



IFT, TD - 11/87

JUAN CARLOS MONTERO GARCIA

21

QUEBRA DINÂMICA DA SIMETRIA QUIRAL EM TEORIAS  
VETORIAIS: QED E QCD



Dissertação de Doutorado  
apresentada no  
Instituto de Física Teórica

Orientador: Professor Vicente Pleitez

São Paulo

Setembro de 1987

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Vicente Pleitez pela orientação e empenho neste trabalho e também pela dedicação e amizade.

Ao Dr. Carlos Ourivio Escobar pelo interesse demonstrado e discussões.

Ao Dr. Adriano A. Natale pelas discussões no início deste projeto e interesse.

Ao Instituto de Física Teórica pela acolhida.

Aos amigos do IFT pelo dia a dia.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Em particular agradeço à Rose pelo incentivo e presença constantes.

## RESUMO

Estuda-se a Quebra Dinâmica da Simetria Quiral (QDSQ) em duas teorias vetoriais: a Eletrodinâmica Quântica (QED) e a Cromodinâmica Quântica (QCD), através de uma abordagem variacional do Potencial Efetivo para operadores compostos. Estuda-se a energética do problema calculando o Potencial Efetivo com as soluções assintóticas não perturbativas, da equação de Schwinger-Dyson para a autoenergia dos fermions.

## ABSTRACT

Using a variational approach for the Effective Potential for composite operators we discuss the dynamical breakdown of chiral symmetry in two vectorial theories: Quantum Electrodynamics (QED) and Quantum Chromodynamics (QCD). We study the energetic aspects of the problem calculating the Effective Potential with the asymptotic non-perturbative solutions of the Schwinger-Dyson equation for the fermion selfenergy.

## Í N D I C E

INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I - FORMALISMO: AÇÃO E POTENCIAL EFETIVOS	
1. A Ação Efetiva para Operadores Compostos .....	6
2. O Potencial Efetivo .....	12
3. Os Pontos Estacionários do Potencial Efetivo .....	14
CAPÍTULO II - ESTUDO DA TEORIA ABELIANA: A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA	
4. A Lagrangeana e as Regras de Feynman .....	16
5. A Equação de Schwinger-Dyson para $\sum(p)$ .....	18
6. A Equação Diferencial para $\sum(p)$ ..	21
7. Solução da Equação Diferencial Linearizada e Soluções Assintóticas ...	23
8. Ansatz para $\sum(p)$ e Cálculo Variacional .....	27
9. O Potencial Efetivo e o Ansatz Variacional .....	29
10. Finitude do Potencial Efetivo .....	40
11. A Estabilidade do Vácuo e as Soluções Assintóticas Regular e Irregular .....	42

12. Estudo da Transição de Fase Quiral ...	47
13. O Potencial Efetivo e o Método Variacional .....	52
14. Resultados em Quebra Dinâmica da Simetria Quiral na QED .....	57
CAPÍTULO III - ESTUDO DA TEORIA NÃO-ABELIANA: A CROMODINÂMICA QUÂNTICA (QCD)	
15. A Lagrangeana e as Regras de Feynman .....	60
16. A Equação de Schwinger-Dyson, Soluções Assintóticas e Ansatz Variacional para $\sum(p)$ .....	63
17. O Potencial Efetivo e o Ansatz Variacional .....	68
18. O Potencial Efetivo e a Transição de Fase Quiral .....	74
19. Estudo da Quebra Dinâmica da Simetria Quiral .....	81
20. Representações Exóticas .....	99
CONCLUSÃO .....	103
APÊNDICE A .....	109
APÊNDICE B .....	112
APÊNDICE C .....	115
APÊNDICE D .....	117
APÊNDICE E .....	122
REFERÊNCIAS .....	125

## INTRODUÇÃO

O conceito de quebra espontânea de simetria (QES) é de fundamental importância no contexto das teorias de gauge. A maneira usual de realizar a QES tem por base a existência de escalares fundamentais que adquirem um valor esperado no vácuo (VEV) não nulo. Este é o modo simples de gerar as massas da teoria que ainda preserva a renormalizabilidade. A questão central envolvendo tal mecanismo é a existência ou não dessa partícula escalar, denominada "boson de Higgs", que até agora carece de comprovação experimental. Uma alternativa à QES com escalares fundamentais é a chamada quebra dinâmica de simetria (QDS). Nesta última, a própria dinâmica da teoria daria origem a um operador composto que teria um VEV diferente de zero. A QDS resultaria ser mais econômica do ponto de vista de que esta não necessita da inclusão de uma nova partícula fundamental.

As idéias básicas da QSD foram introduzidas por Nambu e Jona-Lasinio (Nambu et al-61) ao sugerir que a quebra da simetria quiral teria origem dinâmica em estreita analogia com o fenômeno da supercondutividade. Eles estudaram um modelo não renormalizável, com uma interação quártica fermiônica, gerando dinamicamente massa ao fermion e um estado ligado, fermion-antifermion, pseudoescalar sem massa. Pouco depois, J. Schwinger (Schwinger-62) construiu um modelo em (1+1) dimensões que é uma eletrodinâmica spinorial sem massa. Nessa teoria ele mostrou como um boson

vetorial aparentemente sem massa pode, devido à dinâmica, tornar-se massivo. Devido às peculiaridades do modelo, é novamente a simetria quiral que é quebrada dinamicamente. Posteriormente, R. Jackiw e K. Johnson (Jackiw et al-73) (JJ) e quase simultaneamente J. M. Cornwall e R. N. Norton (Cornwall et al-73) (CN) formularam modelos em 4 dimensões para o estudo de propriedades dinâmicas. O modelo de CN é descrito pela densidade de Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_0)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^2 + g\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu + g'\bar{\Psi}\gamma_\mu\tau_2\Psi B^\mu$$

onde  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  e  $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ . Como resultado da quebra dinâmica da simetria  $\Psi \rightarrow e^{i\tau_2\Theta}\Psi$ , o boson vetorial  $B^\mu$  torna-se massivo e é removida a degenerescência na massa dos fermions. Jackiw e Johnson estudaram uma teoria tipo eletrodinâmica sem massa com um termo de interação  $g i \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi A_\mu$ . Eles mostraram que este modelo renormalizável é capaz de gerar massa dinamicamente para o fermion e para o boson axial-vetorial, quebrando a simetria de gauge, constituindo-se em uma generalização do modelo proposto por Nambu e Jona-Lasinio.

Neste trabalho, estuda-se a quebra dinâmica da simetria quiral (QDSQ) em teorias vetoriais em 4 dimensões. Em particular, estuda-se a QDSQ dessas teorias cujas Lagrangeanas são invariantes por transformações quirais globais. Neste caso, além da corrente vetorial, tem-se também a conservação de uma corrente axial  $j_\mu^5$ , a menos da anomalia de Adler-Bell-Jackiw (Adler-70).

É sabido que um termo de massa para os fermions,

$\bar{\Psi}M\Psi$ , quebra explicitamente a simetria quiral uma vez que  $\{M, \gamma_5\}_+ \neq 0$ . A quebra dinâmica da simetria quiral é o mecanismo pelo qual a própria dinâmica da teoria é capaz de gerar um termo que quebra essa simetria. Assim, o objeto a ser estudado é, por exemplo, o propagador completo dos fermions  $G(p)$ . Mais especificamente, deve-se analisar a equação de Schwinger-Dyson (SD) para a autoenergia dos fermions procurando pela existência de um termo de quebra do tipo  $\{\Sigma_Q, \gamma_5\}_+ \neq 0$ . Neste caso  $\Psi^\mu \Gamma_\mu^5 = \{\Sigma_Q, \gamma_5\} \neq 0$ , ou seja, a corrente axial não é mais conservada.

No âmbito da quebra dinâmica da simetria quiral, a existência de um termo de quebra de simetria,  $\Sigma_Q$ , deve estar associado a existência de algum condensado. Assim, a solução da equação de Schwinger-Dyson,  $\Sigma_Q$ , deve corresponder a uma solução de "estado ligado". De fato, para as teorias em estudo, é possível mostrar que tais soluções da equação de SD correspondem a soluções da equação de Bethe-Salpeter (Pagels-73,79, Lane-74).

Para nossos propósitos, consideramos a equação de SD em um conjunto de aproximações que permite a obtenção de soluções assintóticas. Para a teoria abeliana QED somos capazes de obter as soluções assintóticas diretamente da equação diferencial que deriva da equação original de SD. Para a teoria não abeliana QCD, têm sido encontradas soluções via expansão de produto de operadores (OPE) (Lane-74, Politzer-76) que levam em conta a dependência da constante de acoplamento com a energia. Tais soluções estão de acordo com a equação diferencial correspondente para grandes momentos. Para ambas teorias, as soluções da equação

de SD são do tipo dito Regular e Irregular. Essa classificação reflete o seu comportamento para grandes momentos (curtas distâncias). As regulares decrescem rapidamente enquanto as irregulares decrescem mais lentamente com o aumento do momento.

Abordamos o problema da quebra dinâmica da simetria quiral através do cálculo do Potencial Efetivo (PE). A motivação para a utilização do potencial efetivo é a seguinte: mesmo que seja possível encontrar soluções não triviais para a equação de SD, tais que quebrem a simetria quiral, é necessário assegurar-se de que tais soluções são energeticamente preferidas à solução trivial e se este for o caso, verificar qual delas leva a um vácuo mais estável. Também, o PE permite verificar se a teoria apresenta transição de fase quiral. Havendo transição de fase, pode-se determinar a constante de acoplamento crítico, para ter uma indicação da escala de energia em que esta ocorre, para cada solução.

Neste problema consideramos duas Ações Efetivas (AF) para operadores compostos até o nível de 2-loops. As obtidas por Cornwall, Jackiw e Tomboulis (CJT) (Cornwall et al-74) e por Casalbuoni, Dominici, De Curtis e Gatto (CDDG) (Casalbuoni et al-84). A ação efetiva de CDDG é obtida da ação efetiva de CJT, mediante certa manipulação algébrica envolvendo a fonte bilocal, entretanto, as duas ações efetivas são equivalentes nos pontos estacionários. Também, introduz-se um método variacional com o intuito de substituir variações gerais de  $\sum_Q$  pelas de um parâmetro variacional a ser fixado pelos pontos estacionários do potencial efetivo.

Para ambas as teorias, QED e QCD, calculamos o potencial efetivo para as soluções regular e irregular pesquisando a quebra dinâmica da simetria quiral e a existência de transição. Para a QCD também estudamos a estrutura da QDSQ para outras representações dos fermions além da fundamental (Marciano-80).

Uma revisão geral do problema da quebra da simetria quiral e da quebra dinâmica de simetria encontra-se na leitura de M. E. Peskin em *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, editado por J. B. Zuber e R. Stora (Elsevier, Amsterdam, 1984) e na coletânea: *Dynamical Symmetry Breaking*, editada por E. Farhi e R. Jackiw (World Scientific, Singapore, 1982).

## CAPÍTULO I

### FORMALISMO: AÇÃO E POTENCIAL EFETIVOS

## 1. A AÇÃO EFETIVA PARA OPERADORES COMPOSTOS

A ação efetiva (AE) para operadores compostos  $\Gamma(\Psi, G)$  é uma generalização da ação efetiva usual  $\Gamma(\Psi)$ . A ação efetiva  $\Gamma(\Psi, G)$  constituiu-se numa extensão para fontes bilocais, implementada por uma dupla transformação de Legendre na função geratriz das funções de Green conexas. Assim, a ação efetiva  $\Gamma(\Psi, G)$  depende de  $\Psi(x)$  que é um possível valor esperado no vácuo do campo quântico  $\Psi(x)$ , e também de  $G(x, y)$ , um possível valor esperado no vácuo, não trivial de  $T \Psi(x) \Psi(y)$ .

Uma vez que as soluções físicas devem ser tais que:

$$\frac{\delta \Gamma(\Psi, G)}{\delta \Psi(x)} = -J(x) + \int dy K(x, y) \Psi(y) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\delta \Gamma(\Psi, G)}{\delta G(x, y)} = \hbar K(x, y) = 0, \quad (1.1a)$$

a ação efetiva para operadores compostos é especialmente adaptada ao estudo da quebra dinâmica de simetrias pois mesmo que (1.1) tenha apenas a solução  $\Psi(x) = 0$ , podemos ter uma solução que quebre a simetria para algum  $G(x, y) \neq 0$  que verifique (1.1a). Nas expressões (1.1),  $J(x)$  é a fonte local que se acopla a  $\Psi(x)$  e  $K(x, y)$  é a fonte bilocal que se acopla a  $\Psi(x) \Psi(y)$ .

A ação efetiva para operadores compostos foi obtida por Cornwall, Jackiw e Tomboulis (Cornwall et al-74)

até o nível de dois loops e para fermions é dada por:

$$\Gamma'(\Psi, G) = I(\Psi) - i\hbar \text{Tr} \ln \bar{G}^{-1} - i\hbar \text{Tr} \bar{S}^{\dagger} G + \Gamma_2'(\Psi, G) + \text{cte} \quad (1.2)$$

onde  $I(\Psi)$  é a ação clássica,  $G$  é o propagador da teoria,  $S$  é a sua versão livre e as constantes arbitrárias independem de  $\Psi$  e  $G$ .  $\Gamma_2'(\Psi, G)$  é a soma dos diagramas do vácuo 2PI. Os outros termos em (1.2) constituem a parcela puramente fermiônica,  $\Gamma_f$ .

Podemos determinar as constantes em (1.2) observando que a ação usual  $\Gamma(\Psi)$  é obtida a partir de  $\Gamma'(\Psi, G)$  desligando a fonte bilocal  $K$ , ou equivalentemente,  $\Gamma(\Psi)$  é igual a  $\Gamma'(\Psi, G)$  para um certo  $G(x, y) = G_0$  tal que  $\delta \Gamma'(\Psi, G_0) / \delta G_0 = 0$ . Ou seja:

$$\Gamma(\Psi, G_0) = \Gamma(\Psi) \quad (1.3)$$

e logo

$$\frac{\delta \Gamma'(\Psi, G_0)}{\delta G_0} = \frac{\delta \Gamma(\Psi)}{\delta G_0} = 0. \quad (1.3a)$$

Com isto obtemos

$$\Gamma'(\Psi, G) = I(\Psi) - i\hbar \text{Tr} [\ln(S\bar{G}^{-1}) + \bar{S}^{\dagger} G - 1] + \Gamma_2'(\Psi, G). \quad (1.4)$$

Para nossos propósitos  $\Gamma'(\Psi, G) \equiv \Gamma(G)$  de modo que consideraremos a ação efetiva para operadores compostos dada por ( $\hbar = 1$ ):

até o nível de dois loops e para fermions é dada por:

$$\Gamma'(\Psi, G) = I(\Psi) - i\hbar \text{Tr} \ln \bar{G}^{-1} - i\hbar \text{Tr} \bar{S}^{\dagger} G + \Gamma_2'(\Psi, G) + \text{cte} \quad (1.2)$$

onde  $I(\Psi)$  é a ação clássica,  $G$  é o propagador da teoria,  $S$  é a sua versão livre e as constantes arbitrárias independem de  $\Psi$  e  $G$ .  $\Gamma_2'(\Psi, G)$  é a soma dos diagramas do vácuo 2PI. Os outros termos em (1.2) constituem a parcela puramente fermiônica,  $\Gamma_f'$ .

Podemos determinar as constantes em (1.2) observando que a ação usual  $\Gamma(\Psi)$  é obtida a partir de  $\Gamma'(\Psi, G)$  desligando a fonte bilocal  $K$ , ou equivalentemente,  $\Gamma(\Psi)$  é igual a  $\Gamma'(\Psi, G)$  para um certo  $G(x, y) = G_0$  tal que  $\delta \Gamma'(\Psi, G_0) / \delta G_0 = 0$ . Ou seja:

$$\Gamma(\Psi, G_0) = \Gamma(\Psi) \quad (1.3)$$

e logo

$$\frac{\delta \Gamma'(\Psi, G_0)}{\delta G_0} = \frac{\delta \Gamma(\Psi)}{\delta G_0} = 0. \quad (1.3a)$$

Com isto obtemos

$$\Gamma'(\Psi, G) = I(\Psi) - i\hbar \text{Tr} [\ln(S\bar{G}^{-1}) + \bar{S}^{\dagger} G - \mathbb{1}] + \Gamma_2'(\Psi, G). \quad (1.4)$$

Para nossos propósitos  $\Gamma'(\Psi, G) \equiv \Gamma(G)$  de modo que consideraremos a ação efetiva para operadores compostos dada por ( $\hbar = 1$ ):

$$\Gamma(G) = -i \text{Tr} [\ln(SG^{-1}) + S^{-1}G - 1] + \Gamma_2(G) \quad (1.5)$$

Calculemos desde a expressão (1.5) a relação:

$$K(x, y) = \frac{\delta \Gamma(G)}{\delta G} = -i(-G^{-1} + S^{-1}) + \frac{\delta \Gamma_2(G)}{\delta G}$$

de onde obtemos:

$$G^{-1} = S^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} - iK \quad (1.6)$$

A equação (1.6) mostra que a condição de estacionariedade (1.1a) ( $K = 0$ ) leva à equação de Schwinger-Dyson para o propagador fermiônico  $G$ . Neste caso escrevemos:

$$i \Sigma_{SD} = i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \quad (1.7)$$

onde  $\Sigma_{SD}$  é interpretado como sendo a autoenergia do fermion.

A seguir, consideraremos a ação efetiva para operadores compostos proposta por Casalbuoni, De Curtis, Dominici e Gatto (CDDG) (Casalbuoni et al-84). Antes de tudo, estabeleceremos a convenção de designar a ação efetiva de CJT por  $\Gamma^A$  e a de CDDG por  $\Gamma^B$ , sendo que estas ainda poderão ser  $\Gamma^{A,B'}$  quando contiverem constantes arbitrárias, como é o caso da expressão (1.2).

Usando a relação (1.6) em (1.2) para substituir  $G^{-1}$  e  $S^{-1}$  nos termos  $-i \text{Tr} \ln G^{-1}$  e  $-i \text{Tr} S^{-1}G$ , te-

mos:

$$\Gamma^{A'} = I - i \text{Tr} \ln \left( S^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} - iK \right) + \Gamma_2 + \text{cte} +$$

$$- i \text{Tr} \left( \mathbb{1} + iKG - i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} G \right), \quad (1.8)$$

ou ainda,

$$\Gamma^{A'} = I - i \text{Tr} \left[ \ln \left( S^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \right) + \ln \left( \mathbb{1} - iK \left( S^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \right)^{-1} \right) \right]$$

$$- i \text{Tr} \left( \mathbb{1} - i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} G + iKG \right) + \Gamma_2 + \text{cte} \quad (1.8a)$$

Usando novamente (1.6) no desenvolvimento do segundo termo logarítmico de (1.8a) resulta:

$$\Gamma^{A'} = \Gamma^{B'} + i \text{Tr} \ln (\mathbb{1} + iKG) - i \text{Tr} (iKG) \quad (1.9)$$

onde

$$\Gamma^{B'} = I - i \text{Tr} \ln \left( S^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \right) + i \text{Tr} \left( i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} G \right) +$$

$$+ \Gamma_2 - i \text{Tr} \mathbb{1} + \text{cte} \quad (1.10)$$

De (1.9) é fácil ver que  $\Gamma^{A'}$  coincide com  $\Gamma^{B'}$  quando  $K = 0$ . A expressão (1.10) pode ser reduzida observando que  $(\delta \Gamma_2 / \delta G) G = 2 \Gamma_2$ . Assim,

$$\Gamma^{B'} = I - i \text{Tr} \ln \left( S^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \right) - \Gamma_2 - i \text{Tr} \mathbb{1} + \text{cte} \quad (1.11)$$

Calculando a constante obtemos:

$$\Gamma^B = I - i \text{Tr} \ln [S(\bar{S}^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G})] - \Gamma_2, \quad (1.11a)$$

que para o nosso problema específico e pressupondo  $K = 0$  fica:

$$\Gamma^B(G) = -i \text{Tr} \ln (S G^{-1}) - \Gamma_2(G) \quad (1.11b)$$

Da expressão (1.11) ou equivalentemente da (1.11a), é fácil ver que  $\Gamma^A$  e  $\Gamma^B$  levam à mesma equação de Schwinger-Dyson (1.6)-(1.7).

Os bosons da teoria também contribuem com uma parcela para a ação efetiva total. Ela é obtida de maneira completamente análoga à parte puramente fermiônica  $\Gamma_f$ , diferindo apenas por um fator numérico. Exemplificamos essa contribuição para a ação efetiva de CJT:

$$\Gamma_b^A = \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln D \Delta^{-1} + \bar{D}^{-1} \Delta - 1], \quad (1.12)$$

onde  $D$  é o propagador livre do campo bosônico e  $\Delta$  o propagador completo. A origem do fator numérico que diferencia  $\Gamma_b$  de  $\Gamma_f$  reside no fato de que a integral funcional fermiônica  $\int d\psi d\bar{\psi} \exp(\frac{i}{2} \bar{\psi} A \psi)$  resulta em  $\text{Det} A$  enquanto a bosônica  $\int d\psi \exp(\frac{i}{2} \psi A \psi)$  é igual a  $(\text{Det} A)^{1/2}$ .

A ação efetiva para operadores compostos total é dada por:

$$\Gamma^A = \Gamma_f^A + \Gamma_b^A + \Gamma_2 \quad (1.13)$$

Ou seja:

$$\Gamma^A = -i \text{Tr} [\ln(S\bar{G}^{-1}) + \bar{S}^{-1}G - 1] + \quad (1.13a)$$

$$+ \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln(D\bar{\Delta}^{-1}) + \bar{D}^{-1}\Delta - 1] + \Gamma_2$$

A equação de SD para o propagador dos bosons pode ser obtida impondo a condição  $\delta\Gamma/\delta\Delta = 0$ . De (1.13a) resulta:

$$-\frac{i}{2} \bar{\Delta}^{-1} + \frac{i}{2} \bar{D}^{-1} + \frac{\delta\Gamma_2}{\delta\Delta} = 0$$

ou melhor :

$$\bar{\Delta}^{-1} = \bar{D}^{-1} - 2i \frac{\delta\Gamma_2}{\delta\Delta} . \quad (1.14)$$

## 2. O POTENCIAL EFETIVO

O potencial efetivo para operadores compostos é uma generalização daquele usual  $V(\Psi)$  que deriva da ação efetiva  $\Gamma(\Psi)$ , quando somente fontes locais são consideradas. Assim, ele é definido por (Cornwall et al-74):

$$-\Gamma(\Psi, G) \Big|_{\substack{\text{invariante} \\ \text{translacional}}} = V(\Psi, G) \int d^4x, \quad (2.1)$$

onde, por invariante translacional, entende-se  $\Psi$  constante e  $G, \Delta$  dependendo apenas da diferença das coordenadas. Para o potencial efetivo usual  $V(\Psi)$  mostra-se (Symanzik-70) que este representa a densidade de energia do vácuo. Como a interpretação física de  $\Gamma(\Psi, G)|_{it}$  feita por Cornwall et al e uma adaptação, para fontes bilocais, dos argumentos usados para  $\Gamma(\Psi)$ , assumimos que  $V(\Psi, G)$  tem a mesma interpretação que  $V(\Psi)$ .

O potencial efetivo pode, então, ser obtido diretamente das ações efetivas apresentadas na secção 1 por intermédio (2.1). Como os propagadores dependem apenas da diferença de coordenadas é conveniente usar a representação do momentum. Com isto:

$$V^A(G, \Delta) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \ln \left( S(p) \bar{G}^{-1}(p) \right) + \bar{S}^{-1}(p) G(p) - \mathbb{1} \right] \quad (2.2)$$

$$+ V_2(G, \Delta)$$

$$V^B(G, \Delta) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln (S(p) G^{-1}(p)) - V_2(G, \Delta) , \quad (2.2a)$$

onde  $V_2(G, \Delta)$  na aproximação de ordem mais baixa na constante de acoplamento (aproximação de Hartree-Fock) é dado por:

$$V_2(G, \Delta) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \Gamma^\mu G(p) \Gamma^\nu G(k) \Delta_{\mu\nu}(p-k) . \quad (2.3)$$

Na expressão para  $V(G, \Delta)$  não escrevemos a parcela correspondente aos bosons porque, nesta específica aplicação, ela não dará contribuição.

### 3. OS PONTOS ESTACIONÁRIOS DO POTENCIAL EFETIVO

A condição de estacionariedade (1.1a) em termos do potencial efetivo é dada por:

$$\frac{\delta V(G, \Delta)}{\delta G} = 0 \quad (3.1)$$

Por outro lado, já vimos que esta leva à equação de Schwinger-Dyson para o propagador  $G$ . Vejamos sua forma explicitamente:

$$G^{-1}(p) = \bar{S}^{-1}(p) + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Gamma^\mu G(k) \Gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(p-k) \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (2.3) temos:

$$\begin{aligned} V_2(G, \Delta) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [G^{-1}(p) - \bar{S}^{-1}(p)] G(p) \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [1 - \bar{S}^{-1}(p) G(p)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo  $V_2(G, \Delta)$ , dado por (3.3), nas expressões (2.2) para  $V^A$  e  $V^B$  temos:

$$V^C(G) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \ln(S(p) G^{-1}(p)) + \frac{1}{2} \bar{S}^{-1}(p) G(p) - \frac{1}{2} \right] \quad (3.4)$$

A grandeza  $V^C$  é interpretada como sendo o valor do potencial efetivo no seu ponto de mínimo, ou seja, o valor

do potencial efetivo quando este é calculado para um  $G(\rho)$ , que verifica a expressão (3.1) ou equivalentemente, que é solução da equação (3.2).

INSTITUTO DE FÍSICA DE CAROLINA DE RIBEIRÃO PRETO

ESTUDO DA TEORIA ABELIANA:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

por

Dr. ...

CAPÍTULO II

ESTUDO DA TEORIA ABELIANA:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

1. Introdução

2. ...

3. ...

## 4. A LAGRANGEANA E AS REGRAS DE FEYNMAN

Neste capítulo estudaremos a quebra dinâmica da simetria quiral (QDSQ) em uma teoria abeliana. Em particular, estudamos a QDSQ na eletrodinâmica quântica sem massa, cuja Lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - e\int_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{termo que fixa o gauge}$$

onde  $e$  é a constante de acoplamento,  $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\gamma^0$ ,  $\not{\partial} = \gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ ,  
e

$$j_{\mu} = \bar{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi$$

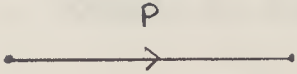
e

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}.$$

Esta Lagrangeana descreve um campo fermiônico de spin  $1/2$ ,  $\Psi$  que interage com o boson vetorial de gauge  $A_{\mu}$ . A Lagrangeana  $\mathcal{L}$  é invariante pelas transformações de gauge do grupo  $U(1)$  e pelas transformações globais do grupo  $U(1)$  axial. A invariância sob as transformações  $U_A(1)$  faz com que  $\mathcal{L}$  seja dita invariante quiral e que exista uma corrente axial  $j_5^{\mu} = \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\Psi$  que é classicamente conservada.


Em nossos cálculos, serão usadas as seguintes regras e convenções:

a) propagador livre fermiônico:



$$: S(p) = \frac{i}{\not{p}} \quad (4.1)$$

b) propagador completo fermiônico:



$$: G^{-1}(p) = \bar{S}^{-1}(p) + i\Sigma(p) \quad (4.2)$$

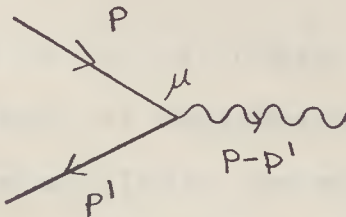
c) propagador livre bosônico ( $m_B = 0$ ) no gauge de Landau:



$$: D^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2} p^{\mu\nu} \quad (4.3)$$

$$p^{\mu\nu} = \left( g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)$$

d) vértice livre



$$: \Gamma_\mu = e \gamma_\mu \quad (4.4)$$



Usando as regras de Feynman da secção anterior escrevemos:

$$i\Sigma_{SD}(p) = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu G(k) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(k-p) \quad (5.1)$$

ou, mais explicitamente:

$$i\Sigma_{SD} = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - \Sigma_{SD}(k)} \gamma_\nu \frac{(-i)}{(k-p)^2} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{(k-p)^\mu (k-p)^\nu}{(k-p)^2} \right] \quad (5.2)$$

Para deixar toda dependência nos índices de Lorentz no numerador, fazemos uso do resultado de que  $\Sigma(p)$  não conterá correções à  $\not{k}$  nesse gauge:

$$G(k) = \frac{i}{\not{k} - \Sigma(k)} = i \frac{(\not{k} + \Sigma(k))}{k^2 - \Sigma^2(k)} \quad (5.3)$$

Após fazer as contrações, o termo de interesse para a quebra de simetria será dado por:

$$i\Sigma(p) = 3e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(k)}{[k^2 - \Sigma^2(k)](k-p)^2} \quad (5.4)$$

Para fazer a integração angular indicada é conveniente passar às variáveis euclidianas. Usando:  $d^4 k = i4\pi k^3 dk d\Omega$

obtemos:

$$i \Sigma(p) = i 3e^2 \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int dk \frac{k^3 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \int d\theta \frac{\sin^2 \theta}{(k^2 - 2pk \cos \theta + p^2)} \quad (5.5)$$

Como (Gradshteyn et al)

$$I_{\theta} = \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2 \theta}{k^2 - 2pk \cos \theta + p^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{1}{p^2} & ; k < p \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2} & ; k > p \end{cases} \quad (5.6)$$

resulta:

$$\Sigma(p) = \frac{6e^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{p^2} \int_0^p dk \frac{k^3 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} + \int_p^{\infty} dk \frac{k \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \right\} \quad (5.7)$$

Esta é a equação que deve ser resolvida para obter uma solução, não trivial, para  $\Sigma(p)$  nesta aproximação.

## 6. A EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA $\Sigma(p)$

Com o objetivo de resolver a equação para  $\Sigma(p)$  (5.7) encontraremos a equação diferencial equivalente.

Para obter a equação diferencial devemos aplicar o operador  $d/dp$  até que seja possível escrever uma equação para  $\Sigma(p)$  que envolva apenas diferenciais. Será feito uso frequente da propriedade (Gradshteyn et al)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy &= f(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} - f(x, \psi(x)) \frac{d\psi(x)}{dx} \\ &+ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{d}{dx} f(x, y) dy \end{aligned} \quad (6.1)$$

que tem os casos particulares

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x) ; \quad \frac{d}{dx} \int_x^a f(y) dy = -f(x) . \quad (6.2)$$

Aplicando o operador  $\frac{d}{dp}$  na equação (5.7) temos:

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp} = -\frac{4E}{p^3} \int_0^p dk \frac{k^3 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} ; \quad \epsilon = \frac{3e^2}{16\pi^2} \quad (6.3)$$

Aplicando novamente  $\frac{d}{dp}$  obtemos:

$$\frac{d^2 \Sigma(p)}{dp^2} = \frac{12E}{p^4} \int_0^p dk \frac{k^3 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} - \frac{4E \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)} \quad (6.4)$$

Usando o resultado de  $d\Sigma(p)/dp$ , (6.3), para eliminar a integral que aparece em (6.4) resulta:

$$\frac{d^2 \Sigma(p)}{dp^2} + \frac{3}{p} \frac{d\Sigma(p)}{dp} + \frac{4E \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)} = 0 \quad (6.5)$$

que é uma equação diferencial não linear de segunda ordem que não possui soluções conhecidas.

## 7. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEARIZADA E SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS

Com o intuito de conhecer algo sobre as soluções da equação (6.5), procedemos à linearização da mesma. Para linearizar (6.5), vamos assumir, no mesmo sentido que na referência (Maris et al-64), que  $\Sigma(p)$ , no denominador, comporta-se como uma constante,  $\mu$ , para todos momentos euclidianos. Com isto, a equação diferencial resulta:

$$\frac{d^2 \Sigma(p)}{dp^2} + \frac{3}{p} \frac{d\Sigma(p)}{dp} + \frac{4\epsilon \Sigma(p)}{p^2 + \mu^2} \quad (7.1)$$

Desde (6.5) ou (7.1) nota-se que se  $\Sigma(p)$  é uma solução então,  $\Sigma' = \lambda \Sigma(p/\lambda)$  também é solução. Fazendo a substituição de variáveis  $z = p^2/\mu^2$  resulta a equação:

$$\left[ z \frac{d^2}{dz^2} + 2 \frac{d}{dz} + \frac{\epsilon}{z+1} \right] \Sigma(z) = 0 \quad (7.2)$$

Desde a equação (7.2) é fácil ver que:

$$\Sigma(p) = \mu C {}_2F_1(\gamma_+, \gamma_-; 2; -\frac{p^2}{\mu^2}) \quad (7.3)$$

onde

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{1-4\epsilon}] \quad (7.4)$$

sendo

$$\gamma_{\pm}^1 = 1 - \delta_{\pm}^1 ; \quad \gamma_+^1 \gamma_-^1 = \epsilon \quad (7.5)$$

com  $0 \leq \epsilon < \frac{1}{4}$ .

A constante de integração C pode ser determinada pela condição de contorno

$$\sum(p^2 = -\mu^2) = \mu \quad (7.6)$$

Neste caso

$$C = \frac{1}{F_{2,1}(\gamma_+, \gamma_-; 2; 1)} = \epsilon \Gamma(\gamma_+) \Gamma(\gamma_-) \quad (7.7)$$

A solução  $\sum(p)$  dada por (7.3) coincide com aquela obtida por Th. A. J. Maris, V. E. Herscovitz e G. Jacob (Maris et al-64) utilizando outro método.

Da expressão para  $\sum(p)$ , (7.3) podemos estudar o seu comportamento assintótico. A expressão (7.3) mostra que  $\sum(p) \sim \text{cte}$  para  $p^2 \rightarrow 0$ . Para extrair o limite ultravioleta, é conveniente expressar a função hipergeométrica através da propriedade (Gradshteyn et al)

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(a, b; c; x) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-x)^{-a} {}_2F_1(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{x}) \\
 &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-x)^{-b} {}_2F_1(b, 1-c+d; 1-a+b; \frac{1}{x}).
 \end{aligned}$$

Assim, com  $x = p^2/\mu^2$ , no limite  $p^2 \rightarrow \infty$ ,  $\Sigma(p)$  tende para zero de duas maneiras diferentes:

$$\Sigma_+(p) \sim \left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma_+} ; p^2 \rightarrow \infty \quad (7.8)$$

e

$$\Sigma_-(p) \sim \left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma_-} ; p^2 \rightarrow \infty \quad (7.8a)$$

Como  $0 \leq \epsilon < 1/4$  temos  $1/2 < \gamma_+ \leq 1$  e  $0 \leq \gamma_- < 1/2$  de modo que esses comportamentos assintóticos são em geral bem diferentes. Essas soluções assintóticas são usualmente conhecidas na literatura (Lane-74, Langacker-75) como "regular",  $\Sigma_+$  e "irregular",  $\Sigma_-$ . Essa denominação deve-se à rapidez com que estas tendem a zero quando o momentum tende a infinito, ou seja, ao seu comportamento a curtas distâncias.

As soluções assintóticas no regime ultravioleta para  $\Sigma(p)$  podem ser obtidas diretamente da equação diferencial. Quando  $p^2 \rightarrow \infty$ ,  $p^2 \gg \Sigma^2(p)$  de modo que podemos desprezar  $\Sigma^2(p)$  frente a  $p^2$  e escrever a equação diferencial nesse limite:

$$\left[ \frac{d^2}{dp^2} + \frac{3}{p} \frac{d}{dp} + \frac{4\epsilon}{p^2} \right] f(p) = 0 \quad (7.9)$$

Essa equação é satisfeita exatamente por  $f(p) \propto (p^2/\mu^2)^{-\gamma'}$ , para  $\gamma'$  tal que:

$$\gamma'(1-\gamma') = \epsilon \quad (7.10)$$

de onde vem:

$$\gamma'_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm (1-4\epsilon)^{1/2} \right] \quad (7.11)$$

e logo

$$f_{\pm}(p) \propto (p^2/\mu^2)^{-\gamma'_{\pm}} \quad (7.12)$$

A equação diferencial assintótica admite um número infinito de soluções uma vez que se  $f(p)$  é solução  $\wedge f(p)$  também o será. Em princípio, a equação (7.9) deve ser uma condição de contorno para aquela não linear (6.5).

## 8. ANSATZ PARA $\Sigma(p)$ E CÁLCULO VARIACIONAL

Neste contexto, utilizaremos apenas as expressões assintóticas para  $\Sigma(p)$  uma vez que o trabalho de Johnson, Baker e Willey (Johnson et al-64,73) mostra que, somente neste limite, as aproximações, de propagador livre para o fóton e vértice livre, são consistentes. Assim, introduzimos um ansatz para  $\Sigma(p)$  que é construído de modo a satisfazer o comportamento assintótico para  $\Sigma(p)$ , ou seja:

$$\Sigma(p) \propto \begin{cases} cte & ; p^2 \rightarrow 0 \\ f_{\pm}(p) & ; p^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (8.1)$$

Em (8.1), introduzimos uma parte infravermelha no ansatz, baseados no comportamento exibido por  $\Sigma(p)$  nesse limite, como vimos na seção anterior, e também para prevenir divergências infravermelhas em cálculos futuros. Com isto, construímos um ansatz válido para todo momentum:

$$\Sigma(p) \propto \theta(\mu-p) + f_{\pm}(p)\theta(p-\mu) \quad (8.2)$$

onde  $\theta$  é a função degrau de Heaviside e usamos a única escala de massa disponível para estabelecer a separação entre as regiões assintóticas.

Em nossa abordagem da quebra dinâmica da simetria quiral através da aplicação do método variacional ao

potencial efetivo, a função tentativa, dependente do parâmetro variacional, será:

$$\sum_{\pm} \langle p \rangle = \phi \left[ \theta(\mu - p) + \int_{\pm} \langle p \rangle \theta(p - \mu) \right] \quad (8.3)$$

onde  $\phi$  é o parâmetro variacional a ser fixado. Espera-se que o parâmetro  $\phi$  possa ser fixado para valores tais que  $\phi/\mu \approx 1$ , para evitar problemas de hierarquia nas escalas de massa.

## 9. O POTENCIAL EFETIVO E O ANSATZ VARIACIONAL

Nesta secção desenvolveremos com algum detalhe as principais etapas intermediárias que levam, da forma geral do potencial efetivo, apresentada na secção 2, ao seu cálculo em função de um específico ansatz. Para não fazer referência a fórmulas distantes, estas serão escritas quando necessárias.

Da secção 2 temos que o Potencial Efetivo é dado por:

$$V^A(G, \Delta) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\ln(S\bar{G}^{-1}) + \bar{S}^{-1}G - \mathbb{1}] + V_2(G, \Delta) \quad (9.1)$$

$$V^B(G, \Delta) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln(S\bar{G}^{-1}) - V_2(G, \Delta) \quad (9.2)$$

com

$$V_2(G, \Delta) = i \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \gamma^\mu G(p) \gamma^\nu \bar{G}(k) D_{\mu\nu}(k-p) \quad (9.3)$$

onde usamos algumas regras da secção 3. Também temos:

$$V^C(G) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\ln(S\bar{G}^{-1}) + \frac{1}{2} \bar{S}^{-1}G - \frac{1}{2}] \quad (9.4)$$

Para escrever o potencial efetivo em termos da possível solução de quebra de simetria fazemos uso da relação (3.2) que é:

$$\bar{G}^{-1}(p) = \bar{S}^{-1}(p) + i \Sigma(p) \quad (9.5)$$

ou seja:

$$\bar{G}^{-1}(p) = -i(\not{p} - \Sigma(p))$$

$$G(p) = \frac{i}{\not{p} - \Sigma(p)} = \frac{i(\not{p} + \Sigma(p))}{p^2 - \Sigma^2(p)} \quad (9.6)$$

Com estas relações e lembrando que  $\text{Tr} \mathbb{1} = 4$ ,  $\text{Tr} \not{p} = 0$  e  $\text{Tr} \ln A = \ln \text{Det} A$ ; obtemos os seguintes resultados para os termos de 1-loop do potencial efetivo:

$$\text{Tr} \ln S \bar{G}^{-1} = \text{Tr} \ln \left( 1 - \frac{\Sigma(p)}{\not{p}} \right) = 2 \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(p)}{p^2} \right)$$

$$\text{Tr} \bar{S}^{-1} G = \text{Tr} \frac{p^2 + \not{p} \Sigma(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} = \frac{4p^2}{p^2 - \Sigma^2(p)}$$

de modo que:

$$V_1^A(\Sigma) = 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(p)}{p^2} \right) + \frac{2 \Sigma^2(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \right] \quad (9.7)$$

$$V_1^B(\Sigma) = 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(p)}{p^2} \right) \quad (9.8)$$

$$V_1^C(\Sigma) = 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(p)}{p^2} \right) + \frac{\Sigma^2(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \right] \quad (9.9)$$

Vejamos agora o termo de 2-loops. Usando as propriedades usuais do traço de matrizes e as expressões (9.6) e (3.3) temos:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \text{Tr} [\gamma^\mu G(p) \gamma^\nu G(k) D_{\mu\nu}(p-k)] = \\ & = -\frac{4}{(p-k)^2} \left[ -p \cdot k - 2 \frac{(p^2 - p \cdot k)(p \cdot k - k^2)}{(p-k)^2} + 3 \Sigma(p) \Sigma(k) \right] \end{aligned}$$

No apêndice A mostramos que os dois primeiros termos se anulam quando da integração angular. Desse modo resulta:

$$V_2(\Sigma) = -6e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(k)}{k^2 - \Sigma^2(k)} \frac{1}{(p-k)^2} \quad (9.10)$$

Antes de prosseguir, é interessante notar o relacionamento entre  $V^A$ ,  $V^B$  e  $V^C$  a nível de potencial efetivo:

a) no capítulo I, observamos que a condição de estacionariedade de  $\Gamma$  era equivalente à equação de SD. Consideremos  $V^A(\Sigma)$ :

$$V^A(\Sigma) = V_1^A(\Sigma) + V_2(\Sigma) \quad (9.11)$$

Apliquemos a condição de estacionariedade, ou seja, usemos a equação de SD. Usar a equação de SD significa que  $\Sigma(p)$  não é qualquer, mas sim, obedece a equação de SD, no caso, a equação (5.4):

$$i\Sigma(p) = 3e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(k)}{k^2 - \Sigma^2(k)} \frac{1}{(p-k)^2} \quad (9.12)$$

Notemos que  $V_2(\Sigma)$  pode ser escrito como:

$$V_2(\Sigma) = -2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \cdot 3e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(k)}{k^2 - \Sigma^2(k)} \frac{1}{(p-k)^2} \quad (9.13)$$

Identificando (9.12) em (9.13) resulta:

$$\overline{V}_2(\Sigma) = -2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma^2(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \quad (9.14)$$

Substituindo em (9.11), com  $V_1^A$ , dado por (9.7), temos:

$$\overline{V}^A(\Sigma) = 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(p)}{p^2} \right) + \frac{\Sigma^2(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \right] \quad (9.15)$$

que é justamente  $V^C(\Sigma)$ . Também, podemos verificar que, substituindo (9.14) em  $V^B(\Sigma)$ , obteremos o mesmo  $V^C(\Sigma)$ , o que é esperado, uma vez que  $\Gamma^A$  e  $\Gamma^B$  tem os mesmos pontos estacionários.

b) também no capítulo I, deduzimos  $\Gamma^B$  desde a ação efetiva  $\Gamma^A$ . Vejamos como isto se processa a nível de Potencial Efetivo: consideremos  $V^A(\Sigma)$  escrito na forma:

$$V^A(\Sigma) = V_1^A(\Sigma) - V_2(\Sigma) + 2V_2(\Sigma) \quad (9.16)$$

Substituindo  $V_2$  por  $\bar{V}_2$ , dado por (9.14), no último termo de (9.16) notamos que este cancela exatamente o termo não logarítmico de  $V_1^A(\Sigma)$  e teremos como resultado  $V^B(\Sigma)$ , tal como derivado de  $\Gamma^B$ . Deste procedimento, nota-se que, em certo sentido  $V^B$  e  $V^C$  são diferentes formas do Potencial Efetivo  $V^A$ , que se diferenciam deste, pelo uso da equação de Schwinger-Dyson em maior ou menor grau.

Voltando a (9.10), procedemos ao cálculo da integração angular no termo  $V_2$ . Passando para variáveis euclidianas e usando

$$d^4p d^4k \rightarrow -8\pi^3 p^3 dp k^3 dk \sin^2 \theta d\theta$$

obtemos:

$$V_2(\Sigma) = -\frac{48e^2\pi^3}{(2\pi)^8} \int dp p^3 \Sigma(p) \int dk k^3 \Sigma(k) \int_0^\pi \frac{d\theta \sin^2 \theta}{p^2 - 2pk \cos \theta + k^2} \quad (9.17)$$

A integral angular restante é a mesma  $I_\theta$  dada por (5.6). Por conveniência, vamos escrevê-la na forma

$$I_\theta = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\theta(p-k)}{p^2} + \frac{\theta(k-p)}{k^2} \right] \quad (9.18)$$

Substituindo (9.18) e introduzindo  $\epsilon = 3e^2/16\pi^2$  temos:

$$16\pi^2 V_2(\Sigma) = -8\epsilon \left[ \theta(p-k) \int_0^\infty \frac{dp p \Sigma(p)}{p^2 + \Sigma^2(p)} \int_0^p \frac{dk k^3 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \right. \\ \left. + \theta(k-p) \int_0^\infty \frac{dp p^3 \Sigma(k)}{p^2 + \Sigma^2(p)} \int_p^\infty \frac{dk k \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \right]. \quad (9.19)$$

A expressão (9.19) permite que seja calculada a contribuição de 2-loops para o potencial efetivo quando  $\Sigma(p)$  tem a mesma forma funcional no intervalo  $0 - \infty$ . Por outro lado, quando  $\Sigma(p)$  é do tipo (8.3), um estudo mais detalhado das regiões de integração é requerido. Como indicado em (9.19), devemos computar o produto  $\Sigma(p)\Sigma(k)$  em duas regiões estabelecidos por  $\theta(p-k)$  e  $\theta(k-p)$  quando  $\Sigma(p)$  é dada por

$$\Sigma_{\pm}(p) = \phi \left[ \theta(\mu-p) + f_{\pm}(p) \theta(p-\mu) \right] \quad (9.20)$$

Atendo nossa atenção aos limites de integração ditados pelo produto das funções  $\theta$ , e introduzindo

$$x = p^2/\mu^2; \quad y = k^2/\mu^2; \quad u = \phi/\mu \quad (9.21)$$

finalmente obtemos:

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_2(\Sigma) = -4\epsilon \mu^2 \left\{ \int_0^1 \frac{dx}{x+\mu^2} \int_0^x \frac{dy y}{y+\mu^2} + \right. \\ \left. + \int_0^1 \frac{dx x}{x+\mu^2} \int_1^\infty \frac{dy f(y)}{y+\mu^2 f^2(y)} + \right. \quad (9.22)$$

$$\left. \frac{1}{2} \left[ \int_1^\infty \frac{dx f(x)}{x+\mu^2 f^2(x)} \int_1^x \frac{dy y f(y)}{y+\mu^2 f^2(y)} + \int_1^\infty \frac{dx x f(x)}{x+\mu^2 f^2(x)} \int_1^\infty \frac{dy f(y)}{y+\mu^2 f^2(y)} \right] \right\}.$$

onde  $f_{\pm}$  foi denotado por  $f$  por economia. As integrais infravermelhas em (9.22) podem ser calculadas exatamente de modo que

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_2(\mu) = -4\epsilon \mu^2 \left\{ 1 - \mu^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right) - \frac{\mu^2}{2} \ln^2 \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right) + \left[ 1 - \mu^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \right] \int_1^\infty \frac{dy f(y)}{y+\mu^2 f^2(y)} + \frac{1}{2} [\dots] \right\}. \quad (9.23)$$

Vejamos agora os termos de 1-loop para o potencial efetivo. Passando para variáveis euclidianas, inte-

grando nos ângulos, introduzindo as variáveis  $x$  e  $\mu$  definidas em (9.21) e levando em conta as funções  $\Theta$  de  $\Sigma(p)$  temos:

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_{\perp}^A(\mu) = -2 \int_0^1 dx x \left[ \ln\left(1 + \frac{\mu^2}{x}\right) - \frac{2\mu^2}{x + \mu^2} \right]$$

(9.24a)

$$- \int_1^{\infty} dx x \left[ \ln\left(1 + \frac{\mu^2 f^2(x)}{x}\right) - \frac{2\mu^2 f^2(x)}{x^2 + \mu^2 f^2(x)} \right]$$

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_{\perp}^B(\mu) = -2 \int_0^1 dx x \ln\left(1 + \frac{\mu^2}{x}\right)$$

(9.24b)

$$-2 \int_1^{\infty} dx x \ln\left(1 + \frac{\mu^2 f^2(x)}{x}\right)$$

e

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_{\perp}^C(\mu) = -2 \int_0^1 dx x \left[ \ln\left(1 + \frac{\mu^2}{x}\right) - \frac{\mu^2}{x + \mu^2} \right]$$

(9.24c)

$$-2 \int_1^{\infty} dx x \left[ \ln\left(1 + \frac{\mu^2 f^2(x)}{x}\right) - \frac{\mu^2 f^2(x)}{x + \mu^2 f^2(x)} \right]$$

Neste caso, também as integrais infravermelhas podem ser calculadas exatamente de modo que finalmente resulta

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^A(\mu) = 3\mu^2 - \ln(1+\mu^2) - 3\mu^4 \ln\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) - 2 \int_1^\infty dx x \left[ \ln\left(1 + \frac{\mu^2 f^2(x)}{x}\right) - \frac{2\mu^2 f^2(x)}{x + \mu^2 f^2(x)} \right] + V_2(\mu) \quad (9.25a)$$

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^B(\mu) = -\mu^2 - \ln(1+\mu^2) + \mu^4 \ln\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) - 2 \int_1^\infty dx x \ln\left(1 + \frac{\mu^2 f^2(x)}{x}\right) - V_2(\mu) \quad (9.25b)$$

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^C(\mu) = \mu^2 - \ln(1+\mu^2) - \mu^4 \ln\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) - 2 \int_1^\infty dx x \left[ \ln\left(1 + \frac{\mu^2 f^2(x)}{x}\right) - \frac{\mu^2 f^2(x)}{x + \mu^2 f^2(x)} \right] \quad (9.25c)$$

com  $V_2$  dado por (9.23). As fórmulas (9.25) mostram que, devido ao ansatz variacional,  $V^{A,B,C}$  dependem agora do parâmetro variacional  $\mu = \phi/\mu$  e da forma funcional de  $f(x)$ , para cada valor do parâmetro  $\epsilon$ . Essas fórmulas mostram também que a condição de estacionariedade resume-se a  $\partial V^{A,B}/\partial \mu = 0$  quando uma dada forma funcional é escolhida para  $f(x)$ .

Finalizando esta secção desejamos completar o formulário referente a  $V^{A,B,C}$  com algumas expressões que necessitaremos proximamente. Tais expressões consideram (9.25) quando  $\mu \ll 1$ . Neste caso assumimos que  $V^{A,B,C}$  são dados aproximadamente pela expansão de (9.25) em termos de  $\mu$  até termos da ordem  $\mu^4$ . Assim,

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^A(\mu \ll 1) \approx 2\mu^2 + \frac{\mu^4}{2} + 3\mu^4 \ln \mu^2$$

$$+ 2\mu^2 \int_1^\infty dx f^2(x) - 3\mu^4 \int_1^\infty \frac{dx}{x} f^4(x) + V_2(\mu \ll 1)$$
(9.26a)

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^B(\mu \ll 1) \approx -2\mu^2 + \frac{\mu^4}{2} - \mu^4 \ln \mu^2$$

$$- 2\mu^2 \int_1^\infty dx f^2(x) + \mu^4 \int_1^\infty \frac{dx}{x} f^4(x) - V_2(\mu \ll 1)$$
(9.26b)

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^C(\mu \ll 1) \approx \mu^4 \left( \frac{1}{2} + \ln \mu^2 - \int_1^\infty \frac{dx}{x} f^4(x) \right)$$
(9.26c)

onde:

$$\begin{aligned}
V_2(\mu < 1) \approx -4\epsilon\mu^2 \left\{ 1 + \mu^2 \ln \mu^2 - \frac{\mu^2}{2} \ln^2 \mu^2 + \right. \\
+ \int_1^\infty \frac{dx}{x} f(x) - \mu^2 \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} f^3(x) + \mu^2 \ln \mu^2 \int_1^\infty \frac{dx}{x} f(x) + \\
+ \frac{1}{2} \left[ \int_1^\infty \frac{dx}{x} f(x) \int_1^x dy f(y) + \int_1^\infty dx f(x) \int_x^\infty \frac{dy}{y} f(y) + \right. \\
- \mu^2 \left( \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} f^3(x) \int_1^x dy f(y) + \int_1^\infty \frac{dx}{x} f(x) \int_x^1 \frac{dy}{y} f^3(y) + \right. \\
\left. \left. \int_1^\infty \frac{dx}{x} f^3(x) \int_x^\infty \frac{dy}{y} f(y) + \int_1^\infty dx f(x) \int_x^\infty \frac{dy}{y^2} f^3(y) \right) \right] \left. \right\} \quad (9.26d)
\end{aligned}$$

Observamos ainda que, quando oportuno, faremos uso das variáveis  $\tau = 1/y$  e  $t = 1/x$  para calcular  $\sqrt{A, B, C}$ . Neste caso:

$$f(p) = \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right)^{-\gamma} = x^{-\gamma} = t^{\gamma} \quad (9.27)$$

## 10. FINITUDE DO POTENCIAL EFETIVO

Nesta secção desejamos mostrar que o Potencial Efetivo para Operadores Compostos, explicitado na secção anterior, é finito quando calculado usando as soluções assintóticas  $f(p)$ .

Desafortunadamente não é possível integrar as expressões (9.25) para  $V^{A,B,C}$  analiticamente quando  $f(p)$  é dada por (9.27). Contudo, cálculos numéricos podem ser feitos. Nossos resultados numéricos mostram que  $V_1$  e  $V_2$  divergem, quando calculamos separadamente, para a solução  $f(p)$ . Para caracterizar essa divergência analiticamente, vamos considerar o desenvolvimento em série da parte ultravioleta de  $V^{A,B}$  em termos de  $\mu$ . Dessa série formal infinita, podemos constatar por integração direta que apenas os termos proporcionais a  $\mu^2$  são os problemáticos. Colecionando os termos ultravioletas ( $p > \mu$ ) proporcionais a  $\mu^2$  em (9.26) podemos calculá-los explicitamente. Verifica-se também de (9.26) que

$$V_{UV}^A(\mu^2) = -V_{UV}^B(\mu^2) = \mu^2 C_2^{UV}(\epsilon) \quad (10.1)$$

onde:

$$C_2^{UV}(\epsilon) = 2 \int_1^\infty dx f^2(x) - 4\epsilon \left\{ \int_1^\infty \frac{dx}{x} f(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \int_1^\infty \frac{dx}{x} f(x) \int_1^x dy f(y) + \int_1^\infty dx f(x) \int_x^\infty \frac{dy}{y} f(y) \right] \right\} \quad (10.2)$$

Substituindo  $f(x) = x^{-\gamma}$ , calculando as integrais convergentes e agrupando temos:

$$C_2^{UV}(\epsilon) = \frac{-4\epsilon(1/2-\gamma)}{\gamma(1-\gamma)} + 2\left(1 - \frac{\epsilon}{\gamma(1-\gamma)}\right) \int_1^{\infty} dx x^{-2\gamma} \quad (10.3)$$

A integral remanescente é divergente para  $\gamma = \gamma_-$  ( $0 \leq \gamma_- < \frac{1}{2}$ ) e sua divergência é do tipo  $\Lambda^{1-2\gamma}$ ;  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Entretanto, o coeficiente dessa integral é nulo em todos os casos uma vez que  $\gamma(1-\gamma) = \epsilon$  (veja (7.5) e (7.10)). Assim resulta que  $C_2^{UV}(\epsilon)$  é finito e é dado por:

$$C_2^{UV}(\epsilon) = -2 + 4\gamma \quad (10.4)$$

Este procedimento mostra que, embora haja divergências nos termos de 1-loop e 2-loops, para a solução assintótica irregular  $f_-$ , o potencial efetivo é finito, devido ao cancelamento mútuo dessas divergências. Queremos ainda enfatizar que este cancelamento só é possível porque  $f(p)$  é uma solução exata da equação assintótica de Schwinger-Dyson. A quantidade  $\sqrt{C}$  é finita em todos os casos uma vez que a sua expansão não possui termos em  $\mu^2$ .

## 11. A ESTABILIDADE DO VÁCUO E AS SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS REGULAR E IRREGULAR

Aqui iniciamos o estudo da Quebra Dinâmica da Simetria Quiral propriamente dito através de cálculos específicos com o potencial efetivo. Organizamos o estudo do problema em três partes: a) verificar para cada solução não-trivial da equação de Schwinger-Dyson, aqui representada pelo ansatz variacional (9.20), se estas são energeticamente preferidas àquela trivial. Se for o caso da natureza escolher uma solução não-trivial, qual delas será preferida?

- b) pesquisar a existência de Transição de Fase e características gerais do Potencial Efetivo.
- c) estudar o Potencial Efetivo do ponto de vista variacional.

A primeira etapa será tratada nesta secção.

Para verificar se uma solução não-trivial é energeticamente preferida àquela trivial faremos uso do conceito de  $V^C$ . Como já temos dito,  $V^C$  é o valor do potencial efetivo  $V^{A,B}$  nos pontos estacionários, ou seja, quando se faz uso da equação de SD completa em  $V^{A,B}$ . Entretanto,  $\Sigma = 0$  é uma solução para a SD. Neste caso, não há quebra dinâmica da simetria quiral. Assim, é interessante conhecer o comportamento de  $V^C$  com  $\Sigma$ . De (9.24c) temos:

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^C = -2 \int_0^{\infty} dx x \left[ \ln \left( 1 + \frac{\Sigma^2(x)}{x} \right) - \frac{\Sigma^2(x)/x}{1 + \Sigma^2(x)/x} \right] \quad (11.1)$$

Desta expressão, observamos que  $V^C = 0$  para  $\Sigma = 0$ . Por outro lado, (11.1) mostra que  $V^C(\Sigma) < 0$  para qualquer  $\Sigma \neq 0$  (Gusynin et al-80) visto que o integrando, neste caso, é sempre positivo. Com esta análise de  $V^C$  concluímos que uma solução não trivial para  $\Sigma(p)$ , é energeticamente preferida, ou seja, a teoria com quebra dinâmica da simetria quiral possui um vácuo mais estável do que a teoria simétrica. É importante notar que este resultado não depende do uso de um ansatz específico para  $\Sigma$  e nem do método variacional.

O próximo passo é verificar qual dos dois comportamentos assintóticos manifestados por  $\Sigma$ , o regular e o irregular, conduz a um vácuo mais estável (Montero et al-85). Para fazer isto, devemos calcular  $V^C$  para  $\Sigma$  dado pelo ansatz (9.20) para  $f$  dado por  $f_+$  e  $f_-$ . Podemos obter resultados analíticos calculando  $V^C$  para  $\mu \ll 1$  dado pela expressão (9.26c).

Os resultados correspondentes a  $f_+$  e  $f_-$  são:

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_{\pm}^C(\mu \ll 1) \approx -\mu^4 \left( \frac{1}{4\gamma_{\pm}^2} - \frac{1}{2} - \ln \mu^2 \right) \quad (11.2)$$

De (11.2) temos que a solução irregular conduz a um mínimo mais profundo. Os resultados comparativos são mostrados na figura (11.1). Esses resultados tornam-se mais evidentes no limite de  $\epsilon$  muito pequeno ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). Neste caso  $\gamma_+ \rightarrow 1 - \epsilon$  e  $\gamma_- \rightarrow \epsilon$  de modo que:

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_+^C(\mu \ll 1) \approx \mu^4 \left( \frac{1}{4} + \ln \mu^2 \right) \quad (11.2a)$$

e

$$16\pi^2 \mu^{-4} V_{\pm}^c (\mu \ll 1) \approx -\mu^4 \left( \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2} - \ln \mu^2 \right) \quad (11.2b)$$

O termo dominante em (11.2b),  $1/4\epsilon$ , faz com que  $V_{-}^c$  seja mais negativo do que  $V_{+}^c$ . Podemos também estender esta análise comparativa, para qualquer valor de  $\mu = \phi/\mu$ , integrando (9.25c) numericamente. Estes resultados numéricos coincidem com (11.2a,b), quando tomamos a expressão (9.25c) com os limites apropriados de  $\mu$  e  $\epsilon$ , e reafirmam a maior estabilidade do vácuo da solução irregular para qualquer valor de  $\mu$  e para todos os valores permitidos de  $\epsilon$ . Gostaríamos de salientar que o comportamento assintótico, preferido energeticamente, para  $\sum(p)$  é a quele obtido por Johnson, Baker e Willey (Johnson et al-64,73) no seu programa conhecido com Eletrodinâmica Quântica Finita.

Como mostramos detalhadamente no Apêndice B, os resultados, provenientes de  $V^c$  sobre a energética das soluções assintóticas regular e irregular, são independentes do uso do método variacional. Nesse sentido cabem algumas observações. Quando usamos  $V^c$ , estamos assumindo o conhecimento da solução completa da equação de SD. Se fosse possível levar a cabo os cálculos restantes com essa solução,  $V^c$  teria um único valor constante. Entretanto, para finalizar os cálculos é necessário fazer uso de alguma expressão conhecida para  $\sum(p)$ . No nosso caso, aproveitamos o ansatz (9.20). Contudo, nestes cálculos  $\phi$  não é encarado como um parâmetro variacional, a ser fixado

através de condições sobre  $V^C$ , mas sim como um parâmetro ordinário, cujos diferentes valores a ele atribuídos fornecem os possíveis valores de  $V^C$ .

## 12. ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE FASE QUIRAL

Nesta secção pesquisamos a existência de uma transição de fase quiral e procuramos estabelecer algumas características do potencial efetivo no regime  $\mu \ll 1$  (Montero et al-87).

A vantagem do regime  $\mu \ll 1$  é que o potencial efetivo pode ser tratado analiticamente para as soluções  $f_{\pm}(p)$ . Ficando com os termos até  $\mu^4$  para representar o potencial efetivo, podemos usar as expressões (9.26):

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^A(\mu \ll 1) \approx 2\mu^2 + \mu^4 \left( \frac{1}{2} + 3 \ln \mu^2 \right) +$$

$$+ 2\mu^2 S_1 - 3\mu^4 S_2 + V_2(\mu \ll 1) \quad (12.1)$$

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^B(\mu \ll 1) \approx -2\mu^2 + \mu^4 \left( \frac{1}{2} - \ln \mu^2 \right) +$$

$$- 2\mu^2 S_1 + \mu^4 S_2 - V_2(\mu \ll 1) \quad (12.1a)$$

sendo

$$V_2(\mu \ll 1) \approx -4\epsilon \mu^2 \left\{ 1 + \mu^2 \ln \mu^2 - \frac{\mu^2}{2} \ln^2 \mu^2 \right.$$

$$+ S_3 - \mu^2 S_4 + \mu^2 \ln \mu^2 \cdot S_3 \quad (12.1b)$$

$$\left. + \frac{1}{2} [D_1 + D_2 - \mu^2 (D_3 + D_4 + D_5 + D_6)] \right\}$$

onde  $S_i$  e  $D_i$  são os integrais simples e duplos explicitados em (9.26) que tem por resultado:

$$S_1 = \frac{1}{1-2\gamma} \left[ \Lambda^{1-2\gamma} - 1 \right]; \quad \Lambda \rightarrow \infty$$

$$S_2 = \frac{1}{4\gamma}$$

$$S_3 = \frac{1}{\gamma}$$

$$S_4 = \frac{1}{3\gamma+1}$$

(12.2)

$$D_1 = \frac{1}{\gamma(2\gamma-1)} + \frac{\Lambda^{1-2\gamma}}{(\gamma-1)(2\gamma-1)}, \quad \Lambda \rightarrow \infty$$

$$D_2 = \frac{1}{\gamma(2\gamma-1)} - \frac{\Lambda^{1-2\gamma}}{\gamma(2\gamma-1)}, \quad \Lambda \rightarrow \infty$$

$$D_3 = D_6 = \frac{1}{4\gamma(3\gamma+1)}$$

$$D_4 = D_5 = \frac{1}{4\gamma^2}$$

Substituindo estes resultados em (12.1) e reagrupando os termos resulta:

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^A (\mu \ll 1) \approx 4\mu^2 \gamma^2 + \mu^4 \left( \frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{2} - \frac{4\gamma^2}{3\gamma+1} \right.$$

$$\left. + (4\gamma^2-1) \ln \mu^2 + 2\epsilon \ln^2 \mu^2 \right) \quad (12.3)$$

$$16\pi^2 \mu^{-4} V^B(\mu \ll 1) \approx -4\mu^2 \gamma^2 + \mu^4 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4\gamma} + \frac{4\gamma^2}{3\gamma+1} \right.$$

(12.3a)

$$\left. + (3-4\gamma^2) \ln \mu^2 - 2\epsilon \ln^2 \mu^2 \right)$$

Nas expressões (12.2)-(12.3),  $\gamma$  pode ser  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$  correspondendo ao uso das soluções assintóticas  $f_+$  ou  $f_-$ . Observamos ainda que estas expressões são finitas exatamente nos dois casos.

Das expressões (12.3) podemos estudar a existência de uma transição de fase quiral. No estudo do potencial efetivo com o método variacional a condição necessária para ter uma transição de fase quiral, ou seja, uma transição de um potencial efetivo cujo mínimo é em  $\mu = 0$  para outro no qual o mínimo está em  $\mu \neq 0$ , é que exista uma mudança de sinal no potencial efetivo quando variamos o valor da constante de acoplamento. Essa mudança de sinal pode ser estudada no regime  $\mu \ll 1$ . Para valores extremamente pequenos de  $\mu$ , o termo proporcional a  $\mu^2$  é o dominante nas expressões (12.3). Logo o seu coeficiente será o responsável pela existência ou não da transição. De (12.3) temos que:

$$V^A(\mu^2) = -V^B(\mu^2) \approx 4\gamma^2 \mu^2 \quad (12.4)$$

$\mu^2 \rightarrow 0$

A expressão (12.4) mostra claramente que não há transição de fase quiral para ambos potenciais efetivos, seja com a solução regular ou irregular, uma vez que não há mudança de sinal no coeficiente  $4\gamma^2$  para todos os valores permitidos de  $\epsilon$ . Também, de (12.4) temos que no limite  $\mu^2 \rightarrow 0$   $V^A$  e  $V^B$  diferem apenas pelo sinal e que o ponto  $\mu = 0$  é um mínimo local estável de  $V^A$  e um máximo local instável de  $V^B$ . Nós resumimos os resultados aqui obtidos na figura (12.1) representando  $V^{A,B}$  dado por (12.3) em função de  $\mu$  para  $\epsilon_1 = 0.002$  e  $\epsilon_2 = 0.1$  com as duas soluções assintóticas.

### 13. O POTENCIAL EFETIVO E O MÉTODO VARIACIONAL

Como sabemos, a aplicabilidade do método variacional em um problema está vinculada à aptidão da solução tentativa levar o sistema em estudo a apresentar pontos estacionários, que sejam capazes de fixar os parâmetros variacionais nela próprios contidos. Assim, para pesquisar a existência de pontos estacionários em nosso estudo da quebra dinâmica da simetria quiral devemos procurar os mínimos do potencial efetivo em função de  $\mu$  e  $\epsilon$ . No estudo do regime  $\mu \ll 1$ , feito na seção anterior, somente  $V^A$  exibe um mínimo e é para  $\mu = 0$ . Para estudar a existência de mínimos em algum  $\mu \neq 0$  é necessário calcular  $V^{A,B}$  dados pelas expressões (9.25) para valores de  $\mu$  em um intervalo que não leve a problemas hierárquicos. Como já observamos anteriormente esses cálculos só podem ser executados numericamente.

Após exaustivos cálculos numéricos (no apêndice C apresentamos peculiaridades desses cálculos envolvendo a solução irregular) nos quais realizamos um minucioso estudo do comportamento de  $V^{A,B}$  com a variação de  $\epsilon$  e  $\mu$  concluímos que o método variacional é realizado para: a) o potencial efetivo  $V^A$  com a solução regular e b) o potencial efetivo  $V^B$  com a solução irregular. No caso a,  $V_+^A$ , o ponto estacionário ocorre em  $\mu_M = 0$  para todos os valores da constante de acoplamento ( $\epsilon = 3\alpha/4\pi$ ). Na situação b,  $V_-^B$  apresenta um mínimo em  $\mu_M \neq 0$  cujos valores (de  $V_-^B(\mu_M)$  e  $\mu_M$ ) dependem do valor da constante de acoplamento. As outras situações possíveis,

$V_+^B$  e  $V_-^A$  não realizam o método variacional. No primeiro caso, o potencial efetivo  $V^B$  não apresenta um mínimo estável para a solução tentativa  $\Sigma_+$ . No segundo caso, ou seja, o potencial efetivo  $V^A$  com a solução tentativa irregular, apesar de apresentar um mínimo local em  $\mu=0$ , nós o descartamos, pois este ponto não tem grande estabilidade. AS figuras (13.1)-(13.2) ilustram as situações descritas acima.

Ainda, com respeito ao método variacional gostaríamos de retomar a discussão de  $V^C$ , feita em secção anterior, recordando que quando usamos o método variacional  $V^C(\Sigma)$  torna-se  $V^C(\mu)$  e resulta no valor do potencial efetivo  $V^{A,B}$  em todos os pontos estacionários possíveis, inclusive  $\mu=0$ . Com isto, se assumimos o método variacional rigorosamente, só ganham significado aqueles valores de  $V^C$  calculados para um valor de  $\mu$  que de fato corresponde a um mínimo do potencial efetivo. Assim, se este quadro é coerente, esperamos algum acordo entre o valor do potencial efetivo, calculado no ponto estacionário, e o valor de  $V^C$ , calculado nesse mesmo ponto, pelo menos para algum intervalo de valores da constante de acoplamento,  $\alpha$ . Para a situação a,  $V_+^A$ , a concordância é total, uma vez que o ponto estacionário é  $\mu=0$  e que  $V_+^A(\mu=0) = V_+^C(\mu=0) = 0$ . Para o caso b, ou seja  $V_-^B$ , temos excelente concordância para vários valores de  $\alpha$ . Nós ilustramos essa situação na figura (13.3) para um valor típico de  $\epsilon$ ,  $\epsilon = 0.01$ .

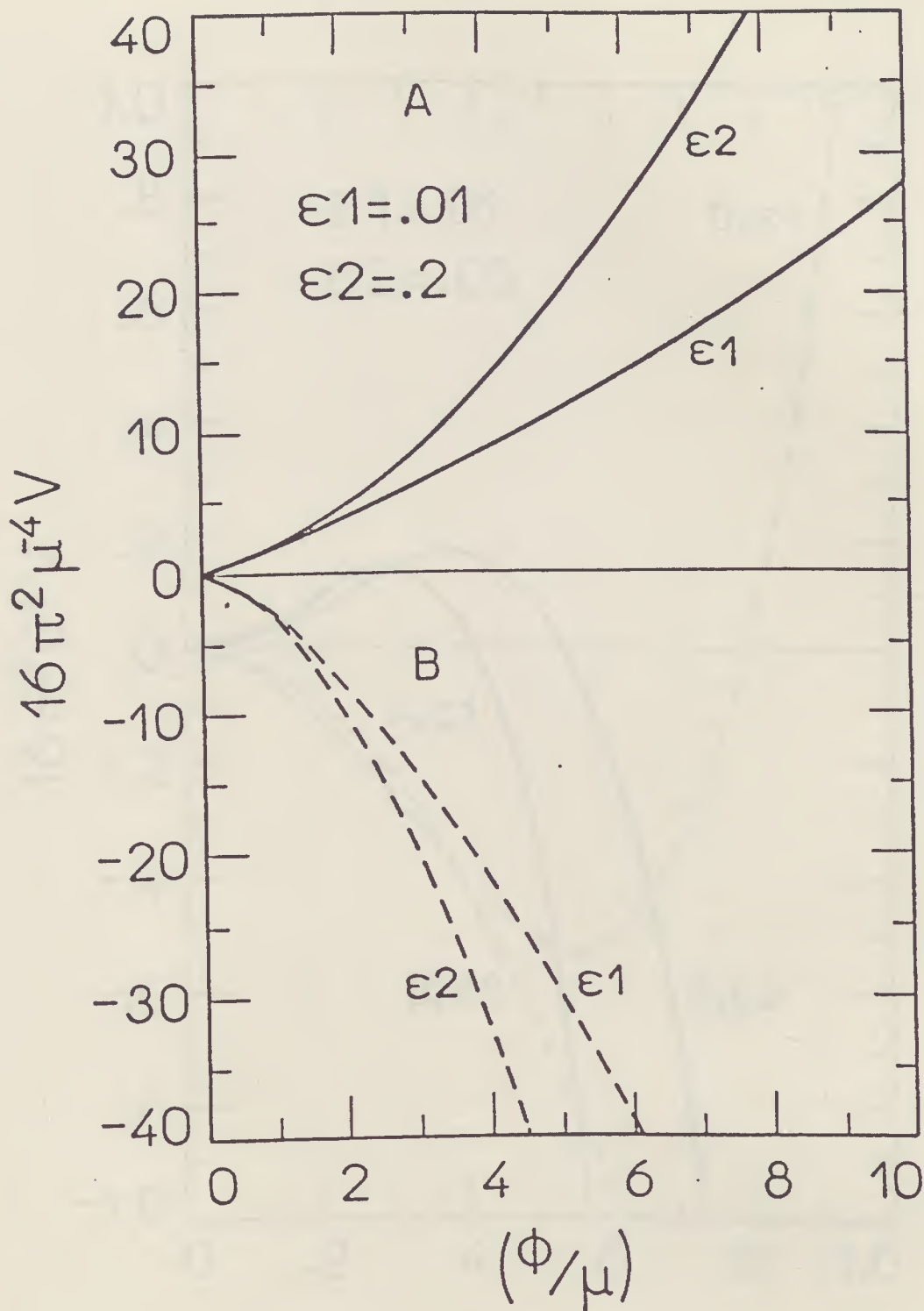


FIG. 13.1. O potencial  $V^{A,B}$  calculado numericamente, através das expressões (9.25a) (curva contínua) e (9.25b) (curva tracejada) respectivamente, com a solução regular para  $\epsilon_1 = 0.01$  e  $\epsilon_2 = 0.2$ .

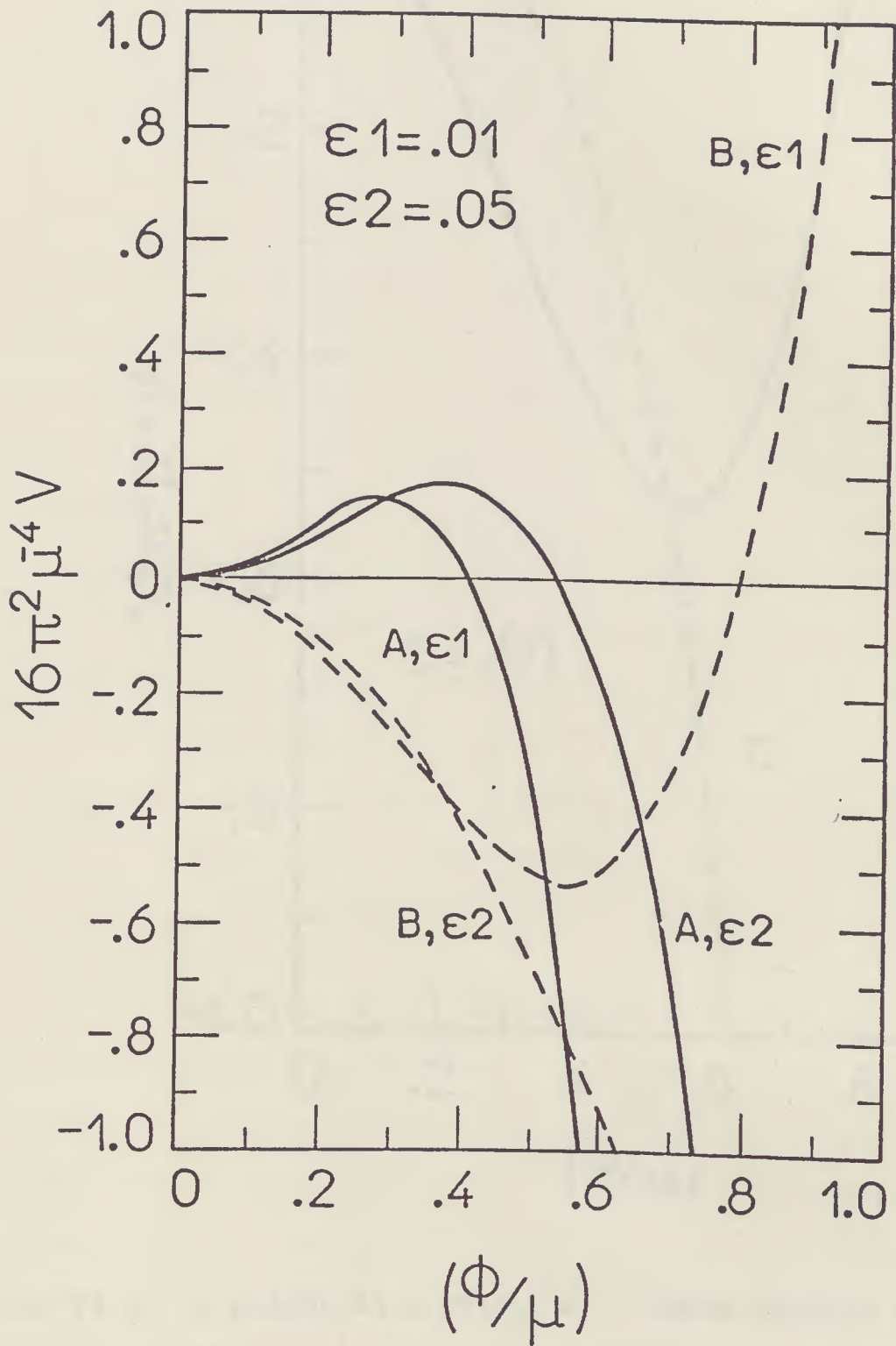


FIG. 13.2. O potencial efetivo  $V^{A,B}$  calculado numericamente, através das expressões (9.25a) (curva contínua) e (9.25b) (curva tracejada) respectivamente, com a solução irregular para  $\epsilon_1 = 0.01$  e  $\epsilon_2 = 0.05$ .

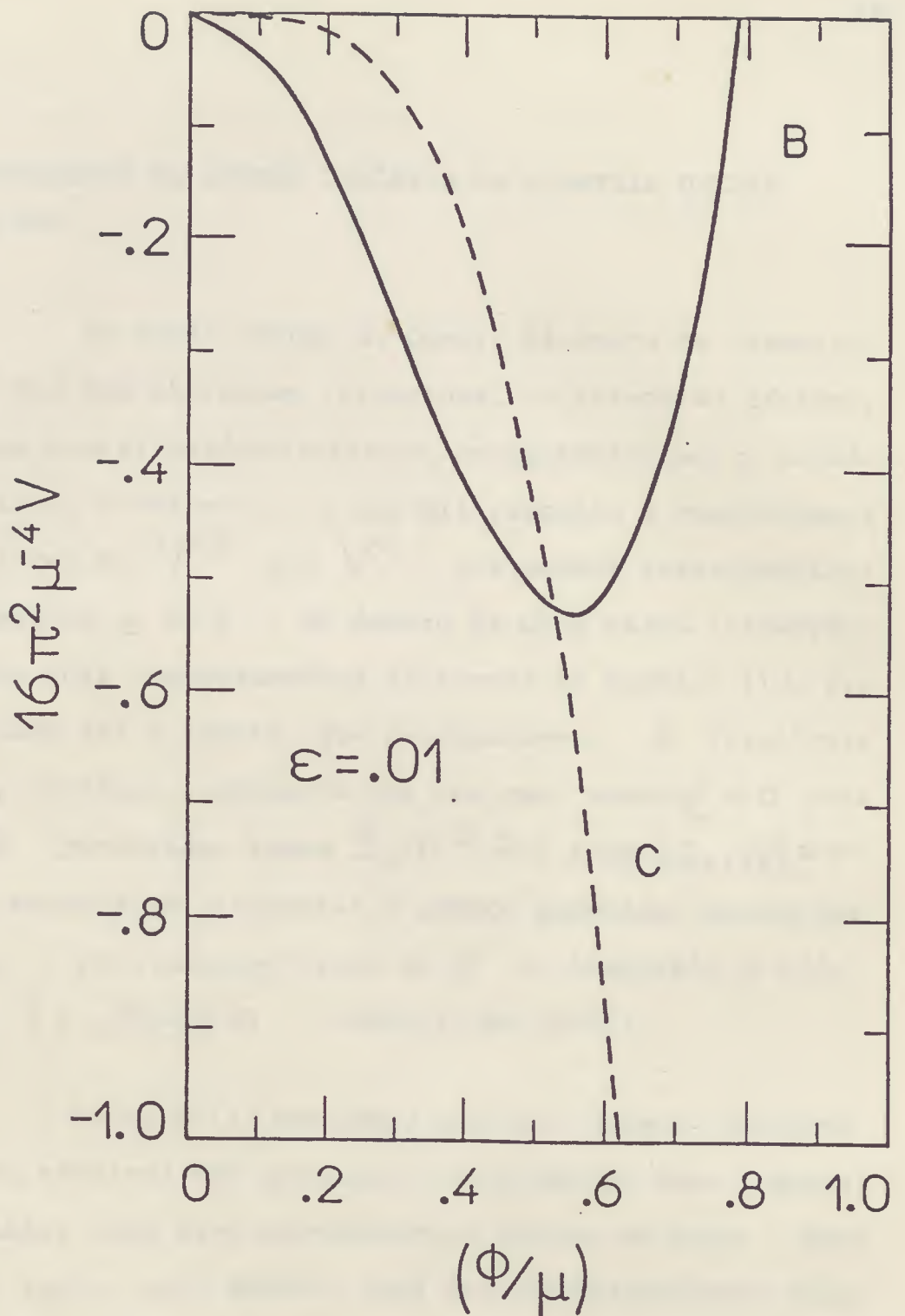


FIG. 13.3. O potencial efetivo  $V^B$  (curva s\u00f3lida) e  $V^C$  (curva tracejada) calculados numericamente, desde as f\u00f3rmulas (9.25b) e (9.25c) respectivamente, com a solu\u00e7\u00e3o irregular para  $\epsilon = 0.01$ .

#### 14. RESULTADOS EM QUEBRA DINÂMICA DA SIMETRIA QUIRAL NA QED

Em nosso estudo da Quebra Dinâmica da Simetria Quiral via uma abordagem variacional do Potencial Efetivo, resultam duas situações distintas, consistentes com o método variacional e entre si, no que diz respeito a concordância dos valores de  $V^{A,B}$  com  $V^C$ , nos pontos estacionários: as situações a e b. No âmbito da QDSQ essas situações refletem dois comportamentos distintos da teoria: i) no primeiro caso (a) a teoria, que originalmente é invariante quiral, continua invariante uma vez que, sendo  $\phi_M = 0$ , para todo  $\epsilon$  permitido, temos  $\Sigma_+(p) = 0$  e logo  $\{\Sigma_+, \gamma_5\}_+ = 0$ , ii) no segundo (b) a simetria é sempre quebrada, uma vez que,  $\phi_M \neq 0$ , para qualquer valor de  $\epsilon$  no intervalo  $0 - 1/4$ , e logo  $\{\Sigma_-, \gamma_5\} \neq 0$  (Montero et al-87).

Na secção 12 mostramos que esta teoria abeliana, (QED não massiva) não apresenta transição de fase quiral e portanto, esta deve apresentar-se sempre na mesma fase quiral. Assim, para decidir qual dos comportamentos é exibido pela teoria, usamos como critério nossos resultados sobre a estabilidade do vácuo. Os resultados da secção 12 e as figuras (13.2,3) mostram que o caso ii, no qual a simetria quiral é sempre quebrada é preferido energeticamente. Assim, concluindo este capítulo, nossos resultados estabelecem que a QED não massiva é uma teoria que apresenta quebra dinâmica da simetria quiral para todos os valores da constante de acoplamento, no intervalo  $0 - \pi/3$ , e o comportamento assintótico da massa dinâmica dos fer-

mions é aquele irregular (Montero et al-87).

Neste capítulo estudamos a Quebra Dinâmica da Simetria Quiral numa teoria vetorial não-abeliana: a Cromodinâmica Quântica (QCD). O método de abordagem do problema será o mesmo já aplicado no capítulo II para o estudo da QDSQ na Eletrodinâmica Quântica.

Como as diferentes etapas do estudo presente serão as mesmas da teoria abeliana, do capítulo anterior, frequentemente faremos analogias e referências a estas. Também, a exposição tenderá a ser mais resumida no sentido de evitar superposição. Por outro lado, quando necessário à compreensão do texto, repetiremos o conteúdo relevante do capítulo - II.

## 15. A LAGRANGEANA E AS REGRAS DE FEYNMAN

A QCD é a teoria de campos não abeliana que, acredita-se, descreve as interações fortes. Os campos fundamentais dessa teoria são campos espinoriais de Dirac, que descrevem as partículas de spin  $1/2$ , com carga elétrica fracionária denominadas quarks e os campos de gauge, que são partículas sem massa e sem carga elétrica de spin 1, denominadas gluons que interagem com os quarks e entre si mesmas.

Sendo  $q_\alpha^f(x)$  os campos dos quarks,  $f=1, \dots, n_f$  é o índice que representa o "sabor": up, down, strange, ...;  $\alpha=1, \dots, N$  é o grau de liberdade "cor" e como há evidências experimentais de  $N=3$ , a notação usual é: red, blue e green. Os campos de gauge  $B_\alpha^\mu(x)$  são especificados pelo índice  $\alpha=1, 2, \dots, (N^2-1)$ .

Neste estudo consideramos a QCD não massiva cuja Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = i \bar{q}_\alpha^f \not{\partial} q_\alpha^f + g \bar{q}_\alpha^f \frac{\lambda_{\alpha\beta}^a}{2} \gamma^\mu q_\beta^f B_\mu^a \quad (15.1)$$

$$+ \frac{1}{2g} \text{Tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \quad + \text{termos que fixam o gauge e de ghosts}$$

onde

$$F^{\mu\nu}(x) = ig T_a F_a^{\mu\nu}(x)$$

com

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu + gf_{abc} B_b^\mu B_c^\nu \quad (15.2)$$

sendo  $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$  e  $f_{abc}$  os geradores e as constantes de estrutura do grupo  $SU(N)$  de cor respectivamente. No caso do  $SU(3)$  os  $\lambda^a$  são as oito matrizes de Gell-Mann.

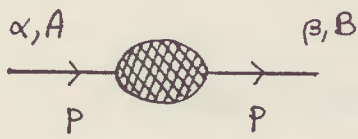
Dentre as simetrias exibidas pela Lagrangeana (15.1), consideraremos aquela  $SU_L(m_f) \otimes SU_R(m_f)$ , proveniente da invariança de (15.1) sob as transformações globais do grupo  $SU_A(m_f)$ , que tem por consequência a conservação da corrente axial correspondente. Não consideraremos neste trabalho a problemática envolvendo a simetria  $U_A(1)$  (Christos-84).

As Regras de Feynman utilizadas são:

a) propagador do quark livre

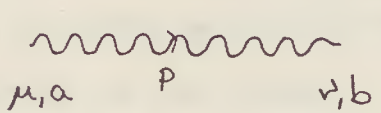
$$\begin{array}{c} \alpha, A \\ \longrightarrow \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta, B \\ \longleftarrow \\ P \end{array} : S_{\alpha\beta}^{AB}(P) = \frac{i}{\not{P}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{AB}$$

b) propagador do quark completo



$$: G_{\alpha\beta}^{AB}(p) = \frac{-1}{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{AB}(p) + i \sum_{\alpha\beta}^{AB}(p)$$

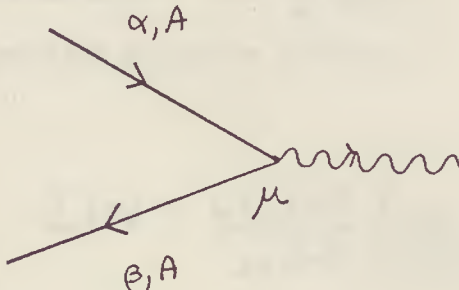
c) propagador do gluon (gauge de Landau)



$$: D_{ab}^{\mu\nu}(p) = -i \frac{\delta_{ab}}{p^2} p^{\mu\nu}$$

$$p^{\mu\nu} = \left( g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)$$

d) vértice quark-gluon



$$: \Gamma_a^\mu = g \left( \frac{\lambda_a}{2} \right) \gamma^\mu_{\beta\alpha}$$

## 16. A EQUAÇÃO DE SCHWINGER-DYSON, SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS E ANSATZ VARIACIONAL PARA $\Sigma(p)$

Como no estudo do cap. II sobre a QED, nosso interesse recai sobre a equação de Schwinger-Dyson para a autoenergia dos fermions da teoria. Este caso, contudo apresenta peculiaridades: como a QCD é uma teoria assintoticamente livre, a dependência da constante de acoplamento não poderá ser ignorada. Assim, em total analogia com a QED e levando em conta que  $(\lambda_a \lambda_a)_{\beta\alpha} = 4C_2(R) \delta_{\beta\alpha}$  onde  $C_2(R)$  é o operador quadrático de Casimir da representação  $R$  do grupo  $SU(N)$  de cor temos:

$$i\Sigma(p) = 3C_2(R) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g^2(p,k) \Sigma(k)}{[k^2 - \Sigma^2(k)](k-p)^2} \quad (16.3)$$

Assumindo que  $g^2(p,k)$  não depende de ângulos, a integração angular fornece:

$$\Sigma(p) = \frac{6C_2(R)}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{p^2} \int_0^p dk \frac{k^3 g^2(p,k) \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} + \int_p^\infty dk \frac{k g^2(p,k) \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \right\} \quad (16.4)$$

Esta equação tem as mesmas dificuldades já comentadas na secção 5 do cap. II, acrescidas do fato de que a solução irá também depender de  $g^2(p,k)$ . Assim, é necessário introduzir um ansatz para  $g^2(p,k)$  (Castorina et al-85):

$$g^2(p, k) = g^2(p) \theta(p-k) + g^2(k) \theta(k-p) \quad (16.5)$$

de modo que a equação integral tem a forma

$$\Sigma(p) = \frac{6C_2(R)}{16\pi^2} \left\{ \frac{g^2(p)}{p^2} \int_0^p dk k^3 \frac{\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} + \int_p^\infty dk k g^2(k) \frac{\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \right\} \quad (16.6)$$

Seguindo o mesmo procedimento já aplicado no caso abeliano a equação diferencial resultante equivalente a (16.6) é:

$$\Sigma''(p) - \frac{\left(\frac{g^2(p)}{p^2}\right)''}{\left(\frac{g^2(p)}{p^2}\right)'} \Sigma(p) - \frac{6C_2(R)}{16\pi^2} \frac{\left(\frac{g^2(p)}{p^2}\right)'}{p^2 + \Sigma^2(p)} p^3 \Sigma(p) = 0 \quad (16.7)$$

com a notação  $df/dx = f'$ . É fácil ver que fazendo  $g^2 \rightarrow e^2 \rightarrow cte$  e  $C_2(R) \rightarrow 1$  recuperamos a equação diferencial para a QED (6.5) já estabelecida na secção 6 do cap. II.

Em QCD, a massa dinâmica para os quarks não tem sido estudada procurando soluções da equação diferencial analiticamente. Entretanto, a equação (16.7) tem sido estudada numericamente (Fukuda et al-76). Na literatura, existem três funções distintas para o comportamento assintôti-

co de  $\Sigma(p)$  (Fomin et al-83) obtidas por diferentes métodos:

$$f_I(p) = \left[ \frac{\ln p/\Lambda}{\ln p_c/\Lambda} \right]^{-\frac{A}{2}} \quad (16.8a)$$

$$f_{R1}(p) = \frac{p_c^2}{p^2} \left[ \frac{\ln p/\Lambda}{\ln p_c/\Lambda} \right]^{\frac{A}{2}} \quad (16.8b)$$

$$f_{R2}(p) = \frac{p_c^2}{p^2} \left[ \frac{\ln p/\Lambda}{\ln p_c/\Lambda} \right]^{\frac{A}{2}-1} \quad (16.8c)$$

onde  $A = 18C_2(R)/(11N - 4m_f T(R))$ ,  $T(R)$  obedece a relação  $\pi T(R) = \underline{d(R)}C_2$  com  $\pi$  sendo a dimensão da representação adjunta do grupo  $SU(N)$  de cor de  $d(R)$  a dimensão da representação dos fermions. Ainda,  $p_c$  é o momentum que define a região infravermelha e  $\Lambda \approx 200$  MeV é a escala da QCD.

A solução  $f_I(p)$  dada por (16.8a) é usualmente denominada de solução "irregular" (I) devido ao seu lento decréscimo com o momentum, enquanto que as soluções  $f_{R1}$  e  $f_{R2}$ , dadas por (16.8b,c), são conhecidas como soluções "regulares" (R) pois estas tendem rapidamente para zero com o momentum. A solução  $f_{R1}$  é obtida via expansão de produto de operadores (OPE) (Politzer-76), enquanto  $f_{R2}$  surge como uma solução da equação de Bethe-Salpeter homo-

gênea para a parte de quebra de simetria,  $\Sigma(p)$ , do propagador do quark (Lane-74). É importante notar que  $f_I$  também aparece no trabalho de K. Lane mas esta é descartada em favor de  $f_{R2}$  afirmando que só esta última realmente corresponde ao modo de Goldstone. Esse resultado é obtido relacionando as soluções em questão, via a identidade de Ward axial, com a função de vértice cujo comportamento assintótico para grande momentum é analisado com o OPE. Ainda, no caso da solução  $f_I$ , o valor de  $A$  é restrito pela condição de normalização da equação de Bethe-Salpeter que requer  $A > 1$  (Lane-74), sendo que, para a representação fundamental, o número de sabores deve ser  $n_f \gg 5$ .

Como podemos ver, o comportamento assintótico da massa dinâmica não é univocamente determinado e alguma polêmica existe no sentido de quais critérios devem ser usados para determiná-lo (Fomim et al-83). Esperamos que a junção do Potencial Efetivo para operadores compostos com o método variacional possa levar a algum esclarecimento neste assunto. Abordamos este problema especificamente na seção 19.

Neste caso, em analogia com a QED, a função tentativa do método variacional, será dada pelo ansatz (Castorina et al-85):

$$\Sigma(p) = \phi [\theta(p_c - p) + f(p)\theta(p - p_c)] \quad (16.9)$$

onde  $\phi$  é o parâmetro variacional e  $f(p)$  pode ser qualquer uma das soluções assintóticas (16.8). Este ponto não

é, contudo, totalmente análogo a QED: na QCD, faz-se uso das soluções assintóticas  $f(p)$  por serem estas as únicas disponíveis. Também, a aproximação de vértice livre é aceita por simplicidade, uma vez que, neste caso, não existe prova de que a teoria seja consistente nesse limite (Mandelstam-79).

## 17. O POTENCIAL EFETIVO E O ANSATZ VARIACIONAL

A expressão do potencial efetivo para a QCD é a mesma da teoria abeliana dada em (9.1-3). Entretanto, surgem diferenças quando as peculiaridades da teoria são implementadas tais como a constante de acoplamento dependente do momentum e a operação Traço. Usando as regras de Feynman e extraíndo o traço de (9.1-3) temos:

$$V^{A,B}(\Sigma) = V_1^{A,B}(\Sigma) \pm V_2(\Sigma) \quad (17.1)$$

onde

$$V_1^A = 2im_f d \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(p)}{p^2} \right) + \frac{2 \Sigma^2(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \right] \quad (17.1a)$$

$$V_1^B = 2im_f d \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(p)}{p^2} \right) \quad (17.1b)$$

e

$$V_2 = -6m_f d C_2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma(p)}{p^2 - \Sigma^2(p)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g^2(p,k) \Sigma(k)}{[k^2 - \Sigma^2(k)](p-k)^2} \quad (17.1c)$$

Ainda, a expressão para  $V^C(\Sigma)$  será

$$V^C = 2im_f d \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\Sigma^2(P)}{P} \right) + \frac{\Sigma^2(P)}{P^2 - \Sigma^2(P)} \right] \quad (17.2)$$

Quando os ansätze (16.9) para  $\Sigma(p)$  e (16.5) para  $g^2(p, k)$  são substituídos em (17.1) e (17.2) com

$$g^2(p) = \frac{24\pi^2}{11N - 4m_f T(R)} (\ln P_c/\Lambda)^{-1} \equiv g_c^2; \quad P \leq P_c \quad (17.3)$$

$$= \frac{24\pi^2}{11N - 4m_f T(R)} (\ln P/\Lambda)^{-1}; \quad P > P_c$$

resulta  $V^{A,B,C} = V^{A,B,C}(z, f, R, m_f, \vartheta)$  dados por

$$16\pi^2 \Lambda^{-4} V^{A,B} = V_1^{A,B} \pm V_2 \quad (17.4)$$

com:

$$V_1^A = m_f d [F_1(z, \vartheta) - 2F_2(z, \vartheta, f)] \quad (17.5)$$

onde:

$$F_1 = 3v^2 z^2 - z^4 \ln\left(1 + \frac{v^2}{z^2}\right) - 3v^4 \ln\left(1 + \frac{z^2}{v^2}\right), \quad (17.5a)$$

$$F_2 = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^3} \left[ \ln(1 + v^2 t f^2(t)) - \frac{2v^2 t f^2(t)}{1 + v^2 t f^2(t)} \right]. \quad (17.5b)$$

$$V_1^B = m_f d \left[ H_1(z, v) - 2 H_2(z, v, f) \right] \quad (17.6)$$

onde

$$H_1 = v^4 \ln\left(1 + \frac{z^2}{v^2}\right) - z^4 \ln\left(1 + \frac{v^2}{z^2}\right) - v^2 z^2, \quad (17.6a)$$

$$H_2 = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^3} \ln(1 + v^2 t f^2(t)) \quad (17.6b)$$

$$V_2 = -m_f d B \frac{v^2}{4} \left\{ \tilde{g}_c^2 F_3(z, v) + \right. \\ \left. + \left[ z^2 - v^2 \ln\left(1 + \frac{z^2}{v^2}\right) \right] F_4(z, v, f) + F_5(z, v, f) \right\} \quad (17.7)$$

onde:

$$F_3 = z^2 - v^2 \ln\left(1 + \frac{z^2}{v^2}\right) - \frac{1}{2} v^2 \ln^2\left(1 + \frac{z^2}{v^2}\right), \quad (17.7a)$$

$$F_4 = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \frac{\tilde{g}^2(t) f(t)}{1 + v^2 t f^2(t)} \quad (17.7b)$$

$$F_5 = \frac{1}{2} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \frac{\tilde{g}^2(t) f(t)}{1 + v^2 t f^2(t)} \int_t^{1/z^2} \frac{dr}{r^2} \frac{f(r)}{1 + v^2 r f^2(r)}$$

(17.7c)

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} \frac{f(t)}{1 + v^2 t f^2(t)} \int_0^t \frac{dr}{r} \frac{\tilde{g}^2(r) f(r)}{1 + v^2 r f^2(r)}$$

e

$$16\pi^2 \Lambda^{-4} V^C = m_f d \left[ L_1(z, v) - 2L_2(z, v, f) \right] \quad (17.8)$$

onde

$$L_1 = v^2 z^2 - z^4 \ln\left(1 + \frac{v^2}{z^2}\right) - v^4 \ln\left(1 + \frac{z^2}{v^2}\right) \quad (17.8a)$$

$$L_2 = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^3} \left[ \ln\left(1 + v^2 t f^2(t)\right) - \frac{v^2 t f^2(t)}{1 + v^2 t f^2(t)} \right] \quad (17.8b)$$

onde usamos a notação:

$$v = \phi/\Lambda \quad ; \quad z = p_c/\Lambda \quad ; \quad t = \Lambda^2/p^2 \quad (17.9)$$

$$\tilde{g}_C^2 = \frac{1}{\ln z} ; \quad \tilde{g}^2(t) = \frac{2}{\ln(1/t)} ; \quad B = \frac{72 C_2(R)}{11N - 4m_f T(R)} \quad (17.9a)$$

Nas expressões (17.4)-(17.8) para  $V^{A,B,C}$  pode ser  $f_I$ ,  $f_{R1}$  ou  $f_{R2}$  que nas variáveis (17.9) são dadas por:

$$f_I(t) = \left[ \frac{\ln(1/t)}{\ln z^2} \right]^{-\frac{A}{2}} \quad (17.10)$$

$$f_R(t) = z^2 t \left[ \frac{\ln(1/t)}{\ln z^2} \right]^\rho \quad (17.10a)$$

onde  $\rho = \rho_1 = A/2$  para a solução  $f_{R1}$  e  $\rho = \rho_2 = A/2 - 1$  para a solução  $f_{R2}$ .

Visando uso posterior, estabeleceremos nesta secção a expressão para  $V^{A,B}$  quando  $v \ll 1$  até ordem  $v^2$ . Expandindo (17.5)-(17.7) e colecionando os termos em  $v^2$  temos:

$$16\pi^2 \wedge^{-4} V^{A,B}(v \ll 1) \approx \pm 2m_f d v^2 \left[ z^2 + h(z, f) - \frac{B}{8} l(z, f) \right] \quad (17.11)$$

onde

$$h(z, f) = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f^2(t) \quad (17.11a)$$

$$\begin{aligned} l(z, f) = & z^2 \tilde{g}_c^2 + z^2 \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) \int_t^{1/z^2} \frac{dr}{r^2} f(r) + \frac{1}{2} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f(t) \int_0^t \frac{dr}{r} \tilde{g}^2(r) f(r) \end{aligned} \quad (17.11b)$$

ou seja, a expressão (17.11) pode ser escrita na forma:

$$16\pi^2 \Lambda^{2-4} V^{A_1 B} (\nu \ll 1) \approx \pm 2\nu^2 m_f d F(z, m_f, f, R) \quad (17.12)$$

com  $F$  dado por:

$$F = z^2 + I_1 - \frac{3C_2(R)}{11N - 4m_f T(R)} \left[ (\tilde{g}_c^2 + I_2) z^2 + \frac{I_3 + I_4}{2} \right] \quad (17.12a)$$

onde  $I_i$  são as integrais indicadas em (17.11a,b).

## 18. O POTENCIAL EFETIVO E A TRANSIÇÃO DE FASE QUIRAL

Como já dissemos anteriormente, para ter uma transição de fase quiral o potencial efetivo deve sofrer uma mudança de sinal quando variamos os parâmetros da teoria. Assim, como na QED, realizamos esse estudo no regime  $\omega \ll 1$ . Da expressão (17.12) para  $V^{A,B}$  até ordem  $\omega^2$  vemos que o termo responsável pela transição é o mesmo para  $V^A$  e  $V^B$  mas com sinal contrário. Isto acarreta que a transição de fase para o potencial  $V^A$  ocorre na direção oposta àquela do potencial  $V^B$ . Note-se ainda que este fato independe da solução assintótica  $f$  escolhida (Montero et al-87a).

O valor crítico de  $Z$  ( $Z_c$ ) é aquele tal que  $F(Z_c, m_f, f, R) = 0$ , uma vez fixados os demais parâmetros. Esquecendo por hora a problemática envolvendo as soluções assintóticas, escolhemos  $f_{R2}$  para ilustrar a situação acima descrita. Substituindo  $f_{R2}$  dada por (17.10a) em (17.11a,b) e integrando obtemos:

$$I_1 = z^4 (2 \ln z)^{-2\rho} \Gamma(2\rho+1, 2 \ln z)$$

$$I_2 = 2z^2 (2 \ln z)^{-\rho} \Gamma(\rho, 2 \ln z) \quad (18.1)$$

$$I_3 = I_4 = \frac{-2z^4}{\rho+1} (2 \ln z)^{-2\rho} \Gamma(2\rho+1, 2 \ln z) + \frac{4z^2 \ln z}{2(\rho+1)} I_2$$

com  $\rho = \frac{A}{2} - 1$ , e onde  $\Gamma(x, y)$  é uma das funções gama, incompleta (Gradshteyn et al). As expressões (18.1) podem

ser calculadas numericamente. Para  $N=3$ ,  $m_f=3$  e  $C_2(3) = 4/3$ , das expressões (18.1) e (17.12a) vemos que existe um valor crítico para  $Z$  ( $Z_c \approx 1.61$ ) que corresponde a um valor crítico da constante de acoplamento  $\alpha_c = g^2(Z_c)/4\pi \approx 1.48$ . Não é claro que valores de  $\alpha$  não perturbativos sejam consistentes com as aproximações aqui efetuadas. Entretanto, recordamos que o potencial efetivo pode ser sensível a efeitos não perturbativos.

Na figura (18.1) mostramos a quantidade  $16\pi \Lambda^4 V^{AB}/\mathcal{N}^2$  dada por (17.12), calculada a partir de (17.12a) e (18.1), em função do parâmetro  $Z = P_c/\Lambda$ . Nas figuras (18.2) e (18.3) mostramos os potenciais efetivos  $V^A$  e  $V^B$  respectivamente, calculados numericamente das expressões (17.4)-(17.7c) para  $\mathcal{N}$  arbitrário com dois valores típicos de  $Z$ ,  $Z=1.35$  e  $1.65$ , que ilustram as duas fases da teoria.

Independentemente do fato dos potenciais efetivos realizarem o método variacional ou não, vemos na figura (18.1), que existe uma mudança de sinal em ambos potenciais efetivos, para o mesmo valor crítico da constante de acoplamento, mostrando a possibilidade da existência de uma transição de fase quiral na teoria. Entretanto, essa transição de fase dar-se-ia em direções opostas para  $V^A$  e  $V^B$ : para o potencial  $V^A$ , a fase simétrica seria para  $\alpha < \alpha_c$  enquanto para o potencial  $V^B$  essa mesma fase ocorreria para  $\alpha > \alpha_c$ . Este fato é importante uma vez que, para teorias com liberdade assintótica, como a QCD, esperamos ter

invariança quiral no regime de pequenas constantes de acoplamento, enquanto que para teorias não assintoticamente livres, como a QED, esperamos o comportamento oposto (Montero et al-87a). Sendo assim, observamos que o potencial efetivo  $V^B$  não é apropriado ao estudo da quebra da simetria quiral em teorias vetoriais assintoticamente livres.

Ainda com respeito ao potencial efetivo  $V^B$ , observamos que os nossos resultados, resumidos nas figuras (18.2-3), não concordam com aqueles obtidos na referência (Casalbuoni et al-85). Entretanto, devemos esclarecer que os potenciais efetivos, aqui utilizados, derivam da ação efetiva  $\Gamma^A$  dada por (1.5) na qual a condição de contorno  $\Gamma(\Psi) = \Gamma(\Psi, G_0)$  já foi levada em conta. No caso particular de  $V^B$  usamos a ação efetiva (1.11b):

$$\Gamma^B(G) = -i \text{Tr} \ln S \bar{G}^{-1} - \Gamma_2(G) \quad (18.2)$$

A outra forma (1.11):

$$\Gamma^{B'}(G) = -i \text{Tr} \ln \left( S^{-1} + i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \right) - \Gamma_2(G) - i \text{Tr} \mathbb{1} \quad (18.2a)$$

é aquela que foi usada na referência (Casalbuoni et al-85) para obter o potencial efetivo. Neste caso, (18.2a) contribui com um termo, para o potencial efetivo, do tipo

$$\int d^3p p^3 \ln(p^2 + \Sigma^2(p))$$

Esta é uma integral que apresenta divergências ultravioletas, para qualquer  $\sum (\rho)$ , e logo deve ser regularizada com a introdução de um cut-off, por exemplo. Os autores da referência (Casalbuoni et al-85) nada comentam sobre o tratamento dessas integrais. Em nosso caso não temos integrais divergentes a priori.



CAPÍTULO III

ESTUDO DA TEORIA NÃO ABELIANA:  
A CROMODINÂMICA QUÂNTICA (QCD)

FIG. 1.1.1. ...  
 $\mu^2 = 10^2 \text{ GeV}^2$  ...  
 $\alpha_s = 0.1$  ...  
 $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$  ...

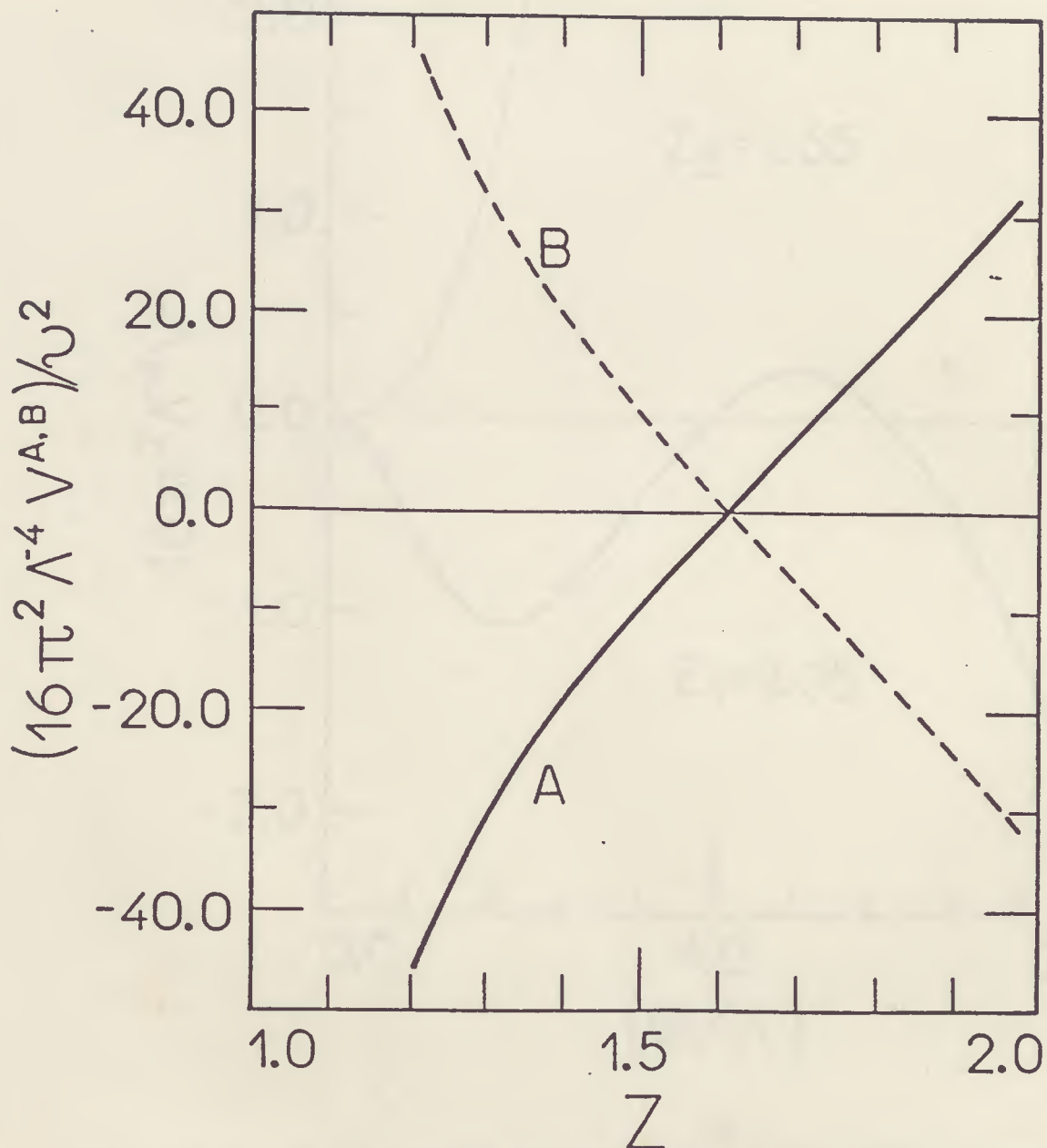


FIG. 18.1. As quantidades  $(16\pi^2 \Lambda^{-4} V^A)/\nu^2$  (curva contínua) e  $(16\pi^2 \Lambda^{-4} V^B)/\nu^2$  (curva tracejada), dados por (17.12), em função de  $Z$  para  $m_f = 3$ ,  $N = 3$ ,  $C_2 = 4/3$ ,  $T = 1/2$ .

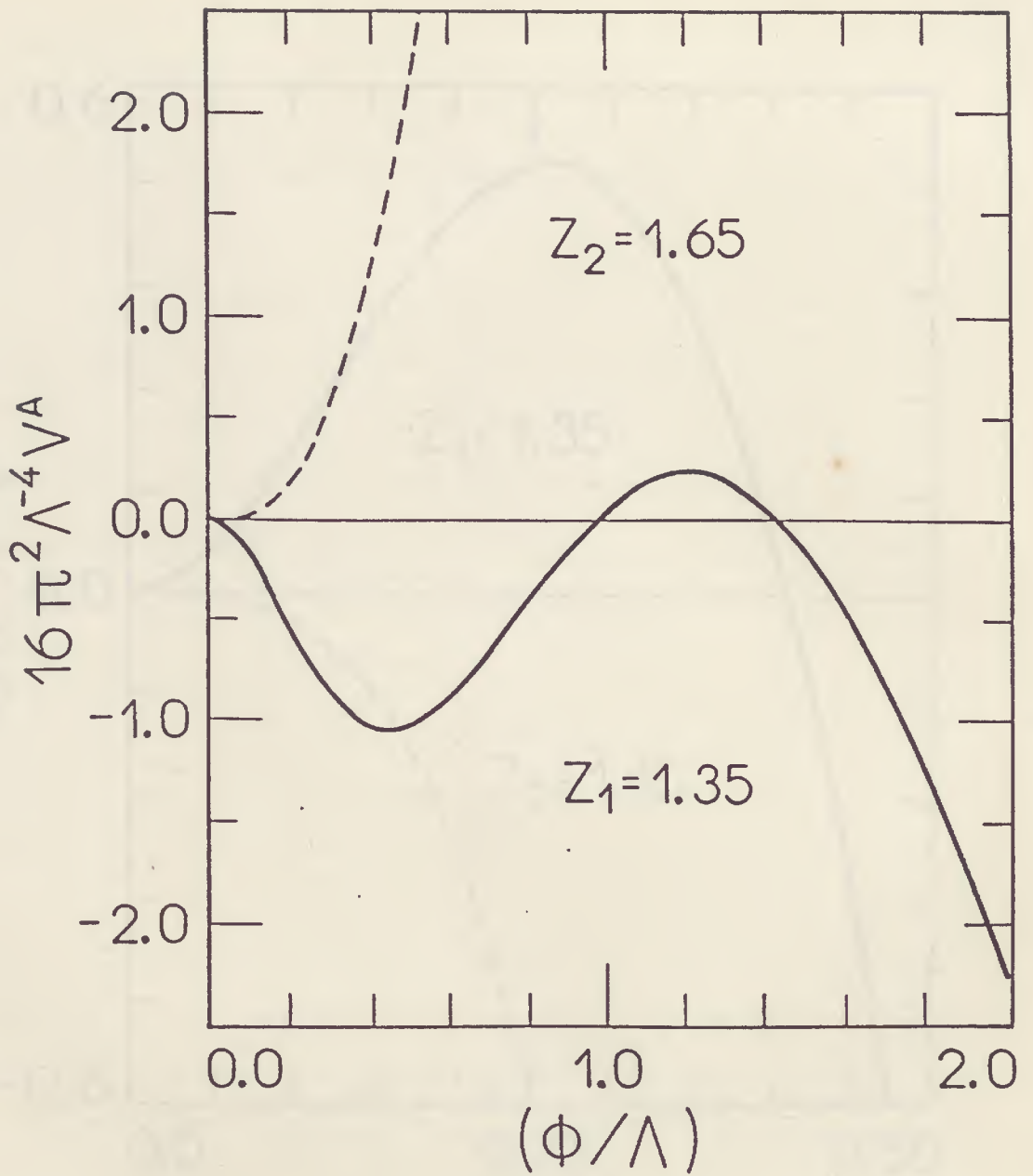


FIG. 18.2. O potencial efetivo  $V^A$ , calculado numericamente da expressão (17.4), para dois valores de  $Z$ :  $Z_1 = 1.35$  (curva contínua) e  $Z_2 = 1.65 > Z_c$  (curva tracejada).

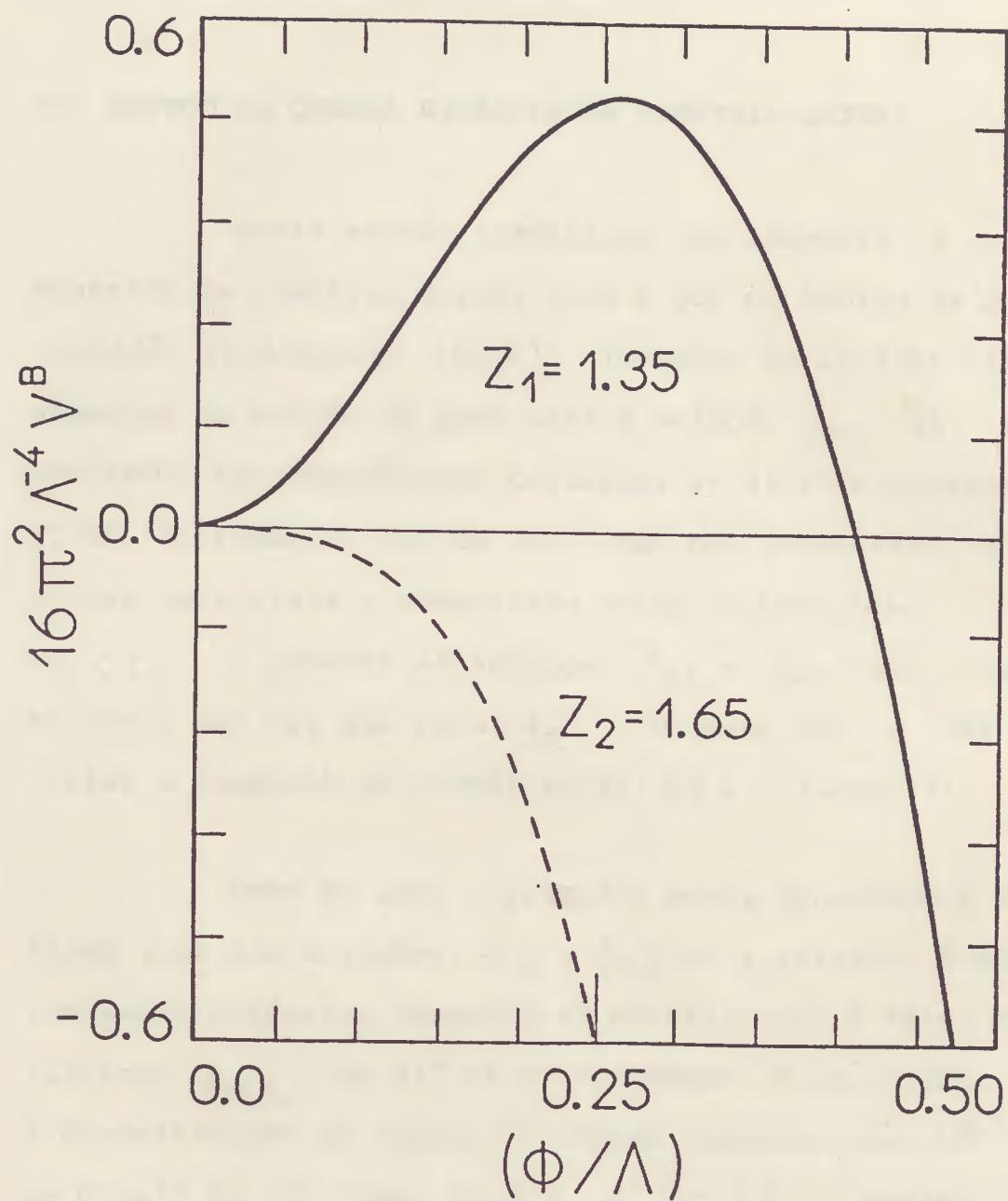


FIG. 18.3. O mesmo da figura 18.2 para  $V^B$ .

## 19. ESTUDO DA QUEBRA DINÂMICA DA SIMETRIA QUIRAL

Nesta secção examinamos isoladamente a quebra dinâmica da simetria quiral para a QCD no âmbito da representação fundamental ( $R=3$ ) (Montero et al-87b). Alguns aspectos do estudo da QDSQ para a solução  $f_{R2}$  já foram abordados nas referências Castorina et al-85 e Gusynin et al-85. Entretanto, nós os incluímos por completeza e para tornar mais clara a comparação entre as soluções. Para  $m_f < 5$ , somente as soluções  $f_{R1}$  e  $f_{R2}$  são levadas em conta uma vez que para  $f_I$ , o valor de  $A$  não satisfaz a condição de normalização  $A > 1$  (Lane-74).

Como na QED, a primeira etapa do estudo é verificar qual das soluções,  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$  ou a trivial, é energeticamente preferida (Montero et al-85). Isto é feito substituindo  $f_{R1,2}$  em (17.8) e integrando. O resultado, que é exemplificado na figura (19.1) onde representamos  $16\pi^2 \Lambda^{-4} V^C$  em função de  $\nu$  para  $m_f = 3$  e  $Z = 1.3$ , mostra que para todo  $Z$ , a solução  $f_{R1}$  é energeticamente preferida:  $V_{R1}^C(\nu, Z, m_f) < V_{R2}^C(\nu, Z, m_f) < 0$ . Entretanto, como mostramos no apêndice D, as funções  $f$  na QCD, em contraste com a QED, não são soluções exatas da equação de SD assintótica. Com isto, o uso das funções  $f$  para o cálculo do potencial efetivo, fica justificado apenas no contexto de um cálculo variacional. Assim sendo, a conclusão supra para  $V_{R1,2}^C$  só faz sentido se o valor de  $\nu$ , que satisfaz a condição de estacionariedade (mínimo) do potencial efetivo, for o mesmo para as duas soluções para cada valor

da constante de acoplamento (ou  $Z$ ). A seguir, estudamos os pontos estacionários do potencial efetivo para as diferentes soluções tentativas.

Baseados nos resultados da secção 18 utilizaremos apenas o potencial efetivo  $V^A$  para pesquisar os mínimos, capazes de fixar o valor do parâmetro variacional, para cada solução  $f$ . Então, comparamos as soluções assintóticas regulares substituindo  $f_{R1,2}$  na expressão de  $V^A$  dada por (17.4) com (17.5) e (17.7). Os resultados mostram que a solução assintótica  $f_{R2}$  exibe um mínimo mais profundo que  $f_{R1}$ , para valores de  $Z$  tais que  $V_{R1,2}^A$  esteja na fase onde a simetria é quebrada. O valor de  $Z$  crítico para a solução  $f_{R1}$  pode, também, ser calculado de (17.12,a) fazendo  $\rho = \rho_1 = A/2$  em (18.1). O resultado é  $Z_c \approx 1.39$  correspondendo à  $\alpha_c \approx 2.14$ . Exemplificamos os resultados nas figuras (19.2,a).

Os resultados aqui apresentados, bem como os da secção anterior, para  $V^A$ , calculado com  $f_{R2}$  para  $m_f = 3$ , estão de acordo com os obtidos em (Castorina et al-85, Gusynin et al-85). Entretanto, concordamos com (Gusynin et al-85) onde é afirmado que  $V^A$  torna-se negativo e decrescente para "grandes" valores de  $\nu$ . Ainda, com respeito a  $V^A$ , como podemos ver na figura (19.3) o valor do ponto mínimo de  $V^A$ ,  $\nu_M$ , decresce com o aumento da energia (ou  $Z$ ) até tornar-se zero, para  $Z > Z_c$ . Este é, certamente, um comportamento coerente para a massa dinâmica  $\Sigma(\rho)$ , que tem o valor de  $\phi$  fixado por  $\nu_M = \phi_M/\Lambda$ . Assim, sendo  $P_c$  a escala infravermelha, esperamos que os mínimos de  $V^A$  ocorram de modo que  $Z/\nu_M = P_c/\phi_M > 1$ .

Se entendemos o estudo para  $m_f \gg 5$  a solução irregular  $f_I(p)$  pode ser introduzida no problema. Entretanto, para o caso de  $f_I(p)$  dada por (17.10) algumas observações devem ser feitas. Em primeiro lugar constatamos que, contrariamente ao que sucede na QED, o potencial efetivo  $V^A$  não é finito. Isto ocorre porque existem integrais divergentes, quando consideramos a expansão de  $V^A$  em potências de  $\mathcal{O}$ , que não se cancelam entre si (veja-se a secção 10 para fazer um paralelo com o caso da QED). Essa situação é mostrada explicitamente no apêndice E para a ordem  $\mathcal{O}^2$ . Este fato constitui uma objeção à solução irregular uma vez que esperamos que a densidade de energia do vácuo seja finita. Esse comportamento indesejável de  $V^A$  com  $f_I(p)$  pode ser devido ao fato de que  $f_I$  não é sequer uma solução exata da equação assintótica de Schwinger-Dyson. Por outro lado, lembramos que o mesmo não ocorre com as soluções regulares  $f_R(p)$  pois, com estas, todas as integrais são convergentes. Em segundo lugar, como uma decorrência do primeiro, devemos optar por uma maneira de tratar as divergências para incluir a solução irregular no estudo. Assim, optamos por usar a equação integral assintótica de Schwinger-Dyson (D.1), que na variável  $x$  e  $\tilde{g}^2$  é dada por:

$$f(x) = \frac{g C_2(R)}{11N - 4m_f T(R)} \left\{ x \tilde{g}^2(x) \int_x^{1/z^2} \frac{dr}{r^2} f(r) + \int_0^x \frac{dr}{r} \tilde{g}^2(r) f(r) \right\} \quad (19.1)$$

como uma identidade em (17.11b): o termo  $\mathcal{L}(z, f)$  pode ser

escrito como:

$$l(z, f) = z^2 \tilde{g}_c^2 + z^2 \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) \quad (19.2)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f(t) \left\{ t \tilde{g}^2(t) \int_t^{1/z^2} \frac{dr}{r^2} f(r) + \int_0^t \frac{dr}{r} \tilde{g}^2(r) f(r) \right\}$$

O termo entre chaves de (19.2) pode ser substituído por  $f(t) / \left( \frac{g c_2}{11N - 4m_f T} \right)$  como podemos ver de (19.1), e neste caso teremos:

$$\tilde{l}(z, f) = z^2 \tilde{g}_c^2 + z^2 \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) \quad (19.2a)$$

$$+ \frac{11N - 4m_f T}{g c_2} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f^2(t)$$

Substituindo (19.2a) em (17.11) temos

$$16\pi^2 \Lambda^{-4} \tilde{V}^A \approx 2m_f d v^2 \left[ 1 - \frac{B}{8} \left( \tilde{g}_c^2 + \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) \right) \right] z^2 \quad (19.3)$$

Como podemos observar de (19.3) este procedimento remove as divergências quadráticas do potencial efetivo. Neste caso, a função  $F(z, m_f, f, R)$  será dada por:

$$\tilde{F} = z^2 \left( 1 - \frac{9C_2(R)}{11N - 4m_f T(R)} [\tilde{g}_c^2 + I_2] \right) \quad (19.4)$$

A integral  $I_2$  é calculada exatamente de modo que resulta:

$$\tilde{F} = z^2 \left( 1 - \frac{A}{2} \left( \frac{1}{\ln z} + \frac{4}{A} \right) \right) \quad (19.4a)$$

Como podemos ver de (19.4a), o potencial efetivo, que é finito nesta aproximação, não apresenta transição de fase quiral, uma vez que  $\tilde{F}$  é sempre negativo para todos os valores de  $z$ . Com isto, o potencial efetivo permanece na fase em que a simetria quiral está quebrada e neste caso, a solução irregular corresponde a uma quebra explícita da simetria sem que haja a realização do teorema de Goldstone. Esta é uma situação problemática uma vez que a quebra da simetria quiral na QCD deve, em princípio, dar origem aos píons observáveis.

Estas características da solução irregular, aqui obtidas via Potencial Efetivo, coincidem com aquelas utilizadas na literatura para descartar esse comportamento assintótico para a massa dinâmica dos quarks (Lane-74, Fomin et al-83, Pagels-72,73,79, Langacker et al-74).

Por outro lado, podemos perguntar: quais seriam

os feitos da solução irregular se adotássemos um outro procedimento para tratar as divergências? Para responder essa questão optamos por isolar a parte infinita (P.I) das integrais, que é identificada com a introdução de um cut-off, para levar em conta apenas a parte finita (P.F) das mesmas.

Feitas as observações acima, podemos calcular  $V^C$  para as três soluções assintóticas para  $m_f \gg 5$  observando ainda, que  $V^C$  é sempre finito: pois os termos proporcionais a  $\nu^2$  se cancelam exatamente. Integrando (17.8) numericamente, concluímos que fixado um valor de  $\nu$  qualquer,  $V^C$  apresenta uma estabilidade crescente quando calculado com as soluções  $f_{R2}$ ,  $f_I$  e  $f_{R1}$  respectivamente, para qualquer valor de  $z = P_c/\Lambda$ . Ilustramos essa situação na figura (19.4) representando  $V^C$  em função de  $\nu$  para  $m_f = 6$  e  $z = 1.2$ .

No caso da solução irregular, o valor de  $z_c$  é determinado do mesmo modo que para as soluções regulares. Entretanto, como algumas das integrais em (17.11) são divergentes, devemos tomar apenas a parte finita, como já foi observado. Assim, a parte finita (P.F) das integrais que tomam parte em (17.12a) são (veja-se o apêndice E):

$$PF(I_1) = -(\ln z^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln z^2)^m}{m!(1-A+m)}$$

$$PF(I_2) = 4/A \tag{19.5}$$

$$PF(I_3) = PF(I_4) = \frac{-4(\ln z^2)}{A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln z^2)^m}{m!(1-A+m)}$$

Das expressões (19.5) e (17.12a) podemos conhecer o valor de  $Z_C$  para os diferentes valores de  $\mathcal{M}_f$  para as três soluções. Fazemos um resumo desses valores na tabela 19.1.

Agora, voltamos a abordar o problema da estabilidade do vácuo do ponto de vista variacional. Neste caso, como já fizemos no contexto da QED e neste próprio para as soluções  $f_R$ , devemos calcular o potencial efetivo  $V^A$  para as três soluções e pesquisar os seus pontos de mínimo. Para as soluções regulares, como já vimos, isto é conseguido integrando numericamente a expressão (17.4) para  $V^A$ . Entretanto, para a solução irregular, as divergências nos impedem de proceder da mesma forma.

Com o propósito de estudar os pontos estacionários do potencial efetivo com a solução irregular, consideraremos  $V^A$  de modo aproximado tomando a sua expansão, em potências de  $\mathcal{N}$ , até termos de ordem  $\mathcal{N}^4$ . Esta iniciativa tem a vantagem de proporcionar um tratamento analítico das divergências. Expandindo as expressões (17.5) e (17.7) temos:

$$16\pi^2 \Lambda^{-4} V^A [O(\mathcal{N}^4)] = 2m_f d \left[ \mathcal{N}^2 z^2 + \frac{\mathcal{N}^4}{2} \left( \frac{1}{2} + 3 \ln \mathcal{N}^2 / z^2 \right) \right]$$

$$+ \mathcal{N}^2 \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f^2(t) - \frac{3}{2} \mathcal{N}^4 \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} f^4(t)$$

$$+ V_2 [O(\mathcal{N}^4)]$$

(19.6)

onde

$$\begin{aligned}
 V_2[O(\nu^4)] = & -m_f dB \left\{ \frac{\tilde{g}^2}{4} \nu^2 z^2 + \frac{\tilde{g}^2}{4} \nu^4 \left(1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\nu^2}{z^2}\right) \frac{\ln \nu^2}{z^2} \right. \\
 & + \frac{\nu^2 z^2}{4} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) + \frac{\nu^4}{4} \left[ \frac{\ln \nu^2}{z^2} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) - z^2 \int_0^{1/z^2} dt \tilde{g}^2(t) f^3(t) \right. \\
 & \left. + \frac{\nu^2}{8} \left[ \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) \int_t^{1/z^2} \frac{dr}{r^2} f(r) + \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f(t) \int_t^t \frac{dr}{r} \tilde{g}^2(r) f(r) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{\nu^4}{8} \left[ \int_0^{1/z^2} dt \tilde{g}^2(t) f^3(t) \int_t^{1/z^2} \frac{dr}{r^2} f(r) + \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \tilde{g}^2(t) f(t) \int_t^{1/z^2} \frac{dr}{r} f^3(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} f^3(t) \int_t^t \frac{dr}{r} \tilde{g}^2(r) f(r) + \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f(t) \int_t^t dr \tilde{g}^2(r) f^3(r) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{19.6a}$$

Introduzindo a notação  $S_i$  e  $D_i$  para designar, respectivamente, a contribuição finita das integrais simples e duplas na ordem em que estas aparecem em (19.6) temos: (veja-se o apêndice E para exemplo de cálculo)

$$S_1 = -L \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m}{m! (1-A+m)} \quad ; \quad L = (\ln z^2)$$

$$S_2 = \frac{L}{2A-1}$$

$$S_3 = S_4 = \frac{4}{A}$$

$$S_5 = \frac{2}{L^{-\frac{3A}{2}}} \Gamma\left(-\frac{3A}{2}, L\right)$$

(19.7)

$$D_1 = D_2 = -\frac{4L}{A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m}{m!(1-A+m)}$$

$$D_3 = D_6 = \frac{2}{L^{2A}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-2A+m, L)}{m!(1-A/2+m)} \\ - \frac{2L}{L^{-\frac{3A}{2}}} \Gamma\left(-\frac{3A}{2}, L\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m}{m!(1-A/2+m)}$$

$$D_4 = D_5 = \frac{4L}{A(2A-1)}$$

Calculando (19.7) numericamente, dados os valores de  $m_f$  e  $z$ , e substituindo em (19.6) e (19.6a) podemos conhecer  $V^A$  em função de  $\mathcal{N}$ . Com isto, mostra-se que o potencial efetivo  $V^A$  calculado com a solução irregular até a ordem  $\mathcal{N}^4$ , de acordo com o procedimento aqui descrito, exibe pontos estacionários. Um exemplo comparativo desse comportamento é mostrado na figura (19.5) para  $m_f = 9$  e  $z = 1.5$ .

Os resultados obtidos de  $V^A$  com as três soluções assintóticas, ilustradas nas figuras 19.2,a e 19.5 mostram que estas são soluções "tentativa" suficientemente adaptadas para realizar o método variacional. Entretanto, como o potencial efetivo apresenta transição de fase, e os valores de  $z_c$  são diferentes para os três casos, a comparação do valor do potencial no mínimo, para as distintas soluções, não é um forte critério para estabelecer qual destas é preferida energeticamente. Observemos que  $z$  é um parâmetro livre que pode ser variado de maneira contínua no segmento real:  $1 \dots z_c \dots$ . Assim, podemos distinguir duas situações com base nos dados da tabela 19.1 e nas figuras (19.2,a) e (19.5):

- a) para as soluções regulares, o  $z_c$  da solução  $f_{R1}$  é sempre menor que o correspondente para a solução  $f_{R2}$  e para um mesmo valor de  $z$ , o mínimo do potencial efetivo calculado com  $f_{R2}$  é mais profundo do que quando calculado para  $f_{R1}$ . Neste caso, os cálculos mostram que para  $z < (z_c)_{R2}$  o vácuo da teoria é mais estável com a solução  $f_{R2}$ .
- c) para a solução irregular temos que  $(z_c)_I > (z_c)_{R2} > (z_c)_{R1}$  assim, para  $z < (z_c)_{R2}$ ,  $V^A$  exibe um mínimo mais profundo para  $f_{R2}$ . Entretanto, para  $(z_c)_{R2} < z < (z_c)_I$ ,  $V^A$  com  $f_{R2}$  está na fase simétrica ( $N_M = 0$ ) enquanto  $V^A$  com  $f_I$  permanece na fase com quebra de simetria.

Justapondo os casos a e b concluímos que a fase na qual se encontra a teoria (simétrica ou não) depende da escala de energia  $z = P_c/\Lambda$ .

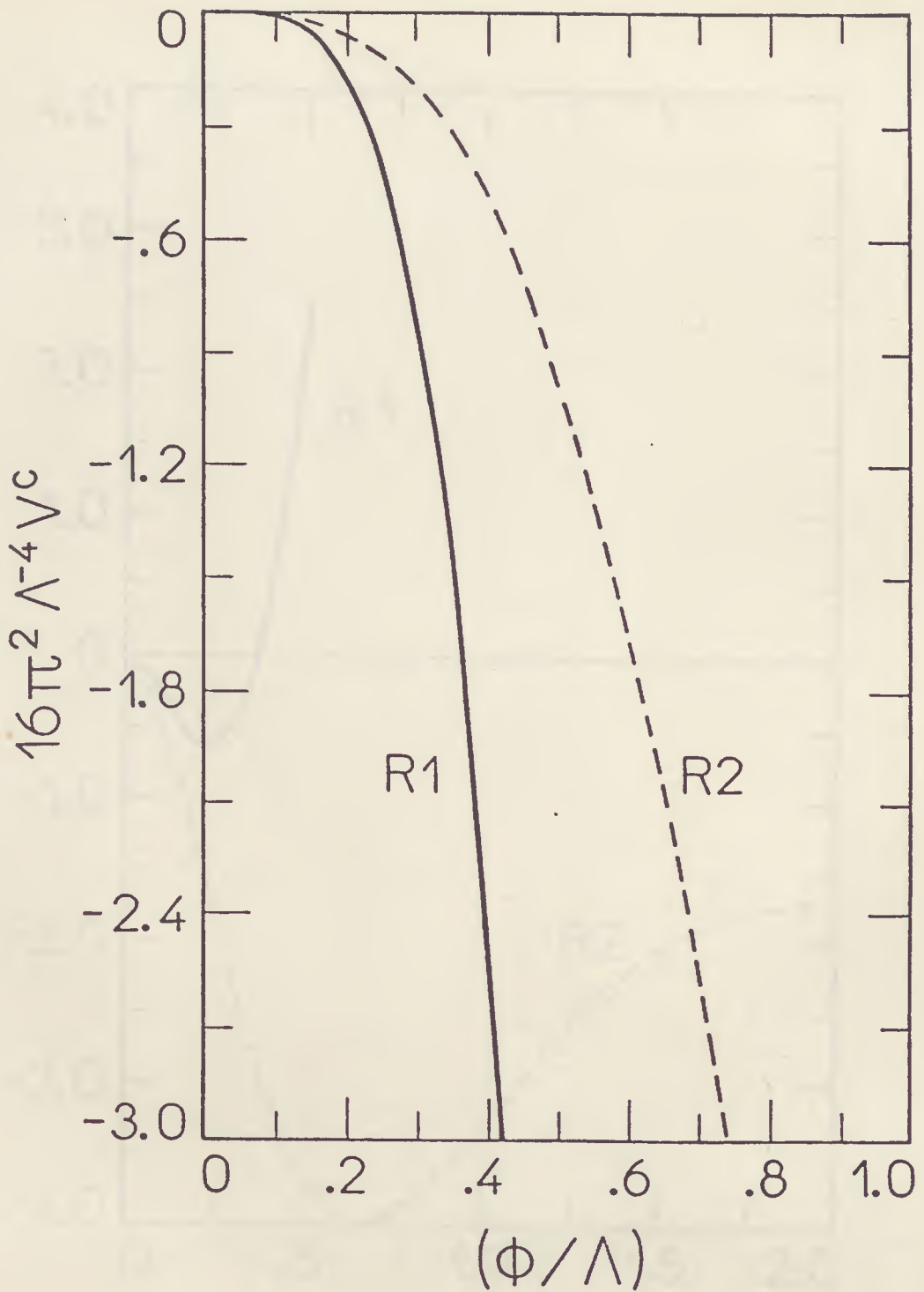


FIG. 19.1. O potencial efetivo  $V^c$  calculado numericamente da expressão (17.8) para as soluções regulares R2 (curva tracejada) e R1 (curva contínua) para  $z = 1.3$  e  $m_f = 3$ .

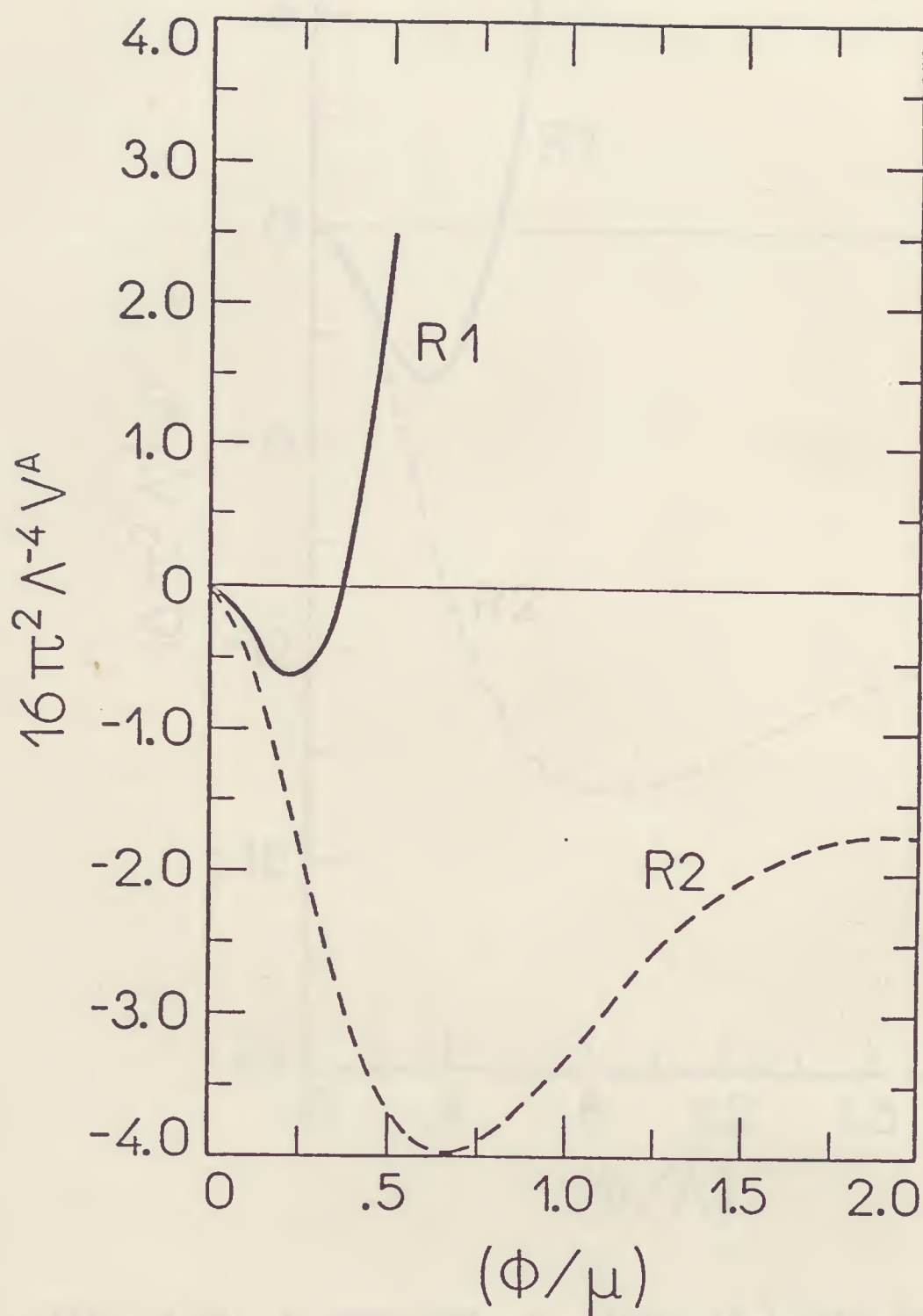


FIG. 19.2. O potencial efetivo  $V^A$  calculado numericamente da expressão (17.4) para as soluções regulares R2 (curva tracejada) e R1 (curva contínua) para  $z=1.3$  e  $m_s=3$ .

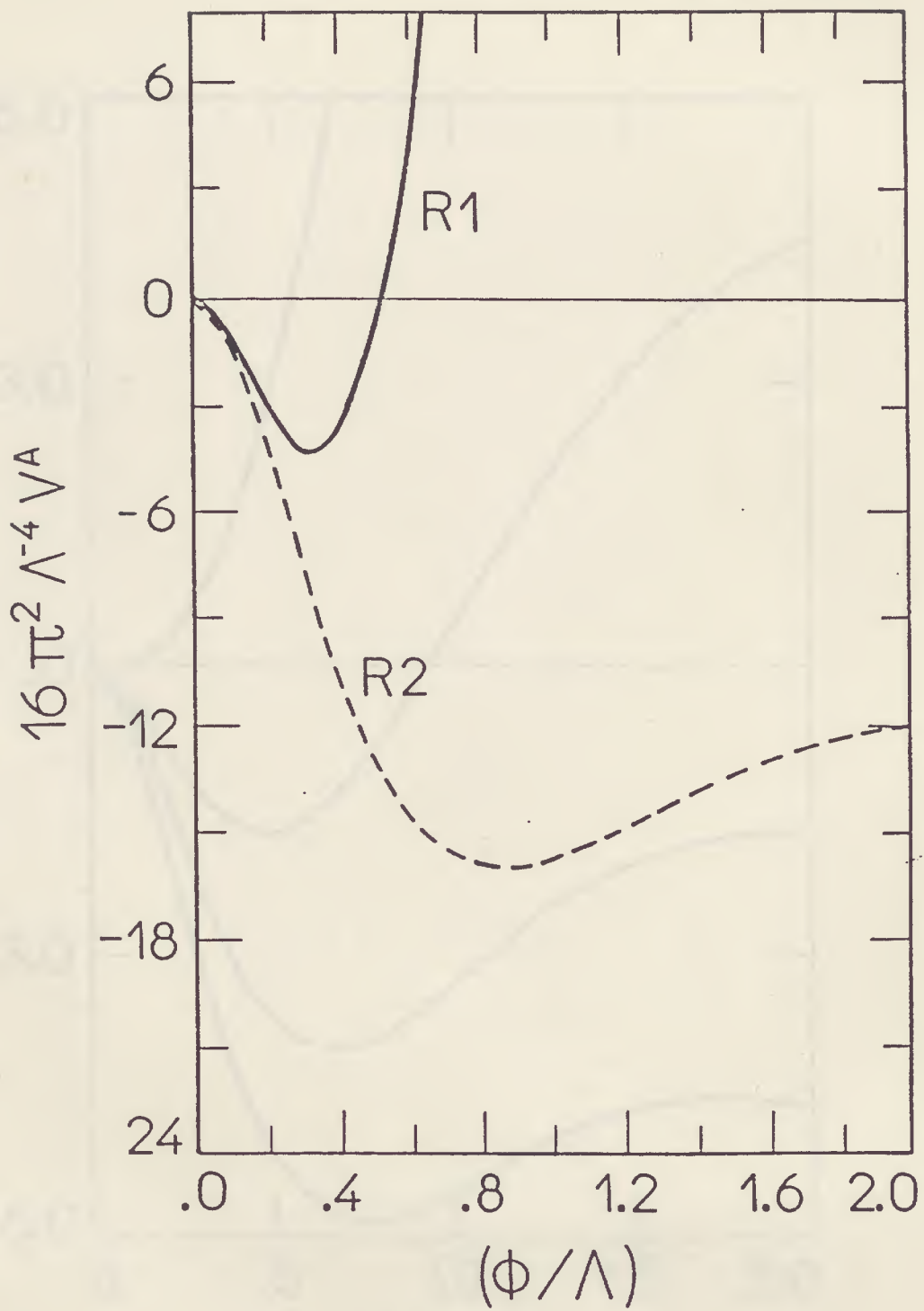


FIG. 19.2a. O mesmo que a figura 19.2 para  $z=1.2$  e  $m_y=6$ .

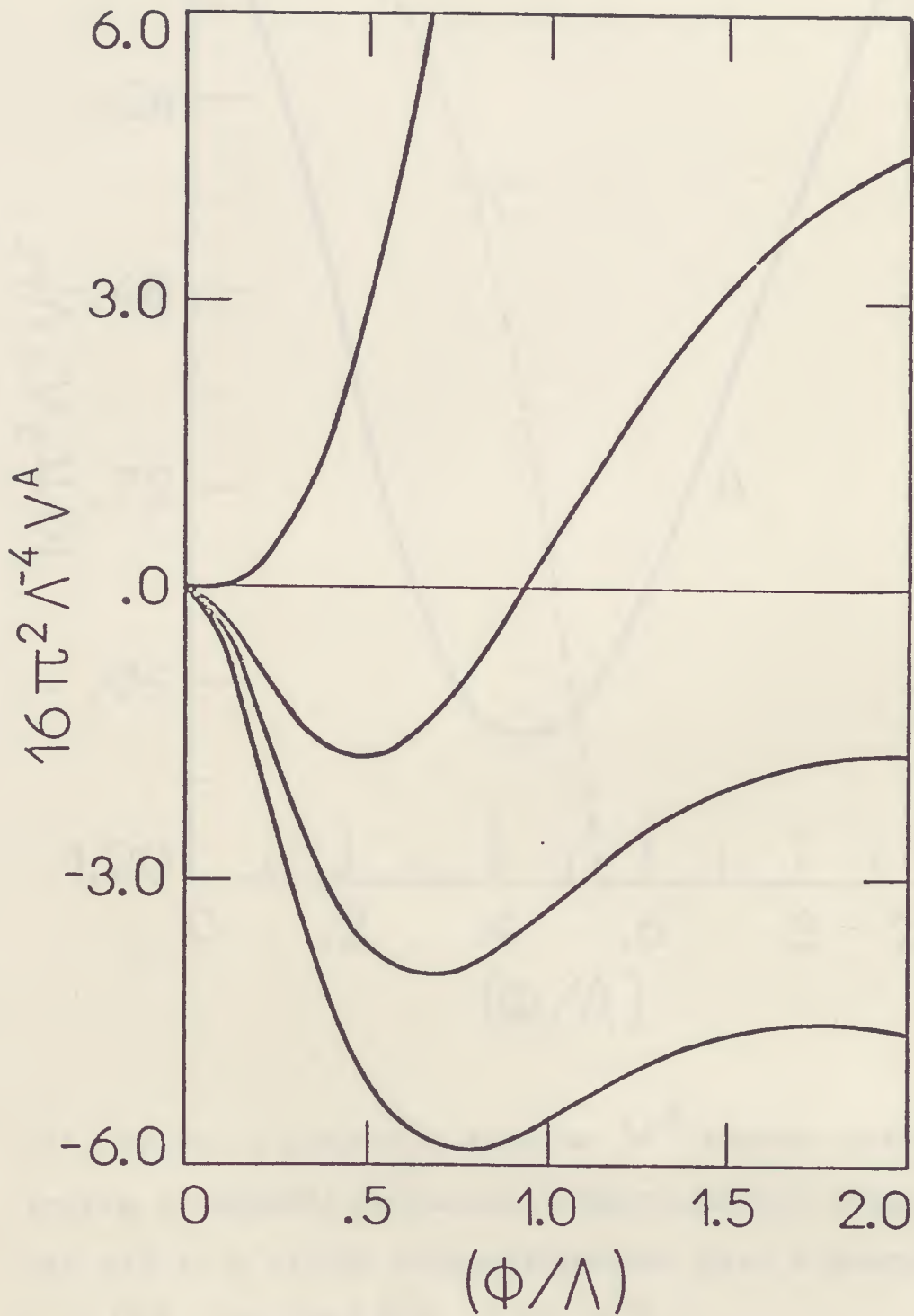


FIG. 19.3. O potencial efetivo  $V^A$  calculado numericamente da expressão (17.4) para a solução regular  $R_2$  com vários valores de  $z$  :  $z = 1.2, 1.3, 1.4$  e  $1.65 > z_c$ . A figura (19.3a) ilustra o bom acordo do ponto de mínimo de  $V^A$  com o valor de  $V^C$ .

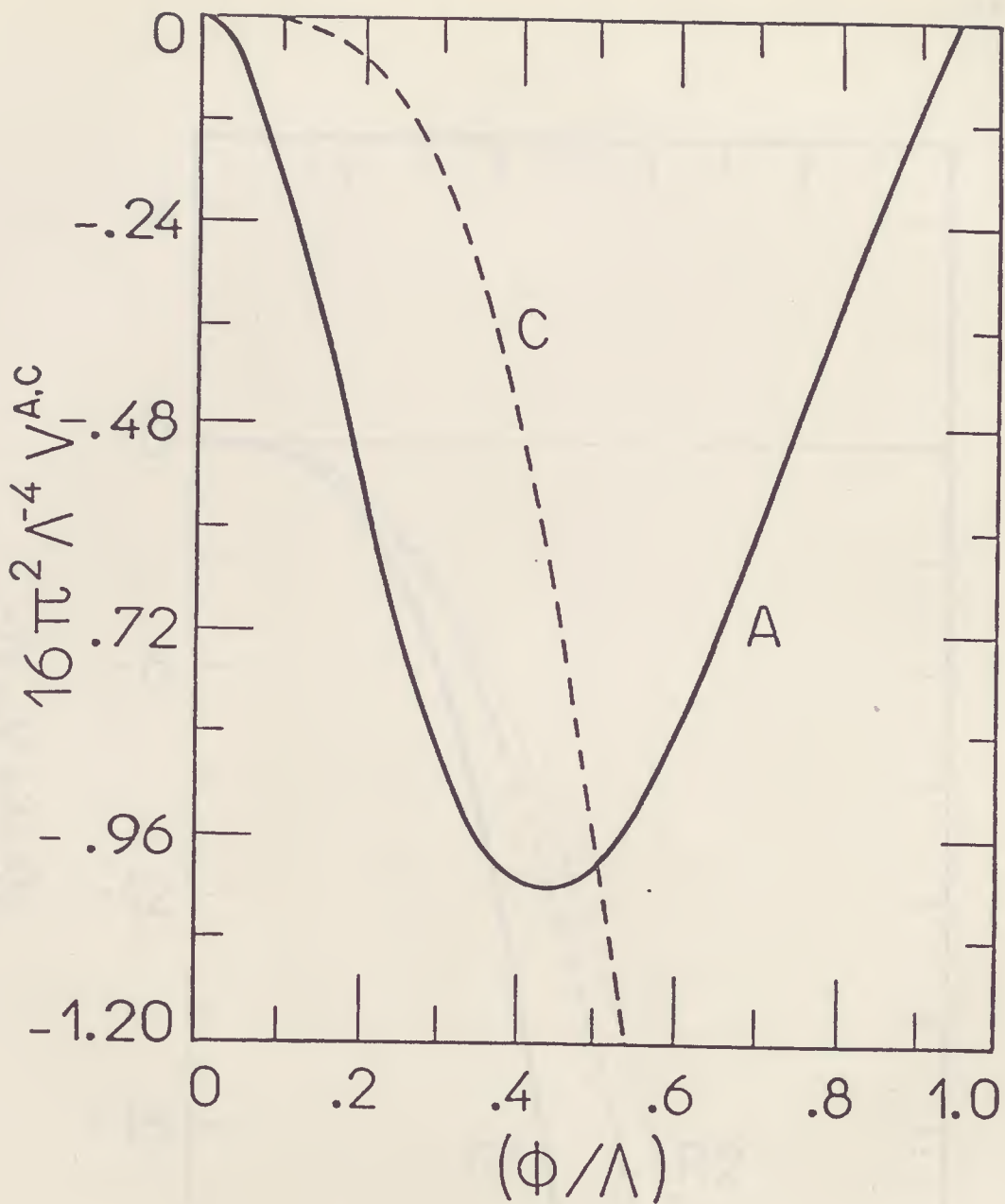


FIG. 19.3a. O potencial efetivo  $V^A$  (curva contínua) e  $V^C$  (curva tracejada) calculados numericamente, desde as fórmulas (17.4) e (17.8) respectivamente, para a solução regular R2 com  $z=1.25$  e  $n_l=3$ .

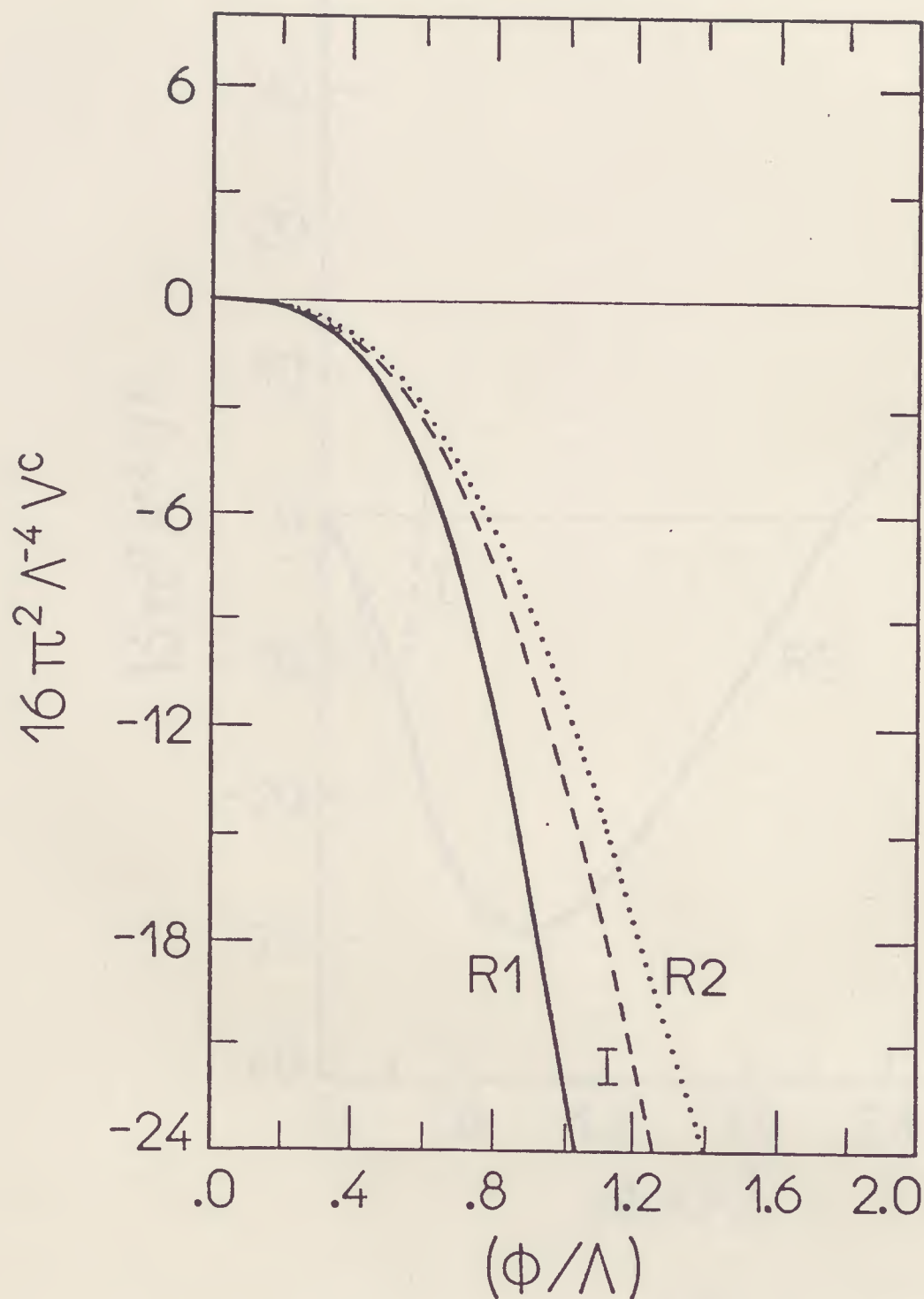


FIG. 19.4. O potencial efetivo  $V^c$  calculado numericamente da expressão (17.8) para as soluções R2 (curva pontilhada), R1 (curva contínua) e I (curva tracejada) para  $z = 1.2$  e  $m_y = 6$ .

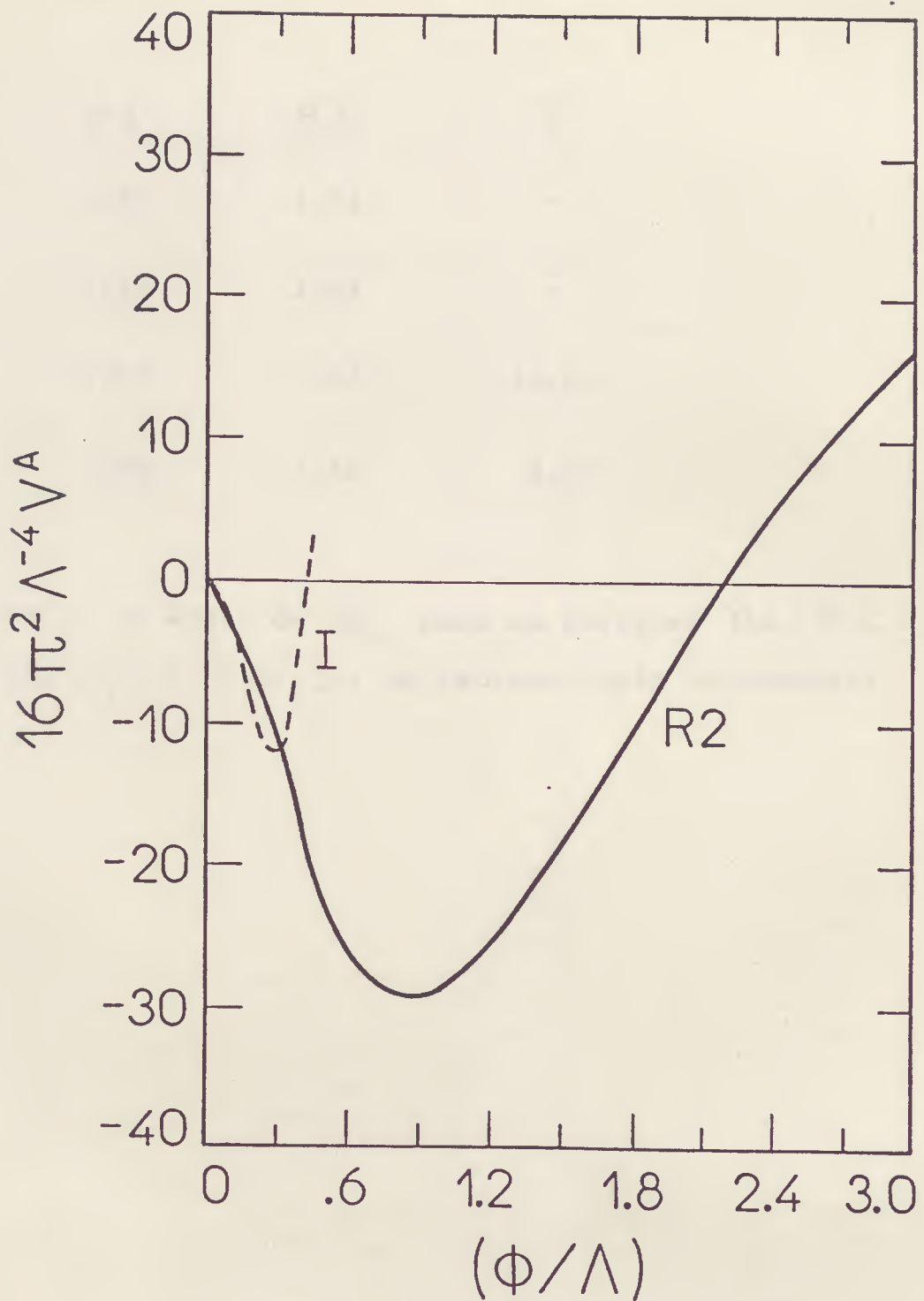


FIG. 19.5. O potencial efetivo  $V^A$  calculado numericamente de (17.4) para a solução R2 (curva contínua) e de (19.6) para a solução I (curva tracejada) com  $z=1.5$  e  $m_f=9$ .

$m_f$	R1	R2	I
1	1.31	1.51	-
3	1.39	1.61	-
6	1.58	1.88	19.29
9	2.08	2.48	3.17

TAB. 19.1. O valor de  $Z_c$  para as soluções R1, R2 e I, com  $m_f = 1, 3, 6, 9$ , na representação fundamental.

## 20. REPRESENTAÇÕES EXÓTICAS

Nesta secção consideraremos a hipótese especulativa proposta por W. J. Marciano (Marciano-80). Nesta, é proposta a existência de quarks exóticos, pertencentes às representações  $R = \underline{6}, \underline{8}, \underline{10}, \dots$  do grupo  $SU(3)_C$ , além dos usuais representados em  $\underline{3}$ -plets. A situação mais interessante, argumentada por Marciano, é aquela na qual as constantes de acoplamento crítico  $\alpha_C$  das diversas representações exóticas se relacionam com a fundamental ( $R = 3$ ) através de:

$$C_2(R)\alpha_C(\mu_R) = C_2(3)\alpha_C(\mu_3) \quad (20.1)$$

onde  $\mu$  é a escala de massa na qual a simetria quiral é quebrada. Neste caso, a expressão que relaciona as escalas de massa  $\mu_3$  e  $\mu_R$  fica dada por:

$$\frac{\mu_R}{\mu_3} = \exp \left( \int_{\alpha_C(\mu_3)}^{\frac{C_2(3)}{C_2(R)}\alpha_C(\mu_3)} \frac{d\alpha}{\beta(\alpha)} \right) \quad (20.2)$$

e no caso de  $\alpha_C(\mu_3)$  ser tal que a teoria de perturbação é válida, obtém-se

$$\frac{\mu_R}{\mu_3} \approx \exp \left[ \frac{2\pi}{7\alpha_S(\mu_3)} \left( \frac{C_2(R)}{C_2(3)} - 1 \right) \right] \quad (20.3)$$

O propósito desse trabalho é obter para  $\mu_R$  uma razão  $\mu_R/\mu_3 \sim 10^3$  ( $\mu_3 \sim 1$  GeV) de tal modo a dar conta das massas dos bosons vetoriais  $W^\pm$  e  $Z^0$ .

Aqui, usamos o método para o estudo da quebra dinâmica da simetria quiral para calcular a constante de acoplamento crítica para as diferentes representações ( $\alpha_c(R)$ ) e assim testar a plausibilidade da relação (20.1) (Montero et al-87c).

Para cada representação isoladamente definimos  $\alpha_c(R)$  como sendo  $\alpha_c = g_c^2/4\pi$  que é explicitamente dada por:

$$\alpha_c(R) = \frac{6\pi}{33 - 4\sum_f T_f(R)} \frac{1}{\ln Z_c(R)} \quad (20.4)$$

Também, determinamos o número de sabores aceitável em cada representação, examinando o sinal de

$$b = - \frac{1}{6\pi} \left( 33 - \sum_R 4m_f(R) T_f(R) \right) \quad (20.5)$$

para manter a liberdade assintótica. Em cada caso,  $\alpha_c(R)$  é calculado das expressões (17.12a) e (18.1). Os dados sobre as representações são mostrados na tabela 20.1 e os resultados obtidos na tabela 20.2.

Como podemos observar dos valores de  $C_2(R)\alpha_c(R)$ , mostrados na tabela-2, a relação (20.1) é aproximadamente cumprida para a solução  $f_{R2}$ . Para a situação estudada por Marciano, ou seja,  $n_f(3) = 6$  e  $n_f(6) = 2$  (os casos A6 e B2 da tabela-2) temos um erro de  $\approx 17\%$  no cumprimento da relação (20.1). Entretanto, o valor de  $\alpha_c(\mu_3)$  que resulta dos nossos cálculos não pertence à região perturbativa ( $\alpha_c(\mu_3) = 1.42$ ), de modo que a relação (20.3) que relaciona as distintas escalas de massa não é aplicável. Por outro lado, nesta abordagem a relação entre as escalas das distintas representações pode ser obtida diretamente fazendo  $Z_c(R)/Z_c(3) = P_c(R)/P_c(3) = \mu_R/\mu_3$ , que no caso em estudo resulta:  $\mu_6/\mu_3 = 21.51/1.88 \sim 11.44$ . Note-se que com  $\mu_6/\mu_3 \sim 10$ , a escala de quebra da simetria quiral para os 6-plets será  $\mu_6 \sim 4$  GeV, e não há hierarquia nas escalas de massa.

Para um único 6-plets obtemos  $Z_c \approx 4.89$  ( $\alpha_c \approx 0.5$ ) e  $C_2(6)\alpha_c(6) \approx 1.72$ . Ou seja, a relação (20.1) é satisfeita com um erro de  $\sim 9\%$  mas a relação  $\mu_6/\mu_3 \sim 2.6$  não indica hierarquia.

... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...

... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...

### CONCLUSÃO

... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...

... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...  
... a respeito da natureza da ...

Nesta secção faremos referência àqueles pontos do trabalho, cujo comentário ou análise julgamos não oportuno não incluir no texto, bem como àqueles que, embora já tenham sido abordados, desejamos enfatizar.

Começamos observando que a nossa abordagem da QDSQ está estreitamente relacionada com aquela feita por CJT (Cornwall et al-74), para o estudo do modelo de Cornwall-Norton (Cornwall et al-73), ou seja, a junção do Potencial Efetivo com o método variacional. Entretanto, nesse trabalho, CJT consideram o PE dado por sua expansão diagramática no contexto de uma aproximação ali denominada de "teoria linearizada".

Continuando, recordaremos as condições em que nossos resultados foram obtidos. No contexto da teoria abeliana, QED, estudamos a QDSQ calculando o PE com um ansatz variacional para a autoenergia dos férmions,  $\Sigma_{\pm}(p)$ . Esse ansatz é constituído, na parte ultravioleta ( $p > \mu$ ), pelas funções  $f_{\pm}(p)$  que são soluções exatas da equação de Schwinger-Dyson assintótica na sua forma diferencial. Com este  $\Sigma_{\pm}(p)$ , o PE resulta ser finito, quando calculado com a solução assintótica regular  $f_{+}$  ou com a irregular  $f_{-}$ , e livre de divergências infravermelhas. Os resultados surgem quando calculamos  $V^{A,B,C}$  com o ansatz  $\Sigma_{\pm}$ :

- a) não há transição de fase quiral (secção 12),
- b) a configuração que realiza o método variacional e é preferida energeticamente é aquela formada pelo Potencial Efetivo de CDDG,  $V^B$  e a solução irregular  $f_{-}$ . Veja

a secção 11 é a discussão feita na secção 14. Disto concluimos que, a teoria em estudo (QED não massiva) tem a simetria quiral quebrada dinamicamente e não apresenta transição de fase quiral, para os valores da constante de acoplamento estudados, e que o comportamento assintótico da massa dinâmica é o irregular. Mais adiante analisaremos estas características no contexto de realização, ou não, do teorema de Goldstone.

Na QCD, o procedimento para o estudo da QDSQ é o mesmo. Entretanto, substanciais diferenças devem ser assinaladas: em primeiro lugar, observamos que as funções  $f(p)$  que compõem a parte ultravioleta do ansatz variacional  $\Sigma(p)$  não são soluções exatas da equação assintótica de SD para a massa dinâmica (veja o apêndice D). Em segundo lugar assinalamos que o PE, que é finito quando calculado com as soluções assintóticas regulares  $R_{1,2}$ , apresenta divergências com a solução  $I$ , se nós executarmos o cálculo dos integrais diretamente (veja apêndice E). Ainda, nesta teoria não abeliana, é necessário introduzir um ansatz para a constante de acoplamento  $g^2(p,k)$  (Castorina et al-85).

O primeiro resultado de caráter geral é que esta teoria apresenta transição de fase quiral e é possível calcular o valor da constante de acoplamento crítica  $\alpha_c$  (ou  $Z_c$ ) (veja a tabela 19.1). Esse resultado é válido para as soluções regulares. A situação para a solução irregular necessita esclarecimentos: como devemos eliminar as divergências do PE, estudamos a transição de fase em duas situa

ções distintas a) na primeira, removemos as integrais divergentes usando a equação de SD assintótica, como uma identidade, nas integrais duplas que aparecem no termo de ordem  $\mathcal{O}^2$ . Este procedimento é análogo àquele usado por CJT para remover as divergências quadráticas na aproximação linearizada. b) na segunda, nós removemos as divergências, identificando-as com o auxílio de um cut-off, e seguimos o cálculo apenas com a parte finita das integrais.

Os casos acima a e b tem consequências bastante diferentes. No caso a a teoria não apresenta transição de fase quiral, enquanto no b esta ocorre do mesmo modo que nas soluções regulares (veja a secção 19 e a tabela 19.1). Nós tomamos mais seriamente o procedimento e os resultados proveniente de a e atribuímos a b apenas um significado especulativo.

Concluídas as observações referentes à solução irregular, observamos que dos potenciais efetivos  $\sqrt{A, B}$ , que apresentam transição de fase com as soluções regulares,  $\sqrt{A}$  é aquele que sofre a transição da forma desejável para uma teoria não abeliana: fase não-simétrica para  $\alpha > \alpha_c$  e fase simétrica para  $\alpha < \alpha_c$  (veja a secção 18) (Castorina et al-85, Gusynin et al-85).

Do estudo de  $\sqrt{A, C}$  com as soluções regulares, em uma abordagem estritamente variacional, obtemos que a solução preferida energeticamente é a regular  $R2$ . Veja a secção 19, e em particular as figuras 19.2,a - 19.3,a.

Resumindo, concluimos que a QCD é uma teoria que

apresenta quebra dinâmica da simetria quiral e que exibe uma transição de fase quiral que é, nesta abordagem, descrita pelo potencial efetivo de CJT e pelo comportamento assintótico ditado pela solução regular  $R_2$ .

Abordaremos agora a questão relativa à realização do teorema de Goldstone. As Lagrangeanas que descrevem as teorias aqui estudadas, QED e QCD, são formalmente invariantes por  $\gamma_5$ . Entretanto, quando a simetria quiral é quebrada em ambas teorias, temos duas situações completamente diferentes: enquanto os bosons de Goldstone são bem vindos na QCD, os mesmos são indesejáveis na QED. Isto implica em que devemos ter, por consistência, duas possibilidades para o acoplamento dos bosons de Goldstone.

Antes de prosseguir gostaríamos de enfatizar que quando os potenciais efetivos não sofrem transição de fase quiral e se apresentam na fase quebrada, a quebra dinâmica de simetria, exibida pela teoria, corresponde a uma quebra explícita da simetria e, neste caso, não há a realização do teorema de Goldstone (Lane-74, Fomin et al-83).

Continuando, para mostrar a existência dessas possibilidades recorreremos à argumentação desenvolvida por H. Pagels em (Pagels-72). O ponto central da análise são as expressões:

$$\overline{\Gamma}_5 = \int \overline{\Gamma}_5 \tilde{G} \tilde{G} \tilde{K} \quad (1)$$

$$\gamma_5 G(p) = 2m \overline{\Gamma^5}(p,p) - (Z_A/Z_2) \{ \Sigma(p), \gamma_5 \} \quad (2)$$

que são obtidos da equação de Schwinger-Dyson para  $\Gamma^5$  e da identidade de Ward axial. As quantidades em (1-2) são as renormalizadas e são tais que  $\tilde{\Gamma}_\mu^5 = Z_A \Gamma_\mu^5$ ,  $\tilde{\Gamma}^5 = Z_D \Gamma^5$ ,  $\tilde{G}^{-1} = Z_2 G^{-1}$ ,  $m \overline{\Gamma^5} = Z_A m_0(\lambda) \Gamma^5$  e  $Z_A m_0(\lambda) \rightarrow 0$  para  $\lambda \rightarrow \infty$ .  $G(p)$  é a função de onda do boson de Goldstone e  $K$  é o kernel de espalhamento fermion-antifermion.

Das equações (1-2) surgem duas possibilidades:

a) quando  $\{ \Sigma, \gamma_5 \}_+ \neq 0$  e não há Goldstone ( $G(p) = 0$ ) temos:

$$m \overline{\Gamma^5}(p,p) = \frac{Z_A}{Z_2} \gamma_5 \Sigma(p) \neq 0$$

ou seja, devemos ter uma solução não trivial da equação (1) (Maris et al-66). Esta é justamente a situação aplicável à QED, para o potencial efetivo  $V^B$  com a solução irregular uma vez que, neste caso,  $\phi_M \neq 0$  e logo  $\sum_{UV} = \phi_M f(p) \neq 0$ , e à QCD com a solução irregular;

b) quando  $\{ \Sigma, \gamma_5 \}_+ \neq 0$  e há os bosons de Goldstone ( $G(p) \neq 0$ ): neste caso, a equação (1) deverá ser satisfeita pela solução trivial de modo que

$$G(p) = - 2 \frac{Z_A}{Z_2} \Sigma(p) .$$

Esta é a situação que se adapta à QCD para  $V^A$  com as soluções regulares.

Na literatura encontramos diferentes análises do problema de qual das soluções assintóticas exhibe o comportamento adequado para a massa dinâmica na QCD (Fomin et al-83). Nesta referência, estuda-se o problema do ponto de vista da conservação da corrente axial e é assumida uma forma explícita para o comportamento do condensado (Shifman et al-78). A análise ali desenvolvida seleciona, também, a solução assintótica  $R_2$  para a massa dinâmica dos fermions.

É importante notar que os nossos resultados para a QED, onde não obtivemos transição de fase quiral, não estão de acordo com aqueles obtidos para a QED na rede na "quenched approximation" (Bartholomew et al-84). Os autores dessa referência obtêm uma transição de fase para  $\alpha_c \approx 0.29$ . Contudo, esse valor é fortemente influenciado pela forma da ação para curtas distâncias. Por exemplo, para uma ação mais sensível a esses efeitos resulta  $\alpha_c \approx 0.16$ . Nós observamos, entretanto, que os métodos, de abordagem do problema, são radicalmente diferentes.

## APÊNDICE A

Neste apêndice mostramos que os termos

$$\frac{1}{(p-k)^2} \left[ -p.k - \frac{2(p^2-p.k)(p.k-k^2)}{(p-k)^2} \right] \quad (\text{A.1})$$

não contribuem para o Potencial Efetivo a nível de 2-loops. Veja o parágrafo abaixo da expressão (9.9).

Consideremos a integral angular de (A.1) em variáveis euclidianas:

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{d\Omega}{(p-k)^2} \left[ p.k - \frac{2(p^2-p.k)(k^2-p.k)}{(p-k)^2} \right] \\ &= - \int \frac{d\Omega}{(p-k)^2} \left[ p.k - 2 \frac{p^2k^2 - (p^2+k^2)(p.k) + (p.k)^2}{(p-k)^2} \right] \\ &= - \int \frac{d\Omega}{(p-k)^2} \left[ 3p.k - 2 \frac{p^2k^2 - (p.k)^2}{(p-k)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Sendo  $\theta$  o ângulo entre  $p$  e  $k$  temos  $d\Omega = 8\pi^3 \sin^2\theta d\theta$  de modo que:

$$\begin{aligned} I &= -8\pi^3 \int \frac{d\theta \sin^2\theta}{(p-k)^2} \left[ 3pk \cos\theta - \frac{2p^2k^2(1-\cos^2\theta)}{(p-k)^2} \right] \\ &= -8\pi^3 [I_1 - I_2] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde

$$I_1 = 3pk \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^2 \omega \theta}{(p-k)^2} = \frac{3k}{p} \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^2 \omega \theta}{(1-2a \cos \theta + a^2)}$$

$$I_2 = 2p^2 k^2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^4 \theta}{(p-k)^4} = \frac{3k^2}{p^2} \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin^4 \theta}{(1-2a \cos \theta + a^2)^2}$$

com  $a = k/p$ . Usando as propriedades

$$\sin^2 \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{6}{16}$$

e as integrais (Gradshteyn et al)

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-2a \cos x + a^2)^m} = \frac{\pi}{(1-a^2)^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k-1)!}{(k!)^2 (m-k-1)!} \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^k; a^2 < 1$$

$$= \frac{\pi}{(a^2-1)^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k-1)!}{(k!)^2 (m-k-1)!} \frac{1}{(a^2-1)^k}; a^2 > 1$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx \cos mx}{(1-2a \cos x + a^2)^m} = \frac{a^{2m+m-2}}{(1-a^2)^{2m-1}} \pi \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+m-1}{k} \binom{2m-k-2}{m-1} \left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)^k; a^2 < 1$$

$$= \frac{\pi}{a^m (a^2-1)^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+m-1}{k} \binom{2m-k-2}{m-1} (a^2-1)^k; a^2 > 1$$

obtemos:

$$I_1^> = 3 \frac{k}{p} \left( \frac{\pi p^3}{4 k^3} \right) = \frac{3\pi}{4} \frac{p^2}{k^2} ; a > 1$$

$$I_1^< = \frac{3k}{p} \left( \frac{\pi k}{4 p} \right) = \frac{3\pi}{4} \frac{k^2}{p^2} ; a < 1$$

(A.4)

$$I_2^> = 2 \frac{k^2}{p^2} \left( \frac{3\pi p^4}{8 k^4} \right) = \frac{3\pi}{4} \frac{p^2}{k^2} ; a > 1$$

$$I_2^< = 2 \frac{k^2}{p^2} \left( \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{3\pi}{4} \frac{k^2}{p^2} ; a < 1$$

Dos resultados (A.4) temos que:

$$(I_1^> - I_2^>) = (I_1^< - I_2^<) = 0$$

de modo que  $I = 0$ . Logo, a contribuição dos termos (A.1) é nula.

## APÊNDICE B

Neste apêndice mostramos que os resultados obtidos, na secção 11, para  $V^C$  calculado com as duas soluções assintóticas, regular e irregular, são independentes do uso do método variacional.

Neste contexto, não usar o método variacional significa usar um ansatz para  $\Sigma(p)$  mais restrito:

$$\Sigma(p) = \mu [\theta(\mu-p) + f_{\pm}(p)\theta(p-\mu)] \quad (\text{B.1})$$

onde  $\mu$  é agora um parâmetro fixo porém arbitrário. Como vemos de (9.9),  $V^C$  tem integrais do tipo  $\int_{\mu}^{\infty} p^2 dp F(p, f_{\pm}(p))$ . Definindo a variável adimensional  $x = p^2/\mu^2$  essas integrais podem ser escritas como  $\mu^4 \int_1^{\infty} x dx F(x, f_{\pm}(x))$ . Então, numa abordagem não variacional, toda a dependência de  $V^C$  com o parâmetro de massa  $\mu$  é dada na forma  $V^C(\mu) \propto \mu^4 F_E$  onde  $F_E$  é o número que resulta quando todas as integrais são calculadas e este não retém nenhuma dependência com  $\mu$ . Nesta abordagem, os aspectos não lineares de  $V^C$  com  $\Sigma$  manifestam-se apenas na dependência funcional de  $f_{\pm}$  com  $p$ . Substituindo o ansatz não-variacional (B.1) em (9.9) e integrando na região infravermelha temos:

$$V^C = \frac{\mu^4}{16\pi^2} \left\{ 1 - 2 \ln 2 - 2 \int_1^{\infty} dx x \left[ \ln \left( 1 + \frac{f^2(x)}{x} \right) - \frac{f^2(x)}{x + f^2(x)} \right] \right\} \quad (\text{B.2})$$

Esta expressão (B.2) é idêntica à (9.25c) quando tomamos  $\mu = 1$  nesta última. Como  $V_{\pm}^c(\epsilon) = \frac{\mu^4}{16\pi^2} F_{\pm}(\epsilon)$ , calculamos  $F_{\pm}(\epsilon)$  numericamente e mostramos os resultados graficamente na figura B.1. Dessa figura vemos que, para todos os valores permitidos de  $\epsilon$ ,  $V_{-}^c(\epsilon)$  é sempre mais negativo que  $V_{+}^c(\epsilon)$ . Disto concluímos que o vácuo mais estável é o da solução irregular.

## APÊNDICE C

Neste apêndice apresentamos o processo de "regularização numérica", utilizado no cálculo do potencial efetivo com a solução irregular, e comentamos o método de integração.

Como já tivemos oportunidade de mostrar, o potencial efetivo para a QED não massiva é finito quando calculado com o ansatz  $\sum_{\pm}$ . No caso da solução irregular,  $f_{-}$ , isto deve-se ao cancelamento dos infinitos das integrais de 1-loop com aqueles das integrais de 2-loops. Entretanto, tal fato não deve ser observado quando o potencial efetivo é calculado numericamente: do ponto de vista numérico, o cálculo de integrais duplas não é "idêntico" ao cálculo de integrais simples de modo que a subtração de "infinitos" não será de todo exata.

Para contornar a situação acima descrita e reproduzir aquilo que é observado analiticamente optaremos por subtrair os infinitos a nível de 1-loop e a nível de 2-loops. Ou seja, no termo de 1-loop será introduzida uma integral que contém uma divergência idêntica àquela já existente só que com o sinal oposto, para realizar o cancelamento. Dependendo do caso, uma parte finita deverá ser acrescentada. Para o termo de 2-loops o procedimento é o mesmo.

O método básico de integração e o de Gauss (Abramowitz et al) com 20 pontos. A partir deste, desenvolvemos

um algoritmo para integrais duplas quando um dos extremos da integral interna depende da variável de integração externa. Também, implementamos o método no sentido de poder subdividir o intervalo de integração, em um número arbitrário de subintervalos, e aplicar em cada um destes o Gauss-20 pontos. Esta modificação é particularmente útil para estudar a convergência do resultado e aumentar a precisão.

## APÊNDICE D

Neste apêndice verificamos o grau de precisão com que as soluções assintóticas  $f(p)$  dadas por (16.8) satisfazem a equação de Schwinger-Dyson (16.6). A maneira mais simples de fazer isto é substituir  $f(p)$  no lado direito da equação de SD. Como essas soluções são assintóticas, implementamos esse limite na equação desprezando  $\Sigma^2(p)$  frente a  $p^2$  no denominador. Assim,

$$f(p) = \frac{6C_2}{16\pi^2} \left\{ \frac{g^2(p)}{p^2} \int_{p_c}^p dk k f(k) + \int_p^\infty dk \frac{g^2(k)}{k} f(k) \right\} \quad (D.1)$$

Substituindo  $g^2(p)$  de (17.3) para  $p > p_c$  e definindo:

$$C = \frac{A}{2} = \frac{3C_2(R)}{11N - 4M_f T(R)} \quad ; \quad \tilde{g}^2(p) = (\ln p/\Lambda)^{-1} \quad (D.2)$$

resulta:

$$f(p) = C \left\{ \frac{\tilde{g}^2(p)}{p^2} \int_{p_c}^p dk k f(k) + \int_p^\infty dk \frac{\tilde{g}^2(k)}{k} f(k) \right\} \quad (D.3)$$

Introduzindo a variável  $x = p/\Lambda$  com  $z = p_c/\Lambda$  temos para o lado direito (L.D) de (D.3)

$$(LD) = \mathcal{C} \left\{ \frac{\tilde{g}^2}{x^2} \int_z^x dx x f(x) + \int_x^\infty \frac{dx}{x} \tilde{g}^2(x) f(x) \right\} \quad (D.4)$$

Consideremos primeiro as soluções assintóticas regulares dadas por:

$$f_R(x) = \frac{z^2}{x^2} \left( \frac{\ln x}{\ln z} \right)^\rho \quad (D.5)$$

Substituindo (D.5) em (D.4) temos:

$$(LD) = \mathcal{C} \left\{ \frac{1}{x^2 \ln x} \frac{z^2}{(\ln z)^\rho} \int_{x_c}^x \frac{dy}{y} (\ln y)^\rho \right. \\ \left. + \frac{z^2}{(\ln z)^\rho} \int_x^\infty \frac{dy}{y^3} (\ln y)^{\rho-1} \right\} \quad (D.6)$$

Fazendo  $u = \ln y$ ,  $y = e^u$  as integrais ficam dadas por:

$$I_1 = \int_{x_c}^x \frac{dy}{y} (\ln y)^\rho = \frac{(\ln x)^{\rho+1}}{\rho+1} - \frac{(\ln z)^{\rho+1}}{\rho+1} \quad (D.7)$$

$$I_2 = \int_x^\infty \frac{dy}{y^3} (\ln y)^{\rho-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\rho-1} \Gamma(\rho, 2 \ln x) \quad (D.7a)$$

onde  $\Gamma(\alpha, \beta)$  é uma das funções gama incompletas (Gradshteyn et al). Substituindo os resultados (D.7) em (D.6) temos:

$$(LD) = \frac{A}{2} \frac{1}{\rho+1} f_R(x) + \frac{A}{2} z^2 \left[ \frac{1}{2\rho} \Gamma(\rho, 2 \ln x) - \frac{\ln z}{\rho+1} \right] \quad (D.8)$$

De (D.8) vemos que  $f_R$  não é uma solução exata da equação de SD para grandes momentos. O segundo termo, à direita, de (D.8) reflete a imprecisão das soluções  $f_R$ . Ainda, de (D.8) quando  $\rho = \rho_2 = \frac{A}{2} - 1$  temos:

$$(LD) = f_{R2}(x) + \dots \quad (D.9)$$

enquanto que para  $\rho = \rho_1 = A/2$  temos:

$$(LD) = \frac{1}{1+2/A} f_{R1}(x) + \dots \quad (D.9a)$$

Isto mostra que a solução assintótica  $f_{R2}$  é "melhor" do que  $f_{R1}$  no sentido de verificar a equação de SD no limite assintótico ultravioleta.

Vejamos agora o caso da solução irregular

$$f_I(x) = \left( \frac{\ln x}{\ln z} \right)^{-A/2} \quad (D.10)$$

Substituindo (D.10) em (D.4) temos:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}D) = \mathcal{C} \left\{ \frac{1}{x^2 \ln x} \frac{1}{\ln^{A/2} z} \int_z^x dx x (\ln x)^{-A/2} \right. \\
 \left. + \frac{1}{\ln^{A/2} z} \int_x^\infty \frac{dx}{x} (\ln x)^{-\frac{A}{2}-1} \right\} \quad (\text{D.11})
 \end{aligned}$$

Calculamos as integrais com o auxílio da variável  $u$  :

$$I_3 = \int_z^x dx x (\ln x)^{-A/2} = \int_{\ln z}^{\ln x} du e^u u^{-A/2} \quad (\text{D.12})$$

$$I_4 = \int_{\ln x}^\infty du u^{-\frac{A}{2}-1} = \frac{(\ln x)^{-A/2}}{A/2} \quad (\text{D.12a})$$

Substituindo os resultados (D.12) em (D.11) e lembrando que  $\mathcal{C} = A/2$ , resulta:

$$(\mathcal{L}D) = \underset{\text{I}}{f}(x) + \dots \quad (\text{D.13})$$

A expressão (D.13) mostra que a solução irregular dada por (D.10) tem o mesmo grau de precisão da solução regular (D.5) para  $\rho = \rho_2$ .

Os resultados aqui obtidos são confirmados quando substituirmos as soluções assintóticas e o ansatz para  $g^2(\rho)$  na equação diferencial (16.7). Apesar de mais tra-

balhoso esse procedimento mostra mais claramente que os termos "residuais" vão mais rapidamente a zero do que as respectivas soluções. Este fato contrasta com a QED, onde as soluções assintóticas são soluções exatas da equação de SD correspondente.

## APÊNDICE E

Neste apêndice estudamos as integrais dos termos proporcionais a  $\mathcal{O}^2$  do potencial efetivo para mostrar que as divergências que surgem, quando a solução é a irregular, não se cancelam.

Para este propósito podemos aproveitar as expressões (17.12) que contêm todos os termos proporcionais a  $\mathcal{O}^2$ . As integrais são explicitadas em (17.11). Procedemos então ao seu cálculo, identificando a parte infinita com a introdução de um cut-off,  $\lambda$ , e usando a notação (17.9)-(17.10):

$$I_3 = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f_I^2(t) = \frac{1}{(\ln z^2)^{-A}} \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} (\ln(1/t))^{-A} \quad (\text{E.1})$$

Introduzindo a variável

$$u = \ln(1/t); \quad t = e^{-u}; \quad dt = -e^{-u} du \quad (\text{E.2})$$

e a notação  $L = \ln z^2$ , temos:

$$I_3 = \frac{1}{L^{-A}} \int_L^\infty du e^u u^{-A} = \text{PF}(I_1) + \text{PI}(I_1) \quad (\text{E.3})$$

onde:

$$PF(I_1) = -L \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m}{m!(1-A+m)} \quad (\text{E.4})$$

$$PI(I_1) = \frac{1}{L^A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^{1-A+m}}{m!(1-A+m)} \quad (\text{E.4a})$$

Do mesmo modo:

$$I_2 = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \hat{g}^2(t) f(t) = \frac{2}{L^{A/2}} \int_L^{\infty} du u^{-\frac{A}{2}-1} = \frac{4}{A} \quad (\text{E.5})$$

$$I_3 = \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t} \hat{g}^2(t) f(t) \int_t^{1/z^2} \frac{dr}{r} f(r) \quad (\text{E.6})$$

$$= \frac{2}{L^A} \int_L^{\infty} du u^{-\frac{A}{2}-1} \int_L^u dv e^{v} v^{-A/2} = PF(I_3) + PI(I_3)$$

onde:

$$PF(I_3) = \frac{-4L}{A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m}{m!(1-A+m)} \quad (\text{E.6a})$$

$$PI(I_3) = \frac{2}{L^A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^{1-A+m}}{m!(1-\frac{A}{2}+m)(1-A+m)} \quad (\text{E.6b})$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^{1/z^2} \frac{dt}{t^2} f(t) \int_0^t \frac{dr}{r} \tilde{g}^2(r) f(r) \\
 &= \frac{2}{L^{-A}} \int_L^\infty du e^u u^{-A/2} \int_u^\infty dv v^{-A/2-1} = PF(I_4) + PI(I_4)
 \end{aligned}
 \tag{E.7}$$

com:

$$PF(I_4) = -\frac{4L}{A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L^m}{m! (1-A+m)}
 \tag{E.7a}$$

$$PI = \frac{4}{L^{-A}} \frac{1}{A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{1-A+m}}{m! (1-A+m)}
 \tag{E.7b}$$

Substituindo esses resultados em (17.12a), a PI dessa expressão será dada por:

$$PI(F) = PI(I_1) - \frac{gC_2}{\Delta N - 4m_s T} \times \frac{1}{2} [PI(I_3) + PI(I_4)]
 \tag{E.8}$$

$$PI(F) = \frac{A}{4} PI(I_3) \neq 0$$

## REFERÊNCIAS

- (Abramowitz et al) Handbook of Mathematical Functions Edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun (Dover Publications, New York).
- (Adler-70) S. L. Adler in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory vol.1 Edited by S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton (The M. I. T. Press, Massachusetts, 1970).
- (Bartholomew et al-84) J. Bartholomew et al, Nucl. Phys. B230, 222 (1984).
- (Casalbuoni et al-84) R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici and R. Gatto, Phys. Lett. 140B, 357 (1984).
- (Casalbuoni et al-85) R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici and R. Gatto, Phys. Lett. 150B, 295 (1985).
- (Castorina et al-85) P. Castorina and S.-Y. Pi, Phys. Rev. D 31, 411 (1985).
- (Christos-84) G. A. Christos, Phys. Rep. 116, 251 (1984).
- (Cornwall et al-73) J. M. Cornwall and R. E. Norton, Phys. Rev. D 8, 3338 (1973).
- (Cornwall et al-74) J. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Phys. Rev. D 10, 2428 (1974).
- (Fomin et al-83) P. I. Fomin et al, Riv. Nuovo Cimento 6, 1 (1983).

- (Fukuda et al-76) R. Fukuda and T. Kugo, Nucl. Phys. B117, 250 (1976).
- (Gradshteyn et al) I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, New York, 1980).
- (Gusynin et al-80) V. P. Gusynin and V. A. Miranskii, Yad. Fiz. 31, 787 (1980).
- (Gusynin et al-85) V. P. Gusynin and Yu. A. Sitenko, Z. Phys. C 29, 547 (1985).
- (Jackiw et al-73) R. Jackiw and K. Johnson, Phys. Rev. D 8, 2386 (1973).
- (Johnson et al-64) K. Johnson, M. Baker, and R. Willey, Phys. Rev. 136, B1111 (1964).
- (Johnson et al-73) K. Johnson and M. Baker, Phys. Rev. D8, 1110 (1973).
- (Lane-74) K. Lane, Phys. Rev. D 10, 2605 (1974).
- (Langacker et al-74) P. Langacker and H. Pagles, Phys. Rev. D 9, 3413 (1974).
- (Langacker-75) P. Langacker, Phys. Rev. Lett. 34, 1592 (1975).
- (Mandelstam-79) S. Mandelstam, Phys. Rev. D 20, 3223 (1979).
- X (Marciano-80) W. J. Marciano, Phys. Rev. D 21, 2425 (1980).
- (Maris et al-64) Th. A. J. Maris, V. E. Hercovitz, and G. Jacob Phys. Rev. Lett. 12, 313 (1964).
- (Maris et al-66) Th. A. J. Maris and G. Jacob, Phys. Rev. Lett. 17, 1300 (1966).

- (Montero et al-85) J. C. Montero, A. A. Natale, S. F. No  
vaes, and V. Pleitez, Phys. Lett. 161B,  
151 (1985).
- (Montero et al -87) J. C. Montero and V. Pleitez, Phys. Rev.  
D 35, 2579 (1987).
- (Montero et al-87a) J. C. Montero and V. Pleitez, preprint  
IFT/P - 25/87.
- (Montero et al-87b) J. C. Montero and V. Pleitez, preprint  
IFT/P - 26/87.
- (Montero et al-87c) J. C. Montero and V. Pleitez, preprint  
IFT/P - 27/87.
- (Nambu et al-61) Y. Nambu and C. Jona-Lasinio, Phys. Rev.  
122, 345 (1961).
- (Pagels-72) H. Pagels, Phys. Rev. Lett. 28, 1482  
(1972).
- (Pagels-73) H. Pagels, Phys. Rev. D 7, 3689 (1973).
- (Pagels-79) H. Pagels, Phys. Rev. D 19, 3080 (1979).
- (Politzer-76) H. D. Politzer, Nucl. Phys. B 117,  
397 (1976).
- (Schwinger-62) J. Schwinger, Phys. Rev. 128, 2425  
(1962).
- (Shifman et al-78) M. A. Shifman, A. I. Vainstein and  
V. I. Zakharov: Nucl. Phys. B 147, 385  
(1978).
- (Symanzik-70) K. Symanzik, Commun. Math. Phys. 16,  
48 (1970).

