM^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{\tau^3}{24} & -\frac{\tau^4}{240}CM^{-1} \\ -\frac{\tau^2}{10} & -\frac{\tau^3}{120}CM^{-1} \end{bmatrix} \qquad (28.15)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\tau^4}{240} & \frac{\tau^4}{240} \\ \frac{\tau^3}{120} & \frac{\tau^3}{120} \end{bmatrix} \tag{28.16}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} \quad \vec{r}_o = \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \quad \vec{f}_o = \begin{Bmatrix} f_o \\ f \end{Bmatrix} \quad \vec{f}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{f}_o \\ \dot{f} \end{Bmatrix} \quad \vec{f}_2 = \begin{Bmatrix} \ddot{f}_o \\ \ddot{f} \end{Bmatrix} \tag{28.17}$$

2.9 RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA PARA O CÁLCULO DA DERIVADA DE ORDEM n DE R

Representaremos a derivada de ordem n de R por $R^{(n)}$

Sabemos que

$$R = -Kr - C\dot{r} + f \tag{29.1}$$

coloquemos na forma

$$R = a_o^o r + a_1^o \dot{r} + b_o^o f \tag{29.2}$$

onde estamos usando a seguinte notação

letra 'a' coeficiente de r ou $\dot{r}$

letra 'b' coeficiente de f, $\dot{f}$, $\ddot{f}$ etc

índice superior - ordem de derivação de R

índice inferior - ordem de derivação da variável para a qual a letra é coeficiente

$a_1^o \rightarrow R^{(o)}$, $\dot{r}$ — como em $a_1^o \dot{r}$

$b_2^3 \rightarrow R^{(3)}$, $\ddot{f}$ — como em $b_2^3 \ddot{f}$

Assim as derivadas de R podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
R &= a_o^o r + a_1^o \dot{r} + b_o^o f \\
R^{(1)} &= a_o^1 r + a_1^1 \dot{r} + b_o^1 f + b_1^1 \dot{f} \\
R^{(2)} &= a_o^2 r + a_1^2 \dot{r} + b_o^2 f + b_1^2 \dot{f} + b_2^2 \ddot{f} \\
R^{(3)} &= a_o^3 r + a_1^3 \dot{r} + b_o^3 f + b_1^3 \dot{f} + b_2^3 \ddot{f} + b_3^3 \dddot{f} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
R^{(n-1)} &= a_o^{n-1} r + a_1^{n-1} \dot{r} + \quad b_i^{n-1} f(i)
\end{aligned}
\tag{29.3}
$$

29.1 Obtenção dos coeficientes a_i^j

Sabemos que

$$\ddot{r} = (-M^{-1}K)r + (-M^{-1}C)\dot{r} + (M^{-1})f \tag{29.4}$$

que pode ser colocada na forma

$$\ddot{r} = \alpha r + \beta \dot{r} + \gamma f \tag{29.5}$$

onde

$$\alpha = -M^{-1}K \quad \beta = -M^{-1}C \quad \gamma = M^{-1} \tag{29.6}$$

A partir de (29.5) obtemos as seguintes expressões

$$
\begin{aligned}
\dot{R} &= a_o^o \dot{r} + a_1^o \ddot{r} + b_o^o \dot{f} \\
&= a_o^o \dot{r} + a_1^o(\alpha r + \beta \dot{r} + \gamma f) + b_o^o \dot{f} \\
&= a_o^o r + a_1^o \alpha r + a_1^o \beta \dot{r} + a_1^o \gamma f + b_o^o \dot{f} \\
&= (a_1^o \alpha) r + (a_o^o + a_1^o \beta)\dot{r} + (a_1^o \gamma) f + (b_o^o)\dot{f} \\
&= a_o^1 r + a_1^1 \dot{r} + b_o^1 f + b_1^1 \dot{f}
\end{aligned}
\tag{29.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{R} &= a_o^1 \dot{r} + a_1^1 \ddot{r} + b_o^1 \dot{f} + b_1^1 \ddot{f} \\
&= a_o^1 \dot{r} + a_1^1(\alpha r + \beta \dot{r} + \gamma f) + b_o^1 \dot{f} + b_1^1 \ddot{f} \\
&= (a_1^1 \alpha) r + (a_o^1 + a_1^1 \beta)\dot{r} + (a_1^1 \gamma) f + (b_o^1)\dot{f} + (b_1^1)\ddot{f} \\
&= a_o^2 r + a_1^2 \dot{r} + b_o^2 f + b_1^2 \dot{f} + b_2^2 \ddot{f}
\end{aligned}
\tag{29.8}
$$

$$R^{(3)} = a_o^2\dot{r} + a_1^2 r + b_o^2\dot{f} + b_1^2 f + b_2^2\dddot{f}$$
$$= a_o^2\dot{r} + a_1^2(\alpha r + \beta\dot{r} + \gamma f) + b_o^2\dot{f} + b_1^2 f + b_2^2\dddot{f}$$
$$= (a_1^2\alpha)r + (a_o^2 + a_1^2\beta)\dot{r} + (a_1^2\gamma)f + (b_o^2)\dot{f} + b_1^2 f + b_2^2\dddot{f} \qquad (29.9)$$

Resumindo os coeficientes a_i^j temos

derivada de R	coeficiente de r	coeficiente de $\dot{r}$
$R^{(0)}$	$a_o^o = -K$	$a_1^o = -C$
$R^{(1)}$	$a_o^1 = a_1^o\alpha$	$a_1^1 = (a_o^o + a_1^o\beta)$
$R^{(2)}$	$a_o^2 = a_1^1\alpha$	$a_1^2 = (a_o^1 + a_1^1\beta)$
$R^{(3)}$	$a_o^3 = a_1^2\alpha$	$a_1^3 = (a_1^3 + a_1^2\beta)$
.....		
$R^{(j)}$	$a_o^j = a_1^{j-1}\alpha$	$a_1^j = (a_o^{j-1} + a_1^{j-1}\beta)$
.....		
$R^{(n-1)}$	$a_o^{n-1} = a_1^{n-2}\alpha$	$a_1^{n-1} = (a_o^{n-2} + a_1^{n-2}\beta)$

(29.10)

29.2 Obtenção dos coeficientes b_i^j

Observando as expressões (29.7),(29.8) e (29.9) temos

derivada de R	coefic. de $f^{(0)}$	coefic. de $f^{(1)}$	coefic. de $f^{(2)}$	coefic. de $f^{(3)}$	coefic. de $f^{(j)}$
$R^{(0)}$	$b_o^o = I$				
$R^{(1)}$	$b_o^1 = a_1^o\gamma$	$b_1^1 = b_o^o$			
$R^{(2)}$	$b_o^2 = a_1^1\gamma$	$b_1^2 = b_o^1$	$b_2^2 = b_1^1$		
$R^{(3)}$	$b_o^3 = a_1^2\gamma$	$b_1^3 = b_o^2$	$b_2^3 = b_1^2$	$b_3^3 = b_2^2$	
.....					
$R^{(j)}$	$b_o^j = a_1^{j-1}\gamma$	$b_1^j = b_o^{j-1}$	$b_2^j = b_1^{j-1}$	.....	$b_j^j = b_{j-1}^{j-1}$
.....					
$R^{(n-1)}$	$b_o^{n-1} = a_1^{n-2}$	$b_i^{n-1} = b_{i-1}^{n-2}$	$i=1,2,\ldots,n-1$		

29.3 Sequência de cálculo dos a_i^j e b_i^j

1 - Calcular $a_o^o = -K$ $a_1^o = -C$ $b_o^o = I$

onde I é a matriz unitária de mesma ordem que f, isto é, o dobro do número de variáveis em r.

2 - Calcular $a_o^j = a_1^{j-1}\alpha$

$a_1^j = (a_o^{j-1} + a_1^{j-1}\beta)$

para cada valor de j (j=1,2,...,n-1)

3 - Calcular $b_o^j = a_1^{j-1}\gamma$ para j = 1,2,...,n-1

4 - Calcular $b_i^j = b_{i-1}^{j-1}$ fixando os valores de i (i=1,2,...,n-1) e calculando para cada j (j=1,2,...n-1)

2.10 ALGORÍTIMO PARA UM SISTEMA DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE, INTERPOLADO POR UM POLINÔMIO DE SÉTIMO GRAU

Usando (25.20) e (25.21) e relembrando que neste caso n=4, temos

$$Mr_1 = Mr_o + M\tau\dot{r}_o + \tau^2\{b_oR_o + c_oR_1 + \tau(b_1\dot{R}_o + c_1\dot{R}_1) + \tau^2(b_2\ddot{R}_o + c_2\ddot{R}_1) + \tau^3(b_3\dddot{R}_o + c_3\dddot{R}_1)\} \qquad (210.1)$$

$$M\dot{r}_1 = M\dot{r}_o + \tau\{a_o(R_o + R_1) + a_1\tau(\dot{R}_o - \dot{R}_1) + a_2\tau^2(\ddot{R}_o + \ddot{R}_1) + a_3\tau^3(\dddot{R}_o - \dddot{R}_1) \qquad (210.2)$$

Substituindo R e suas derivadas conforme (29.3) em (210.1) e (210.2) vem, para (210.1)

$$Mr_1 = Mr_o + M\tau\dot{r}_o + \tau^2 b_o(a_o^o r_o + a_1^o\dot{r}_o + b_o^o f_o) + \tau^2 c_o(a_o^o r_1 + a_1^o\dot{r}_1 + b_o^o f_1) +$$

$$\tau^3 b_1(a_o^1 r_o + a_1^1 \dot{r}_o + b_o^1 f_o + b_1^1 \dot{f}_o) + \tau^3 c_1(a_o^1 r_1 + a_1^1 \dot{r}_1 + b_o^1 f_1 + b_1^1 \dot{f}_1) + \tau^4 b_2(a_o^2 r_o + a_1^2 \dot{r}_o + b_o^2 f_o + b_1^2 \dot{f}_o + b_2^2 \ddot{f}_o) + \tau^4 c_2(a_o^2 r_1 + a_1^2 \dot{r}_1 + b_o^2 f_1 + b_1^2 \dot{f}_1 + b_2^2 \ddot{f}_1) + \tau^5 b_3(a_o^3 r_o + a_1^3 \dot{r}_o + b_o^3 f_o + b_1^3 \dot{f}_o + b_2^3 \ddot{f}_o + b_3^3 \dddot{f}_o) + \tau^5 c_3(a_o^3 r_1 + a_1^3 \dot{r}_1 + b_o^3 f_1 + b_1^3 \dot{f}_1 + b_2^3 \ddot{f}_1 + b_3^3 \dddot{f}_1) \quad (210.3)$$

Para (210.2) temos

$$M\dot{r}_1 = Mr_o + \tau a_o(a_o^o r_o + a_1^o \dot{r}_o + b_o^o f_o) + \tau a_o(a_o^o r_1 + a_1^o \dot{r}_1 + b_o^o f_1) + \tau^2 a_1(a_o^1 r_o + a_1^1 \dot{r}_o + b_o^1 f_o + b_1^1 \dot{f}_o) - \tau^2 a_1(a_o^1 r_1 + a_1^1 \dot{r}_1 + b_o^1 f_1 + b_1^1 \dot{f}_1) + \tau^3 a_2(a_o^2 r_o + a_1^2 \dot{r}_o + b_o^2 f_o + b_1^2 \dot{f}_o + b_2^2 \ddot{f}_o) + \tau^3 a_2(a_o^2 r_1 + a_1^2 \dot{r}_1 + b_o^2 f_1 + b_1^2 \dot{f}_1 + b_2^2 \ddot{f}_1) + \tau^4 a_3(a_o^3 r_o + a_1^3 \dot{r}_o + b_o^3 f_o + b_1^3 \dot{f}_o + b_2^3 \ddot{f}_o + b_3^3 \dddot{f}_o) - \tau^4 a_3(a_o^3 r_1 + a_1^3 \dot{r}_1 + b_o^3 f_1 + b_1^3 \dot{f}_1 + b_2^3 \ddot{f}_1 + b_3^3 \dddot{f}_1) \quad (210.4)$$

Colocando na forma matricial, temos

$$\mathbb{D}_1 r_1 = \mathbb{D}_o \vec{r}_o + \mathbb{F}_o \vec{f}_o + \mathbb{F}_1 \vec{f}_1 + \mathbb{F}_2 \vec{f}_2 + \mathbb{F}_3 \vec{f}_3 \quad (210.5)$$

onde

$$\mathbb{D}_1 = \begin{bmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (210.6)$$

$$\begin{aligned} d_{11}^1 &= M - \tau^2 c_o a_o^o - \tau^3 c_1 a_o^1 - \tau^4 c_2 a_o^2 - \tau^5 c_3 a_o^3 \\ d_{12}^1 &= -\tau^2 c_o a_1^o - \tau^3 c_1 a_1^1 - \tau^4 c_2 a_1^2 - \tau^5 c_3 a_1^3 \\ d_{21}^1 &= -\tau a_o a_o^o + \tau^2 a_1 a_o^1 - \tau^3 a_2 a_o^2 + \tau^4 a_3 a_o^3 \\ d_{22}^1 &= M - \tau a_o a_1^o + \tau^2 a_1 a_1^1 - \tau^3 a_2 a_1^2 + \tau^4 a_3 a_1^3 \end{aligned} \quad (210.7)$$

Isto nos permite generalizar como

$$\begin{aligned} d_{11}^1 &= M - \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+2} c_i a_o^i \\ d_{12}^1 &= -\sum_{i=0}^{n-I} \tau^{i+2} c_i a_1^i \end{aligned} \quad (210.8)$$

$$d_{21}^{1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \tau^{i+1} a_i a_o^i$$

$$d_{22}^{1} = M + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \tau^{i+1} a_i a_o^i \qquad (210.8)$$

$$\mathbb{D}_o = \begin{bmatrix} d_{11}^{o} & d_{12}^{o} \\ d_{21}^{o} & d_{22}^{o} \end{bmatrix} \qquad (210.9)$$

$$\begin{aligned} d_{11}^{o} &= M+\tau^2 b_o a_o^o+\tau^3 b_1 a_o^1+\tau^4 b_2 a_o^2+\tau^5 b_3 a_o^3 \\ d_{12}^{o} &= M\tau+\tau^2 b_o a_1^o+\tau^3 b_1 a_1^1+\tau^4 b_2 a_1^2+\tau^5 b_3 a_1^3 \\ d_{21}^{o} &= \tau a_o a_o^o+\tau^2 a_1 a_o^1+\tau^3 a_2 a_o^2+\tau^4 a_3 a_o^3 \\ d_{22}^{o} &= M+\tau a_o a_1^o+\tau^2 a_1 a_1^1+\tau^3 a_2 a_1^2+\tau^4 a_3 a_1^3 \end{aligned} \qquad (210.10)$$

que pode ser generalizado como

$$\begin{aligned} d_{11}^{o} &= M + \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+2} b_i a_o^i \\ d_{12}^{o} &= M + \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+2} b_i a_1^i \\ d_{21}^{o} &= \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+1} a_i a_o^i \\ d_{22}^{o} &= M + \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+1} a_i a_1^i \end{aligned} \qquad (210.11)$$

$$\mathbb{F}_o = \begin{bmatrix} f_{11}^{o} & f_{12}^{o} \\ f_{21}^{o} & f_{22}^{o} \end{bmatrix} \qquad (210.12)$$

$$\begin{aligned} f_{11}^{o} &= \tau^2 b_o b_o^o+\tau^3 b_1 b_o^1+\tau^4 b_2 b_o^2+\tau^5 b_3 b_o^3 \\ f_{12}^{o} &= \tau^2 c_o b_o^o+\tau^3 c_1 b_o^1+\tau^4 c_2 b_o^2+\tau^5 c_3 b_o^3 \\ f_{21}^{o} &= \tau a_o b_o^o+\tau^2 a_1 b_o^1+\tau^3 a_2 b_o^2+\tau^4 a_3 b_o^3 \\ f_{22}^{o} &= \tau a_o b_o^o-\tau^2 a_1 b_o^1+\tau^3 a_2 b_o^2-\tau^4 a_3 b_o^3 \end{aligned} \qquad (210.13)$$

Generalizando

$$f_{11}^{o} = \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+2} b_i b_o^i$$
$$f_{12}^{o} = \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+2} c_i b_o^i \qquad (210.14)$$
$$f_{21}^{o} = \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{i+1} a_i b_o^i$$
$$f_{22}^{o} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \tau^{i+1} a_i b_o^i$$

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} f_{11}^1 & f_{12}^1 \\ f_{21}^1 & f_{22}^1 \end{bmatrix} \qquad (210.15)$$

$$f_{11}^1 = \tau^3 b_1 b_1^1 + \tau^4 b_2 b_1^2 + \tau^5 b_3 b_1^3$$
$$f_{12}^1 = \tau^3 c_1 b_1^1 + \tau^4 c_2 b_1^2 + \tau^5 c_3 b_1^3 \qquad (210.16)$$
$$f_{21}^1 = \tau^2 a_1 b_1^1 + \tau^3 a_2 b_1^2 + \tau^4 a_3 b_1^3$$
$$f_{22}^1 = -\tau^2 a_1 b_1^1 + \tau^3 a_2 b_1^2 - \tau^4 a_3 b_1^3$$

Generalizando

$$f_{11}^1 = \sum_{i=1}^{n-1} \tau^{i+2} b_i b_1^i$$
$$f_{12}^1 = \sum_{i=1}^{n-1} \tau^{i+2} c_i b_1^i \qquad (210.17)$$
$$f_{21}^1 = \sum_{i=1}^{n-1} \tau^{i+1} a_i b_1^i$$
$$f_{22}^1 = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \tau^{i+1} a_i b_1^i$$

$$\mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} f_{11}^2 & f_{12}^2 \\ f_{21}^2 & f_{22}^2 \end{bmatrix} \qquad (210.18)$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}^2 &= \tau^4 b_2 b_2^2 + \tau^5 b_3 b_2^3 \\
f_{12}^2 &= \tau^4 c_2 b_2^2 + \tau^5 c_3 b_2^3 \\
f_{21}^2 &= \tau^3 a_2 b_2^2 + \tau^4 a_3 b_2^3 \\
f_{22}^2 &= \tau^3 a_2 b_2^2 - \tau^4 a_3 b_2^3
\end{aligned}
\qquad (210.19)
$$

Generalizando

$$
\begin{aligned}
f_{11}^2 &= \sum_{i=2}^{n-1} \tau^{i+2} b_i b_2^i \\
f_{12}^2 &= \sum_{i=2}^{n-1} \tau^{i+2} c_i b_2^i \\
f_{21}^2 &= \sum_{i=2}^{n-1} \tau^{i+1} a_i b_2^i \\
f_{22}^2 &= \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \tau^{i+1} a_i b_2^i
\end{aligned}
\qquad (210.20)
$$

$$
\mathbb{F}_3 = \begin{bmatrix} f_{11}^3 & f_{12}^3 \\ f_{21}^3 & f_{22}^3 \end{bmatrix} \qquad (210.21)
$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}^3 &= \tau^5 b_3 b_3^3 \qquad & f_{12}^3 &= \tau^5 c_3 b_3^3 \\
f_{21}^3 &= \tau^4 a_3 b_3^3 \qquad & f_{22}^3 &= -\tau^4 a_3 b_3^3
\end{aligned}
\qquad (210.22)
$$

As expressões correspondentes aos $_j$ podem ser grupadas do seguinte modo

$$
\begin{aligned}
f_{11}^j &= \sum_{i=j}^{n-1} \tau^{i+2} b_i b_j^i \qquad j=0,1,\ldots,n-1 \\
f_{12}^j &= \sum_{i=j}^{n-1} \tau^{i+2} c_i b_j^i \\
f_{21}^j &= \sum_{i=j}^{n-1} \tau^{i+1} a_i b_j^i \\
f_{22}^j &= \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^i \tau^{i+1} a_i b_j^i
\end{aligned}
\qquad (210.23)
$$

A expressão na forma matricial pode ser ainda colocada na forma

$$\mathbb{D}_1 \vec{r}_1 = \mathbb{D}_o \vec{r}_o + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{F}_j \vec{f}_j \qquad (210.24)$$

onde

$$\mathbb{F}_j = \begin{bmatrix} f_{11}^j & f_{12}^j \\ f_{21}^j & f_{22}^j \end{bmatrix} \qquad \vec{f}_j = \begin{Bmatrix} f_o^{(j)} \\ f_1^{(j)} \end{Bmatrix} \qquad (210.25)$$

2.11 ALGORÍTIMO PARA UM SISTEMA DE g GRAUS DE LIBERDADE INTERPOLADO POR UM POLINÔMIO DE GRAU q

Uma equação diferencial linear de segunda ordem pode ser colocada na forma

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = f(t) \qquad (211.1)$$

e sua solução numérica pode ser obtida por

$$\vec{r}_1 = \mathbb{D}_1^{-1} \mathbb{D}_o \vec{r}_o + \mathbb{D}_1^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{F}_j \vec{f}_j \qquad (211.2)$$

onde

$$\mathbb{D}_1 = \begin{bmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{D}_o = \begin{bmatrix} d_{11}^o & d_{12}^o \\ d_{21}^o & d_{22}^o \end{bmatrix} \qquad (211.3)$$

$$\mathbb{F}_j = \begin{bmatrix} f_{11}^j & f_{12}^j \\ f_{21}^j & f_{22}^j \end{bmatrix} \qquad (211.4)$$

$$\vec{r}_1 = \begin{Bmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{Bmatrix} \qquad \vec{r}_o = \begin{Bmatrix} r_o \\ \dot{r}_o \end{Bmatrix} \qquad \vec{f}_j = \begin{Bmatrix} f_o^{(j)} \\ f_1^{(j)} \end{Bmatrix} \qquad r = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_g \end{Bmatrix}$$

onde

x_i é o i-ésimo grau de liberdade

$n = (q+1)/2$

os termos de $_1$ são dados por (210.8)

os termos de $_o$ são dados por (210.11)

os termos de $_j$ são dados por (210.23)

os coeficientes que compõem os termos das matrizes são obtidos pelo item 29.3 .

CAPÍTULO 3

SISTEMA DESCRITO POR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR DE ORDEM p

3.1 EXPRESSÃO GERAL

Seja a equação diferencial linear de ordem p, na forma

$$A_o r^{(p)} + A_1 r^{(p-1)} + \ldots\ldots + A_p r^{(0)} = f(t) \qquad (31.1)$$

ou então, na forma de somatório

$$\sum_{i=p}^{0} A_{p-i}\, r^{(i)} = f(t) \qquad (31.2)$$

Esta equação pode ser colocada na forma

$$R = A_o r^{(p)} = \sum_{i=p-1}^{i=0} -A_{p-i}\, r^{(i)} + f(t) \qquad (31.3)$$

As expressões correspondentes a (25.17) e (25.18) neste caso tem a forma

$$A_o r_1^{(j)} = A_o \sum_{i=j}^{p-1} \frac{1}{(i-j)!}\, \tau^{i-j}\, r_o^{(i)} +$$

$$+ \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \{\tau^k (a_{jk}^{o}\, R_o^{(k)} + a_{jk}^{1}\, R_1^{(k)})\} \qquad (31.4)$$

onde $j = 0,1,\ldots,p-1$

No caso de j=1 temos (25.17) e no caso de j=0 temos (25.18)

Dado um sistema de múltiplos graus de liberdade regido por uma equação diferencial de ordem p, linear, o algorítimo para a integração é da forma

$$\vec{r}_1 = \mathbb{A}\, \vec{r}_o + \mathbb{B} \qquad (31.5)$$

onde

$$\vec{r}_1 = \begin{Bmatrix} r_1^o \\ r_1^1 \\ \vdots \\ r_1^j \\ \vdots \\ r_1^p \end{Bmatrix} \qquad \vec{r}_o = \begin{Bmatrix} r_o^o \\ r_o^1 \\ \vdots \\ r_o^j \\ \vdots \\ r_o^p \end{Bmatrix} \tag{31.6}$$

onde r_1^j é obtido de (31.4) como veremos a seguir

3.2 CALCULO DOS COEFICIENTES a_{jk}^o E a_{jk}^1

A condição de que o algorítimo deve funcionar integrando com acréscimo (passo) positivo ou negativo nos permite obter as relações entre a_{jk}^o e a_{jk}^1, de modo análogo ao que foi feito em (25.3) .

Para que o algorítimo seja estável, os coeficientes de k=n-1 devem satisfazer a certas condições, de modo análogo ao visto em (25.4) .

Conhecidas estas condições podemos montar o sistema de equações para o cálculo dos coeficientes a_{jk}^1 (k=0,1,...,n-2). E, por meio das relações obtidas, calcular a_{jk}^o .

32.1 Relações entre os coeficientes a_{jk}^o e a_{jk}^1.

A expressão para a integração com passo negativo é da forma, (ver fig 25.4)

$$A_o r_o^{(i)} = A_o \sum_{\ell=i}^{p-1} \frac{1}{(\ell-i)!} (-\tau)^{\ell-i} r_1^{(\ell)} + \\ + (-\tau)^{p-i} \sum_{k=0}^{n-1} \{(-\tau)^k (a_{ik}^o R_1^{(k)} + a_{ik}^1 R_o^{(k)})\} \tag{32.1}$$

onde, em relação a (31.4), os índices j e i foram trocados por i e ℓ respectivamente.

Substituindo (32.1) em (31.4) obtemos

$$A_o r_1^{(j)} = \sum_{i=j}^{p-1} \frac{1}{(i-j)!} \tau^{i-j} \left\{ A_o \sum_{\ell=i}^{p-1} \frac{1}{(\ell-i)!} (-\tau)^{\ell-i} r_1^{(\ell)} + \right.$$

$$\left. + \tau^{p-i} \sum_{k=0}^{n-1} \{(-\tau)^k (a_{ik}^o R_1^{(k)} + a_{ik}^1 R_1^{(k)})\} \right\} +$$

$$+ \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \{\tau^k (a_{jk}^o R_o^{(k)} + a_{jk}^1 R_1^{(k)})\} \qquad (32.2)$$

É fácil mostrar que (desenvolvendo por exemplo)

$$A_o r_1^{(j)} = \sum_{i=j}^{p-1} \sum_{\ell=i}^{p-1} A_o \frac{1}{(\ell-i)!} \tau^{i-j} (-\tau)^{\ell-i} r_1^{(\ell)} \qquad (32.3)$$

Logo temos

$$\sum_{i=j}^{p-1} \frac{1}{(i-j)!} \tau^{i-j} (-\tau)^{p-i} \sum_{k=0}^{n-1} \{(-\tau)^k (a_{ik}^o R_1^{(k)} + a_{ik}^1 R_o^{(k)})\} +$$

$$+ \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \{\tau^k (a_{jk}^o R_o^{(k)} + a_{jk}^1 R_1^{(k)})\} = 0 \qquad (32.4)$$

Dividindo toda a expressão por τ^{p-j+k} e rearrumando os somatórios

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \sum_{i=j}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i+k}}{(i-j)!} \{a_{ik}^o R_1^{(k)} + a_{ik}^1 R_o^{(k)}\} + \right.$$

$$\left. \{a_{jk}^o R_o^{(k)} + a_{jk}^1 R_1^{(k)}\} \right\} = 0 \qquad (32.5)$$

Equacionando os coeficientes dos $R_o^{(k)}$, para cada valor de k (k=0,1,...,n-1), temos

$$\sum_{i=j}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i+k}}{(i-j)!} a_{ik}^1 + a_{jk}^o = 0 \qquad (32.6)$$

Tomando o somatório a partir de j+1, vem

$$\sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i+k}}{(i-j)!} a_{ik}^1 + (-1)^{p-j+k} a_{jk}^1 + a_{jk}^o = 0 \qquad (32.7)$$

donde a relação entre os coeficientes

$$a^{o}_{jk} + (-1)^{p-j+k}\, a^{1}_{jk} = \sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i+k+1}}{(i-j)!}\, a^{1}_{ik} \qquad (32.8)$$

$$k=0,1,\ldots,n-1$$

Observemos que nesta expressão estão relacionados os coeficientes de ordem j com os de ordem p-1, p-2,...., j+1 calculados anteriormente (a sequência de cálculo é de p-1 até j)

No caso particular de p=2 e j=1 (32.8) fica

$$a^{o}_{1,k} + (-1)^{k+1}\, a^{1}_{1,k} = 0 \qquad (32.9)$$

pois somatório de i=j+1=2 até i=p-1=1 não existe, sendo igual a zero por convenção.

Para este caso, observando-se que pela notação usada anteriormente $r^{(1)} \equiv \dot{r}$, (31.4) fica

$$A_o \dot{r}_1 = A_o \dot{r}_o + \tau \sum_{k=0}^{n-1} \{\tau^k (a^{o}_{1k} R^{(k)}_o + a^{1}_{1k} R^{(k)}_1)\} \qquad (32.10)$$

Considerando-se (32.9), podemos escrever (32.10) desenvolvida como

$$A_o \dot{r}_1 = A_o \dot{r}_o + \tau\{a^{o}_{1,0}(R_o + R_1) + a^{1}_{1,1}(\dot{R}_o - \dot{R}_1) + ...\} \qquad (32.11)$$

A expressão (32.11) é análoga a expressão (23.17)

32.2 Relações entre os coeficientes para que o algorítimo seja estável

Procedendo de modo análogo ao que foi visto em (25.4) temos, para k=n-1, tendo em vista (31.4)

$$\lim_{\substack{\tau \longrightarrow \infty \\ k=n-1}} \tau^{p-j+k} \left(a^{o}_{jk} R^{(k)}_o + a^{1}_{jk} R^{(k)}_1\right) \longrightarrow 0$$

donde

$$a^{o}_{j,n-1} R_o^{(n-1)} + a^{1}_{j,n-1} R_1^{(n-1)} = 0 \qquad (32.13)$$

Observemos que (32.13) e (32.8) são válidas para qualquer j, então, para j=p-1 temos, de (32.8) com k=n-1

$$a^{o}_{p-1,n-1} = (-1)^{n+1} a^{1}_{p-1,n-1} \qquad (32.14)$$

Substituindo (32-14) em (32.13) vem

$$((-1)^{n+1} R_o^{(n-1)} + R_1^{(n-1)}) a^{1}_{p-1,n-1} = 0 \qquad (32.15)$$

Como $a^{1}_{p-1,n-1} \neq$, vem

$$R_1^{(n-1)} = (-1)^{n} R_o^{(n-1)} \qquad (32.16)$$

e de (32.13) vem

$$(a^{o}_{j,n-1} + (-1)^{n} a^{1}_{j,n-1}) R_o^{(n-1)} = 0 \qquad (32.17)$$

donde a relação

$$a^{o}_{j,n-1} + (-1)^{n} a^{1}_{j,n-1} = 0 \quad \text{para todo } j \qquad (32.18)$$

Substituindo em (32.8) temos, com k=n-1

$$(-1)^{n+1} a^{1}_{j,n-1} + (-1)^{p-j+n-1} a^{1}_{j,n-1} =$$

$$= \sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i+n}}{(i-j)!} a^{1}_{i,n-1} \qquad (32.19)$$

dividindo por $(-1)^{n+1}$, vem

$$(1 + (-1)^{p-j-2})\, a^{1}_{j,n-1} = \sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i-1}}{(i-j)!}\, a^{1}_{,n-1} \tag{32.20}$$

Observemos que se p-j for par, teremos

$$a^{1}_{j,n-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i-1}}{(i-j)!}\, a^{1}_{i,n-1} \tag{32.21}$$

Se p-j for impar temos as identidades

$$\sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{(-1)^{p-i-1}}{(i-j)!}\, a^{1}_{i,n-1} = 0 \tag{32.22}$$

Para o caso particular de j=p-1 temos p-j=p-p+1=1 que é impar. Tendo em vista (32.22) não podemos usar (32.20) e sim deveremos usar (32.18) o que nos dá

$$a^{o}_{p-1,n-1} + (-1)^{n}\, a^{1}_{p-1,n-1} = 0 \tag{32.23}$$

Para j=p-2, temos p-j=p-p+2 que é par. De (32.21) vem

$$a^{1}_{p-2,n-1} = \frac{1}{2}\,(-1)^{0}\, a^{1}_{p-1,n-1} \tag{32.24}$$

Para j=p-3, temos j=p-p+3 que é impar. De (32.18) vem

$$a^{o}_{p-3,n-1} + (-1)^{n}\, a^{1}_{p-3,n-1} = 0 \tag{32.25}$$

Para j=p-4, temos p-j=p-p+4 que é par. De (32.21) vem

$$a^{1}_{p-4,n-1} = \frac{1}{2}\left\{a^{1}_{p-3,n-1} - \frac{1}{2}\, a^{1}_{p-2,n-1} + \frac{1}{6}\, a^{1}_{p-1,n-1}\right\} \tag{32.26}$$

32.3 Cálculo dos coeficientes a^1_{jk}

Fazendo $R=t^n, t^{n+1}, \ldots, t^{2n-1}$ sucessivamente em (31.4); tomando $A_o=I$, $\tau=1$ e o intervalo de $t_o=0$ a $t_o+\tau=1$, obtemos um sistema de n equações (cada uma correspondente a $R=t^u$, $u=n,n+1,\ldots,2n-1$) em n incógnitas a^1_{jk} , $k=0,1,\ldots,n-1$.

Considerando que $r_o^{(i)} = t^u\big|_{t=0} = 0$, em (31.4), temos

$$r_1^{(j)} = \sum_{k=0}^{n-1} a^1_{jk} \, (t^u)^{(k)}\Big|_{t=1} \qquad (32.27)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^1_{jk} \frac{d^k}{dt^k} (t^u)\Big|_{t=1} = = \int^{1(j)} (t^u) \, (dt)^j \qquad (32.28)$$

onde

$$r_1^{(j)} = \int_0^{1(j)} R \, (dt)^j = \int_0^{1(j)} (t^u) \, (dt)^j \qquad (32.29)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^1_{jk} \frac{u!}{(u-k)!} = \frac{u!}{(u+p-j)} \qquad (32.30)$$

$j=p-1,p-2,\ldots,0$

$u=n,n+1,\ldots\ldots,2n-1$ se p-j par

$u=n,n+1,\ldots\ldots,2n-2$ se p-j impar

Para cada j temos um sistema de equações. Se p-j for impar o sistema está completo (n equações e n incógnitas). Se p-j for par, o sistema comtem n-1 equações, e a última relação é fornecida por (32.21).

Como exemplo verifiquemos o caso da equação diferencial linear de segunda ordem, interpolada por um polinômio do quinto grau. Neste caso p=2 e n=(q+1)/2=3.

Para p=2 temos duas expressões do tipo (31.4), com j=p-1=1 e j=p-2=0. Consequentemente temos os coeficientes

$$a^o_{1,k} \; , \; a^1_{1,k} \; , \; a^o_{o,k} \; , \; a^1_{o,k}$$

a serem obtidos

Para j=1 e u=n,n+1,n+2 em (32.20) temos o primeiro sistema para o cálculo de $a^1_{1,k}$.

Para j=0 e u=n,n+1 pois neste caso p-j=2-0=2 é par. A terceira equação do segundo sistema é dada por (32.21).

3.3 CÁLCULO DOS COEFICIENTES b^j_i E c^j_i

Na expressão (31.4) devemos substituir os valores de $R^{(i)}$. Para isto precisamos conhecer a expressão da i-ésima derivada de R. Reescrevendo (31.3) temos

$$R^{(0)} = a_o r^{(p)} = \sum_{i=p-1}^{0} (-A_{p-i})\, r^{(i)} + f(t)$$

$$= \sum_{i=p-1}^{0} b^o_{p-i}\, r^{(i)} + c^o_o\, f \qquad (33.1)$$

onde

a) $b^o_{p-i} = -A_{p-i} \quad i=0,1,2,\ldots,p-1$

com a seguinte notação:

o índice superior de b refere-se a ordem de derivação de R

o índice inferior de b refere-se a p-i, onde i é a ordem de derivação de r

b) $c^o_o = I$, que é a matriz unitária de ordem igual a p vezes o número de variáveis (graus de liberdade)

De (31.3) obtemos tambem a expressão de

$$r^{(p)} = \sum_{i=p-1}^{i=1} -A_o^{-1} A_{p-i} r^{(i)} + A_o^{-1} f(t) \qquad (33.2)$$

que pode ser colocada na forma

$$r^{(p)} = \sum_{i=p-1}^{i=1} \alpha_{p-i}\, r^{(i)} + \beta_o\, f(t) \qquad (33.3)$$

onde

$$\alpha_{p-i} = -A_o^{-1} A_{p-i} \qquad i=p-1,p-2,\ldots,0 \qquad (33.4)$$

$$\beta_o = A_o^{-1}$$

Para primeira derivada obtemos

$$R^{(1)} = \sum_{i=0}^{p-1} b_{p-i}^{o} r^{(i+1)} + c_o^o f \qquad (33.5)$$

Retirando o termo i=p-1 do somatório, vem

$$R^{(1)} = \sum_{i=0}^{p-2} b_{p-i}^{o} r^{i+1} + b_1^o r^{(p)} + c_o^o f \qquad (33.6)$$

Substituindo $r^{(p)}$ dado por (33.2) em (33.6) temos

$$R^{(1)} = \sum_{i=1}^{p-1} b_{p-1-i}^{o} r^{(i)} + b_1^o\{ \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{p-i} r^{(i)} + \beta_o f\} + c_o^o \dot{f} \qquad (33.7)$$

Retirando o termo i=0 do segundo somatório e grupando, temos

$$R^{(1)} = b_1^o \alpha_p r^{(0)} + \sum_{i=1}^{p-1} (b_{p-i-1}^o + b_1^o \alpha_{p-i}) r^{(i)} + b_1^o \beta_o f + c_o^o \dot{f} \qquad (33.8)$$

que pode ser colocado na forma

$$R^{(1)} = \sum_{i=0}^{p-1} b_{p-i}^{1} r^{(i)} + c_o^1 f + c_1^1 \dot{f} \qquad (33.9)$$

onde

$$b_{p-i}^1 = \begin{cases} b_1^o \alpha_p & \text{se } i=p-1 \\ b_{p-i-1}^o + b_1^o \alpha_{p-i} & \text{se } i=p-2,p-3,\ldots,0 \end{cases} \qquad (33.10)$$

$$c_o^1 = b_1^o \quad o \qquad c_1^1 = c_o^o \qquad (33.11)$$

Procedendo de modo análogo para a segunda derivada, a expressão (33.8) para este caso fica

$$R^{(2)} = b_1^1 \alpha_p r^{(0)} + \sum_{i=1}^{p-1} (b_{p-i-1}^1 + b_1^1 \alpha_{p-i}) r^{(i)} + b_1^1 \beta_o f + c_o^1 \dot{f} + c_1^1 \ddot{f} \tag{33.12}$$

que pode ser colocado na forma

$$R^{(2)} = \sum_{i=0}^{p-1} b_{p-i}^2 r^{(i)} + c_0^2 f + c_1^2 \dot{f} + c_2^2 \ddot{f} \tag{33.13}$$

onde

$$b_{p-i}^2 = \begin{cases} b_1^1 \alpha_p & \text{se } i=p-1 \\ b_{p-i-1}^1 + b_1^1 \alpha_{p-i} & \text{se } i=p-2,p-3,\ldots,0 \end{cases} \tag{33.14}$$

Para a derivada de ordem j, temos

$$R^{(j)} = \sum_{i=0}^{p-1} b_{p-i}^j r^{(i)} + \sum_{i=0}^{j} c_i^j f^{(i)} \tag{33.15}$$

onde

$$b_{p-i}^j \begin{cases} b_1^{j-1} \alpha_p & \text{se } i=p-1 \\ b_{p-i-1}^{j-1} + b_1^{j-1} \alpha_{p-i} & \text{se } i=p-2,\ldots,0 \end{cases} \tag{33.16}$$

$$c_1^j \begin{cases} c_o^j = b_1^{j-1} \beta_o & \text{se } i=p-1 \\ c_i^j = c_{i-1}^{j-1} & i=p-2,\ldots,0 \\ & j=1,\ldots,p-1 \end{cases} \tag{33.17}$$

Substituindo (33.15) em (31.4) obtemos

$$A_o r_1^{(j)} = A_o \sum_{i=j}^{p-1} \frac{1}{(i-j)!} \tau^{i-j} r_o^{(i)} +$$

$$+ \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \Big[\tau^k \{ (a_{jk}^o (\sum_{\ell=0}^{p-1} b_{p-\ell}^k r_o^{(\ell)} + \sum_{\ell=0}^{p-1} c_\ell^k f_o^{(\ell)}) +$$

$$+ a_{jk}^1 (\sum_{\ell=0}^{p-1} b_{p-\ell}^k r_1^{(\ell)} + \sum_{\ell=0}^{p-1} c_\ell^k f_1^{(\ell)}) \} \Big] \tag{33.18}$$

Separando os termos em r_1 e r_o vem

$$A_o r_1^{(j)} - \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \tau^k a_{jk}^1 \sum_{\ell=0}^{p-1} b_{p-\ell}^k r_1^{(\ell)} =$$

$$= A_o \sum_{i=j}^{p-1} \frac{1}{(i-j)!} \tau^{i-j} r_o^{(i)} + \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \tau^k a_{jk}^o \sum_{\ell=0}^{p-1} b_{p-\ell} r_o^{(\ell)}$$

$$+ \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \tau^k a_{jk}^o \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell^k f_o^{(\ell)} +$$

$$+ \tau^{p-j} \sum_{k=0}^{n-1} \tau^k a_{jk}^1 \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell^k f_1^{(\ell)} \qquad (33.19)$$

Arrumando de modo conveniente, temos

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \tau^{p-j+k} a_{jk}^1 b_{p-\ell}^k\right) r_1^{(\ell)} + A_o r_1^{(j)} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{p-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \tau^{p-j+k} a_{jk}^o b_{p-\ell}^k\right) r_o^{(\ell)} + \sum_{i=j}^{p-1} \left(A_o \frac{\tau^{i-j}}{(i-j)!}\right) r_o^{(i)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{k} (\tau^{p-j+k} a_{jk}^o c_\ell^k) f_o^{(\ell)} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{k} (\tau^{p-j+k} a_{jk}^1 c_\ell^k) f_1^{(\ell)} \qquad (33.20)$$

Destas expressões obtemos as matrizes $\mathbb{D}_o$, $\mathbb{D}_1$ e $\mathbb{F}$ como

$$d_{j\ell}^1 = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{n-1} \tau^{p-j+k} a_{jk}^1 b_{p-\ell}^k & \text{se } \ell \neq j \\ A_o - \sum_{k=0}^{n-1} \tau^{p-j+k} a_{jk}^1 b_{p-\ell}^k & \text{se } \ell = j \end{cases} \qquad (33.21)$$

$$d_{j\ell}^o = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \tau^{p-j+k} a_{jk}^o b_{p-\ell}^k & \text{se } \ell < j \\ A_o \frac{\tau^{\ell-j}}{(\ell-j)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \tau^{p-j+k} a_{jk}^o b_{p-\ell}^k & \text{se } \ell \geq j \end{cases} \qquad (33.22)$$

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{k} \tau^{p-j+k} \{a_{jk}^o c_\ell^k f_o^{(\ell)} + a_{jk}^1 c_\ell^k f_1^{(\ell)}\}$$

$$\ell = 0,1,\ldots,p-1 \qquad j = 0,1,\ldots,p-1 \qquad (33.23)$$

Podemos resumir o algorítimo como

1 - Especificar o grau do polinômio a interpolar, a ordem da equação diferencial e o número de variáveis.

2 - Calcular os coeficientes a^{o}_{jk} e a^{1}_{jk} pelo item 3.2

3 - Calcular b^{j}_{i} e c^{j}_{i} por meio de 3.3

4 - Calcular as matrizes $\mathbb{D}_1$ e $\mathbb{D}_o$ por meio de (32.21) e (32.22)

5 - Obter $\mathbb{A} = \mathbb{D}_1^{-1}\mathbb{D}_o$

6 - Especificar os valores iniciais

7 - Especificar os vetores de $f_o^{(\ell)}$ e $f_1^{(\ell)}$ da função de entrada.

8 - Calcular $\mathbb{F}$ e $\mathbb{B} = \mathbb{D}_1^{-1}\mathbb{F}$

9 - Calcular $\vec{r}_1$ por meio de (31.5) .

10 - Usando $\vec{r}_1$ como valor inicial da iteração seguinte, voltar ao item 3.

CAPITULO 4

EXEMPLOS

4.1 SISTEMA OSCILANTE AMORTECIDO COM ENTRADA EM DEGRAU

41.1 Formulação do problema

Para exemplificarmos e compararmos o método consideremos um problema simples, cuja solução teórica é conhecida. Seja o sistema massa-mola-amortecedor, regido pela equação

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = f(t) \qquad (41.1)$$

Consideremos uma entrada em degrau, ou seja

$$f(t) = 10\mu(t)\begin{cases} = 10 & t \geq 0 \\ = 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (41.2)$$

onde $\mu(t)$ é o degrau unitário em $t_o=0$.

Suponhamos que as condições iniciais são todas nulas. Identificando com (21.1) a expressão (41.1) temos:

$$M = 1 \quad C = 4 \quad K = 8 \quad f = 10\,\mu(t) \quad \vec{r} = x \qquad (41.3)$$

Com a finalidade de comparações vamos resolver o problema nos seguintes intervalos:

$$\begin{array}{lll} a) & t_o = 0 & t_1 = 1 \\ b) & t_o = 0 & t_1 = 3 \\ c) & t_o = 0 & t_1 = 20 \end{array} \qquad (41.4)$$

41.2 Solução teórica do problema

Aplicando transformada de Laplace a (41.1) e levando em conta que as condições iniciais são nulas, temos {9} .

$$X(s)\ (s^2 + 4s + 8) = \frac{10}{s} \qquad (41.5)$$

donde obtemos

$$X(s) = \frac{10}{s(s^2 + 4s + 8)} \qquad (41.6)$$

Desenvolvendo em frações parciais, e considerendo que as raizes da equação característica são $-2 \pm 2j$ e 0, temos:

$$X(s) = \frac{K_c}{(s + 2 - 2j)} + \frac{K_{-c}}{(s + 2 + 2j)} + \frac{K}{s} \qquad (41.7)$$

Devido as raizes complexas sabemos que os dois primeiros termos fornecem solução oscilante e o último um degrau. A solução neste caso é do tipo

$$x(t) = \frac{1}{b} |K(a+jb)|\ e^{at} \operatorname{sen}(bt+\alpha) + K \qquad (41.8)$$

onde

$$a + jb = -2 + 2j \quad \text{donde} \quad a=-2 \text{ e } b=2 \qquad (41.9)$$

$$|K(a + jb)| = \frac{10}{s}\Big|_{s=-2+2j} = \left|\frac{10}{-2+2j}\right| = \frac{10}{2\sqrt{2}} \qquad (41.10)$$

$$\alpha = \measuredangle K(a + jb) = \measuredangle \frac{10}{-2+2j} = \frac{0}{135} = -135 \qquad (41.11)$$

$$K = \frac{10}{s^2 + 4s + 8}\Bigg|_{s=0} = \frac{10}{8} \qquad (41.12)$$

Substituindo estes valores em (41.8) temos, para solução

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{10}{2\sqrt{2}} e^{-2t} \operatorname{sen}(2t - 135) + \frac{10}{8} \qquad (41.13)$$

A constante de tempo do amortecimento da oscilação é $\tau=1/2$.

Para $t \to \infty$ o sistema deve estabilizar em $10/8=1,25$, valor este que já deve ter sido atingido após cinco constantes de tempo (98% do valor de regime), isto é, para $t > 2,5$.

Na fig 41.1 temos a solução numérica do deslocamento do problema formulado em 41.1 para entrada em degrau.

Comparando a solução exata obtida de (41.3) com a numérica temos:

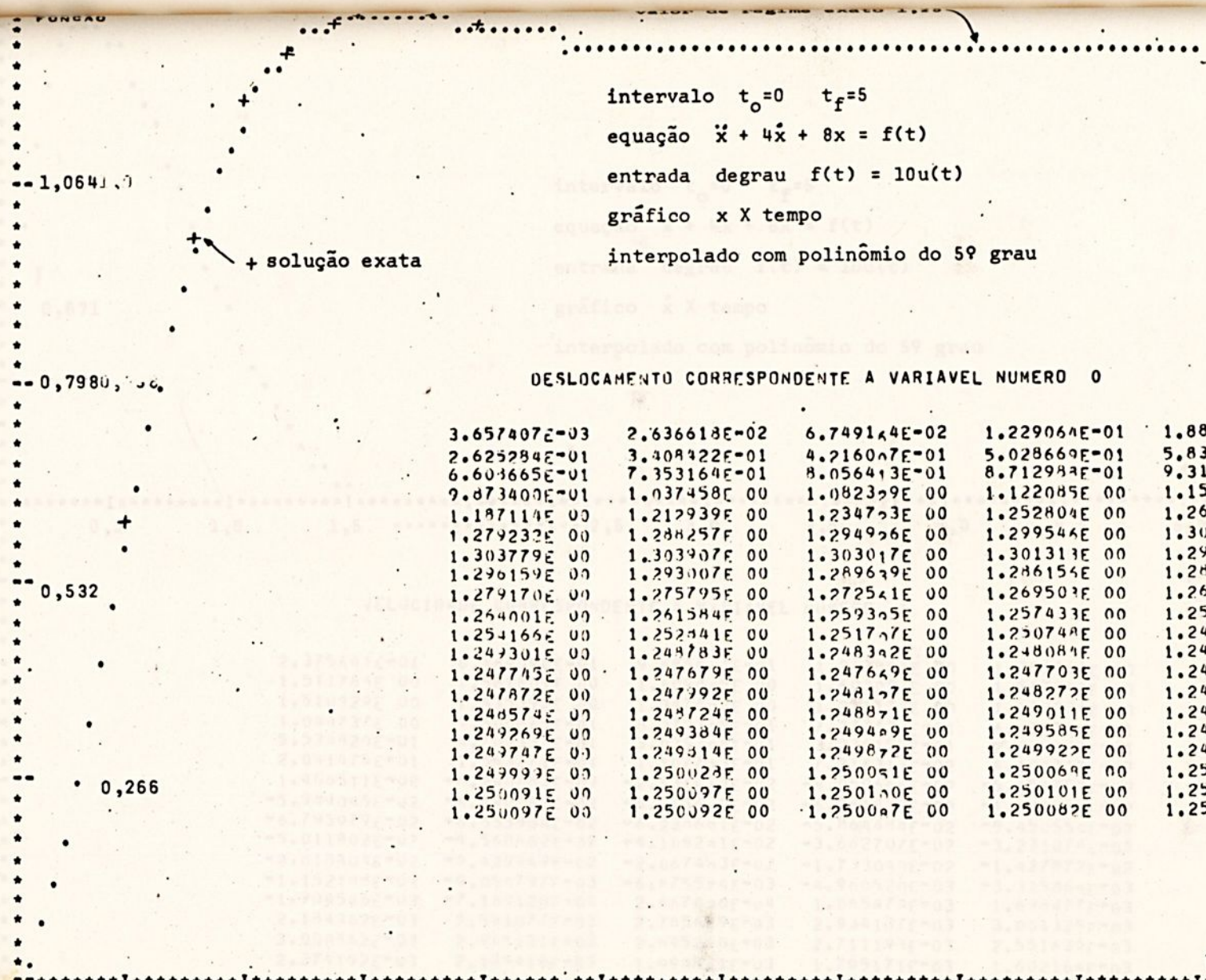
t	sol.exata	sol.numérica	erro %
0.5	6,145 925 E-01	5,830 491 E-01	5,132
0,8	1,005 106	9,873 400 E-01	1,767
1.0	1,166 574	1,156 928	0,826
1,2	1,257 022	1,252 804	0,335
1,4	1,286 010	1,294 926	0,693
1,5	1,302 829	1,302 407	0,032
1,8	1,295 742	1,296 159	0,032
2,0	1,282 291	1,282 643	0,027

Para cálculo do erro usamos a seguinte expressão

$$\text{erro \%} = \frac{\text{sol. exata - sol. numérica}}{\text{sol. exata}} \times 100$$

Uma sugestão para a escolha do passo e do grau do polinômio é que ambos sejam escolhidos de tal modo que o último termo das séries que compõem os elementos das matrizes de (210.24) seja desprezível em relação ao primeiro termo das respectivas séries, para todos os elementos, isto é, em (210.8), (210.11) e (210.23), no caso da equação diferencial de segunda ordem.

No caso da equação diferencial de ordem p, as séries correspondentes a essas são dadas por (32.21), (32.22) e (32.23).



intervalo $t_o=0$ $t_f=5$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

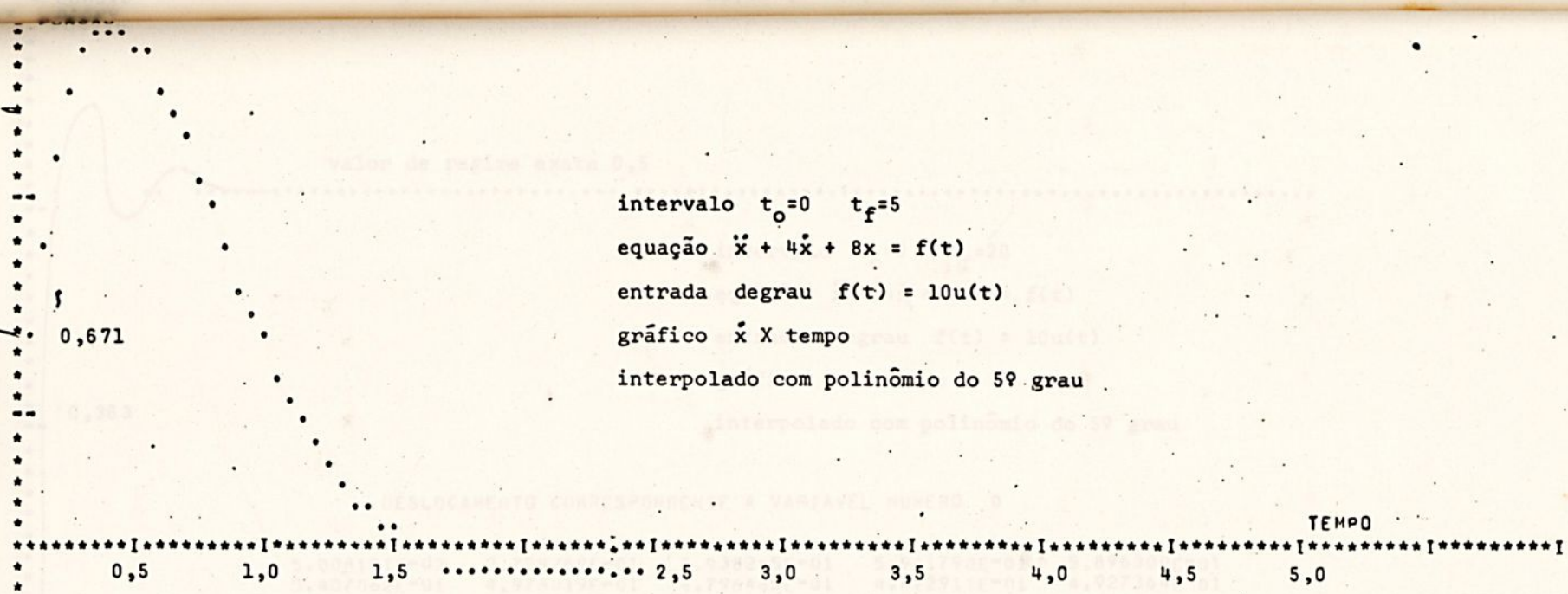
gráfico x X tempo

interpolado com polinômio do 5º grau

DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0

3.657407E-03	2.636618E-02	6.749164E-02	1.229064E-01	1.889744E-01
2.625284E-01	3.408422E-01	4.216047E-01	5.028669E-01	5.830491E-01
6.608665E-01	7.353164E-01	8.056413E-01	8.712988E-01	9.319314E-01
9.873400E-01	1.037458E 00	1.082399E 00	1.122085E 00	1.156928E 00
1.187114E 00	1.212939E 00	1.234703E 00	1.252804E 00	1.267526E 00
1.279232E 00	1.288257E 00	1.294926E 00	1.299546E 00	1.302407E 00
1.303779E 00	1.303907E 00	1.303017E 00	1.301313E 00	1.298973E 00
1.296159E 00	1.293007E 00	1.289639E 00	1.286154E 00	1.282643E 00
1.279170E 00	1.275795E 00	1.272541E 00	1.269503E 00	1.266644E 00
1.264001E 00	1.261584E 00	1.259305E 00	1.257433E 00	1.255693E 00
1.254166E 00	1.252841E 00	1.251707E 00	1.250748E 00	1.249951E 00
1.249301E 00	1.248783E 00	1.248382E 00	1.248084E 00	1.247876E 00
1.247745E 00	1.247679E 00	1.247649E 00	1.247703E 00	1.247774E 00
1.247872E 00	1.247992E 00	1.248107E 00	1.248272E 00	1.248422E 00
1.248574E 00	1.248724E 00	1.248871E 00	1.249011E 00	1.249144E 00
1.249269E 00	1.249384E 00	1.249489E 00	1.249585E 00	1.249671E 00
1.249747E 00	1.249814E 00	1.249872E 00	1.249922E 00	1.249964E 00
1.249999E 00	1.250028E 00	1.250051E 00	1.250069E 00	1.250082E 00
1.250091E 00	1.250097E 00	1.250100E 00	1.250101E 00	1.250099E 00
1.250097E 00	1.250092E 00	1.250087E 00	1.250082E 00	1.250075E 00

FIG 41.1



intervalo $t_o=0$ $t_f=5$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

gráfico $\dot{x}$ X tempo

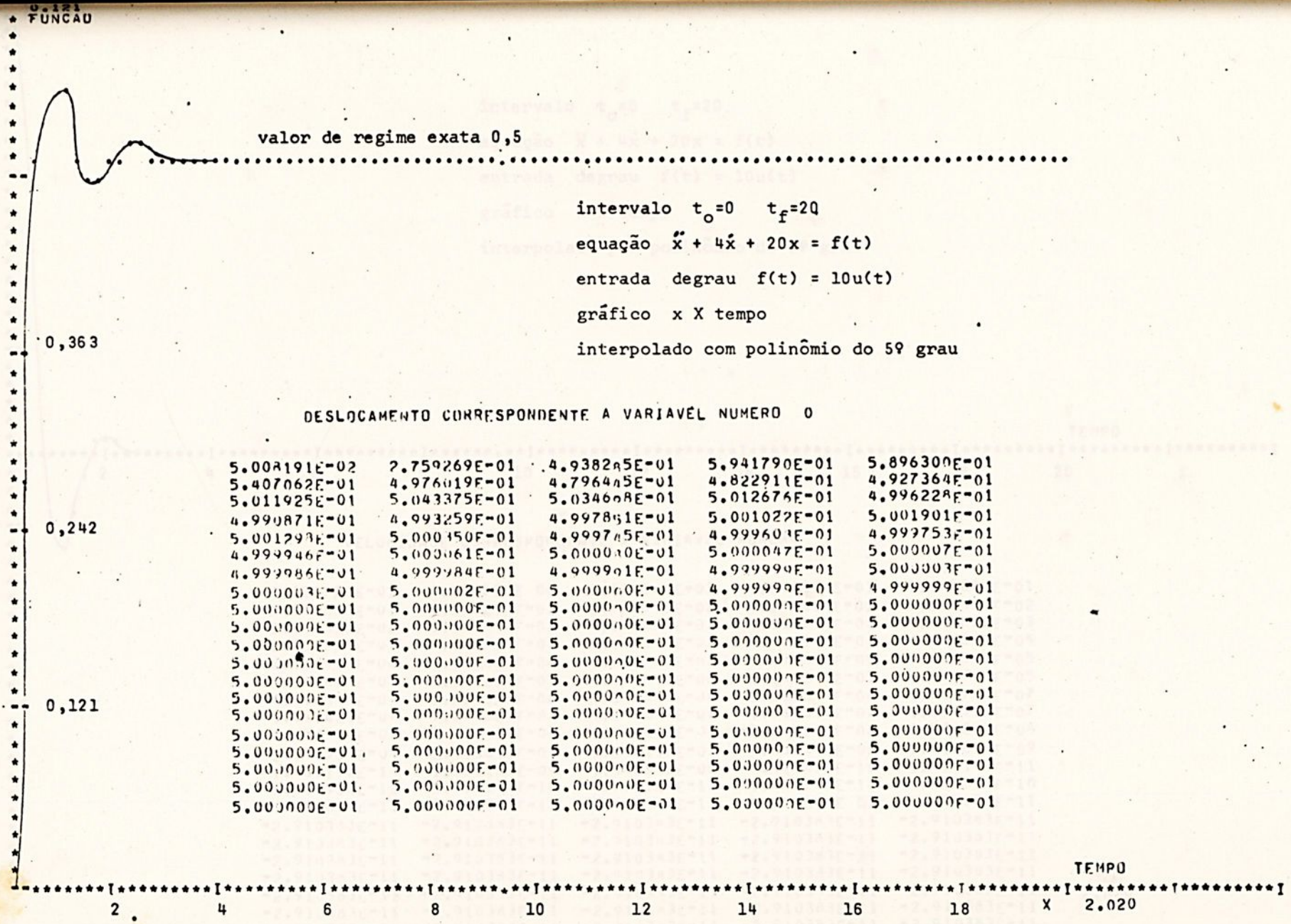
interpolado com polinômio do 5º grau

VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

2.375641E-01	6.464090E-01	9.6854a1E-01	1.213889E 00	1.391963E 00
1.511789E 00	1.581809E 00	1.609845E 00	1.603057E 00	1.567942E 00
1.510329E 00	1.435395E 00	1.347602E 00	1.251173E 00	1.149230E 00
1.044737E 00	9.400875E-01	8.3723o9E-01	7.377620E-01	6.426724E-01
5.534820E-01	4.702337E-01	3.9353o6E-01	3.236155E-01	2.605127E-01
2.041475E-01	1.543271E-01	1.107733E-01	7.314313E-02	4.104717E-02
1.406511E-02	-8.240783E-03	-2.6314a4E-02	-4.059666E-02	-5.151752E-02
-5.949045E-02	-6.490762E-02	-6.8136a2E-02	-6.951815E-02	-6.936467E-02
-6.795979E-02	-6.555834E-02	-6.2386a1E-02	-5.864484E-02	-5.450554E-02
-5.011802E-02	-4.560862E-02	-4.1082a1E-02	-3.662707E-02	-3.231078E-02
-2.818804E-02	-2.429949E-02	-2.0674a3E-02	-1.733040E-02	-1.427872E-02
-1.152188E-02	-9.056797E-03	-6.8755a4E-03	-4.966520E-03	-3.315064E-03
-1.904546E-03	-7.169120E-04	2.667020E-04	1.065472E-03	1.698477E-03
2.184362E-03	2.541077E-03	2.7856a9E-03	2.934137E-03	3.001325E-03
3.000862E-03	2.945131E-03	2.8452a0E-03	2.711193E-03	2.551632E-03
2.374192E-03	2.185416E-03	1.9908a1E-03	1.795171E-03	1.602164E-03
1.414910E-03	1.235809E-03	1.0666a5E-03	9.088037E-04	7.630471E-04
6.298776E-04	5.094493E-04	4.0165a9E-04	3.061661E-04	2.224985E-04
1.500313E-04	8.805261E-05	3.5786a5E-05	-7.578290E-06	-4.287130E-05
-7.091768E-05	-9.252565E-05	-1.0847a4E-04	-1.195048E-04	-1.263133E-04

0.505

FIG 4.1.2



intervalo $t_o=0$ $t_f=20$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

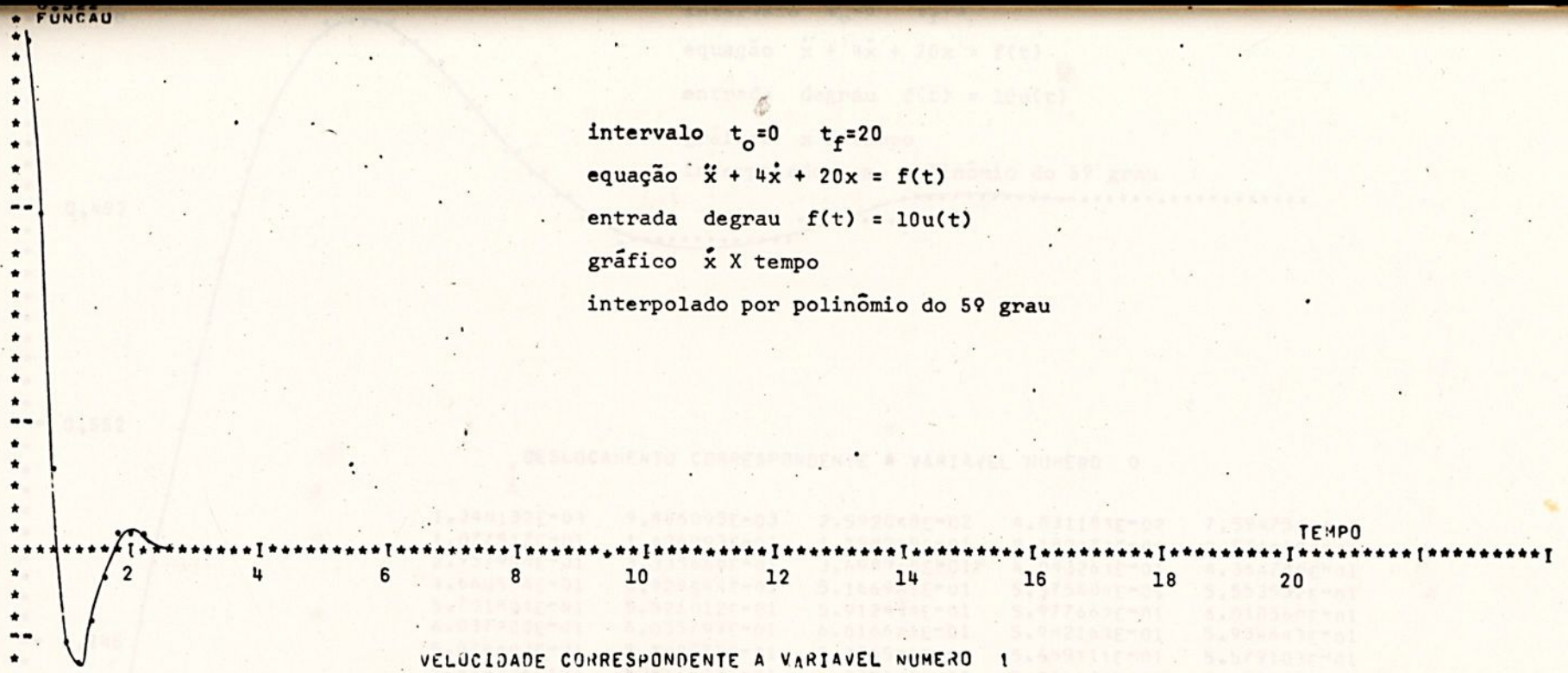
gráfico x X tempo

interpolado com polinômio do 5º grau

DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVÉL NUMERO 0

5.008191E-02	2.759269E-01	4.9382a5E-01	5.941790E-01	5.896300E-01
5.407062E-01	4.976019E-01	4.7964a5E-01	4.822911E-01	4.927364E-01
5.011925E-01	5.043375E-01	5.0346a8E-01	5.012676E-01	4.996228E-01
4.990871E-01	4.993259E-01	4.9978a1E-01	5.001022E-01	5.001901E-01
5.001293E-01	5.000450E-01	4.9997a5E-01	4.999603E-01	4.999753E-01
4.999946E-01	5.000061E-01	5.0000a0E-01	5.000047E-01	5.000007E-01
4.999986E-01	4.999984E-01	4.9999a1E-01	4.999999E-01	5.000003E-01
5.000003E-01	5.000002E-01	5.0000a0E-01	4.999999E-01	4.999999E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01
5.000000E-01	5.000000E-01	5.0000a0E-01	5.000000E-01	5.000000E-01

FIG 41.3



intervalo $t_o=0$ $t_f=20$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

gráfico $\dot{x}$ X tempo

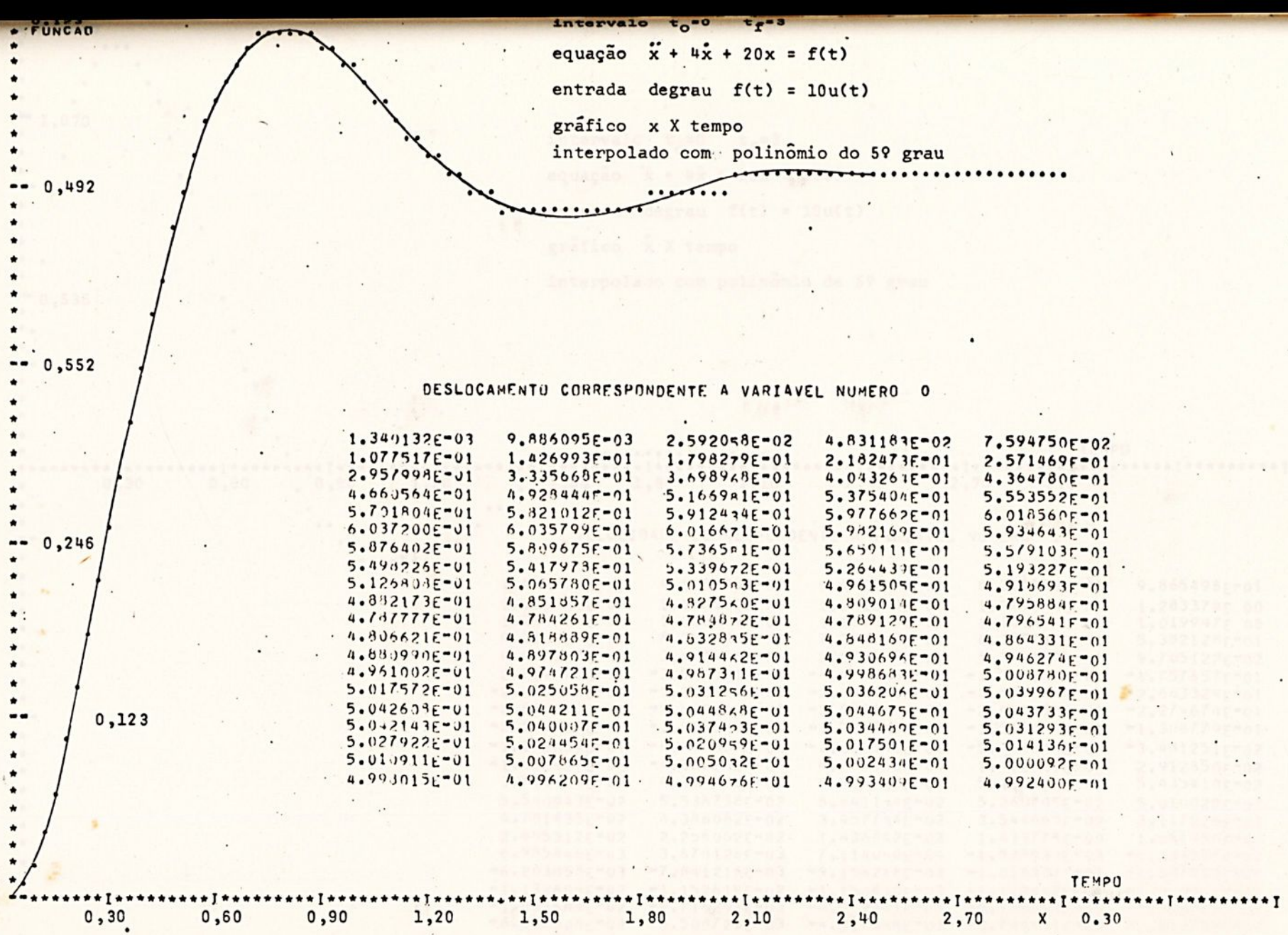
interpolado por polinômio do 5º grau

VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

7.626779E-01	1.253520E 00	8.1642x4E-01	1.944370E-01	-1.845249E-01
-2.563856E-01	-1.547297E-01	-2.823975E-02	4.291401E-02	5.217461E-02
2.900332E-02	3.500447E-03	-9.6980x5E-03	-1.050652E-02	-5.369652E-03
-2.705726E-04	2.143719E-03	2.0981x0E-03	9.800522E-04	-3.108598E-05
-4.654979E-04	-4.155624E-04	-1.7587x6E-04	2.297848E-05	9.958690E-05
8.162625E-05	3.091237E-05	-7.8654x1E-06	-2.103385E-05	-1.589784E-05
-5.290596E-06	2.205328E-06	4.3924x7E-06	3.069043E-06	8.733768E-07
-5.622423E-07	-9.079668E-07	-5.8700x7E-07	-1.368317E-07	1.353910E-07
1.853716E-07	1.111039E-07	1.9630x3E-08	-3.143214E-08	-3.776222E-08
-2.085289E-08	-2.415618E-09	7.0431x7E-09	7.552444E-09	3.812602E-09
1.455192E-10	-1.586159E-09	-1.5425x3E-09	-7.421477E-10	-1.455192E-11
3.055902E-10	2.764364E-10	8.7311x9E-11	-5.820766E-11	-1.018634E-10
-1.018634E-10	-5.820766E-11	-2.9103x3E-11	-0.000000E 00	-1.455192E-11
-2.910383E-11	-2.910383E-11	-2.9103x3E-11	-2.910383E-11	-2.910383E-11
-2.910383E-11	-2.910383E-11	-2.9103x3E-11	-2.910383E-11	-2.910383E-11
-2.910383E-11	-2.910383E-11	-2.9103x3E-11	-2.910383E-11	-2.910383E-11
-2.910383E-11	-2.910383E-11	-2.9103x3E-11	-2.910383E-11	-2.910383E-11
-2.910383E-11	-2.910383E-11	-2.9103x3E-11	-2.910383E-11	-2.910383E-11
-2.910383E-11	-2.910383E-11	-2.9103x3E-11	-2.910383E-11	-2.910383E-11
-2.910383E-11	-2.910383E-11	-2.9103x3E-11	-2.910383E-11	-2.910383E-11

2.020

FIG 41.4



intervalo t_o=0 t_f=3

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

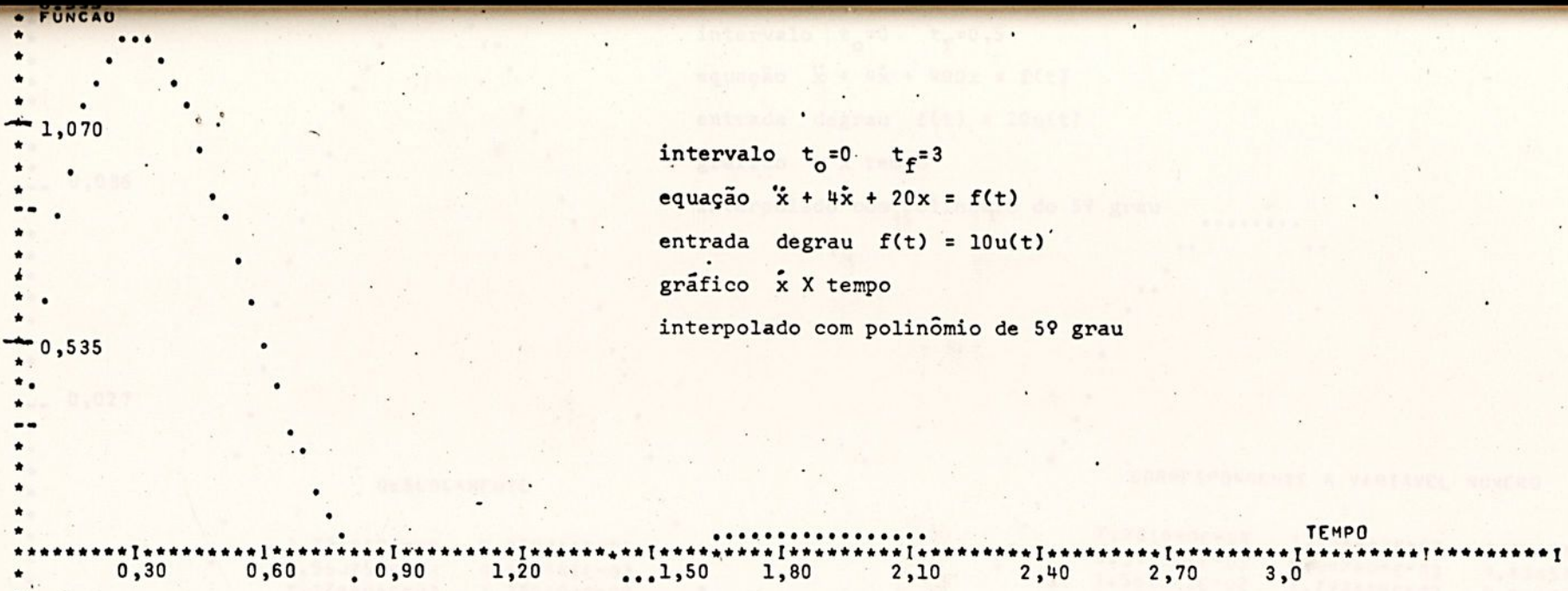
gráfico x X tempo

interpolado com polinômio do 5º grau

DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0

1.340132E-03	9.886095E-03	2.592058E-02	4.831183E-02	7.594750E-02
1.077517E-01	1.426993E-01	1.798279E-01	2.182473E-01	2.571469E-01
2.957998E-01	3.335668E-01	3.698968E-01	4.043261E-01	4.364780E-01
4.660564E-01	4.928444E-01	5.166981E-01	5.375404E-01	5.553552E-01
5.701804E-01	5.821012E-01	5.912434E-01	5.977662E-01	6.018560E-01
6.037200E-01	6.035799E-01	6.016671E-01	5.982169E-01	5.934643E-01
5.876402E-01	5.809675E-01	5.736581E-01	5.659111E-01	5.579103E-01
5.498226E-01	5.417978E-01	5.339672E-01	5.264439E-01	5.193227E-01
5.126808E-01	5.065780E-01	5.010583E-01	4.961505E-01	4.916693E-01
4.882173E-01	4.851857E-01	4.827540E-01	4.809014E-01	4.795884E-01
4.787777E-01	4.784261E-01	4.784872E-01	4.789129E-01	4.796541E-01
4.806621E-01	4.818689E-01	4.832835E-01	4.848169E-01	4.864331E-01
4.880990E-01	4.897803E-01	4.914462E-01	4.930696E-01	4.946274E-01
4.961002E-01	4.974721E-01	4.987311E-01	4.998683E-01	5.008780E-01
5.017572E-01	5.025058E-01	5.031256E-01	5.036206E-01	5.039967E-01
5.042609E-01	5.044211E-01	5.044848E-01	5.044675E-01	5.043733E-01
5.042143E-01	5.040007E-01	5.037423E-01	5.034469E-01	5.031293E-01
5.027922E-01	5.024454E-01	5.020959E-01	5.017501E-01	5.014136E-01
5.010911E-01	5.007865E-01	5.005032E-01	5.002434E-01	5.000092E-01
4.998015E-01	4.996209E-01	4.994676E-01	4.993409E-01	4.992400E-01

FIG 41.5



intervalo $t_o=0$ $t_f=3$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

gráfico $\dot{x}$ X tempo

interpolado com polinômio de 5º grau

VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

1.459731E-01	4.118245E-01	6.402159E-01	8.314793E-01	9.865498E-01
1.106881E 00	1.194361E 00	1.251298E 00	1.279996E 00	1.283374E 00
1.264204E 00	1.225389E 00	1.169884E 00	1.100436E 00	1.019947E 00
9.310329E-01	8.361898E-01	7.377396E-01	6.377745E-01	5.382128E-01
4.407217E-01	3.467486E-01	2.575187E-01	1.740199E-01	9.705122E-02
2.719275E-02	-3.516071E-02	-8.978906E-02	-1.366307E-01	-1.757657E-01
-2.073979E-01	-2.318374E-01	-2.494833E-01	-2.608064E-01	-2.663329E-01
-2.666290E-01	-2.622868E-01	-2.539107E-01	-2.421053E-01	-2.274674E-01
-2.105717E-01	-1.919683E-01	-1.721733E-01	-1.516646E-01	-1.308779E-01
-1.102039E-01	-8.998667E-02	-7.052331E-02	-5.206386E-02	-3.481251E-02
-1.892927E-02	-4.532262E-03	8.299540E-03	1.952321E-02	2.912850E-02
3.713426E-02	4.358485E-02	4.854698E-02	5.210315E-02	5.435410E-02
5.540943E-02	5.538738E-02	5.441134E-02	5.260705E-02	5.010022E-02
4.701435E-02	4.346862E-02	3.957734E-02	3.544660E-02	3.117526E-02
2.685312E-02	2.256062E-02	1.836852E-02	1.433775E-02	1.051950E-02
6.955446E-03	3.678128E-03	7.114098E-04	-1.928933E-03	-4.234558E-03
-6.203858E-03	-7.841216E-03	-9.156268E-03	-1.016304E-02	-1.087939E-02
-1.132608E-02	-1.152619E-02	-1.150440E-02	-1.128642E-02	-1.089841E-02
-1.036648E-02	-9.716251E-03	-8.972481E-03	-8.158603E-03	-7.296772E-03
-6.407306E-03	-5.508725E-03	-4.617596E-03	-3.748431E-03	-2.913759E-03

FIG 41.6

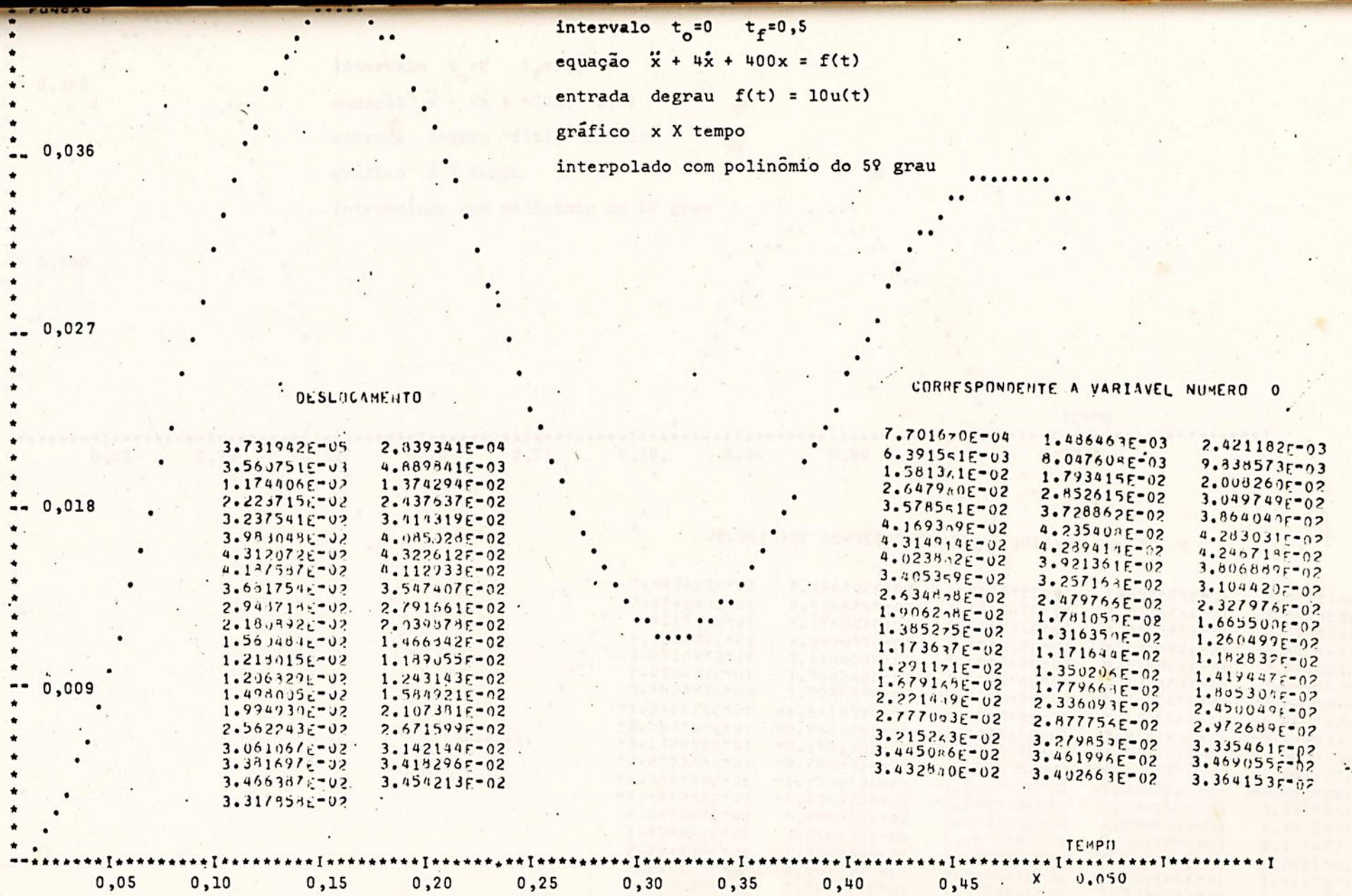
intervalo $t_o=0$ $t_f=0,5$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 400x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

gráfico x X tempo

interpolado com polinômio do 5º grau



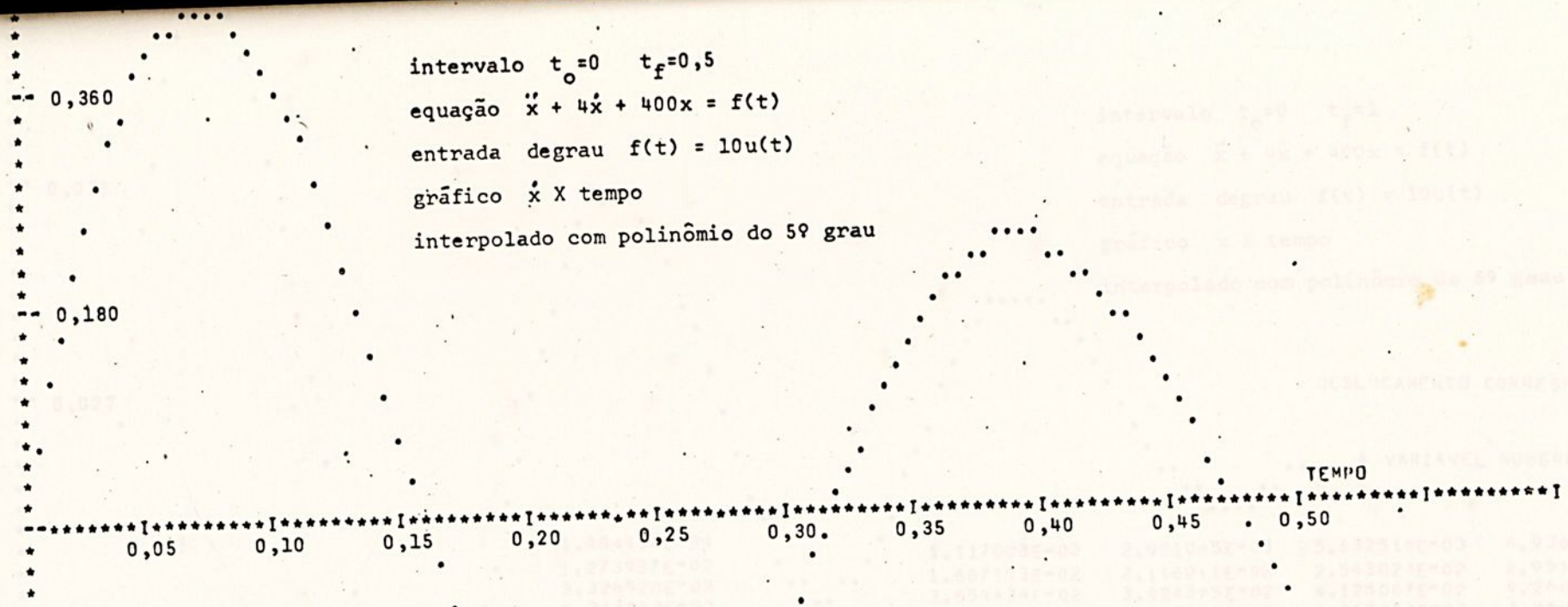
DESLOCAMENTO

3.731942E-05	2.039341E-04
3.560751E-03	4.889841E-03
1.174406E-02	1.374294E-02
2.223715E-02	2.437637E-02
3.237541E-02	3.414319E-02
3.983048E-02	4.085028E-02
4.312072E-02	4.322612E-02
4.137587E-02	4.112933E-02
3.661754E-02	3.547407E-02
2.948718E-02	2.791661E-02
2.180892E-02	2.039578E-02
1.562484E-02	1.466642E-02
1.219015E-02	1.189055E-02
1.206329E-02	1.243143E-02
1.498005E-02	1.584921E-02
1.994930E-02	2.107381E-02
2.562243E-02	2.671599E-02
3.061067E-02	3.142144E-02
3.381697E-02	3.418296E-02
3.466387E-02	3.454213E-02
3.317958E-02	

CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0

7.701670E-04	1.486463E-03	2.421182E-03
6.391561E-03	8.047608E-03	9.838573E-03
1.581361E-02	1.793415E-02	2.008260E-02
2.647980E-02	2.852615E-02	3.049749E-02
3.578561E-02	3.728862E-02	3.864040E-02
4.169309E-02	4.235408E-02	4.283031E-02
4.314914E-02	4.289414E-02	4.246718E-02
4.023862E-02	3.921361E-02	3.806889E-02
3.405359E-02	3.257163E-02	3.104420E-02
2.634898E-02	2.479766E-02	2.327976E-02
1.906298E-02	1.781059E-02	1.665500E-02
1.385275E-02	1.316350E-02	1.260499E-02
1.173637E-02	1.171644E-02	1.182832E-02
1.291171E-02	1.350206E-02	1.419447E-02
1.679145E-02	1.779663E-02	1.885304E-02
2.221439E-02	2.336093E-02	2.450049E-02
2.777093E-02	2.877754E-02	2.972689E-02
3.215243E-02	3.279859E-02	3.335461E-02
3.445086E-02	3.461996E-02	3.469055E-02
3.432840E-02	3.402663E-02	3.364153E-02

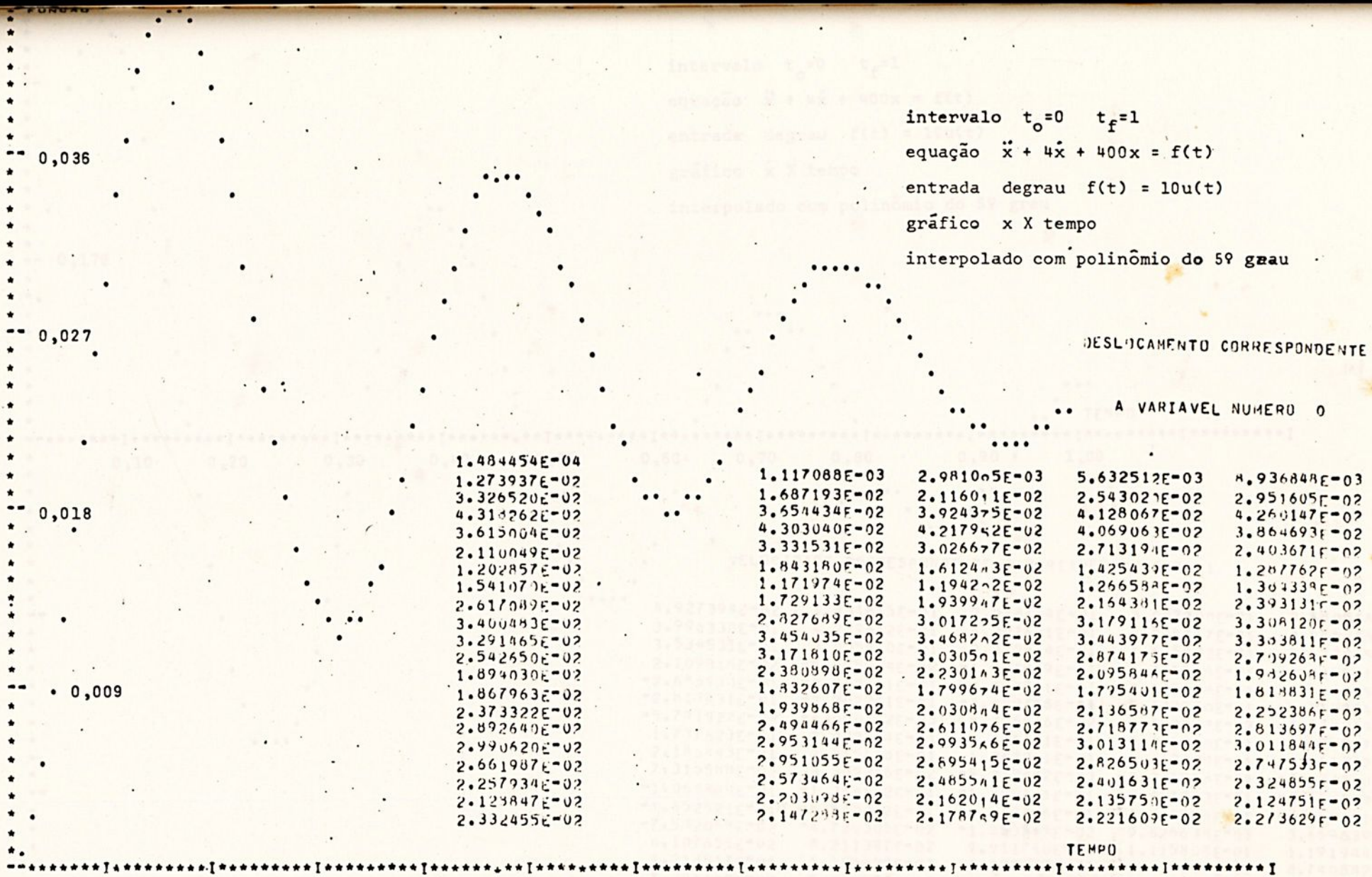
FIG 41.7



VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

2.483412E-02	7.356702E-02	1.206072E-01	1.655228E-01	2.079116E-01
2.474043E-01	2.936676E-01	3.164047E-01	3.453674E-01	3.703382E-01
3.911510E-01	4.076822E-01	4.198591E-01	4.276297E-01	4.310220E-01
4.300832E-01	4.249085E-01	4.156309E-01	4.024294E-01	3.855063E-01
3.651047E-01	3.414953E-01	3.149762E-01	2.858644E-01	2.545021E-01
2.212432E-01	1.864542E-01	1.505026E-01	1.137879E-01	7.666762E-02
3.952399E-02	2.724059E-03	-3.337265E-02	-6.842505E-02	-1.021066E-01
-1.341111E-01	-1.641552E-01	-1.919865E-01	-2.173556E-01	-2.400762E-01
-2.599758E-01	-2.769076E-01	-2.907669E-01	-3.014715E-01	-3.089837E-01
-3.132906E-01	-3.144130E-01	-3.124029E-01	-3.073422E-01	-2.993413E-01
-2.885376E-01	-2.750936E-01	-2.591944E-01	-2.410459E-01	-2.206723E-01
-1.989133E-01	-1.754213E-01	-1.506561E-01	-1.248969E-01	-9.840922E-02
-7.147257E-02	-4.436227E-02	-1.734903E-02	9.299153E-03	3.532856E-02
6.049307E-02	8.456086E-02	1.073166E-01	1.285581E-01	1.481082E-01
1.658061E-01	1.815133E-01	1.951189E-01	2.065150E-01	2.156475E-01
2.224658E-01	2.269484E-01	2.290972E-01	2.289370E-01	2.265154E-01
2.219003E-01	2.151326E-01	2.064867E-01	1.958848E-01	1.835728E-01
1.696835E-01	1.544006E-01	1.378860E-01	1.203383E-01	1.019457E-01
8.290981E-02	6.342870E-02	4.370636E-02	2.394316E-02	4.339664E-03
-1.492982E-02	-3.366447E-02	-5.169512E-02	-6.885735E-02	-8.499858E-02
-9.997935E-02				

FIG 41.8



intervalo t_o=0 t_f=1

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 400x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

gráfico x X tempo

interpolado com polinômio do 5º grau

DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE

A VARIAVEL NUMERO 0

1.484454E-04			
1.273937E-02	1.117088E-03	2.981065E-03	5.632512E-03	8.936848E-03
3.326520E-02	1.687193E-02	2.116011E-02	2.543021E-02	2.951605E-02
4.314262E-02	3.654434E-02	3.924375E-02	4.128067E-02	4.260147E-02
3.615004E-02	4.303040E-02	4.217952E-02	4.069063E-02	3.864693E-02
2.110049E-02	3.331531E-02	3.026677E-02	2.713194E-02	2.403671E-02
1.202857E-02	1.843180E-02	1.612443E-02	1.425439E-02	1.287762E-02
1.541070E-02	1.171974E-02	1.194202E-02	1.266588E-02	1.384339E-02
2.617089E-02	1.729133E-02	1.939947E-02	2.164381E-02	2.393131E-02
3.400483E-02	2.827689E-02	3.017205E-02	3.179116E-02	3.308120E-02
3.291465E-02	3.454035E-02	3.468202E-02	3.443977E-02	3.383811E-02
2.542650E-02	3.171810E-02	3.030501E-02	2.874176E-02	2.709263E-02
1.894030E-02	2.380998E-02	2.230143E-02	2.095844E-02	1.982609E-02
1.867963E-02	1.832607E-02	1.799674E-02	1.795401E-02	1.818831E-02
2.373322E-02	1.939868E-02	2.030844E-02	2.136587E-02	2.252386E-02
2.892640E-02	2.494466E-02	2.611076E-02	2.718773E-02	2.813697E-02
2.990620E-02	2.953144E-02	2.993546E-02	3.013114E-02	3.011844E-02
2.661987E-02	2.951055E-02	2.895415E-02	2.826503E-02	2.747593E-02
2.257934E-02	2.573464E-02	2.485541E-02	2.401631E-02	2.324855E-02
2.128847E-02	2.203098E-02	2.162014E-02	2.135750E-02	2.124751E-02
2.332455E-02	2.147288E-02	2.178789E-02	2.221609E-02	2.273629E-02

FIG 41.9

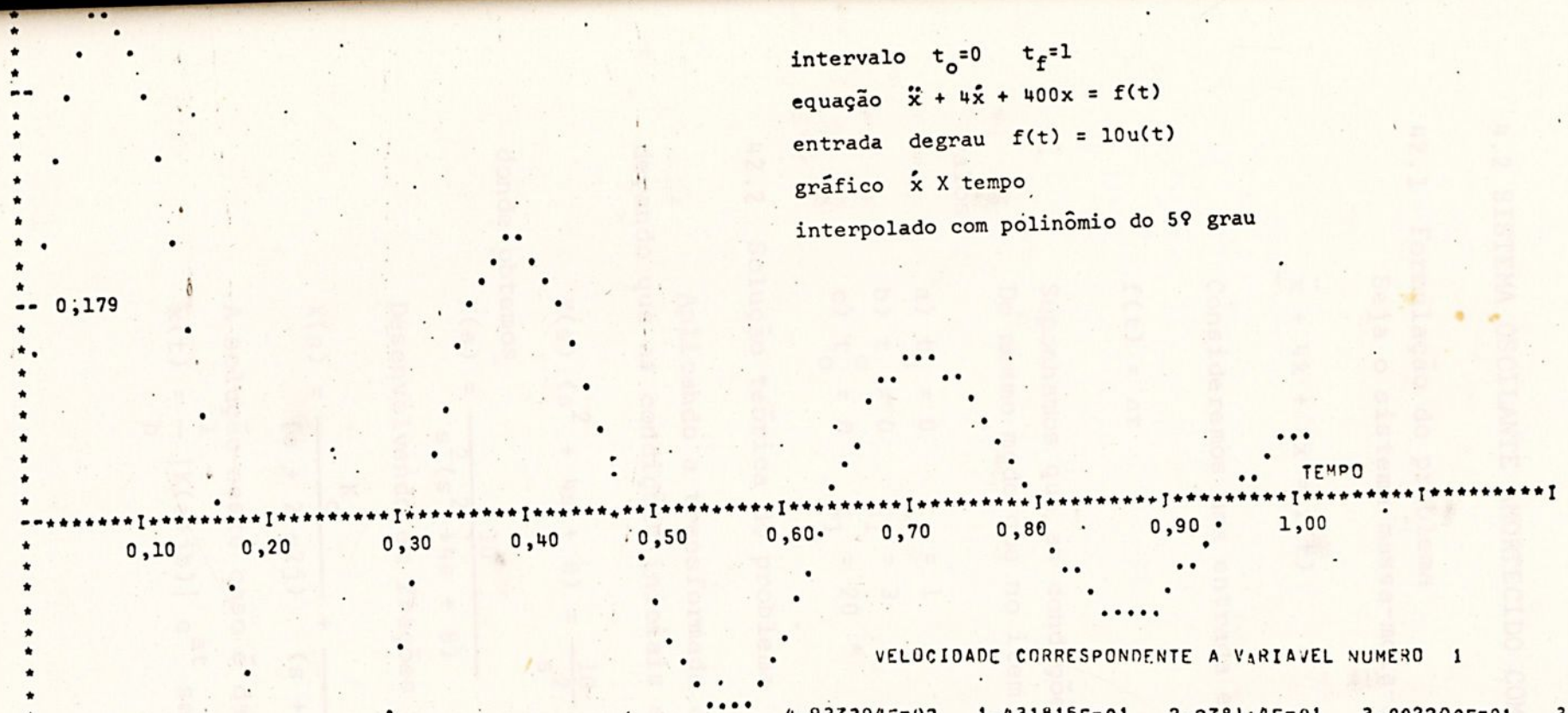
intervalo $t_o=0$ $t_f=1$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 400x = f(t)$

entrada degrau $f(t) = 10u(t)$

gráfico $\dot{x}$ X tempo

interpolado com polinômio do 5º grau



VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

4.927394E-02	1.431815E-01	2.278114E-01	3.002200E-01	3.580568E-01
3.996330E-01	4.239612E-01	4.307671E-01	4.204717E-01	3.941480E-01
3.534531E-01	3.005410E-01	2.379504E-01	1.685302E-01	9.523825E-02
2.109018E-02	-5.095934E-02	-1.181909E-01	-1.781848E-01	-2.288541E-01
-2.685930E-01	-2.962771E-01	-3.112971E-01	-3.135628E-01	-3.034855E-01
-2.819431E-01	-2.502271E-01	-2.099758E-01	-1.630970E-01	-1.116824E-01
-5.791927E-02	-4.000742E-03	4.795906E-02	9.600898E-02	1.384219E-01
1.737623E-01	2.009264E-01	2.191791E-01	2.281390E-01	2.278377E-01
2.185443E-01	2.012668E-01	1.767051E-01	1.462009E-01	1.111792E-01
7.315588E-02	3.382216E-02	-5.319852E-03	-4.271914E-02	-7.694260E-02
-1.068940E-01	-1.314552E-01	-1.499141E-01	-1.617943E-01	-1.668839E-01
-1.652521E-01	-1.572262E-01	-1.433706E-01	-1.244554E-01	-1.014181E-01
-7.532069E-02	-4.730305E-02	-1.853539E-02	9.828638E-03	3.669639E-02
6.107655E-02	8.211387E-02	9.911730E-02	1.115805E-01	1.191944E-01
1.218517E-01	1.196428E-01	1.128449E-01	1.019036E-01	8.740882E-02
7.006649E-02	5.056597E-02	3.004612E-02	9.060583E-03	-1.145619E-02
-3.072077E-02	-4.802942E-02	-6.278239E-02	-7.450335E-02	-8.285313E-02
-8.763760E-02	-8.880960E-02	-8.646406E-02	-8.083320E-02	-7.226330E-02
-6.120537E-02	-4.818913E-02	-3.380063E-02	-1.865423E-02	-3.873289E-03
1.144030E-02	2.522595E-02	3.748503E-02	4.779869E-02	5.584017E-02
6.138391E-02				

FIG 41.10

4.2 SISTEMA OSCILANTE AMORTECIDO COM ENTRADA EM RAMPA

42.1 Formulação do problema

Seja o sistema massa-mola-amortecedor

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = f(t) \tag{42.1}$$

Consideremos uma entrada em rampa, ou seja

$$f(t) = at \tag{42.2}$$

Suponhamos que as condições iniciais são todas nulas. Do mesmo modo que no item anterior usaremos os intervalos

$$\begin{aligned} &a)\ t_o = 0 \quad t_1 = 1 \\ &b)\ t_o = 0 \quad t_1 = 3 \\ &c)\ t_o = 0 \quad t_1 = 20 \end{aligned} \tag{42.3}$$

42.2 Solução teórica do problema

Aplicando a transformada de Laplace a (42.1) e considerando que as condições iniciais são nulas, temos

$$X(s)\ (s^2 + 4s + 8) = \frac{10}{s^2} \tag{42.4}$$

donde obtemos

$$X(s) = \frac{10}{s^2(s^2 + 4s + 8)} \tag{42.5}$$

Desenvolvendo em frações parciais temos

$$X(s) = \frac{K_c}{(s + 2 - 2j)} + \frac{K_{-c}}{(s + 2 + 2j)} + \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} \tag{42.6}$$

A solução neste caso é da forma

$$x(t) = \frac{1}{b} |K(a+jb)|\ e^{at}\ \text{sen}(bt+\alpha) + K_1 + K_2 t \tag{42.7}$$

onde $a + jb = -2 + 2j \quad a = -2 \quad b = 2$ (42.8)

$$|K(a+jb)| = \frac{10}{s^2}\Big|_{s=-2+2j} = \left|\frac{10}{(-2+2j)}\right| = \left|\frac{10}{-4j}\right| = \frac{10}{4} \quad (42.9)$$

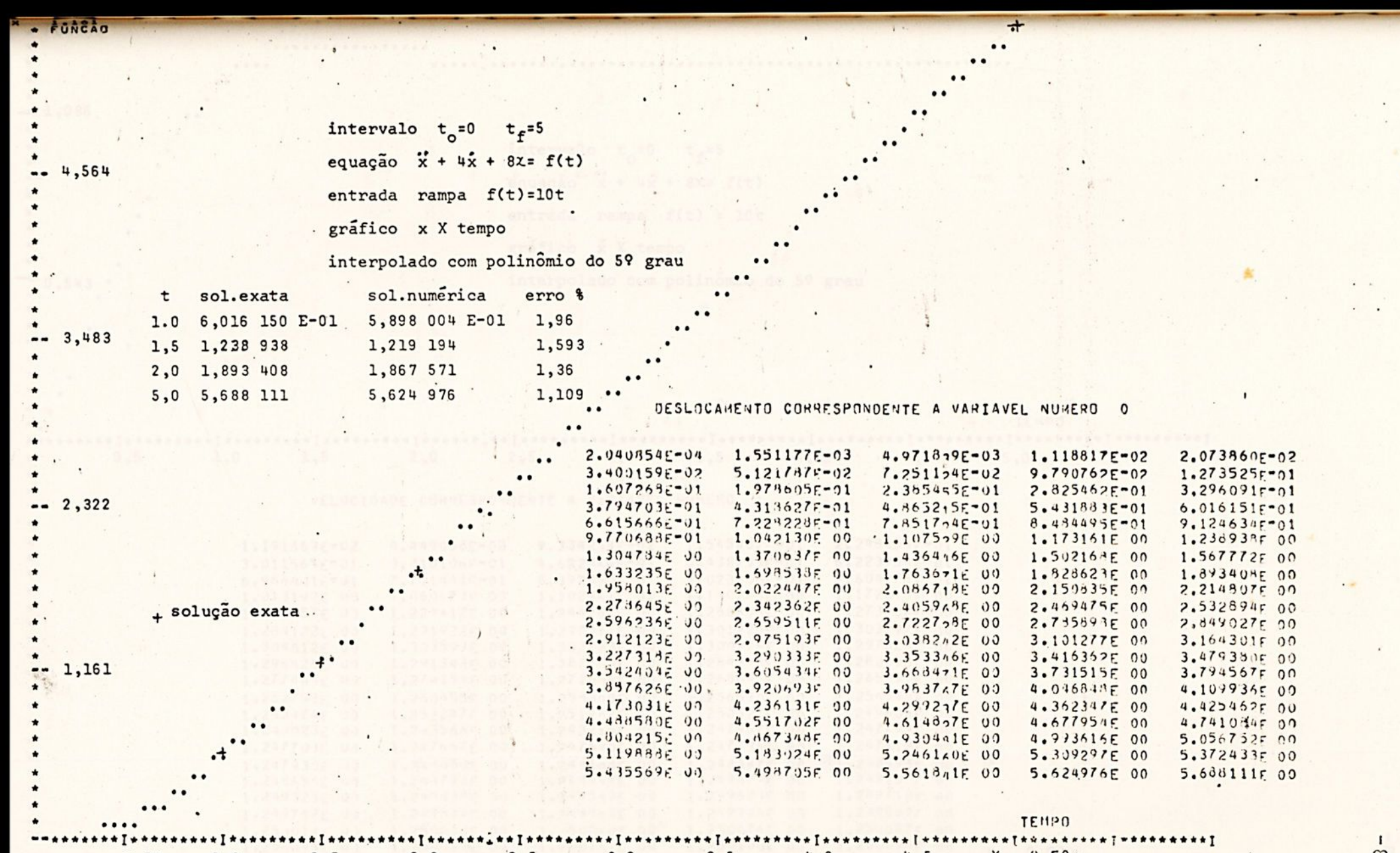
$$\alpha = \measuredangle K(a+jb) = \measuredangle \frac{10}{-4j} = \frac{10}{4} \quad 90 \quad (42\text{-}10)$$

$$K_1 = \frac{10}{s^2+4s+8}\Big|_{s=0} = \frac{10}{8} \quad (42.11)$$

$$K_2 = \frac{d}{ds}\left|\frac{10}{s^2+4s+8}\right|_{s=0} = \left|\frac{-10(2s+4)}{s^2+4s+8}\right|_{s=0} = -\frac{5}{8} \quad (42.12)$$

Substituindo (42.8) a (42.12) em (42.7) vem

$$x(t) = \frac{5}{8}\, e^{-2t}\, \text{sen}(2t + 90) - \frac{5}{8} + \frac{10}{8}\, t \quad (42.13)$$



intervalo $t_o=0$ $t_f=5$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = f(t)$

entrada rampa $f(t)=10t$

gráfico x X tempo

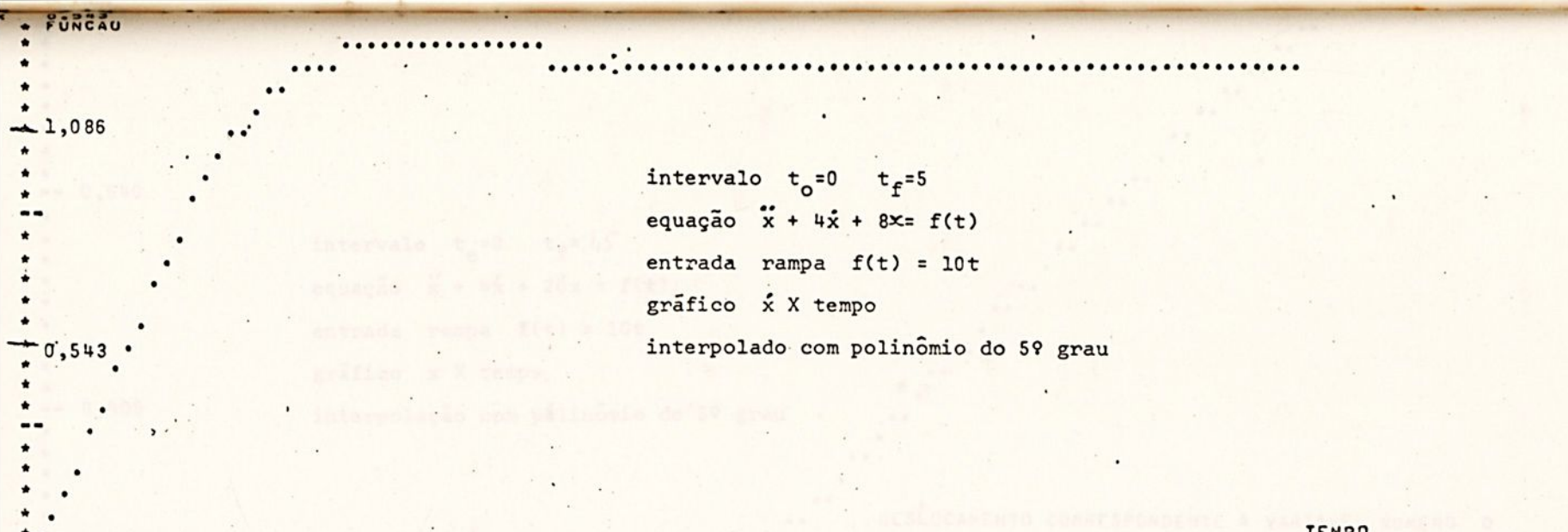
interpolado com polinômio do 5º grau

t	sol.exata	sol.numérica	erro %
1.0	6,016 150 E-01	5,898 004 E-01	1,96
1,5	1,238 938	1,219 194	1,593
2,0	1,893 408	1,867 571	1,36
5,0	5,688 111	5,624 976	1,109

DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0

2.040854E-04	1.551177E-03	4.971819E-03	1.118817E-02	2.073860E-02
3.400159E-02	5.121787E-02	7.251154E-02	9.790762E-02	1.273525E-01
1.607268E-01	1.978605E-01	2.365485E-01	2.825462E-01	3.296091E-01
3.794703E-01	4.313627E-01	4.863215E-01	5.431883E-01	6.016151E-01
6.615666E-01	7.228228E-01	7.851764E-01	8.484495E-01	9.124634E-01
9.770688E-01	1.042130E 00	1.107529E 00	1.173161E 00	1.238938E 00
1.304784E 00	1.370637E 00	1.436416E 00	1.502168E 00	1.567772E 00
1.633235E 00	1.698538E 00	1.763671E 00	1.828623E 00	1.893408E 00
1.958013E 00	2.022447E 00	2.086718E 00	2.150835E 00	2.214807E 00
2.278645E 00	2.342362E 00	2.405968E 00	2.469475E 00	2.532894E 00
2.596236E 00	2.659511E 00	2.722728E 00	2.785893E 00	2.849027E 00
2.912123E 00	2.975193E 00	3.038242E 00	3.101277E 00	3.164301E 00
3.227314E 00	3.290333E 00	3.353346E 00	3.416362E 00	3.479380E 00
3.542404E 00	3.605434E 00	3.668471E 00	3.731515E 00	3.794567E 00
3.857626E 00	3.920693E 00	3.983787E 00	4.046848E 00	4.109936E 00
4.173031E 00	4.236131E 00	4.299237E 00	4.362347E 00	4.425462E 00
4.488580E 00	4.551702E 00	4.614827E 00	4.677954E 00	4.741084E 00
4.804215E 00	4.867348E 00	4.930481E 00	4.993616E 00	5.056752E 00
5.119888E 00	5.183024E 00	5.246160E 00	5.309297E 00	5.372433E 00
5.435569E 00	5.498705E 00	5.561841E 00	5.624976E 00	5.688111E 00

FIG 42.1

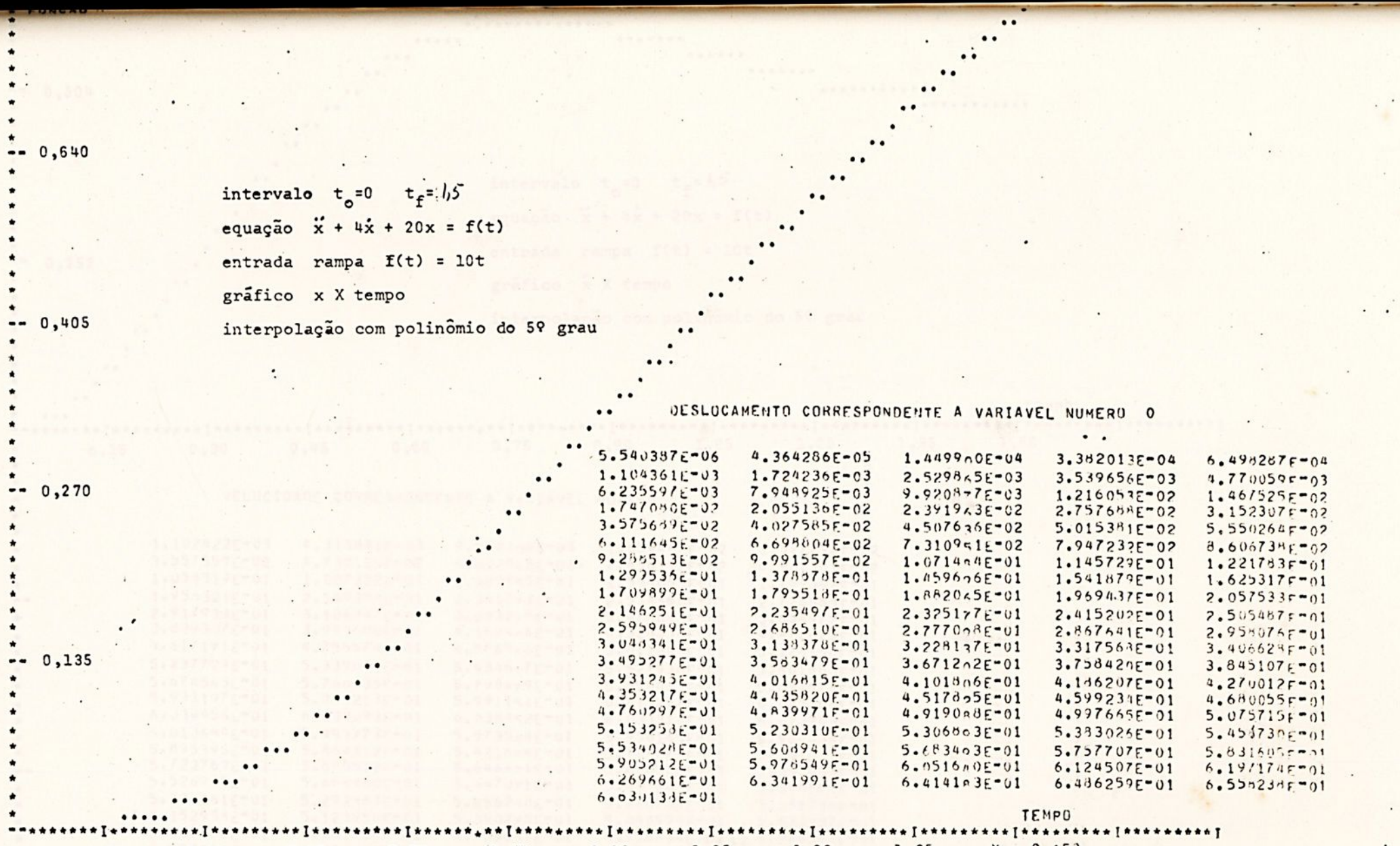


VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

1.191663E-02	4.449058E-02	9.334234E-02	1.545932E-01	2.248454E-01
3.011565E-01	3.810106E-01	4.622846E-01	5.432253E-01	6.223954E-01
6.986601E-01	7.711441E-01	8.392050E-01	9.023880E-01	9.604278E-01
1.013192E 00	1.060673E 00	1.102941E 00	1.140225E 00	1.172698E 00
1.200657E 00	1.223412E 00	1.244203E 00	1.260643E 00	1.273806E 00
1.284122E 00	1.291922E 00	1.297591E 00	1.301220E 00	1.303297E 00
1.304012E 00	1.303599E 00	1.302273E 00	1.300226E 00	1.297626E 00
1.294624E 00	1.291348E 00	1.287908E 00	1.284399E 00	1.280896E 00
1.277464E 00	1.274154E 00	1.271094E 00	1.268042E 00	1.265290E 00
1.262758E 00	1.260455E 00	1.258390E 00	1.256530E 00	1.254898E 00
1.253474E 00	1.252247E 00	1.251202E 00	1.250327E 00	1.249605E 00
1.249023E 00	1.248566E 00	1.248218E 00	1.247967E 00	1.247799E 00
1.247703E 00	1.247667E 00	1.247680E 00	1.247734E 00	1.247819E 00
1.247930E 00	1.248058E 00	1.248198E 00	1.248347E 00	1.248498E 00
1.248650E 00	1.248798E 00	1.248942E 00	1.249079E 00	1.249208E 00
1.249324E 00	1.249438E 00	1.249539E 00	1.249629E 00	1.249710E 00
1.249782E 00	1.249844E 00	1.249898E 00	1.249944E 00	1.249982E 00
1.250014E 00	1.250040E 00	1.250060E 00	1.250076E 00	1.250087E 00
1.250095E 00	1.250099E 00	1.250101E 00	1.250100E 00	1.250098E 00
1.250095E 00	1.250090E 00	1.250085E 00	1.250078E 00	1.250072E 00

x 0.50

FIG 42.2

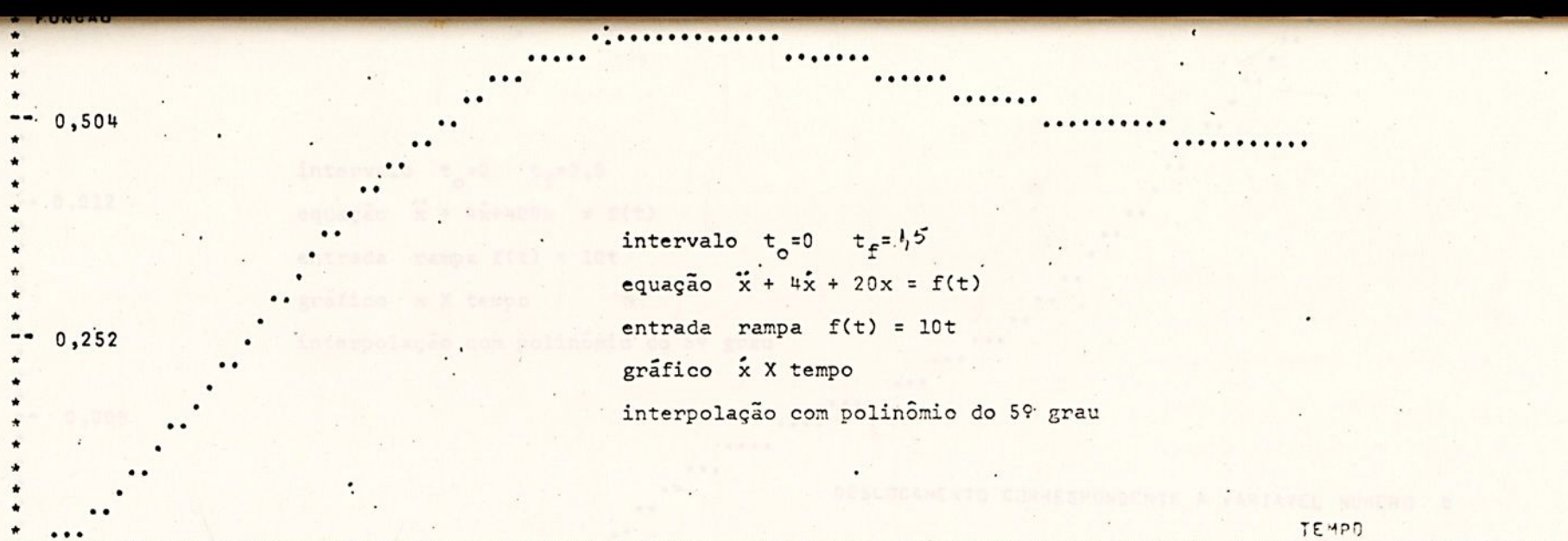


DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0

5.540387E-06	4.364286E-05	1.4499∩0E-04	3.382013E-04	6.498287E-04
1.104361E-03	1.724236E-03	2.5298∩5E-03	3.539656E-03	4.770059E-03
6.235597E-03	7.948925E-03	9.9208∩7E-03	1.216053E-02	1.467525E-02
1.747080E-02	2.055136E-02	2.3919∩3E-02	2.757688E-02	3.152307E-02
3.575669E-02	4.027585E-02	4.5076∩6E-02	5.015381E-02	5.550264E-02
6.111645E-02	6.698804E-02	7.3109∩1E-02	7.947232E-02	8.606738E-02
9.288513E-02	9.991557E-02	1.0714∩4E-01	1.145729E-01	1.221783E-01
1.299536E-01	1.378878E-01	1.4596∩6E-01	1.541879E-01	1.625317E-01
1.709899E-01	1.795518E-01	1.8820∩5E-01	1.969437E-01	2.057533E-01
2.146251E-01	2.235497E-01	2.3251∩7E-01	2.415202E-01	2.505487E-01
2.595949E-01	2.686510E-01	2.7770∩8E-01	2.867641E-01	2.958076E-01
3.048341E-01	3.138378E-01	3.2281∩7E-01	3.317563E-01	3.406624E-01
3.495277E-01	3.583479E-01	3.6712∩2E-01	3.758420E-01	3.845107E-01
3.931243E-01	4.016815E-01	4.1018∩6E-01	4.186207E-01	4.270012E-01
4.353217E-01	4.435820E-01	4.5178∩5E-01	4.599231E-01	4.680055E-01
4.760297E-01	4.839971E-01	4.9190∩8E-01	4.997665E-01	5.075715E-01
5.153258E-01	5.230310E-01	5.3068∩3E-01	5.383026E-01	5.458730E-01
5.534028E-01	5.608941E-01	5.6834∩3E-01	5.757707E-01	5.831605E-01
5.905212E-01	5.978549E-01	6.0516∩0E-01	6.124507E-01	6.197174E-01
6.269661E-01	6.341991E-01	6.4141∩3E-01	6.486259E-01	6.558234E-01
6.630138E-01				

TEMPO

FIG 42.3

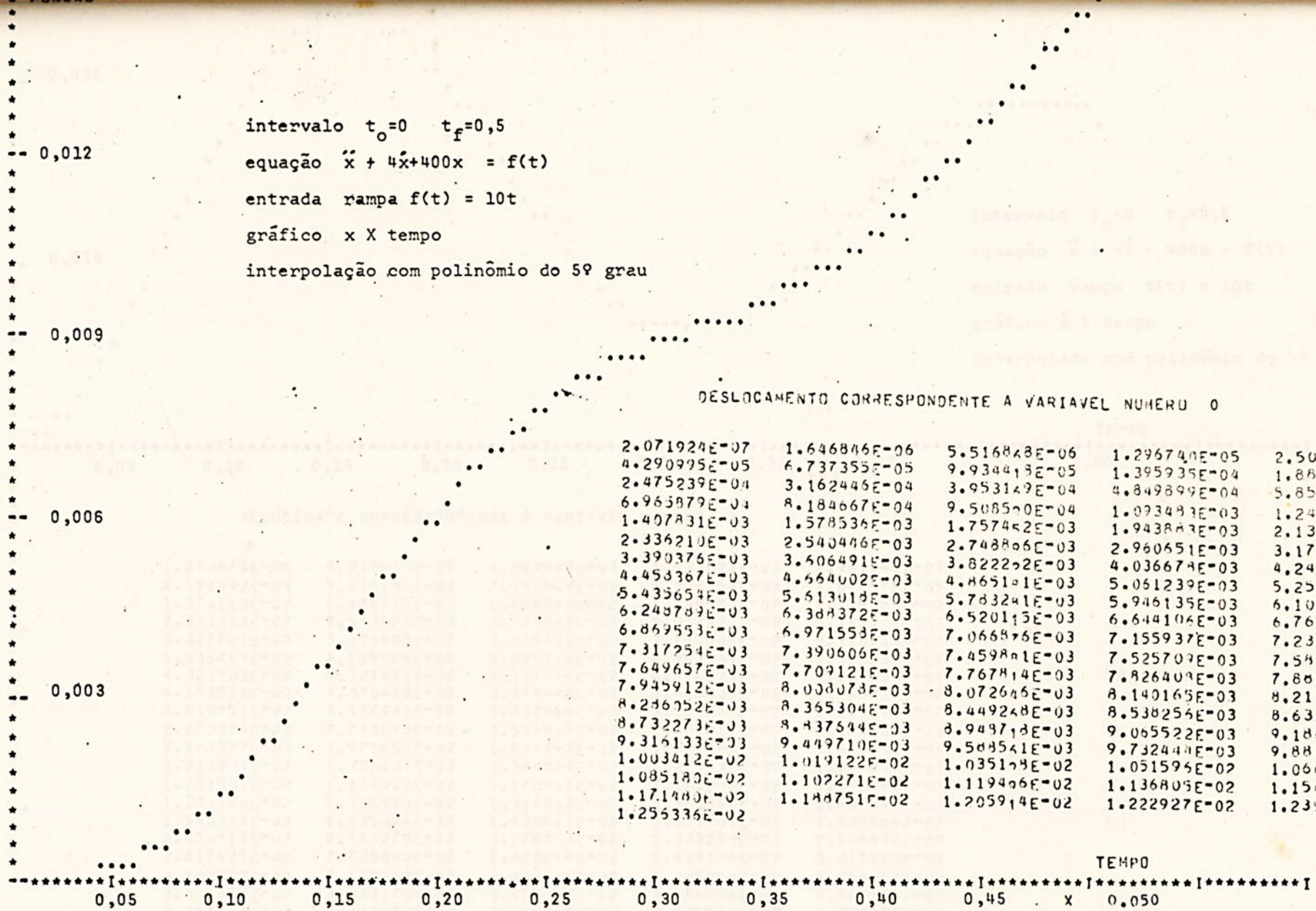


VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

1.102422E-03	4.318841E-03	9.512106E-03	1.654442E-02	2.527798E-02
3.557559E-02	4.730120E-02	6.032045E-02	7.450117E-02	8.971381E-02
1.058319E-01	1.227322E-01	1.402955E-01	1.584065E-01	1.769542E-01
1.958321E-01	2.149388E-01	2.341773E-01	2.534560E-01	2.726885E-01
2.917933E-01	3.106947E-01	3.293218E-01	3.476093E-01	3.654972E-01
3.829307E-01	3.998600E-01	4.162406E-01	4.320330E-01	4.472025E-01
4.617191E-01	4.755574E-01	4.886946E-01	5.011209E-01	5.128150E-01
5.237729E-01	5.339690E-01	5.434617E-01	5.521930E-01	5.601880E-01
5.674545E-01	5.740035E-01	5.798479E-01	5.850033E-01	5.894874E-01
5.933197E-01	5.965213E-01	5.991151E-01	6.011251E-01	6.025766E-01
6.034956E-01	6.039093E-01	6.038452E-01	6.033314E-01	6.023965E-01
6.010689E-01	5.993773E-01	5.973594E-01	5.950165E-01	5.924036E-01
5.895395E-01	5.864512E-01	5.831654E-01	5.797078E-01	5.761035E-01
5.723769E-01	5.685512E-01	5.646491E-01	5.606920E-01	5.567003E-01
5.526935E-01	5.486900E-01	5.447071E-01	5.407609E-01	5.368665E-01
5.330381E-01	5.292883E-01	5.256200E-01	5.220709E-01	5.186236E-01
5.152954E-01	5.120950E-01	5.090278E-01	5.060998E-01	5.033157E-01
5.006793E-01	4.981934E-01	4.958681E-01	4.936809E-01	4.916561E-01
4.897856E-01	4.880687E-01	4.865039E-01	4.850891E-01	4.838218E-01
4.826990E-01	4.817170E-01	4.808721E-01	4.801599E-01	4.795758E-01
4.791149E-01				

x 0.150

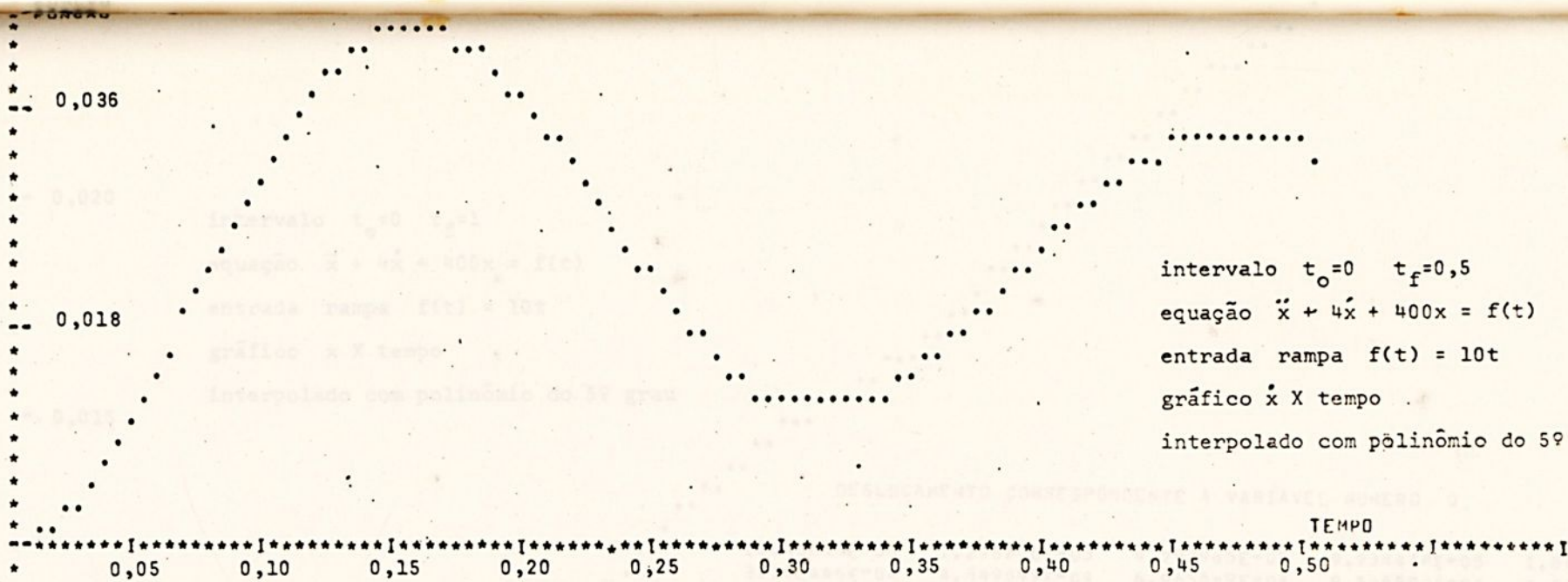
FIG 42.4



DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0

2.071924E-07	1.646846E-06	5.516848E-06	1.296740E-05	2.509039E-05
4.290995E-05	6.737355E-05	9.934413E-05	1.395935E-04	1.867959E-04
2.475239E-04	3.162446E-04	3.953149E-04	4.849899E-04	5.854034E-04
6.963879E-04	8.184667E-04	9.508590E-04	1.093483E-03	1.245963E-03
1.407831E-03	1.578536E-03	1.757482E-03	1.943883E-03	2.137071E-03
2.336210E-03	2.540446E-03	2.748896E-03	2.960651E-03	3.174788E-03
3.390376E-03	3.606491E-03	3.822292E-03	4.036678E-03	4.249001E-03
4.458367E-03	4.664002E-03	4.865181E-03	5.061239E-03	5.251574E-03
5.435654E-03	5.613016E-03	5.783241E-03	5.946135E-03	6.101354E-03
6.248789E-03	6.388372E-03	6.520113E-03	6.644106E-03	6.760509E-03
6.869553E-03	6.971553E-03	7.066876E-03	7.155937E-03	7.239221E-03
7.317254E-03	7.390606E-03	7.459881E-03	7.525709E-03	7.588745E-03
7.649657E-03	7.709121E-03	7.767814E-03	7.826409E-03	7.885560E-03
7.945912E-03	8.008078E-03	8.072646E-03	8.140165E-03	8.211145E-03
8.286052E-03	8.365304E-03	8.449248E-03	8.538256E-03	8.632524E-03
8.732273E-03	8.837644E-03	8.948718E-03	9.065522E-03	9.188023E-03
9.316133E-03	9.449710E-03	9.588541E-03	9.732444E-03	9.881073E-03
1.003412E-02	1.019122E-02	1.035198E-02	1.051596E-02	1.068273E-02
1.085180E-02	1.102271E-02	1.119496E-02	1.136805E-02	1.154149E-02
1.171480E-02	1.188751E-02	1.205914E-02	1.222927E-02	1.239747E-02
1.256336E-02				

FIG 42.5



intervalo $t_o=0$ $t_f=0,5$

equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 400x = f(t)$

entrada rampa $f(t) = 10t$

gráfico $\dot{x}$ X tempo

interpolado com polinômio do 5º grau

VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

1.240675E-04	4.917614E-04	1.094620E-03	1.922023E-03	2.961340E-03
4.196092E-03	5.616136E-03	7.197854E-03	8.924359E-03	1.077570E-02
1.273110E-02	1.476915E-02	1.686805E-02	1.900583E-02	2.116058E-02
2.331054E-02	2.543484E-02	2.751268E-02	2.952452E-02	3.145176E-02
3.327701E-02	3.498425E-02	3.655801E-02	3.798804E-02	3.926039E-02
4.036643E-02	4.129866E-02	4.205114E-02	4.262004E-02	4.300338E-02
4.320103E-02	4.321471E-02	4.304704E-02	4.270593E-02	4.219553E-02
4.152514E-02	4.070455E-02	3.974485E-02	3.865830E-02	3.745814E-02
3.615851E-02	3.477423E-02	3.332046E-02	3.181357E-02	3.026892E-02
2.870274E-02	2.713093E-02	2.556917E-02	2.403271E-02	2.253623E-02
2.109377E-02	1.971650E-02	1.842272E-02	1.721766E-02	1.611344E-02
1.511901E-02	1.424201E-02	1.348879E-02	1.286437E-02	1.237236E-02
1.201501E-02	1.179319E-02	1.170641E-02	1.175286E-02	1.192943E-02
1.223180E-02	1.265450E-02	1.319093E-02	1.383360E-02	1.457398E-02
1.540285E-02	1.631024E-02	1.728543E-02	1.831801E-02	1.939606E-02
2.050819E-02	2.164274E-02	2.278803E-02	2.393253E-02	2.506492E-02
2.617425E-02	2.725000E-02	2.828218E-02	2.926146E-02	3.017920E-02
3.102752E-02	3.179942E-02	3.248878E-02	3.309040E-02	3.360007E-02
3.401459E-02	3.433170E-02	3.455093E-02	3.466994E-02	3.469166E-02
3.461705E-02	3.444879E-02	3.419099E-02	3.384619E-02	3.342129E-02
3.292150E-02				

x 0.050

FIG 42.6

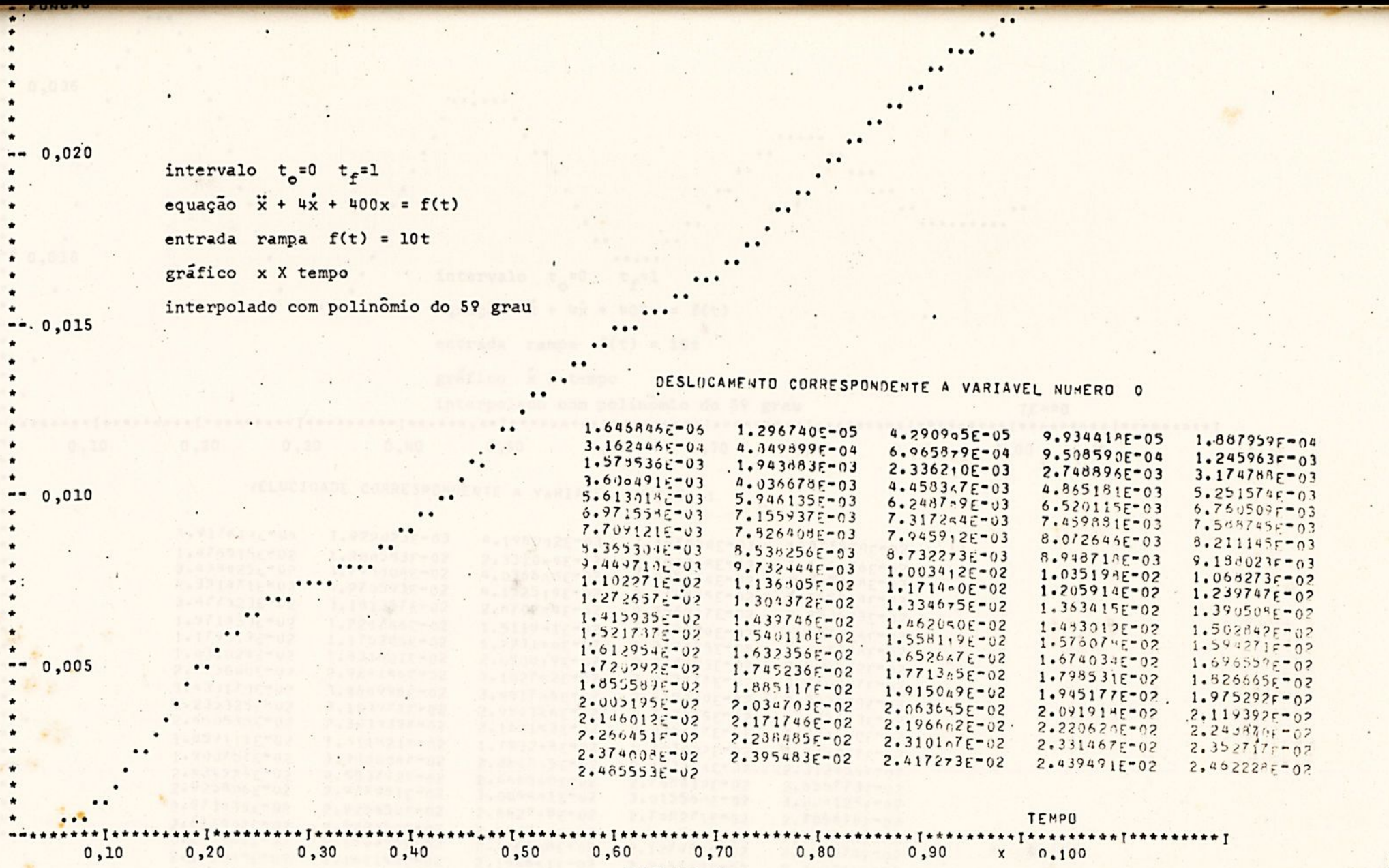
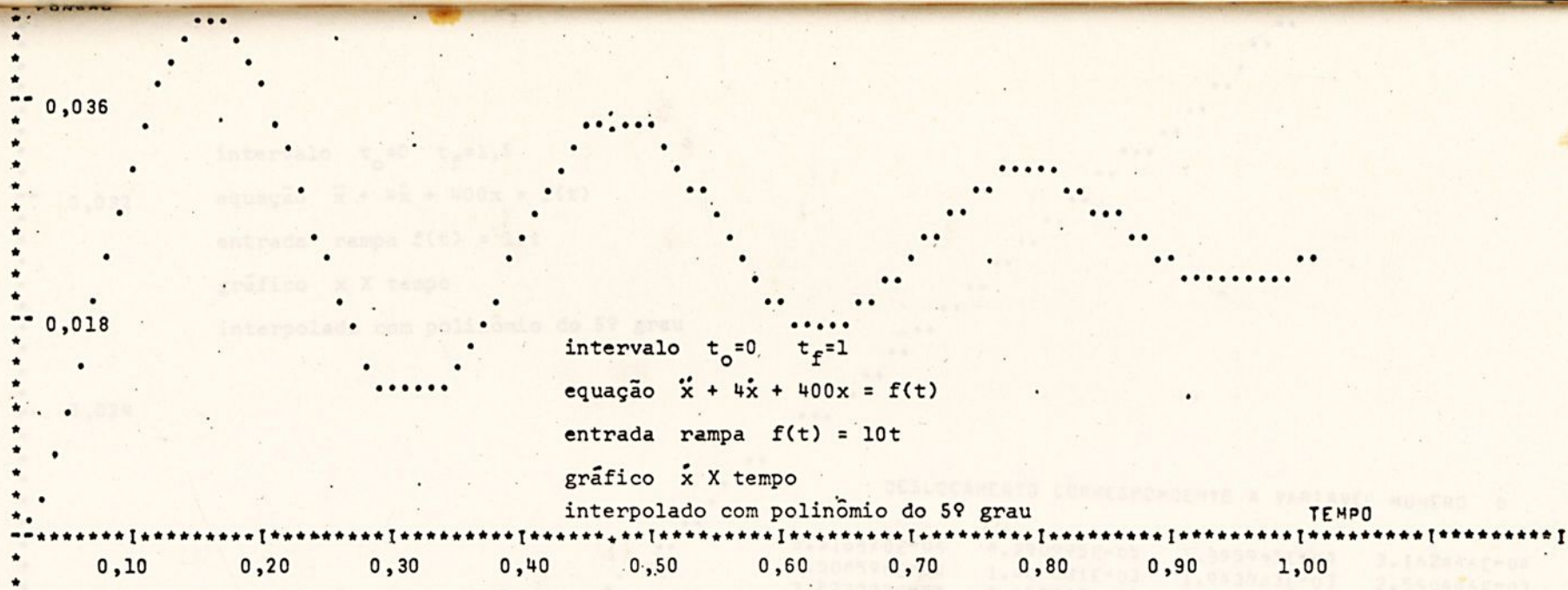

0,020
0,015
0,010
0,005
intervalo t_o=0 t_f=1
equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + 400x = f(t)$
entrada rampa f(t) = 10t
gráfico x X tempo
interpolado com polinômio do 5º grau
DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0
1.646846E-06 1.296740E-05 4.290905E-05 9.934418E-05 1.887959E-04
3.162446E-04 4.849899E-04 6.965879E-04 9.508590E-04 1.245963E-03
1.579536E-03 1.943683E-03 2.336210E-03 2.748896E-03 3.174788E-03
3.600491E-03 4.036678E-03 4.458367E-03 4.865181E-03 5.251574E-03
5.613018E-03 5.946135E-03 6.248789E-03 6.520115E-03 6.760509E-03
6.971554E-03 7.155937E-03 7.317264E-03 7.459881E-03 7.588745E-03
7.709121E-03 7.826408E-03 7.945912E-03 8.072644E-03 8.211145E-03
8.365304E-03 8.538256E-03 8.732273E-03 8.948718E-03 9.188023E-03
9.449710E-03 9.732444E-03 1.003412E-02 1.035194E-02 1.068273E-02
1.102271E-02 1.136805E-02 1.171480E-02 1.205914E-02 1.239747E-02
1.272657E-02 1.304372E-02 1.334675E-02 1.363415E-02 1.390508E-02
1.415935E-02 1.439746E-02 1.462050E-02 1.483012E-02 1.502842E-02
1.521737E-02 1.540118E-02 1.558119E-02 1.576074E-02 1.594271E-02
1.612954E-02 1.632356E-02 1.652647E-02 1.674034E-02 1.696552E-02
1.720292E-02 1.745236E-02 1.771345E-02 1.798531E-02 1.826665E-02
1.855589E-02 1.885117E-02 1.915049E-02 1.945177E-02 1.975292E-02
2.005195E-02 2.034703E-02 2.063685E-02 2.091918E-02 2.119392E-02
2.146012E-02 2.171746E-02 2.196602E-02 2.220620E-02 2.243870E-02
2.266451E-02 2.288485E-02 2.310107E-02 2.331467E-02 2.352717E-02
2.374008E-02 2.395483E-02 2.417273E-02 2.439491E-02 2.462228E-02
2.485553E-02
TEMPO
0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 x 0,100

FIG 42.7

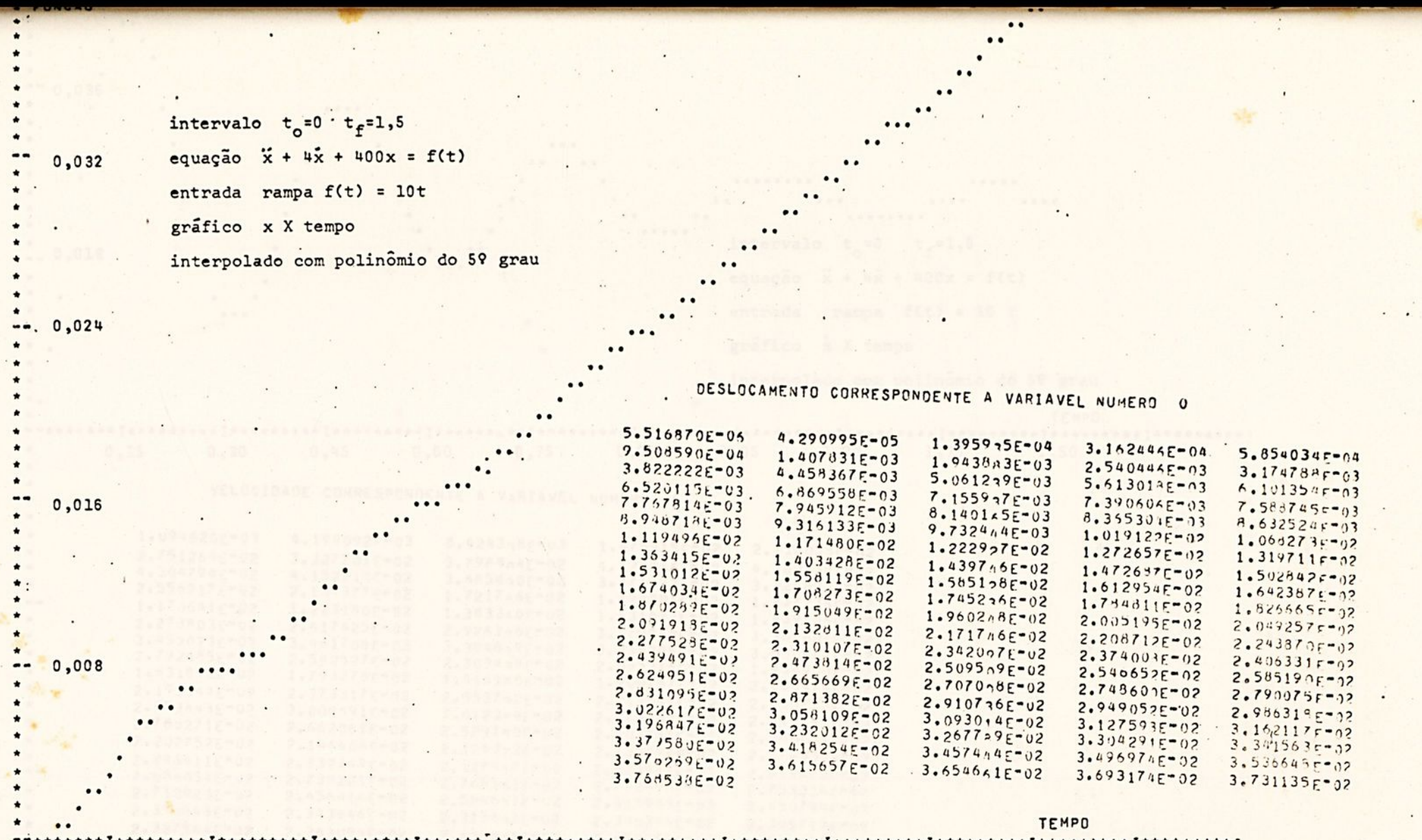


VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

4.917614E-04	1.922023E-03	4.198092E-03	7.197854E-03	1.077570E-02
1.476915E-02	1.900583E-02	2.331064E-02	2.751268E-02	3.145176E-02
3.498425E-02	3.799804E-02	4.036688E-02	4.205114E-02	4.300338E-02
4.321471E-02	4.270593E-02	4.152514E-02	3.974485E-02	3.745814E-02
3.477423E-02	3.181357E-02	2.870274E-02	2.556917E-02	2.253623E-02
1.971855E-02	1.721766E-02	1.511901E-02	1.348879E-02	1.237236E-02
1.179319E-02	1.175286E-02	1.223180E-02	1.319095E-02	1.457398E-02
1.631024E-02	1.831601E-02	2.050819E-02	2.278803E-02	2.506492E-02
2.725000E-02	2.926146E-02	3.102752E-02	3.248878E-02	3.360007E-02
3.443170E-02	3.466996E-02	3.461706E-02	3.419039E-02	3.342129E-02
3.235325E-02	3.103971E-02	2.954146E-02	2.792485E-02	2.625713E-02
2.460568E-02	2.303439E-02	2.160153E-02	2.035767E-02	1.934400E-02
1.859111E-02	1.811821E-02	1.793278E-02	1.803082E-02	1.839737E-02
1.900757E-02	1.982604E-02	2.081845E-02	2.193344E-02	2.312456E-02
2.434225E-02	2.553792E-02	2.666548E-02	2.768412E-02	2.855773E-02
2.925806E-02	2.976451E-02	3.006491E-02	3.015560E-02	3.004125E-02
2.973436E-02	2.925450E-02	2.862718E-02	2.788271E-02	2.705478E-02
2.617901E-02	2.529150E-02	2.442760E-02	2.361956E-02	2.289734E-02
2.223561E-02	2.180395E-02	2.146608E-02	2.127956E-02	2.124574E-02
2.135998E-02	2.161198E-02	2.198651E-02	2.246412E-02	2.302210E-02
2.363550E-02				

X 0.100

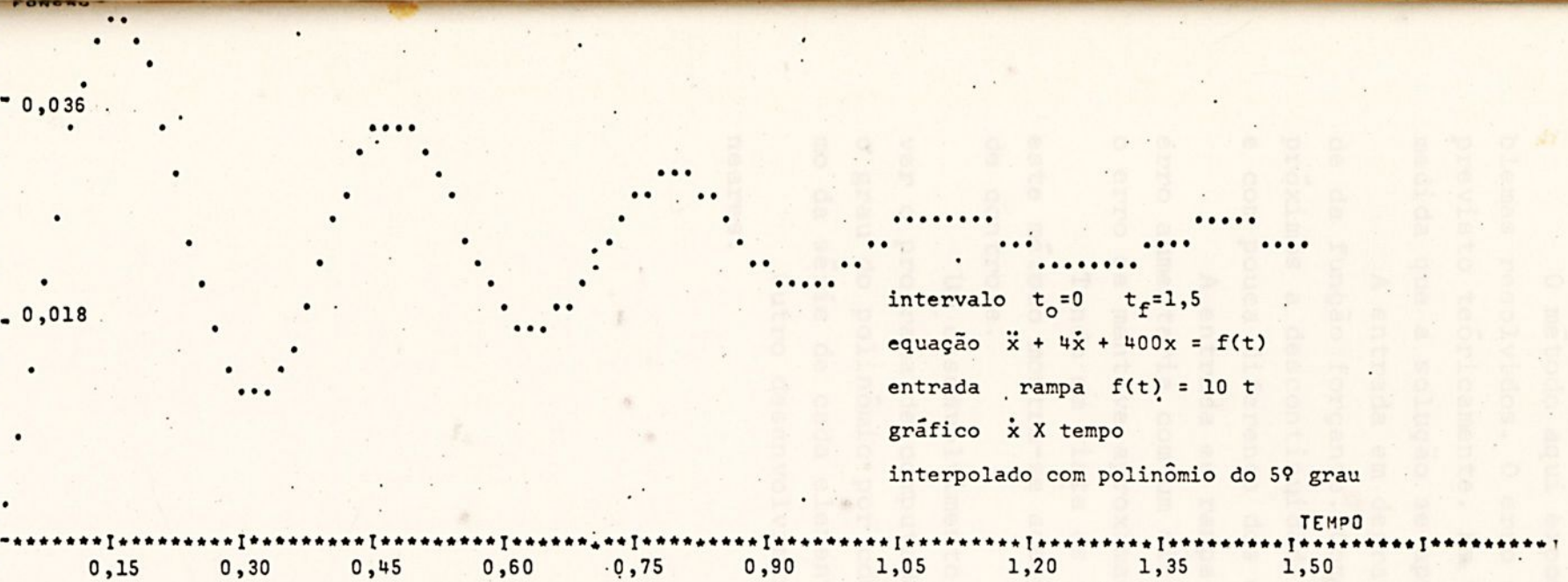
FIG 42.8



DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 0

5.516870E-06	4.290995E-05	1.395925E-04	3.162446E-04	5.854034E-04
9.508590E-04	1.407831E-03	1.943883E-03	2.540446E-03	3.174788E-03
3.822222E-03	4.458367E-03	5.061239E-03	5.613018E-03	6.191354E-03
6.520115E-03	6.869558E-03	7.155927E-03	7.390604E-03	7.588745E-03
7.767814E-03	7.945912E-03	8.140145E-03	8.355301E-03	8.632524E-03
8.948718E-03	9.316133E-03	9.732444E-03	1.019122E-02	1.066273E-02
1.119496E-02	1.171480E-02	1.222927E-02	1.272657E-02	1.319711E-02
1.363415E-02	1.403428E-02	1.439746E-02	1.472687E-02	1.502842E-02
1.531012E-02	1.558119E-02	1.585128E-02	1.612954E-02	1.642387E-02
1.674034E-02	1.708273E-02	1.745236E-02	1.784811E-02	1.826665E-02
1.870289E-02	1.915049E-02	1.960288E-02	2.005195E-02	2.049257E-02
2.091918E-02	2.132811E-02	2.171746E-02	2.208712E-02	2.243870E-02
2.277528E-02	2.310107E-02	2.342097E-02	2.374003E-02	2.406331E-02
2.439491E-02	2.473814E-02	2.509509E-02	2.546652E-02	2.585190E-02
2.624951E-02	2.665669E-02	2.707098E-02	2.748601E-02	2.790075E-02
2.831095E-02	2.871382E-02	2.910736E-02	2.949052E-02	2.986319E-02
3.022617E-02	3.058109E-02	3.093014E-02	3.127593E-02	3.162117E-02
3.196847E-02	3.232012E-02	3.267729E-02	3.304291E-02	3.341563E-02
3.377580E-02	3.413254E-02	3.457444E-02	3.496974E-02	3.536646E-02
3.576269E-02	3.615657E-02	3.654661E-02	3.693174E-02	3.731135E-02
3.768538E-02				

FIG 42.9



VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO 1

1.094620E-03	4.198092E-03	8.924358E-03	1.476915E-02	2.116058E-02
2.751268E-02	3.327701E-02	3.798804E-02	4.129864E-02	4.300338E-02
4.304794E-02	4.152514E-02	3.865830E-02	3.477423E-02	3.026892E-02
2.556917E-02	2.109377E-02	1.721746E-02	1.424201E-02	1.237236E-02
1.170641E-02	1.223180E-02	1.383360E-02	1.631021E-02	1.939604E-02
2.278803E-02	2.617425E-02	2.926146E-02	3.179942E-02	3.360007E-02
3.455023E-02	3.461706E-02	3.384619E-02	3.235325E-02	3.030972E-02
2.792485E-02	2.542527E-02	2.303439E-02	2.095316E-02	1.934400E-02
1.831892E-02	1.793278E-02	1.818186E-02	1.900757E-02	2.030474E-02
2.193344E-02	2.373317E-02	2.553702E-02	2.719094E-02	2.855773E-02
2.953643E-02	3.006491E-02	3.012344E-02	2.973437E-02	2.895747E-02
2.788271E-02	2.662061E-02	2.529150E-02	2.401451E-02	2.289734E-02
2.202752E-02	2.146608E-02	2.124372E-02	2.135998E-02	2.176505E-02
2.245411E-02	2.332349E-02	2.427817E-02	2.523984E-02	2.612472E-02
2.686054E-02	2.739221E-02	2.768561E-02	2.772890E-02	2.753316E-02
2.712920E-02	2.656416E-02	2.589641E-02	2.518983E-02	2.450794E-02
2.390843E-02	2.343846E-02	2.313195E-02	2.300395E-02	2.305712E-02
2.327564E-02	2.363094E-02	2.408425E-02	2.459055E-02	2.510287E-02
2.557643E-02	2.597244E-02	2.626108E-02	2.642357E-02	2.645317E-02
2.635507E-02	2.614519E-02	2.584854E-02	2.549505E-02	2.511950E-02
2.475546E-02				

X 0,150

FIG 42.10

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

O método aqui exposto mostrou-se com boa precisão nos problemas resolvidos. O erro apresentou-se constante como tinha sido previsto teóricamente. Em um dos exemplos o erro foi reduzindo a medida que a solução se aproximava do regime permanente.

A entrada em degrau foi escolhida devido a descontinuidade da função forçante. Como era de esperar o erro para os valores próximos a descontinuidade foram maiores, mas mesmo assim pequenos e com pouca diferença dos erros dos pontos mais afastados.

A entrada em rampa foi escolhida para se verificar se o erro aumentaria com um sistema que não estabilizasse, mas também o erro se manteve aproximadamente constante.

Tendo em vista as justificativas teóricas e os exemplos, este método mostra-se adequado para simulação de sistemas lineares de controle.

Um desenvolvimento natural deste trabalho seria desenvolver o programa de computador para obter automáticamente o passo e o grau do polinômio por comparação entre o primeiro e último termo da série de cada elemento das matrizes.

Outro desenvolvimento seria extender aos sistemas não lineares.

BIBLIOGRAFIA

{1} CANNON, Robert H. Jr, Dynamics of Physical Systems, Mcgraw Hill ; 1967

{2} CRANDALL, Stephen H., Engineering Analysis A Survey of Numerical Procedures, McGraw Hill, 1956

{3} CHAN, A.S.L. e FIRMIN, A, The Analysis od Cooling Towers by Matrix Finite Element Method. Part I Small displacements; The Aeronautical Journal, Vol 74, Outubro 1970; pag 826-835. Part II Large displacements; The Aeronautical Journal, Vol 74, Dezembro 1970; pag 971-982

{4} ARGYRIS, J.H. e CHAN, A.S.L. ; Ingenieur-Archiv, 41 Band 1972; pag 235-257- Spring-Verlag.

{5} NEWMARK, Nathan M., A Method of computaion for Structural Dynamics, Proceedings of the American Society of Civil Engineers; The Journal of the Engineering Mechanics; Julho 1959; 85,EM3,pag 67-94.

{6} BATHE, K.J. e WILSON, E.L., Stability and Accuracy Analysis of Dorect Integration Methods; Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol 1, pag 283-291, 1973

{7} ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C. e ANGELOPOULOS, T.; Non Linear Oscillations Using the Finite Element Thecnique; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2, 1973; pag 203-250.

{8} ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C. e ANGELOPOULOS, T., Dynamic Response by Large Step Integration, Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol 2, 1973, pag 185-203

{9} RAVEN, Francis H.; Automatic Control Engineering, McGraw Hill; Segunda edição 1968.

{10} ALGOL Language Reference Manual B6700/B7700; 1975Burroughs

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

```
    BEGIN

FILE ESCREVER (KIND=PRINTER,MAXRECSIZE=22);

   PROCEDURE COEFICIENTESENTRADA (K,C1,M);
   ARRAY K,C1,M[*,*];
   BEGIN
   WRITE (ESCREVER,<"COEFICIENTESENTRADA">);
   M[0,0]:=1;
   C1[0,0]:=4;
   K[0,0]:=20;
   END COEFICIENTESENTRADA;
   PROCEDURE CONDICOESINICIAIS (RZERO);
   ARRAY RZERO [*];
   BEGIN
   WRITE (ESCREVER,<"CONDICOESINICIAIS">);
   RZERO[0]:=0;
RZERO[1]:=0;
   END CONDICOESINICIAIS;
   PROCEDURE FUNCAOENTRADA (FJ,K2,I2,TAU,BL);
   ARRAY FJ[*,*];
   INTEGER K2,I2;
   REAL TAU;
   BOOLEAN BL;
   BEGIN
   REAL TZERO,TUM,N;

   TZERO:=K2*TAU;
   TUM:=(K2+1)*TAU;
   IF BL THEN BEGIN
   N:=10;
   FJ[0,0]:=N*TZERO;
   FJ[0,1]:=N*TUM;
   FJ[1,0]:=N;
   FJ[1,1]:=N;
   FJ[2,0]:=0;
   FJ[2,1]:=0;
   END
   ELSE
   BEGIN
   FJ[0,0]:=10;
   IF K2 =0 THEN FJ[0,0]:=0;
   FJ[0,1]:=10;
   FJ[1,0]:=FJ[1,1]:=FJ[2,0]:=FJ[2,1]:=0;
   END;
   END FUNCAOENTRADA;

   PROCEDURE PRODN (A1,A2,A3,I2);
   ARRAY A1,A2,A3[*,*];
   INTEGER I2;
   BEGIN
   INTEGER I,J,K;
```

```
                    000:0000:0
          B.0000 IS SEGMENT 00003
1                   003:0000:0
               DATA IS 0005 LONG
                    003:0000:0
                    003:0000:0
                    003:0000:0
                    003:0000:0
2                   003:0005:5
                    003:0008:1
                    003:000A:4
                    003:0000:1
2                   003:0000:2
                    003:000D:2
                    003:000D:2
                    003:000D:2
2                   003:0014:5
                    003:0014:2
                    003:0015:5
2                   003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
     FUNCAOENTRADA IS SEGMENT 00006
2                   006:0000:0
                    006:0001:2
                    006:0003:0
3                   006:0003:5
                    006:0004:4
                    006:0007:4
                    006:000A:4
                    006:0000:1
                    006:000F:4
                    006:0012:1
                    006:0014:4
3                   006:0014:4
                    006:0014:4
3                   006:0015:1
                    006:0017:4
                    006:0018:1
                    006:0010:4
                    006:0026:5
3                   006:0026:5
FUNCAOENTRADA(006) IS 0029 LONG
2                   003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
                    003:0016:0
          PRODN IS SEGMENT 00007
```

```
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
BEGIN
A1[I,JJ]:=0.;
FOR K:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
A1[I,J]:=A1[I,J]+A2[I,K]*A3[K,J];
END;
END PRODN;


PROCEDURE INVERMATRIZ (A2,A1,I2);
ARRAY A2,A1[*,*];
INTEGER I2;
BEGIN
INTEGER I,J,K,J1,K2,K3,IX,JX ,K4,K5;

REAL BIGA;
WRITE (ESCREVER,<"INVER MATRIZ">);
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
BEGIN
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
A2[I,J]:=0;
A2[I,I]:=1.;
END;
   FOR J:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
BEGIN
BIGA:=A1[J,J];
FOR K:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
BEGIN
A1[J,K]:=A1[J,K]/BIGA;
A2[J,K]:=A2[J,K]/BIGA;
END;
IF J=I2
THEN
BEGIN
FOR J1:=I2-1 STEP -1 UNTIL 0 DO
FOR K2:=I2 STEP -1 UNTIL J1+1 DO
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO
A2[J1,K3]:=A2[J1,K3]-A2[K2,K3]*A1[J1,K2];
END
ELSE
BEGIN
FOR IX:=J+1 STEP 1 UNTIL I2 DO
BEGIN
BIGA:=A1[IX,J];
FOR JX:=0   STEP 1 UNTIL I2 DO
BEGIN
A2[IX,JX]:=A2[IX,JX]-A2[J,JX]*BIGA;
A1[IX,JX]:=A1[IX,JX]-A1[J,JX]*BIGA;
END;
END;
END;
END;
END INVERMATRIZ;

PROCEDURE PROD1 (A1,K1,A2,I1,A3,I2);
ARRAY A1,A2[*,*,*],A3[*,*];
INTEGER I1,I2,K1;
BEGIN
INTEGER I,J,K;
```

```
                007:0005:3
                007:000A:0
                007:000E:3
              3 007:000E:3
                007:0011:1
                007:0015:4
                007:001F:0
              3 007:0020:0
    PRODN(007) IS 0022 LONG
              2 003:0016:0
                003:0016:0
                003:0016:0
                003:0016:0
                003:0016:0
                003:0016:0
INVERMATRIZ IS SEGMENT 00008
              2 008:0000:0
                008:0000:0
                008:0005:3
                008:000A:0
              3 008:000A:0
                008:000E:3
                008:0011:4
                008:0015:1
              3 008:0015:4
                008:001A:1
              3 008:001A:1
                008:0010:4
                008:0021:1
              4 008:0021:1
                008:0026:1
                008:0028:1
              4 008:0028:4
                008:002C:0
                008:002C:3
              4 008:002D:0
                008:0031:2
                008:0035:5
                008:003A:2
                008:0044:4
              4 008:0044:4
                008:0044:4
              4 008:0045:1
                008:0049:3
              5 008:0049:3
                008:004C:0
                008:0050:3
              6 008:0050:3
                008:0057:4
                008:005E:5
              6 008:005F:2
              5 008:005F:5
              4 008:005F:5
              3 008:0060:2
INVERMATRIZ(008) IS 0063 LONG
              2 003:0016:0
                003:0016:0
                003:0016:0
                003:0016:0
                003:0016:0
```

```
WRITE (ESCREVER,<"PROD1">);                                          2   009:0000:0
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                              009:0005:3
   FOR J:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                           009:000A:0
BEGIN                                                                    009:000E:3
A1[K1,I,J]:=0.;                                                      3   009:000E:3
  FOR K:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                            009:0012:1
A1[K1,I,J]:=A1[K1,I,J]+A2[I1,I,K]*A3[K,J];                               009:0016:4
END;                                                                     009:0023:4
END PROD1;                                                           3   009:0024:4
                                                                       PROD1(009) IS 0026 LONG

PROCEDURE PRODMV (A3,A1,A2,I3);                                      2   003:0016:0
ARRAY A1[*,*],A3,A2[*];                                                  003:0016:0
INTEGER I3;                                                              003:0016:0
BEGIN                                                                    003:0016:0
INTEGER I,J;                                                             003:0016:0
                                                                         003:0016:0
                                                                       PRODMV IS SEGMENT 0000A
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO                                          2   00A:0000:0
BEGIN                                                                    00A:0004:3
A3[I]:=0;                                                            3   00A:0004:3
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO                                              00A:0006:1
A3[I]:=A3[I]+A1[I,J]*A2[J];                                              00A:000A:4
END;                                                                     00A:0011:2
END PRODMV;                                                          3   00A:0011:5
                                                                       PRODMV(00A) IS 0013 LONG

PROCEDURE CALCULOCOEFICIENTE2 (AZERO,AUM,BIJ,I2,N,K,C1,M);           2   003:0016:0
ARRAY AZERO,AUM[*,*,*],BIJ[*,*,*,*],K,C1,M[*,*];                         003:0016:0
INTEGER I2,N;                                                            003:0016:0
BEGIN                                                                    003:0016:0
ARRAY ALFA,BETA,GAMA[0:I2,0:I2],BETAT[0:1,0:I2,0:I2];                    003:0016:0
                                                                       CALCULOCOEFICIENTE2 IS SEGMENT 0000B
INTEGER I,J,K2,K3;                                                   2   00B:0009:2
WRITE (ESCREVER,<"CALCULO COEFICIENTES 2">);                             00B:0009:2
INVERMATRIZ (GAMA,N,I2);                                                 00B:000E:5
PRODN (ALFA,GAMA,K,I2);                                                  00B:0012:0
PRODN (BETA,GAMA,C1,I2);                                                 00B:0016:0
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO FOR J:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                  00B:001A:0
BEGIN                                                                    00B:0023:0
AZERO[0,I,J]:=-K[I,J];                                               3   00B:0023:0
AUM[0,I,J]:=-C1[I,J];                                                    00B:0026:3
ALFA[I,J]:=-ALFA[I,J];                                                   00B:002E:0
BETA[I,J]:=-BETA[I,J];                                                   00B:0030:4
END;                                                                     00B:0033:2
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO FOR J:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO              3   00B:0034:2
IF I = J THEN BIJ[0,0,I,J]:=1 ELSE BIJ[0,0,I,J]:=0;                      00B:0030:2
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                             00B:0046:5
BEGIN                                                                    00B:0040:4
PROD1 (AZERO,J,AUM,J-1,ALFA,I2);                                     3   00B:0040:4
PROD1 (AUM,J,AUM,J-1,BETA,I2);                                           00B:0055:0
PROD1 (BETAT,1,AUM,J-1,GAMA,I2);                                         00B:0050:2
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                00B:0064:0
BEGIN                                                                    00B:0060:0
AUM[J,K2,K3]:=AZERO[J-1,K2,K3]+AUM[J,K2,K3];                         4   00B:0060:0
BIJ[J,0,K2,K3]:=BETAT[1,K2,K3];                                          00B:0076:4
END;                                                                     00B:0070:1
END;                                                                 4   00B:0070:1
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N-1 DO FOR J:=I STEP 1 UNTIL N-1 DO            3   00B:0070:4
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                             00B:0046:5
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                             00B:00AB:2
```


unesp

```
END CALCULOCOEFICIENTE2;                                                    00B:002A:4
                                                    CALCULOCOEFICIENTE2(00B) IS 00A7 LONG
                                                                  2         003:0016:0
PROCEDURE RESOLUCAOGAUSSPIVOTAMENTO (A,B,C,N);                              003:0016:0
INTEGER N;                                                                  003:0016:0
  ARRAY A[*,*],B,C[*];                                                      003:0016:0
BEGIN                                                                       003:0016:0
REAL  TOL,BIGA,SAVE;                                                        003:0016:0
                                                  RESOLUCAOGAUSSPIVOTAMENTO IS SEGMENT 000C
INTEGER I,J,IMAX,K,IX,JX,J1;                                      2         00C:0000:0
LABEL L1;                                                                   00C:0000:0
WRITE (ESCREVER,<"RESOLUCAO GAUSS PIVOTAMENTO">);                           00C:0000:0
TOL:=0;                                                                     00C:0005:3
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                                00C:0006:1
 BEGIN                                                                      00C:000B:0
 BIGA:=0;                                                         3         00C:000B:0
 FOR I:=J STEP 1 UNTIL N-1 DO                                               00C:000B:4
  IF ABS(BIGA) < ABS(A[I,J])                                                00C:000F:5
  THEN BEGIN BIGA:=A[I,J]; IMAX:=I; END;                                    00C:0012:4
   IF ABS(BIGA) <= TOL                                            4         00C:0015:0
   THEN BEGIN                                                               00C:0015:4
   WRITE (ESCREVER,<X5,"O SISTEMA NAO TEM SOLUCAO POR TER ZERO      4         00C:0019:4
NA DIAGONAL PRINCIPAL">);                                                   00C:0018:3
   GO TO L1;                                                                00C:001F:1
   END;                                                                     00C:001F:4
 FOR K:=J STEP 1 UNTIL N-1 DO                                      4         00C:001F:4
BEGIN                                                                       00C:0023:5
SAVE:=A[J,K];                                                     4         00C:0023:5
A[J,K]:=A[IMAX,K];                                                          00C:0026:2
A[IMAX,K]:=SAVE;                                                            00C:002A:5
A[IMAX,K]:=SAVE;                                                            00C:002D:4
A[J,K]:=A[J,K]/BIGA;                                                        00C:0030:3
END;                                                                        00C:0035:3
SAVE:=B[IMAX];                                                    4         00C:0036:0
B[IMAX]:=B[J];                                                              00C:003F:4
B[J]:=SAVE/BIGA;                                                            00C:003A:2
IF J = N-1 THEN                                                             00C:0036:4
 FOR J1:=N-2 STEP -1 UNTIL 0 DO                                             00C:0030:5
FOR K:=N-1 STEP -1 UNTIL J1+1 DO                                            00C:0042:5
   B[J1]:=B[J1]-A[J1,K]*B[K]                                                00C:0047:2
ELSE                                                                        00C:0040:4
FOR IX:=J+1 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                             00C:004E:3
BEGIN                                                                       00C:0053:5
FOR JX:=J+1 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                   4         00C:0053:5
A[IX,JX]:=A[IX,JX]-A[J,JX]*A[IX,J];                                         00C:0056:2
B[IX]:=B[IX]-B[J]*A[IX,J];                                                  00C:0061:4
END;                                                                        00C:0067:5
END;                                                              4         00C:0068:2
L1:                                                               3         00C:0068:5
END RESOLUCAOGAUSSPIVOTAMENTO;                                              00C:0068:5
                                                RESOLUCAOGAUSSPIVOTAMENTO(00C) IS 006C LONG
                                                                  2         003:0016:0
PROCEDURE CALCULOCOEFICIENTES (A,B,C,N);                                    003:0016:0
INTEGER N;                                                                  003:0016:0
ARRAY A,B,C[*];                                                             003:0016:0
BEGIN                                                                       003:0016:0
INTEGER I,J,R,I1,I2;                                                        003:0016:0
                                                  CALCULOCOEFICIENTES IS SEGMENT 000D
ARRAY C1[0:N-1],E,G[0:N-1,0:N-1];                                 2         00D:0000:0
REAL Q1;                                                                    00D:0006:3
```

```
                                                                                                                    00D:000E:0
   BEGIN                                                                                                            00D:0012:5
   E[I,0]:=1.;                                                                                          3           00D:0012:5
   Q1:=N+I+1;                                                                                                       00D:0015:1
   A[I]:=1./Q1;                                                                                                     00D:0016:5
   FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N-1 Dn                                                                                     00D:001A:4
   BEGIN                                                                                                            00D:001F:3
   E[I,J]:=1.;                                                                                          4           00D:001F:3
   FOR R:=1 STEP 1 UNTIL J DO                                                                                       00D:0022:1
   E[I,J]:=E[I,J]*(-1)**J*(N+I-R+1);                                                                                00D:0026:4
   END;                                                                                                             00D:0029:2
   END;                                                                                                 4           00D:0029:5
   RESOLUCAOGAUSSPIVOTAMENTO (r,A,C1,N);                                                                3           00D:002E:2
   FOR I:=0 STEP 1 UNTIL N-2 Dn                                                                                     00D:0031:5
   BEGIN                                                                                                            00D:0036:5
   G[I,0]:=1.;                                                                                          3           00D:0036:5
   Q1:=(N+I+1)*(N+I+2);                                                                                             00D:0039:1
   C[I]:=1./Q1;                                                                                                     00D:003C:2
   FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N-1 Dn                                                                                     00D:003F:4
   BEGIN                                                                                                            00D:0044:3
   G[I,J]:=1.;                                                                                          4           00D:0044:3
   FOR R:=0 STEP 1 UNTIL J-1 Dn      G[I,J]:=G[I,J]*(N+I-R);                                                        00D:0047:1
   END;                                                                                                             00D:0050:3
   END;                                                                                                 4           00D:0051:0
G[N-1,N-1]:=1.;                                                                                         3           00D:0051:3
C[N-1]:=(-1)**(N-1)*A[N-1]/2.;                                                                                      00D:0054:4
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL N-2 DO G[N-1,I]:=0;                                                                           00D:005B:2
   RESOLUCAOGAUSSPIVOTAMENTO (G,C,C1,N);                                                                            00D:0062:5
   FOR R:=0 STEP 1 UNTIL N-2 Dn B[R]:=A[R]-(-1)**R*C[R];                                                            00D:0066:2
 B[N-1]:=A[N-1]/2.;                                                                                                 00D:0071:4
END CALCULOCOEFICIENTES;                                                                                            00D:0076:2

                                                                                CALCULOCOEFICIENTES(00D) IS 007C LONG
                                                                                                        2           003:0016:0
 PROCEDURE DRFR (F1,D13,DR,TAU,I2,N,K,C1,M,I3);                                                                     003:0016:0
ARRAY    D13,K,C1,M,DR[*,*],F1[*,*,*];                                                                              003:0016:0
INTEGER I2,N,I3;                                                                                                    003:0016:0
REAL TAU;                                                                                                           003:0016:0
BEGIN                                                                                                               003:0016:0
ARRAY A,B,C[0:N-1],BIJ[0:N-1,0:N-1,0:I2,0:I2],D10,D11[0:2*I2+1,0:2*I2                                               003:0016:0
                                                                                                DRFR IS SEGMENT 000F
+1],AZERO,AUM[0:N-1,0:I2,0:I2];                                                                         2           00F:0006:2
INTEGER    I,J,K2,K3,K4,K5;                                                                                         00F:0016:3
WRITE (ESCREVER,<"DRDF">);                                                                                          00F:0016:3
CALCULOCOEFICIENTES (A,B,C,N);                                                                                      00F:0019:0
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                                                                        00F:001F:1
WRITE (ESCREVER,<"ABC",3E15.6>,A[I],B[I],C[I]);                                                                     00F:0024:0
CALCULOCOEFICIENTE2 (AZERO,AUM,BIJ,I2,N,K,C1,M);                                                                    00F:0037:4
WRITE (ESCREVER,<"  AZERO">);                                                                                       00F:0040:0
WRITE (ESCREVER,<4F15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                                              00F:0045:3
   FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 Dn                                                                                     00F:0052:3
   FOR K4:=0 STEP 1 UNTIL I2 Dn AZERO[K2,K3,K4]);                                                                   00F:0057:0
WRITE (ESCREVER,<"  AUM ">);                                                                                        00F:0064:1
WRITE (ESCREVER,<4F15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                                              00F:0069:4
   FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 Dn                                                                                     00F:0076:4
   FOR K4:=0 STEP 1 UNTIL I2 Dn AUM  [K2,K3,K4]);                                                                   00F:007B:1
WRITE (ESCREVER,<"  BIJ ">);                                                                                        00F:0088:1
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR I:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                                               00F:008D:4
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                                                                       00F:009A:4
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO FOR K4:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                                           00F:009F:3
BIJ[I,K2,K3,K4]);                                                                                                   00F:00A8:3
```

```
                                                                    00F:0047:0
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO                                     3  00F:0047:0
FOR K3:=0  STEP 1 UNTIL I3 DO                                       00F:0088:3
F1[J,K2,K3]:=0;                                                     00F:00C0:0
FOR I:=J STEP 1 UNTIL N-1 DO                                        00F:00C4:4
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                        00F:00C8:5
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                        00F:00C0:2
BEGIN                                                               00F:0001:5
F1[J,K2,K3]:=F1[J,K2,K3]+TAU**(I+2)*B[I]*BIJ[I,J,K2,K3];         4  00F:0001:5
K4:=K2+I2+1;                                                        00F:00D0:1
K5:=K3+I2+1;                                                        00F:00D8:0
F1[J,K2,K5]:=F1[J,K2,K5]+TAU**(I+2)*C[I]*BIJ[I,J,K2,K3];            00F:00E0:5
F1[J,K4,K3]:=F1[J,K4,K3]+TAU**(I+1)*A[I]*BIJ[I,J,K2,K3];            00F:00E8:1
F1[J,K4,K5]:=F1[J,K4,K5]+(-1)**I*TAU**(I+1)*A[I]*BIJ[I,J,K2,K3];    00F:00F7:2
END;                                                                00F:0104:2
END;                                                             4  00F:0105:5
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                     3  00F:0106:2
WRITE (ESCREVER,< " F1 ",4E15.6>,F1[J,0,0],F1[J,0,1],F1[J,1,0],     00F:0108:1
F1[J,1,1]);                                                         00F:0121:0
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                        00F:0129:4
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                        00F:012E:1
BEGIN                                                               00F:0132:4
K4:=K2+I2+1;                                                     3  00F:0132:4
K5:=K3+I2+1;                                                        00F:0134:3
D11[K2,K3]:=D11[K4,K5]:=D10[K2,K3]:=D10[K4,K5]:=M[K2,K3];           00F:0136:2
D11[K2,K5]:=D11[K4,K3]:=D10[K4,K3]:=0;                              00F:013E:2
D10[K2,K5]:=TAU*M[K2,K3];                                           00F:0143:0
END;                                                                00F:0147:0
WRITE (ESCREVER,<" D10 D11">);                                   3  00F:0148:0
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO               00F:014D:3
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO D10[K2,K3]);                           00F:015A:1
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO               00F:0166:1
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO D11[K2,K3]);                           00F:0172:5
WRITE (ESCREVER,<" TESTE DO LOOP">);                                00F:017F:1
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                        00F:0184:4
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                                        00F:0189:3
FOR K3:=0 STEP J UNTIL I2 DO                                        00F:018E:0
BEGIN                                                               00F:0192:3
K4:=K2+I2+1;                                                     3  00F:0192:3
K5:=K3+I2+1;                                                        00F:0194:2
D11[K2,K3]:=D11[K2,K3]-TAU**(I+2)*C[I]*AZERO[I,K2,K3];              00F:0196:1
D11[K2,K5]:=D11[K2,K5]-TAU**(I+2)*C[I]*AUM[I,K2,K3];                00F:019D:2
D11[K4,K3]:=D11[K4,K3]+(-1)**(I+1)*TAU**(I+1)*A[I]*AZERO[I,K2,K3];  00F:01A4:3
D11[K4,K5]:=D11[K4,K5]+(-1)**(I+1)*TAU**(I+1)*A[I]*AUM[I,K2,K3];    00F:01AD:4
D10[K2,K3]:=D10[K2,K3]+TAU**(I+2)*B[I]*AZERO[I,K2,K3];              00F:01B6:5
D10[K2,K5]:=D10[K2,K5]+TAU**(I+2)*B[I]*AUM[I,K2,K3];                00F:01BE:0
D10[K4,K3]:=D10[K4,K3]+TAU**(I+1)*A[I]*AZERO[I,K2,K3];              00F:01C5:1
D10[K4,K5]:=D10[K4,K5]+TAU**(I+1)*A[I]*AUM[I,K2,K3];                00F:01CC:1
END;                                                                00F:01D3:1
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO            3  00F:01D4:4
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO D10[K2,K3]);                           00F:01E1:2
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO               00F:01ED:4
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO D11[K2,K3]);                           00F:01FA:2
INVERMATRIZ (D13,D11,I3);                                           00F:0206:4
PRODN (DR,D13,D10,I3);                                              00F:0209:5
WRITE (ESCREVER,<" DR",4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO         00F:020E:1
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO DR[K2,K3]);                            00F:021A:5
END PROCEDURE DRUF;                                                 00F:0226:1
                                                                 DRFR(00F) TS 0242 LONG
                                                                 2  003:0016:0
```

```
BOOLEAN BL;                                                          003:0016:0
ARRAY R12[*,*];                                                      003:0016:0
INTEGER I4,I3,I2;                                                    003:0016:0
REAL TAU;                                                            003:0016:0
BEGIN                                                                003:0016:0
ALPHA ARRAY GRAFO [0:50,0:120];                                      003:0016:0
                                                    GRAFICO IS SEGMENT 00010
ARRAY R13[-2:120,0:511];                                 2           010:0003:0
INTEGER K2,I,J,J1,IV;                                                010:0006:0
REAL BIGA,INTER;                                                     010:0006:0
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL (I3-1)/2 DO                                    010:0006:0
BEGIN                                                                010:0008:2
WRITE (ESCREVER [SKIP 1]);                               3           010:0008:2
WRITE (ESCREVER,<X20,"DESLOCAMENTO CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO",  010:0010:3
I3//>,J);                                                            010:0012:2
WRITE (ESCREVER,<X10,5E15.6>,FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I4 DO R12[I,J]);  010:001E:4
END;                                                                 010:0033:4
FOR J:=(I3-1)/2+1 STEP 1 UNTIL I3 DO                     3           010:0034:1
BEGIN                                                                010:0039:3
WRITE (ESCREVER [SKIP 1]);                               3           010:0039:3
WRITE (ESCREVER,<X20,"VELOCIDADE CORRESPONDENTE A VARIAVEL NUMERO",I3  010:003E:4
//>,J);                                                              010:0040:3
WRITE (ESCREVER,<X10,5E15.6>,FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I4 DO R12[I,J]);  010:0046:4
END;                                                                 010:0061:4
FOR IV:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO                             3           010:0062:1
BEGIN                                                                010:0066:4
BIGA:=0;                                                 3           010:0066:4
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I4 DO                                         010:0067:2
IF ABS(BIGA) < ABS(R12[K2,IV])                                       010:006B:5
THEN BIGA:=R12[K2,IV];                                               010:006E:4
INTER:=(I4+1)/100;                                                   010:0073:0
J1:=INTER;                                                           010:0074:4
FOR I:=0 STEP J1 UNTIL I4 DO R13[I/J1,IV]:=R12[I,IV];                010:0075:2
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 50 DO                                          010:0081:4
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 120 DO GRAFO[I,J]:=" ";                        010:0082:2
IF IV > (I3-1)/2 THEN                                                010:0089:3
BEGIN                                                                010:008B:1
INTER:=BIGA/24.;                                         4           010:008B:4
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I4/J1 DO                                      010:008D:4
BEGIN                                                                010:0092:4
I:=R13[K2,IV]/INTER;                                     5           010:0092:4
GRAFO[25-I,K2]:=".";                                                 010:0095:2
END;                                                                 010:0097:4
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 50 DO GRAFO[I,0]:="*";             5           010:0098:1
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 120 DO GRAFO [25,I]:="*";                      010:009C:5
FOR I:=9 STEP 10 UNTIL 120 DO GRAFO [25,I]:="I";                     010:00A1:4
FOR I:=9 STEP 10 UNTIL 50 DO GRAFO[I,0]:= GRAFO[I,1]:="-";           010:00A6:5
GRAFO[24,100]:="T";                                                  010:00AD:1
GRAFO[24,101]:="E";                                                  010:00AF:0
GRAFO[24,102]:="M";                                                  010:00B0:5
GRAFO[24,103]:="P";                                                  010:00B2:4
GRAFO[24,104]:="O";                                                  010:00B4:3
END                                                                  010:00B6:2
ELSE                                                     4           010:00B6:2
BEGIN                                                                010:00B6:2
INTER:=BIGA/49.;                                         4           010:00B6:5
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I4/J1 DO                                      010:00B9:4
BEGIN                                                                010:00BE:4
I:=R13[K2,IV]/INTER;                                     5           010:00BE:4
GRAFO [49-I,K2]:=".";                                                010:00C1:2
```

```
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 50 DO GRAFO[I,0]:="*";                                    010:0009:0
FOR I:=9 STEP 10 UNTIL 120 DO GRAFO [49,I]:="I";                                010:00CD:4
FOR I:=9 STEP 10 UNTIL 50 DO GRAFO[I,0]:= GRAFO[I,1]:="-";                      010:0002:5
GRAFO[48,100]:="T";                                                             010:0079:1
GRAFO[48,101]:="E";                                                             010:000B:0
GRAFO[48,102]:="M";                                                             010:00DC:5
GRAFO[48,103]:="P";                                                             010:00DE:4
GRAFO[48,104]:="O";                                                             010:00E0:3
END;                                                                            010:00E2:2
GRAFO[0,2]:="F";                                                          4     010:00E2:2
GRAFO[0,3]:="U";                                                                010:00E4:0
GRAFO[0,4]:="N";                                                                010:00E5:4
GRAFO[0,5]:="C";                                                                010:00E7:2
GRAFO[0,6]:="A";                                                                010:00E9:0
GRAFO[0,7]:="O";                                                                010:00EA:4
WRITE (ESCREVER [SKIP 1]);                                                      010:00EC:2
WRITE (ESCREVER,<X1,"X",F8.3>,TNTER*10);                                        010:00F1:3
WRITE (ESCREVER,<X3,120A1>,FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 49  DO                         010:00F4:4
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 119 DO GRAFO[I,J]);                                       010:0108:3
WRITE (ESCREVER,<X100,"X",F8.3>,TAU*J1*10);                                     010:0114:4
END DE IV;                                                                      010:0123:4
END GRAFICO;                                                              3     010:0124:1
                                                                    GRAFICO(010) IS 0137 LONG
                                                                          2     003:0016:0
PROCEDURE ALGORITIMO (I2,I3,N,I4,TAU,RZERO,R12,BL);                             003:0016:0
BOOLEAN BL;                                                                     003:0016:0
INTEGER I2,I3,N,I4;                                                             003:0016:0
REAL TAU;                                                                       003:0016:0
ARRAY RZERO[*],R12[*,*];                                                        003:0016:0
BEGIN                                                                           003:0016:0
ARRAY F1[0:N-1,0:I3,0:I3],      F2,DF,R10[0:I3],FJ[0:N-1,0:I3],DR,D13           003:0016:0
                                                                  ALGORITIMO IS SEGMENT 00011
[0:I3,0:I3],K,C1,M[0:I2,0:I2];                                            2     011:000D:3
INTEGER K2,K3,K4,K5,I,J;                                                        011:0017:0
WRITE (ESCREVER,<"ALGORITIMO">);                                                011:0017:0
COEFICIENTESENTRADA (K,C1,M);                                                   011:0010:3
DRER (F1,D13,DR,TAU,I2,N,K,C1,M,I3);                                            011:001F:4
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                           011:0027:3
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO K  [K2,K3]);                                       011:0034:1
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                           011:0040:1
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO C1 [K2,K3]);                                       011:0046:5
WRITE (ESCREVER,<4E15.6>,FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO                           011:0059:1
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I2 DO M  [K2,K3]);                                       011:0065:5
FOR K2:=0 STEP 1 UNTIL I4 DO                                                    011:0072:1
BEGIN                                                                           011:0076:4
FUNCAOENTRADA (FJ,K2,I2,TAU,BL);                                          3     011:0076:4
FOR K3:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO F2[K3]:=0;                                         011:007A:1
FOR J:=0 STEP 1 UNTIL N-1 DO                                                    011:0080:2
FOR K4:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO                                                    011:0085:1
FOR K5:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO                                                    011:0089:4
F2[K4]:=F2[K4]+F1[J,K4,K5]*FJ[J,K5];                                            011:008E:1
PRODMV (DF,D13,F2,I3);                                                          011:0094:0
PRODMV (R10,DR,RZERO,I3);                                                       011:0097:2
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I3 DO                                                     011:009A:5
R12[K2,I]:=RZERO[I]:= R10[I]+DF[I];                                             011:009F:2
END;                                                                            011:00A5:2
END ALGORITIMO;                                                           3     011:00A5:5
                                                                  ALGORITIMO(011) IS 00B2 LONG
                                                                          2     003:0016:0
```

0197 0200

FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETÁ BIBLIOTECA

```
                                                                                003:0015:0
    WRITE (ESCREVER,<"PRINCIPAL">);                                             003:0015:3
    INSTANTEINICIAL:=0;                                                         003:0016:1
    INSTANTEFINAL:=0,01;                                                        003:0016:3
    GRAUPOLINOMIO:=5;                                                           003:0017:2
    NUMERODIVISOES:=100;                                                        003:0020:1
    NUMEROVARIAVEIS:=1;                                                         003:0020:5
    I2:=NUMEROVARIAVEIS-1;                                                      003:0021:5
    I3:=2*I2+1;                                                                 003:0023:4
    N:=(GRAUPOLINOMIO+1)/2;                                                     003:0025:3
    I4:=NUMERODIVISOES-1;                                                       003:0026:5
    BEGIN                                                                       003:0026:5
    BOOLEAN BL;                                                    2            003:0026:5
                                                                  'B.0001 IS SEGMENT 00012
    ARRAY RZERO[0:I3],R12[0:I4,0:I3];                                           012:0000:0
    DEFINE SOLUCAO =                                                            012:0007:0
    TAU:=(INSTANTEFINAL-INSTANTEINICIAL)/I4;                                    012:0007:0
    CONDICOESINICIAIS (RZERO);                                                  012:0007:0
    BL:=TRUE;                                                                   012:0007:0
    ALGORITIMO (I2,I3,N,I4,TAU,RZERO,R12,BL);                                   012:0007:0
    GRAFICO (R12,I4,I3,I2, TAU,BL);                                             012:0007:0
    WRITE (ESCREVER (SKIP 1));                                                  012:0007:0
    CONDICOESINICIAIS (RZERO);                                                  012:0007:0
    BL:=FALSE;                                                                  012:0007:0
    ALGORITIMO (I2,I3,N,I4,TAU,RZERO,R12,BL);                                   012:0007:0
    GRAFICO (R12,I4,I3,I2, TAU,BL);                                             012:0007:0
    #;                                                                          012:0007:0
    INSTANTEFINAL:=0,1;                                                         012:0007:0
    SOLUCAO                                                                     012:0009:3
    INSTANTEFINAL:=0,5;                                                         012:0026:3
    SOLUCAO                                                                     012:0027:5
    END;                                                                        012:0044:5
                                                                  B.0001(012) IS 004A LONG
    END.                                                           2            003:0027:3
                                                                  B.0000(003) IS 004B LONG
                                                                        DATA IS 0080 LONG

NUMBER OF ERRORS DETECTED = 0000.
NUMBER OF SEGMENTS = 016.  TOTAL SEGMENT SIZE = 001979 WORDS.  CORE ESTIMATE = 005075 WORDS.  STACK ESTIMATE=000077
PROGRAM SIZE = 000489 CARDS, 004667 SYNTACTIC ITEMS, 000132 DISK SEGMENTS.
PROGRAM FILE NAME:  EIR.
COMPILATION TIME = 90,717 SECONDS ELAPSED:  6,921 SECONDS PROCESSING;  10,481 SECONDS I/O.
```

