



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

# Desenvolvimento da Função Perturbadora e Aplicações em Dinâmica de Exoplanetas

**Juliana Rodrigues Casteletti**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
**Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior**

**2013**

521.1 Casteletti, Juliana Rodrigues  
C348d Desenvolvimento da função perturbadora e aplicações em  
dinâmica de exoplanetas / Juliana Rodrigues Casteletti. - Rio  
Claro, 2013  
67 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Nelson Callegari Júnior

1. Mecânica celeste. 2. Ressonâncias de movimentos  
médios. 3. Sistemas planetários extrassolares. I. Título.

*Para meus pais.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo em minha vida.

Aos meus pais, Marco e Isabel, pelo amor, pelo carinho, pelo apoio e por todos os esforços e dedicação em todos esses anos de minha vida, e aos meus irmãos, Alessandre e Luciana, por dividirem comigo todo esse afeto.

Ao meu marido Emerson por ser o melhor presente de Deus em minha vida, por me dar forças para continuar, para batalhar sempre, pela alegria e pelo imenso amor.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nelson Callegari Jr. pelos ensinamentos, por seu empenho e dedicação neste trabalho.

Aos meus professores de graduação da Unicamp, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sandra Augusta Santos e Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti, pelas cartas de recomendação para ingresso nesse curso de mestrado.

A todos os professores da Pós-Graduação em Matemática Universitária da UNESP Rio Claro por todas as aulas que ministraram para mim, e aos meus colegas da turma de mestrado pela parceria nas aulas e ajuda nas dificuldades com os estudos.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo pela concessão da bolsa de estudos para o mestrado.

Aos meus colegas das Escolas Estaduais “Prof<sup>a</sup>. Irene de Assis Saes” de Santa Bárbara d’Oeste e “Dr. Heitor Penteado” de Americana, pelo apoio e pela colaboração, principalmente às equipes gestoras pela compreensão e adequação de meus horários permitindo conciliar meu trabalho com meus estudos.

# Resumo

Realizamos neste trabalho o estudo de tópicos fundamentais de Mecânica Celeste visando a aplicação em problemas de interesse atual, tal como o estudo de ressonâncias de movimentos médios em sistemas planetários extrassolares. Ênfase foi dada nos seguintes tópicos: i) formulação do problema ressonante de dois planetas em interação mútua; ii) desenvolvimento e expansão da função perturbadora; iii) solução numérica de problemas de valor inicial; iv) aplicações ao par de planetas HD10180d,e, os quais estão próximos da ressonância 3:1. A abordagem dos problemas foi realizada analítica e numericamente. Na primeira parte deste trabalho formulamos o problema geral de três corpos e reproduzimos os principais passos do desenvolvimento da função perturbadora. Na segunda parte realizamos simulações dos sistemas em questão utilizando as equações exatas de movimento (Newton) e comparamos os resultados com soluções numéricas das equações de Lagrange, i.e., equações de variação dos elementos orbitais escritas em termos da função perturbadora envolvida. Os resultados das simulações numéricas realizadas neste trabalho poderão ser aplicados para três propostas: i) comparação dos resultados entre as soluções exatas e aproximadas (Lagrange) das equações de movimento para, com isso, obter evidências numéricas do domínio de validade da aplicação da função perturbadora expandida nos problemas ressonantes; ii) estudo de dinâmica ressonante, i.e., caracterização e evolução temporal de ângulos críticos associados às ressonâncias; iii) estabilidade dinâmica de longo período dos sistemas em questão.

**Palavras-chave:** Mecânica Celeste, Ressonâncias de movimentos médios, Sistemas planetários extrassolares.

# Abstract

In this work we study a fundamental Celestial Mechanics in order to apply to problems of current interest, such as dynamics of extrasolar planetary systems. Emphasis is given on the following topics: i) formulation of the problem of two resonant planets in mutual interaction, ii) deduction and expansion of the disturbing function; iii) numerical solution of initial value problems, iv) applications to the pair of planets HD10180d,e which orbits are near to the 3:1 resonance. We adopt both, analytical and numerical approaches. In the first part, we formulate the general three-body problem, and reproduce the main steps of the expansion of the disturbing function. In the second part we show the results of a great deal of numerical simulations of the systems using both the exact equations of motion (Newton) Lagrange equations. The simulations have been done with three main goals: i) comparison of the results of the exact and approximate solutions (Lagrange) equations of motion, in order to obtain numerical evidences of the validity domain of the application of the expanded disturbing function to resonant problems, ii) study of the resonant dynamics, i.e., characterization and evolution of critical angles associated with resonances, iii) investigate long-term dynamic stability of the systems in question.

**Keywords:** Celestial Mechanics, Mean-motion resonances, Extrasolar planetary systems.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>8</b>
2.1	Parte Analítica . . . . .	8
2.2	Parte Numérica . . . . .	10
<b>3</b>	<b>A Função Perturbadora</b>	<b>11</b>
3.1	O Problema Geral de Três Corpos . . . . .	11
3.2	Expansão usando Polinômios de Legendre . . . . .	13
3.3	Expansão Literal em Inclinação e Excentricidade . . . . .	18
3.4	Coeficientes de Laplace . . . . .	21
3.5	Forma Literal Final da Função Perturbadora . . . . .	24
3.6	Equações Planetárias de Lagrange . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>41</b>
4.1	Comensurabilidade de movimentos médios . . . . .	41
4.2	Identificação da Ressonância na Função Perturbadora . . . . .	42
4.3	Aplicação Numérica: sistema HD 10180 . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>
<b>Referências</b>		<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>58</b>
A.1	Derivadas . . . . .	58

# 1 Introdução

Planetas extrassolares (ou exoplanetas) são aqueles que orbitam outra estrela, diferente do Sol, e portanto, não pertencem ao Sistema Solar. No caso de exoplanetas, determinar suas características, como por exemplo as trajetórias, quais suas composições e massas, dentre outras, é um trabalho difícil. Apenas recentemente foi possível realizar observações diretas de alguns exoplanetas [1]. A maioria dos planetas extrasolares identificados são gigantes e comparáveis a Júpiter ou a Netuno.

O primeiro candidato a exoplaneta foi descoberto em 1989, orbitando a estrela HD114762, por David Latham, Tsevi Mazeh e outros [2]. Em 1992, foram descobertos dois exoplanetas orbitando a pulsar PSR1257+12, por Alexander Wolszczan e Dale Frail [3].

A nomenclatura associada a um planeta extrassolar é dada pelo nome da estrela a qual o planeta orbita, seguido da letra “b” se o planeta for o primeiro a ser descoberto, “c” o segundo descoberto, “d” o terceiro, e assim por diante.

O planeta 55 Cnc-e, isto é, o companheiro com letra “e” da estrela 55 Cnc foi descoberto em 2004 e tem uma massa da ordem de 8,32 massas terrestres ( $M_T$ ). Recentemente seu raio foi estimado em cerca de 1,99 raios terrestres ( $R_T$ ) [4]. 55 Cnc-e é o menos massivo, quinto membro, de um sistema planetário composto de quatro planetas gigantes, onde dois deles tem massas similares à Júpiter e dois similares à de Urano [5]. Léger et al. (2009) descobriram outros planetas extrassolares tipo terrestres mas que pertencem a sistemas múltiplos formados somente por corpos menores, tais como os planetas CoRoT-7b e CoRoT-7c, cujas massas são 7,42 e 8,39  $M_T$ , mas somente o primeiro tem uma estimativa de raio, sendo 1,67  $R_T$  [4, 6].

Atualmente já foram descobertos dezenas de sistemas múltiplos de exoplanetas possivelmente do tipo terrestre com uma grande diversidade de arquitetura tais como configurações orbitais e propriedades físicas de seus membros.

O estudo de dinâmica de sistemas planetários extrassolares é uma área atual da astronomia dinâmica tendo em vista a enorme diversidade de planetas existentes e de suas diferenças marcantes com os planetas do sistema solar. Por exemplo, os períodos orbitais de 55 Cnc-e, CoRoT-7b e CoRoT-7c são, respectivamente, 0,74, 0,85 e 3,7 dias terrestres. Os planetas Kepler-11b e Kepler-11c, possuem períodos orbitais de 10,304 e 13,025 dias respectivamente [7, 8]. O período orbital da Terra é um ano (365,25

---

dias) e o de Mercúrio, o planeta terrestre mais próximo do Sol, é 88 dias. Assim, a maioria dos planetas extrassolares que foram descobertos são aqueles localizados bem próximos de suas respectivas estrelas, fato que é facilmente explicado tendo em vista que as principais técnicas de detecção utilizadas se baseiam nas perturbações que tais planetas ocasionam em suas estrelas.

Um dos aspectos da dinâmica que nos interessa investigar é se os exoplanetas em sistemas múltiplos possuem órbitas que tenham períodos orbitais comensuráveis ou quase comensuráveis entre si. Esse fenômeno é bem conhecido no sistema solar e ocorrem em sistemas de satélites naturais, asteróides e planetas [9, 10, 11]. Por exemplo: a razão dos períodos orbitais de Netuno e Plutão é, com boa aproximação, da ordem de  $3:2=1,5$ , e define-se que temos uma ressonância  $3:2$  de movimentos médios Netuno-Plutão. Os par de planetas Kepler-11b,c possuem comensurabilidade próxima a  $5:4$ , mais exatamente  $1,26$ .

As ressonâncias podem ser responsáveis tanto pela estabilização orbital do sistema (tal como no caso de Netuno-Plutão), ou por instabilidades de longo período no sistema, levando a ejeção do corpo de menor massa do sistema, por exemplo. Sistemas planetas que estão em ressonância, ou quase-ressonância, têm importantes propriedades dinâmicas não presentes em sistemas seculares (ou não-ressonantes) [12, 13]. O estudo clássico de ressonâncias é dado dentro do domínio do problema de três corpos, sendo o caso “restrito” àquele onde uma das massas dos corpos pode ser desprezada em relação às demais massas do sistema triplo, ou o “problema geral de três corpos”, onde nenhuma das massas é desprezada. Um exemplo do primeiro caso é um sistema Sol-Asteróide-Planeta, e um exemplo do segundo caso é um sistema planetário Estrela-Planeta a-Planeta b.

O estudo dos efeitos de ressonâncias de movimentos em sistemas planetários sempre foi classicamente realizado, de forma analítica, utilizando a chamada expansão da função perturbadora, escrevendo assim modelos analíticos de ressonância integráveis ou com poucos graus de liberdade [12]. Mais recentemente [13, 14] o estudo de ressonâncias em sistemas planetários e outros sistemas começou a ser abordado de forma numérica, i.e., através da análise de um grande número de simulações numéricas de equações de movimento.

Neste trabalho estudaremos numericamente as ressonâncias associadas à comensurabilidade  $3:1$  HD10180d,e, observadas no sistema múltiplo orbitando a estrela HD10180 [15]. Como detalhado a seguir, investigações da dinâmica desses sistemas serão iniciadas nesse trabalho aplicando-se ambas as abordagens, analítica e numérica. As ferramentas e metodologia aqui desenvolvidas poderão ser aplicadas também na investigação de dinâmica de outros sistemas de exoplanetas terrestres, tal como os planetas b, c das estrelas GJ 581 e 55 Cnc, possivelmente envolvidos em outras ressonâncias.

## 2 Metodologia

### 2.1 Parte Analítica

Para o desenvolvimento da parte analítica desse trabalho, realizamos o estudo de textos clássicos e de referências que incluem a dedução das equações de movimento do problema geral de três corpos em termos da Função Perturbadora.

Através do problema geral do movimento de três corpos, podemos analisar quais são as acelerações por eles sofridas. Os movimentos são dominados por um corpo primário, por exemplo uma estrela, e as órbitas dos corpos secundários, como exemplo dois planetas, são dadas por seções cônicas (elipses) pela primeira Lei de Kepler, porém com pequenos desvios. Esses desvios são originários das influências gravitacionais exercidas pelos corpos envolvidos, gerados de uma mútua perturbação nesse movimento e podem ser calculados pela definição e pela análise da chamada Função Perturbadora.

Consideremos uma massa  $m$  orbitando uma massa primária  $m_c$  em um caminho elíptico. Por serem dois corpos, esse problema é integrável.

Os elementos orbitais são:  $a$ ,  $e$ ,  $I$ ,  $\varpi$ ,  $\Omega$  e  $\lambda$  (Figura 2.1).

O elemento  $a$  corresponde ao semi-eixo maior da órbita;  $e$  é a excentricidade da órbita. O plano da órbita em relação a um plano de referência apresenta uma inclinação, aqui indicada por  $I$ . A linha de interseção entre o plano da órbita e o plano de referência é chamada linha dos nodos. O ponto em ambos os planos onde a órbita cruza o plano de referência movendo de baixo para cima é chamado nodo ascendente, enquanto que o ângulo entre uma linha de referência e o raio vetor no nodo ascendente é chamado longitude do nodo ascendente e é indicado por  $\Omega$ . O ângulo entre o mesmo raio vetor do nodo ascendente e o pericentro da órbita é chamado longitude do pericentro e é indicado por  $\omega$ . A longitude média da massa  $m$  é indicada por  $\lambda$ ; esta não possui interpretação geométrica, mas é uma função do tempo.

No problema esses elementos são constantes, uma vez que o efeito gravitacional vem de um único corpo. Mas, ao introduzirmos uma terceira massa  $m'$ , teremos uma força gravitacional mútua também entre  $m$  e  $m'$ , o que resulta em acelerações adicionais àquelas do sistema de dois corpos ( $m_c$  e  $m$ ). Num sistema planetário, a órbita de  $m'$  também sofre as perturbações de  $m$  (problema geral).

Essas acelerações adicionais das massas secundárias relativas à primária podem ser

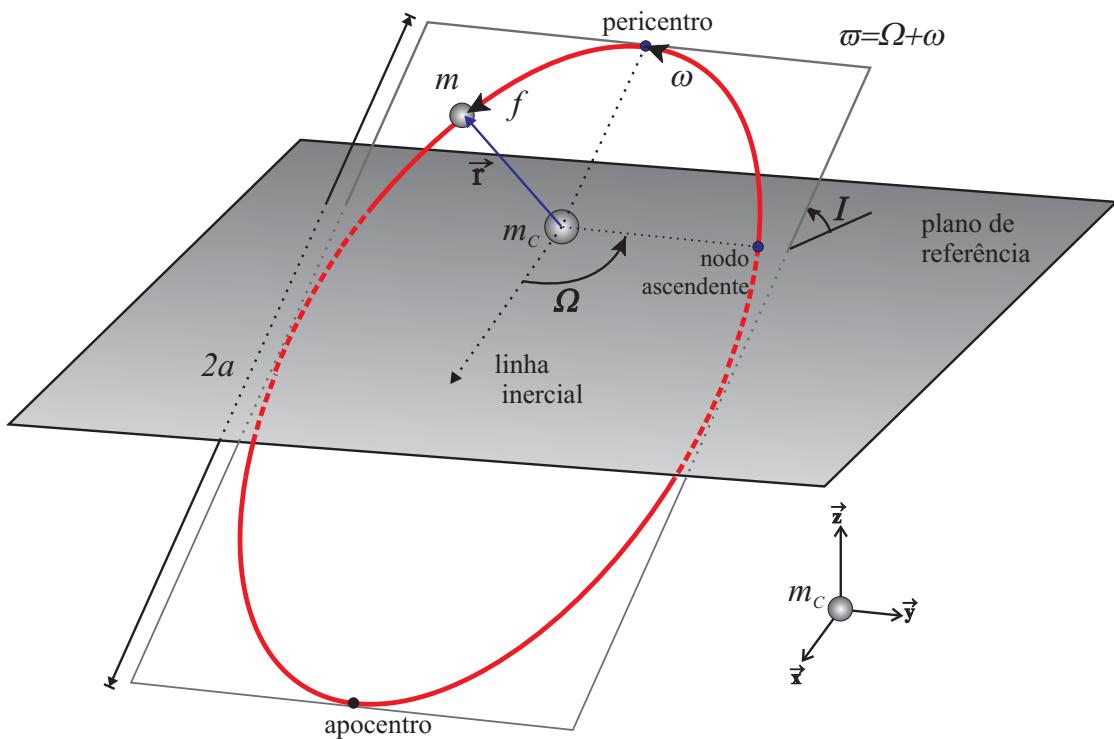


Figura 2.1: Órbita da massa  $m$  em torno da massa  $m_c$ ;  $m_c$  situada em um dos focos da elipse;  $\vec{r}$ : vetor posição da massa  $m$ ;  $a$ : semi-eixo maior da elipse;  $e$ : excentricidade da elipse; *pericentro*: ponto mais próximo de  $m_c$  na órbita de  $m$ ; *apocentro*: ponto mais distante de  $m_c$  na órbita de  $m$ ;  $I$ : inclinação do plano da órbita em relação à um plano de referência.  $f$ : anomalia verdadeira da massa  $m$ ;  $\Omega$ : longitude do nodo ascendente tendo como referência a linha inercial;  $\omega$ : longitude do pericentro;  $\varpi = \Omega + \omega$  medido em dois planos. No caso planar,  $\varpi \equiv \omega$ , por definição.

obtidas através do gradiente do potencial de perturbação, chamada Função Perturbadora.

## 2.2 Parte Numérica

Fizemos uso do software *Mathematica* para realizar algumas manipulações das equações e séries que são necessárias para o desenvolvimento da função perturbadora.

Para a aplicação da parte numérica utilizamos programas desenvolvidos pelo orientador, incluindo o cálculo dos coeficientes de Laplace com programação em Fortran que contém a implementação da somatória dada na equação (3.65), programada por método iterativo.

Realizamos aqui a programação das equações de Lagrange utilizando os termos da função perturbadora obtidos, juntamente com as derivadas aqui calculadas (Apêndice A). Por fim, realizamos simulações com as equações de movimento de N planetas, aplicáveis aos problemas em questão. Os programas foram escritos em linguagem Fortran e aplicam o integrador numérico<sup>1</sup> dado em Everhart(1985)[16] na solução do problema gravitacional de N corpos.

---

<sup>1</sup>Utilizamos o integrador RADAU de Everhart em sua versão de número 15, do ano de 1999, denotado por “RA15”. Esse integrador permite integrar sistemas de equações diferenciais ordinárias do tipo  $y' = F(y, t)$ ,  $y'' = F(y', y, t)$  e  $y''' = F(y, t)$ .

# 3 A Função Perturbadora

Neste capítulo veremos o Problema Geral de Três Corpos, com o qual obtemos as equações de movimento de três massas num sistema de referência inercial. A Função Perturbadora aparece como termos das acelerações relativas das massas secundárias. Realizaremos então a expansão de Legendre dessa função, a expansão literal em inclinação e excentricidade e, por fim, verificaremos os coeficientes de Laplace que são originados pela expansão da Função Perturbadora.

## 3.1 O Problema Geral de Três Corpos

Sejam  $\vec{R}_c$ ,  $\vec{R}$  e  $\vec{R}'$  os vetores posição com respeito a uma origem inercial  $O$  de três corpos de massas  $m_c$  (massa central),  $m$  (massa secundária interna) e  $m'$  (massa secundária externa). Sejam  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  os vetores posição das massas secundárias  $m$  e  $m'$  relativas à primária  $m_c$  onde:

$$|\vec{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

$$|\vec{r}'| = r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}, \quad (3.1)$$

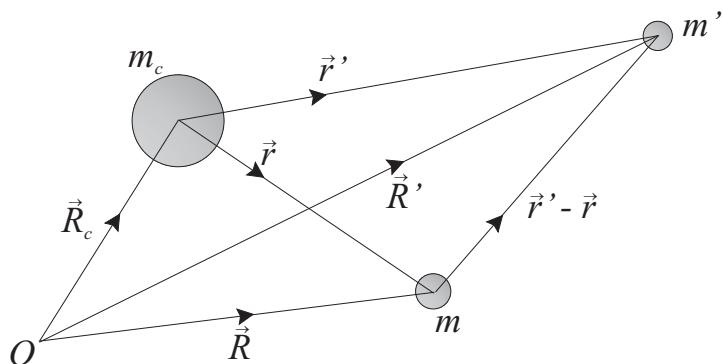


Figura 3.1: Os vetores posição  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ , das massas  $m$  e  $m'$ , com respeito à massa central  $m_c$ . As três massas têm vetores posição  $\vec{R}$ ,  $\vec{R}'$  e  $\vec{R}_c$  com relação a uma origem inercial  $O$ .

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2} \quad (3.2)$$

e a massa primária é a origem do sistema de coordenadas.

Das leis de movimento e de gravitação de Newton, obtemos as equações dos movimentos destas três massas em um sistema de referência inercial:

$$m_c \ddot{\vec{R}}_c = \mathcal{G} m_c m \frac{\vec{r}}{r^3} + \mathcal{G} m_c m' \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad (3.3)$$

$$m \ddot{\vec{R}} = \mathcal{G} m m' \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \mathcal{G} m m_c \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (3.4)$$

$$m' \ddot{\vec{R}'} = \mathcal{G} m' m \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \mathcal{G} m' m_c \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad (3.5)$$

onde  $\mathcal{G} = 6.672 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  é a *constante de gravitação universal*.

As acelerações das massas secundárias relativas à primária são dadas por:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} - \ddot{\vec{R}}_c, \quad (3.6)$$

$$\ddot{\vec{r}'} = \ddot{\vec{R}'} - \ddot{\vec{R}}_c. \quad (3.7)$$

Substituindo as expressões de  $\ddot{\vec{R}}_c$ ,  $\ddot{\vec{R}}$  e  $\ddot{\vec{R}'}$  das equações (3.3) - (3.5) obtemos as equações de movimento relativo:

$$\ddot{\vec{r}} + \mathcal{G}(m_c + m) \frac{\vec{r}}{r^3} = \mathcal{G} m' \left( \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right), \quad (3.8)$$

$$\ddot{\vec{r}'} + \mathcal{G}(m_c + m') \frac{\vec{r}'}{r'^3} = \mathcal{G} m \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right), \quad (3.9)$$

e  $\vec{r}$  é agora medido a partir de  $m_c$ .

Essas acelerações relativas podem ser escritas como gradientes de funções escalares, isto é, podemos escrever:

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla(\mathcal{V} + \mathcal{R}) = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathcal{V} + \mathcal{R}), \quad (3.10)$$

$$\ddot{\vec{r}'} = \nabla'(\mathcal{V}' + \mathcal{R}') = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right) (\mathcal{V}' + \mathcal{R}'), \quad (3.11)$$

onde

$$\mathcal{V} = \mathcal{G} \frac{(m_c + m)}{r} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}' = \mathcal{G} \frac{(m_c + m')}{r'} \quad (3.12)$$

são termos do problema de dois corpos, no potencial total. Já o termo  $\mathcal{R}$  na equação (3.10) representa o potencial que é originário de uma outra massa secundária. O termo  $\mathcal{R}$  é definido como a **função perturbadora**.

Como os vetores posição  $\vec{r}$  não dependem das coordenadas cartesianas  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  da massa  $m'$  e como o mesmo ocorre para  $\vec{r}'$  em relação às coordenadas cartesianas de  $m$ , podemos escrever

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{G}m'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \mathcal{G}m' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3}, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{R}' = \frac{\mathcal{G}m}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \mathcal{G}m \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}. \quad (3.14)$$

Escrevendo  $\mu = \mathcal{G}m$  e  $\mu' = \mathcal{G}m'$ , temos:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \mu' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3}. \quad (3.15)$$

Para a equação (3.15) os elementos osculadores são  $n^2a^3 = \mathcal{G}(m_c + m)$ , que aproximam em um dado instante a órbita real à órbita referência elíptica associada, como se a perturbação naquele instante não existisse. Para a massa secundária externa escrevemos a função perturbadora similar, apenas com a troca dos índices “linha”:

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}, \quad (3.16)$$

onde os elementos osculadores são  $n'^2a'^3 = \mathcal{G}(m_c + m')$ .

## 3.2 Expansão usando Polinômios de Legendre

A forma expandida da Função Perturbadora em Polinômios de Legendre é utilizada em problemas onde  $\alpha = \frac{a}{a'} \ll 1$ , ou seja,  $m$  e  $m'$  são relativamente distantes espacialmente. Um exemplo de aplicação da Função Perturbadora é a teoria lunar, onde o sistema é Terra-Sol-Lua, com o Sol sendo o perturbador da órbita lunar [17].<sup>1</sup>

Consideremos então, para a expansão das equações (3.15) e (3.16), a configuração mostrada na figura (3.2), onde  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  denotam o vetor posição das massas  $m$  e  $m'$ , respectivamente. Seja  $\psi$  o ângulo entre os dois vetores posição.

---

<sup>1</sup>Laskar e Boué (2010) apresentam uma aplicação recente da Função Perturbadora expandida em Polinômios de Legendre.[18]

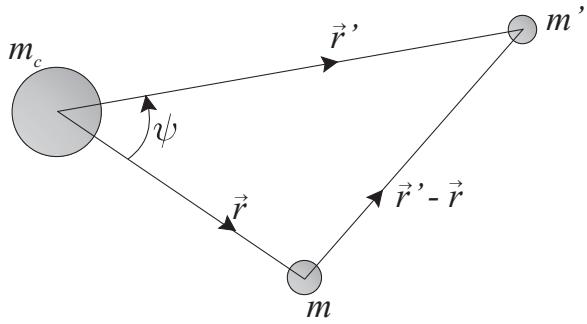


Figura 3.2: Vetores posição  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  das massas  $m$  e  $m'$ , com respeito à massa  $m_c$  e o ângulo  $\psi$  entre os dois vetores posição.

Pela lei dos cossenos temos

$$|\vec{r}' - \vec{r}|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi \quad (3.17)$$

ou, de outra forma

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \left[ \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi)} \cdot \frac{r'^2}{r'^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'} \left[ 1 - 2\frac{r}{r'} \cos\psi + \frac{r^2}{r'^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Expandindo essa expressão em polinômios de Legendre obtemos

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos\psi) \quad (3.19)$$

onde  $P_0(\cos\psi) = 1$ ,  $P_1(\cos\psi) = \cos\psi$ ,  $P_2(\cos\psi) = \frac{1}{2}(3\cos^2\psi - 1)$ , e assim por diante.

A equação (3.19) é uma série do tipo

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos\psi)$$

que é convergente desde que escolhemos  $(r/r') < 1$ , pelo teorema binomial. Assim, para a série convergente temos

$$|P_l(\cos\psi)| \leq 1, l = 0, 1, 2\dots$$

pelas propriedades dos polinômios de Legendre [17].

Uma vez que  $\vec{r} \cdot \vec{r}' = r \cdot r' \cos\psi = rr' P_1(\cos\psi)$ , a função perturbadora para a massa secundária interna pode ser reescrita como

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos\psi), \quad (3.20)$$

onde  $P_0(\cos\psi)$  foi omitido, pois não depende de  $r$ . De maneira similar, a função perturbadora para a massa secundária externa pode ser reescrita como

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos\psi) + \mu \frac{r}{r'^2} \cos\psi - \mu \frac{r'}{r^2} \cos\psi + \frac{\mu}{r'}. \quad (3.21)$$

Ao invés de trabalharmos com as formas acima das funções perturbadoras, vamos escrevê-las em termos dos elementos orbitais  $a$ ,  $e$ ,  $I$ ,  $\varpi$ ,  $\Omega$  e  $\lambda$  que denotam, respectivamente, o semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, longitude do pericentro, longitude do nodo ascendente e longitude média da massa  $m$ , com quantidades similares para a massa  $m'$ . Veja figura (2.1) para uma visão geométrica de alguns dos elementos. Temos ainda que  $\lambda = M + \varpi$ , onde  $\lambda$  é a longitude média,  $M$  é a anomalia média e  $\varpi$  é a longitude do pericentro.

Para escrevermos as funções perturbadoras em termos dos elementos orbitais faremos uso de expansões em série dessas funções, como veremos a seguir.

Para conhecer a forma explícita das expansões das funções perturbadoras, vamos considerar nesta seção o caso onde as órbitas de duas massas  $m$  e  $m'$  estão num mesmo plano, podendo ignorar qualquer termo oriundo de inclinação. Assim, podemos escrever o ângulo  $\psi$  como a diferença entre as longitudes verdadeiras.

$$\psi = (f' + \varpi') - (f + \varpi), \quad (3.22)$$

onde  $f$  e  $f'$  denotam as anomalias verdadeiras de  $m$  e  $m'$  (Figura (3.3)). Obtemos assim:

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \cos f \cos f' \cos \varpi \cos \varpi' + \cos \varpi \cos \varpi' \sin f \sin f' - \cos f' \cos \varpi' \sin f \sin \varpi \\ &\quad + \cos f \cos \varpi' \sin f' \sin \varpi + \cos f' \cos \varpi \sin f \sin \varpi' - \cos f \cos \varpi \sin f' \sin \varpi' \\ &\quad + \cos f \cos f' \sin \varpi \sin \varpi' + \sin f \sin f' \sin \varpi \sin \varpi'. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para problemas de dois corpos existem séries expandidas para  $\cos f$  e  $\sin f$ , dadas na seção 2.5 de Murray, Dermott (1999) [11]:

$$\sin f = \sin M + e \sin(2M) + e^2 \left( \frac{9}{8} \sin(3M) - \frac{7}{8} \sin(M) \right) + \mathcal{O}(e^3), \quad (3.24)$$

$$\cos f = \cos M + e(\cos(2M) - 1) + \frac{9}{8} e^2 \left( \cos(3M) - \cos(M) \right) + \mathcal{O}(e^3) \quad (3.25)$$

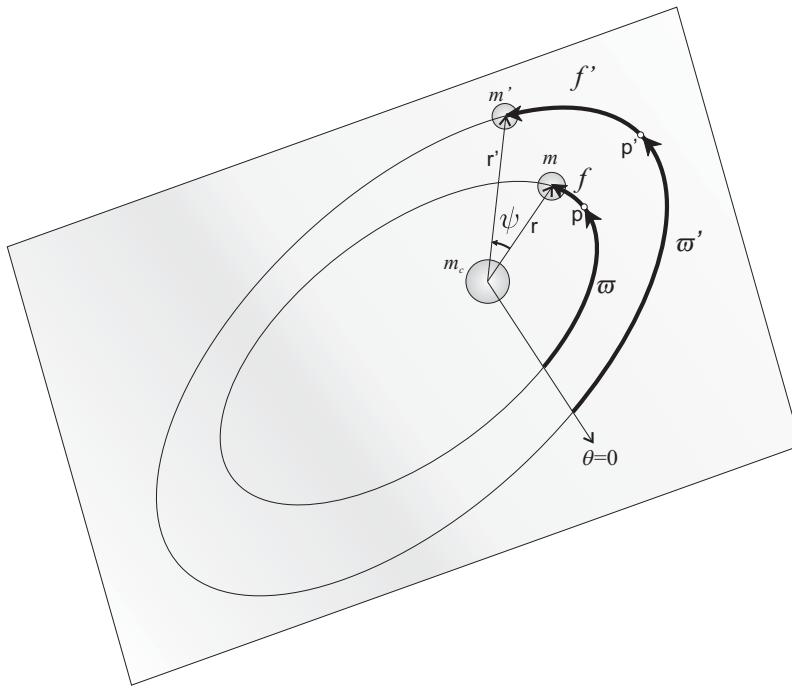


Figura 3.3: Caso planar. Ângulo  $\psi = (f' + \varpi') - (f + \varpi)$ , onde  $f$  e  $f'$  são as anomalias verdadeiras de  $m$  e  $m'$ , respectivamente e  $\varpi$  e  $\varpi'$  são as longitudes dos pericentros de  $m$  e  $m'$  respectivamente;  $p, p'$  pericentros das órbitas das massas  $m, m'$  respectivamente. No caso planar  $\varpi = \omega$ .

onde  $M$  é a anomalia média e  $e$  é a excentricidade. Essas séries convergem rapidamente para valores pequenos de  $e$ . Porém, para valores de  $e > 0.6627434$  essas séries divergem [11].

Podemos expressar os ângulos em termos das longitudes médias  $\lambda, \lambda'$  e das longitudes dos pericentros  $\varpi, \varpi'$ , fazendo as substituições  $M = \lambda - \varpi$  e  $M' = \lambda' - \varpi'$ . Assim, utilizando o software *Mathematica* para essas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} \cos\psi = & \frac{1}{64}(4ee' \{e + 8 \cos(\lambda - \varpi) + 9e \cos[2(\lambda - \varpi)]\} \cos\varpi(e' + 8 \cos(\lambda' - \varpi')) \\ & + 9e' \cos(2(\lambda' - \varpi'))) \cos\varpi' \sin(\lambda - \varpi) \sin(\lambda' - \varpi') + 2e'(e' + 8 \cos(\lambda' - \varpi')) \\ & + 9e' \cos(2(\lambda' - \varpi'))) \cos\varpi'((8 - 9e^2) \cos(\lambda - \varpi) + e(9e \cos(3(\lambda - \varpi)) \\ & - 16 \sin(\lambda - \varpi)^2)) \sin\varpi \sin(\lambda' - \varpi') + \cos\varpi \cos\varpi'((8 - 9e^2) \cos(\lambda - \varpi) \\ & + e(9e \cos(3(\lambda - \varpi)) - 16 \sin(\lambda - \varpi)^2))((8 - 9e'^2) \cos(\lambda' - \varpi') + e'(9e' \cos(3(\lambda' - \varpi')) \\ & - 16 \sin(\lambda' - \varpi')^2)) + 2e(e + 8 \cos(\lambda - \varpi) \\ & + 9e \cos(2(\lambda - \varpi))) \cos\varpi' \sin(\lambda - \varpi) \sin(\varpi)((-8 + 9e'^2) \cos(\lambda' - \varpi') \\ & + e'(-9e' \cos(3(\lambda' - \varpi')) + 16 \sin(\lambda' - \varpi')^2)) + 2e' \cos\varpi(e' + 8 \cos(\lambda' - \varpi')) \\ & + 9e' \cos(2(\lambda' - \varpi'))((-8 + 9e^2) \cos(\lambda - \varpi) + e(-9e \cos(3(\lambda - \varpi))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +16 \operatorname{sen}(\lambda - \varpi)^2) \operatorname{sen}(\lambda' - \varpi') \operatorname{sen}\varpi' + 4ee'(e + 8 \cos(\lambda - \varpi) + 9e \cos(2(\lambda - \varpi)))(e' + 8 \cos(\lambda' - \varpi')) \\
& + 9e' \cos(2(\lambda' - \varpi')) \operatorname{sen}(\lambda - \varpi) \operatorname{sen}\varpi \operatorname{sen}(\lambda' - \varpi') \operatorname{sen}\varpi' + 2e(e + 8 \cos(\lambda - \varpi) \\
& + 9e \cos(2(\lambda - \varpi))) \cos\varpi \operatorname{sen}(\lambda - \varpi)((8 - 9e'^2) \cos(\lambda' - \varpi') + e'(9e' \cos(3(\lambda' - \varpi))) \\
& - 16 \operatorname{sen}(\lambda' - \varpi')^2) \operatorname{sen}\varpi' + ((8 - 9e^2) \cos(\lambda - \varpi) + e[9e \cos(3(\lambda - \varpi)] \\
& - 16 \operatorname{sen}(\lambda - \varpi)^2]) \operatorname{sen}\varpi((8 - 9e'^2) \cos(\lambda' - \varpi') + e'(9e' \cos(3(\lambda' - \varpi))) \\
& - 16 \operatorname{sen}(\lambda' - \varpi')^2) \operatorname{sen}\varpi'). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Voltando à expressão da função perturbadora, definindo  $\alpha$  como a razão entre o semi-eixos maiores das massas  $m$  e  $m'$ , ou seja,

$$\alpha = \frac{a}{a'} < 1 \tag{3.27}$$

temos que

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{a'} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \left( \frac{a'}{r'} \right)^{l+1} \left( \frac{r}{a} \right)^l P_l(\cos\psi). \tag{3.28}$$

Se considerarmos os termos com  $l=2$ , e utilizando as seguintes formas expandidas de  $\frac{r}{a}$ ,  $\frac{a'}{r'}$  do problema de dois corpos

$$\left( \frac{r}{a} \right)^2 \approx 1 - 2e \cos M + \left( \frac{1}{2} \right) e^2 (3 - 2 \cos M), \tag{3.29}$$

$$\left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \approx 1 + 3e' \cos M' + \left( \frac{3}{2} \right) e'^2 (1 + 3 \cos 2M'), \tag{3.30}$$

temos que a forma expandida de  $\mathcal{R}$  em segunda ordem é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{\mu' \alpha^2}{2a'} (-1 + 3 \cos^2 \psi) \left( 1 - 2e \cos M + \frac{1}{2} e^2 (3 - 2 \cos M) \right)^2 \\
&\times \left( 1 + \frac{3}{2} e'^2 (1 + 6 \cos M) + 3e' \cos M' \right)^3, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

com  $\cos\psi$  dado pela equação (3.26). De modo equivalente, obtemos a forma expandida para  $\mathcal{R}'$ , incluindo na equação (3.31) os três últimos termos que aparecem na equação (3.21).

Em alguns sistemas planetários, a hipótese  $\alpha \ll 1$  pode não ser tão boa, e uma outra forma de expandir a Função Perturbadora em termos de  $a$  e  $a'$  pode ser obtida, como mostramos a seguir.

### 3.3 Expansão Literal em Inclinação e Excentricidade

Nas próximas seções vamos mostrar os principais passos de um outro tipo de expansão da Função Perturbadora, chamada Expansão Literal.

Dada a complexidade da expansão da função perturbadora, é costume em seu estudo distinguir a parte direta da indireta. Comparando com as equações (3.15) e (3.16), ou seja:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \mu' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3}$$

e

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3},$$

podemos escrever

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mu'}{a'} \alpha \mathcal{R}_E, \quad (3.32)$$

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mu}{a'} \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{R}_I \quad (3.33)$$

onde

$$\mathcal{R}_D = \frac{a'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{R}_E = - \left( \frac{r}{a} \right) \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \cos \psi, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{R}_I = - \left( \frac{r'}{a'} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi. \quad (3.36)$$

Nessas expressões,  $\mathcal{R}_D$  origina da parte direta da função perturbadora,  $\mathcal{R}_E$  vem da parte indireta devido à perturbação externa, enquanto que  $\mathcal{R}_I$  vem da parte indireta devido à perturbação interna. Podemos usar a expansão de  $\mathcal{R}_D$  para obter a parte direta tanto de  $\mathcal{R}$  quanto de  $\mathcal{R}'$ .

Para isolar termos apropriados na função perturbadora, para qualquer problema particular na dinâmica celeste, precisamos obter a expansão em série de  $\mathcal{R}$  ou de  $\mathcal{R}'$  em termos dos elementos orbitais individuais de dois corpos orbitantes. Esta expansão em série exige expansões separadas da parte direta  $\mathcal{R}_D$  e das partes indiretas  $\mathcal{R}_E$  e  $\mathcal{R}_I$ .

Usando  $\Delta = |\vec{r}' - \vec{r}|$ , que é a separação das duas massas,  $\psi$  como o ângulo entre os dois raios vetores (conforme figura (3.2)) e a equação (3.34), teremos

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\mathcal{R}_D}{a'} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi)^{-1/2}. \quad (3.37)$$

Como  $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \psi$  podemos escrever

$$\cos\psi = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}. \quad (3.38)$$

Das relações entre as coordenadas cartesianas e os ângulos  $\omega$ ,  $\Omega$  e  $I$  na órbita de cada massa, conforme figura (3.3), temos

$$\frac{x}{r} = \cos\Omega \cos(\omega + f) - \sin\Omega \sin(\omega + f) \cos I, \quad (3.39)$$

$$\frac{y}{r} = \sin\Omega \cos(\omega + f) + \cos\Omega \sin(\omega + f) \cos I, \quad (3.40)$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin I, \quad (3.41)$$

com expressões similares para  $x'/r'$ ,  $y'/r'$  e  $z'/r'$ .

Cada uma das equações anteriores podem ser expandidas como séries em  $M$  e  $M'$ , usando expansões para  $\cos f$  e  $\sin f$ , nos permitindo obter uma expansão em série para  $\cos\psi$ . Vamos definir

$$\Psi = \cos\psi - \cos(\theta - \theta') \quad (3.42)$$

onde  $\theta = \varpi + f$  e  $\theta' = \varpi' + f'$  são as longitudes verdadeiras dos corpos interno e externo, respectivamente.

Dessa forma, da equação (3.37) escrevemos

$$\frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos(\theta - \theta') + \Psi))^{-1/2}. \quad (3.43)$$

Se chamarmos  $A = r^2 + r'^2$ ,  $B = -2rr'$ ,  $C = \cos(\theta - \theta')$ , reescrevemos (3.43) como

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{(A + B(C + \Psi))^{\frac{1}{2}}}$$

Fazendo agora  $A' = A + BC$ , temos

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{(A' + B\Psi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{A'^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{B\Psi}{A'}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

que é uma binomial convergente para  $\frac{B\Psi}{A'} < 1$ , ou seja, para  $\Psi < \frac{A'}{B}$ . Assim, podemos expandir (3.43) em série de Taylor em torno de  $\Psi$ :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} + rr'\Psi \cdot \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(rr'\Psi)^2 \cdot \frac{1}{\Delta_0^5} + \dots,$$

onde

$$\frac{1}{\Delta_0} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta'))^{-1/2}. \quad (3.44)$$

Reescrevendo como somatória

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{1}{2} rr' \Psi \right)^i \cdot \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}, \quad (3.45)$$

o termo

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta'))^{-\frac{2i+1}{2}} \quad (3.46)$$

que aparece na equação (3.44), pode ser expandido em Taylor em torno de  $a$ :

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \left| \begin{array}{c} (r-a) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \right) \\ r=a \\ r'=a' \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} (r'-a') \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \right) \\ r=a \\ r'=a' \end{array} \right| + \dots \quad (3.47)$$

Seja

$$\rho_0 = (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\theta - \theta'))^{1/2}. \quad (3.48)$$

Teremos que a quantidade  $\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}$  pode ser expandida em série de cosseno.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} &= [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\theta - \theta')]^{-(i+\frac{1}{2})}, \\ \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} &= a'^{-(2i+1)} [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta')]^{-(i+\frac{1}{2})}, \\ \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} &= a'^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\theta - \theta') \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $b_s^{(j)}$  são os coeficientes de Laplace, que veremos na seção 3.4.

Cada coeficiente pode ser expresso como uma série uniformemente convergente em  $\alpha$ , para todo  $\alpha < 1$ .

Definiremos  $D_{m,n}$  como a notação para o operador diferencial

$$D_{m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \quad (3.50)$$

e fazendo

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r}{a} - 1, \\ \eta' &= \frac{r'}{a'} - 1, \end{aligned} \quad (3.51)$$

da expansão de  $r/a$  do problema de dois corpos, teremos  $\eta, \eta'$  de  $\mathcal{O}(e)$  e  $\mathcal{O}(e')$ , respectivamente.

Então, reescreveremos a equação (3.46) como:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \left[ 1 + \eta D_{1,0} + \eta' D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\eta^2 D_{2,0} + 2\eta\eta' D_{1,1} + \eta'^2 D_{0,2}) + \dots \right] \times \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}, \quad (3.52)$$

Substituindo a equação (3.49) em (3.52), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} &= \left[ 1 + \eta D_{1,0} + \eta' D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\eta^2 D_{2,0} + 2\eta\eta' D_{1,1} + \eta'^2 D_{0,2}) + \dots \right] \\ &\quad \times a'^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\theta - \theta'). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como os operadores  $D_{m,n}$  atuam somente nos coeficientes de Laplace, podemos definir funções  $A_{i,j,m,n}$  por

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right), \quad (3.54)$$

$$A_{i,j,m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right). \quad (3.55)$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} &= \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{i,j,0,0} + \eta A_{i,j,1,0} + \eta' A_{i,j,0,1} + \frac{1}{2!} (\eta^2 A_{i,j,2,0} + 2\eta\eta' A_{i,j,1,1} + \eta'^2 A_{i,j,2,0}) + \dots] \\ &\quad \times \cos[j(\theta - \theta')]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Se generalizarmos esta expressão, obtemos

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \eta^k \eta'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos[j(\theta - \theta')]. \quad (3.57)$$

Substituindo (3.57) em (3.44) obtemos

$$\mathcal{R}_D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^i \frac{a^i a'^{i+1}}{2} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \eta^k \eta'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos[j(\theta - \theta')]. \quad (3.58)$$

As inclinações  $I$ ,  $I'$  estão contidas em  $\Psi$  e as excentricidades estão contidas nos termos  $\eta$ ,  $\eta'$  na equação (3.58).

### 3.4 Coeficientes de Laplace

A expansão literal faz uso dos coeficientes de Laplace que são funções explícitas de  $\alpha$ . Os coeficientes de Laplace  $b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}$  na equação (3.53) podem ser obtidos na expansão

$$(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-a} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s^{(j)} \cos j\theta, \quad (3.59)$$

onde  $\alpha = a/a'$ ,  $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , e  $b_s^{(-j)} = b_s^{(j)}$ . Os coeficientes são funções somente de  $\alpha$ . A quantidade entre parênteses pode ser escrita como o produto de dois fatores:

$$1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2 = [1 - \alpha(\cos\theta + i \sin\theta)][1 - \alpha(\cos\theta - i \sin\theta)],$$

com  $i = \sqrt{-1}$ . Se denotamos  $z = e^{i\theta}$ , temos

$$1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2 = [1 - \alpha z][1 - \alpha z^{-1}],$$

consequentemente,

$$(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-s} = [1 - \alpha z]^{-s}[1 - \alpha z^{-1}]^{-s}$$

Os fatores  $(1 - \alpha z)^{-s}$  e  $(1 - \alpha z^{-1})^{-s}$  podem ser expandidos em potências de  $z$  pelo teorema binomial, obtendo

$$(1 - \alpha z)^{-s} = 1 + \frac{s}{1} \alpha z + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2 + \frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^3 + \dots \quad (3.60)$$

$$(1 - \alpha z^{-1})^{-s} = 1 + \frac{s}{1} \alpha z^{-1} + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^{-3} + \dots \quad (3.61)$$

Ao multiplicarmos a equação (3.59) pela equação (3.60) obtemos os coeficientes de  $z^j$ , denotados por  $\frac{1}{2}b_s^{(j)}$ , na seguinte forma:

$$(1 - \alpha z)^{-s}(1 - \alpha z^{-1})^{-s} = \frac{1}{2}b_s^{(0)} + \frac{1}{2}b_s^{(1)}(z + z^{-1}) + \frac{1}{2}b_s^{(2)}(z^2 + z^{-2}) + \frac{1}{2}b_s^{(3)}(z^3 + z^{-3}) + \dots \quad (3.62)$$

Para determinar o coeficiente  $\frac{1}{2}b_s^{(0)}$  de  $z^0$ , temos que realizar as multiplicações dos termos cujas potências de  $z$  somam zero, i.e.,  $z$  e  $z^{-1}$ ,  $z^2$  e  $z^{-2}$ ,  $z^3$  e  $z^{-3}$ , ...

Assim,

$$\frac{1}{2}b_s^{(0)} = 1 \cdot 1 + \frac{s}{1} \cdot \frac{s}{1} \alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \alpha^4 + \dots,$$

onde obtemos

$$\frac{1}{2}b_s^{(0)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{s(s+1)(s+2) \cdots (s+i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i} \right) \left( \frac{s(s+1)(s+2) \cdots (s+i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i} \right) \alpha^{2i}. \quad (3.63)$$

Para determinar o coeficiente  $\frac{1}{2}b_s^{(1)}$  de  $z^1$ , temos que realizar as multiplicações dos termos cujas potências de  $z$  somam 1, i.e.,  $z$  e  $z^0$ ,  $z^2$  e  $z^{-1}$ ,  $z^3$  e  $z^{-2}$ , ...

Assim,

$$\frac{1}{2}b_s^{(1)} = \frac{s}{1}\alpha + \frac{s \cdot s(s+1)}{1 \cdot (1 \cdot 2)}\alpha^3 + \frac{s(s+1) \cdot s(s+1)(s+2)}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)}\alpha^5 + \dots,$$

onde obtemos

$$\frac{1}{2}b_s^{(1)} = \frac{s}{1}\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i)} \cdot \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (i+1)} \right) \alpha^{1+2i}. \quad (3.64)$$

Do mesmo modo, para determinar o coeficiente  $\frac{1}{2}b_s^{(j)}$  de  $z^j$ , temos que realizar as multiplicações dos termos cujas potências de  $z$  somam “ $j$ ”, i.e.,  $z^j$  e  $z^0$ ,  $z^{j+1}$  e  $z^{-1}$ ,  $z^{j+2}$  e  $z^{-2}$ , ...

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^{(j)} &= \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j} \cdot 1 \cdot \alpha^j \\ &\quad + \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (j+1)} \cdot \frac{s}{1} \cdot \alpha^{j+2} \\ &\quad + \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (j+2)} \cdot \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \cdot \alpha^{j+4} + \dots \end{aligned}$$

onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^{(j)} &= \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j} \cdot \alpha^j + \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j+i-1)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (j+i))} \cdot \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i)} \alpha^{j+2i}. \quad (3.65) \end{aligned}$$

Colocando  $\frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j} \cdot \alpha^j$  em evidência, obtemos a forma geral de  $\frac{1}{2}b_s^{(j)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^{(j)} &= \left[ \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j} \cdot \alpha^j \right] \times \\ &\quad \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{(1 \cdot (j+1))} \alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1 \cdot 2 \cdot (j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right] \quad (3.66) \end{aligned}$$

Na forma de integral temos os coeficientes escritos como:

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(j\psi)d\psi}{(1 - 2\alpha \cos\psi + \alpha^2)^s}, \quad (3.67)$$

onde  $s = 1 + \frac{1}{2}$  é do tipo  $s = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$  e  $\alpha = \frac{a}{a'}$ . De modo alternativo, podemos escrevê-lo em série:

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)} = \frac{s(s+1)\cdots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j} \alpha^j \times \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1 \cdot 2(j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right]. \quad (3.68)$$

A série dada na equação (3.63) é um caso particular de uma série hipergeométrica.

Reescrevendo com a notação usual dessas séries temos:

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)} = \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j} \alpha^j {}_2F_1(s, s+j; j+1; \alpha^2) \quad (3.69)$$

Comparando com a notação generalizada  ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$  teremos para o caso acima:  $p = 2$ ,  $q = 1$  e  $z = \alpha^2$ .

De acordo com os critérios de convergência para a série hipergeométrica, quando  $p = q + 1$  e  $|z| < 1$ , a série é convergente.

Como na série dos coeficientes de Laplace a condição  $p = q + 1$  é satisfeita e  $\alpha = \frac{a}{a'} < 1 \Rightarrow |\alpha^2| < 1$ , então a série é convergente.

O cálculo dos coeficientes de Laplace foi realizado nesse trabalho com programação em Fortran, com a implementação da somatória dada na equação (3.65), com algoritmo gentilmente fornecido pelo Prof. Dr. Tadashi Yokoyama.

### 3.5 Forma Literal Final da Função Perturbadora

Para obtermos a expansão da função perturbadora em segunda ordem em excentricidade e inclinação, precisaremos da expansão para  $\cos\psi$ , para a qual é necessário o uso das expansões de  $\cos f$  e  $\sin f$  em termos da anomalia média  $M$ .

Assim,

$$\cos(\omega + f) = \cos\omega \cos f - \sin\omega \sin f, \quad (3.70)$$

$$\sin(\omega + f) = \sin\omega \cos f + \cos\omega \sin f, \quad (3.71)$$

As expansões para  $\sin f$  e  $\cos f$  são dadas em Murray, Dermott(1999), pelas equações (3.24) e (3.25).[11]

Substituindo  $\cos f$  e  $\sin f$  nas equações (3.70) e (3.71) obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(\omega + f) &= \cos(\omega + M) + e(\cos(\omega + 2M) - \cos\omega) \\ &+ e^2 \left( -\cos(\omega + M) - \frac{1}{8} \cos(\omega - M) + \frac{9}{8} \cos(\omega + 3M) \right), \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega + f) &= \sin(\omega + M) + e(\sin(\omega + 2M) - \sin\omega) \\ &+ e^2 \left( -\sin(\omega + M) + \frac{1}{8} \sin(M - \omega) + \frac{9}{8} \sin(\omega + 3M) \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

Queremos expressar a função perturbadora em termos de potências de  $\sin \frac{1}{2}I$  ao invés de senos e cossenos das inclinações, pois estas potências aparecem nas seguintes relações truncadas em segunda ordem:

$$\cos I = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}I = 1 - 2s^2 \quad (3.74)$$

e

$$\sin I = 1 - 2 \sin \frac{1}{2}I \left( 1 - \sin^2 \frac{1}{2}I \right)^{\frac{1}{2}} = 2s \quad (3.75)$$

onde  $s = \sin \frac{1}{2}I$ .

Substituindo (3.72) – (3.75) em (3.39) – (3.41), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} \approx & \cos(\omega + \Omega + M) + e(\cos(\omega + \Omega + 2M) - \cos(\omega + \Omega) \\ & + e^2 \left( \frac{9}{8} \cos(\omega + \Omega + 3M) - \frac{1}{8} \cos(\omega + \Omega - M) - \cos(\omega + \Omega + M) \right) \\ & + s^2 (\cos(\omega + \Omega + M) - \cos(\Omega + \omega + M)), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} \approx & \sin(\omega + \Omega + M) + e(\sin(\omega + \Omega + 2M) - \sin(\omega + \Omega) \\ & + e^2 \left( \frac{9}{8} \sin(\omega + \Omega + 3M) - \frac{1}{8} \sin(\omega + \Omega - M) - \sin(\omega + \Omega + M) \right) \\ & - s^2 (\sin(\omega + \Omega + M) + \sin(\Omega + \omega + M)), \end{aligned} \quad (3.77)$$

e

$$\frac{z}{r} \approx 2s \sin(\omega + M) + 2es(\sin(\omega + 2M) - I \cos \Omega). \quad (3.78)$$

Determinaremos uma expressão para  $\cos \psi$  usando as relações  $M = \lambda - \varpi$  e  $\omega = \varpi - \Omega$  para expressar a expansão em termos da longitude.

$$\begin{aligned} \cos \psi \approx & (1 - e^2 - e'^2 - s^2 - s'^2) \cos(\lambda - \lambda') + ee' \cos(2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi') \\ & + ee' \cos(\varpi - \varpi') + 2ss' \cos(\lambda - \lambda' + \Omega + \Omega') \\ & + e \cos(2\lambda - \lambda' - \varpi) - e \cos(\lambda' - \varpi) \\ & + \frac{9}{8}e^2 \cos(3\lambda - \lambda' - 2\varpi) - \frac{1}{8}e^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\varpi) \\ & + \frac{9}{8}e'^2 \cos(\lambda - 3\lambda' + 2\varpi') + \frac{1}{8}e'^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\varpi') \\ & - ee' \cos(2\lambda - \varpi - \varpi') - ee' \cos(2\lambda' - \varpi - \varpi') \\ & - 2ss' \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Fazendo  $\theta = \omega + \Omega + f$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \theta') &= (\cos\Omega \cos(\omega + f) - \sin\Omega \sin(\omega + f)) \\ &\quad \times (\cos\Omega' \cos(\omega' + f') - \sin\Omega' \sin(\omega' + f')) \\ &\quad + (\sin\Omega \cos(\omega + f) - \cos\Omega \sin(\omega + f)) \\ &\quad \times (\sin\Omega' \cos(\omega' + f') - \cos\Omega' \sin(\omega' + f')). \end{aligned} \quad (3.80)$$

A expansão para  $\cos(\theta - \theta')$  pode ser obtida da expansão de  $\cos\psi$  fazendo  $I = I' = 0$ . Uma vez que  $\Psi = \cos\psi - \cos(\theta - \theta')$ , temos

$$\begin{aligned} \psi &= s^2(\cos(\lambda - \lambda' - 2\Omega) - \cos(\lambda - \lambda')) \\ &\quad + 2ss'(\cos(\lambda - \lambda' - \Omega - \Omega') - \cos(\lambda - \lambda' - \Omega - \Omega')) \\ &\quad + s'^2(\cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega') - \cos(\lambda - \lambda')). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Como  $r/a = 1 + \mathcal{O}(e)$  e  $r'/a' = 1 + \mathcal{O}(e')$ , podemos escrever o fator que aparece na equação (3.58):

$$\begin{aligned} \left( \frac{1rr'}{2aa'} \Psi \right) &= \frac{1}{2}s^2(\cos(\lambda - \lambda' - 2\Omega) - \cos(\lambda - \lambda')) \\ &\quad + ss'(\cos(\lambda - \lambda' - \Omega - \Omega') - \cos(\lambda - \lambda' - \Omega - \Omega')) \\ &\quad + \frac{1}{2}s'^2(\cos(\lambda - \lambda' - 2\Omega') - \cos(\lambda - \lambda')), \end{aligned} \quad (3.82)$$

que independe de  $e$  para esta ordem. Como queremos escrever uma expansão em segunda ordem e como  $\Psi$  já é de segunda ordem, podemos desprezar as potências maiores de  $\Psi$ , obtendo assim os dois maiores termos da série de  $\mathcal{R}_D$ .

Vamos determinar uma expressão para  $\cos(j(\theta - \theta'))$ , com  $j$  inteiro. Temos

$$\begin{aligned} \cos j(\theta - \theta') &= \cos j(\omega + \Omega + f) \cos j(\omega' + \Omega' + f') \\ &\quad + \sin j(\omega + \Omega + f) \sin j(\omega' + \Omega' + f'). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Da equação (2.88) de Murray, Dermott(1999) [11], obtém-se:

$$f = M + 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \mathcal{O}(e^3) \quad (3.84)$$

Substituindo (3.84) em  $\cos j(\omega + \Omega + f)$  e em  $\sin j(\omega + \Omega + f)$ , transformando para longitudes e realizando a expansão em série de Taylor, teremos

$$\begin{aligned} \cos j\theta &\approx (1 - j^2 e^2) \cos(j\lambda) + \left( \frac{1}{2}j^2 e^2 - \frac{5}{8}je^2 \right) \cos((2 - j)\lambda - 2\varpi) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2}j^2 e^2 + \frac{5}{8}je^2 \right) \cos((2 + j)\lambda - 2\varpi) \\ &\quad - je \cos((1 - j)\lambda - \varpi) + je \cos((1 + j)\lambda - \varpi) \end{aligned} \quad (3.85)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} j\theta \approx & (1 - j^2 e^2) \operatorname{sen}(j\lambda) + \left( -\frac{1}{2} j^2 e^2 + \frac{5}{8} j e^2 \right) \operatorname{sen}((2-j)\lambda - 2\varpi) \\ & + \left( -\frac{1}{2} j^2 e^2 + \frac{5}{8} j e^2 \right) \operatorname{sen}((2+j)\lambda - 2\varpi) \\ & - j e \operatorname{sen}((1-j)\lambda - \varpi) + j e \operatorname{sen}((1+j)\lambda - \varpi) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Substituindo  $e$  por  $e'$ ,  $\lambda$  por  $\lambda'$  e  $\varpi$  por  $\varpi'$  obtém-se expressões similares para  $\cos j\theta'$  e  $\operatorname{sen} j\theta'$ .

Efetuando as substituições de  $\cos j\theta$ ,  $\operatorname{sen} j\theta$ ,  $\cos j\theta'$  e  $\operatorname{sen} j\theta'$  na equação (3.83) obtemos

$$\begin{aligned} \cos j(\theta - \theta') = & (1 - j^2 e^2 - j^2 e'^2) \cos(j(\lambda - \lambda')) \\ & + \left( \frac{1}{2} j^2 e^2 + \frac{5}{8} j e^2 \right) \cos((2+j)\lambda - j\lambda' - 2\varpi) \\ & + \left( \frac{1}{2} j^2 e^2 - \frac{5}{8} j e^2 \right) \cos((2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi) \\ & + j e \cos((1+j)\lambda - j\lambda' - \varpi) - j e \cos((1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi) \\ & + \left( \frac{1}{2} j^2 e'^2 - \frac{5}{8} j e'^2 \right) \cos((2-j)\lambda' + j\lambda + 2\varpi') \\ & - j e' \cos((1-j)\lambda' + j\lambda - \varpi') - j e' \cos(-(1+j)\lambda' + j\lambda + \varpi') \\ & - j^2 e e' \cos((1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi - \varpi') \\ & - j^2 e e' \cos((1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \varpi - \varpi') \\ & + j^2 e e' \cos((1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \varpi + \varpi') \\ & + j^2 e e' \cos((1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \varpi + \varpi'). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Fazendo a transformação para longitudes na equação (3.51), obtemos

$$\eta = \frac{r}{a} - 1 \approx -e \cos(\lambda - \varpi) + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2(\lambda - \varpi)) \quad (3.88)$$

e, portanto

$$\eta^2 \approx \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos 2M = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos(2\lambda - 2\varpi), \quad (3.89)$$

com expressões similares para  $\eta'$  e  $\eta'^2$ . Para realizar as somas da equação (3.58), é necessário calcular as derivadas do coeficiente de Laplace dadas pela função  $A_{i,j,m,n}$ . Para dados valores de  $i$  no somatório precisamos calcular

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,m,n} = a^{i+1} a'^{i+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^j \text{left}(\alpha) \right). \quad (3.90)$$

A partir da equação (3.55) obtemos os valores de

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,0,0} = \alpha^i b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (3.91)$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,1,0} = \alpha^{i+1} D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (3.92)$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,0,1} = -\alpha^{i+1} D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - (2i+1)\alpha^i b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (3.93)$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,2,0} = \alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (3.94)$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,1,1} = -\alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - 2\alpha^{i+1}(i+1) D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (3.95)$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,0,2} = -\alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + 4\alpha^{i+1}(i+1) D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + 2\alpha^i(2i^2 + 3i + 2) b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \quad (3.96)$$

onde  $i$  terá valores 0 e 1 (valores maiores podem ser ignorados, devido ao termo  $\Psi^i$  na equação (3.58)).

Realizando o somatório sobre  $i$ , obtemos a equação em segunda ordem em excentricidade e inclinação

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & \left( \frac{1}{2}(a' A_{0,j,0,0} + \eta a' A_{0,j,1,0} + \eta' a' A_{0,j,0,1} + \frac{1}{2}\eta^2 a' A_{0,j,2,0} + \eta\eta' a' A_{0,j,1,1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\eta'^2 a' A_{0,j,0,2}) + \left( \frac{1rr'}{2aa'}\Psi \right) aa'^2 A_{1,j,0,0} \right) \cos j(\theta - \theta'). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Ao substituir as equações (3.82), (3.87)-(3.89) e (3.91)-(3.96) na equação (3.97) obtém-se uma expressão com vinte e três argumentos em cosseno, que podem ser distinguidos através de sua *ordem*  $n$  que é dada pela soma dos coeficientes de  $\lambda$  e  $\lambda'$ . A ordem dos cossenos da Função Perturbadora será utilizada para identificar, no nosso modelo, a ressonância de movimentos médios de determinado interesse, como veremos na seção 4.2.

Assim, se escrevermos a expansão de segunda ordem como

$$\mathcal{R}_D = \mathcal{R}_D^{(0)} + \mathcal{R}_D^{(1)} + \mathcal{R}_D^{(2)}$$

onde  $\mathcal{R}^{(n)}$  é a parte da expansão com argumentos de ordem  $n$ , de Murray e Dermott (1999) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D^{(0)} = & \left( \frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8}(e^2 + e'^2)(-j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos(j\lambda - j\lambda') \\ & + \left( \frac{1}{8}ee'(2j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos((1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \varpi + \varpi') \\
& + \left( \frac{1}{8}ee'(-2j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos((1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \varpi + \varpi') \\
& + \left( \frac{1}{4}(s^2 + s'^2)(-\alpha)b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1+j)\lambda - (1+j)\lambda') \\
& + \left( \frac{1}{4}(s^2 + s'^2)(-\alpha)b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1-j)\lambda - (1-j)\lambda') \\
& + \left( \frac{1}{2}ss'(\alpha)b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \Omega + \Omega') \\
& + \left( \frac{1}{2}ss'(\alpha)b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \Omega + \Omega'), \tag{3.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(1)} = & \left( \frac{1}{4}e(2j - \alpha D)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos((1+j)\lambda - j\lambda' - \varpi) \\
& + \left( \frac{1}{4}e(-2j - \alpha D)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos((1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi) \\
& + \left( \frac{1}{4}e'(1 + 2j + \alpha D)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos(j\lambda - (1+j)\lambda' + \varpi') \\
& + \left( \frac{1}{4}e'(1 - 2j + \alpha D)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos(j\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi'), \tag{3.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(2)} = & \left( \frac{1}{16}e^2(5j + 4j^2 - 2\alpha D - 4j\alpha D + \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos((2+j)\lambda - j\lambda' - 2\varpi) \\
& + \left( \frac{1}{16}e^2(-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos((2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi) \\
& + \left( \frac{1}{8}ee'(2j - 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D - \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos((1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi - \varpi') \\
& + \left( \frac{1}{8}ee'(-2j - 4j^2 - 2\alpha D - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos((1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \varpi - \varpi') \\
& + \left( \frac{1}{16}e'^2(4 + 9j + 4j^2 + 6\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos(j\lambda - (2+j)\lambda' + 2\varpi') \\
& + \left( \frac{1}{16}e'^2(4 - 9j + 4j^2 + 6\alpha D - 4j\alpha D + \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos(j\lambda - (2-j)\lambda' - 2\varpi')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{4} s^2(\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - 2\Omega) \\
& + \left( \frac{1}{4} s^2(\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - 2\Omega) \\
& + \left( \frac{1}{2} ss'(-\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \Omega + \Omega') \\
& + \left( \frac{1}{2} ss'(-\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \Omega + \Omega') \\
& + \left( \frac{1}{4} s'^2(\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - 2\Omega') \\
& + \left( \frac{1}{4} s'^2(\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos((1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - 2\Omega')
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Os argumentos desta expansão não são todos únicos e é possível uma maior simplificação. Pode-se verificar que os termos acima, exceto o primeiro termo de  $\mathcal{R}_D^{(0)}$  ocorrem em pares com formas similares. A equação (3.58) possui uma somatória sobre todos os valores de  $j$ . Assim pode-se fazer uma transformação de para a forma  $j \rightarrow \pm j + k$ , onde  $k$  é inteiro. Assim, como aparecem apenas cossenos na expansão, pode-se mudar o sinal do argumento. Pode-se também usar procedimentos para reduzir os argumentos na expansão para uma forma arbitrária padrão. Neste caso fez-se de  $j$  o coeficiente de  $\lambda'$  em cada argumento. Usa-se também para simplificação o fato de que  $b_s^{(-j)} = b_s^{(j)}$  [17].

A forma final da expansão literal em segunda ordem da parte direta da função perturbadora é dada por Murray e Dermott (1999):

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D = & \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) [-4j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{2} (s^2 + s'^2) (-\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + (-\alpha) b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda' - j\lambda] \\
& + \left( \frac{1}{4} ee' [2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \right) \times \cos[j\lambda' - j\lambda + \varpi' - \varpi] \\
& + (ss'[\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}) \cos[j\lambda' - j\lambda + \Omega' - \Omega] \\
& + \left( \frac{1}{2} e [-2j - \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi] \\
& + \left( \frac{1}{2} e' [-1 + 2j + \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{8} e^2 (-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi] \\
& + \left( \frac{1}{4} ee' (-2 + 6j - 4j^2 + 2\alpha D - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - \varpi' - \varpi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{8} e'^2 (2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{2} s^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega] \\
& + (ss'[-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - \Omega' - \Omega] \\
& + \left( \frac{1}{2} s' 2\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega'] \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Vamos agora determinar a parte indireta da função perturbadora. Já temos a expressão para  $\cos\psi$ , e as expressões para  $r/a$  e para  $(a'/r')^2$  podem ser obtidas pelas expansões elípticas

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos(\lambda - \varpi) + \frac{1}{2} e^2 (1 - \cos(2\lambda - 2\varpi)), \tag{3.102}$$

e

$$\left( \frac{a'}{r'} \right)^2 = 1 + 2e' \cos(\lambda' - \varpi') + \frac{1}{2} e'^2 (1 + 5 \cos(2\lambda' - 2\varpi')). \tag{3.103}$$

Desse modo temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_E &= -\frac{r}{a} \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \cos\psi \approx \\
& \left( -1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e'^2 + s^2 + s'^2 \right) \cos[\lambda' - \lambda] - ee' \cos[2\lambda' - 2\lambda - \varpi' + \varpi] - 2ss' \cos[\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega] \\
& - \frac{1}{2} e \cos[\lambda' - 2\lambda + \varpi] + \frac{3}{2} e \cos[\lambda' - \varpi] - 2e' \cos[2\lambda' - \lambda - \varpi'] \\
& - \frac{3}{8} e^2 \cos[\lambda' - 3\lambda + 2\varpi] - \frac{1}{8} e^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi] + 3ee' \cos[2\lambda' - \varpi' - \varpi] \\
& - \frac{1}{8} e'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi'] - \frac{27}{8} e'^2 \cos[3\lambda' + \lambda - 2\varpi] - s^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega] \\
& + 2ss' \cos[\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega] - s'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega'] \tag{3.104}
\end{aligned}$$

onde foram mudados os sinais dos argumentos para adotar as mesmas convenções usadas na escrita da equação de  $\mathcal{R}_D$ .

Para determinar a expressão para  $\mathcal{R}_I$ , trocamos na equação  $\mathcal{R}_E$ ,  $r/a$  por  $r'/a'$  e também  $(a'/r')^2$  por  $(a/r)^2$ . Obtemos assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_I = & -\frac{r'}{a'} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \approx \\
& \left( -1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2 + s^2 + s'^2 \right) \cos[\lambda' - \lambda] - ee' \cos[2\lambda' - 2\lambda - \varpi' + \varpi] \\
& - 2ss' \cos[\lambda' - \lambda - \omega' + \omega] - 2e \cos[\lambda' - 2\lambda + \varpi] + \frac{3}{2}e' \cos[\lambda - \varpi'] \\
& - \frac{1}{2}e' \cos[2\lambda' - \lambda - \varpi'] - \frac{27}{8}e^2 \cos[\lambda' - 3\lambda + 2\varpi] \\
& - \frac{1}{8}e^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi] + 3ee' \cos[2\lambda - \varpi' - \varpi] - \frac{1}{8}e'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi'] \\
& - \frac{3}{8}e'^2 \cos[3\lambda' - \lambda - 2\varpi'] - s^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega] \\
& + 2ss' \cos[\lambda' + \lambda - \omega' - \omega] - s'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega'] \tag{3.105}
\end{aligned}$$

A expressão da função perturbadora em segunda ordem em inclinação no corpo externo será dada por

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{a'} (\mathcal{R}_D + \alpha \mathcal{R}_E) \tag{3.106}$$

e, no corpo interno

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{a} \left( \alpha \mathcal{R}_D + \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{R}_I \right) \tag{3.107}$$

## 3.6 Equações Planetárias de Lagrange

Queremos agora quantificar a variação orbital resultante no corpo perturbado. Para isso, usaremos as Equações Planetárias de Lagrange. As Equações Planetárias de Lagrange são equações que permitem a avaliação das variações dos elementos orbitais. No estudo de equações diferenciais, esse tipo de equação é denominada “equação com variação de parâmetros”.

As equações de Lagrange para as variações dos elementos orbitais, escritas em função da anomalia média  $M$ , são:

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, \tag{3.108}$$

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{na^2 e} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \right), \tag{3.109}$$

$$\dot{I} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \left( \cot I \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \csc I \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \right), \tag{3.110}$$

$$\dot{\omega} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \tag{3.111}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\csc I}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.112)$$

$$\dot{M} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}. \quad (3.113)$$

As variações dos elementos orbitais da massa  $m'$  podem ser expressas por equações similares às equações (3.108) – (3.113), apenas substituindo  $\mathcal{R}$  por  $\mathcal{R}'$  e substituindo também todas as variáveis sem a marcação “linha” por variáveis marcadas por esse símbolo.

Como  $\lambda = M' + \omega' + \Omega'$ ,  $\lambda' = M' + \omega' + \Omega'$ , pois  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda'} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M'}$ , fica simples utilizarmos as equações de variação dos elementos (3.108) - (3.113) com as funções perturbadoras dadas em termos das longitudes verdadeiras, equações (3.106) e (3.107). De fato utilizaremos as equações (3.108) - (3.113) para integrar o sistema de EDO, conforme Apêndice A. Note que  $M$ ,  $\omega$  e  $\Omega$  estão variando segundo as equações de Lagrange (3.108) - (3.113). Uma dedução dessas equações pode ser encontrada no capítulo 10, em Vinti (1998).

Se  $V_1$  é o potencial de perturbação, então  $V_1 = H_1 = -F_1$ , e

$$F = \frac{\mu^2}{2\Lambda^2} + F_1 \quad (3.114)$$

corresponde à equação diferencial

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \nabla F_1 \quad (3.115)$$

Aqui,  $F_1 = -V_1$  é chamada de função perturbadora. As equações planetárias de Lagrange são aplicadas somente quando a força perturbadora é derivada do potencial.

Utilizaremos as equações

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \frac{\partial F}{\partial M} \\ \dot{M} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda} \\ \dot{G} &= \frac{\partial F}{\partial g} \\ \dot{G} &= -\frac{\partial F}{\partial G} \\ \dot{H} &= \frac{\partial F}{\partial h} \\ \dot{h} &= -\frac{\partial F}{\partial H} \end{aligned} \quad (3.116)$$

para calcular  $\dot{a}$ ,  $\dot{e}$ ,  $\dot{I}$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$  e  $\dot{M}$  como funções de  $a$ ,  $e$ ,  $I$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ . Embora  $M = n(t-\tau)$  e  $n = \sqrt{\mu a^{-3}}$ ,  $M$  e  $a$  são consideradas como variáveis independentes nestes cálculos.

Começamos com

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\mu^2}{2\Lambda^2} + F_1(a, e, I, \Omega, \varpi, M) \\
a &= \frac{\Lambda^2}{\mu} \\
1 - e^2 &= \frac{G^2}{\Lambda^2} \\
\cos I &= \frac{H}{G} \\
\omega &= g \\
\Omega &= h \\
n &= \mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

### Semi-eixo maior

Vamos obter a equação para a variação do semi-eixo maior  $a$ . Temos que

$$\begin{aligned}
\dot{\Lambda} &= \frac{\partial F}{\partial M} = \frac{\partial F_1}{\partial M} \\
a &= \frac{\Lambda^2}{\mu} \\
\Lambda &= \sqrt{\mu a} = \sqrt{\mu a} \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{\mu a^4}}{\sqrt{a^3}} = \\
&\quad \mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} a^2 = n a^2
\end{aligned} \tag{3.118}$$

assim,

$$\dot{a} = \frac{2\Lambda}{\mu} \dot{\Lambda} = \frac{2\Lambda}{\mu} \frac{\partial F_1}{\partial M} = \frac{2\sqrt{\mu a}}{\mu} \frac{\partial F_1}{\partial M} = 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\partial F_1}{\partial M} = 2 \sqrt{\frac{a^2 a}{a^2 \mu}} = \frac{2\sqrt{a^3}}{a\sqrt{\mu}} \frac{\partial F_1}{\partial M} \tag{3.119}$$

portanto

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial F_1}{\partial M}. \tag{3.120}$$

### Excentricidade

Para a equação de variação da excentricidade, temos

$$1 - e^2 = \frac{G^2}{\Lambda^2}$$

$$\begin{aligned} \ln(1 - e^2) &= 2\ln G - 2\ln \Lambda \\ \frac{-e\dot{e}}{1 - e^2} &\left( \frac{\partial F_1}{\partial M} - \frac{\Lambda}{G} \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \right). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sqrt{\mu a} = na^2 \\ \frac{\Lambda}{G} &= (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.122)$$

e assim

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{na^2 e} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial M} - (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \right]. \quad (3.123)$$

### Inclinação

$$\begin{aligned} \cos I &= \frac{H}{G} \\ -\dot{I} \sin I &= \frac{\dot{H}}{G} - \frac{H}{G^2} \dot{G} = \frac{1}{G} \frac{\partial F_1}{\partial \Omega} - \frac{\cos I}{G} \frac{\partial F_1}{\omega}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Entretanto,

$$G = na^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (3.125)$$

e assim

$$\dot{I} = \frac{1}{na^2 \sqrt{(1 - e^2)}} \left( \cot I \frac{\partial F_1}{\partial \omega} - \csc I \frac{\partial F_1}{\partial \Omega} \right). \quad (3.126)$$

### Anomalia Média

Temos que

$$\dot{M} = -\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = -\frac{\partial}{\partial \Lambda} \left( \frac{\mu^2}{2\Lambda^2} + F_1 \right) = \frac{\mu^2}{\Lambda^3} - \frac{\partial F_1}{\partial \Lambda}, \quad (3.127)$$

assim,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sqrt{\mu a} = na^2 \\ \mu^2 / \Lambda^3 &= \mu^2 (\mu a)^{-\frac{3}{2}} = n, \end{aligned} \quad (3.128)$$

então

$$\dot{M} = n - \left( \frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} \right), \quad (3.129)$$

entretanto

$$F_1 = F_1(a, e, I, \Omega, \omega, M). \quad (3.130)$$

Dos elementos orbitais, apenas  $a$  e  $e$  dependem de  $\Lambda$ . Assim

$$\frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial a} \right) \left( \frac{\partial a}{\partial \Lambda} \right) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial e} \right) \left( \frac{\partial e}{\partial \Lambda} \right) \quad (3.131)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Lambda^2}{\mu} \\ \frac{\partial a}{\partial \Lambda} &= \frac{2\Lambda}{\mu} = \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu} = \frac{2}{na} \\ 1 - e^2 &= \frac{G^2}{\Lambda^2} \\ -e \left( \frac{\partial e}{\partial \Lambda} \right) &= -\frac{G^2}{\Lambda^3} = -\frac{1 - e^2}{\Lambda} = -\frac{1 - e^2}{na^2}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Então

$$\frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} = \frac{2}{na} \frac{\partial F_1}{\partial a} + \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial F_1}{\partial e}, \quad (3.133)$$

e assim

$$\dot{M} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial F_1}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial F_1}{\partial e}. \quad (3.134)$$

### Argumento do Pericentro

$$\dot{\omega} = \dot{g} = -\frac{\partial F}{\partial G} = -\frac{\partial F_1}{\partial G}. \quad (3.135)$$

Em  $F_1(a, e, I, \Omega, \omega, M)$ , somente  $e$  e  $I$  dependem de  $G$ :

$$\begin{aligned} 1 - e^2 &= \frac{G^2}{\Lambda^2} \\ \cos I &= \frac{H}{G}. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Assim,

$$\frac{\partial F_1}{\partial G} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial e} \right) \left( \frac{\partial e}{\partial G} \right) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial I} \right) \left( \frac{\partial I}{\partial G} \right), \quad (3.137)$$

então

$$-e \left( \frac{\partial e}{\partial G} \right) = \frac{G}{\Lambda^2} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2} \quad (3.138)$$

assim como

$$-\operatorname{sen}I \left( \frac{\partial I}{\partial G} \right) = -\frac{H}{G^2} = -\frac{\cos I}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.139)$$

Portanto

$$\dot{\omega} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} F_1}{na^2 e} \frac{\partial}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial F_1}{\partial I}. \quad (3.140)$$

### Longitude do Nodo

$$\dot{\Omega} = \dot{h} = -\frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{\partial F_1}{\partial H}. \quad (3.141)$$

Em  $F_1(a, e, I, \Omega, \omega, M)$  apenas I depende da variável H. Assim,

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial I} \right) \left( \frac{\partial I}{\partial H} \right). \quad (3.142)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} \cos I &= \frac{H}{G} \\ -\operatorname{sen}I \left( \frac{\partial I}{\partial H} \right) &= -\frac{1}{G} = -\frac{1}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.143)$$

então

$$\dot{\Omega} = \frac{\csc I}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial F_1}{\partial I} \quad (3.144)$$

### Equações Planetárias de Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial F_1}{\partial M} \\ \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial M} - (1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \right] \\ \dot{I} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{(1-e^2)}} \left( \cot I \frac{\partial F_1}{\partial \omega} - \csc I \frac{\partial F_1}{\partial \Omega} \right) \\ \dot{\omega} &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} F_1}{na^2 e} \frac{\partial}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial F_1}{\partial I} \\ \dot{\Omega} &= \frac{\csc I}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial F_1}{\partial I} \end{aligned}$$

$$\dot{M} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial F_1}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial F_1}{\partial e} \quad (3.145)$$

Essas são as equações planetárias de Lagrange finais para a variação dos elementos orbitais. As derivadas parciais são as derivadas da função perturbadora com respeito a esses elementos. Note que  $M$  contém um termo aditivo  $n$ , o movimento médio, que é não nulo no caso não perturbado, motivo pelo qual esse conjunto de elementos orbitais é chamado de conjunto “rápido”.

Note que  $e$  aparece nos denominadores de  $\dot{e}$ ,  $\dot{\omega}$  e  $\dot{M}$  e que  $\sin I$  aparece nos denominadores de  $\dot{I}$ ,  $\dot{\omega}$  e  $\dot{\Omega}$ . Essas indicações mostram problemas para órbitas circulares, onde  $e = 0$ , e para órbitas no plano  $xy$ , com  $\sin I = 0$ . A solução para essas equações apresentam  $e$  e  $\sin I$  nos denominadores dos resultados para a maioria dos elementos orbitais.

Para evitar problemas nas equações quando a excentricidade ou a inclinação forem pequenas, podemos fazer as seguintes transformações:

$$\tan^2 I = p^2 + q^2,$$

e

$$e^2 = k^2 + h^2,$$

Então,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\sin \Omega}{\cos^2 I} \frac{dI}{dt} + \tan I \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\cos \Omega}{\cos^2 I} \frac{dI}{dt} - \tan I \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt}.$$

A função  $\cos I$  no denominador pode ser expandida em potências de  $p^2 + q^2$ :

$$\frac{1}{\cos I} = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

para  $I$  suficientemente pequeno.

Verificamos também que as derivadas parciais  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}$  e  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}$  são equivalentes:

Temos que  $\mathcal{R}$  é dada por

$$\mathcal{R} = (A(a, e, i), f(\lambda, \Omega, \varpi)). \quad (3.146)$$

Como

$$\lambda = M + \varpi,$$

temos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial M} = 1. \quad (3.147)$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial M}$$

Portanto, por (3.147) temos que

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}. \quad (3.148)$$

De modo similar, mostramos que  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}$  é equivalente a  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}$ .

Temos que

$$\varpi = \omega + \Omega$$

e assim

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \omega} = 1 \quad (3.149)$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial \omega}$$

Portanto, por (3.149) temos que

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}. \quad (3.150)$$

Fazendo as substituições de (3.148) e (3.150) nas equações de (3.145) obtemos:

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}, \quad (3.151)$$

$$\dot{e} = \frac{1 - k^2 - h^2}{na^2[k^2 + h^2]^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} - \frac{1}{[1 - k^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right), \quad (3.152)$$

$$\dot{I} = \frac{1}{na^2[(p^2 + q^2)(1 - k^2 - h^2)]^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} - [1 + p^2 + q^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \right), \quad (3.153)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{na^2} \left[ \left( \frac{1 - k^2 - h^2}{k^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{1}{[(p^2 + q^2)(1 - k^2 - h^2)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \right], \quad (3.154)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2[(p^2 + q^2)(1 - k^2 - h^2)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.155)$$

$$\dot{M} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1 - k^2 - h^2}{na^2(k^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}. \quad (3.156)$$

Embora essas transformações sejam particularmente aplicadas para quando a órbita tem pequena excentricidade ou pequena inclinação, quando escritas dessa forma as

equações também mantém suas validades para uma órbita com grande excentricidade ou com grande inclinação.

Neste capítulo do trabalho realizamos o estudo da parte analítica da função perturbadora, deduzindo os principais passos de seu desenvolvimento. Na seção 3.1, o Problema Geral de Três Corpos, obtivemos as equações de movimento de três massas num sistema referencial inercial. A função perturbadora aparece como termos das acelerações relativas das massas secundárias. Na seção 3.2, Expansão usando Polinômios de Legendre, realizamos a expansão por esses polinômios da função perturbadora para as massas secundárias interna e externa. Ao invés de trabalharmos com coordenadas cartesianas, utilizamos a expansão em termos dos elementos orbitais, considerando o caso planar. Na seção 3.3, Expansão Literal em Inclinação e Excentricidade, separamos a expansão da função perturbadora na parte direta e na parte indireta. Realizamos a expansão da parte direta em termos da inclinação e da excentricidade das órbitas das massas secundárias. Obtivemos também os coeficientes de Laplace, que são funções da razão entre os semi-eixos das órbitas das massas secundárias. Na seção 3.4, Coeficientes de Laplace, justificamos a expansão da função que dá origem a esses coeficientes por meio de indução finita. A forma integral dessa função é apresentada, porém a forma em série para ser implementada numericamente. Na seção 3.5, Forma Literal Final da Função Perturbadora, realizamos a expansão em segunda ordem em excentricidade e inclinação para a função perturbadora, sobre a qual calculamos as derivadas apresentadas na seção A do Apêndice. Na seção 3.6, Equações Planetárias de Lagrange, apresentamos as equações que foram implementadas através de algoritmo em Fortran para realizar as simulações numéricas e compará-las com as soluções das equações exatas de movimentos.

# 4 Resultados

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos com o estudo da função perturbadora, ressonância e os resultados das simulações numéricas

## 4.1 Comensurabilidade de movimentos médios

Sejam um asteróide e um planeta gigante em órbita em torno de uma estrela tal que o período orbital do asteróide é a metade do período do planeta. Casos como esse ocorrem no sistema solar, e em geral diz-se que existe uma comensurabilidade de movimentos médios. Inicialmente estamos ignorando quaisquer perturbações entre dois objetos pois estamos interessados somente em como a comensurabilidade conduz a repetições de encontros.

Murray, Dermott(1999), no capítulo 8, apresentam uma figura que exemplifica as posições relativas de Júpiter e um asteróide. Dizemos que há conjunção entre Júpiter e o asteróide, quando os vetores de força gravitacional se alinham.

Em  $t = 0$  (figura (4.1a)), Júpiter e o asteróide estão em conjunção, e o asteróide está no pericentro da órbita. Como a comensurabilidade é 2:1, o asteróide irá completar 2 períodos para cada 1 período de Júpiter.

Consideremos passos de  $1/4$  do período de Júpiter. Desconsiderando quaisquer perturbações entre os objetos, o asteróide e Júpiter terão se movido para a posição

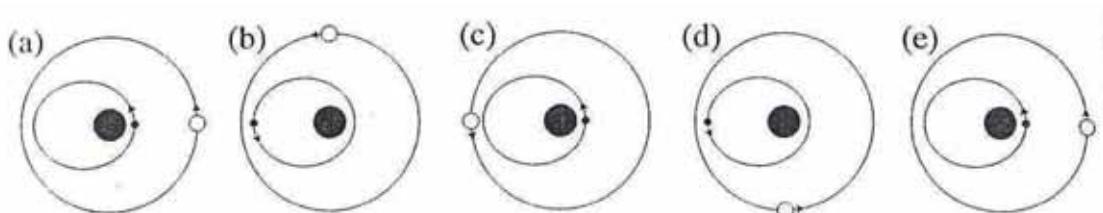


Figura 4.1: Posições relativas de Júpiter (círculo branco) e um asteróide (círculo menor preenchido) para a configuração estável quando seus períodos orbitais estão na razão 2:1. Se  $T_J$  é o período da órbita de Júpiter então a figura ilustra as configurações nos tempos (a) $t = 0$ , (b) $t = \frac{1}{4}T_J$ , (c) $t = \frac{1}{2}T_J$ , (d) $t = \frac{3}{4}T_J$ , (e) $t = T_J$ . Figura extraída da página 322 de Murray e Dermott,1999.

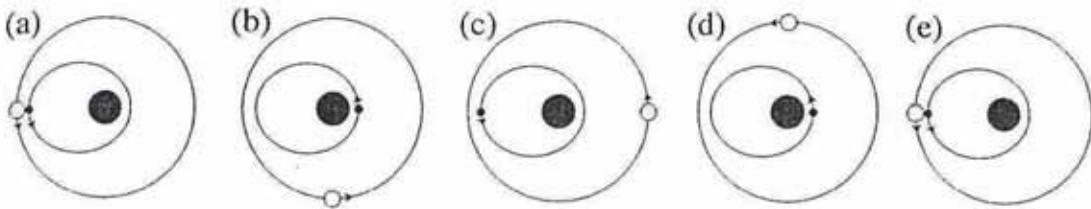


Figura 4.2: Posições relativas de Júpiter (circulo branco) e um asteróide (circulo menor preenchido) para a configuração estável quando seus períodos orbitais estão na razão 2:1. Se  $T_J$  é o período da órbita de Júpiter então a figura ilustra as configurações nos tempos (a) $t = 0$ , (b) $t = \frac{1}{4}T_J$ , (c) $t = \frac{1}{2}T_J$ , (d) $t = \frac{3}{4}T_J$ , (e) $t = T_J$ . Figura extraída da página 323 de Murray e Dermott, 1999.

mostrada na figura b no tempo  $t = \frac{1}{4}T_J$ . O asteróide estará no apocentro de sua órbita e Júpiter terá completado 1/4 de sua órbita. Embora a aproximação maior entre as duas órbitas está no apocentro do asteróide, Júpiter não está próximo quando o asteróide estiver nessa posição. Similarmente, quando Júpiter chega nesta posição no tempo  $t = \frac{1}{2}T_J$ , o asteróide está de volta ao pericentro (figura c). Em  $t = \frac{3}{4}T_J$  o asteróide retorna ao ponto crítico, mas Júpiter não está próximo (figura d), até que em  $t = T_J$  (figura e) a configuração inicial (figura a) se repete. Assim, embora a maior aproximação seja aparentemente no apocentro do asteróide isso não acontece por conta do mecanismo da comensurabilidade. Este seria um exemplo de configuração de equilíbrio estável entre Júpiter e o asteróide.

Porém, se começarmos com Júpiter e o asteróide em conjunção no apocentro do asteróide, teríamos uma possível configuração de equilíbrio instável, onde a aproximação seria mínima para cada período completado por Júpiter.

Para um caso mais geral, podemos considerar dois planetas movendo em torno de uma estrela em órbitas circulares e coplanares.

## 4.2 Identificação da Ressonância na Função Perturbadora

Seja a comensurabilidade 5:4 entre os planetas b e c da estrela Kepler-11 (ver Capítulo 1). Temos  $5n_c - 4n_b \approx 0$ , onde  $n_b$  e  $n_c$  são os movimentos médios (frequências orbitais) dos planetas b e c, respectivamente, o que significa que a cada 5 revoluções do planeta b seriam completadas 4 revoluções do planeta c. Assim,  $n_c = \frac{4}{5}n_b$ .

Então, sejam os argumentos da Função Perturbadora cuja soma dos coeficientes de  $\lambda$  e  $\lambda'$  é 1. Considere ordem de excentricidade e inclinação, dados na equação (3.101).

Para identificarmos um termo da ressonância 5:4 associado à comensurabilidade 5:4, basta fazermos  $j = 5$ . Assim, como  $\lambda = nt + \varepsilon$ , em primeira aproximação  $\dot{\lambda} \approx n$ , temos:

$$j\lambda' + (1-j)\lambda = 5\lambda' - 4\lambda.$$

que derivando obtém-se  $5n' - 4n$ , onde  $n' = n_c$  e  $n = n_b$ .

Assim, de acordo com a ressonância em questão, associa-se a  $j$  valores adequados.

Essa ressonância aparece como um pequeno divisor no momento da integração da função perturbadora. Por exemplo, usando  $j = 5$  ao integrarmos a equação (3.108), considerando na equação de  $\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \lambda}$  (A.3, do Apêndice) apenas o termo proporcional à excentricidade do planeta b, teremos um resultado envolvendo a seguinte expressão:

$$\frac{da}{dt} = A \operatorname{sen}(5\lambda' - 4\lambda - \varpi),$$

onde

$$A = -\frac{1}{2}e(-2j - \alpha D)(1-j)b_{\frac{1}{2}}^{(j)},$$

e assim

$$\int_{a_0}^{a^*} da = \int_t^{t^*} A \operatorname{sen}(5n't - 4nt + 5\varepsilon - 4\varepsilon' - \varpi) dt.$$

Fazendo

$$k = 5\varepsilon - 4\varepsilon' - \varpi,$$

temos

$$u = 5n't - 4nt + k,$$

$$\frac{du}{dt} = 5n' - 4n + \dot{k},$$

$$dt = \frac{du}{5n' - 4n + \dot{k}}.$$

Assim,

$$a^* - a_0 = A \int \frac{\operatorname{sen} u}{5n' - 4n + \dot{k}} du.$$

Note que nessa ilustração não consideramos a variação dos outros elementos orbitais dados nas equações (3.109) – (3.113).

O termo no denominador da integral é chamado “pequeno divisor”; a partir da análise do comportamento da função quando o pequeno divisor tende a zero, obtém-se os resultados dos efeitos das ressonâncias no problema em questão.

Concluímos portanto que existe uma grande diferença entre a condição geométrica de comensurabilidade e os efeitos ressonantes a ela associados.

### 4.3 Aplicação Numérica: sistema HD 10180

Na Tabela 4.1 são apresentados os dados básicos dos planetas da estrela HD10180 que utilizaremos na simulação da função perturbadora nesse sistema<sup>1</sup>.

#### Dados Básicos

Nome	HD 10180c	HD 10180d	HD 10180e
Descoberto em	2010	2010	2010
Massa	$13,1 M_{\oplus}$	$11,7 M_{\oplus}$	$25,1 M_{\oplus}$
Semi-eixo maior	$0,0641 (\pm 0,001) u.a.$	$0,1286 (\pm 0,002) u.a.$	$0,2699 (\pm 0,0042) u.a.$
Período orbital	$5,75979 (\pm 0,00062) \text{ dias}$	$16,3579 (\pm 0,038) \text{ dias}$	$49,745 (\pm 0,022) \text{ dias}$
Excentricidade	$0,045 (\pm 0,026)$	$0,088 (\pm 0,041)$	$0,026 (\pm 0,036)$
Atualização em	31/01/2012	31/01/2012	31/01/2012
Nome	HD 10180f	HD 10180g	HD 10180h
Descoberto em	2010	2010	2010
Massa	$23,9 M_{\oplus}$	$21,4 M_{\oplus}$	$64,4 M_{\oplus}$
Semi-eixo maior	$0,4929 (\pm 0,0078) u.a.$	$1,422 (\pm 0,026) u.a.$	$3,4 (\pm 0,11) u.a.$
Período orbital	$122,76 (\pm 0,17) \text{ dias}$	$601,2 (\pm 8,1) \text{ dias}$	$2222 (\pm 91) \text{ dias}$
Excentricidade	0,135	0,19 ( $\pm 0,14$ )	0,08 ( $\pm 0,07$ )
Atualização em	31/01/2012	07/12/2010	07/12/2010

Tabela 4.1: Dados básicos dos planetas do sistema HD10180.

Os planetas HD 10180b, HD 10180i e HD 10180j não são confirmados<sup>2</sup>.

#### A Ressonância 3:1

Uma análise cuidadosa dos dados dos planetas d,e mostra que a razão de períodos orbitais os colocam numa configuração orbital próxima da comensurabilidade 3:1 (mais precisamente,  $49,745/16,3579 \approx 3,04$ ).

Para um valor fixo de semi-eixo maior do planeta e ( $a_e$ ), podemos calcular os valores de  $a_d$  correspondente à comensurabilidade exata 3:1. A figura (4.3) mostra a razão de períodos orbitais do par d,e em função de  $a_d$ . Com essa metodologia a 3:1 ocorre em  $a_{d(3:1)} \approx 0,1298 u.a.$

Vamos estudar numericamente a dinâmica ressonante do par d,e em torno da comensurabilidade 3:1.

<sup>1</sup>Fonte: <http://exoplanet.eu/>.

<sup>2</sup>Fonte: <http://voparis-exoplanet.obspm.fr/>.

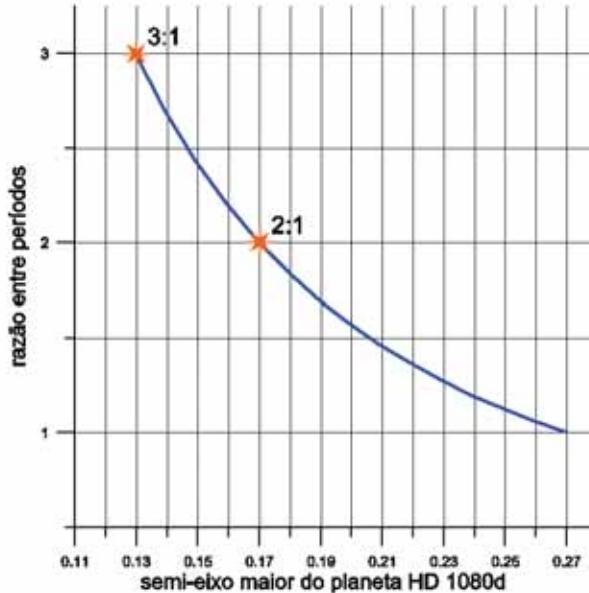


Figura 4.3: Variação da razão entre os períodos orbitais do par de planetas HD10180d,e em função do valor de  $a_d$ .

Com esse objetivo, vamos integrar numericamente as equações de movimento do sistema mútuo HD 10180d,e para diferentes condições iniciais. Vamos fixar a órbita do planeta  $e$ , considerando diferentes valores do semi-eixo maior do planeta  $d$  em torno do valor da comensurabilidade 3:1. Faremos também a aproximação planar, onde as inclinações orbitais são nulas em relação a um plano de referência. Outras condições iniciais serão indicadas nas figuras abaixo.

Os resultados estão mostrados na Figura (4.4). Nessa figura, plotamos a evolução temporal de  $\phi = 3\lambda' - \lambda - 2\varpi$  e  $\phi = 3\lambda' - \lambda - 2\varpi'$ , dois ângulos característicos associados à ressonância 3:1 no caso planar. Os pontos dados em cor azul correspondem à solução das equações de Lagrange (3.108) – (3.113), enquanto que os pontos dados em cor laranja correspondem à solução das equações exatas de movimento (3.3) – (3.4). Desta forma, além de estudarmos a dinâmica ressonante, vamos comparar resultados das equações aproximadas de movimento com a função perturbadora em ordem 2.

A Figura 4.4(a) mostra  $\phi$  para  $a_d=0.1286$  u.a., o valor nominal do semi-eixo maior do planeta dado na Tabela 4.1. O seu movimento corresponde a uma circulação retrógrada, isto é, ele decresce quase-periodicamente, atingindo todos os valores entre  $0 - 2\pi$  a cada 1000 dias, aproximadamente. Para  $a_d=0.1295$  u.a., esse período aumenta consideravelmente (Fig. 4.4(b)). Esse fenômeno é típico quando um sistema se aproxima de uma ressonância.

Adotando  $a_d=0.1298$  u.a., isto é, o valor da comensurabilidade 3:1 obtido anteriormente, vemos um comportamento de  $\phi$  que difere consideravelmente dos anteriores (Fig. 4.4(c))): nesse caso,  $\phi$  parece não atingir todos os valores entre  $0 - 2\pi$ . De fato, próximo desse semi-eixo maior encontra-se a ressonância associada à comensurabilidade

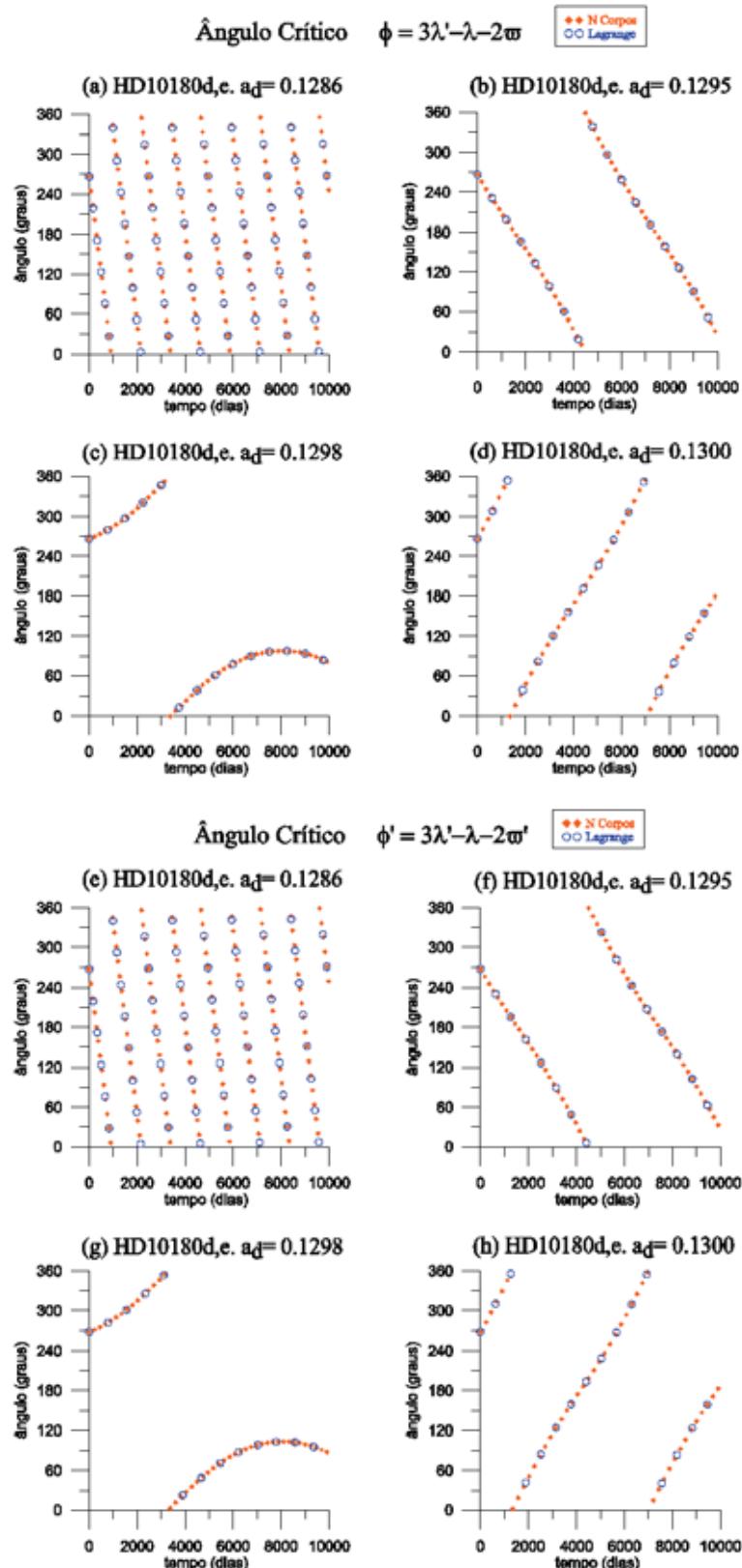


Figura 4.4: Condições iniciais:  $e_d = 0.088$ ,  $I_d = 0^\circ$ ,  $\varpi_d = 1^\circ$ ,  $\Omega_d = 0^\circ$ ,  $\lambda_d = 2^\circ$ ;  $a_e = 0.2699u.a.$ ,  $e_e = 0.060$ ,  $I_e = 0^\circ$ ,  $\varpi_e = 0.5^\circ$ ,  $\Omega_e = 0^\circ$ ,  $\lambda_e = 90^\circ$ .

3:1, tal como veremos em detalhes abaixo. Para  $a_d=0.1300$  u.a.,  $\phi$  circula em outro sentido, aumentando seu valor periodicamente. Essa é outra característica de sistemas em torno da ressonância: a mudança de regime de circulação do ângulo crítico, tal como  $\phi$ , em torno da chamada ressonância exata.

As figuras 4.4(a)-(d) mostram que o período e amplitude de variação de  $\phi$  é bem aproximado pelas equações de movimento, i.e., o uso da função perturbadora em ordem 2 em excentricidade pode ser aplicada quando na análise da ressonância. No entanto, no caso da variação em amplitude de outros elementos tais como semi-eixo maior e excentricidade, as equações truncadas de movimento podem fornecer erros significativos em amplitude. Tal comparação detalhada está fora dos objetivos deste trabalho.

A sequência dada nas Figs. 4(e)-(h) revela um comportamento similar ao discutido acima para o ângulo  $\phi = 3\lambda' - \lambda - 2\varpi'$ .

Na Fig. (4.5) mostramos em mais detalhes as evoluções temporais de  $\phi$  e  $\phi'$  para o sistema próximo do semi-eixo ressonante, isto é,  $a_d=0.1298$  u.a.. Como apontado acima, de fato esses ângulos parecem agora oscilar em torno de zero com grande amplitude, Fig. 4.5(b). Concluímos que nas imediações da ressonância os ângulos críticos parecem librar, sinônimo de oscilar em torno de certo valor fixo, sem atingir todos os valores de  $0-2\pi$ . Na Fig. 4.5(c) mostramos a variação temporal da diferença das longitudes dos pericentros das órbitas, ou seja, a variação relativa das precessões dos pericentros das órbitas planetárias. Esse ângulo é importante pois ele evolui independentemente dos ângulos ressonantes uma vez que define um grau de liberdade independente do sistema. [13, 12, 19].

A Fig. (4.5) é a mesma que a (4.4) onde um tempo de integração muito maior foi utilizado ( $10^6$  dias  $\approx 2737,85$  anos). Essa figura revela as verdadeiras características da ressonância planetária 3:1 do par HD 10180d,e, como explicamos a seguir, e de acordo com as considerações anteriores.

Na Fig. 4.5(a), vemos que, enquanto o ângulo  $\phi$  parece oscilar em torno de zero, ele de fato atinge todos os valores  $0-2\pi$  a cada 600.000 dias aproximadamente. Já  $\phi'$ , dado na Fig. 4.5(b), se mantém librando em torno de zero com grande amplitude. Portanto, por essa razão,  $\phi'$  é o verdadeiro ângulo associado à ressonância 3:1, para as condições iniciais adotadas aqui <sup>3</sup>.

A figura 4.5(c) mostra que  $\phi - \phi'$  oscila em torno de zero a cada 600.000 dias. Isso significa que o movimento relativo dos pericentros mantém-se em torno de zero, ou seja, as órbitas permanecem quase-alinhadas em longos períodos de tempo. O alinhamento exato corresponde a uma situação de equilíbrio de um dos modos possíveis de oscilação do movimento relativo dos pericentros dados na dinâmica planetária ([20, 13, 12, 19]).

---

<sup>3</sup>A topologia do espaço de fase das ressonâncias em sistemas planetários pode ser muito mais complexa, com diversas regiões de estabilidade, caos e equilíbrio. As configurações ressonantes que aparecem aqui são casos particulares das classes de regimes de movimento possíveis em ressonância estudados nas referências [12, 13, 19].

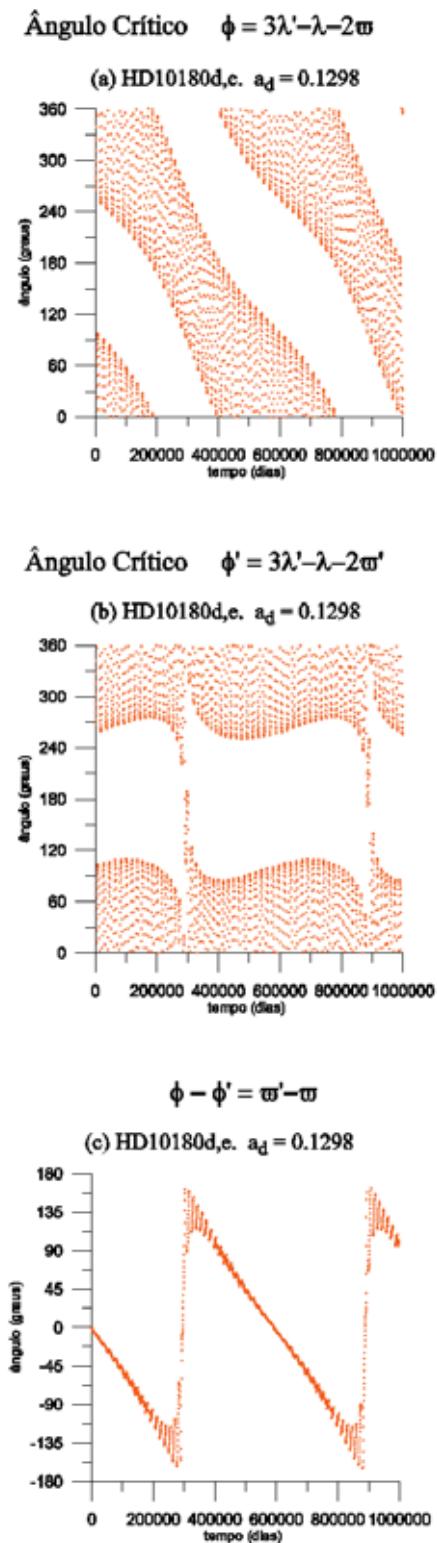


Figura 4.5: Condições iniciais:  $e_d = 0.088$ ,  $I_d = 0^\circ$ ,  $\varpi_d = 1^\circ$ ,  $\Omega_d = 0^\circ$ ,  $\lambda_d = 2^\circ$ ;  $a_e = 0.2699u.a.$ ,  $e_e = 0.060$ ,  $I_e = 0^\circ$ ,  $\varpi_e = 0.5^\circ$ ,  $\Omega_e = 0^\circ$ ,  $\lambda_e = 90^\circ$ .

A outra é o anti-alinhamento, onde  $\phi - \phi' = \pi$ .

Concluímos que enquanto o sistema oscila em ressonância, também mantém um quase-alinhamento.

Uma análise da Tabela 4.1 nos revela que a faixa de valores do semi-eixo do planeta d que aplicamos está dentro da margem de erro da medida desta quantidade. Assim, embora a condição inicial nominal seja aquela correspondente à Fig. 4.4(a), a condição inicial de ressonância dada por  $a_d=0.1298$  u.a. pode corresponder a um valor possível e o sistema pode de fato estar atualmente em ressonância. Tal configuração ressonante pode ter consequências para a dinâmica e estabilidade do sistema (tal como vimos por exemplo na seção 4.2).

A análise dos gráficos apresentados na figura (4.6), mostra que num tempo maior, 11000 anos, o sistema apresenta estabilidade, pois os valores de  $a_d$  e  $a_e$  ficam em uma faixa de valores próximos ao valor de ressonância.

### A Ressonância 2:1

Uma análise da Fig. (4.3) mostra que, embora relativamente “distante” da configuração atual, isto é, para condições iniciais fora das margens de erros, outra comensurabilidade, a 2:1, está centrada em  $a_d \approx 0.1700u.a.$ . Assim, de forma análoga à desenvolvida anteriormente para a 3:1, na Figs. 4.6 - 4.9 vemos a evolução temporal de  $\phi = 2\lambda' - \lambda - \varpi$  e  $\phi = 2\lambda' - \lambda - \varpi'$ , ângulos associados a ressonância 2:1.

Novamente mostramos em alguns casos os resultados obtidos com as equações de Lagrange e com as equações exatas de movimento. Toda a análise anterior se aplica a ressonância 2:1, exceto que o ângulo crítico associado à ressonância 2:1 seria  $\phi$  ao invés de  $\phi'$ .

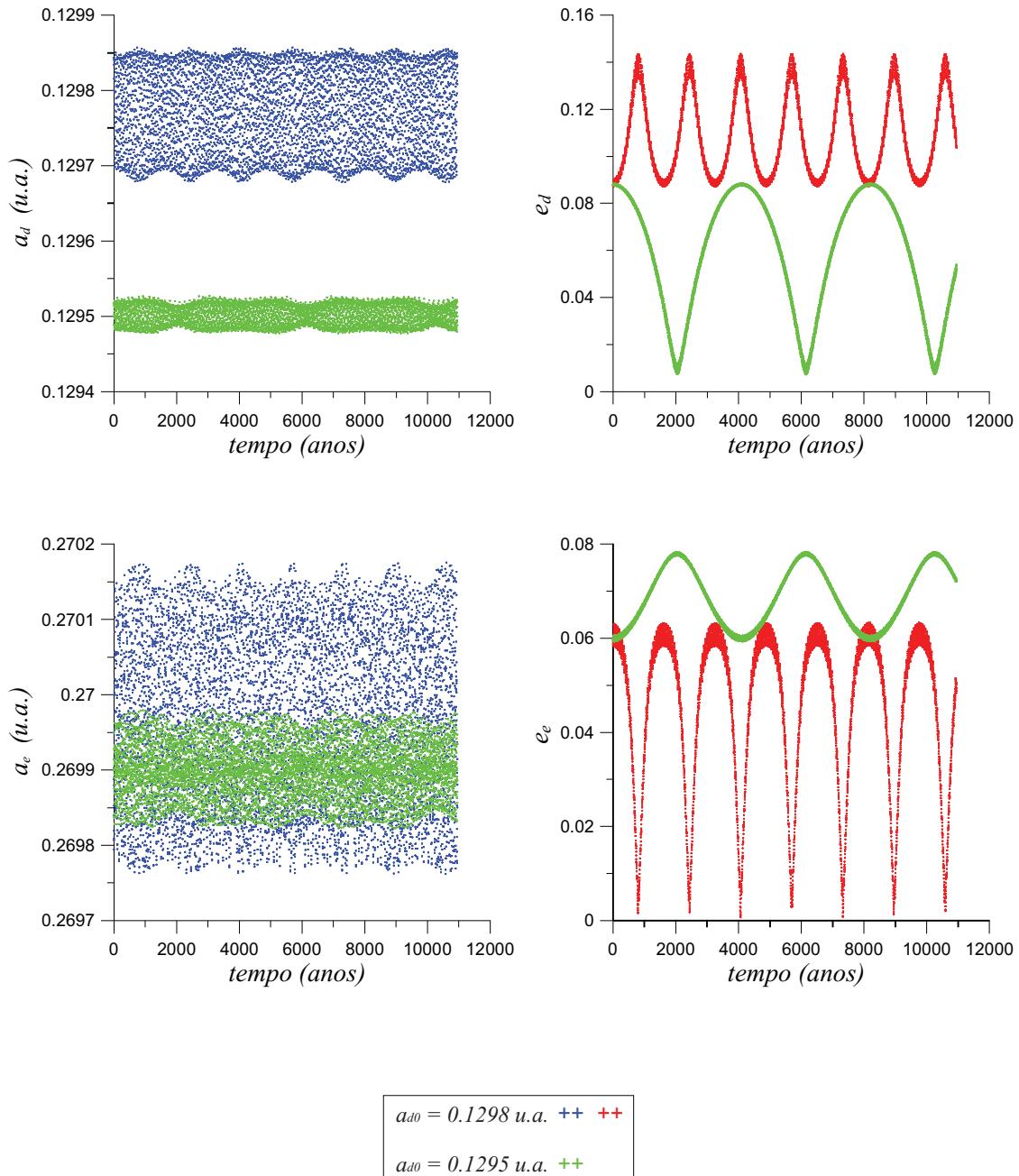


Figura 4.6: Semi eixo e excentricidade do planeta HD10180-d, num período de 11000 anos, para a condição inicial na faixa de ressonância, dada por  $a_{d0} = 0.1298\text{u.a.}$  e fora da faixa de ressonância, com  $a_{d0} = 0.1295\text{u.a.}$

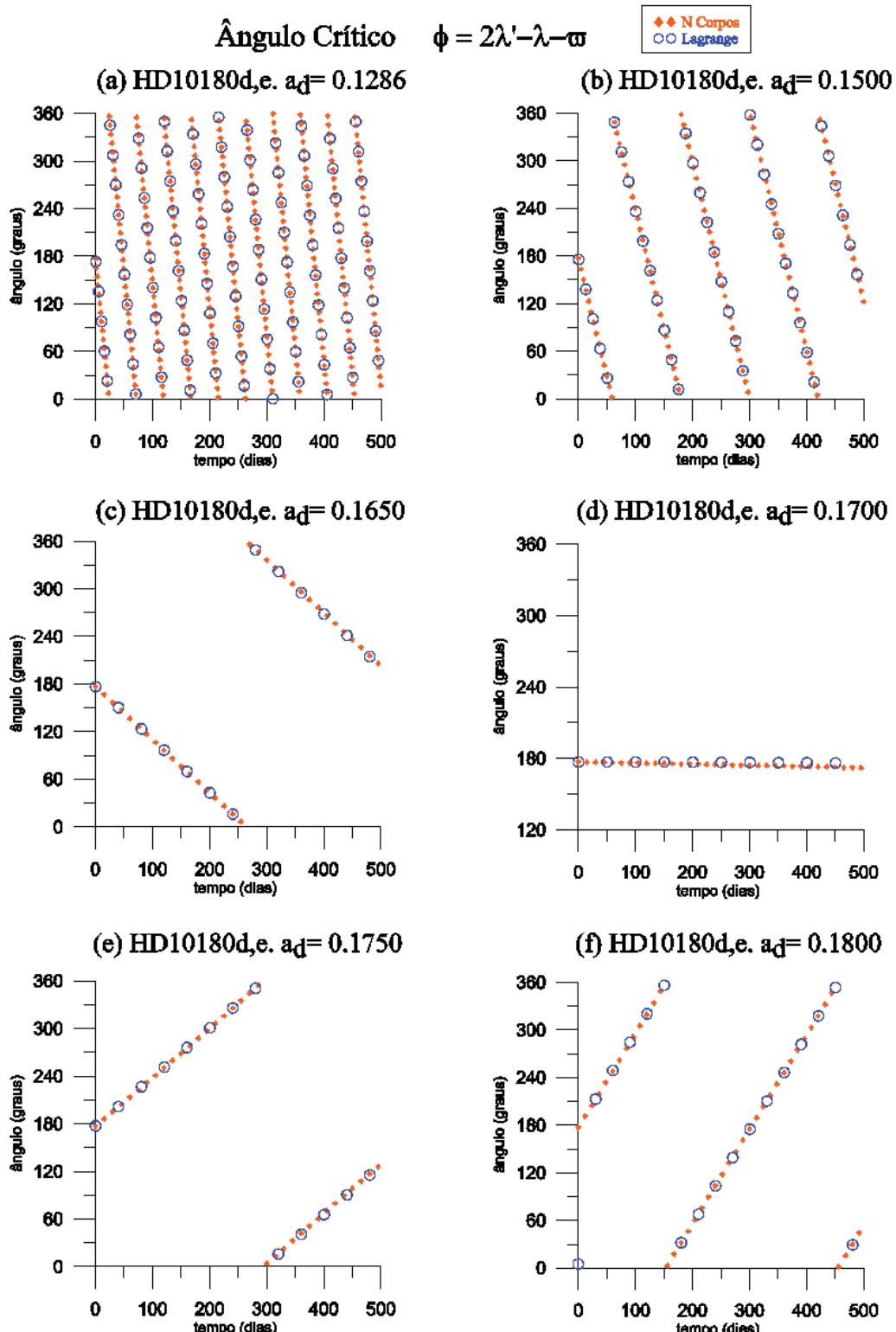


Figura 4.7: Condições iniciais:  $e_d = 0.088$ ,  $I_d = 0^\circ$ ,  $\varpi_d = 1^\circ$ ,  $\Omega_d = 0^\circ$ ,  $\lambda_d = 2^\circ$ ;  $a_e = 0.2699u.a.$ ,  $e_e = 0.060$ ,  $I_e = 0^\circ$ ,  $\varpi_e = 0.5^\circ$ ,  $\Omega_e = 0^\circ$ ,  $\lambda_e = 90^\circ$ .

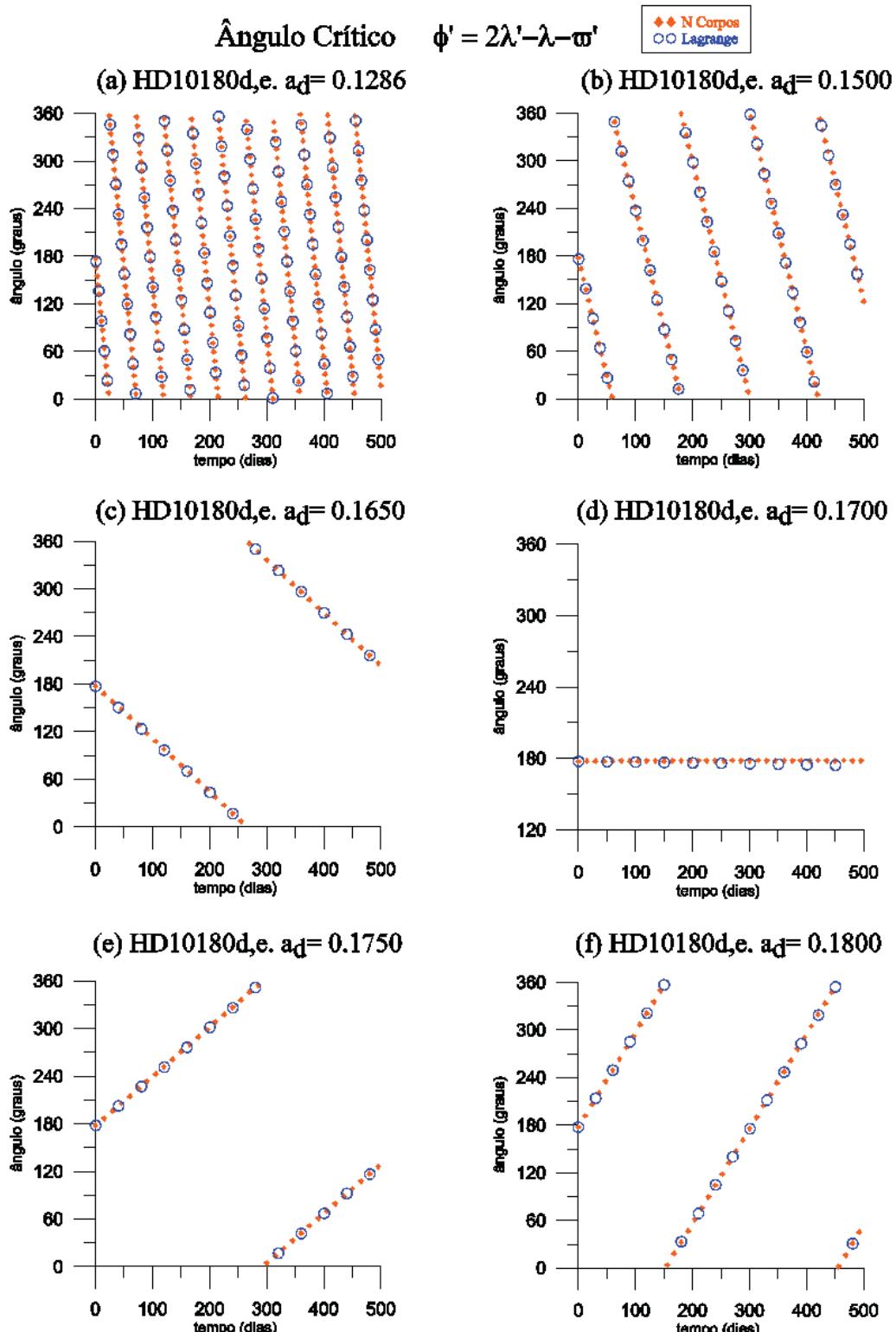


Figura 4.8: Condições iniciais:  $e_d = 0.088$ ,  $I_d = 0^\circ$ ,  $\varpi_d = 1^\circ$ ,  $\Omega_d = 0^\circ$ ,  $\lambda_d = 2^\circ$ ;  $a_e = 0.2699u.a.$ ,  $e_e = 0.060$ ,  $I_e = 0^\circ$ ,  $\varpi_e = 0.5^\circ$ ,  $\Omega_e = 0^\circ$ ,  $\lambda_e = 90^\circ$ .

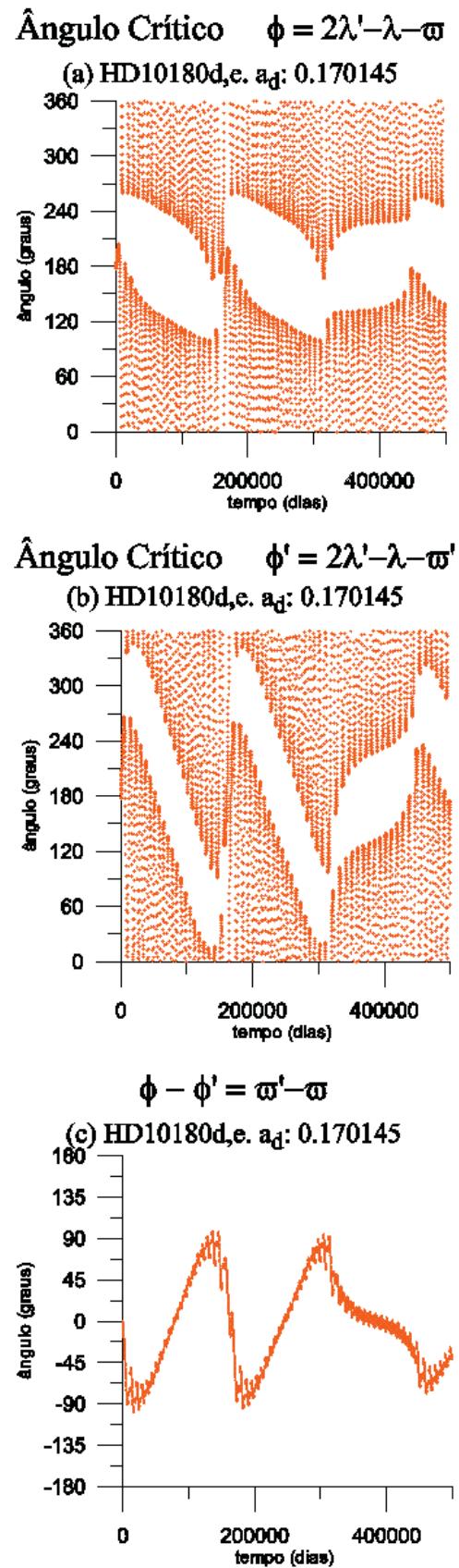


Figura 4.9: Condições iniciais:  $e_d = 0.088$ ,  $I_d = 0^\circ$ ,  $\varpi_d = 1^\circ$ ,  $\Omega_d = 0^\circ$ ,  $\lambda_d = 2^\circ$ ;  $a_e = 0.2699u.a.$ ,  $e_e = 0.060$ ,  $I_e = 0^\circ$ ,  $\varpi_e = 0.5^\circ$ ,  $\Omega_e = 0^\circ$ ,  $\lambda_e = 90^\circ$ .

## 5 Conclusão

A busca pela compreensão das dinâmicas de sistemas múltiplos de exoplanetas, é uma área de estudo atual da Astronomia, devido às diferenças que encontramos quando os comparamos com os planetas do sistema solar, como por exemplo, os períodos orbitais. Atualmente já foram descobertos dezenas de sistemas múltiplos de exoplanetas.

O objetivo deste trabalho foi investigar se exoplanetas possuem órbitas com períodos comensuráveis ou quase comensuráveis entre si e assim, poder analisar quais são os efeitos das ressonâncias entre os planetas dos sistemas a serem estudados.

Realizamos o estudo da forma analítica da função perturbadora, com o desenvolvimento das equações do movimento de três corpos, bem como das diferentes expansões da função perturbadora, obtendo modelos dessa função que são integráveis ou que possuem poucos graus de liberdade. As expansões aqui estudadas foram em polinômios de Legendre, e a expansão literal em inclinação e excentricidade que faz uso dos coeficientes de Laplace. Utilizamos o software *Mathematica* para conferir os cálculos realizados.

Além disso, estudamos a forma literal final da função perturbadora e as Equações Planetárias de Lagrange, as quais foram implementadas através de algoritmos em Fortran, para realizarmos simulações e com elas o estudo das equações de movimentos e das ressonâncias no sistema extrassolar analisado. Os estudos das comensurabilidades de movimentos médios e da identificação da ressonância na função perturbadora também foram realizados.

Mapeamos numericamente a dinâmica ressonante do par de planetas HD10180d,e que possuem comensurabilidade próxima a 3:1. Verificamos também que ao se modificar as condições iniciais para o valor do semi-eixo maior do planeta d com valor  $a_d \approx 0,1700u.a.$ , observa-se comensurabilidade próxima a 2:1 entre o par HD10180d,e. Observamos também na comensurabilidade 3:1 que a ressonância demonstra estabilidade do sistema.

# Referências

- [1] Beaugé, C.; Ferraz-Mello, S.; Michtchenko, T. A. Multi-planet extrasolar systems - detection and dynamics. *Research in Astronomy and Astrophysics*, v. 12, p. 1044–1080, ago. 2012.
- [2] Latham, D. W. et al. The unseen companion of HD114762 - A probable brown dwarf. *Nature*, v. 339, p. 38–40, maio 1989.
- [3] Wolszczan, A.; Frail, D. A. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, v. 355, p. 145–147, jan. 1992.
- [4] Lopez, E. D.; Fortney, J. J. Understanding the Mass-Radius Relation for Sub-Neptunes: Radius as a Proxy for Composition. *ArXiv e-prints*, nov. 2013.
- [5] Gillon, M. et al. Improved precision on the radius of the nearby super-Earth 55 Cnc e. *Astronomy and Astrophysics*, v. 539, p. A28, mar. 2012.
- [6] Léger, A. et al. Transiting exoplanets from the CoRoT space mission. VIII. CoRoT-7b: the first super-Earth with measured radius. *Astronomy and Astrophysics*, v. 506, p. 287–302, out. 2009.
- [7] Lissauer, J. J. et al. A closely packed system of low-mass, low-density planets transiting Kepler-11. *Nature*, v. 470, p. 53–58, fev. 2011.
- [8] Lissauer, J. J. et al. Architecture and Dynamics of Kepler's Candidate Multiple Transiting Planet Systems. *The Astrophysical Journal Supplement*, v. 197, p. 8, nov. 2011.
- [9] Peale, S. J. Orbital resonances in the solar system. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 14, p. 215–246, 1976.
- [10] Malhotra, R. Orbital Resonances and Chaos in the Solar System. In: Lazzaro, D. et al. (Ed.). *Solar System Formation and Evolution*. [S.l.: s.n.], 1998. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 149), p. 37.
- [11] Murray, C. D.; Dermott, S. F. *Solar system dynamics*. 1st. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

- [12] Callegari JR., N.; Michtchenko, T. A.; Ferraz-Mello, S. Dynamics of Two Planets in the 2/1 Mean-Motion Resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 89, p. 201–234, abr. 2004.
- [13] Michtchenko, T. A.; Ferraz-Mello, S. Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets. *The Astronomical Journal*, v. 122, p. 474–481, jul. 2001.
- [14] Callegari, N.; Yokoyama, T. Numerical exploration of resonant dynamics in the system of Saturnian major satellites. *Planetary and Space Science*, v. 58, p. 1906–1921, dez. 2010.
- [15] Lovis, C. et al. The HARPS search for southern extra-solar planets. XXVIII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems. *Astronomy and Astrophysics*, v. 528, p. A112, abr. 2011.
- [16] Everhart, E. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In: Carusi, A.; Valsecchi, G. B. (Ed.). *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library. Volume 115, 1985*, p.185. [S.l.: s.n.], 1985. p. 185.
- [17] Brouwer, D.; Clemence, G. M. *Methods of celestial mechanics*. New York: Academic Press, 1961.
- [18] Laskar, J.; Boué, G. Explicit expansion of the three-body disturbing function for arbitrary eccentricities and inclinations. *Astronomy and Astrophysics*, v. 522, p. A60, nov. 2010.
- [19] Callegari, N.; Ferraz-Mello, S.; Michtchenko, T. A. Dynamics of Two Planets in the 3/2 Mean-motion Resonance: Application to the Planetary System of the Pulsar PSR B1257+12. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 94, p. 381–397, abr. 2006.
- [20] Tittemore, W. C.; Wisdom, J. Tidal evolution of the Uranian satellites. I - Passage of Ariel and Umbriel through the 5:3 mean-motion commensurability. *Icarus*, v. 74, p. 172–230, maio 1988.
- [21] McCuskey, S. W. *Introduction to celestial mechanics*. Reading, MA: Addison-Wesley Pub.Co., 1963.
- [22] Vinti, J. P. Orbital and celestial mechanics. In: Der, G.; Bonavito, N. (Ed.). *Progress in Astronautics and Aeronautics*. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998. v. 177, p. 409.

- [23] Ellis, K. M.; Murray, C. D. The Disturbing Function in Solar System Dynamics. *Icarus*, v. 147, p. 129–144, set. 2000.
- [24] Pater, I.; Lissauer, J. *Planetary Sciences*. 1st. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

# A Apêndice

## A.1 Derivadas

A fim de realizar a programação do algoritmo com as equações de variação dos elementos orbitais para aplicação nos exemplos em nosso estudo, realizamos o cálculo de todas as derivadas das funções  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$ , (3.106) e (3.107), que são necessárias nas aplicações das equações Planetárias de Lagrange, (3.145). Essas derivadas não são encontradas explicitamente nos livros clássicos. Para obtê-las fizemos os cálculos manualmente e conferimos os resultados utilizamos o software *Mathematica*.

**Derivadas da função  $\mathcal{R}_D$ , equação (3.34):**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial a} = & \left( \left( \frac{1}{2a'} D b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8a'} \right) (e^2 + e'^2) (-4j^2 D + 4\alpha D^2 + 2D + \alpha^2 D^3) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right. \\
& - \frac{1}{4a'} (s^2 + s'^2) (b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + \alpha D b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} + \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}) \cos(j\lambda' - j\lambda) \\
& + \frac{1}{4a'} ee' (6jD + 4j^2 D - 4\alpha D^2 - \alpha^2 D^3) b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \cos(j\lambda' - j\lambda + \varpi' - \varpi) \\
& + \frac{ss'}{a'} (1 + \alpha D) b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \cos(j\lambda' - j\lambda + \Omega' - \Omega) \\
& - \frac{e}{2a'} (2jD + D + \alpha D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos(j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi) \\
& + \frac{e'}{2a'} (2jD + \alpha D^2) b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi') \\
& + \frac{e^2}{8a'} (-jD + 4j^2 D - 2D + 4j\alpha D^2 + \alpha^2 D^3) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi) \\
& + \frac{ee'}{4a'} (2jD - 4j^2 D - 4j\alpha D^2 - \alpha^2 D^3) b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \varpi' - \varpi) \\
& + \frac{e'^2}{8a'} (-3jD + 4j^2 D + 4j\alpha D^2 + \alpha^2 D^3) b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi') \\
& \left. + \frac{s^2}{2a'} (1 + \alpha D) b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ss'}{a'}(1+\alpha D)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \Omega' - \Omega) \\
& + \frac{s'^2}{2a'}(1+\alpha D)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega') \tag{A.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial a'} = & ((\frac{-\alpha}{2a'}Db_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{-\alpha}{8a'})(e^2 + e'^2)(-4j^2D + 4\alpha D^2 + 2D + \alpha^2 D^3)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \\
& - \frac{-\alpha}{4a'}(s^2 + s'^2)(b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + \alpha Db_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} + \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)})) \cos(j\lambda' - j\lambda) \\
& + \frac{-\alpha}{4a'}ee'(6jD + 4j^2D - 4\alpha D^2 - \alpha^2 D^3)b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \cos(j\lambda' - j\lambda + \varpi' - \varpi) \\
& + \frac{-\alpha ss'}{a'}(1+\alpha D)b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \cos(j\lambda' - j\lambda + \Omega' - \Omega) \\
& - \frac{-\alpha e}{2a'}(2jD + D + \alpha D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos(j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi) \\
& + \frac{-\alpha e'}{2a'}(2jD + \alpha D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi') \\
& + \frac{-\alpha e^2}{8a'}(-jD + 4j^2D - 2D + 4j\alpha D^2 + \alpha^2 D^3)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi) \\
& + \frac{-\alpha ee'}{4a'}(2jD - 4j^2D - 4j\alpha D^2 - \alpha^2 D^3)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \varpi' - \varpi) \\
& + \frac{-\alpha e'^2}{8a'}(-3jD + 4j^2D + 4j\alpha D^2 + \alpha^2 D^3)b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi') \\
& + \frac{-\alpha s^2}{2a'}(1+\alpha D)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega) \\
& - \frac{-\alpha ss'}{a'}(1+\alpha D)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \Omega' - \Omega) \\
& + \frac{-\alpha s'^2}{2a'}(1+\alpha D)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega') \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \lambda} = & -j[\frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8}(e^2 + e'^2)(2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{4}(s^2 + s'^2)(-\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \\
& - \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)})] \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda'] \\
& - \frac{1}{4}ee'j(2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \varpi - \varpi'] \\
& - j\alpha ss'b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \Omega - \Omega'] \\
& - \frac{1}{2}e(-2j - \alpha D)(1-j)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \operatorname{sen}[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}e'(1-j)(-1+2j+\alpha D)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi'] \\
& -\frac{1}{8}e^2(2-j)(-5j+4j^2-2\alpha D+4j\alpha D+\alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi] \\
& -\frac{1}{4}ee'(2-j)(-2+6j-4j^2+2\alpha D-4j\alpha D-\alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& -\frac{1}{8}e'^2(2-j)(2-7j+4j^2-2\alpha D+4j\alpha D+\alpha^2 D^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi'] \\
& -\frac{1}{2}s^2\alpha(2-j)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\Omega] \\
& +ss'\alpha(2-j)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \Omega - \Omega'] \\
& -\frac{1}{2}s'^2\alpha(2-j)b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\Omega']. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \lambda'} = & j\left(\frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8}(e^2 + e'^2)(2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{4}(s^2 + s'^2)(-\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} - \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}) \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda']\right. \\
& \left. + \frac{1}{4}ee'j(2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2 + 6j + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \varpi - \varpi']\right. \\
& \left. + \alpha jss'b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \Omega - \Omega']\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}e(-\alpha D - 2j)jb_{\frac{1}{2}}^{(j)} \operatorname{sen}[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi]\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}e'j(-1 + \alpha D + 2j)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi']\right. \\
& \left. - \frac{1}{8}e^2j(-2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 5j + 4\alpha jD + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi]\right. \\
& \left. - \frac{1}{4}ee'j(-2 + 2\alpha D - \alpha^2 D^2 + 6j - 4\alpha jD - 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \varpi - \varpi']\right. \\
& \left. - \frac{1}{8}e'^2j(2 - 2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 7j + 4\alpha jD + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi']\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}\alpha jss^2b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\Omega]\right. \\
& \left. + \alpha jss'b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \Omega - \Omega']\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}\alpha jss'^2b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\Omega']\right). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \varpi} = \frac{1}{4}e^2(-2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 5j + 4\alpha Dj + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}e(-\alpha D - 2j)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \operatorname{sen}[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi] \\
& + \frac{1}{4}ee'(-2 + 2\alpha D - \alpha^2 D^2 + 6j - 4\alpha Dj - 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& - \frac{1}{4}ee'(2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2 + 6j + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \varpi - \varpi']. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \varpi'} &= \frac{1}{4}el^2(2 - 2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 7j + 4\alpha Dj + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi'] \\
& + \frac{1}{2}e'(-1 + \alpha D + 2j)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi'] \\
& + \frac{1}{4}ee'(-2 + 2\alpha D - \alpha^2 D^2 + 6j - 4\alpha Dj - 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& + \frac{1}{4}ee'(2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2 + 6j + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \varpi - \varpi']. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Omega} &= \alpha s^2 b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\Omega] - \alpha ss'b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \Omega - \Omega'] \\
& - \alpha ss'b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \Omega - \Omega']. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Omega'} &= \alpha s'^2 b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\Omega'] - \alpha ss'b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \operatorname{sen}[(2-j)\lambda + j\lambda' - \Omega - \Omega'] \\
& + \alpha ss'b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \operatorname{sen}[j\lambda - j\lambda' + \Omega - \Omega']. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial e} &= \frac{1}{4}e(2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos[j\lambda - j\lambda'] \\
& + \frac{1}{4}e(-2\alpha D + \alpha^2 D^2 - 5j + 4\alpha Dj + 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \cos[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi] \\
& + \frac{1}{2}(-\alpha D - 2j)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi] \\
& + \frac{1}{4}e'(-2 + 2\alpha D - \alpha^2 D^2 + 6j - 4\alpha Dj - 4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos[(2-j)\lambda + j\lambda' - \varpi - \varpi']
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}e'(2-2\alpha D-\alpha^2 D^2+6j+4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \cos[j\lambda-j\lambda'+\varpi-\varpi']. \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial e'} &= \frac{1}{4}e'(2\alpha D+\alpha^2 D^2-4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos[j\lambda-j\lambda'] \\ &+ \frac{1}{4}e'(2-2\alpha D+\alpha^2 D^2-7j+4\alpha Dj+4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \cos[(2-j)\lambda+j\lambda'-2\varpi'] \\ &+ \frac{1}{2}(-1+\alpha D+2j)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \cos[(1-j)\lambda+j\lambda'-\varpi'] \\ &+ \frac{1}{4}e(-2+2\alpha D-\alpha^2 D^2+6j-4\alpha Dj-4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \cos[(2-j)\lambda+j\lambda'-\varpi-\varpi'] \\ &+ \frac{1}{4}e(2-2\alpha D-\alpha^2 D^2+6j+4j^2)b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \cos[j\lambda-j\lambda'+\varpi-\varpi']. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial I} &= -\frac{1}{2}\alpha s' b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos((2-j)\lambda+j\lambda'-\Omega-\Omega') \\ &+ \frac{1}{2}\alpha s' b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos(j\lambda-j\lambda'+\Omega-\Omega') \\ &+ \frac{1}{4}(-\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}-\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}) \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos(j\lambda-j\lambda')s \\ &+ \frac{1}{2}\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos((2-j)\lambda+j\lambda'-2\Omega)s. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial I'} &= -\frac{1}{2}\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos((2-j)\lambda+j\lambda'-\Omega-\Omega')s \\ &+ \frac{1}{2}\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(j\lambda-j\lambda'+\Omega-\Omega')s \\ &+ \frac{1}{4}(-\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}-\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}) \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(j\lambda-j\lambda')s' \\ &+ \frac{1}{2}\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos((2-j)\lambda+j\lambda'-2\Omega')s'. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

**Derivadas da função  $\mathcal{R}_E$ , equação (3.35):**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \lambda} = & - \left( -1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e'^2}{2} + s^2 + s'^2 \right) \operatorname{sen}[\lambda - \lambda'] + s^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega] \\
& + s'^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - 2ss' \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] + 2ss' \operatorname{sen}[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] \\
& + \frac{9}{8}e^2 \operatorname{sen}[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] + \frac{1}{8}e^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\varpi] + e \operatorname{sen}[2\lambda - \lambda' - \varpi] \\
& + \frac{1}{8}e'^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] + \frac{27}{8}e'^2 \operatorname{sen}[\lambda + 3\lambda' - 2\varpi'] \\
& + 2e' \operatorname{sen}[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] + 2ee' \operatorname{sen}[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \lambda'} = & \left( -1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e'^2}{2} + s^2 + s'^2 \right) \operatorname{sen}[\lambda - \lambda'] + s^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega] \\
& + s'^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - 2ss' \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] - 2ss' \operatorname{sen}[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] \\
& - \frac{3}{8}e^2 \operatorname{sen}[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] + \frac{1}{8}e^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{2}e \operatorname{sen}[2\lambda - \lambda' - \varpi] - \frac{3}{2}e \operatorname{sen}(\lambda' - \varpi) \\
& + \frac{1}{8}e^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\varpi] + \frac{81}{8}e'^2 \operatorname{sen}[\lambda + 3\lambda' - 2\varpi'] - 6ee' \operatorname{sen}[2\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& - 4e' \operatorname{sen}[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] - 2ee' \operatorname{sen}[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \varpi} = & -\frac{3}{4}e^2 \operatorname{sen}[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{4}e^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{2}e \operatorname{sen}[2\lambda - \lambda' - \varpi] \\
& + \frac{3}{2}e \operatorname{sen}[\lambda' - \varpi] + 3ee' \operatorname{sen}[2\lambda - \varpi - \varpi'] - ee' \operatorname{sen}[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \varpi'} = & -\frac{1}{4}e'^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] - \frac{27}{4}e'^2 \operatorname{sen}[\lambda + 3\lambda' - 2\varpi'] + 3ee' \operatorname{sen}[2\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& + 2e' \operatorname{sen}[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] + ee' \operatorname{sen}[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \tag{A.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \Omega} &= -2s^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega] \\ &+ 2ss' \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] - 2ss' \operatorname{sen}[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega']. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \Omega'} &= -2s'^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] \\ &+ 2ss' \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] + 2ss' \operatorname{sen}[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega']. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial e} &= e \cos[\lambda - \lambda'] - \frac{3}{4}e \cos[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] \\ &- \frac{1}{4}e \cos[\lambda + \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{2} \cos[2\lambda - \lambda' - \varpi] + \frac{3}{2} \cos[\lambda' - \varpi] \\ &+ 3e' \cos[2\lambda' - \varpi - \varpi'] - e' \cos[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial e'} &= e' \cos[\lambda - \lambda'] - \frac{1}{4}e' \cos[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] \\ &- \frac{27}{4}e' \cos[\lambda + 3\lambda' - 2\varpi'] + 3e \cos[2\lambda' - \varpi - \varpi'] - 2 \cos[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] \\ &- e \cos[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial I} &= s \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda') - s \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega) \\ &+ s' \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega') - s' \cos\left(\frac{I}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial I'} &= s \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega') - s \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega') \\ &+ s' \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda') - s' \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega'). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

**Derivadas da função  $\mathcal{R}_I$ , equação (3.36):**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial \lambda} = & - \left( -1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e'^2}{2} + s^2 + s'^2 \right) \sin[\lambda - \lambda'] + s^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\Omega] \\
 & + s'^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - 2ss' \sin[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] + 2ss' \sin[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] \\
 & + \frac{81}{8}e^2 \sin[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] + \frac{1}{8}e^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\varpi] + 4e \sin[2\lambda - \lambda' - \varpi] + \\
 & \frac{1}{8}e'^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] - \frac{3}{2}e' \sin[\lambda - \varpi'] - 6ee' \sin[2\lambda - \varpi - \varpi'] + \frac{1}{2}e' \sin[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] \\
 & + 2ee' \sin[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi'] + \frac{3}{8}e'^2 \sin[\lambda - 3\lambda' + 2\varpi']. \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial \lambda'} = & - \left( -1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e'^2}{2} + s^2 + s'^2 \right) \sin[\lambda - \lambda'] + s^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\Omega] \\
 & + s'^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - 2ss' \sin[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] - 2ss' \sin[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] \\
 & - \frac{27}{8}e^2 \sin[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] + \frac{1}{8}e^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\varpi] - 2e \sin[2\lambda - \lambda' - \varpi] + \\
 & \frac{1}{8}e'^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] - e' \sin[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] - 2ee' \sin[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi'] \\
 & - \frac{9}{8}e'^2 \sin[\lambda - 3\lambda' + 2\varpi']. \tag{A.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial \varpi} = & - \frac{27}{4}e^2 \sin[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{4}e^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\varpi] - 2e \sin[2\lambda - \lambda' - \varpi] \\
 & + 3ee' \sin[2\lambda - \varpi - \varpi'] - ee' \sin[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial \varpi'} = & - \frac{1}{4}e'^2 \sin[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] + \frac{3}{2}e' \sin[\lambda - \varpi'] + 3ee' \sin[2\lambda - \varpi - \varpi'] + \frac{1}{2}e' \sin[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] \\
 & + ee' \sin[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi'] + \frac{3}{4}e'^2 \sin[\lambda - 3\lambda' + 2\varpi']. \tag{A.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial \Omega} &= -2s^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega] \\ &+ 2ss' \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] - 2ss' \operatorname{sen}[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega']. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial \Omega'} &= -2s'^2 \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] \\ &+ 2ss' \operatorname{sen}[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega'] - 2ss' \operatorname{sen}[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega']. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial e} &= e \operatorname{cos}[\lambda - \lambda'] - \frac{27}{4}e \operatorname{cos}[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] \\ &- \frac{1}{4}e \operatorname{cos}[\lambda + \lambda' - 2\varpi] - 2 \operatorname{cos}[2\lambda - \lambda' - \varpi] \\ &+ 3e' \operatorname{cos}[2\lambda - \varpi - \varpi'] - e' \operatorname{cos}[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi']. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial e'} &= e' \operatorname{cos}[\lambda - \lambda'] - \frac{1}{4}e' \operatorname{cos}[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] \\ &+ \frac{3}{2} \operatorname{cos}[\lambda - \varpi'] + 3e \operatorname{cos}[2\lambda - \varpi - \varpi'] - \frac{1}{2} \operatorname{cos}[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] \\ &- e \operatorname{cos}[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi'] - \frac{3}{4}e' \operatorname{cos}[\lambda - 3\lambda' + 2\varpi']. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial I} &= s' \cos\left(\frac{I}{2}\right) \operatorname{cos}(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega') - s' \cos\left(\frac{I}{2}\right) \operatorname{cos}(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega') \\ &+ s \cos\left(\frac{I}{2}\right) \operatorname{cos}(\lambda - \lambda') - s \cos\left(\frac{I}{2}\right) \operatorname{cos}(\lambda + \lambda' - 2\Omega). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_I}{\partial I'} = & s \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega') - s \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega') \\ & + s' \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda') - s' \cos\left(\frac{I'}{2}\right) \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega'). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Esses resultados compõem as derivadas das equações (3.106) e (3.107).

Com a forma explícita dessas derivadas é possível então realizar a programação do algoritmo para cálculo do sistema de EDO através das equações (3.145).