



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Análise de Estabilidade Linear do Escoamento em Tubos para o Fluido Gieseckus

Guilherme Augusto Souza da Luz

Orientadora: Profa. Dra. Analice Costacurta Brandi

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, fevereiro de 2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Análise de Estabilidade Linear do
Escoamento em Tubos para o Fluido
Giesekeus**

Guilherme Augusto Souza da Luz

Orientadora: Profa. Dra. Analice Costacurta Brandi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, fevereiro de 2026

L979a Luz, Guilherme Augusto Souza da
Análise de estabilidade linear do escoamento em tubos para o fluido giesekus / Guilherme Augusto Souza da Luz. -- Presidente Prudente, 2025
89 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientadora: Analice Costacurta Brandi

1. Escoamento em Tubo. 2. Fluido Giesekus. 3. Ondas de Tollmien-Schlichting. 4. Teoria de Estabilidade Linear. I. Título.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: “Análise de Estabilidade Linear do Escoamento em Tubos para o Fluido Giesekeus”.

AUTOR: GUILHERME AUGUSTO SOUZA DA LUZ

ORIENTADORA: ANALICE COSTACURTA BRANDI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **ANALICE COSTACURTA BRANDI**
Data: 13/02/2026 15:58:05-0300
Verifique em <https://validar.itu.gov.br>

Profa. Dra. ANALICE COSTACURTA BRANDI (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Professor Doutor RAFAEL DE LIMA STERZA (Participação Virtual)
Departamento de Estatística / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Prof. Dr. LEANDRO FRANCO DE SOUZA (Participação Virtual)
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística / Universidade de São Paulo

Presidente Prudente, 16 de dezembro de 2025.

Agradecimentos

Quero primeiramente agradecer com todo o meu carinho e admiração, à minha mãe, Eliete Monteiro de Souza, que sempre acreditou em mim, me apoiou nos momentos mais desafiadores e me ensinou o valor da dedicação e da honestidade. Aos meus irmãos, Wellen Souza de Oliveira e Otávio Augusto Souza da Luz, pelo incentivo constante e pelas mensagens de apoio que sempre renovavam minhas energias ao longo deste percurso.

À minha professora e orientadora, Prof.^a Dr.^a Analice Costacurta Brandi, pela orientação competente, paciência e dedicação, pela disponibilidade e pelo incentivo constante ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Meu sincero agradecimento também aos professores que contribuíram para a minha formação, em especial Simone de Almeida Delphin Leal, minha orientadora da graduação, e aos meus professores do mestrado, pelos ensinamentos, pela paciência, pelas orientações e pela inspiração que me motivaram a seguir em frente na busca pelo conhecimento.

Aos meus amigos, que estiveram ao meu lado, oferecendo apoio, palavras de incentivo e compartilhando momentos importantes desta jornada. Seu companheirismo tornou tudo mais leve e significativo.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo o meu profundo agradecimento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Não sei como o mundo me vê, mas eu me sinto
como um garoto brincando na praia, contente em
achar aqui e ali, uma pedra mais lisa ou uma
concha mais bonita, mas tendo sempre diante de mim,
ainda por descobrir, “o grande oceano de verdades”.*

Isaac Newton

Resumo

O presente trabalho investiga a transição para a turbulência no escoamento em tubo devido às ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento axissimétrico, incompressível, isotérmico, do modelo viscoelástico do tipo Giesekus. A Teoria de Estabilidade Linear é empregada para analisar o comportamento do escoamento em tubo a perturbações não estacionárias. Ainda, utiliza-se o tensor conformação na formulação matemática, que foi empregado devido às suas propriedades de ser simétrico e definido positivo. Variando os parâmetros adimensionais do escoamento em tubo para o fluido modelado pelo Giesekus, obtém-se alguns resultados numéricos que foram realizados com o método da matriz, cujo objetivo é avaliar as curvas neutras de estabilidade.

Palavras-Chave: *Escoamento em Tubo, Fluido Giesekus, Ondas de Tollmien-Schlichting, Teoria de Estabilidade Linear.*

Abstract

The present work investigates the transition to turbulence in pipe flow due to Tollmien-Schlichting waves for axisymmetric, incompressible, isothermal flow based on the viscoelastic Giesekus model. Linear Stability theory is employed to analyze the behavior of the pipe flow under non-stationary disturbances. Additionally, the conformation tensor is used in the mathematical formulation, chosen for its properties of being symmetric and positive-definite. By varying the dimensionless parameters of the tube flow for the fluid modeled by Giesekus, some numerical results are obtained that were carried out with the matrix method, whose objective is to evaluate the neutral stability curves.

Keywords: *Pipe Flow, Giesekus Fluid, Tollmien-Schlichting waves, Linear Stability Theory.*

Lista de Figuras

4.1.1	Figura retirada de [8].	70
4.1.2	Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 0$, $Re = 2000$ e $N = 60$, $Wi = 10^{-5}$ e $\beta = 0$	70
4.1.3	Comparação de curvas neutras para os valores de $\beta = 0.2$ e $Wi = 30, 40$ e 50	71
4.1.4	Comparação de curvas neutras para os valores de $\beta = 0.3$ e $Wi = 40$	72
4.2.1	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65	73
4.2.2	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65	74
4.2.3	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$, $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , com $\beta = 0.7$	74
4.2.4	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65	75
4.2.5	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65	75
4.2.6	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , com $\beta = 0.7$	76
4.2.7	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65	76
4.2.8	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65	77
4.2.9	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , com $\beta = 0.7$	77
4.2.10	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7	78
4.2.11	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7	78
4.2.12	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7	79
4.2.13	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7	79
4.2.14	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7	80
4.2.15	Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7	80
4.2.16	Curvas neutras para $\beta = 0.2$ e $Wi = 30$ fixos, e diferentes valores de α_G	81
4.2.17	Curvas neutras para $\beta = 0.2$ e $Wi = 40$ fixos, e diferentes valores de α_G	81
4.2.18	Curvas neutras para $\beta = 0.2$ e $Wi = 50$ fixos, e diferentes valores de α_G	81

Lista de Tabelas

3.2.1 Classificação de instabilidades.	67
4.1.1 Autovalores com $\alpha = 1$, $m = 0$, $Re = 3000$	71

Índice de Notações

- $\mathbf{C}$ - tensor conformação
- $\mathbf{D}$ - tensor taxa de deformação
- $\mathbf{I}$ - tensor identidade
- $\mathbf{T}$ - tensor extra-tensão
- $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ - derivada convectiva
- $\mathbf{u}$ - vetor velocidade
- $\hat{\mathbf{C}}$ - tensor conformação no escoamento base
- L - escala característica de comprimento
- N - número de modos de Chebyshev
- Re - número de Reynolds
- $\hat{\mathbf{T}}$ - tensor extra-tensão no escoamento base
- U - escala característica de velocidade
- W - componente de velocidade do escoamento base
- Wi - número de Weissenberg
- c - velocidade de fase da onda
- c_i - fator de amplificação temporal
- c_r - velocidade de fase da onda
- i - unidade imaginária, $\sqrt{-1}$
- p - pressão
- t - tempo
- u - velocidade na direção longitudinal do escoamento
- v - velocidade na direção normal do escoamento
- w - velocidade na direção transversal do escoamento

- $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{C}$ - componente do escoamento base perturbado
- $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{T}, \bar{C}$ - amplitude e fase das perturbações
- α - número de onda na direção transversal ao escoamento
- α_r - número de onda
- α_i - taxa de amplificação espacial
- α_G - parâmetro de mobilidade que regula o comportamento “shear thinning”
- β - constante que controla a contribuição do solvente
- η - coordenada adimensional associada ao escoamento base
- η_0 - viscosidade dinâmica total do fluido
- η_p - viscosidade do polímero
- η_s - viscosidade dinâmica do solvente
- λ - tempo de relaxação do fluido
- λ_c - comprimento de onda
- σ - tensor tensão total
- τ - tensor simétrico das tensões
- ω - frequência de propagação de ondas
- ω, ω_r - frequência da perturbação
- ω_i - taxa de amplificação temporal

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	13
Índice de Notações	15
Sumário	17
1 Introdução	19
2 Formulação Matemática	23
2.1 Equações Governantes	23
2.2 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano	24
2.3 Modelo Giesekus	28
2.4 Adimensionalização	30
2.5 Teoria de Estabilidade Linear	35
2.6 Tensor Conformação	60
2.7 Escoamento Base	63
3 Formulação Numérica	65
3.1 Método Numérico	65
3.2 Análise de Instabilidades	67
4 Resultados	69
4.1 Verificação do Código	69
4.2 Análise de Estabilidade utilizando LST	72
4.2.1 Influência do número de Weissenberg (Wi)	73
4.2.2 Influência da contribuição do solvente β	76

4.2.3	Influência do parâmetro de mobilidade α_G	79
5	Conclusão	83
	Referências Bibliográficas	85

Introdução

A descrição de qualquer escoamento de fluido requer que sejam satisfeitas as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade. No entanto, essas equações são muito complexas e podem ser solucionadas analiticamente apenas para casos simples, como escoamentos estacionários, unidimensionais e completamente desenvolvidos, o que, na maioria das situações reais dentro da engenharia, não ocorre na prática. No entanto, o uso crescente de computadores e o aumento na capacidade de processamento estão possibilitando a utilização de métodos numéricos para resolver essas equações. Esse campo de estudo é conhecido como Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), ou CFD, do inglês Computational Fluid Dynamics [9].

Desse modo, devido ao avanço da computação, é possível resolver problemas cada vez mais complexos da área de dinâmica dos fluidos, principalmente envolvendo escoamentos de fluidos não-Newtonianos, que é um dos enfoques desta dissertação. Fluidos que quando são submetidos a uma tensão de cisalhamento se deformam de maneira contínua, estes são classificados em categorias como Newtoniano e não-Newtoniano, dentre os citados, os últimos são caracterizados pela inexistência de uma relação linear entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação. Logo, contido na categoria de fluidos não-Newtonianos, tem-se os fluidos viscoelásticos que apresentam alguma resistência à deformação ou ao escoamento uma vez submetidos a uma certa tensão. O tema envolvendo fluidos do tipo viscoelásticos é um dos principais focos deste trabalho.

Segundo Alves [1], fluidos viscoelásticos caracterizam-se por apresentarem simultaneamente comportamento viscoso e elástico quando sujeitos a uma deformação. Desta combinação resulta que os fluidos viscoelásticos em escoamento, apresentam frequentemente comportamentos inesperados.

Os modelos viscoelásticos são classificados como lineares ou não lineares. Modelos viscoelásticos não lineares podem ser complexos e apresentam grandes aplicações na modelagem de escoamentos poliméricos por serem capazes de descrever os fenômenos não lineares e por este motivo as pesquisas em torno deste assunto cresceram muito nas últimas décadas. Portanto, os modelos viscoelásticos não lineares mais famosos que podem ser encontrados na literatura são os modelos do tipo FENE [5], Giesekus [14], K-BKZ ([20], [21]), Leonov [19], Oldroyd-B ([3], [27]), Pom Pom [18], PTT ([24], [26]), UCM [23], White-Metzner [33], entre outros.

Uma característica muito importante dos fluidos viscoelásticos e dos fluidos não-Newtonianos, em geral, é o fato da viscosidade variar em função da taxa de cisalhamento, com exceção dos modelos viscoelásticos UCM e Oldroyd-B, os quais apresentam viscosidade constante [8]. Sendo assim, destaca-se o modelo viscoelástico do tipo Giesekus, que se baseia na teoria elástica *dumbbell*, em que o fluido polimérico é representado como uma configuração esfera/mola. Nesta configuração as esferas representam o centro de massa do sistema e estão relacionadas com a interação hidrodinâmica entre o solvente e as macromoléculas da solução polimérica e a mola representa o efeito da elasticidade da macromolécula e seu comportamento é descrito pela Lei de Hooke [25].

O modelo constitutivo Giesekus resulta em uma equação que contém um termo não linear dado pelo produto entre o tensor das tensões. Esse termo permite predições mais realistas das tensões em escoamentos por cisalhamento e, segundo Bird *et al.* [4], o parâmetro do termo não linear (α_G), cuja magnitude varia entre 0 e 1, é chamado de fator de mobilidade.

Nesse trabalho, o conjunto de coordenadas cilíndricas é utilizada, pois é a escolha mais adequada para descrever o escoamento em um tubo. Uma das áreas fundamentais da dinâmica de fluidos é o estudo sobre escoamentos em tubos, um assunto que rende pesquisas a décadas, porém não totalmente explorado.

De acordo com Carreira [6], perturbações temporais em um escoamento se propagam como ondas. As ondas de Tollmien-Schlichting são as primeiras instabilidades que surgem, junto à parede, e caracterizam-se por apresentar pequenas amplitudes e comportamento laminar. Se estas ondas se propagam na direção do escoamento principal, são conhecidas como ondas de Tollmien-Schlichting planares.

A transição laminar-turbulenta pode ser desencadeada pelo crescimento de perturbações de pequena amplitude, tais como as ondas de Tollmien-Schlichting [34]. Essas ondas amplificam-se vagarosamente até que consigam eventualmente crescer o suficiente para que as não-linearidades tomem o controle e o escoamento faça a transição para turbulência.

A teoria de estabilidade linear (LST - do inglês Linear Stability Theory) analisa o comportamento de um dado escoamento à perturbações de amplitude infinitesimal. Esta teoria

se baseia nas equações da continuidade e de Navier-Stokes, adotando algumas hipóteses sobre o escoamento e a forma de propagação das perturbações [31]. Considerando isto, utiliza-se a análise LST para investigar a estabilidade do fluido Giesekus no escoamento em tubo. Porém, não foram encontrados trabalhos na literatura que tratam da análise de estabilidade do escoamento em tubo do fluido Giesekus.

O principal objetivo desta dissertação é analisar a transição para a turbulência no escoamento de Hagen-Poiseuille, incompressível, de um fluido viscoelástico modelado por Giesekus. Para tal propósito, a investigação é realizada usando a análise temporal da convecção de ondas de Tollmien-Schlichting, utilizando a técnica de Teoria de Estabilidade Linear, gerando curvas neutras¹ de estabilidade para cada conjunto de parâmetros adimensionais do modelo constitutivo Giesekus.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: São apresentadas as equações governantes para um escoamento tridimensional, incompressível e isotérmico, para fluidos Newtoniano e não-Newtoniano, com destaque para a equação considerada no escoamento viscoelástico que é a equação constitutiva do tipo Giesekus. A princípio as equações são apresentadas na sua forma dimensional, e o processo de adimensionalização também é mostrado. Além disso, aplica-se a Teoria de Estabilidade Linear para deduzir as equações para às amplitudes das perturbações. Ao fim deste capítulo é apresentado o escoamento base para as duas formulações dos tensores extra-tensão e conformação, respectivamente.
- Capítulo 3: Refere-se a Formulação Numérica do problema em questão, apresentando o método numérico utilizado para resolver as equações governantes obtidas através da aplicação da Teoria de Estabilidade Linear.
- Capítulo 4: Os resultados numéricos preliminares obtidos são apresentados utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, como a verificação da implementação das equações de estabilidade utilizando resultados já verificados presentes na literatura para o modelo Giesekus.
- Capítulo 5: As conclusões do trabalho são apresentadas juntamente com as perspectivas de continuidade da pesquisa.

¹Curvas neutras são caracterizadas por apresentarem valores de taxa de amplificação igual a zero ou $\omega_i = 0$, onde, esta curva tem um formato característico de “banana”, as taxas de amplificação menores do que zero $\omega_i < 0$ estão do lado de fora da banana e as taxas de amplificação maiores do que zero $\omega_i > 0$ estão no interior da mesma.

Formulação Matemática

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para escoamentos incompressíveis, isotérmicos, e para os modelos de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. Em particular, a equação constitutiva apresentada no texto é o modelo Giesekus. Além disso, as formas dimensionais e adimensionais das equações são apresentadas ao longo do capítulo.

2.1 Equações Governantes

As equações governantes para descrever escoamentos de fluidos incompressíveis e isotérmicos são as equações da continuidade e da quantidade de movimento, que são dadas da seguinte forma, respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \sigma, \quad (2.1.2)$$

sendo que $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade, ρ é a densidade do fluido, t é o tempo e σ é o tensor tensão total definido por

$$\sigma = \tau - p\mathbf{I}, \quad (2.1.3)$$

sendo que, p é a pressão, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e τ é o tensor simétrico das tensões. Que por sua vez, pode ser determinado via modelo constitutivo do fluido. No caso tridimensional, em coordenadas cilíndricas, $\mathbf{u} = [u_r, u_\theta, u_z]^T$ representa as velocidades nas direções r (radial), θ (azimutal) e z (axial), respectivamente. Por fim, o tensor das tensões é definido

por

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau^{rr} & \tau^{r\theta} & \tau^{rz} \\ \tau^{\theta r} & \tau^{\theta\theta} & \tau^{\theta z} \\ \tau^{zr} & \tau^{z\theta} & \tau^{zz} \end{bmatrix}.$$

2.2 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano

Determinadas características dos fluidos que estão diretamente ligadas com suas propriedades físicas são capazes de influenciar certos fatores que são importantes em um escoamento, por exemplo, o fluxo do material, a taxa de deformação, etc. Essas características são necessárias para definir os fluidos em Newtoniano e não-Newtoniano.

Em modelos de fluidos Newtonianos, o tensor das tensões simétricas é linearmente proporcional ao tensor taxa de deformação, que é definido da seguinte forma

$$\tau = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.2.1)$$

onde η_s é a viscosidade dinâmica e $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação, que é dado por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.2.2)$$

No caso tridimensional e em coordenadas cilíndricas, a equação (2.2.2) é escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) & 2\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, substituindo a equação em é possível calcular o divergente da equação da quantidade de movimento dada na equação, que é dado por

$$\nabla \cdot \sigma = \nabla \cdot (\tau - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot p\mathbf{I} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) & 2\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \\
&\quad - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \\
&= \eta_s \left[2\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right. \\
&\quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + 2\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} = \\
&= \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} \right. \\
&\quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Além disso, tem-se que

$$\nabla \cdot \sigma = \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right].$$

Agora, reescrevendo $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$, tem-se que

$$\eta_s \left[2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right].$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Pode-se escrever que

$$\eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial p}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \frac{\partial p}{\partial z} \right].$$

Logo, em coordenadas cilíndricas, as equações da continuidade (2.1.1) e da quantidade de movimento (2.1.2) para um fluido Newtoniano, tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \quad (2.2.4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \quad (2.2.5)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \quad (2.2.6)$$

Fluidos não-Newtonianos são caracterizados pela ausência de linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento, o que significa que a viscosidade dinâmica não é constante. Em vez de apresentar uma relação linear, a tensão pode ser proporcional à deformação elevada a um expoente ou pode ser descrita por meio de uma relação que envolve outros fatores além da deformação.

No contexto do modelo de fluido não-Newtoniano, para um fluido viscoelástico, o tensor de tensões é determinado pela combinação das contribuições viscosas (Newtonianas) e elásticas (não-Newtonianas). Ou seja

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T},$$

onde η_s representa a viscosidade do solvente Newtoniano, $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação definido em (2.2.2) e $\mathbf{T}$ é o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica), dado por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{rr} & T^{r\theta} & T^{rz} \\ T^{\theta r} & T^{\theta\theta} & T^{\theta z} \\ T^{zr} & T^{z\theta} & T^{zz} \end{bmatrix}.$$

Assim, calculando o divergente do tensor tensão total (2.1.3) para um fluido não-Newtoniano, tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= \nabla \cdot (\tau - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & 2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{rr} & T^{r\theta} & T^{rz} \\ T^{\theta r} & T^{\theta\theta} & T^{\theta z} \\ T^{zr} & T^{z\theta} & T^{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{z\theta}}{\partial z} - \frac{T^{\theta r} - T^{r\theta}}{r} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial p}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, em coordenadas cilíndricas, as equações da continuidade (2.1.1) e da quantidade de movimento (2.1.2) para um fluido não-Newtoniano, tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z)}{\partial z} = 0, \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] &+ \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} & \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{z\theta}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (r T^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

2.3 Modelo Giesekus

A equação constitutiva do modelo Giesekus [14] é utilizada neste trabalho e é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.3.1)$$

onde η_p é o coeficiente de viscosidade polimérica, λ o tempo de relaxação do fluido e α_G o parâmetro de mobilidade que regula o comportamento “shear thinning” (cisalhamento fino ou pseudoplasticidade) do fluido ($0 \leq \alpha_G \leq 1$). Este comportamento está relacionado à capacidade do fluido de recuperar viscosidade desde que o cisalhamento seja removido, e é percebido quando esta recuperação ocorre muito rapidamente. Enquanto isso, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ é um produto tensorial e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada, dada pela seguinte expressão:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}, \quad (2.3.2)$$

onde $\frac{D\mathbf{T}}{Dt}$ é a derivada material de $\mathbf{T}$, que por sua vez, pode ser expressa por

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{T}). \quad (2.3.3)$$

Assim, substituindo (2.3.2), (2.3.3) em (2.3.1) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D}, \\ \mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D}. \end{aligned}$$

As equações dos tensores não-Newtonianos para o modelo Giesekus são obtidas após algumas manipulações algébricas, e são dadas por

$$T^{rr} + \lambda \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{rr})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{rr})}{\partial z} - \frac{2}{r} u_\theta T^{r\theta} - 2T^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (T^{rr2} + T^{r\theta2} + T^{rz2}) = 2\eta_p \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (2.3.4)$$

$$T^{r\theta} + \lambda \left[\frac{\partial T^{r\theta}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{r\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{r\theta})}{\partial z} + \frac{1}{r} u_\theta T^{rr} - \frac{2}{r} u_\theta T^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - T^{rr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - T^{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - T^{rz} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - T^{\theta z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \\ + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (T^{r\theta} (T^{rr} + T^{\theta\theta}) + T^{rz} T^{z\theta}) = \eta_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad (2.3.5)$$

$$T^{rz} + \lambda \left[\frac{\partial T^{rz}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{rz})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{rz})}{\partial z} - \frac{2}{r} u_\theta T^{\theta z} - T^{rr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \right. \\ \left. - T^{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - T^{rz} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - T^{zz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] + \\ + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (T^{rz} (T^{rr} + T^{zz}) + T^{r\theta} T^{\theta z}) = \eta_p \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (2.3.6)$$

$$T^{\theta\theta} + \lambda \left[\frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{\theta\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{\theta\theta})}{\partial z} + \frac{2}{r} u_\theta T^{r\theta} - 2T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \right. \\ \left. - 2T^{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) - 2T^{\theta z} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (T^{r\theta2} + T^{\theta\theta2} + T^{\theta z2}) = \\ = 2\eta_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (2.3.7)$$

$$T^{\theta z} + \lambda \left[\frac{\partial T^{\theta z}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{\theta z})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{\theta z})}{\partial z} + \frac{1}{r} u_\theta T^{rz} - T^{\theta r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \right. \\ \left. - T^{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - T^{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right) - T^{rz} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - T^{zz} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] + \\ + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (T^{\theta z} (T^{\theta\theta} + T^{zz}) + T^{\theta r} T^{rz}) = \eta_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad (2.3.8)$$

$$T^{zz} + \lambda \left[\frac{\partial T^{zz}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{zz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{zz})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{zz})}{\partial z} - 2T^{rz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \right. \\ \left. - 2T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - 2T^{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (T^{rz2} + T^{\theta z2} + T^{zz2}) = 2\eta_p \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.3.9)$$

É interessante ressaltar que, se o termo α_G na equação (2.3.1) for igual a zero, este modelo é reduzido ao modelo de fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B. Assim como é apresentado em [10].

2.4 Adimensionalização

Em mecânica dos fluidos é comum haver problemas em que, apesar das equações governantes originais serem complicadas demais para serem resolvidas, o problema oferece oportunidade de simplificações que pode permitir diminuir o número de termos ou o número de variáveis envolvidas, por exemplo. A ideia é que em uma equação escrita na forma adimensional é fácil identificar a ordem de grandeza dos termos e os tamanhos relativos entre eles, tudo isso sem ambiguidades decorrentes das unidades/dimensões envolvidas [15]. Desta forma, surgem constantes adimensionais conhecidas na literatura, como o número de Reynolds, o número de Weissenberg, a constante β , entre outros.

As variáveis adimensionais (acrescidas do sobrescrito *) são

$$\mathbf{r}^* = \frac{r}{L}, \quad \theta = \theta^*, \quad \mathbf{z}^* = \frac{z}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{u_r}{U}, \quad \mathbf{v}^* = \frac{u_\theta}{U}, \quad \mathbf{w}^* = \frac{u_z}{U}, \\ \mathbf{t}^* = \frac{tU}{L}, \quad \mathbf{p}^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}, \quad (2.4.1)$$

onde L representa o comprimento, U a velocidade e ρ a densidade. Aparecem os números adimensionais quando são aplicadas as mudanças de variáveis (2.4.1) nas equações governantes. Então,

- Número de Reynolds (Re) : Representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do escoamento que é definido por

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}, \quad (2.4.2)$$

onde η_0 é a viscosidade dinâmica total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Weissenberg (Wi) : Para um fluido viscoelástico, é a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo do escoamento.

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}. \quad (2.4.3)$$

• Constante β : A constante $\beta \in (0, 1)$ é uma quantidade que controla a contribuição do solvente Newtoniano, dada por

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_p}. \quad (2.4.4)$$

A obtenção das equações de conservação e dos tensores não-Newtonianos em sua forma adimensional é alcançada por meio da substituição das variáveis adimensionais (2.4.1).

Para obter a equação da continuidade em sua forma adimensional, tem-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ & \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial (Lr^*Uu^*)}{\partial (Lr^*)} + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial (Uv^*)}{\partial \theta^*} + \frac{\partial (Uw^*)}{\partial (Lz^*)} = 0 \Rightarrow \\ & \frac{U}{L} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^*u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como L é o comprimento do tubo, então, $L \neq 0$. Além disso, U é a velocidade no interior do tubo, logo, $U \neq 0$. Portanto, tem-se que $\frac{U}{L} \neq 0$. Assim, a equação da continuidade pode ser escrita como

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^*u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \quad (2.4.5)$$

Agora, para obter a equação de quantidade de movimento na direção radial, em sua forma adimensional, realiza-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ & + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r}, \\ & \rho \left[\frac{\partial (Uu^*)}{\partial \left(\frac{L}{U}t^*\right)} + \frac{\partial (Uu^*Uu^*)}{\partial (Lr^*)} + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial (Uv^*Uu^*)}{\partial \theta^*} - \frac{(Uv^*)^2}{(Lr^*)} + \frac{\partial (Uw^*Uu^*)}{\partial (Lz^*)} \right] = -\frac{\partial (\rho U^2 p^*)}{\partial (Lr^*)} + \\ & + \eta_s \left[\frac{\partial}{\partial (Lr^*)} \left(\frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial (Lr^*Uu^*)}{\partial (Lr^*)} \right) + \frac{1}{(Lr^*)^2} \frac{\partial^2 (Uu^*)}{\partial (\theta^*)^2} + \frac{\partial^2 (Uu^*)}{\partial (Lz^*)^2} - \frac{2}{(Lr^*)^2} \frac{\partial (Uv^*)}{\partial \theta^*} \right] + \\ & + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial (Lr^*\rho U^2 T^*)^{rr}}{\partial (Lr^*)} + \frac{1}{(Lr^*)} \frac{\partial (\rho U^2 T^*)^{\theta r}}{\partial \theta^*} + \frac{\partial (\rho U^2 T^*)^{zr}}{\partial (Lz^*)} - \frac{(\rho U^2 T^*)^{\theta\theta}}{(Lr^*)}. \end{aligned}$$

Assim, dividindo ambos os lados da equação pelo termo $\frac{\rho U^2}{L}$, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial (v^* u^*)}{\partial \theta^*} - \frac{(v^*)^2}{r^*} + \frac{\partial (w^* u^*)}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \\ & + \frac{\eta_s}{\rho U L} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* u^*)}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial^2 (u^*)}{\partial (\theta^*)^2} + \frac{\partial^2 (u^*)}{\partial (z^*)^2} - \frac{2}{(r^*)^2} \frac{\partial (v^*)}{\partial \theta^*} \right] + \\ & + \frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* T^{*rr})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^{*\theta r}}{\partial \theta^*} + \frac{\partial T^{*2r}}{\partial z^*} - \frac{T^{*\theta\theta}}{r^*}. \end{aligned}$$

Note que resta apenas o termo $\frac{\eta_s}{\rho U L}$. Neste contexto, procede-se com manipulações algébricas a fim de reescrevê-lo em termos dos parâmetros adimensionais Re e β . Logo, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\eta_s}{\rho U L} &= \frac{\eta_0 - \eta_p}{\rho U L} = \frac{\eta_0}{\rho U L} - \frac{\eta_p}{\rho U L} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_p}{\rho U L} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_p \eta_0}{\eta_0 \rho U L} = \\ &= \frac{1}{Re} - \frac{(\eta_0 - \eta_s \eta_0)}{\eta_0 \rho U L} = \frac{1}{Re} - \left(\frac{\eta_0^2}{\eta_0 \rho U L} - \frac{\eta_s \eta_0}{\eta_0 \rho U L} \right) = \frac{1}{Re} - \left(\frac{1}{Re} - \beta \frac{1}{Re} \right) = \frac{\beta}{Re}. \end{aligned}$$

Observe que a notação (*) nas variáveis adimensionais é omitida por simplicidade, uma vez que as constantes adimensionais indicam que a equação está em sua forma adimensional. Assim, a equação de quantidade de movimento na direção radial (r) em sua forma adimensional é expressa por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial r T^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{2r}}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

De maneira análoga, é obtida a equação de quantidade de movimento na direção azimutal (θ) e na direção axial (z), nas formas adimensionais, respectivamente

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{2\theta}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{2z}}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Agora, para adimensionalizar as equações dos tensores não-Newtonianos, realiza-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned}
& T^{rr} + \lambda \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + \frac{\partial (u_r T^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T^{rr})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T^{rr})}{\partial z} - \frac{2}{r} u_\theta T^{r\theta} - 2T^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \right. \\
& \left. - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (T^{rr2} + T^{r\theta2} + T^{rz2}) = 2\eta_p \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
& \Rightarrow \rho U^2 T^{*rr} + \lambda \left[\frac{\partial (\rho U^2 T^{*rr})}{\partial (\frac{U}{L} t^*)} + \frac{\partial (\rho U^2 U u^* T^{*rr})}{\partial (L r^*)} + \frac{1}{(L r^*)} \frac{\partial (\rho U^2 U v^* T^{*rr})}{\partial \theta^*} + \right. \\
& + \frac{\partial (\rho U^2 w^* T^{*rr})}{\partial (L z^*)} - \frac{2}{(L r^*)} \rho U^2 U v^* T^{*r\theta} - 2T^{*rr} \rho U^2 \frac{\partial (U u^*)}{\partial (L r^*)} - \frac{2}{r} T^{*r\theta} \rho U^2 \frac{\partial U v^*}{\partial \theta^*} + \\
& \left. - 2T^{*rz} \rho U^2 \frac{\partial (U u^*)}{\partial (L z^*)} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} ((\rho U^2 T^{*rr})^2 + (\rho U^2 T^{*r\theta})^2 + (\rho U^2 T^{*rz})^2) = 2\eta_p \frac{\partial (U u^*)}{\partial (L r^*)}. \\
& \Rightarrow \rho U^2 T^{*rr} + \lambda \left[\frac{\partial (\rho U^2 T^{*rr})}{\partial (\frac{U}{L} t^*)} + \frac{\partial (\rho U^2 U u^* T^{*rr})}{\partial (L r^*)} + \frac{1}{(L r^*)} \frac{\partial (\rho U^2 U v^* T^{*rr})}{\partial \theta^*} + \right. \\
& + \frac{\partial (\rho U^2 w^* T^{*rr})}{\partial (L z^*)} - \frac{2}{(L r^*)} \rho U^2 U v^* T^{*r\theta} - 2T^{*rr} \rho U^2 \frac{\partial (U u^*)}{\partial (L r^*)} - \frac{2}{r} T^{*r\theta} \rho U^2 \frac{\partial U v^*}{\partial \theta^*} + \\
& \left. - 2T^{*rz} \rho U^2 \frac{\partial (U u^*)}{\partial (L z^*)} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} \rho^2 U^4 (T^{*rr2} + T^{*r\theta2} + T^{*rz2}) = 2\eta_p \frac{\partial (U u^*)}{\partial (L r^*)}.
\end{aligned}$$

Logo, dividindo ambos os lados da equação pelo termo ρU^2 , tem-se

$$\begin{aligned}
& T^{*rr} + \frac{\lambda U}{L} \left[\frac{\partial T^{*rr}}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^* T^{*rr})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial (v^* T^{*rr})}{\partial \theta^*} + \frac{\partial (w^* T^{*rr})}{\partial z^*} - \frac{2}{r^*} v^* T^{*r\theta} - 2T^{*rr} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \right. \\
& \left. - \frac{2}{r^*} T^{*r\theta} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} - 2T^{*rz} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right] + \underbrace{\frac{\alpha_G \lambda \rho U^2}{\eta_p}}_{(*)} (T^{*rr2} + T^{*r\theta2} + T^{*rz2}) = 2 \underbrace{\frac{\eta_p}{\rho U L}}_{(**)} \frac{\partial u^*}{\partial r^*}.
\end{aligned}$$

Considerando os termos $(*)$ e $(**)$, apresentam-se as seguintes manipulações

$$\begin{aligned}
(*) \frac{\alpha_G \lambda \rho U^2}{\eta_p} &= \frac{\alpha_G L W i U \rho}{\eta_p} = \frac{\alpha_G W i (L U \rho)}{\eta_0 - \eta_s} = \frac{\alpha_G W i (L U \rho) \frac{1}{\eta_0}}{1 - \frac{1}{\eta_0}} = \frac{\alpha_G W i R e}{1 - \beta}. \\
(*) (*) \frac{\eta_p}{\rho U L} &= \frac{\eta_0 - \eta_s}{\rho U L} = \frac{\frac{1}{\eta_0} (\eta_0 - \eta_s)}{\frac{1}{\eta_0} \rho U L} = \frac{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}}{\eta_0 \rho U L} = \frac{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}}{\frac{\rho U L}{\eta_0}} = \frac{1 - \beta}{R e}.
\end{aligned}$$

Substituindo esta manipulação, juntamente com as considerações utilizadas para as equações de Navier-Stokes, obtém-se a equação do tensor T^{rr} , em sua forma adimensional

$$\begin{aligned}
T^{rr} + W i \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rr}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{r\theta} - 2T^{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + \right. \\
\left. - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G W i R e}{1 - \beta} (T^{rr2} + T^{r\theta2} + T^{rz2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{R e} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (2.4.9)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, as equações dos tensores $T^{r\theta}$, T^{rz} , $T^{\theta\theta}$, $T^{\theta z}$ e T^{zz} são obtidas, nas formas adimensionais, respectivamente

$$\begin{aligned}
T^{r\theta} + W i \left[\frac{\partial T^{r\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rr} - \frac{2v}{r} T^{\theta\theta} + \right. \\
\left. - T^{rr} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{\theta z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \\
+ \frac{\alpha_G W i R e}{1 - \beta} (T^{r\theta} (T^{rr} + T^{\theta\theta}) + T^{rz} T^{\theta z}) = \frac{(1 - \beta)}{R e} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2.4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{rz} + W i \left[\frac{\partial T^{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rz}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{\theta z} - T^{rr} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
\left. - T^{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \\
+ \frac{\alpha_G W i R e}{1 - \beta} (T^{rz} (T^{rr} + T^{zz}) + T^{r\theta} T^{\theta z}) = \frac{(1 - \beta)}{R e} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (2.4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\theta\theta} + W i \left[\frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2v}{r} T^{r\theta} - 2T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\
\left. - 2T^{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \right) - 2T^{\theta z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G W i R e}{1 - \beta} (T^{r\theta2} + T^{\theta\theta2} + T^{\theta z2}) = \\
= 2 \frac{(1 - \beta)}{R e} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right), \quad (2.4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\theta z} + Wi \left[\frac{\partial T^{\theta z}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rz} - T^{\theta r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
\left. - T^{\theta \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{zz} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \\
+ \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{\theta z} (T^{\theta \theta} + T^{zz}) + T^{\theta r} T^{rz}) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \tag{2.4.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{zz} + Wi \left[\frac{\partial T^{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} - 2T^{rz} \frac{\partial w}{\partial z} - 2T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\
\left. - 2T^{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{rz2} + T^{\theta z2} + T^{zz2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2.4.14}
\end{aligned}$$

2.5 Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção é apresentada a análise de estabilidade linear para escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando a equação constitutiva Giesekus (2.3.1).

A análise de estabilidade linear realizada neste trabalho considerou que o escoamento base é paralelo na direção z , portanto,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = W(r), \quad p = P(z), \quad T = \hat{T}(r).$$

Dado que o escoamento instantâneo pode ser dividido em um escoamento principal (base) e um escoamento perturbado, as variáveis dependentes podem ser decompostas da seguinte maneira [31]

$$\begin{aligned}
u(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}(r, \theta, z, t), \\
v(r, \theta, z, t) &= \tilde{v}(r, \theta, z, t), \\
w(r, \theta, z, t) &= W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t), \\
p(r, \theta, z, t) &= P(z) + \tilde{p}(r, \theta, z, t), \\
T(r, \theta, z, t) &= \hat{T}(r) + \tilde{T}(r, \theta, z, t). \tag{2.5.1}
\end{aligned}$$

A partir da substituição dessas variáveis decompostas nas equações de Navier-Stokes e dos tensores não-Newtonianos, podem ser obtidas as equações para as perturbações [22]. É importante frisar que, de acordo com a hipótese estipulada, o escoamento principal (base) é uma solução das equações de Navier-Stokes, ou seja, significa que as perturbações também devem atender a esse sistema de equações.

Continuidade:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \frac{\partial(W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{\partial W(r)}{\partial z}}_{=0} + \frac{\partial(\tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0. \quad (2.5.2)$$

Equação da quantidade de movimento na direção radial (r):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial r T^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zr}}{\partial z} - \frac{T^{\theta \theta}}{r}.
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - \frac{(\tilde{v}(r, \theta, z, t))^2}{r} + \\
& + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = -\frac{\partial(P(r, \theta) + \tilde{p}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \hat{T}^{rr}(r) + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta r}(r) + \tilde{T}^{\theta r}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + \\
& + \frac{\partial \left(\hat{T}^{zr}(r) + \tilde{T}^{zr}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z} - \frac{\left(\hat{T}^{\theta \theta}(r) + \tilde{T}^{\theta \theta}(r, \theta, z, t) \right)}{r}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{v}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} - \frac{(\tilde{v}(r, \theta, z, t))^2}{r} + \\ & + \frac{1}{r} \tilde{v}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \tilde{w}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{p}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta r}(r)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{T}^{zr}(r)}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \tilde{T}^{zr}(r, \theta, z, t)}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}(r)}{r} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t)}{r}. \end{aligned}$$

Sendo o escoamento base uma solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}^2}{r} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zr}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r}. \end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em r perturbada é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \left[-\frac{\tilde{v}^2}{r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zr}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r}. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Equação da quantidade de movimento na direção azimutal (θ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{z\theta}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t) \tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} + \\
& + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(P(r, \theta) + \tilde{p}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \left(\hat{T}^{r\theta}(r) + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) \right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta\theta}(r) + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + \\
& \quad + \frac{\partial \left(\hat{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{z\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t) \tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} + \\
& + W \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \tilde{w}(r, \theta, z, t) \frac{\partial(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{p}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2(\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} \right] + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \left(\hat{T}^{r\theta}(r) \right) \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \left(\tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) \right)}{\partial r} + \\
& \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta\theta}(r) \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + \\
& \quad + \frac{\partial \left(\hat{T}^{z\theta}(r) \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\tilde{T}^{z\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Sendo o escoamento base uma solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{r} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em θ perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\
+ \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right] + \\
+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Equação da quantidade de movimento na direção axial (z):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
+ \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial (r T^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} = \\
& = -\frac{\partial P(r, \theta) + \tilde{p}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z^2} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{T}^{rz}(r) + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\hat{T}^{\theta z}(r) + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& \quad + \frac{\partial (\hat{T}^{zz}(r) + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t))}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W(r)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial W(r)}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + W \frac{\partial W(r)}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \\
& + W \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \tilde{w}(r, \theta, z, t) \frac{\partial W(r)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{p}(r, \theta, z, t)}{\partial z} + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r W(r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(r)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 W(r)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial r \hat{T}^{rz}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}(r)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{T}^{zz}(r)}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t)}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Sendo o escoamento base uma solução das equações de Navier-Stokes, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento em z perturbada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \tilde{w}^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\ + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Os termos entre colchetes das equações (2.5.3), (2.5.4) e (2.5.5) são os termos não lineares. E, segundo Schlichting [28] como as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar os termos não lineares dessas equações. Portanto, o sistema simplificado é dado por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (2.5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r}, \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} :

$$\begin{aligned} T^{rr} + Wi \left[\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rr}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{r\theta} - 2T^{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - 2T^{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{rr2} + T^{r\theta2} + T^{rz2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.9), tem-se

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right) + Wi \left[\frac{\partial \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial r} + \right. \\
& \quad + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z} + \\
& \quad - \frac{2\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \left(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) - 2 \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\
& \quad \left. - \frac{2}{r} \left(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial \tilde{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} - 2 \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right] + \\
& \quad + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right)^2 + \left(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right)^2 + \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right)^2 \right) = \\
& \quad = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta, z, t)}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{vr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{vr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{vr}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{vr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} + \right. \\
& \quad + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \left(\hat{T}^{r\theta} \right) - \frac{2\tilde{v}}{r} \left(\tilde{T}^{r\theta} \right) - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - 2\tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \\
& \quad \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr} \right)^2 + \left(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta} \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz} \right)^2 \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{rr} perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{rr} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\
& \quad - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - 2\tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rr} \tilde{T}^{rr} + 2\hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{rz} \tilde{T}^{rz} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}. \quad (2.5.10)
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{r\theta}$:

$$\begin{aligned} T^{r\theta} + Wi \left[\frac{\partial T^{r\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rr} - \frac{2v}{r} T^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - T^{rr} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{\theta z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{r\theta} (T^{rr} + T^{\theta\theta}) + T^{rz} T^{z\theta}) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.10), tem-se

$$\begin{aligned} (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) + Wi \left[\frac{\partial (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \right. \\ + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \\ + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)) - \frac{2\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} (\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t)) + \\ - (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} - \frac{(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t))}{r} \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\ - (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{r} - (\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}) \frac{\partial (\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\ - (\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} - \frac{(\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t))}{r} \frac{\partial (\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\ \left. - (\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right] + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left((\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t)) (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) + \hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t)) + \right. \\ \left. + (\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t)) (\hat{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{z\theta}(r, \theta, z, t)) \right) = \\ = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} + \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \right. \\
& + W \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} + \\
& - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}^r}{r} \hat{T}^{r\theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \\
& - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \Big] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left((\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}) (\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr} + \hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta}) + \right. \\
& \left. + (\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}) (\hat{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{z\theta}) \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação $T^{r\theta}$ perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{r\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \right. \\
& - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial W}{\partial z} + \\
& - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \\
& \left. - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] \Big) + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{r\theta} (\tilde{T}^{rr} + \tilde{T}^{\theta\theta}) + \tilde{T}^{r\theta} (\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{\theta\theta}) + \right. \\
& \left. + \hat{T}^{rz} \tilde{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{rz} \hat{T}^{z\theta} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right). \tag{2.5.11}
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} :

$$\begin{aligned}
& T^{rz} + Wi \left[\frac{\partial T^{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{rz}}{\partial z} - \frac{2v}{r} T^{\theta z} - T^{rr} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
& \left. - T^{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - T^{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{rz} (T^{rr} + T^{zz}) + T^{r\theta} T^{\theta z}) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right),
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.11), tem-se

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right) + Wi \left[\frac{\partial \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial r} + \right. \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z} + \\
& - \frac{2\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) - \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& - \left(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& - \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right) \left(\frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial (\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right) - \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial (\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& \left. - \left(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial (\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right) \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr}(r, \theta, z, t) + \hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right) + \right. \\
& \left. + \left(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) \right) = \\
& = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial (\tilde{u}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial \theta} + \right. \\
& + W \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta z} - \hat{T}^{rr} \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \\
& - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W(r)}{\partial r} - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W(r)}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W(r)}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \\
& - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W(r)}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \\
& - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \left. \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz} \right) \left(\hat{T}^{rr} + \tilde{T}^{rr} + \hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta} \right) \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z} \right) \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{rz} perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{rz} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w}^2 \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} + \right. \\
& - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W}{\partial r} - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \\
& - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \right. \\
& \left. \left. - \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{\theta z} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] \right) + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{rz} (\tilde{T}^{rr} + \tilde{T}^{zz}) + \tilde{T}^{rz} (\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{zz}) + \right. \\
& \left. + \hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{r\theta} \hat{T}^{\theta z} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right). \tag{2.5.12}
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$:

$$\begin{aligned}
T^{\theta\theta} + Wi \left[\frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2v}{r} T^{r\theta} - 2T^{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\
\left. - 2T^{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \right) - 2T^{\theta z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{r\theta 2} + T^{\theta\theta 2} + T^{\theta z 2}) = \\
= 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.12), tem-se

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right) + Wi \left[\frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial t} + \bar{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial r} + \right. \\
& + \frac{\bar{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + (W(r) + \bar{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z} + \\
& + \frac{2\bar{v}(r, \theta, z, t)}{r} \left(\hat{T}^{r\theta} + \bar{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) - 2 \left(\hat{T}^{r\theta} + \bar{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial \bar{v}(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\
& - 2 \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}(r, \theta, z, t)}{r} \right) + \\
& \left. - 2 \left(\bar{T}^{\theta z} + \bar{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial \bar{v}(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{r\theta} + \bar{T}^{r\theta}(r, \theta, z, t) \right)^2 + \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \right)^2 + \left(\hat{T}^{\theta z} + \bar{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right)^2 \right) = \\
& = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}(r, \theta, z, t)}{r} \right).
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \right. \\
& + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} + \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - 2\tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \\
& \quad \left. - \frac{2\tilde{u}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left((\hat{T}^{r\theta} + \tilde{T}^{r\theta})^2 + (\hat{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{\theta\theta})^2 + (\hat{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{z\theta})^2 \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação $T^{\theta\theta}$ perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \\
& - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{r\theta} - 2\tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta\theta} - 2\tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{\theta\theta} \tilde{T}^{\theta\theta} + 2\hat{T}^{\theta z} \tilde{T}^{\theta z} \right) = \\
& = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right).
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$:

$$\begin{aligned}
& T^{\theta z} + Wi \left[\frac{\partial T^{\theta z}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{\theta z}}{\partial z} + \frac{v}{r} T^{rz} - T^{\theta r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
& \quad \left. - T^{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T^{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) - T^{rz} \frac{\partial v}{\partial r} - T^{zz} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{\theta z} (T^{\theta\theta} + T^{zz}) + T^{\theta r} T^{rz}) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.13), tem-se

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) + Wi \left[\frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial r} + \right. \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z} + \\
& + \frac{\tilde{v}(r, \theta, z, t)}{r} \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right) - \left(\hat{T}^{\theta r} + \tilde{T}^{\theta r}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& - \left(\hat{T}^{\theta \theta} + \tilde{T}^{\theta \theta}(r, \theta, z, t) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} - \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} \right. \\
& + \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} + \frac{\tilde{u}(r, \theta, z, t)}{r} \left. \right) - \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial r} + \\
& - \left(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \left. \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) \left(\hat{T}^{\theta \theta} + \tilde{T}^{\theta \theta}(r, \theta, z, t) + \hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right) + \right. \\
& + \left. \left(\hat{T}^{\theta r} + \tilde{T}^{\theta r}(r, \theta, z, t) \right) \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right) \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \frac{\partial (\tilde{v}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \right. \\
& + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rz} + \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rz} - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \\
& - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} + \\
& - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z} \right) \left(\hat{T}^{\theta \theta} + \tilde{T}^{\theta \theta} + \hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz} \right) + \right. \\
& + \left. \left(\hat{T}^{\theta r} + \tilde{T}^{\theta r} \right) \left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz} \right) \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação $T^{\theta z}$ perturbada é dada por

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{\theta z} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\
& - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \\
& - \tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \tilde{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{\theta z} \left(\tilde{T}^{\theta \theta} + \tilde{T}^{zz} \right) + \right. \\
& \left. + \tilde{T}^{\theta z} \left(\hat{T}^{\theta \theta} + \hat{T}^{zz} \right) + \hat{T}^{\theta r} \tilde{T}^{rz} + \tilde{T}^{\theta r} \hat{T}^{rz} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right). \quad (2.5.14)
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} :

$$\begin{aligned}
T^{zz} + Wi \left[\frac{\partial T^{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial T^{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T^{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} - 2T^{rz} \frac{\partial w}{\partial z} - 2T^{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\
\left. - 2T^{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{rz2} + T^{\theta z2} + T^{zz2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.5.1) na equação do tensor não-Newtoniano (2.4.14), tem-se

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right) + Wi \left[\frac{\partial \left(\hat{T}^{zz} + \hat{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial t} + \tilde{u}(r, \theta, z, t) \frac{\partial \left(\hat{T}^{zz} + \hat{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial r} + \right. \\
& + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \left(\hat{T}^{zz} + \hat{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial \theta} + (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t)) \frac{\partial \left(\hat{T}^{zz} + \hat{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right)}{\partial z} + \\
& - 2 \left(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} - 2 \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial \theta} + \\
& - 2 \left(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right) \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z} \left. \right] + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz}(r, \theta, z, t) \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z}(r, \theta, z, t) \right)^2 + \left(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz}(r, \theta, z, t) \right)^2 \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial (W(r) + \tilde{w}(r, \theta, z, t))}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Após manipulações algébricas, separando em escoamento base e escoamento perturbado, tem-se

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \right. \\
& + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \\
& - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \left. \right] + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\left(\hat{T}^{rz} + \tilde{T}^{rz} \right)^2 + \left(\hat{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{\theta z} \right)^2 + \left(\hat{T}^{zz} + \tilde{T}^{zz} \right)^2 \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Sabendo que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{zz} perturbada é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{zz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial \theta} + \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right] \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rz} \tilde{T}^{rz} + 2\hat{T}^{\theta z} \tilde{T}^{\theta z} + 2\hat{T}^{zz} \tilde{T}^{zz} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Os termos entre colchetes das equações (2.5.10), (2.5.11), (2.5.12), (2.5.13), (2.5.14) e (2.5.15) são os termos não lineares. E, segundo Schlichting [24] como as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar os termos não lineares dessas equações. Desta forma, as equações dos tensores não-Newtonianos perturbadas podem ser escritas por:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{rr} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rr} \tilde{T}^{rr} + 2\hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{rz} \tilde{T}^{rz} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{r\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{r\theta} \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{r\theta} \left(\tilde{T}^{rr} + \tilde{T}^{\theta\theta} \right) + \tilde{T}^{r\theta} \left(\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{\theta\theta} \right) + \right. \\ \left. + \hat{T}^{rz} \tilde{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{rz} \hat{T}^{z\theta} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{rz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{rz} \left(\tilde{T}^{rr} + \tilde{T}^{zz} \right) + \tilde{T}^{rz} \left(\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{zz} \right) + \right. \\ \left. + \hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{r\theta} \hat{T}^{\theta z} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \\
\left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(2\hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{\theta\theta} \tilde{T}^{\theta\theta} + 2\hat{T}^{\theta z} \tilde{T}^{\theta z} \right) = \quad (2.5.19) \\
= \frac{2(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\theta z} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(\hat{T}^{\theta z} \left(\tilde{T}^{\theta\theta} + \tilde{T}^{zz} \right) + \tilde{T}^{\theta z} \left(\hat{T}^{\theta\theta} + \hat{T}^{zz} \right) + \right. \\
\left. + \hat{T}^{\theta r} \tilde{T}^{rz} + \tilde{T}^{\theta r} \hat{T}^{rz} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right), \quad (2.5.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{zz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\
\left. - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = \quad (2.5.21) \\
+ \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(2\hat{T}^{rz} \tilde{T}^{rz} + 2\hat{T}^{\theta z} \tilde{T}^{\theta z} + 2\hat{T}^{zz} \tilde{T}^{zz} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

As condições de contorno que serão utilizadas para o problema do escoamento de Hagen-Poiseuille são da seguinte forma

$$r = 1 : \quad \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0.$$

Estas condições de contorno correspondem à condição de não escorregamento na parede (no-slip).

Além disso, segundo Georgievskii [13] a fim de evitar a formação de vórtices no eixo do tubo, deve-se impor as seguintes condições:

$$r = 0 : \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} = 0.$$

As equações (2.5.6)-(2.5.9) e (2.5.16)-(2.5.21) são lineares e os coeficientes das equações não dependem de t, θ e z , então através do método de separação de variáveis pode-se encontrar a solução dessas equações, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(r, \theta, z, t) &= \bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}, \\
\tilde{v}(r, \theta, z, t) &= \bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}, \\
\tilde{w}(r, \theta, z, t) &= \bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}, \\
\tilde{p}(r, \theta, z, t) &= \bar{p}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}, \\
\tilde{T}(r, \theta, z, t) &= \bar{T}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}.
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Quando o valor de i é igual a $\sqrt{-1}$, pode-se observar que as perturbações se propagam como ondas com frequência ω , comprimento de onda $\lambda_c = \frac{2\pi}{\alpha}$, e velocidade de onda $c = \frac{\omega}{\alpha}$. Além disso, $m \in \mathbf{R}$, α é o número de onda na direção z e as amplitudes e fases das perturbações são representadas por $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$ e $\bar{T}$ [31]. Ao somar um número complexo com o seu complexo conjugado, tem-se o valor da variável no domínio real.

Na prática, resolve-se as equações linearizadas complexas para encontrar os valores de α, θ, ω e $\bar{w}$, por isso, o complexo conjugado é desprezado ao substituir as variáveis (2.5.22) nas equações perturbadas [27]. Substituindo as variáveis nas equações de Navier-Stokes perturbadas, obtém-se um novo sistema de equações, em que as derivadas parciais são reduzidas a derivadas ordinárias, pois os termos das equações passam a depender apenas de uma variável.

Equação da Continuidade perturbada:

Da equação da continuidade (2.5.6), tem-se

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial z} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right] = 0 \\
&\Rightarrow \left[\left(\frac{\bar{u}(r)}{r} + \frac{d\bar{u}(r)}{dr} \right) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right] + \left[i \frac{m}{r} \bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right] + \left[i\alpha \bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right] = 0 \\
&\Rightarrow e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \left[\left(\frac{\bar{u}(r)}{r} + \frac{d\bar{u}(r)}{dr} \right) + i \frac{m}{r} \bar{v}(r) + i\alpha \bar{w}(r) \right] = 0 \\
&\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{u}(r) + i \frac{m}{r} \bar{v}(r) + i\alpha \bar{w}(r) = 0.
\end{aligned}$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção r perturbada:

Da equação da quantidade de movimento na direção r perturbada (2.5.7), resulta

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) = \\
& = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{p}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right) + \right. \\
& \quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& \quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{T}^{\theta r}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& \quad - \frac{\bar{T}^{\theta\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}}{r}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção r é dada por

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{u} + i\alpha W \bar{u} + \frac{d\bar{p}}{dr} = \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{d^2\bar{u}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{u} - \alpha^2 \bar{u} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{v} \right) + \\
+ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rr} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{r\theta} + i\alpha \bar{T}^{rz} - \frac{\bar{T}^{\theta\theta}}{r}.
\end{aligned}$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção θ perturbada:

Da equação da quantidade de movimento na direção θ perturbada (2.5.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \\
+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tilde{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{z\theta}}{\partial z}. \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) = \\
= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{p}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right) + \right. \\
+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
- \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \left. \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \left(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{T}^{\theta\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{z\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção θ é dada por

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{v} + i \frac{m}{r} \bar{p} + i\alpha W \bar{v} = \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} + \frac{d^2\bar{v}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{v} - \alpha^2 \bar{v} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{u} \right) + \\
+ \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{r\theta} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{\theta\theta} + i\alpha \bar{T}^{\theta z}.
\end{aligned}$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção z perturbada:

Da equação da quantidade de movimento na direção z perturbada (2.5.9), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}. \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + W \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{p}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \left. \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação da quantidade de movimento na direção z é dada por

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{w} + W' \bar{u} + i\alpha W \bar{w} + i\alpha \bar{p} = & \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \bar{w} - \alpha^2 \bar{w} \right) + \\
& + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rz} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{\theta z} + i\alpha \bar{T}^{zz}.
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} perturbada (2.5.16), tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{rr} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rr}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\
\left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rr} \tilde{T}^{rr} + 2\hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{rz} \tilde{T}^{rz} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\
& + \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial r} + \frac{\left(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial \theta} + \\
& + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{rr}}{\partial z} + \\
& - \frac{2 \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{\partial \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{\partial r} + \\
& - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{\partial \theta} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{\partial z} \left. \right) + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rr} \bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + 2\hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \right. \\
& + 2\hat{T}^{rz} \bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \left. \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano T^{rr} é dada por

$$\begin{aligned} \bar{T}^{rr} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{rr} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{rr}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{rr} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} i m \bar{v} + \right. \\ \left. - 2\hat{T}^{rz} i \alpha \bar{u} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rr} \bar{T}^{rr} + 2\hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{rz} \bar{T}^{rz} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{d\bar{u}}{dr}. \end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{r\theta}$ perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano $T^{r\theta}$ perturbada (2.5.17), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{r\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{r\theta}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} - \frac{\tilde{v}}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{r\theta} \left(\tilde{T}^{rr} + \tilde{T}^{\theta\theta} \right) + \tilde{T}^{r\theta} \left(\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{\theta\theta} \right) + \right. \\ \left. + \hat{T}^{rz} \tilde{T}^{z\theta} + \tilde{T}^{rz} \hat{T}^{z\theta} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\ \left. + \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial z} + \right. \\ \left. - \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{\theta\theta} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{r\theta}}{\partial \theta} + \right. \\ \left. - \frac{(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\ \left. - \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\ \left. - \left(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{r\theta} \left(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \bar{T}^{\theta\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\ \left. \bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \left(\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{\theta\theta} \right) + \hat{T}^{rz} \bar{T}^{z\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \hat{T}^{z\theta} \right) = \\ = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right). \end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano $T^{r\theta}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{r\theta} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{r\theta} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{r\theta}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{r\theta} - \frac{\bar{v}^r}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{\theta\theta} - \hat{T}^{rr} \frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\bar{u}}{r} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{r\theta} \frac{d\bar{u}}{dr} - \hat{T}^{rz} i\alpha \bar{v} + \hat{T}^{\theta\theta} i \frac{m}{r} \bar{u} - i\alpha \hat{T}^{\theta z} \bar{w} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(\hat{T}^{r\theta} \left(\bar{T}^{rr} + \bar{T}^{\theta\theta} \right) + \right. \\
\left. + \bar{T}^{r\theta} \left(\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{\theta\theta} \right) + \hat{T}^{rz} \bar{T}^{z\theta} + \bar{T}^{rz} \hat{T}^{z\theta} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(-i \frac{m}{r} \bar{u} + \frac{\bar{v}}{r} - i\alpha \bar{v} \right).
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} perturbada (2.5.18), tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{rz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{rz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} - \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{\theta z} - \tilde{T}^{rr} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{rr} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \right. \\
\left. - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(\hat{T}^{rz} \left(\tilde{T}^{rr} + \tilde{T}^{zz} \right) + \tilde{T}^{rz} \left(\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{zz} \right) + \right. \\
\left. + \hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{\theta z} + \tilde{T}^{r\theta} \hat{T}^{\theta z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\
+ \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial \theta} + \\
+ W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{rz}}{\partial z} + \\
- \frac{2(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{\theta z} - \left(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial r} + \\
- \hat{T}^{rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \frac{(\bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \\
- \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \left(\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial z} + \\
- \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
- \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \hat{T}^{zz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \Big) + \\
+ \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(\hat{T}^{rz} \left(\bar{T}^{rr}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\
+ \bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \left(\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{zz} \right) + \hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \\
+ \bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \hat{T}^{\theta z} \Big) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano T^{rz} é dada por

$$\begin{aligned} \bar{T}^{rz} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{rz} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{rz}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{rz} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{\theta z} - \bar{T}^{rr} \frac{dW}{dr} - \hat{T}^{rr} \frac{dW}{dr} + \right. \\ \left. - \frac{\bar{T}^{r\theta}}{r} imW - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \bar{w} im - \bar{T}^{rz} i\alpha W - \hat{T}^{rz} i\alpha \bar{w} - \hat{T}^{rz} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} im\bar{u} + \right. \\ \left. - \hat{T}^{zz} i\alpha \bar{u} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{rz} (\bar{T}^{rr} + \bar{T}^{zz}) + \bar{T}^{rz} (\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{zz}) + \right. \\ \left. + \hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{\theta z} + \bar{T}^{r\theta} \hat{T}^{\theta z} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(i\alpha \bar{u} + \frac{d\bar{w}}{dr} \right). \end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$ perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$ perturbada (2.5.19), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\theta\theta} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{2\tilde{v}}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{2\tilde{u}}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{r\theta} \tilde{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{\theta\theta} \tilde{T}^{\theta\theta} + 2\hat{T}^{\theta z} \tilde{T}^{\theta z} \right) = \\ = \frac{2(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}}{r} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{\theta\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{T}^{\theta\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + (\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial \theta} + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{\theta\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + (\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)}) \frac{\partial \hat{T}^{\theta\theta}}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{2(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \right. \\ \left. - \frac{2(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \hat{T}^{\theta\theta} - 2\hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{r\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + 2\hat{T}^{\theta\theta} \bar{T}^{\theta\theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \right. \\ \left. + 2\hat{T}^{\theta z} \bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) = \frac{2(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \right). \end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta\theta}$ é dada por

$$\begin{aligned} \bar{T}^{\theta\theta} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{\theta\theta} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{\theta\theta}}{dr} + iW \alpha \bar{T}^{\theta\theta} + \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2mi}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \bar{u} + \right. \\ \left. - 2i\alpha \hat{T}^{\theta z} \bar{v} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{\theta\theta} \bar{T}^{\theta\theta} + 2\hat{T}^{\theta z} \bar{T}^{\theta z} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{im}{r} \bar{v} + \frac{\bar{u}}{r} \right). \end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$ perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$ perturbada (2.5.20), tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\theta z} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}^{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{r} \tilde{T}^{rz} - \tilde{T}^{\theta r} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\tilde{u}}{r} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{\theta z} \left(\tilde{T}^{\theta \theta} + \tilde{T}^{zz} \right) + \tilde{T}^{\theta z} \left(\hat{T}^{\theta \theta} + \hat{T}^{zz} \right) + \right. \\
\left. + \hat{T}^{\theta r} \tilde{T}^{rz} + \tilde{T}^{\theta r} \hat{T}^{rz} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial r} + \right. \\
+ \frac{\left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{r} \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial \theta} + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{\theta z}}{\partial z} + \\
+ \frac{\left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{r} \hat{T}^{rz} - \left(\bar{T}^{\theta r}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial r} - \hat{T}^{\theta r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
- \frac{\left(\bar{T}^{\theta \theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
- \left(\bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \hat{T}^{\theta z} \frac{\left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right)}{r} + \\
- \hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) - \hat{T}^{zz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \Big) + \\
+ \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{\theta z} \left(\bar{T}^{\theta \theta}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\
\left. \bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \left(\hat{T}^{\theta \theta} + \hat{T}^{zz} \right) + \hat{T}^{\theta r} \bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \bar{T}^{\theta r}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \hat{T}^{rz} \right) = \\
= \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano $T^{\theta z}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta z} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{\theta z} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{\theta z}}{dr} + iW \alpha \bar{T}^{\theta z} + \frac{\bar{v}}{r} \hat{T}^{rz} - \bar{T}^{\theta r} \frac{dW}{dr} - \hat{T}^{\theta r} \frac{d\bar{w}}{dr} + \right. \\
\left. - im\bar{w} \frac{\hat{T}^{\theta \theta}}{r} - im\bar{v} \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} - i\alpha \bar{w} \hat{T}^{\theta z} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \bar{u} - \hat{T}^{rz} \frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{zz} i\alpha \bar{v} \right) \\
+ \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(\hat{T}^{\theta z} \left(\bar{T}^{\theta \theta} + \bar{T}^{zz} \right) + \bar{T}^{\theta z} \left(\hat{T}^{\theta \theta} + \hat{T}^{zz} \right) + \right. \\
\left. \hat{T}^{\theta r} \bar{T}^{rz} + \bar{T}^{\theta r} \hat{T}^{rz} \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} im\bar{v} + i\alpha \bar{v} \right).
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} perturbada:

Da equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} perturbada (2.5.21), tem-se

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{zz} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{\tilde{v}}{r} \frac{\hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + W \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} - 2\tilde{T}^{rz} \frac{\partial W}{\partial z} + \right. \\
& \quad \left. - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{r} \tilde{T}^{\theta z} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - 2\tilde{T}^{zz} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = \\
& \quad + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rz} \tilde{T}^{rz} + 2\hat{T}^{\theta z} \tilde{T}^{\theta z} + 2\hat{T}^{zz} \tilde{T}^{zz} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \\
& \quad \bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + Wi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \right. \\
& \quad + \left(\bar{u}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial r} + \frac{(\bar{v}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)})}{r} \frac{\hat{T}^{zz}}{\partial \theta} + \\
& \quad + W \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial \hat{T}^{zz}}{\partial z} + \\
& \quad - 2 \left(\bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{rz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& \quad - \frac{2}{r} \left(\bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \hat{T}^{\theta z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) + \\
& \quad - 2 \left(\bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - 2\hat{T}^{zz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) \Big) + \\
& \quad + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rz} \bar{T}^{rz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + 2\hat{T}^{\theta z} \bar{T}^{\theta z}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} + \right. \\
& \quad \left. + 2\hat{T}^{zz} \bar{T}^{zz}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{w}(r) e^{i(m\theta + \alpha z - \omega t)} \right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação do tensor não-Newtoniano T^{zz} é dada por

$$\begin{aligned}
& \bar{T}^{zz} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{zz} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{zz}}{dr} - 2i\alpha \hat{T}^{rz} \bar{w} + Wi\alpha \bar{T}^{zz} - 2i\alpha \hat{T}^{zz} \bar{w} \right) + \\
& \quad + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} \left(2\hat{T}^{rz} \bar{T}^{rz} + 2\hat{T}^{\theta z} \bar{T}^{\theta z} + 2\hat{T}^{zz} \bar{T}^{zz} \right) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} (i\alpha \bar{w}).
\end{aligned}$$

Portanto, um novo sistema de equações é formado após essas substituições. Logo,

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{u}(r) + i \frac{m}{r} \bar{v}(r) + i\alpha \bar{w}(r) = 0, \quad (2.5.23)$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{u} + i\alpha W \bar{u} + \frac{d\bar{p}}{dr} = \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{d^2 \bar{u}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{u} - \alpha^2 \bar{u} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{v} \right) + \\
+ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rr} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{r\theta} + i\alpha \bar{T}^{rz} - \frac{\bar{T}^{\theta\theta}}{r}, \quad (2.5.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{v} + i \frac{m}{r} \bar{p} + i\alpha W \bar{v} = \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} + \frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{v} - \alpha^2 \bar{v} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{u} \right) + \\
+ \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{r\theta} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{\theta\theta} + i\alpha \bar{T}^{\theta z}, \quad (2.5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega\bar{w} + WW'\bar{u} + i\alpha W\bar{w} + i\alpha\bar{p} &= \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \bar{w} - \alpha^2 \bar{w} \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{T}^{rz} + i \frac{m}{r} \bar{T}^{\theta z} + i\alpha \bar{T}^{zz},
\end{aligned} \tag{2.5.26}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{rr} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{rr} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{rr}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{rr} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{r\theta} - 2\hat{T}^{rr} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2}{r} \hat{T}^{r\theta} i m \bar{v} + \right. \\
\left. - 2\hat{T}^{rz} i \alpha \bar{u} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(2\hat{T}^{rr} \bar{T}^{rr} + 2\hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{rz} \bar{T}^{rz} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{u}}{dr},
\end{aligned} \tag{2.5.27}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{r\theta} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{r\theta} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{r\theta}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{r\theta} - \frac{\bar{v}^r}{r} \hat{T}^{rr} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{\theta\theta} - \hat{T}^{rr} \frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{r\theta} \frac{\bar{u}}{r} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{r\theta} \frac{d\bar{u}}{dr} - \hat{T}^{rz} i \alpha \bar{v} + \hat{T}^{\theta\theta} i \frac{m}{r} \bar{u} - i\alpha \hat{T}^{\theta z} \bar{w} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(\hat{T}^{r\theta} (\bar{T}^{rr} + \bar{T}^{\theta\theta}) + \right. \\
\left. + \bar{T}^{r\theta} (\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{\theta\theta}) + \hat{T}^{rz} \bar{T}^{z\theta} + \bar{T}^{rz} \hat{T}^{z\theta} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(-i \frac{m}{r} \bar{u} + \frac{\bar{v}}{r} - i\alpha \bar{v} \right),
\end{aligned} \tag{2.5.28}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{rz} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{rz} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{rz}}{dr} + i\alpha W \bar{T}^{rz} - \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{\theta z} - \bar{T}^{rr} \frac{dW}{dr} - \hat{T}^{rr} \frac{dW}{dr} + \right. \\
\left. - \frac{\bar{T}^{r\theta}}{r} i m W - \frac{\hat{T}^{r\theta}}{r} \bar{w} i m - \bar{T}^{rz} i \alpha W - \hat{T}^{rz} i \alpha \bar{w} - \hat{T}^{rz} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} i m \bar{u} + \right. \\
\left. - \hat{T}^{zz} i \alpha \bar{u} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(\hat{T}^{rz} (\bar{T}^{rr} + \bar{T}^{zz}) + \bar{T}^{rz} (\hat{T}^{rr} + \hat{T}^{zz}) + \right. \\
\left. + \hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{\theta z} + \bar{T}^{r\theta} \hat{T}^{\theta z} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha \bar{u} + \frac{d\bar{w}}{dr} \right),
\end{aligned} \tag{2.5.29}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta\theta} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{\theta\theta} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{\theta\theta}}{dr} + iW\alpha \bar{T}^{\theta\theta} + \frac{2}{r} \bar{v} \hat{T}^{r\theta} - \hat{T}^{r\theta} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2mi}{r} \hat{T}^{\theta\theta} \bar{u} + \right. \\
\left. - 2i\alpha \hat{T}^{\theta z} \bar{v} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(2\hat{T}^{r\theta} \bar{T}^{r\theta} + 2\hat{T}^{\theta\theta} \bar{T}^{\theta\theta} + 2\hat{T}^{\theta z} \bar{T}^{\theta z} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{im}{r} \bar{v} + \frac{\bar{u}}{r} \right),
\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\theta z} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{\theta z} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{\theta z}}{dr} + iW\alpha \bar{T}^{\theta z} + \frac{\bar{v}}{r} \hat{T}^{rz} - \bar{T}^{\theta r} \frac{dW}{dr} - \hat{T}^{\theta r} \frac{d\bar{w}}{dr} + \right. \\
\left. - i m \bar{w} \frac{\hat{T}^{\theta\theta}}{r} - i m \bar{v} \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} - i\alpha \bar{w} \hat{T}^{\theta z} - \frac{\hat{T}^{\theta z}}{r} \bar{u} - \hat{T}^{rz} \frac{d\bar{v}}{dr} - \hat{T}^{zz} i \alpha \bar{v} \right) \\
+ \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(\hat{T}^{\theta z} (\bar{T}^{\theta\theta} + \bar{T}^{zz}) + \bar{T}^{\theta z} (\hat{T}^{\theta\theta} + \hat{T}^{zz}) + \right. \\
\left. \hat{T}^{\theta r} \bar{T}^{rz} + \bar{T}^{\theta r} \hat{T}^{rz} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{1}{r} i m \bar{v} + i\alpha \bar{v} \right),
\end{aligned} \tag{2.5.31}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{zz} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{zz} + \bar{u} \frac{d\hat{T}^{zz}}{dr} - 2i\alpha \hat{T}^{rz\bar{w}} + Wi\alpha \bar{T}^{zz} - 2i\alpha \hat{T}^{zz}\bar{w} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1-\beta} \left(2\hat{T}^{rz}\bar{T}^{rz} + 2\hat{T}^{\theta z}\bar{T}^{\theta z} + 2\hat{T}^{zz}\bar{T}^{zz} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} (i\alpha \bar{w}). \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

A decomposição em modo normal significa realizar uma análise dos modos de perturbação, considerando que as amplitudes presentes nas equações (2.5.23)–(2.5.32) são funções apenas de r . Desta forma, permitindo considerar os modos nas variáveis θ , z e t .

2.6 Tensor Conformação

No trabalho desenvolvido por Hulsen [16], destaca-se que a imposição de restrições ao tensor extra-tensão é de suma importância para manter o sistema de equações bem condicionado quando é considerado uma formulação numérica, assim, evitando o surgimento de instabilidades não lineares devido a erros de aproximação. Para mais detalhes, consultar [6] e [17].

Uma das formas alternativas de descrever os modelos viscoelásticos é utilizando o tensor conformação que é definido como

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(r, \theta, z, t) = \begin{bmatrix} C^{rr} & C^{r\theta} & C^{rz} \\ C^{\theta r} & C^{\theta\theta} & C^{\theta z} \\ C^{zr} & C^{z\theta} & C^{zz} \end{bmatrix},$$

este tensor é simétrico e definido positivo. Hulsen [16] provou que essas propriedades são preservadas durante toda a evolução temporal da equação constitutiva se desta forma for inicializado. Resumidamente, Hulsen [16] define que o tensor é simétrico e definido positivo por

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = \frac{\lambda}{\eta_p} \mathbf{T}. \quad (2.6.1)$$

Adimensionalizando (2.6.1), tem-se

$$\frac{\lambda}{\eta_p} \mathbf{T} = \frac{\lambda}{\eta_p} \rho U^2 \mathbf{T}^*.$$

Note que $\frac{\lambda}{\eta_p} \rho U^2 = \frac{Re Wi}{1-\beta}$. Logo, $\mathbf{C}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \frac{Re Wi}{1-\beta} \mathbf{T}.$$

Agora, considerando $\xi = \frac{Re Wi}{1-\beta}$, pode-se escrever o tensor conformação $\mathbf{C}$ em função da contribuição polimérica $\mathbf{T}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I}. \quad (2.6.2)$$

E, ainda, a contribuição polimérica $\mathbf{T}$ em função do tensor conformação $\mathbf{C}$

$$\mathbf{T} = \xi(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.6.3)$$

Como neste trabalho é considerado o fluido do tipo Giesekus, a equação constitutiva do tensor conformação $\mathbf{C}$ é obtida, em particular, a partir da equação constitutiva (2.3.1) deste modelo

$$\mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Adimensionalizando esta equação de forma análoga a que foi procedida na seção 2.4 durante a adimensionalização das componentes deste mesmo tensor, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + Wi \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T}(\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{T} \right] + \alpha_G \frac{WiRe}{1-\beta} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) &= 2 \frac{1-\beta}{Re} \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{Wi} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T}(\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{T} + \alpha_G \frac{Re}{1-\beta} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) &= \frac{1-\beta}{WiRe} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \end{aligned}$$

Sabendo que $\xi = \frac{1-\beta}{WiRe}$, então $\frac{Re}{1-\beta} = \frac{1}{Wi\xi}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Wi} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T}(\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{T} + \alpha_G \frac{1}{Wi\xi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) &= \xi (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{Wi} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) + \alpha_G \frac{1}{Wi\xi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) &= (\nabla \mathbf{u})\mathbf{T} + \xi(\nabla \mathbf{T}) + \mathbf{T}(\nabla \mathbf{T})^T + \xi(\nabla \mathbf{u})^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{Wi} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) + \alpha_G \frac{1}{Wi\xi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) &= (\nabla \mathbf{u})[\mathbf{T} + \xi \mathbf{I}] + [\mathbf{T} + \xi \mathbf{I}](\nabla \mathbf{u})^T. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $\mathbf{T} = \xi(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ (equação (2.6.3)), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{Wi} \xi(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \frac{\partial(\xi(\mathbf{C} - \mathbf{I}))}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\xi(\mathbf{C} - \mathbf{I})) + \alpha_G \frac{1}{Wi\xi} (\xi(\mathbf{C} - \mathbf{I}))(\xi(\mathbf{C} - \mathbf{I})) &= \\ = (\nabla \mathbf{u})[\xi(\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \xi \mathbf{I}] + [\xi(\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \xi \mathbf{I}](\nabla \mathbf{u})^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\xi}{Wi} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \xi \frac{\partial(\mathbf{C} - \mathbf{I})}{\partial t} + \xi \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{C} - \mathbf{I})) + \alpha_G \frac{1}{Wi\xi} \xi^2 (\mathbf{C} - \mathbf{I})(\mathbf{C} - \mathbf{I}) &= (\nabla \mathbf{u})\xi \mathbf{C} + \xi \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})^T. \end{aligned}$$

A expressão acima, dividida por ξ resulta em

$$\frac{1}{Wi} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{C}) + \alpha_G \frac{1}{Wi} (\mathbf{C} - \mathbf{I})(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = (\nabla \mathbf{u})\mathbf{C} + \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})^T,$$

e como alguns termos são nulos, segue que a equação constitutiva do tensor conformação é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{C}) - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{C} - \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})^T = \frac{1}{Wi} (\mathbf{I} - \mathbf{C}) [\mathbf{I} + \alpha_G (\mathbf{C} - \mathbf{I})]. \quad (2.6.4)$$

Substituindo a equação (2.6.2) na equação constitutiva do tensor conformação (2.6.4) obtém-se a equação constitutiva do modelo Giesekus

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) \right) - (\nabla \mathbf{u}) \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) - \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) (\nabla \mathbf{u})^\top = \\
& = \frac{1}{Wi} \left(\mathbf{I} - \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) \right) \left[\mathbf{I} + \alpha_G \left(\left(\frac{1}{\xi} \mathbf{T} + \mathbf{I} \right) - \mathbf{I} \right) \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{\xi} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{1}{\xi} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{T}) - \frac{1}{\xi} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\xi} \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^\top - \nabla \mathbf{u}^\top = \frac{1}{Wi} \left[-\frac{1}{\xi} \mathbf{T} - \alpha_G \frac{1}{\xi^2} \mathbf{T} \mathbf{T} \right].
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando a expressão acima por ξ , segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{T}) - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^\top &= \xi \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top \right) - \frac{1}{Wi} \left[\mathbf{T} + \frac{\alpha_G}{\xi} \mathbf{T} \mathbf{T} \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \overset{\nabla}{\mathbf{T}} &= 2\xi \mathbf{D} - \frac{1}{Wi} \left[\mathbf{T} + \frac{\alpha_G}{\xi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) \right],
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

que é justamente a equação do modelo constitutivo Giesekus. Assim, a equação constitutiva do tensor conformação pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{C}) = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{C} + \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})^\top + \frac{1}{Wi} P(\mathbf{C}), \tag{2.6.6}$$

sendo $P(\mathbf{C}) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}) [\mathbf{I} + \alpha_G (\mathbf{C} - \mathbf{I})]$, em particular, para o modelo Giesekus.

Assim, as equações da continuidade, quantidade de movimento e equações dos tensores conformação do modelo Giesekus são dadas por

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{u}(r) + i \frac{m}{r} \bar{v}(r) + i \alpha \bar{w}(r) = 0, \tag{2.6.7}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{u} + i\alpha W \bar{u} + \frac{d\bar{p}}{dr} &= \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{d^2 \bar{u}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{u} - \alpha^2 \bar{u} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{v} \right) + \\
&+ \frac{1-\beta}{ReWi} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{C}^{rr} + i \frac{m}{r} \bar{C}^{r\theta} + i\alpha \bar{T}^{rz} - \frac{\bar{C}^{\theta\theta}}{r} \right],
\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{v} + i \frac{m}{r} \bar{p} + i\alpha W \bar{v} &= \frac{\beta}{Re} \left(-\frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} + \frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \bar{v} - \alpha^2 \bar{v} + 2i \frac{m}{r^2} \bar{u} \right) + \\
&+ \frac{1-\beta}{ReWi} \left[\left(\frac{2}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{C}^{r\theta} + i \frac{m}{r} \bar{C}^{\theta\theta} + i\alpha \bar{C}^{\theta z} \right],
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega \bar{w} + W' \bar{u} + i\alpha W \bar{w} + i\alpha \bar{p} &= \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \bar{w} - \alpha^2 \bar{w} \right) + \\
&+ \frac{1-\beta}{ReWi} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \bar{C}^{rz} + i \frac{m}{r} \bar{C}^{\theta z} + i\alpha \bar{C}^{zz} \right],
\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

$$-i\omega\bar{C}^{rr} = 2\left(\frac{d}{dr} + iWiW'\alpha\right)\bar{u} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi}\right)\bar{C}^{rr} + \frac{\alpha_G}{Wi}(2\bar{C}^{rr} - 1), \quad (2.6.11)$$

$$-i\omega\bar{C}^{r\theta} = i\frac{1}{r}m\bar{u} + \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} + iWiW'\alpha\right)\bar{v} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi}\right)\bar{C}^{r\theta}, \quad (2.6.12)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{C}^{rz} = & \left\{ WiW'\frac{d}{dr} - Wi\frac{d^2W}{dr^2} + i[1 + 2Wi^2W'^2]\alpha \right\}\bar{u} + \\ & + \left(\frac{d}{dr} + iWiW\alpha\right)\bar{w} + W'\bar{C}^{rr} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi}\right)\bar{C}^{rz}, \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

$$-i\omega\bar{C}^{\theta\theta} = \frac{2}{r}\bar{u} + i\frac{2}{r}m\bar{u} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi}\right)\bar{C}^{\theta\theta} + \frac{\alpha_G}{Wi}(2\bar{C}^{\theta\theta} - 1), \quad (2.6.14)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{C}^{\theta z} = & \left\{ WiW'\frac{d}{dr} - \frac{Wi}{r}W' + i[1 + 2(Wi)^2(W')^2]\alpha \right\}\bar{v} + i\frac{1}{r}m\bar{w} + \\ & + W'\bar{C}^{r\theta}, \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

$$\begin{aligned} -i\omega\bar{C}^{zz} = & -4(Wi)^2W'W''\bar{u} + 2\left\{ WiW'\frac{d}{dr} + i[1 + 2(Wi)^2(W')^2]\alpha \right\}\bar{w} + \\ & + 2W'\bar{C}^{rz} - \left(iW\alpha + \frac{1}{Wi}\right)\bar{C}^{zz} + \frac{\alpha_G}{Wi}(2\bar{C}^{zz} - 1). \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

2.7 Escoamento Base

O escoamento base é conhecido como laminar e totalmente desenvolvido. Para calcular o escoamento no tubo, a priori assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo r , exceto para a pressão, cujo gradiente é constante na direção z . O domínio na direção r é compreendido entre $[0,1]$.

É importante destacar que neste trabalho, está sendo utilizado o modelo Giesekus, porém nesta seção, será definido um escoamento base para o fluido Oldroyd-B, para verificação do código numérico. Desta forma, de acordo com Batchelor [2] o perfil de velocidade é definido como

$$W(r) = 1 - r^2.$$

O escoamento base do modelo constitutivo Oldroyd-B via a formulação do tensor extra-tensão em um tubo segundo Chaudhary *et al.* [7], é dado por

$$\bar{T} = \frac{(1-\beta)}{Re} \begin{bmatrix} 0 & 0 & W' \\ 0 & 0 & 0 \\ W' & 0 & 2Wi(W')^2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, o escoamento base do modelo constitutivo Oldroyd-B via a formulação do tensor conformação em um tubo segundo Petrucci Orefice *et al.* [23], é dado por

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & WiW' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2Wi^2(W')^2 \end{bmatrix}.$$

Neste trabalho, assume-se $m = 0$ na equação (2.5.22), ou seja, a perturbação é considerada axissimétrica. Isso se deve graças ao fato de que os primeiros a relatar a instabilidade do fluido viscoelástico modelado por Oldroyd-B em um tubo foram Garg *et al.* [12]. Também, o tensor conformação foi utilizado na implementação do código LST que será apresentado no próximo capítulo.

Formulação Numérica

Neste capítulo é apresentado o método numérico que será utilizado para a solução das equações governantes adotando a formulação da Teoria de Estabilidade Linear, como pode ser visto no capítulo anterior.

3.1 Método Numérico

Uma implementação de um código Linear Stability Theory (LST) 2D foi utilizado para analisar a estabilidade temporal do escoamento em um tubo para o fluido viscoelástico modelado pela equação constitutiva do Giesekus.

A análise temporal visa determinar a estabilidade de uma perturbação dada a frequência angular real ω . Ao buscar os autovalores deste sistema, é obtido um espectro de autovalores no qual é buscado o autovalor mais estável, que indica se os dados são estáveis ou instáveis com base no valor da parte imaginária de ω [27]. Primeiramente, é realizada uma limpeza para retirar todos os modos espúrios e, em seguida, procura-se o valor imaginário mínimo dentro do espectro encontrado.

O método da matriz é utilizado para reescrever sistemas de equações, mas especificamente neste trabalho, para o modelo viscoelástico Giesekus, a partir das equações (2.5.23) - (2.5.32) ou (2.6.7) - (2.6.16) e resolver o problema de autovalor associado com a análise de estabilidade. Utilizando a Teoria de Estabilidade Linear estudada no capítulo 2, a formulação numérica pode ser conduzida através da obtenção das matrizes usadas na análise de estabilidade.

Inicialmente, Id é uma matriz identidade $m \times n$ e zero também representa uma matriz $m \times n$. O termo $1i$ representa a unidade imaginária de um número complexo que pode ser escrito desta forma no MATLAB. A matriz é formada por blocos, onde cada bloco é representado pelo número de modos de Chebyshev ao quadrado. Para mais detalhes sobre os modos de Chebyshev, consultar [32].

Desta forma, é necessário escrever as equações (2.5.23) - (2.5.32) ou as equações (2.6.7) - (2.6.16) na forma matricial para encontrar as matrizes L e F , frisando que, é possível resolver o problema de análise de estabilidade encontrando o autovalor ω_i para a análise temporal, utilizando um método direto ou um iterativo para calcular o autovalor. Mais detalhes sobre o método da matriz podem ser encontrados em [11].

Logo, reescrevendo o sistema de equações na forma matricial como

$$LV = \omega FV,$$

onde para o autovetor V , tem-se

$$V = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} & \bar{p} & \bar{C}^{rr} & \bar{C}^{r\theta} & \bar{C}^{rz} & \bar{C}^{\theta\theta} & \bar{C}^{\theta z} & \bar{C}^{zz} \end{bmatrix}.$$

- Análise Temporal

$$\begin{aligned} L \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} & \bar{p} & \bar{C}^{rr} & \bar{C}^{r\theta} & \bar{C}^{rz} & \bar{C}^{\theta\theta} & \bar{C}^{\theta z} & \bar{C}^{zz} \end{bmatrix}^T = \\ = \omega F \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} & \bar{p} & \bar{C}^{rr} & \bar{C}^{r\theta} & \bar{C}^{rz} & \bar{C}^{\theta\theta} & \bar{C}^{\theta z} & \bar{C}^{zz} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

- Análise Espacial

$$\begin{aligned} L \begin{bmatrix} \bar{u} & \alpha \bar{u} & \bar{v} & \alpha \bar{v} & \bar{w} & \alpha \bar{w} & \bar{p} & \bar{C}^{rr} & \bar{C}^{r\theta} & \bar{C}^{rz} & \bar{C}^{\theta\theta} & \bar{C}^{\theta z} & \bar{C}^{zz} \end{bmatrix}^T = \\ = \alpha F \begin{bmatrix} \bar{u} & \alpha \bar{u} & \bar{v} & \alpha \bar{v} & \bar{w} & \alpha \bar{w} & \bar{p} & \bar{C}^{rr} & \bar{C}^{r\theta} & \bar{C}^{rz} & \bar{C}^{\theta\theta} & \bar{C}^{\theta z} & \bar{C}^{zz} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

No presente trabalho, optou-se por realizar somente a análise de estabilidade temporal do escoamento do fluido Giesekus no tubo. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} \text{common} &= -1i * \alpha * W + be/Re * (D2 + r * D1 - r^2 - \alpha^2 * Id); \\ \text{commonw} &= -1i * \alpha * W + be/Re * (D2 + r * D1 - \alpha^2 * Id); \\ v &= 1i * alpha * Id; \\ vv &= 2i/Re * m * r2; \\ vvv &= -4 * Wi^2 * dWdr * d2Wdr2; \\ b &= 1i * Wi * dWdr * alpha; \\ va &= -(1i * \alpha * W + 1/Wi * Id); \\ var &= (1 - be)/Re; \\ varr &= 2 * (D1 + 1i * Wi * dWdr * \alpha); \\ varz &= Wi * dWdr * D1 - Wi * d^2Wdr^2 + 1i * (Id + 2 * Wi^2 * dWdr^2) * \alpha; \\ vazz &= 2 * (Wi * dWdr * D1 + 1i * (Id + 2 * Wi^2 * dWdr^2) * \alpha); \\ vag &= (\alpha_G/Wi) * (2 * Id - 1). \end{aligned}$$

A matriz L é dada por

$$\begin{bmatrix} D1 + r & v & zero & zero & zero & zero & zero \\ common & zero & -D1 & var * (D1 + r) & var * v & -var * (r) & zero \\ -dWdr & commonw & -v & zero & var * (D1 + r) & zero & var * v \\ varr & zero & zero & va + vag & zero & zero & zero \\ varz & D1 + b & zero & dWdr & va & zero & zero \\ 2 * r & zero & zero & zero & zero & va + vag & zero \\ vvv & vaz z & zero & zero & 2 * dWdr & zero & va + vag \end{bmatrix}.$$

Enquanto que, a matriz F é dada por

$$\begin{bmatrix} zero & zero & zero & zero & zero & zero & zero \\ -1i * Id & zero & zero & zero & zero & zero & zero \\ zero & -1i * Id & zero & zero & zero & zero & zero \\ zero & zero & zero & -1i * Id & zero & zero & zero \\ zero & zero & zero & zero & -1i * Id & zero & zero \\ zero & zero & zero & zero & zero & -1i * Id & zero \\ zero & zero & zero & zero & zero & zero & -1i * Id \end{bmatrix}.$$

3.2 Análise de Instabilidades

Na formulação matemática apresentada no capítulo 2, quando o componente do número de onda α é um número complexo, representado por $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, com β e a frequência ω sendo reais, essa formulação é chamada de análise espacial.

Entretanto, quando os elementos do número de onda são números reais e a frequência $\omega = \omega_r + i\omega_i$ é um número complexo, é apresentada como análise temporal. A parte real ω_r corresponde a frequência da perturbação, enquanto a parte imaginária ω_i corresponde a taxa de amplificação. As perturbações analisadas neste trabalho são não-estacionárias e se propagam como ondas de Tollmien-Schlichting. Sendo assim, a Tabela 3.2.1 apresenta a classificação das instabilidades segundo Mendonça *et al.* [22].

Tabela 3.2.1: Classificação de instabilidades.

Tipo de Análise	Taxa de Amplificação	Amplitude	Classificação
Análise Temporal	$\omega_i < 0$	Decresce	Estável
	$\omega_i = 0$	Constante	Neutro
	$\omega_i > 0$	Cresce	Instável
Análise Espacial	$\alpha_i < 0$	Cresce	Instável
	$\alpha_i = 0$	Constante	Neutro
	$\alpha_i > 0$	Decresce	Estável

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos da análise de estabilidade temporal do escoamento de Hagen–Poiseuille para fluidos viscoelásticos. Inicialmente, considera-se o modelo Oldroyd-B para verificação do código, sendo a investigação conduzida por meio da análise de ondas de Tollmien–Schlichting. Os resultados da análise de estabilidade estão organizados em duas subseções: na primeira, realiza-se a verificação do código LST 2D; na segunda, são apresentados resultados da análise de estabilidade linear temporal para o modelo Giesekus.

4.1 Verificação do Código

Na presente seção é realizada a verificação do código LST 2D implementado para o problema do escoamento de Hagen–Poiseuille incompressível e isotérmico, utilizando o modelo de fluido viscoelástico Giesekus. A verificação foi realizada comparando o código desenvolvido neste trabalho com os resultados da literatura de Schmid e Henningson [29] e Silva [27] para o caso de escoamento Newtoniano. Será apresentado também resultados para o escoamento não-Newtoniano com $\alpha_G = 0$ (representando o modelo de fluido viscoelástico Oldroyd-B) na equação (2.3.1), quando comparados com os resultados de Silva [27].

A Figura 4.1.1 apresenta o domínio do escoamento do tubo, sendo R o raio do tubo. É utilizado um sistema de coordenadas cilíndricas com r , θ e z denotando as direções radial, azimutal e axial, respectivamente.

Deste modo, para verificar o código LST 2D temporal utilizando o modelo Giesekus foram analisados resultados para diferentes valores do número de onda α e do número de Reynolds (Re), nas equações (2.5.23) – (2.5.32) ou nas equações (2.6.7) – (2.6.16), onde N é o número de modos de Chebyshev, e comparados com os resultados obtidos na literatura [27, 29]. É importante destacar que nesta seção, utiliza-se $m = 0$ para todos os resultados apresentados, tendo em vista que é trabalhado nesta dissertação o escoamento axissimétrico do fluido Giesekus.

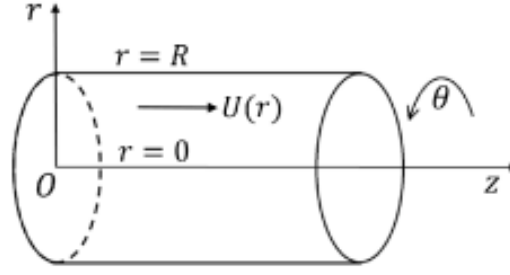


Figura 4.1.1: Figura retirada de [8].

A partir do espectro de autovalores apresentado na Figura 4.1.2 e nos resultados da Tabela 4.1.1, observa-se uma concordância entre o espectro de autovalores obtido em Schmid e Henningson [29] e Silva [27] para o modelo Newtoniano. Logo, ao realizar a verificação do código, tem-se um indicativo de que o código implementado está apto a simular e analisar a estabilidade de escoamentos em tubos com o modelo Giesekus.

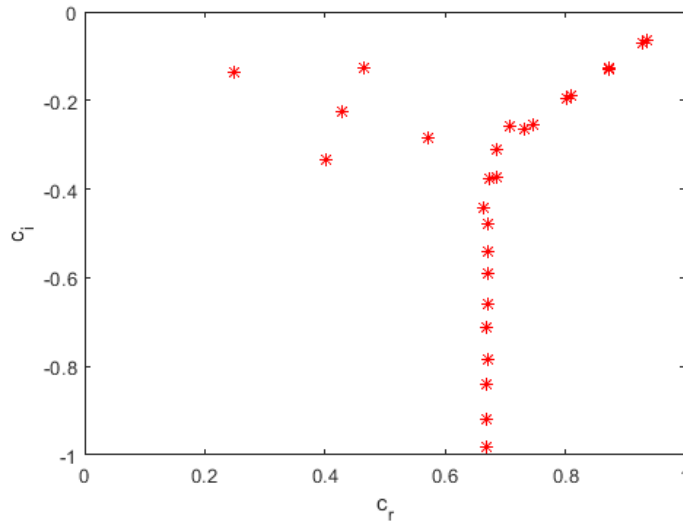


Figura 4.1.2: Espectro de autovalores para os parâmetros $\alpha = 1$, $m = 0$, $Re = 2000$ e $N = 60$, $Wi = 10^{-5}$ e $\beta = 0$.

A Tabela 4.1.1 apresenta alguns valores de autovalores do escoamento Newtoniano, que se assemelham com os resultados de Schmid e Henningson [29], para $m = 0$, sempre considerando o escoamento axissimétrico.

É importante ressaltar que nos resultados apresentados na figura 4.1.2 e na tabela 4.1.1, é analisado o escoamento do caso Newtoniano no tubo, logo, é considerado apenas as equações da continuidade e da quantidade de movimento.

Para verificação do código LST 2D temporal utilizando o modelo Giesekus, também foram realizadas algumas simulações numéricas para encontrar curvas neutras de estabilidade do modelo Giesekus, para o escoamento axissimétrico em tubo com $\alpha_G = 0$, com estas condições, tem-se o modelo Oldroyd-B. Sendo assim, são apresentados alguns resultados numéricos obtidos comparando com os resultados de Silva [27].

Tabela 4.1.1: Autovalores com $\alpha = 1$, $m = 0$, $Re = 3000$.

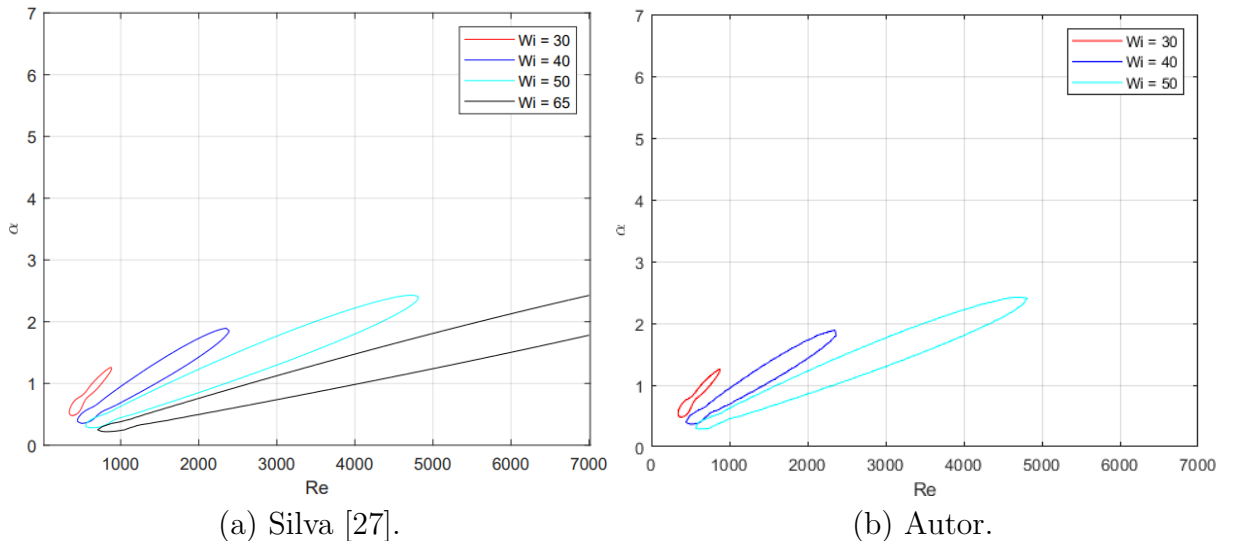
Autor	Schmid e Henningson [29]
0.94836022 - 0.05197311i	0.94836022 - 0.05197311i
0.94161111 - 0.05757246i	0.94836019 - 0.05197312i
0.89672044 - 0.10361288i	0.89671920 - 0.10361236i
0.89656318 - 0.10456466i	0.89672040 - 0.10361290i
0.41239579 - 0.11221473i	0.41239633 - 0.11221716i

Utilizando o código LST temporal, via tensor conformação, para o modelo Giesekus, foram geradas curvas neutras de estabilidade, conforme mostram as Figuras 4.1.3 e 4.1.4. Na Figura 4.1.3 são apresentadas curvas neutras para quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50$ e 65 (somente simulado por Silva [27]), mantendo-se fixo o valor de $\beta = 0.2$.

Nota-se que as curvas de estabilidade neutras referentes aos valores de $Wi = 30, 40$ e 50 são bem definidas, e conforme o número de Wi aumenta, mais as curvas vão ficando mais próximas, para maiores valores de Re crítico. Além disso, as regiões de instabilidade tendem a aumentar a partir de $Wi = 65$. E, ainda, observa-se uma concordância entre os resultados numéricos obtidos por Silva [27] e os resultados obtidos para o modelo viscoelástico Giesekus.

A Figura 4.1.4 apresenta a influência da contribuição do solvente β , ou seja, a razão entre a viscosidade do solvente (η_s) pela viscosidade do polímero (η_p) nas simulações numéricas. Considerando $N = 200$, $Wi = 40$ e quatro diferentes valores de β : $\beta = 0.3, 0.5, 0.65, 0.7$. Nota-se que as curvas neutras apresentam formas bem definidas e regiões de instabilidade muito similares. Observa-se que para $\beta = 0.5$ a região de instabilidade é maior, comparada com os demais valores de β . Além disso, para $\beta = 0.65$ e $\beta = 0.7$, há uma sobreposição das curvas fechadas, além de uma leve diminuição da região de instabilidade.

Neste caso, considerando $\beta = 0.3$, observe uma concordância entre os resultados numéricos obtidos por Silva [27] e os resultados obtidos para o modelo viscoelástico Giesekus.

Figura 4.1.3: Comparação de curvas neutras para os valores de $\beta = 0.2$ e $Wi = 30, 40$ e 50 .

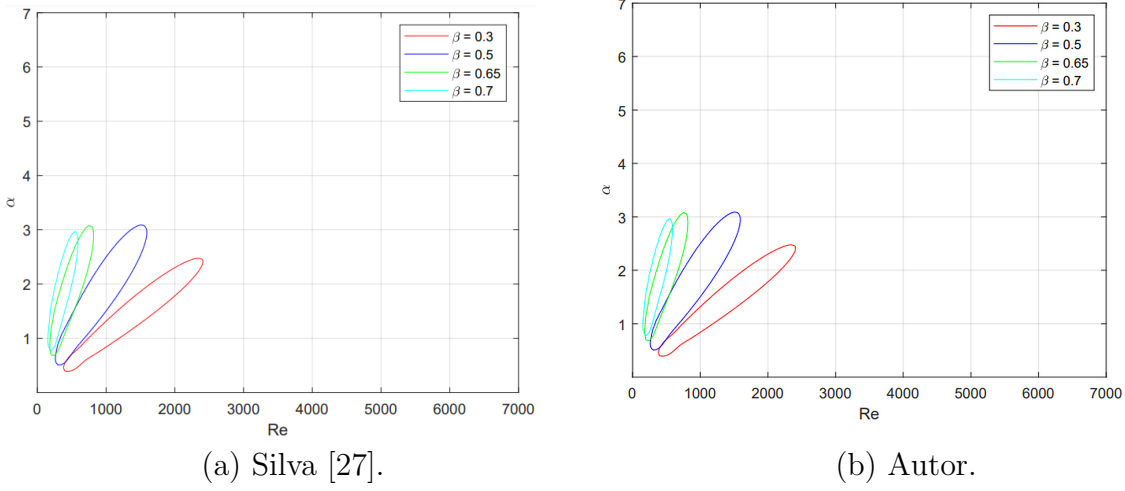


Figura 4.1.4: Comparação de curvas neutras para os valores de $\beta = 0.3$ e $Wi = 40$.

Vale ressaltar que dependendo do número de modos de Chebyshev utilizados na simulação numérica podem ocorrer erros ao calcular os autovalores, podendo ocasionar em autovalores errôneos. Tais erros podem ser de truncamento ou de arredondamento. Consequentemente, isso afetará alguns resultados de maneira distinta. Mais detalhes e informações sobre esse tema encontra-se em Schmid e Henningson [29].

Diante dos resultados expostos via simulações numéricas, nota-se que o código implementado é confiável para simular e analisar a estabilidade de escoamentos axissimétricos em tubo com o modelo Giesekus.

4.2 Análise de Estabilidade utilizando LST

Nesta seção será tratada a estabilidade temporal do escoamento de Hagen-Poiseuille viscoelástico através do código LST 2D. Considera-se para essa análise ω complexo e α real, conforme a Tabela 3.2.1. Inúmeras simulações numéricas foram realizadas com o intuito de avaliar as curvas de estabilidade neutra, variando os parâmetros adimensionais para o escoamento em tubo do fluido Giesekus. Para elaborar as curvas de estabilidade é feita uma análise temporal para cada conjunto de parâmetros adimensionais. Os parâmetros investigados são o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi), a contribuição polimérica do solvente β e o parâmetro de mobilidade α_G .

Para cada simulação numérica realizada permitiu-se determinar um diagrama de estabilidade neutra, onde os valores de ω_i são iguais a zero. Esses diagramas são apresentados com o número de Reynolds no eixo x e a frequência da perturbação α no eixo y , as curvas neutras são loops fechados, com as taxas de amplificação menores do que zero ($\omega_i < 0$), ou seja, região estável, localizadas fora da curva neutra, e as taxas de amplificação maiores do que zero ($\omega_i > 0$), região instável, no interior da curva neutra.

Usando o código LST 2D temporal, via tensor conformação, para o modelo Giesekus, foram realizadas simulações numéricas para gerar curvas de estabilidade neutra para cada caso, conforme é apresentado nas Figuras 4.2.1 – 4.2.13. Considerando as simulações apresentadas, observa-se nessas figuras a comparação das curvas neutras do modelo Giesekus, analisando as regiões de instabilidade, como não há modos instáveis para o escoamento de Hagen-Poiseuille [30]. Logo, não é possível apresentar comparações das curvas neutras do fluido viscoelástico com a curva neutra do fluido Newtoniano, como é apresentada na análise de estabilidade linear para o escoamento de Poiseuille [11].

4.2.1 Influência do número de Weissenberg (Wi)

Para investigar a influência do número de Weissenberg (Wi), na análise da estabilidade do escoamento de Hagen-Poiseuille do fluido Giesekus, foram realizadas simulações numéricas considerando diferentes valores do número de Reynolds, três valores para o parâmetro de mobilidade α_G : $\alpha_G = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$, cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$ e quatro diferentes valores de Weissenberg de $Wi = 30, 40, 50, 65$.

Nas Figuras 4.2.1 – 4.2.3 são apresentadas curvas de estabilidade neutra para quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , em cada figura fixa um β diferente, nesse caso, cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$, mantendo-se fixo o valor de $\alpha_G = 10^{-3}$ e $N = 300$. Assim, observa-se que as curvas neutras obtidas neste trabalho apresentam comportamento semelhante às aquelas apresentadas em Silva [27].

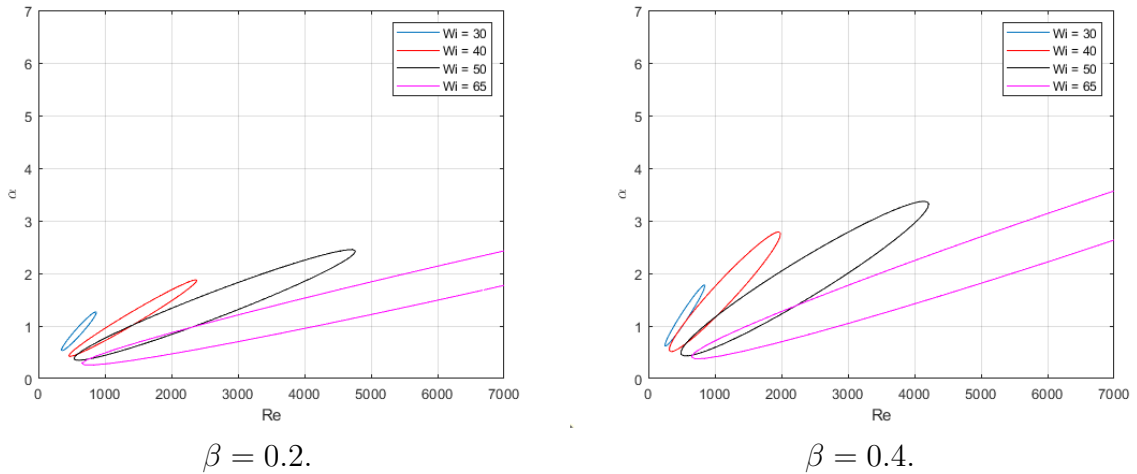


Figura 4.2.1: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

Na Figura 4.2.1 percebe-se que as curvas neutras respectivas aos valores de $Wi = 40, 50$ e 65 são bem definidas, e conforme o número de Wi aumenta, mais as curvas vão ficando mais próximas, para maiores valores de Re crítico. Por consequência, as regiões de instabilidade tendem a aumentar a partir de $Wi = 65$. Ademais, nota-se uma discrepância na curva para $Wi = 30$, pois, quanto menor o Wi , menos instável é o escoamento, pois a região instável diminui

bastante. Porém, ao longo da curva neutra observa-se uma diminuição da região de instabilidade acentuada [27].

Na Figura 4.2.2 observa-se que as curvas neutras respectivas aos valores de $Wi = 40, 50$ e 65 são bem definidas, e conforme o número de Wi aumenta, maior a região de instabilidade. Além disso, à medida que o número de Re crítico diminui, as curvas tendem a se deslocar para esquerda. Por conseguinte, diferente da Figura 4.2.1, quando por exemplo $Wi = 65$, a curva é fechada antes do número de Re atingir 7000.

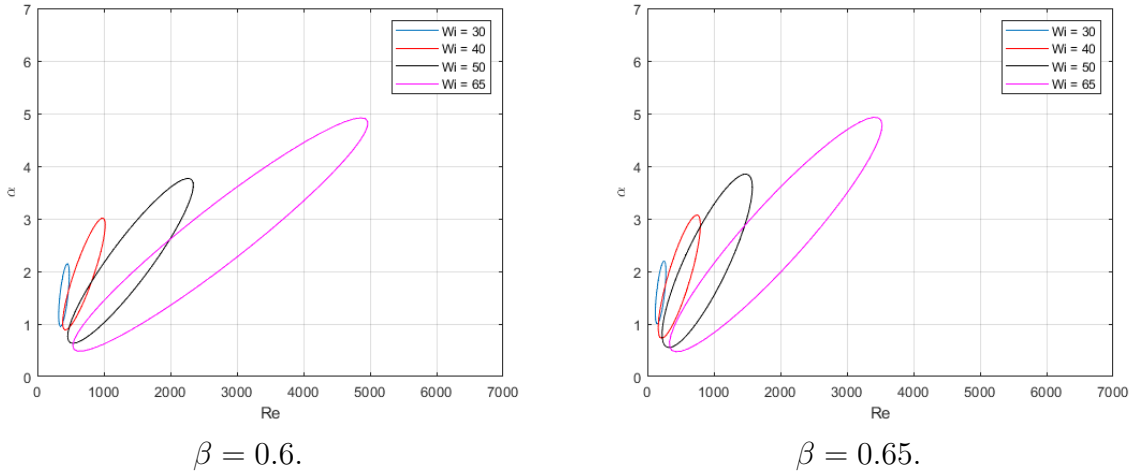


Figura 4.2.2: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

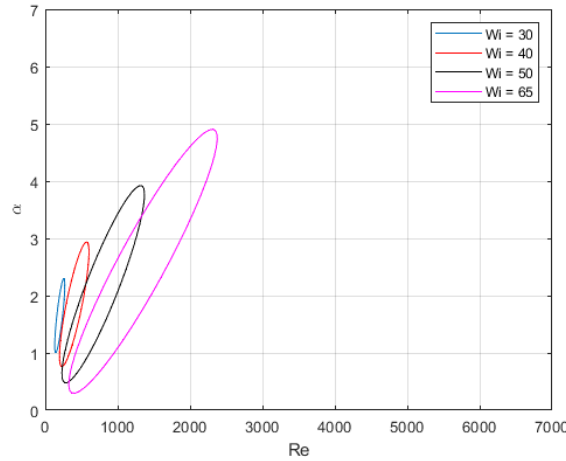


Figura 4.2.3: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$, $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , com $\beta = 0.7$.

A Figura 4.2.3 se assemelha ao comportamento da Figura 4.2.2, mostrando que à medida que o número de Re crítico diminui, as curvas se deslocam ainda mais para a esquerda. E, quando comparada à Figura 4.2.1, nota-se uma diminuição significativa da região de instabilidade.

Nas Figuras 4.2.4 – 4.2.6 são apresentadas curvas de estabilidade neutra para quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50$, e 65 , e em cada figura fixa um β diferente, nesse caso,

cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$, mantendo-se fixo o valor de $\alpha_G = 10^{-2}$ e $N = 300$. Os resultados exibidos nessas figuras mostram comportamento semelhante ao observado nas Figuras 4.2.1 – 4.2.3, para os respectivos parâmetros.

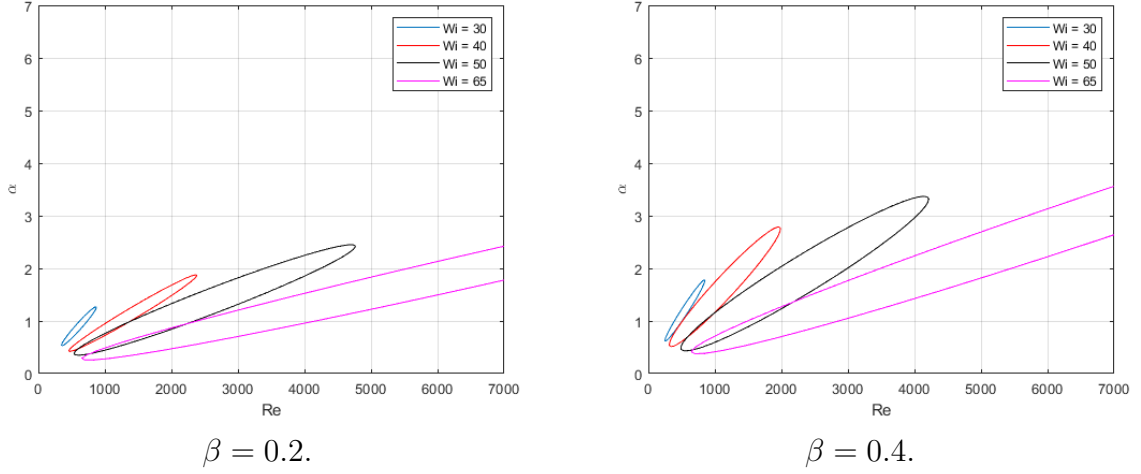


Figura 4.2.4: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

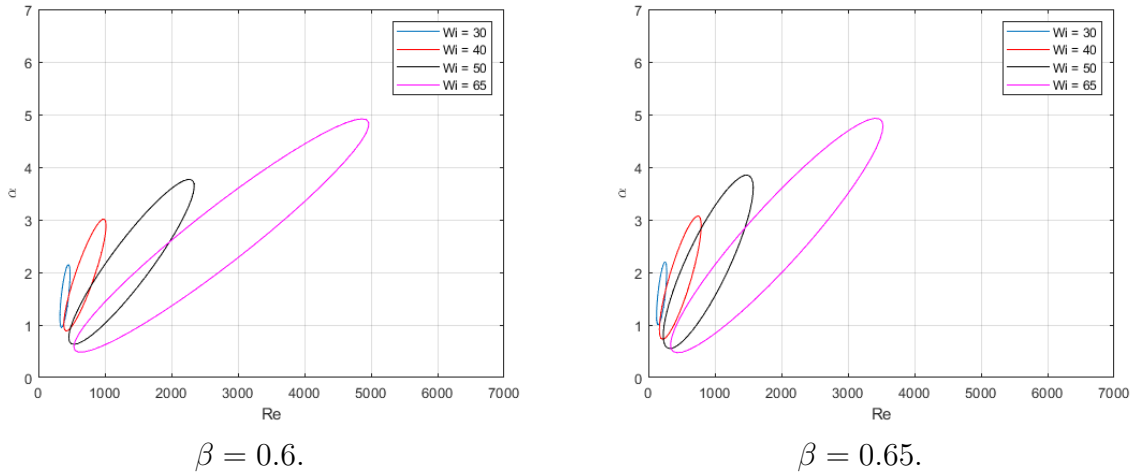


Figura 4.2.5: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

As Figuras 4.2.7 – 4.2.9 apresentam curvas de estabilidade neutra para quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50, e 65$, e em cada figura fixa um β diferente, nesse caso, cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$, mantendo-se fixo o valor de $\alpha_G = 10^{-1}$.

A partir destes resultados pode-se observar que, a região de instabilidade para cada curva começa a diminuir, à medida que o Re diminui. Isso indica que à medida que a contribuição do solvente β tende para o fluido Newtoniano ($\beta = 1$), ou seja, $\eta_s = \eta_p$, as regiões de instabilidade tendem a diminuir, até que não se verifiquem. Novamente, os resultados corroboram a literatura ao indicar que não existe curva neutra para o fluido Newtoniano, uma vez que todos os modos permanecem estáveis no escoamento em tubo, para qualquer valor do número de Reynolds [27].

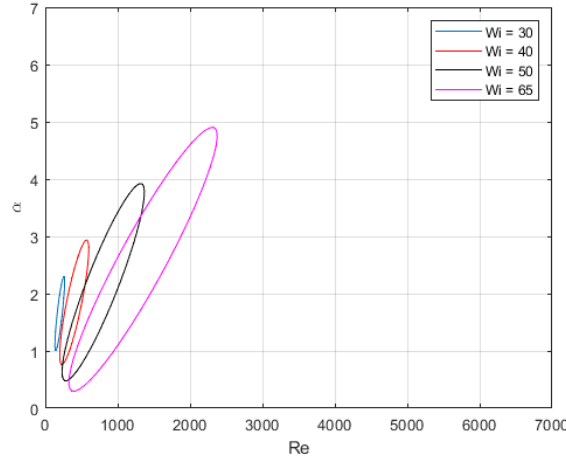
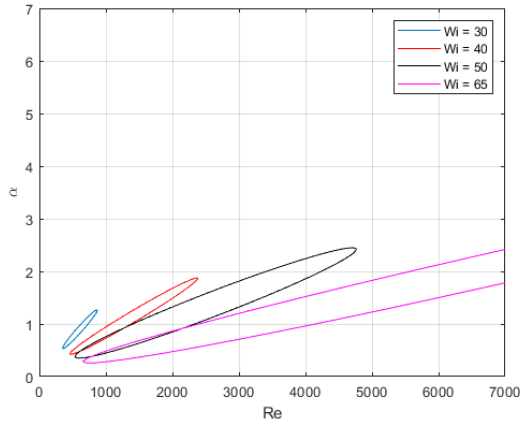
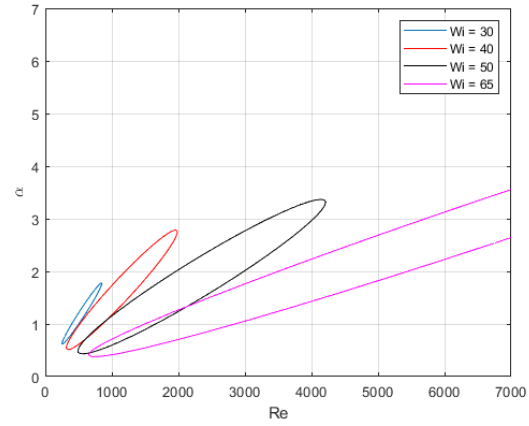


Figura 4.2.6: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , com $\beta = 0.7$.



$\beta = 0.2$.



$\beta = 0.4$.

Figura 4.2.7: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

4.2.2 Influência da contribuição do solvente β

Para verificar a influência da contribuição do solvente β , ou seja, a razão entre a viscosidade do solvente (η_s) pela viscosidade do polímero (η_p) diversas simulações numéricas foram realizadas. Nessas simulações foram considerados diferentes valores do número de Reynolds, três valores para o parâmetro de mobilidade α_G : $\alpha_G = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$, cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$ e quatro diferentes valores de Weissenberg de $Wi = 30, 40, 50, 65$. As Figuras 4.2.10 - 4.2.15 mostram os resultados obtidos para as curvas de estabilidade neutra, utilizando os parâmetros mencionados acima.

Nas Figuras 4.2.10 - 4.2.11 são apresentadas curvas de estabilidade neutra para cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$, e em cada figura fixa um Wi diferente, nesse caso, quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , mantendo-se fixo o valor de $\alpha_G = 10^{-3}$ e $N = 300$.

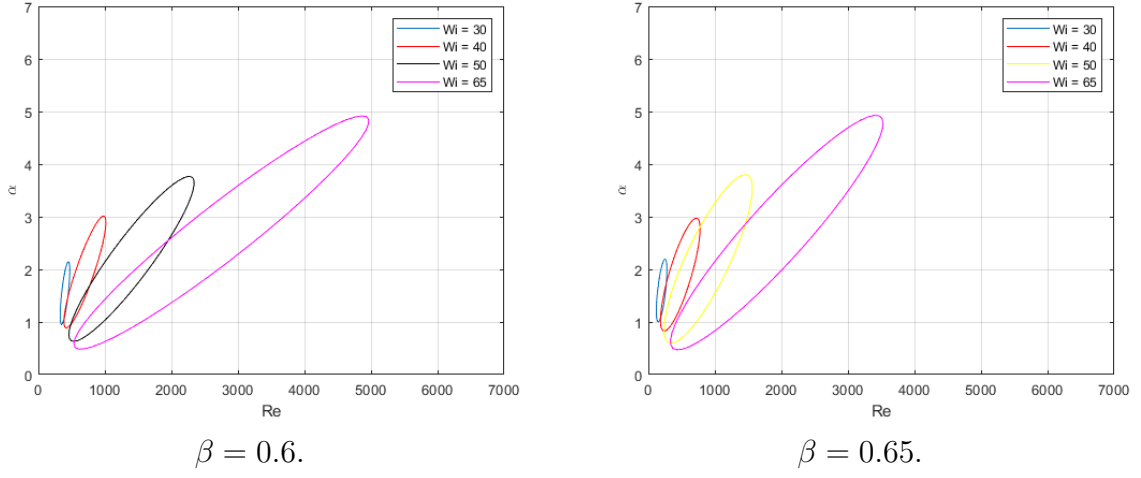


Figura 4.2.8: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 .

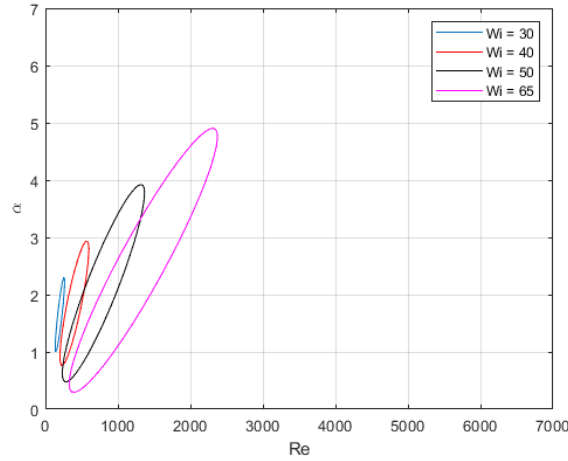
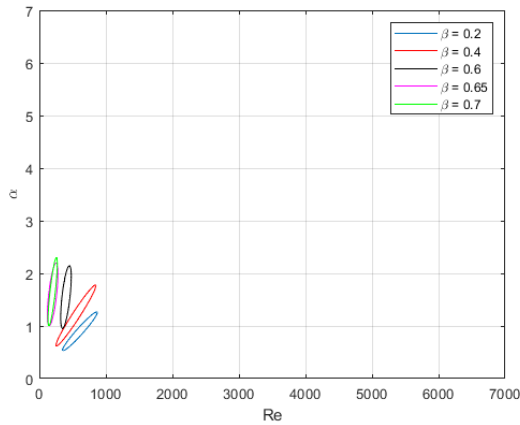
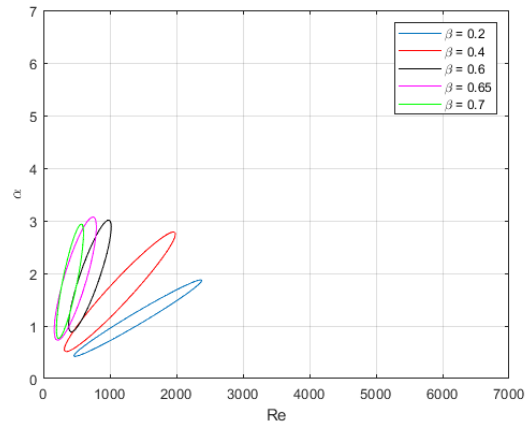
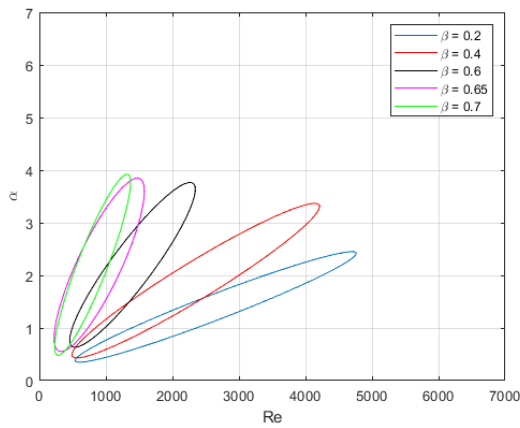
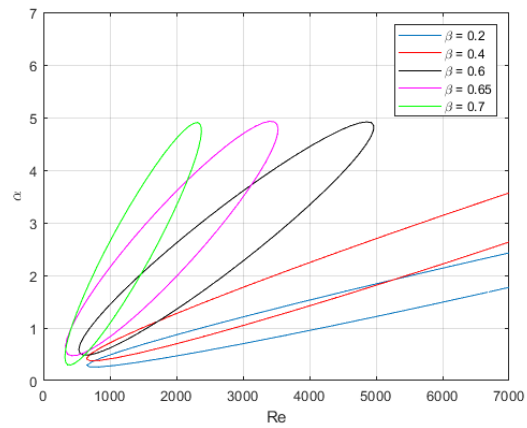


Figura 4.2.9: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , com $\beta = 0.7$.

Na Figura 4.2.10 observa-se que as curvas neutras respectivas aos valores de $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7 são bem definidas e bastante similares no formato e, por conseguinte, na região de instabilidade. No entanto, para $Wi = 30$ a região de instabilidade é menor, quando comparada com $Wi = 40$.

Seguindo o mesmo raciocínio da análise anterior, a Figura 4.2.11 apresenta as curvas de estabilidade neutra para os números de $Wi = 50$ e 65 . Na Figura 4.2.11 percebe-se que as curvas neutras são bem definidas, e conforme o número de β aumenta, mais as curvas vão ficando mais próximas, e a região de instabilidade diminui. Observa-se que para $\beta = 0.4$, a região de instabilidade é maior, comparada com os demais valores de β .

Além disso, para $Wi = 65$, verifica-se que a redução da contribuição do solvente, representada pelo parâmetro β , implica a elevação do número de Reynolds crítico necessário para o fechamento da curva neutra e, conseqüentemente, para a delimitação da região de instabilidade.

 $Wi = 30.$  $Wi = 40.$ Figura 4.2.10: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7 . $Wi = 50.$  $Wi = 65.$ Figura 4.2.11: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-3}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7 .

As Figuras 4.2.12 – 4.2.13 apresentam curvas de estabilidade neutra para cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$, e em cada figura fixa um Wi diferente, nesse caso, quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , mantendo-se fixo o valor de $\alpha_G = 10^{-2}$ e $N = 300$. Os resultados exibidos nessas figuras mostram comportamento semelhante ao observado nas Figuras 4.2.10 – 4.2.11, para os respectivos parâmetros.

Seguindo a mesma ideia, para o valor fixo de $\alpha_G = 10^{-1}$ e considerando cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65, 0.7$, e em cada figura fixa um Wi diferente, nesse caso, quatro diferentes valores de Wi : $Wi = 30, 40, 50$ e 65 , as curvas de estabilidade neutra estão apresentadas nas Figuras 4.2.14 – 4.2.15. Os resultados apresentados nessas figuras são consistentes com aqueles observados nas Figuras 4.2.10 – 4.2.13, considerando-se os respectivos conjuntos de parâmetros analisados.

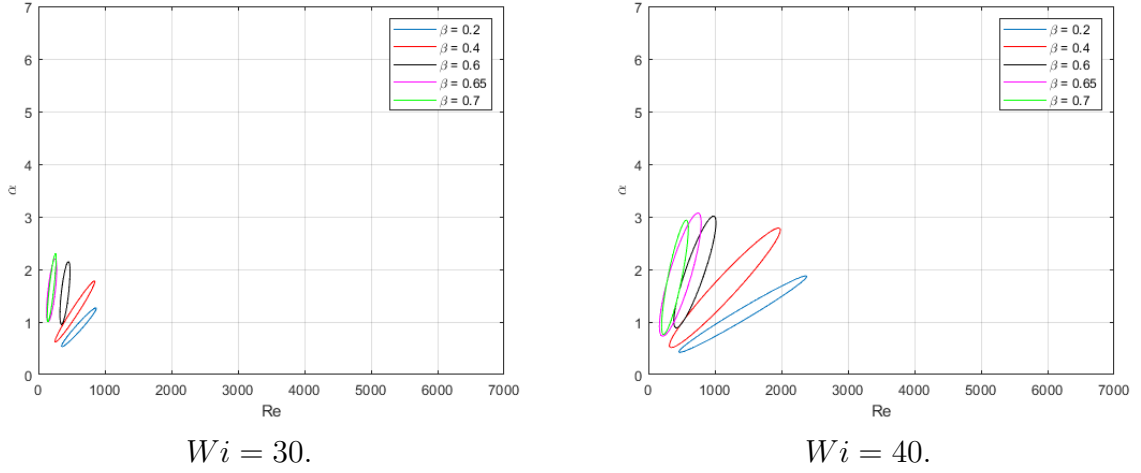


Figura 4.2.12: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7 .

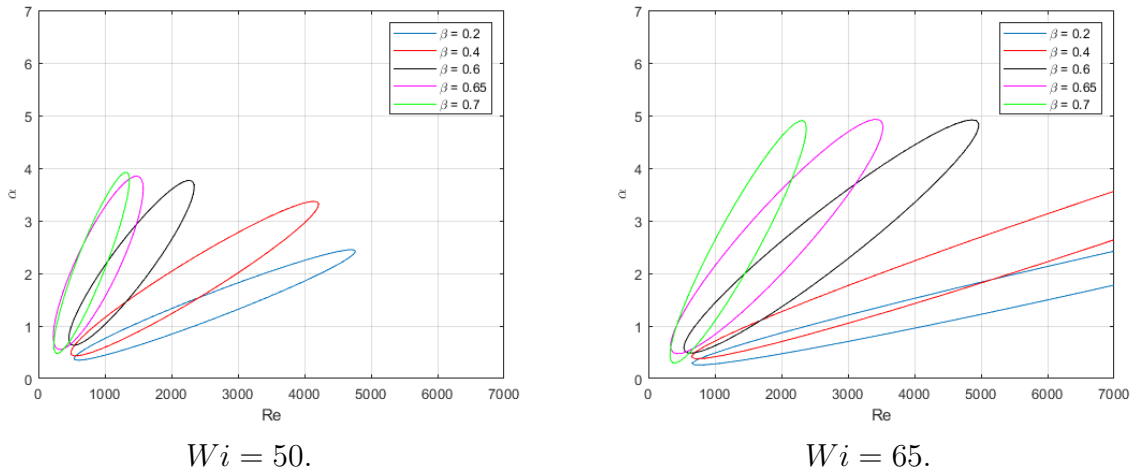
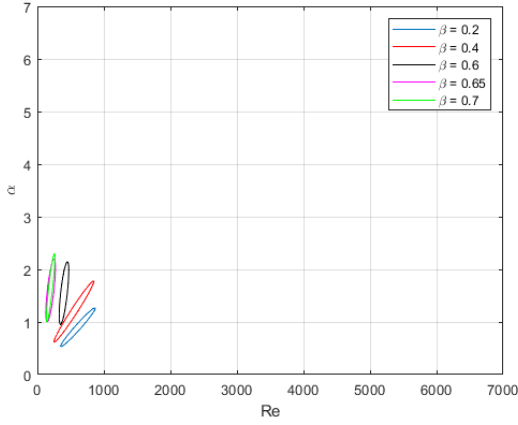
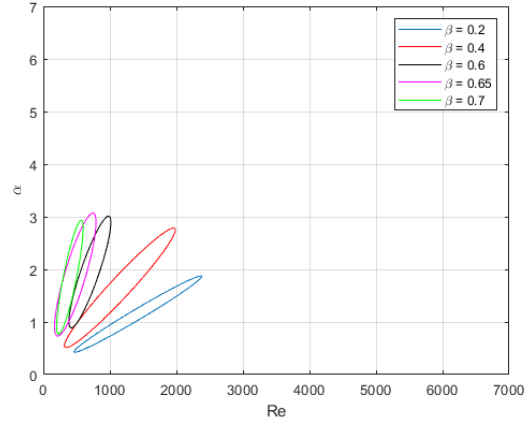
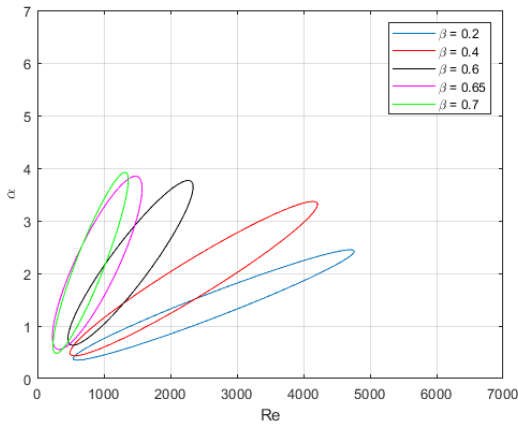
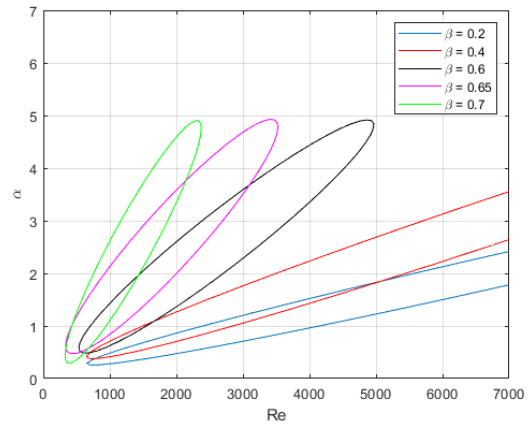


Figura 4.2.13: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-2}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7 .

Um ponto a ser destacado é que, à medida que a contribuição do solvente β diminui, torna-se necessário um valor maior do número de Reynolds crítico para o fechamento da curva e a delimitação da região de instabilidade, conforme pode ser observado nas Figuras 4.2.10–4.2.15, em concordância com os resultados apresentados em Silva [27].

4.2.3 Influência do parâmetro de mobilidade α_G

Para verificar a influência do parâmetro de mobilidade α_G na estabilidade do escoamento de Hagen-Poiseuille do fluido viscoelástico Giesekus foram realizadas simulações numéricas considerando fixos os parâmetro $N = 200$, $\beta = 0.2$ e $Wi = 30, 40$ e 50 , para cinco diferentes valores de α_G : $\alpha_G = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$. As Figuras 4.2.16 – 4.2.18 mostram os resultados obtidos para as curvas de estabilidade neutra, utilizando os parâmetros mencionados acima. As curvas neutras obtidas para o modelo Giesekus foram comparadas à curva neutra correspondente

 $Wi = 30.$  $Wi = 40.$ Figura 4.2.14: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7 . $Wi = 50.$  $Wi = 65.$ Figura 4.2.15: Comparação de curvas neutras para $\alpha_G = 10^{-1}$ e $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.65$ e 0.7 .

ao modelo Oldroyd-B, no caso $\alpha_G = 0$. A partir da análise das figuras a seguir, observa-se que os resultados apresentam semelhanças com aqueles reportados por Furlan [10].

Adicionalmente, observa-se nas Figuras 4.2.16–4.2.18 que, à medida que o valor do parâmetro α_G diminui, a curva neutra torna-se progressivamente mais larga; por outro lado, o aumento de α_G resulta no estreitamento da curva neutra, em concordância com os resultados apresentados.

Para finalizar esta seção, é importante destacar que, para valores de $\alpha_G > 10^{-1}$, não foram obtidas curvas neutras que permitissem comparação com os resultados do modelo Oldroyd-B, isto é, para $\alpha_G = 0$. Esse fato indica a existência de um limite, nas condições consideradas neste trabalho, para a obtenção de curvas neutras.

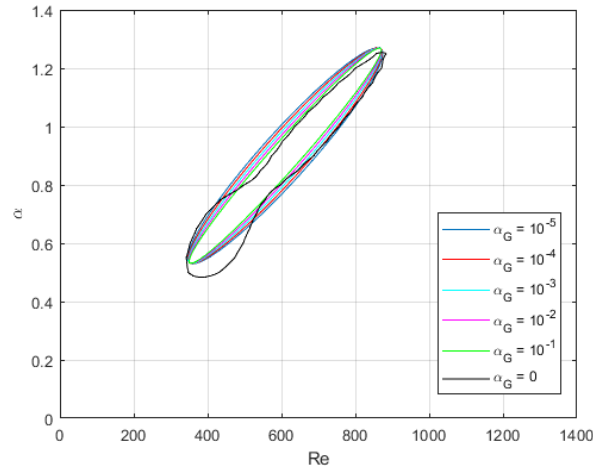


Figura 4.2.16: Curvas neutras para $\beta = 0.2$ e $Wi = 30$ fixos, e diferentes valores de α_G .

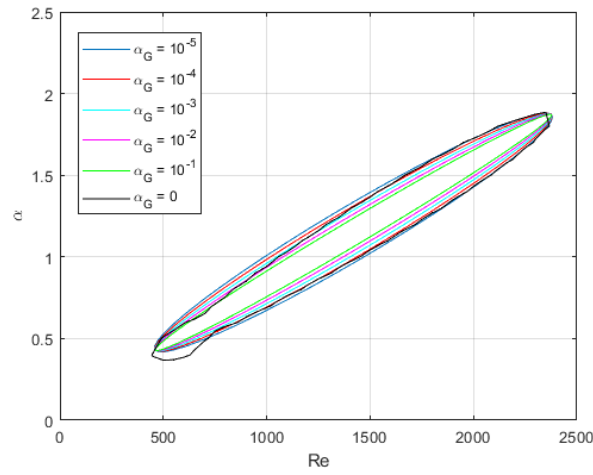


Figura 4.2.17: Curvas neutras para $\beta = 0.2$ e $Wi = 40$ fixos, e diferentes valores de α_G .

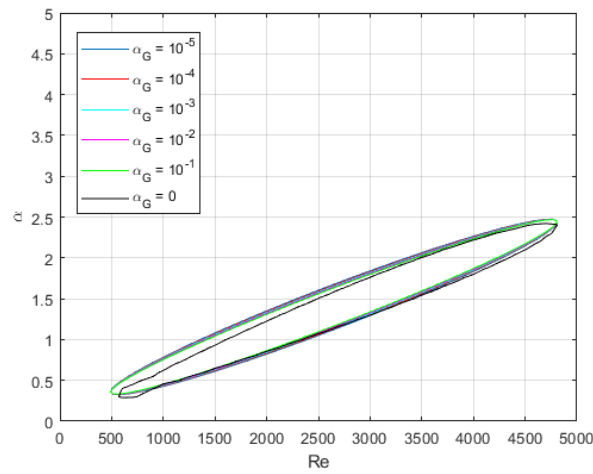


Figura 4.2.18: Curvas neutras para $\beta = 0.2$ e $Wi = 50$ fixos, e diferentes valores de α_G .

Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo investigar a estabilidade linear do escoamento de Hagen–Poiseuille para o fluido viscoelástico modelado por Giesekus, considerando a propagação de perturbações do tipo Tollmien–Schlichting. Para isso, empregou-se a Teoria de Estabilidade Linear (LST) e a formulação via tensor conformação, que se mostrou adequada pelas suas propriedades matemáticas de simetria e definição positiva. A metodologia numérica foi desenvolvida utilizando o método da matriz, de modo a resolver o problema de autovalor associado às equações lineares perturbadas.

Inicialmente, realizou-se a verificação do código LST implementado. Os resultados apresentados, tais como o espectro de autovalores obtido para o caso Newtoniano e as curvas de estabilidade neutras para o fluido Oldroyd-B ($\alpha_G = 0$), mostraram excelente concordância com trabalhos clássicos da literatura, como Schmid e Henningson [29] e Silva [27] respectivamente. Essa etapa foi essencial para confirmar a confiabilidade da implementação, permitindo avançar para o estudo do modelo Giesekus com segurança numérica.

A análise de estabilidade utilizando o modelo Giesekus evidenciou diversos comportamentos relevantes. Ao variar os parâmetros adimensionais, número de Reynolds (Re), número de Weissenberg (Wi), contribuição polimérica do solvente (β) e mobilidade α_G , foi possível gerar um conjunto abrangente de curvas neutras.

A partir disto, observa-se que o aumento de Wi tende a aproximar as curvas neutras e deslocá-las para valores maiores de Reynolds críticos, ampliando regiões instáveis especialmente para $Wi \geq 65$. A variação de β mostrou influência significativa na extensão das regiões instáveis: valores intermediários, como $\beta = 0.4$, apresentaram maior área instável, enquanto valores maiores ($\beta = 0.65$ e 0.7) resultaram em sobreposição das curvas e ligeira redução da instabilidade. O parâmetro α_G , característico do modelo Giesekus e responsável pelo comportamento shear-thinning, demonstrou impacto direto na forma e largura das curvas neutras: curvas mais largas aparecem para α_G menores, enquanto α_G maiores estreitam essas regiões, em conformidade com resultados presentes em trabalhos como Furlan [10].

No conjunto, as análises indicam que o modelo Giesekus apresenta regimes de instabilidade que dependem de maneira sensível da interação entre Wi , β e α_G , fornecendo uma visão mais completa do comportamento viscoelástico no escoamento em tubos, tema ainda pouco explorado na literatura.

Conclui-se, portanto, que o código desenvolvido é robusto e capaz de reproduzir resultados reconhecidos, além de gerar novas contribuições para o entendimento da estabilidade do fluido Giesekus. Os resultados obtidos abrem espaço para estudos futuros envolvendo análises espaciais, modos tridimensionais ($m \neq 0$), diferentes formulações constitutivas ou até mesmo investigações sobre o papel das não-linearidades na transição para a turbulência em fluidos viscoelásticos.

Referências Bibliográficas

- [1] M. A. M. Alves. *Escoamentos de Fluidos Viscoelásticos em Regime Laminar: Análise Numérica, Teórica e Experimental*. PhD thesis, Universidade do Porto, 2004.
- [2] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] E. Brasseur; M. Fyrillas; G. Georgiou; M. Crochet. The time-dependent extrudate swell problem of an Oldroyd-B fluid with slip along the wall. *Journal of Rheology*, 42:549-566, 1994.
- [4] R. B. Bird; R. C. Armstrong; O. Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids*, v. 1. Wiley-Interscience, 1987.
- [5] R. B. Bird; P. J. Dotson; N. L. Johnson. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 7:213-235, 1980.
- [6] B. L. Carreira. Aplicação da transformação núcleo-conformação na estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos. Master's thesis, FCT-UNESP, Presidente Prudente, 2020.
- [7] I. Chaudhary, P. Garg, G. Subramanian, V. Shankar. Linear instability of viscoelastic pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 908:A11, February 2021.
- [8] R. A. Figueiredo. *Simulação numérica de escoamentos viscoelásticos multifásicos complexos*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2015.
- [9] L. E. Z. Filho. *Mecânica dos fluidos*, Editora e Distribuidora Educacional S.A., Londrina, 2018.
- [10] L. J. S. Furlan. Análise de estabilidade de escoamentos do fluido viscoelástico Giesekus. Master's thesis, FCT-UNESP, Presidente Prudente, 2018.
- [11] L. J. S. Furlan. *Linear stability theory applied to three-dimensional viscoelastic fluid flows*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2022.
- [12] P. Garg, I. Chaudhary, M. Khalid, V. Shankar, G. Subramanian. Viscoelastic pipe flow is linearly unstable. *Physical Review Letters*, 121(2):024502, 2018.

- [13] D. Georgievskii. A generalized analysis of perturbation patterns for the Poiseuille flow in a tube. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 70:86–91, 07 2015.
- [14] H. Giesekus. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:69-109, 1982.
- [15] M. Gobbi, N. L. Dias. *Introdução à Mecânica dos Fluidos e aos Fenômenos de Transporte*, Universidade Federal do Paraná, 2020.
- [16] M. A. Hulsen. Some properties and analytical expressions for plane flow of Leonov and Giesekus models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 30(1):85–92, 1988.
- [17] M.A. Hulsen. A sufficient condition for a positive definite configuration tensor in differential models. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 38:93–100, 1990.
- [18] R. G. Larson. *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions*. Butterworths, 1988.
- [19] A. I. Leonov. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheologica Acta*, 15:85-98, 1976.
- [20] X. L. Luo; R. I. Tanner. A streamline element scheme for solving viscoelastic flow problems part II: Integral constitutive models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 22:61-89, 1986.
- [21] X. L. Luo; R. I. Tanner. Finite element simulation of long and short circular die extrusion experiments using integral models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25:9-22, 1988.
- [22] M. T. Mendonça, M. A. F. Medeiros . Estabilidade de Escoamentos Laminares: Teoria linear. *ABCM, Uberlândia*, 2000
- [23] J. G. Oldroyd. On the Formulation of Rheological Equations of State. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 200(1063), p. 523–541, 1950.
- [24] N. Phan-Thien; R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:353-365, 1977.
- [25] J. O. Pereira. *Estimação de parâmetros de modelos constitutivos usando reômetro multi-passe e simulação em OpenFOAM*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2019.
- [26] F. T. Pinho; M. A. Alves; P. J. Oliveira. Benchmark solutions for the flow of OldroydB and PTT fluids in planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 10:45-75, 2003.

-
- [27] R. M. P. Silva. Análise de estabilidade de escoamento em tubo do fluido Oldroyd-B. Master's thesis, FCT-UNESP, Presidente Prudente, 2024.
- [28] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 1979.
- [29] P. J. Schmid, D. S. Henningson. Optimal energy density growth in hagen–poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 277:197–225, 1994.
- [30] P. J. Schmid, D. S. Henningson. *Stability and Transition in Shear Flows*. New York: Springer, 2001.
- [31] L. F. Souza, A. C. Brandi, M. T. Mendonça. *Estabilidade de Escoamentos de Fluidos não-Newtonianos*, volume 10. ABCM, São José dos Campos, 2016.
- [32] A. J. Weideman, S. C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 26(4):465–519, 2000.
- [33] J. A. White; A. B. Metzner. Development of constitutive equations for polymeric melts and solutions. *Journal of Applied Polymer Science*, 7:1867-1889, 1963.
- [34] H. Xu; S. J. Sherwin; P. Hall; X. Wu. The behaviour of Tollmien-Schlichting waves undergoing small-scale localised distortions. *Journal of Fluid Mechanics*, 792:499–525, 2016.