



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Modelos Matemáticos em Epidemiologia

Mônica Helena Ribeiro Luiz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

2012

511.8	Luiz, Mônica Helena Ribeiro
L953m	Modelos Matemáticos em Epidemiologia/ Mônica Helena Ribeiro Luiz- Rio Claro: [s.n.], 2012. 75 f. : fig., tab. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira 1. Análise de Estabilidade. 2. Modelagem Matemática. 3. Epidemiologia. 4. Funções de Lyapunov. 5. Modelos SIS, SIR e SIRS. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Mônica Helena Ribeiro Luiz
MODELOS MATEMÁTICOS EM EPIDEMIOLOGIA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Orientadora

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
IGCE - UNESP - Rio Claro

Profa. Dra. Sidineia Barrozo
IQ - UNESP - Araraquara

Rio Claro, 30 de Novembro de 2012

*Aos meus pais, Sebastião e Maria Helena.
Ao meu marido, Paulo Sérgio.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, que me concedeu o dom da vida, minha inteligência, família e amigos.

À minha família, em especial aos meus pais, Sebastião e Maria Helena, que sempre acreditaram em meu potencial e me incentivaram em todos momentos, sem eles não teria conseguido. E também ao meu marido, Paulo Sérgio, pela compreensão e paciência nos momentos de minha ausência, pelo amor, carinho e cumplicidade.

Aos amigos que estiveram presentes e que, direta ou indiretamente, fizeram parte do desenvolvimento deste trabalho.

À Prof^a. Dr^a. Marta Cilene Gadotti por estar presente na banca de qualificação. Também à Prof^a. Dr^a. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato e à Prof^a. Dr^a Sidineia Barrozo, que se dispuseram a compor a Banca Examinadora desta dissertação.

À minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Renata Zotin Gomes de Oliveira, pela paciência e dedicação, por ter me dado oportunidade de desenvolver o conhecimento, por estar sempre disposta a me ajudar, e pela confiança em mim depositada.

Ao Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior, pelo apoio e incentivo, desde a graduação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Universitária, pelos ensinamentos.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a execução deste trabalho.

O Ensino deve permitir que brilhe, com o máximo de intensidade, a luz que cada ser humano porta dentro de si.

Paulo Freire

Resumo

Esse trabalho tem por objetivo o estudo de alguns modelos matemáticos em Epidemiologia através da análise de estabilidade de pontos de equilíbrio dos sistemas de equações diferenciais envolvidos. São estudados os modelos clássicos SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível), SIR (Suscetível - Infectado - Removido) e SIRS (Suscetível - Infectado - Removido - Suscetível). Variações desses modelos, considerando a população total não constante, são apresentadas e analisadas por meio de funções de Lyapunov e, em particular, uma variação do modelo SIR para a gripe Influenza A H1N1.

Palavras-chave: Análise de Estabilidade, Modelagem Matemática, Epidemiologia, Funções de Lyapunov, Modelos SIS, SIR e SIRS.

Abstract

This work aims to study some mathematical models in Epidemiology, through the stability analysis of equilibrium points of systems of ordinary differential equations. We analyze the classic models SIS (Susceptible - Infected - Susceptible), SIR (Susceptible - Infected - Removed) and SIRS (Susceptible - Infected - Removed - Susceptible). Variations of this models, considering that the total population is not constant, are presented and analyzed through Lyapunov's functions, in particular, a variation of SIR model to the H1N1 influenza.

Keywords: Stability Analysis, Mathematical Modeling, Epidemiology, Lyapunov Functions, SIS, SIR and SIRS Models.

Lista de Figuras

2.1	<i>Plano de fase para o Exemplo 2.1.</i>	16
2.2	<i>Plano de fase para o Exemplo 2.2.</i>	16
2.3	<i>Plano de fase para o sistema (2.4).</i>	19
2.4	<i>Plano de fase do sistema linear (2.12) e do sistema não linear (2.11).</i>	22
2.5	<i>Plano de fase do sistema linear (2.13) e do sistema não linear (2.11).</i>	22
2.6	<i>Plano de fase do sistema linear (2.15) e do sistema linear (2.16).</i>	24
2.7	<i>Plano de fase do sistema linear (2.17) e do sistema linear (2.18).</i>	25
2.8	<i>Esboço da demonstração do caso estável.</i>	27
2.9	<i>Plano de fase do sistema (2.21).</i>	28
3.1	<i>Diagrama compartimental para Caso 1 do modelo SIS.</i>	31
3.2	<i>Plano de fase para o Caso 1 do modelo SIS.</i>	33
3.3	<i>Diagrama compartimental para Caso 2 do modelo SIS.</i>	34
3.4	<i>Diagrama compartimental para Caso 3 do modelo SIS.</i>	36
3.5	<i>Diagrama compartimental para o modelo SIR.</i>	37
3.6	<i>Plano de fase SI para o modelo SIR.</i>	39
3.7	<i>Diagrama compartimental para o modelo SIRS.</i>	40
4.1	<i>Modelo compartimental SIS.</i>	45
4.2	<i>Modelo compartimental SIR.</i>	48
4.3	<i>Modelo compartimental SIRS.</i>	50
5.1	<i>Modelo compartimental SIR para Influenza A H1N1.</i>	54
A.1	<i>Plano de fase para o exemplo A.1.</i>	67
A.2	<i>Plano de fase para o exemplo A.2.</i>	68
A.3	<i>Plano de fase para o exemplo A.3.</i>	69
A.4	<i>Plano de fase para o exemplo A.4, com autovetores independentes.</i>	70
A.5	<i>Plano de fase para o exemplo A.5, com autovetores independentes.</i>	71
A.6	<i>Plano de fase para o exemplo A.6, com autovetores dependentes.</i>	72
A.7	<i>Plano de fase para o exemplo A.7, com autovetores dependentes.</i>	73
A.8	<i>Plano de fase para o A.8.</i>	74
A.9	<i>Plano de fase para o exemplo A.9.</i>	75

Os gráficos apresentados foram feitos no software WinPlot 1.0 e as demais figuras no software AutoCad 2010.

Lista de Tabelas

2.1	<i>De Boyce[2] Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Localmente Lineares, onde N: nó; NI: nó impróprio; NP: nó próprio; PE: ponto espiral; PS: ponto de sela; C: centro</i>	23
-----	---	----

Sumário

1	Introdução	12
2	Sistemas Não Lineares e Estabilidade	14
2.1	Estabilidade, Estabilidade Assintótica e Instabilidade	14
2.2	Sistemas localmente lineares	18
2.3	O Segundo Método de Lyapunov	25
3	Modelos Matemáticos em Epidemiologia	29
3.1	Modelo SIS	30
3.1.1	Caso 1: SIS com N constante (sem dinâmica vital)	31
3.1.2	Caso 2: SIS com N constante (com dinâmica vital)	33
3.1.3	Caso 3: SIS com N variável	36
3.2	Modelo SIR	36
3.3	Modelo SIRS	40
4	Variações dos Modelos Clássicos - Estabilidade via Lyapunov	44
4.1	Modelo SIS	44
4.2	Modelo SIR	47
4.3	Modelo SIRS	50
5	Um Modelo SIR para a Influenza A H1N1	53
5.1	A Influenza A H1N1	53
5.2	O Modelo	53
6	Conclusão	61
	Referências	63
A	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares	65
A.1	Autovalores Reais	67
A.1.1	Caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	67
A.1.2	Caso $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	68
A.1.3	Caso $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	68

A.1.4	Caso $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0$, com autovetores independentes	69
A.1.5	Caso $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 > 0$, com autovetores independentes	70
A.1.6	Caso $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0$, com autovetores dependentes	71
A.1.7	Caso $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, com autovetores dependentes	72
A.2	Autovalores Complexos	73
A.2.1	Caso $\lambda = a \pm bi$	73
A.2.2	Caso $\lambda = \pm bi$	74

1 Introdução

Há muito tempo, um dos problemas mais preocupantes da população em geral é o fato de doenças infecciosas se alastrarem, causando um grande número de mortes. Quando essas doenças se espalham muito rapidamente em um curto período de tempo temos uma epidemia.

A peste negra foi uma das maiores epidemias já registradas, tendo início na China e se alastrando pela Europa durante o século XIV, matando cerca de um terço da população. Ainda na Europa, outras doenças também foram registradas, como varíola, sarampo, gripe, dentre outras trazidas por estrangeiros, as quais também causaram muitas mortes.

Devido à existência dessas doenças, estudos começaram a ser realizados com o objetivo de caracterizar cada tipo de epidemia, determinar os fatores causadores e buscar formas de controle das mesmas. Uma ferramenta que auxilia esse estudo é a modelagem matemática. Esta consiste em transformar situações reais em modelos matemáticos que, após analisados, fornecem resultados que podem ser interpretados e aplicados na realidade.

A modelagem matemática em Epidemiologia é feita através do estudo de equações que descrevem a interação entre a população e o ambiente, resultando numa análise detalhada a respeito da doença. A importância desse estudo se dá ao fato de quanto mais se conhece a respeito da doença e o modo como ela se propaga, mais eficazes serão os métodos para impedir sua transmissão, e até mesmo o estudo de ações preventivas, como por exemplo, campanhas de vacinação.

Deste modo, o objetivo principal desta dissertação será a análise qualitativa de alguns modelos matemáticos epidemiológicos descritos através de equações diferenciais ordinárias.

Para isso, no capítulo 2 são definidos conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade de sistemas de equações diferenciais, assim como condições para que um sistema não linear seja considerado sistema localmente linear. Além disso, será estudado um teorema que permite analisar a estabilidade de sistemas localmente lineares através do cálculo dos autovalores do sistema linearizado. Também é apresentado o Segundo Método de Lyapunov, conhecido como método direto, que permite analisar o tipo de estabilidade do sistema em questão a partir da aplicação de um teorema.

No capítulo 3, são discutidos três modelos matemáticos clássicos em Epidemiologia: SIS, SIR e SIRS. Uma análise de estabilidade de pontos de equilíbrio desses modelos aplicando conceitos estudados no capítulo anterior será apresentada.

No capítulo 4 é estudada a estabilidade de uma variação desses modelos através de funções de Lyapunov.

Por fim, no capítulo 5, é feito um estudo de um modelo SIR para a Influenza A H1N1, baseado do trabalho de Alcaraz[1].

2 Sistemas Não Lineares e Estabilidade

Neste capítulo serão apresentados conceitos de estabilidade de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem autônomos, ou seja, sistemas cujas equações não dependem explicitamente da variável independente. Serão tratados os casos bidimensionais, pois estes permitem visualizar o comportamento das trajetórias no plano de fase; os casos de ordem n são análogos.

2.1 Estabilidade, Estabilidade Assintótica e Instabilidade

Seja o sistema bidimensional

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Suponha F e G funções contínuas, com suas derivadas parciais de primeira ordem contínuas definidas num domínio D do plano xy . Se $(x_0, y_0) \in D$ então, pelo Teorema da Existência e Unicidade¹, existe uma única solução $x = \phi_1(t)$ e $y = \phi_2(t)$ do sistema (2.1) satisfazendo as condições iniciais dadas.

Escrevendo esse sistema na forma vetorial, tem-se:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.2)$$

sendo $\mathbf{x} = (x, y)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (F(x, y), G(x, y))^T$ e $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$.

A solução do sistema pode ser escrita como $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))^T$, a qual será interpretada como um ponto se movendo no plano xy .

Uma característica importante de sistemas como esse – autônomo – é que, no plano de fase, existirá apenas uma trajetória que passa pela condição inicial \mathbf{x}_0 , ou seja, todas

¹Ver Boyce[2]

as soluções que satisfazem a condição inicial dada têm a mesma trajetória, e assim, o plano de fase permite observar qualitativamente a estabilidade do sistema.

É chamado de **ponto crítico** ou **de equilíbrio** do sistema autônomo (2.2) o ponto $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0)$ que satisfaz $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$, ou seja, $x = x_0$ e $y = y_0$ é uma solução constante desse sistema.

Definição 2.1. Um ponto crítico \mathbf{x}^0 é dito **estável** se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda solução $\mathbf{x} = \phi(t)$, que satisfaz $\|\phi(t_0) - \mathbf{x}^0\| < \delta$, existe para todo $t > 0$ e satisfaz $\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

Isso significa que toda solução que começa próxima ao ponto crítico \mathbf{x}^0 (raio δ) permanece próxima a ele (raio ϵ).

Definição 2.2. Um ponto \mathbf{x}^0 é dito **assintoticamente estável** se é estável e ainda, se existe δ_0 , $0 < \delta_0 < \delta$, tal que se uma solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ satisfaz $\|\phi(t_0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0$.

Isso significa que uma solução que começa próxima ao ponto crítico \mathbf{x}^0 , não somente permanece próxima a este ponto, como também tende a ele quando $t \rightarrow \infty$.

Definição 2.3. Um ponto crítico que não é estável é dito **instável**.

Isso significa que ao menos uma solução que começa próxima ao ponto crítico \mathbf{x}^0 se afasta do mesmo.

Exemplo 2.1. Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 1 - 3x^2 \end{cases}$$

Os pontos críticos são $P_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ e o plano de fase desse sistema é dado pela figura a seguir:

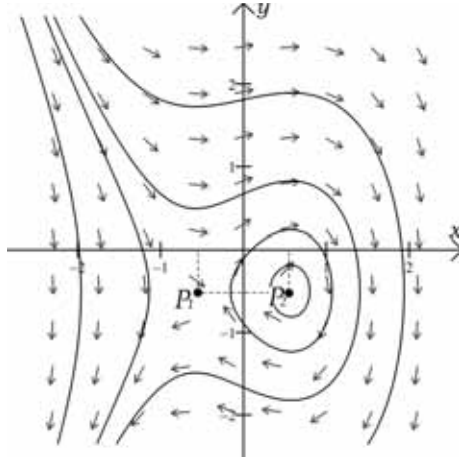


Figura 2.1: Plano de fase para o Exemplo 2.1.

É possível observar, graficamente, que o ponto $P_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ parece ser instável, já que as trajetórias que começam próxima a esse ponto se afastam dele. No entanto, o ponto $P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ parece ser estável, pois as trajetórias que começam próxima a ele, assim permanecem.

Exemplo 2.2. Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 5 \end{cases}$$

O ponto crítico é $P_1 = (-2, 1)$ e o plano de fase desse sistema é dado pela figura a seguir:

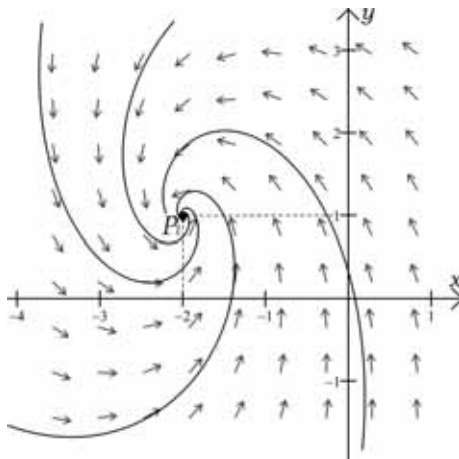


Figura 2.2: Plano de fase para o Exemplo 2.2.

Neste exemplo, o ponto $P_1 = (-2, 1)$ parece ser assintoticamente estável, já que as trajetórias que começam próxima a ele, assim permanecem, e ainda, tendem ao próprio

ponto.

O teorema a seguir caracteriza, através da natureza dos autovalores², o tipo de solução para o caso do sistema ser linear bidimensional.

Teorema 2.1. *O ponto crítico \mathbf{x}^0 do sistema linear $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $A_{2 \times 2}$, é: assintoticamente estável se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e negativos ou têm parte real negativa; estável, mas não assintoticamente estável, se os autovalores λ_1 e λ_2 são imaginários puros; instável se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.*

Demonstração. Esses resultados seguem das análises feitas no Apêndice A para os sistemas de ordem 2, e podem ser estendidos para os sistemas de ordem n de forma análoga. \square

Lema 2.1. *Seja $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ ponto crítico do sistema linear*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (2.3)$$

Dizemos que \mathbf{x}^0 :

- (a) *é assintoticamente estável se $\text{tr}(A) < 0$ e $\det(A) > 0$*
- (b) *é estável se $\text{tr}(A) = 0$ e $\det(A) > 0$*
- (c) *é instável se $\text{tr}(A) > 0$ ou $\det(A) < 0$*

onde A é a matriz de coeficientes.

Demonstração. A matriz de coeficientes do sistema (2.3) é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sendo que o traço e o determinante da matriz A são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} \\ \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Os autovalores λ associados à matriz A , são dados por:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \\ &= \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2} \end{aligned}$$

²Ver Apêndice A.

Do teorema 2.1, note que:

(a) Para ocorrer estabilidade assintótica os autovalores devem ser complexos com parte real negativa ou reais negativos.

O primeiro caso ocorre se, inicialmente, $tr(A) < 0$ e $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$, ou seja, $tr(A)^2 < 4det(A)$. E como $tr(A)^2 > 0$, então

$$0 < tr(A)^2 < 4det(A) \Rightarrow 0 < 4det(A) \Rightarrow det(A) > 0$$

Para o caso dos autovalores serem reais negativos é necessário que $tr(A) < 0$ e $det(A) > 0$, e ainda,

Se $det(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$, e nada podemos afirmar.

Se $det(A) < 0 \Rightarrow \sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)} > |tr(A)|$, e existirá $\lambda > 0$.

Logo, se $tr(A) < 0$ e $det(A) > 0$ então x^0 é assintoticamente estável.

(b) Para ocorrer estabilidade os autovalores devem ser imaginários puros, e para isso é necessário que $tr(A) = 0$ e $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$, ou seja, $det(A) > 0$.

Logo, se $tr(A) = 0$ e $det(A) > 0$ então x^0 é estável.

(c) Para ocorrer instabilidade os autovalores devem ser complexos com parte real positiva ou reais com ao menos um autovalor positivo.

No primeiro caso, inicialmente deve ocorrer $tr(A) > 0$ e $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$, ou seja, $tr(A)^2 < 4det(A)$. E como $tr(A)^2 > 0$, então

$$0 < tr(A)^2 < 4det(A) \Rightarrow 0 < 4det(A) \Rightarrow det(A) > 0$$

Para que ao menos um autovalor seja positivo, inicialmente deve ocorrer $tr(A)^2 - 4det(A) > 0$. Note que

Se $det(A) < 0$, então $\sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)} > |tr(A)|$, independente do sinal de $tr(A)$. E com isso sempre existirá ao menos um autovalor positivo.

Se $tr(A) > 0$, então $tr(A) + \sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)} > 0$, independente do sinal de $det(A)$, e assim sempre existirá um autovalor positivo, ou então autovalores complexos com parte real positiva, e novamente ocorre instabilidade.

Dessa forma, se $tr(A) > 0$ ou $det(A) < 0$ então x^0 é instável. \square

2.2 Sistemas localmente lineares

Todo o estudo feito até o momento diz respeito a pontos críticos de sistemas autônomos lineares. No entanto, quando são considerados sistemas autônomos não lineares nem sempre isso é possível, principalmente por existirem, em alguns casos, muitos pontos críticos, o que permite que o comportamento de uma solução próxima a um ponto crítico possa ser influenciada pelo fato de também estar próxima a outro ponto crítico. Por exemplo:

Exemplo 2.3. Considere o plano de fase do sistema abaixo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (2+x)(y-x) \\ \frac{dy}{dt} = (4-x)(y+x) \end{cases} \quad (2.4)$$

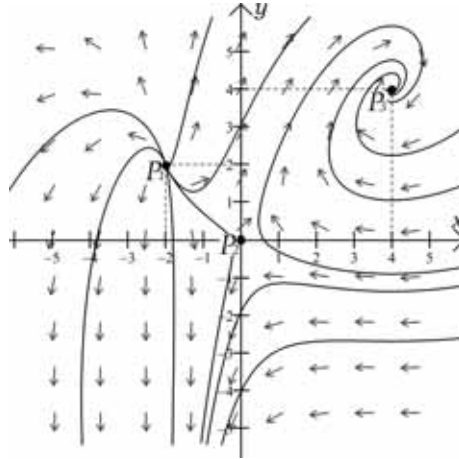


Figura 2.3: Plano de fase para o sistema (2.4).

Esse sistema possui três pontos de equilíbrio: $P_1 = (-2, 2)$, $P_2 = (0, 0)$ e $P_3 = (4, 4)$. Na figura 2.3, podemos observar o comportamento de várias trajetórias próximas aos pontos de equilíbrio. Por exemplo, se forem tomadas condições iniciais próximas de $P_2 = (0, 0)$, algumas trajetórias se aproximam do equilíbrio P_3 e outras se afastam, inclusive de P_1 .

Considere agora um sistema autônomo não linear bidimensional

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

O objetivo é analisar o comportamento das trajetórias de (2.5) próximo a um ponto de equilíbrio x^0 . Isso será feito procurando “aproximar” o sistema (2.5) por um sistema linear adequado.

Seja então

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0)$ é um ponto crítico isolado desse sistema, ou seja, existe alguma vizinhança de centro x^0 dentro da qual não há outro ponto crítico isolado do sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, ou seja, $\det A \neq 0$.

Para que o comportamento do sistema (2.6) esteja próximo do sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ deve-se ter $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ suficientemente pequeno, ou seja,

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quando} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \quad (2.7)$$

onde $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))^T$ e $\mathbf{x} = (x, y)^T$.

Disso, é possível escrever $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ e $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = \sqrt{g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)}$, e assim, a condição (2.7) é satisfeita se, e somente se:

$$\frac{g_1}{r} \rightarrow 0, \quad \frac{g_2}{r} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

Deste modo, um sistema da forma (2.6) que satisfaz as condições (2.8) é chamado **sistema localmente linear na vizinhança do ponto crítico** (x^0, y^0) .

Voltando ao sistema (2.5), é possível reescrevê-lo na forma escalar:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

Reescrevendo F e G como um polinômio de Taylor de ordem 1 na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0)$, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x^0, y^0) + F_x(x^0, y^0)(x - x^0) + F_y(x^0, y^0)(y - y^0) + \eta_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x^0, y^0) + G_x(x^0, y^0)(x - x^0) + G_y(x^0, y^0)(y - y^0) + \eta_2(x, y) \end{cases}$$

onde:

$$\frac{\eta_1(x, y)}{\sqrt{(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$$

$$\frac{\eta_2(x, y)}{\sqrt{(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$$

Note que:

$$F(x^0, y^0) = 0 = G(x^0, y^0),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^0)}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^0)}{dt}$$

Com isso, o sistema (2.9) pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x^0, y^0) & F_y(x^0, y^0) \\ G_x(x^0, y^0) & G_y(x^0, y^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Em notação vetorial, tem-se:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{d\mathbf{x}} \mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$$

onde $\mathbf{u} = (x - x^0, y - y^0)^T$ e $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T$.

Se F e G tiverem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, essa aproximação de Taylor é válida e, conseqüentemente, o sistema será localmente linear, já que $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \mathbf{0}$.

Logo, o sistema (2.9) é localmente linear na vizinhança do ponto $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0)$ se F e G forem de classe C^2 . E ainda, o sistema que aproxima o sistema não linear (2.9) na vizinhança de \mathbf{x}^0 é dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x^0, y^0) & F_y(x^0, y^0) \\ G_x(x^0, y^0) & G_y(x^0, y^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

onde $u = (x - x^0)$ e $v = (y - y^0)$.

Observação: A matriz de coeficientes em (2.10) é a **Matriz Jacobiana** de F e G em relação a x e y , calculada no ponto crítico \mathbf{x}^0 .

Exemplo 2.4. Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - y \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Tem-se $F(x, y) = 1 - y$ e $G(x, y) = x^2 - y^2$ de classe C^1 , já que são funções polinomiais. Logo, o sistema é localmente linear, e assim é possível determinar os sistemas lineares que aproximam esse sistema não linear na vizinhança de cada ponto crítico.

Os pontos críticos são $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (-1, 1)$, e a matriz jacobiana é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Com esses dados, é possível encontrar os sistemas desejados.

No ponto $P_1 = (1, 1)$, o sistema linear correspondente é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Cujos autovalores são $\lambda = -1 \pm i$. Portanto, o ponto crítico P_1 é um ponto espiral assintoticamente estável desse sistema linear. Veja os planos de fase a seguir:

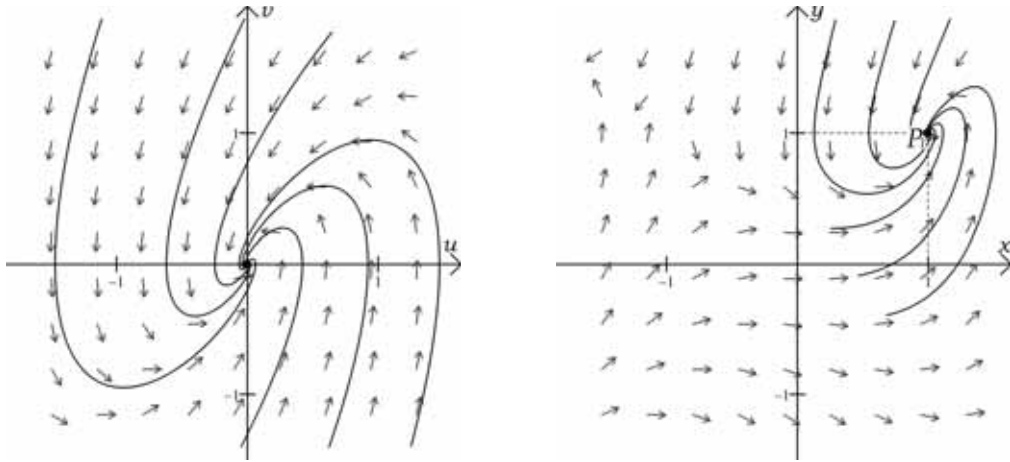


Figura 2.4: Plano de fase do sistema linear (2.12) e do sistema não linear (2.11).

No ponto $P_2 = (-1, 1)$, o sistema linear associado é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Os autovalores são $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$ e portanto, o ponto crítico P_2 é um ponto de sela (instável) desse sistema linear. Veja seu plano de fase a seguir:

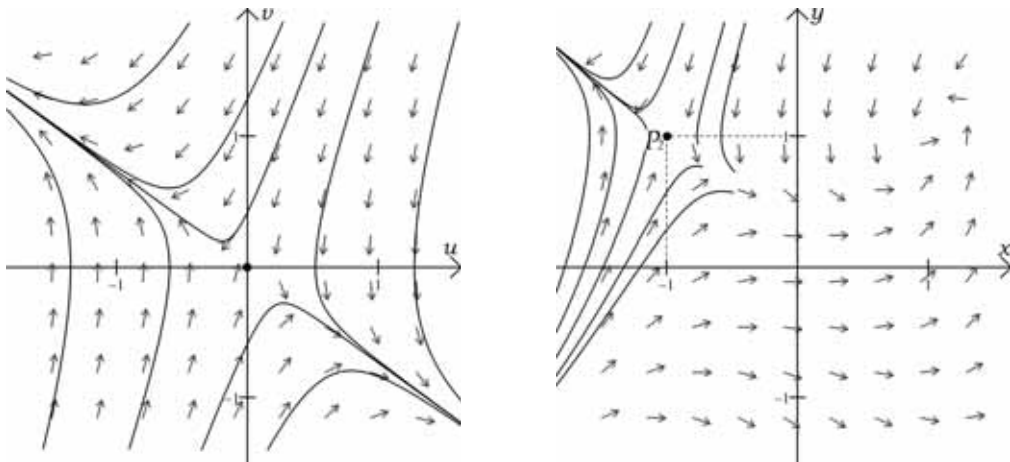


Figura 2.5: Plano de fase do sistema linear (2.13) e do sistema não linear (2.11).

Nesses dois exemplos parece que as trajetórias de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ são boas aproximações do sistema não linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ na vizinhança do ponto crítico \mathbf{x}^0 . Entretanto, não é possível afirmar isso em todos os casos. Veja a seguir um teorema que estabelece o tipo de estabilidade de um ponto crítico de um sistema não linear a partir do sistema linear correspondente.

Observação: A partir de agora será considerado o ponto crítico $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$. Isso será feito para facilitar os cálculos, mas não há perda de generalidade, pois se $\mathbf{x}^0 \neq (0, 0)$, é possível fazer uma mudança de variáveis $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$, e \mathbf{u} satisfaz um sistema cujo ponto crítico é a origem.

Teorema 2.2. *Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores do sistema linear $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ correspondente ao sistema localmente linear $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Então o tipo de estabilidade do ponto crítico $(0,0)$ do sistema localmente linear $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ são como descritos na tabela abaixo.*

λ_1, λ_2	Sistema Linear		Sistema Localmente Linear	
	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	N	Assintoticamente Estável	N	Assintoticamente Estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	PS	Instável	PS	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	NP ou NI	Assintoticamente Estável	N ou PE	Assintoticamente Estável
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$				
$a > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$a < 0$	PE	Assintoticamente Estável	PE	Assintoticamente Estável
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

Tabela 2.1: De Boyce[2] *Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Localmente Lineares*, onde N: nó; NI: nó impróprio; NP: nó próprio; PE: ponto espiral; PS: ponto de sela; C: centro

Demonstração. Ver Boyce[2] e Bessa[3]. □

Sabe-se que os autovalores de um sistema, os quais são determinados pela matriz de coeficientes, dizem muito a respeito do ponto crítico e de sua estabilidade num sistema linear. Entretanto, é possível que pequenas perturbações em alguns desses coeficientes alterem significativamente as características desse sistema. Da tabela 2.1 podemos observar que essas alterações ocorrem quando os autovalores são imaginários puros e quando são iguais. Analisemos esses casos.

Quando os autovalores são imaginários puros, $\lambda = \pm bi$, o ponto crítico é um centro estável, e a matriz de coeficientes é da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

É possível perceber que se for feita uma perturbação em algum elemento dessa matriz o sistema passa a ter autovalores complexos e, conseqüentemente, o ponto crítico pode continuar a ser um centro ou passar a ser um ponto espiral, e com isso, a estabilidade fica indeterminada. Por exemplo:

Exemplo 2.5. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.15)$$

O ponto crítico é $(0, 0)$ e os autovalores são $\lambda = \pm 2i$, ou seja, o ponto crítico é um centro estável.

Se uma perturbação for feita nos campos onde o coeficiente da matriz (2.14) é zero, o sistema (2.15) pode ser, por exemplo,

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.16)$$

Neste caso, os novos autovalores são $\lambda = 1 \pm 2i$, ou seja, o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto espiral instável. Por este motivo, nada se pode afirmar a respeito desse ponto nem de sua estabilidade para o sistema linear (2.15).

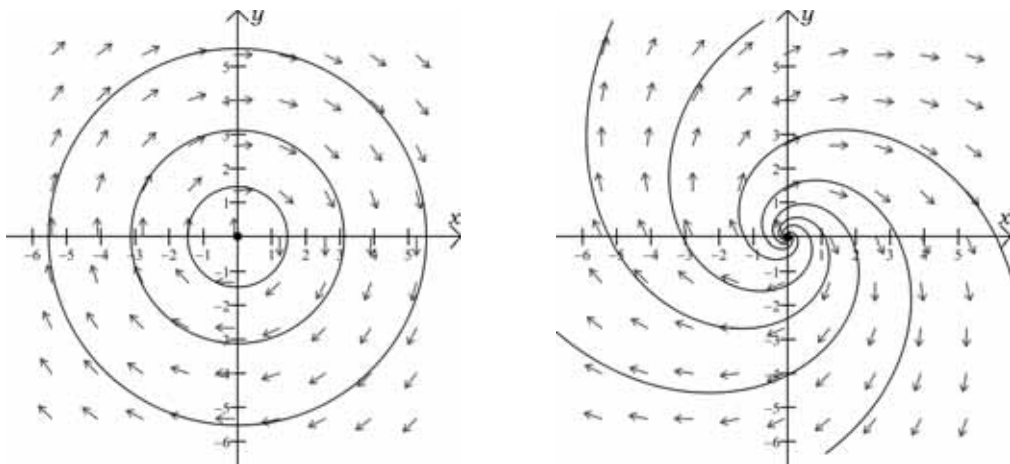


Figura 2.6: Plano de fase do sistema linear (2.15) e do sistema linear (2.16).

Agora, quando os autovalores são iguais, isto é, o ponto crítico é um nó, se houver uma perturbação em qualquer um dos elementos, os autovalores podem deixar de ser iguais. Se eles forem diferentes, mas ainda forem reais, então o ponto crítico continua sendo um nó, contudo, se eles forem diferentes complexos, então tem-se um ponto espiral. Com relação à estabilidade, neste caso, não há alterações. Por exemplo:

Exemplo 2.6. Considere o sistema:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.17)$$

O ponto crítico é $(0, 0)$ e os autovalores são iguais, $\lambda = -2$, ou seja, o ponto crítico é um nó assintoticamente estável.

Se uma perturbação for feita nos campos onde o coeficiente da matriz do sistema (2.17) é zero, esse sistema pode ser, por exemplo,

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.18)$$

Neste caso, os novos autovalores são $\lambda = -2 \pm i$, ou seja, o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto espiral assintoticamente estável. Portanto, novamente nada se pode afirmar a respeito desse ponto no sistema linear (2.17).

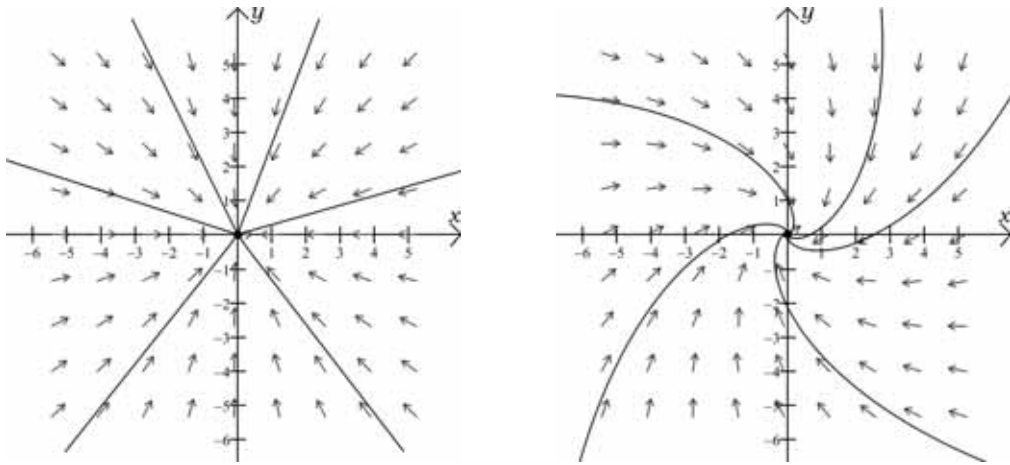


Figura 2.7: Plano de fase do sistema linear (2.17) e do sistema linear (2.18).

Nos demais casos as perturbações não influenciam no comportamento das trajetórias do sistema.

Para esses casos, em que as características dos pontos críticos são indeterminadas para o sistema localmente linear, é necessário o uso de outras técnicas para se decidir o tipo de estabilidade. O método a seguir pode ser útil nessa etapa.

2.3 O Segundo Método de Lyapunov

Considere o sistema autônomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (2.19)$$

A principal ideia presente no método de Lyapunov, é determinar como certas funções a valores reais variam ao longo das soluções de $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Assim, seguem algumas definições.

Definição 2.4. *Seja uma função V definida num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, com valores em \mathbb{R} . A função V é dita definida positiva (negativa) em D se $V(0,0) = 0$ e $V(x,y) > 0$ ($V(x,y) < 0$) em todos os outros pontos de D .*

Definição 2.5. *Seja uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D \subset \mathbb{R}^2$. A função V é dita semidefinida positiva (negativa) em D se $V(0,0) = 0$ e $V(x,y) \geq 0$ ($V(x,y) \leq 0$) em todos os outros pontos de D .*

Considere \dot{V} a taxa de variação dessa função V ao longo da trajetória do sistema (2.19), sendo:

$$\dot{V}(x,y) = V_x(x,y) \frac{dx}{dt} + V_y(x,y) \frac{dy}{dt} \quad (2.20)$$

Se $\mathbf{x} = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ é uma solução de (2.19), então:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(\phi_1(t), \phi_2(t)) &= V_x(\phi_1(t), \phi_2(t)) \frac{d\phi_1(t)}{dt} + V_y(\phi_1(t), \phi_2(t)) \frac{d\phi_2(t)}{dt} \\ &= V_x(\phi_1(t), \phi_2(t)) F(\phi_1(t), \phi_2(t)) + V_y(\phi_1(t), \phi_2(t)) G(\phi_1(t), \phi_2(t)) \\ &= \dot{V}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \end{aligned}$$

Definição 2.6. *Seja V uma função continuamente diferenciável definida num domínio D . Então V é uma **função de Lyapunov** se:*

1. $V(0,0) = 0$
2. $V(x,y)$ é definida positiva
3. V satisfaz uma das seguintes condições:

- (a) $\dot{V}(x,y)$ é semidefinida negativa
- (b) $\dot{V}(x,y)$ é definida negativa
- (c) $\dot{V}(x,y)$ é definida positiva

Teorema 2.3. Segundo Método de Lyapunov: *Considere o sistema autônomo (2.19) e $\mathbf{x}^0 = (0,0)$ ponto crítico desse sistema. Se existe uma função de Lyapunov V satisfazendo uma das condições (a), (b) ou (c) da definição (2.6), então o ponto crítico \mathbf{x}^0 será, respectivamente, (a) estável, (b) assintoticamente estável ou (c) instável.*

Demonstração. Caso (a).

Ideia geométrica:

Considere $V(x,y) = c$ uma curva fechada no plano xy , e também uma trajetória $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$ de (2.19).

Seja $(\phi_1(t_1), \phi_2(t_1)) = (x_1, y_1)$ um ponto de intersecção dessa trajetória com a curva fechada $V(x,y) = c$. Nesse ponto, $\phi'_1(t_1) = F(x_1, y_1)$ e $\phi'_2(t_1) = G(x_1, y_1)$. Logo, de (2.20), é possível escrever:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, y_1) &= V_x(x_1, y_1) \phi'_1(t_1) + V_y(x_1, y_1) \phi'_2(t_1) \\ &= (V_x(x_1, y_1), V_y(x_1, y_1)) \cdot (\phi'_1(t_1), \phi'_2(t_1)) \\ &= \nabla V(x_1, y_1) \cdot T(t_1) \end{aligned}$$

que é o produto escalar entre o vetor gradiente $\nabla V(x_1, y_1)$ e o vetor tangente $T(t_1)$ à trajetória $(\phi_1(t), \phi_2(t))$.

Com relação ao vetor gradiente ∇V , sabe-se que é normal à curva $V(x, y) = c$ e que aponta na direção do crescimento da curva. Logo, aponta para fora, pois V aumenta quando se afasta da origem. Quanto ao vetor tangente T , sabe-se que é tangente à trajetória $x = \phi_1(x, y)$, $y = \phi_2(x, y)$ (Veja figura 2.8).

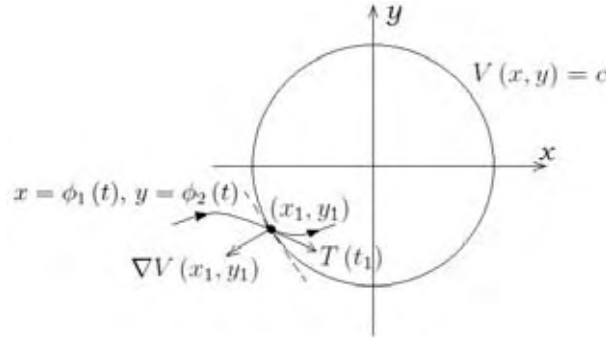


Figura 2.8: Esboço da demonstração do caso estável.

Como, por hipótese, \dot{V} é semidefinida negativa, isto é, $\dot{V}(0, 0) = 0$ e $\dot{V}(x, y) \leq 0$, tem-se que, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, então o produto escalar (2.19) é menor ou igual a zero e, conseqüentemente, o ângulo entre os vetores ∇V e T está entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, já que $\nabla V \cdot T = \|\nabla V\| \|T\| \cos\theta \leq 0$, onde θ é o ângulo entre ∇V e T . Por este motivo, as trajetórias movimentam-se para dentro da curva fechada $V(x, y) = c$, e lá permanecem.

Formalmente:

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que a vizinhança da origem seja de pontos $\mathbf{x} \in D$, tais que $\|\mathbf{x}\| \leq \epsilon$. Seja m o menor valor de V na fronteira $\|\mathbf{x}\| = \epsilon$ dessa vizinhança. Como V é definida positiva e $\|\mathbf{x}\| = \epsilon$ é fechado e limitado, segue que $m > 0$. Agora, tome δ , com $0 < \delta \leq \epsilon$, tal que $V(\mathbf{x}) < m$ para $\|\mathbf{x}\| \leq \delta$. Segue que δ sempre existe porque V é contínua, com $V(\mathbf{0}) = 0$. Se $\|\mathbf{x}^0\| \leq \delta$, então a solução $\mathbf{x}(t)$ de $\|\dot{\mathbf{x}}\| = f(\mathbf{x})$ com $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ satisfaz $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \epsilon$ para $t \geq 0$, desde que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0$ implica em $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}^0)$ para $t \geq 0$. Isso prova que a origem é estável.

A demonstração de (c) é análoga, assim como a de (b) segue da mesma maneira, acrescentando o fato de que as trajetórias que começam suficientemente próximas à origem tendem a ela, logo a origem é um ponto crítico assintoticamente estável. \square

Com esse teorema, é possível estudar as características de um ponto crítico com relação à sua estabilidade, porém, nem sempre é fácil encontrar uma função de Lyapunov adequada. Uma solução em alguns casos, é recorrer ao seguinte teorema.

Teorema 2.4. A função $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ é:

- (a) definida positiva se, e somente se, $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$
- (b) definida negativa se, e somente se, $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$

Demonstração. Ver Boyce[2] e Bessa[3]. □

Exemplo 2.7. Será mostrado que a origem é um ponto instável do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^3 - y^3 \\ \frac{dy}{dt} = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{cases} \quad (2.21)$$

Considere a função de Lyapunov $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

Então:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= V_x F(x, y) + V_y G(x, y) \\ &= (2ax + by)(x^3 - y^3) + (bx + 2cy)(2xy^2 + 4x^2y + 2y^3) \\ &= a(2x^4) + b(5x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 - y^4) + c(8x^2y^2 + 4y^4) + (2c - a)(2xy^3) \end{aligned}$$

Note que, tomando $b = 0$ e $2c - a = 0$, o sinal de \dot{V} depende apenas de a e c , e pelo Teorema 2.4, é necessário ter $a > 0$ para que V seja definida positiva. Deste modo, considere $a, c > 0$ e $a = 2c$. Assim, a função \dot{V} também é definida positiva, e conseqüentemente, pelo Teorema de Lyapunov 2.3, a origem é um ponto instável desse sistema. Veja seu plano de fase na figura a seguir:

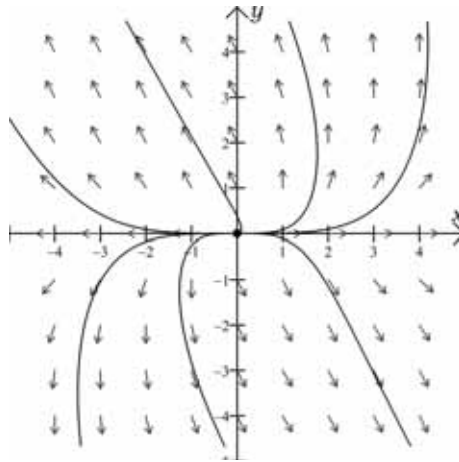


Figura 2.9: Plano de fase do sistema (2.21).

Após a apresentação de teoremas que determinam o tipo de estabilidade de um ponto crítico de um sistema autônomo, estudaremos, no próximo capítulo, três modelos matemáticos clássicos em Epidemiologia: modelo SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível), modelo SIR (Suscetível - Infectado - Recuperado) e modelo SIRS (Suscetível - Infectado - Recuperado - Suscetível).

3 Modelos Matemáticos em Epidemiologia

Um dos primeiros estudos que se tem conhecimento acerca de doenças epidemiológicas foi feito por Daniel Bernoulli, em 1790, que teve como objetivo estudar a transmissão da varíola. Após esse início, juntamente com um estudo mais aprofundado na área de medicina, outros casos puderam ser analisados com mais detalhes.

Hamer, em 1906, analisou casos nos quais a taxa de transmissão da doença ocorria por meio de contato entre indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados, conhecido como Lei de Ação das Massas. Na mesma época, Ronald Ross fez um estudo sobre a malária, para mostrar que sua transmissão se dava pela picada de um mosquito contaminado, e mais adiante, em 1908, elaborou um modelo matemático mais detalhado para o estudo de tal doença. Contudo, um dos modelos de maior relevância e que mais influenciaram no desenvolvimento de modelos matemáticos foi o modelo SIR (Suscetível - Infectado - Recuperado), estudado por Kermack e McKendrick, em 1927, os quais concluíram que um número pequeno de indivíduos infectados, mesmo em contato com indivíduos suscetíveis, não geram uma epidemia.

A partir daí, diversos outros modelos matemáticos em Epidemiologia passaram a ser estudados, os chamados modelos compartimentais. Recebem esse nome devido ao fato da população ser dividida em compartimentos (ou classes), que indicam em qual estado se encontra o indivíduo. Como exemplo, podem ser citadas as classes:

- Imunidade Passiva (M): indivíduos que nascem imunes, pois receberam anticorpos pela mãe;
- Transmissão Vertical (T): indivíduos que já nasceram com a doença, adquirindo-a através da mãe infectada;
- Suscetíveis (S): indivíduos sadios que estão suscetíveis a contrair a doença;
- Infectados (I): indivíduos que contraíram a doença e podem transmiti-la aos indivíduos suscetíveis por transmissão direta;
- Portadores (P): indivíduos portadores da doença que estão em período latente, isto é, foram infectados, mas ainda não transmitem a doença;

- Removidos (R): indivíduos que foram infectados, mas não são mais portadores da doença, por motivo de isolamento, cura (adquirindo ou não imunidade) ou morte.

Assim, pode-se escrever a população total N como a soma dos indivíduos das classes acima citadas, ou seja, $N = M + T + S + I + P + R$.

Em geral, o estudo de modelos matemáticos tem como objetivo principal analisar a taxa da força de infecção e a taxa de reprodutibilidade basal. A força de infecção é a taxa de propagação da doença, e determina a dimensão da transmissão. Esta depende apenas do número de indivíduos infectados.

Já a taxa de reprodutibilidade basal é o número de infecções causadas em indivíduos suscetíveis a partir de uma primeira infecção, e está relacionado ao crescimento ou decréscimo da epidemia.

As doenças infecciosas podem ocorrer por transmissão indireta ou transmissão direta. A primeira é aquela que depende de um vetor transmissor infectado, como por exemplo, um mosquito. Já a transmissão direta se dá por meio do contato físico ou proximidade entre indivíduos sadios e indivíduos infectados. Essa relação é baseada na Lei da Ação das Massas, princípio estudado em cinética química que afirma que *a velocidade de uma reação é diretamente proporcional às concentrações dos reagentes*, ou seja, desde que uma partícula se movimenta, ela tem a mesma chance de encontrar com as demais. A aplicação dessa Lei à modelagem matemática é que, como a transmissão ocorre com o encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados, a variação de indivíduos suscetíveis é proporcional ao número de indivíduos infectados.

Nesse capítulo, serão consideradas as doenças de transmissão direta, com nascimento de indivíduos sadios e suscetíveis ($T = 0$ e $M = 0$) e um período latente muito curto, podendo ser desprezado ($P = 0$). Do mesmo modo que, em alguns modelos não ocorrerá nenhuma forma de isolamento ($R = 0$).

3.1 Modelo SIS

O modelo SIS é utilizado para descrever doenças nas quais os indivíduos suscetíveis a adquirem, tornando-se infectados e, após a recuperação, não adquirem imunidade, tornando-se suscetíveis novamente. Neste caso não há período latente nem isolamentos.

As condições iniciais são:

$$\begin{aligned} I(0) &= I_0, \\ S(0) &= S_0 \end{aligned}$$

Serão estudados três casos de modelos SIS, os quais seguem.

3.1.1 Caso 1: SIS com N constante (sem dinâmica vital)

Neste caso, a população total N é constante e não há dinâmica vital, isto é, na população estudada não são considerados nascimentos nem mortes.

Seja α a taxa de transmissão da doença. Como essa transmissão se dá com o encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados, então a variação de indivíduos suscetíveis em relação ao tempo pode ser modelada por αSI . Seja β a taxa de recuperação da doença. Considere a variação dos indivíduos infectados com relação ao tempo proporcional ao próprio número de indivíduos infectados, então o retorno à classe de suscetíveis será modelado por βI . Com isso, neste caso o modelo SIS pode ser representado pelo diagrama a seguir:

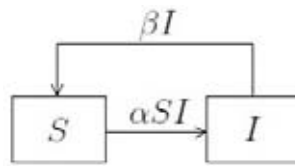


Figura 3.1: Diagrama compartimental para Caso 1 do modelo SIS.

Note que, uma fração dos indivíduos suscetíveis, por meio do contato com os indivíduos infectados, adquirem a doença e passam para a classe de infectados. Do mesmo modo, os indivíduos infectados, ao se recuperarem, não adquirem imunidade e retornam à classe de suscetíveis.

Com isso, a dinâmica de uma doença com essas características pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $\alpha, \beta > 0$ e $N = S + I$.

Então:

$$F(S, I) = -\alpha SI + \beta I$$

$$G(S, I) = \alpha SI - \beta I$$

Os pontos de equilíbrio, encontrados fazendo $F(S, I) = 0 = G(S, I)$, são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (N, 0) \\ P_2 &= \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Observe que, como a população total N é constante, os pontos P_1 e P_2 estão sobre a reta $S + I = N$.

A análise de estabilidade desses pontos será feita através das características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema localmente linear, conforme

resultados apresentados no capítulo anterior. Para isso, é preciso determinar a matriz jacobiana, a qual segue:

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S + \beta \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (N, 0)$

O sistema localmente linear que aproxima o sistema (3.1) na vizinhança do ponto $(N, 0)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N + \beta \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cujas matriz de coeficientes é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N + \beta \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \alpha N - \beta, \\ \det(A) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, como os coeficientes são valores positivos, e a população total N é suficientemente grande, segue que $\text{tr}(A) > 0$, e pelo lema 2.1 e Teorema 2.2, o ponto $P_1 = (N, 0)$ é instável.

- $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$

O sistema localmente linear que aproxima o sistema (3.1) na vizinhança do ponto $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta & 0 \\ \alpha N - \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cujas matriz de coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta & 0 \\ \alpha N - \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

O traço e determinante são dados por:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= -\alpha N + \beta < 0 \\ \det(A) &= 0 \end{aligned}$$

Com isso, através do lema 2.1, nada se pode afirmar a respeito do ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Então, será feito um estudo de $\frac{dI}{dt}$.

Como N é constante, e $N = S(t) + I(t)$, segue que $S = N - I$.

Resolvendo $\frac{dI}{dt}$, segue:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I \\ &= \alpha(N - I)I - \beta I \\ &= \alpha I \left[\left(N - \frac{\beta}{\alpha} \right) - I \right]\end{aligned}$$

Usando separação de variáveis, obtém-se:

$$I = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha + \left[(\alpha N - \beta) \frac{1}{I_0} - \alpha \right] e^{-(\alpha N - \beta)t}}$$

Então, quando $t \rightarrow \infty$, $I \rightarrow N - \frac{\beta}{\alpha}$. E conseqüentemente, $S \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$. Logo, o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha} \right)$ é assintoticamente estável.

Do sistema (3.1) segue que se $S > \frac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$ então $\frac{dI}{dt} > 0$ e $\frac{dS}{dt} < 0$. Assim, o ponto (S, I) se aproxima de $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha} \right)$ sobre a reta $S + I = N$. Do mesmo modo que se $S < \frac{\beta}{\alpha}$, com $I \neq 0$, então $\frac{dI}{dt} < 0$ e $\frac{dS}{dt} > 0$. E novamente o ponto (S, I) se aproxima de $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha} \right)$ sobre a reta $S + I = N$. Veja a figura a seguir:

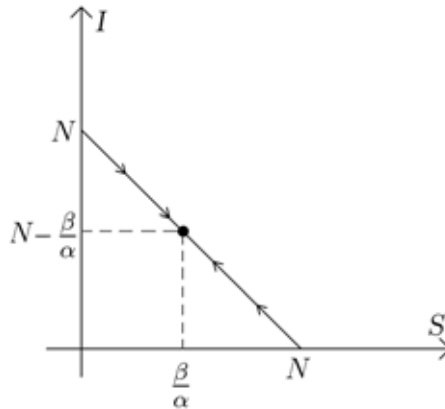


Figura 3.2: Plano de fase para o Caso 1 do modelo SIS.

3.1.2 Caso 2: SIS com N constante (com dinâmica vital)

Neste caso há dinâmica vital, isto é, na população considerada há nascimentos e mortes, contudo, como a população total N é constante, considera-se que o número de nascimentos é igual ao número de mortes, e ainda, que os nascimentos são de indivíduos sadios.

Seja γ a taxa de natalidade, que é igual à taxa de mortalidade. Então, o modelo SIS neste caso pode ser representado pelo diagrama a seguir:

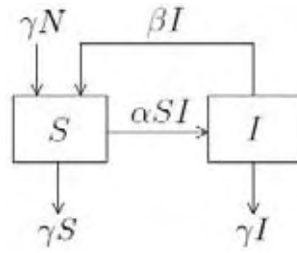


Figura 3.3: Diagrama compartimental para Caso 2 do modelo SIS.

Note que a saída de indivíduos da classe de suscetíveis ocorre por morte ou por aquisição da doença, passando para a classe de infectados. Ainda na classe de suscetíveis, a entrada de indivíduos ocorre com os nascimentos (que são proporcionais à população total), assim como os indivíduos que eram infectados e se recuperaram, não adquirindo imunidade. O sistema de equações diferenciais que descreve esse modelo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \gamma I \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $N = S + I$.

Como $N = S + I$, então

$$\begin{aligned} F(S, I) &= -\alpha SI + \beta I + \gamma I \\ G(S, I) &= \alpha SI - \beta I - \gamma I. \end{aligned}$$

Fazendo $F(S, I) = 0 = G(S, I)$, os pontos de equilíbrio obtidos são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (N, 0) \\ P_2 &= \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Note que, novamente os pontos P_1 e P_2 estão sobre a reta $S + I = N$, pois N é constante.

A análise de estabilidade desses pontos também será feita através das características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linearizado. A matriz jacobiana é dada por

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S + \beta + \gamma \\ \alpha I & \alpha S - \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (N, 0)$

O sistema linear que aproxima o sistema (3.2) na vizinhança do ponto $(N, 0)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N + \beta + \gamma \\ 0 & \alpha N - \beta - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N + \beta + \gamma \\ 0 & \alpha N - \beta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Logo o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \alpha N - \beta - \gamma > 0 \\ \det(A) &= 0, \end{aligned}$$

e pelo lema 2.1 e teorema 2.2, o ponto $P_1 = (N, 0)$ é instável.

- $P_2 = \left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$.

O sistema linear que aproxima o sistema (3.2) na vizinhança do ponto $\left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta + \gamma & 0 \\ \alpha N - \beta - \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

A matriz de coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta + \gamma & 0 \\ \alpha N - \beta - \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= -\alpha N + \beta + \gamma < 0 \\ \det(A) &= 0 \end{aligned}$$

E pelo lema 2.1 nada se pode afirmar sobre o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$. Então, será feito o estudo de $\frac{dI}{dt}$.

Novamente ocorre $S = N - I$. E resolvendo $\frac{dI}{dt}$, segue:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I - \gamma I \\ &= \alpha(N - I)I - \beta I - \gamma I \\ &= \alpha I \left[\left(N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right) - I \right] \end{aligned}$$

Usando a separação de variáveis, segue que:

$$I = \frac{\alpha N - \beta - \gamma}{\alpha + \left[(\alpha N - \beta - \gamma) \frac{1}{I_0} - \alpha \right] e^{-(\alpha N - \beta - \gamma)t}}$$

Então, quando $t \rightarrow \infty$, $I \rightarrow N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. Conseqüentemente, $S \rightarrow \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. Logo, o ponto $\left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$ é assintoticamente estável.

Deste modo, segue a mesma conclusão do Caso 1. Isto é, se $S > \frac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$ então $\frac{dI}{dt} > 0$ e $\frac{dS}{dt} < 0$. Logo, o ponto (S, I) se aproxima de $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$ sobre a reta $S + I = N$. Conclusão análoga é obtida para $S < \frac{\beta}{\alpha}$ e $I = 0$.

Pode-se observar que ao considerar dinâmica vital no modelo SIS, quando a população é constante, a magnitude de cada coordenada do ponto de equilíbrio P_2 é alterada, mas o tipo de estabilidade permanece o mesmo para os dois pontos de equilíbrio existentes.

3.1.3 Caso 3: SIS com N variável

Neste caso é considerada a população total N variável. Ainda assim, é válida a equação $N(t) = S(t) + I(t)$ em cada instante de tempo.

Seja γ a taxa de natalidade e μ a taxa de mortalidade, onde $\gamma \neq \mu$. Deste modo, o diagrama que representa este modelo é o seguinte:

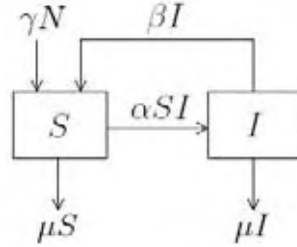


Figura 3.4: Diagrama compartimental para Caso 3 do modelo SIS.

E o sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \mu I, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \mu > 0$, $\gamma > \mu$ e $N(t) = S(t) + I(t)$.

Como $N = S + I$, então:

$$\begin{aligned} F(S, I) &= -\alpha SI + \beta I + \gamma S + \gamma I - \mu S \\ G(S, I) &= \alpha SI - \beta I - \mu I \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio obtidos são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0) \\ P_2 &= \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, \frac{-\beta - \mu}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Note que, $P_1 = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio que não faz sentido estudar do ponto de vista biológico, e também que no ponto de equilíbrio $P_2 = \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, \frac{-\beta - \mu}{\alpha} \right)$ ocorre $I = \frac{-\beta - \mu}{\alpha} < 0$. Assim, observa-se que não há ponto de equilíbrio. Bassanezi[4] observa que “para qualquer valor $I_0 > 0$ a trajetória atinge o valor máximo para S quando intercepta a isóclina (curva onde $\frac{dS}{dt} = 0$) $I = \frac{S(\gamma - \mu)}{\alpha S - (\beta + \gamma)}$, enquanto $I \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ ”.

3.2 Modelo SIR

Neste modelo há indivíduos suscetíveis que adquirem a doença, tornando-se infectados e, após a recuperação, adquirem imunidade. Neste caso não são considerados período latente nem isolamentos.

Considere a população total N constante, sem dinâmica vital e que a variação da população removida é proporcional à população infectada. O diagrama compartimental que representa este modelo é o que segue:

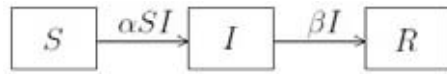


Figura 3.5: Diagrama compartimental para o modelo SIR.

E o sistema de equações diferenciais pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\alpha, \beta > 0$ e $N = S + I + R$.

As condições iniciais são:

$$\begin{aligned} R(0) &= 0, \\ I(0) &= I_0, \\ S(0) &= S_0 = N - I_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observe que $\frac{dS}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$ dependem apenas de S e de I . Neste caso:

$$\begin{aligned} F(S, I) &= -\alpha SI \\ G(S, I) &= \alpha SI - \beta I. \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio são $P_1 = (N, 0)$ e $P_2 = (0, 0)$. No entanto, do ponto de vista biológico só há o ponto $P_1 = (N, 0)$, pois N é constante.

Esse ponto será analisado através das características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linearizado. A matriz jacobiana é dada por

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (N, 0)$

O sistema linear que aproxima o sistema (3.4) na vizinhança do ponto $(N, 0)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix}$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A) &= \alpha N - \beta > 0 \\ \operatorname{det}(A) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, pelo lema 2.1, segue que o ponto $(N, 0)$ é instável.

Note que, de (3.4), no instante $t = 0$, tem-se:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \alpha S_0 I_0 - \beta I_0 \begin{array}{l} > 0 \text{ se } S_0 > \frac{\beta}{\alpha} \\ < 0 \text{ se } S_0 < \frac{\beta}{\alpha} \end{array}$$

E ainda, como $\frac{dS}{dt} \leq 0$ e $S \leq S_0$, então, se $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$, tem-se $S < \frac{\beta}{\alpha}$, e disso segue que:

$$\frac{dI}{dt} = I(\alpha S - \beta) \leq 0, \quad \forall I \geq 0$$

Nesse caso, $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e não ocorre uma epidemia.

Por outro lado, se $S_0 > \frac{\beta}{\alpha}$, $I(t)$ aumenta e a doença se propaga, ocorrendo assim uma epidemia, ou seja, $I(t) > I_0$ para algum $t > 0$.

Assim, se $S_0 > \frac{\beta}{\alpha}$ tem-se uma epidemia, e se $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$ a epidemia não existe. Essa razão $\frac{\beta}{\alpha}$ é chamada de taxa de remoção relativa.

Considere, agora,

$$R_0 = \frac{\alpha S_0}{\beta}$$

Desta forma, numa população total constante, R_0 indica se haverá ou não a propagação da doença. Observe que:

$$R_0 > 1 \Rightarrow \text{epidemia se propaga}$$

$$R_0 < 1 \Rightarrow \text{epidemia é extinta}$$

R_0 é chamado de Valor de Reprodutibilidade Basal.

Outros resultados importantes podem ser obtidos através do estudo da variação de I com relação a S .

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = \frac{\beta}{\alpha S} - 1 \quad (3.6)$$

$$I(S_0) = \frac{\beta}{\alpha} \ln S_0 - S_0 + c \quad (3.7)$$

onde c , é a constante de integração.

Usando as condições iniciais (3.5), para $t = 0$, segue que:

$$c = N - \frac{\beta}{\alpha} \ln S_0$$

Voltando em (3.7):

$$I = N - S + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{S}{S_0}$$

Ainda, de (3.6):

$$\frac{dI}{dS} > 0 \text{ se } \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} > 0, \text{ isto é, } S < \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{dI}{dS} < 0 \text{ se } \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} < 0, \text{ isto é, } S > \frac{\beta}{\alpha}$$

Com isso, o sistema pode ser esquematizado pela figura a seguir:

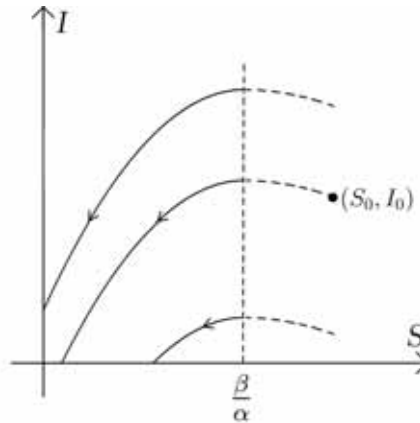


Figura 3.6: Plano de fase SI para o modelo SIR.

Além disso, também é interessante comparar a população de suscetíveis com a população de removidos.

Deste modo:

$$F(S, R) = -\alpha SI$$

$$H(S, R) = \beta I,$$

E como $I = N - S - R$, segue que:

$$F(S, R) = -\alpha S(N - S - R)$$

$$H(S, R) = \beta(N - S - R).$$

O ponto de equilíbrio obtido é $P_1 = (0, N)$.

Esse ponto será analisado através das características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linear. A matriz jacobiana é dada por

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_R \\ H_S & H_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + 2\alpha S + \alpha R & \alpha S \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix}$$

O sistema linear que aproxima o sistema (3.4) na vizinhança do ponto $(0, N)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são dados por:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= -\beta < 0 \\ \det(A) &= 0, \end{aligned}$$

e assim nada pode ser afirmado sobre a estabilidade. Analisando $\frac{dS}{dR}$, temos:

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\alpha SI}{\beta SI} = \frac{-\alpha S}{\beta} \tag{3.8}$$

e portanto,

$$R = \frac{\beta}{\alpha} (-\ln S + c),$$

onde c é a constante de integração.

Das condições iniciais (3.5):

$$R = \frac{\beta}{\alpha} \ln \left(\frac{S_0}{S} \right)$$

De (3.4), S é sempre decrescente, já que $\frac{dS}{dt} \leq 0$, assim como R é sempre crescente, já que $\frac{dR}{dt} \geq 0$

Note que, é esperado, quando $t \rightarrow \infty$, que $S(t) \rightarrow 0$ e $R(t) \rightarrow N$, pois quando o número de suscetíveis diminui, conseqüentemente o número de infectados aumenta, os quais, em seguida, passam a ser removidos, e a epidemia é extinta.

3.3 Modelo SIRS

Neste modelo há indivíduos suscetíveis que adquirem a doença, tornando-se infectados e, após a recuperação, não adquirem imunidade, tornando-se suscetíveis novamente. Neste caso não há período latente nem isolamentos.

Consideraremos a população total N constante e que não há dinâmica vital. Seja δ a taxa de perda de imunidade. Então, como a perda de imunidade é proporcional ao número de indivíduos removidos, a modelagem é dada por δR . Assim, segue o modelo compartimental:

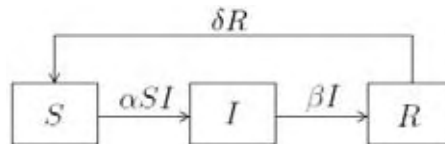


Figura 3.7: Diagrama compartimental para o modelo SIRS.

Deste modo, o sistema de equações diferenciais, que representa essa dinâmica, pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \delta R \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I - \delta R \end{cases} \tag{3.9}$$

onde $\alpha, \beta, \delta > 0$ e $N = S + I + R$.

As condições iniciais são:

$$\begin{aligned} R(0) &= 0, \\ I(0) &= I_0, \\ S(0) &= S_0 = N - I_0 \end{aligned}$$

Note que, como $R = N - S - I$, e N é constante, as funções $\frac{dS}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$ dependem apenas de S e I . Então, esse caso será analisado.

Segue:

$$\begin{aligned} F(S, I) &= -\alpha SI + \delta N - \delta S - \delta I \\ G(S, I) &= \alpha SI - \beta I \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio obtidos são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (N, 0) \\ P_2 &= \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right) \end{aligned}$$

O ponto $P_1 = (N, 0)$ será analisado através das características dos autovalores do sistema linearizado. Enquanto o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right)$ será analisado através das características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linear. Para isso, é preciso determinar a matriz jacobiana, a qual segue:

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I - \delta & -\alpha S - \delta \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (N, 0)$

O sistema linear que aproxima o sistema (3.9) na vizinhança do ponto $(N, 0)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & -\alpha N - \delta \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Os autovalores podem ser obtidos fazendo:

$$\begin{vmatrix} -\delta - \lambda & -\alpha N - \delta \\ 0 & \alpha N - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (-\alpha N + \beta + \delta)\lambda + (-\alpha\delta N + \beta\delta) &= 0 \\ \lambda &= \frac{-(-\alpha N + \beta + \delta) \pm \sqrt{(-\alpha N + \beta + \delta)^2 - 4(-\alpha\delta N + \beta\delta)}}{2} \\ &= \frac{-(-\alpha N + \beta + \delta) \pm (\alpha N - \beta + \delta)}{2} \end{aligned}$$

Com isso, os autovalores são $\lambda_1 = -\delta$ e $\lambda_2 = \alpha N - \beta$.

Assim, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Portanto, $P_1 = (N, 0)$ é instável.

- $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right)$

O sistema linear que aproxima o sistema (3.9) na vizinhança do ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha\delta N + \delta^2}{\beta + \delta} & -\beta - \delta \\ \frac{\alpha\delta N - \delta\beta}{\beta + \delta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha\delta N + \delta^2}{\beta + \delta} & -\beta - \delta \\ \frac{\alpha\delta N - \delta\beta}{\beta + \delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \frac{-\delta(\alpha N + \delta)}{\beta + \delta} < 0 \\ \det(A) &= \delta(\alpha N - \beta) > 0 \end{aligned}$$

Portanto, do lema 2.1, segue que o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right)$ é assintoticamente estável.

Compararemos agora a população de suscetíveis com a população de removidos.

Deste modo,

$$\begin{aligned} F(S, R) &= -\alpha SI + \delta R \\ H(S, R) &= \beta I - \delta R \end{aligned}$$

Como $I = N - S - R$, segue que:

$$\begin{aligned} F(S, R) &= -\alpha S(N - S - R) + \delta R \\ H(S, R) &= \beta(N - S - R) - \delta R \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio obtidos são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (N, 0) \\ P_2 &= \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right) \end{aligned}$$

A matriz jacobiana é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_R \\ H_S & H_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + 2\alpha S + \alpha R & \alpha S + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (N, 0)$

O sistema linear que aproxima o sistema (3.9) na vizinhança do ponto $P_1 = (N, 0)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha N & \alpha N + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cuja matriz dos coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha N & \alpha N + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix}$$

O traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \alpha N - \beta - \delta > 0 \\ \det(A) &= -\delta(\alpha N - \beta) < 0 \end{aligned}$$

Assim, pelo lema 2.1, segue que o ponto $P_1 = (N, 0)$ é instável.

- $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right)$

O sistema linear que aproxima o sistema (3.9) na vizinhança do ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta} \right)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha\delta N + 2\beta\delta N + \beta^2}{\beta + \delta} & \beta + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cuja matriz dos coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha\delta N + 2\beta\delta N + \beta^2}{\beta + \delta} & \beta + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix}$$

O traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \frac{-\delta(\alpha N + \delta)}{\beta + \delta} < 0 \\ \det(A) &= \delta(\alpha N - \beta) > 0 \end{aligned}$$

Assim, pelo lema 2.1, segue que o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta(N - \frac{\beta}{\alpha})}{\beta + \delta} \right)$ é assintoticamente estável.

Note que, para todos os casos em que se tem $(N, 0)$ como equilíbrio ocorre a instabilidade. Isso significa que a doença tende a permanecer endêmica na população.

Nesse capítulo foram apresentados alguns modelos clássicos de Epidemiologia e a análise dos pontos de equilíbrio dos mesmos. A seguir, serão apresentadas algumas variações desses modelos, baseadas em Leon[5], onde o Segundo Método de Lyapunov é utilizado para análise de estabilidade.

4 Variações dos Modelos Clássicos - Estabilidade via Lyapunov

No capítulo anterior apresentamos alguns modelos clássicos em Epidemiologia, bem como a análise de estabilidade local de pontos de equilíbrio desses modelos. No entanto, um problema clássico envolvendo modelos epidemiológicos é o estudo da estabilidade global de equilíbrios.

O Método de Lyapunov tem sido bastante utilizado para o estudo de estabilidade global. Wake[6] apresenta um estudo da estabilidade global de pontos de equilíbrio não triviais de modelos epidemiológicos não clássicos, embora a estabilidade global desses modelos já foram estabelecidas usando o teorema de Poincaré-Bendixon e outros critérios. Wake utiliza a função de Lyapunov logarítmica

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right) \quad (4.1)$$

onde x_i^* , $i = 1, \dots, n$, são as componentes do ponto de equilíbrio do sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Neste capítulo apresentaremos um estudo da estabilidade local de variações de modelos clássicos SIS, SIR, SIRS, onde a população total é considerada não constante, segundo o trabalho de Leon[5], que utiliza composições adequadas de alguns tipos de função de Lyapunov, além de (4.1), como

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2} (x_i - x_i^*)^2$$

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2$$

Para o estudo de estabilidade global veja Leon[5].

4.1 Modelo SIS

No modelo SIS aqui apresentado será considerado um recrutamento na classe de suscetíveis, devido a nascimentos e imigrações, além de mortalidade natural nesta

classe. Além disso, na classe de infectados, será considerada a possibilidade de morte natural e morte devido à doença. Este modelo pode ser esquematizado pelo diagrama a seguir:

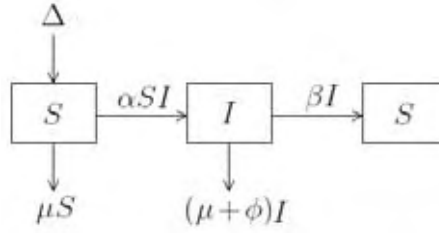


Figura 4.1: *Modelo compartimental SIS.*

onde:

Δ é a taxa de recrutamento de suscetíveis, correspondente a nascimentos e imigrações;

α é a taxa de infecção;

β é a taxa de remoção;

μ é a taxa de mortalidade por causas naturais;

ϕ é a taxa de mortalidade devido à doença;

$N(t) = S(t) + I(t)$ é a população total variável no tempo.

Na classe de indivíduos suscetíveis há a saída dos indivíduos que morrem por causas naturais, e daqueles suscetíveis que adquiriram a doença e passaram para a classe de infectados, bem como há a entrada através de nascimentos e imigrações. Na classe de indivíduos infectados, há a saída dos indivíduos que morrem, tanto por causa natural como por causa da doença, e a saída dos indivíduos que se recuperaram, não adquirindo imunidade, e retornando à classe de suscetíveis.

Em termos de equações diferenciais, o modelo é representado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \alpha SI - \mu S + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\beta + \mu + \phi) I, \end{cases} \quad (4.2)$$

com as condições iniciais:

$$S(0) = S_0,$$

$$I(0) = I_0.$$

Os pontos de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (S_1, I_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0 \right) \\ P_2 &= (S_2, I_2) = \left(\frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha}, \frac{\alpha \Delta - \mu(\beta + \mu + \phi)}{\alpha(\mu + \phi)} \right). \end{aligned}$$

Seja $R_0 = \frac{\alpha \Delta}{\mu(\beta + \mu + \phi)}$. Em termos de P_1 e R_0 , P_2 pode ser reescrito como:

$$P_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu(\beta + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha(\mu + \phi)} \right).$$

Note que, como $N(t) = S(t) + I(t)$, de (4.2), segue:

$$N' = \Delta - \mu N - \phi I \quad (4.3)$$

E na ausência da doença ($I = 0$), a solução da equação (4.3), obtida pelo método do fator integrante, é dada por

$$N(t) = \frac{\Delta}{\mu} + ce^{-\mu t},$$

onde c é a constante de integração.

Então, N converge para $\frac{\Delta}{\mu}$, e assim, será considerada a região:

$$\Omega = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}$$

- $P_1 = (S_1, I_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0 \right)$

Seja a função de Lyapunov U definida por:

$$U : \{(S, I) \in \Omega : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U(S, I) = \frac{1}{2} [(S - S_1) + I]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} I$$

Então U é de classe C^1 no interior de Ω e P_1 é um mínimo global¹ de U em Ω , e ainda, $U(S_1, I_1) = 0$.

Segue que a derivada de U em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= [(S - S_1) + I] \frac{d(S + I)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{dI}{dt} \\ &= [(S - S_1) + I] [\Delta - \mu(S + I) - \phi I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} [\alpha SI - (\beta + \phi + \mu) I] \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu S_1$, tem-se:

$$\frac{dU}{dt} = -\mu(S - S_1)^2 - (\mu + \phi)I^2 - (\phi + 2\mu) \left(\frac{(\beta + \mu + \phi)}{\alpha} - S_1 \right) I$$

E reescrevendo $\frac{dU}{dt}$ em função de R_0 , segue que:

$$\frac{dU}{dt} = -\mu(S - S_1)^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{(\phi + 2\mu)(\beta + \mu + \phi)}{\alpha} (1 - R_0) I$$

Deste modo, se $R_0 \leq 1$ então $\frac{dU}{dt}$ é definida negativa, e com isso, pelo Teorema 2.3, P_1 é assintoticamente estável.

¹Seja uma função f e o ponto $P \in D_f$. O ponto P é dito mínimo global da função f se, para todo $x \in D_f$, $f(x) \geq f(P)$.

- $P_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu(\beta + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha(\mu + \phi)} \right)$

Seja a função de Lyapunov V definida por:

$$V : \{(S, I) \in \Omega : S, I > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(S, I) = \frac{1}{2} [(S - S_2) + (I - I_2)]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right)$$

Então V é de classe C^1 no interior de Ω e P_2 é um mínimo global de V em Ω , e ainda, $V(S_2, I_2) = 0$.

Segue que a derivada de V em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= [(S - S_2) + (I - I_2)] \frac{d(S + I)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} \frac{dI}{dt} \\ &= [(S - S_2) + (I - I_2)] [\Delta - \mu(S + I) - \phi I] \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} [\alpha S I - (\beta + \phi + \mu) I] \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu(S_2 + I_2) + \phi I_2$ e $\alpha S_2 = (\beta + \phi + \mu)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= [(S - S_2) + (I - I_2)] \{-\mu[(S - S_2) + (I - I_2)] - \phi(I - I_2)\} \\ &\quad + (\phi + 2\mu)(S - S_2)(I - I_2) \\ &= -\mu(S - S_2)^2 - (\mu + \phi)(I - I_2)^2 \end{aligned}$$

Deste modo, $\frac{dV}{dt}$ é definida negativa e, pelo Teorema 2.3, P_2 é assintoticamente estável. Ou seja, se $R_0 > 1$, P_2 é biologicamente viável e é assintoticamente estável.

Neste modelo SIS (com população total variável), observa-se que, na ausência de infectados, o ponto de equilíbrio agora existente é assintoticamente estável, enquanto que no caso do modelo SIS com população constante apresentado no capítulo anterior, o ponto de equilíbrio deste tipo é sempre instável.

4.2 Modelo SIR

No modelo aqui apresentado será considerado um recrutamento na classe de suscetíveis, assim como a possibilidade de mortalidade natural. Para a classe de infectados considere-se mortalidade natural e devido à doença e para os removidos, mortalidade natural.

Este modelo pode ser esquematizado pelo diagrama a seguir:

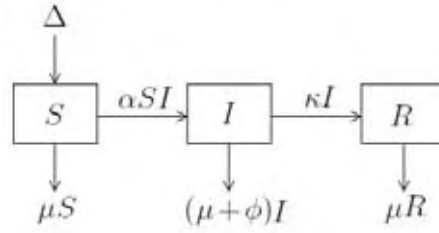


Figura 4.2: Modelo compartimental SIR.

As constantes são as mesmas do modelo anterior, acrescentando a taxa de recuperação κ . Ou seja, na classe de indivíduos infectados, não existe a saída dos indivíduos que se recuperaram, pois estes adquirem imunidade permanente, não retornando à classe de suscetíveis.

Agora a população total é dada por $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$.

Em termos de equações diferenciais, o modelo é representado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \alpha SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi) I \\ \frac{dR}{dt} = \kappa I - \mu R, \end{cases} \quad (4.4)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, \\ I(0) &= I_0, \\ R(0) &= 0. \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0 \right) \\ P_2 &= (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha}, \frac{\alpha \Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha(\kappa + \mu + \phi)}, \frac{\kappa[\alpha \Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)]}{\alpha \mu(\kappa + \mu + \phi)} \right) \end{aligned}$$

Considerando $R_0 = \frac{\alpha \Delta}{\mu(\kappa + \mu + \phi)}$, podemos reescrever P_2 em função de P_1 e R_0 como:

$$P_2 = (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu^2(\kappa + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha \mu[\kappa + (\phi + \mu)]}, \frac{\mu \kappa(\kappa + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha \mu[\kappa + (\phi + \mu)]} \right).$$

Novamente, como $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, de (4.4), segue:

$$N' = \Delta - \mu N - \phi I$$

Na ausência da doença, N converge para $\frac{\Delta}{\mu}$, assim, será considerada a região:

$$\Omega = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + I + R \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}$$

- $P_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0 \right)$

Seja a função de Lyapunov U definida por:

$$U : \{(S, I, R) \in \Omega : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U(S, I, R) = \frac{1}{2} [(S - S_1) + I + R]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} I + \frac{(\phi + 2\mu)}{2\kappa} R^2$$

Então U é de classe C^1 no interior de Ω e P_1 é um mínimo global de U em Ω , e ainda, $U(S_1, I_1, R_1) = 0$.

Segue que a derivada de U em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= [(S - S_1) + I + R] \frac{d(S + I + R)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{dI}{dt} + \frac{\phi + 2\mu}{\kappa} R \frac{dR}{dt} \\ &= [(S - S_1) + I + R] [\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} [\alpha SI - (\kappa + \phi + \mu) I] \\ &\quad + \frac{\phi + 2\mu}{\kappa} R [\kappa I - (\mu + \gamma) R] \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu S_1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\mu [(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi) I^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{\kappa} R^2 \\ &\quad - (\phi + 2\mu) \left[\frac{(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha} - S_1 \right] I \end{aligned}$$

E reescrevendo $\frac{dU}{dt}$ em função de R_0 , segue que:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\mu [(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi) I^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{\kappa} R^2 \\ &\quad - \frac{(\phi + 2\mu)(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha} (1 - R_0) I \end{aligned}$$

Deste modo, se $R_0 \leq 1$ então $\frac{dU}{dt}$ é definida negativa, e com isso, pelo Teorema 2.3, P_1 é assintoticamente estável.

- $P_2 = (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu^2(\kappa + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha\mu[\kappa + (\mu + \phi)]}, \frac{\mu\kappa(\kappa + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha\mu[\kappa + (\mu + \phi)]} \right)$

Seja a função de Lyapunov V definida por:

$$V : \{(S, I, R) \in \Omega : S, I, R > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} V(S, I) &= \frac{1}{2} [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right) \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)}{2\kappa} (R - R_2)^2 \end{aligned}$$

Então V é de classe C^1 no interior de Ω e P_2 é um mínimo global de V em Ω , e ainda, $V(S_2, I_2) = 0$.

Segue que a derivada de V em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] \frac{d(S + I + R)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)(I - I_2)}{\alpha} \frac{dI}{dt} \\ &\quad + \frac{\phi + 2\mu}{\kappa} (R - R_2) \frac{dR}{dt} \\ &= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] [\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I] \\ &\quad + \frac{(\phi + 2\mu)(I - I_2)}{\alpha} [\alpha SI - (\kappa + \phi + \mu) I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2) (\kappa I - \mu R) \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu(S_2 + I_2 + R_2) + \phi I_2$ e $\alpha S_2 = (\kappa + \phi + \mu)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -[(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] \{ \mu[(S - S_2) + (R - R_2)] + (\phi + \mu)(I - I_2) \} \\ &\quad + (\phi + 2\mu)(S - S_2)(I - I_2) + (R - R_2) [\kappa(I - I_2) - \mu(R - R_2)] \\ &= -\mu[(S - S_2) + (R - R_2)]^2 - (\mu + \phi)(I - I_2)^2 - \frac{\mu(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2)^2 \end{aligned}$$

Deste modo, $\frac{dV}{dt}$ é definida negativa e, pelo Teorema 2.3, P_2 é assintoticamente estável.

4.3 Modelo SIRS

Consideramos aqui a possibilidade de perda de imunidade e assim o modelo SIR apresentado na seção anterior é modificado segundo o diagrama a seguir:

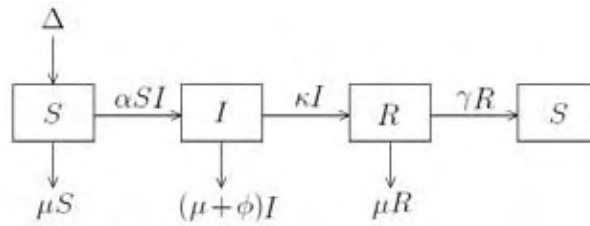


Figura 4.3: Modelo compartimental SIRS.

As constantes são as mesmas do modelo anterior, acrescentando a taxa perda de imunidade γ . A população total continua sendo $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$.

O sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \alpha SI - \mu S + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi) I \\ \frac{dR}{dt} = \kappa I - (\mu + \gamma) R, \end{cases} \quad (4.5)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, \\ I(0) &= I_0, \\ R(0) &= 0. \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0 \right) \\ P_2 &= (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{\kappa + \mu + \phi}{\alpha}, \frac{(\mu + \gamma)[\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)]}{\alpha[(\mu + \gamma)(\kappa + \mu + \phi) - \kappa\gamma]}, \frac{\kappa[\alpha\Delta - \mu(\kappa + \mu + \phi)]}{\alpha[(\mu + \gamma)(\kappa + \mu + \phi) - \kappa\gamma]} \right) \end{aligned}$$

Seja $R_0 = \frac{\alpha\Delta}{\mu(\kappa + \mu + \phi)}$. Então P_2 pode ser reescrito em função de P_1 e R_0 como:

$$P_2 = (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu(\mu + \gamma)(\kappa + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha[(\mu + \gamma)(\mu + \phi) + \mu\kappa]}, \frac{\mu\kappa(\kappa + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha[(\mu + \gamma)(\mu + \phi) + \mu\kappa]} \right)$$

Analogamente aos casos anteriores, na ausência da doença, N converge para $\frac{\Delta}{\mu}$. Deste modo, será considerada a região:

$$\Omega = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + I + R \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}$$

- $P_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0 \right)$

Seja a função de Lyapunov U definida por:

$$\begin{aligned} U &: \{(S, I, R) \in \Omega : S, I, R > 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ U(S, I, R) &= \frac{1}{2} [(S - S_1) + I + R]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} I + \frac{(\phi + 2\mu)}{2\kappa} R^2 \end{aligned}$$

Então U é de classe C^1 no interior de Ω e P_1 é um mínimo global de U em Ω , e ainda, $U(S_1, I_1, R_1) = 0$.

Segue que a derivada de U em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= [(S - S_1) + I + R] \frac{d(S + I + R)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{dI}{dt} + \frac{\phi + 2\mu}{\kappa} R \frac{dR}{dt} \\ &= [(S - S_1) + I + R] [\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} [\alpha SI - (\kappa + \phi + \mu) I] \\ &\quad + \frac{\phi + 2\mu}{\kappa} R [\kappa I - (\mu + \gamma) R] \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu S_1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\mu [(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi) I^2 - \frac{(\phi + 2\mu)(\mu + \gamma)}{\kappa} R^2 \\ &\quad - (\phi + 2\mu) \left[\frac{(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha} - S_1 \right] I \end{aligned}$$

E reescrevendo $\frac{dU}{dt}$ em função de R_0 , segue que:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\mu [(S - S_1) + R]^2 - (\mu + \phi) I^2 - \frac{(\phi + 2\mu)(\mu + \gamma)}{\kappa} R^2 \\ &\quad - \frac{(\phi + 2\mu)(\kappa + \mu + \phi)}{\alpha} (1 - R_0) I \end{aligned}$$

Deste modo, se $R_0 \leq 1$ então $\frac{dU}{dt}$ é definida negativa, e com isso, pelo Teorema 2.3, P_1 é assintoticamente estável.

$$\bullet P_2 = (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu(\mu+\gamma)(\kappa+\mu+\phi)(R_0-1)}{\alpha[(\mu+\gamma)(\mu+\phi)+\mu\kappa]}, \frac{\mu\kappa(\kappa+\mu+\phi)(R_0-1)}{\alpha[(\mu+\gamma)(\mu+\phi)+\mu\kappa]} \right)$$

Seja a função de Lyapunov V definida por:

$$\begin{aligned} V : \{(S, I, R) \in \Omega : S, I, R > 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ V(S, I) &= \frac{1}{2} [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right) \\ &+ \frac{(\phi + 2\mu)}{2\kappa} (R - R_2)^2 \end{aligned}$$

Então V é de classe C^1 no interior de Ω e P_2 é um mínimo global de V em Ω , e ainda, $V(S_2, I_2) = 0$.

Segue que a derivada de V em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] \frac{d(S + I + R)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{I - I_2}{I} \frac{dI}{dt} \\ &+ \frac{\phi + 2\mu}{\kappa} (R - R_2) \frac{dR}{dt} \\ &= [(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] [\Delta - \mu(S + I + R) - \phi I] \\ &+ \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} [\alpha SI - (\kappa + \phi + \mu) I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2) [\kappa I - (\gamma + \mu) R] \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu(S_2 + I_2 + R_2) + \phi I_2$ e $\alpha S_2 = (\kappa + \phi + \mu)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -[(S - S_2) + (I - I_2) + (R - R_2)] \{ \mu [(S - S_2) + (R - R_2)] + (\phi + \mu)(I - I_2) \} \\ &+ (\phi + 2\mu)(S - S_2)(I - I_2) + (R - R_0) [\kappa(I - I_2) - (\mu + \gamma)(R - R_2)] \\ &= -\mu [(S - S_2) + (R - R_2)]^2 - (\mu + \phi)(I - I_2)^2 - \frac{(\gamma + \mu)(\phi + 2\mu)}{\kappa} (R - R_2)^2 \end{aligned}$$

Deste modo, $\frac{dV}{dt}$ é definida negativa e, pelo Teorema 2.3, P_2 é assintoticamente estável.

É possível perceber que, nos modelos analisados, os pontos P_1 (aqueles onde uma das componentes é não nula) é sempre assintoticamente estável se $R_0 \leq 1$. No entanto, os pontos P_2 (aqueles onde as componentes são não nulas) só existem do ponto de vista biológico se $R_0 > 1$ e são assintoticamente estáveis.

Neste capítulo foram apresentadas variações dos modelos SIS, SIR e SIRS, nos quais a população total é considerada não constante. A análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio via Teorema de Linearização dos modelos SIR e SIRS envolve o cálculo de autovalores de uma matriz 3×3 . Com as funções de Lyapunov aqui apresentadas, essa análise é mais direta e pode ser estendida para modelos com um número maior de compartimentos.

5 Um Modelo SIR para a Influenza A H1N1

5.1 A Influenza A H1N1

A Influenza A H1N1 é um vírus da gripe de origem suína que, por meio de mutações, deu origem a outros tipos de vírus do tipo influenza, transmitidos para humanos, suínos, aves, entre outros. A letra H refere-se à proteína hemaglutinina e a letra N à proteína neuraminidase.

Sabe-se que o vírus H1N1 existe desde 1918, quando deu origem a gripe espanhola, que matou entre 50 e 100 milhões da população mundial. E, embora tenha sido erradicada em 1919, não deu o fim ao vírus, pois este passou por mutações dando origem ao vírus H2N2, causador da gripe asiática de 1957, tão grave quanto a gripe espanhola, também matando milhões de pessoas no mundo inteiro. O vírus H1N1 também foi causador da gripe suína, de 1931. Em 1968, com uma nova mutação, deu origem ao vírus H3N2, que fez surgir a gripe de Hong Kong. Mais tarde, em 1977, o vírus H1N1 voltou a circular na população, originando a gripe russa.

Tanto o vírus H1N1 quanto o vírus H3N2 circulam até hoje, isto pelo fato da população mundial ser muito grande e isso dar condições para manter a transmissão de vírus.

O vírus H1N1 que circula atualmente é o causador da gripe comum, que embora não cause graves consequências em indivíduos saudáveis, tem o poder de infectar muitas pessoas, o que ainda gera preocupação com relação a esta gripe. Por este motivo, é preciso tomar os cuidados necessários, como as medidas de prevenção (vacinação) e o tratamento com drogas antivirais.

5.2 O Modelo

O modelo proposto para a Influenza A H1N1 é uma variação do modelo clássico SIR visto anteriormente, envolvendo medidas de controle, tais como vacinação, tratamento e isolamento. Contudo, pela dificuldade em se trabalhar com um modelo que se aproxime

ao máximo da realidade, será estudado um modelo apresentado por Alcaraz [1], cujo diagrama compartimental é o que segue:

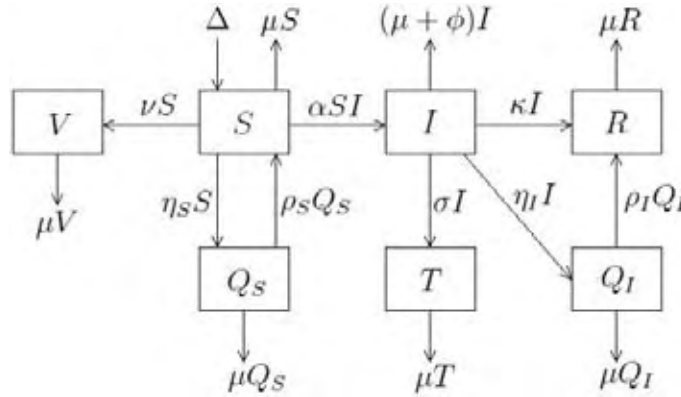


Figura 5.1: Modelo compartimental SIR para Influenza A H1N1.

onde:

S representa a classe de indivíduos suscetíveis;

I representa a classe de indivíduos infectados;

Q_S representa a classe de indivíduos suscetíveis que foram isolados;

R representa a classe de indivíduos recuperados;

Q_I representa a classe de indivíduos infectados que foram isolados;

V representa a classe de indivíduos suscetíveis que foram vacinados e estão imunes à doença;

T representa a classe de indivíduos infectados que estão em tratamento;

Δ é a taxa de recrutamento de indivíduos suscetíveis, que representa nascimentos e imigrações;

α é taxa de transmissão da doença;

κ é a taxa de recuperação;

μ é a taxa de mortalidade por causas naturais;

ϕ é taxa de mortalidade devido a doença;

ν é taxa de vacinação de indivíduos suscetíveis;

η é a taxa de isolamento, tanto de indivíduos suscetíveis como de indivíduos infectados;

ρ é a taxa na qual os indivíduos que estavam isolados retornam para alguma classe de indivíduos não isolados;

σ é a taxa de tratamento para os indivíduos infectados;

Segue que na classe de suscetíveis (S) entram os indivíduos recrutados a uma taxa Δ , que representa nascimentos e imigrações. Ainda nesta classe, há a saída dos indivíduos que foram vacinados (νS), e dos indivíduos que foram isolados por suspeita de infecção ($\eta_S S$). Os indivíduos suscetíveis que foram isolados (Q_S) podem retornar à classe de indivíduos suscetíveis ($\rho_S Q_S$), uma vez que foram identificados como não

infectados. E, por meio do contato com indivíduos infectados (I), adquirem a doença (αSI), tornando-se infectados. Nesta classe, os indivíduos infectados podem ser isolados ($\eta_I I$), passando a pertencer à classe de isolamento de infectados (Q_I), ou podem entrar em tratamento (σI), passando a pertencer à classe de tratamento de infectados (T), ou ainda, podem se recuperar (κI), passando a pertencer à classe de indivíduos recuperados (R). E por fim, os indivíduos infectados que foram isolados podem se recuperar ($\rho_I Q_I$), passando a pertencer também à classe de recuperados.

Os indivíduos de todas as classes podem morrer de causas naturais ($\mu S, \mu I, \mu R, \mu V, \mu Q_S, \mu T, \mu Q_I$), e ainda, os indivíduos infectados (I) podem morrer devido à doença (ϕI).

Com esses dados, o sistema de equações diferenciais para esse modelo é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Delta - \alpha SI - (\mu + \nu) S - \eta_S S + \rho_S Q_S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I) I \\ \frac{dQ_S}{dt} = \eta_S S - (\mu + \rho_S) Q_S \\ \frac{dR}{dt} = \kappa I + \rho_I Q_I - \mu R \\ \frac{dQ_I}{dt} = \eta_I I - (\mu + \rho_I) Q_I \\ \frac{dV}{dt} = \nu S - \mu V \\ \frac{dT}{dt} = \sigma I - \mu T, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Sendo $S(0) = S_0, I(0) = I_0, Q_S(0) = 0, R(0) = 0, Q_I(0) = 0, V(0) = 0$ e $T(0) = 0$, e a população total

$$N(t) = S(t) + I(t) + Q_S(t) + R(t) + Q_I(t) + V(t) + T(t) \quad (5.2)$$

Os pontos de equilíbrio encontrados¹ são P_1 e P_2 , sendo:

$P_1 = (S_1, I_1, Q_{S1}, R_1, Q_{I1}, V_1, T_1)$, com:

$$S_1 = \frac{(\mu + \rho_S)\Delta}{(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S}$$

$$I_1 = 0$$

$$Q_{S1} = \frac{\eta_S \Delta}{(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S}$$

$$R_1 = 0$$

$$Q_{I1} = 0$$

$$V_1 = \frac{\nu(\mu + \rho_S)}{\mu(\mu + \nu)(\mu + \rho_S) + \eta_S \mu^2}$$

$$T_1 = 0$$

¹O ponto P_1 aqui apresentado difere do artigo citado, pois, no artigo, o autor apresenta V_1 nulo, o que não satisfaz o sistema.

$P_2 = (S_2, I_2, Q_{S_2}, R_2, Q_{I_2}, V_2, T_2)$, com:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_S}{\alpha} \\ I_2 &= \frac{\alpha(\mu + \rho_S)\Delta - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)[(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S]}{\alpha(\mu + \rho_S)} \\ Q_{S_2} &= \frac{\eta_S(\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_S)}{\alpha(\mu + \rho_S)} \\ R_2 &= \frac{[\kappa(\mu + \rho_I) + \rho_I\eta_I]\{\alpha(\mu + \rho_S)\Delta - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)[(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S]\}}{\alpha\mu(\mu + \rho_S)} \\ Q_{I_2} &= \frac{\eta_I\{\alpha(\mu + \rho_S)\Delta - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)[(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S]\}}{\alpha(\mu + \rho_S)(\mu + \rho_I)} \\ V_2 &= \frac{\nu(\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)}{\alpha\mu} \\ T_2 &= \frac{\sigma\{\alpha(\mu + \rho_S)\Delta - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)[(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S]\}}{\alpha\mu(\mu + \rho_S)} \end{aligned}$$

Considere $R_c = \frac{\alpha(\mu + \rho_S)\Delta}{[(\mu + \nu)(\mu + \rho_S) + \eta_S\mu](\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)}$.

Assim, $P_2 = (S_2, I_2, Q_{S_2}, R_2, Q_{I_2}, V_2, T_2)$ é reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{S_1}{R_c} \\ I_2 &= \frac{\Delta R_c}{\alpha S_1} \left(1 - \frac{1}{R_c}\right) \\ Q_{S_2} &= \frac{\eta_S S_2}{\mu + \rho_S} \\ R_2 &= \frac{1}{\mu} (\kappa I_2 + \rho_I Q_{I_2}) \\ Q_{I_2} &= \frac{\eta_I I_2}{\mu + \rho_I} \\ V_2 &= \frac{\nu S_2}{\mu} \\ T_2 &= \frac{\sigma I_2}{\mu} \end{aligned}$$

De (5.2) segue que $N' = \Delta - \mu N - \phi I$, e na ausência da doença ($I = 0$), N converge para $\frac{\Delta}{\mu}$. Assim será considerada a região:

$$\Omega = \left\{ (S, I, Q_S, R, Q_I, V, T) \in \mathbb{R}_+^7 : N \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}$$

Para a análise de estabilidade através de funções de Lyapunov será considerado um subsistema do sistema (5.1):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \alpha SI - (\mu + \nu)S - \eta_S S + \rho_S Q_S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)I \\ \frac{dQ_S}{dt} = \eta_S S - (\mu + \rho_S)Q_S \end{cases} \quad (5.3)$$

cujas equações independem de R , Q_I , V e T .

Para este sistema (5.3) tem-se:

- $P_1 = (S_1, I_1, Q_{S1})$

onde

$$S_1 = \frac{(\mu + \rho_S) \Delta}{(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S}$$

$$I_1 = 0$$

$$Q_{S1} = \frac{\eta_S \Delta}{(\mu + \rho_S)(\mu + \nu) + \mu\eta_S}$$

Considere $\Omega_1 = \left\{ (S, I, Q_S) \in \mathbb{R}_+^3 : S + I + Q_S \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}$ e U a função de Lyapunov definida por:

$$U : \{(S, I, Q_S) \in \Omega_1 : S, Q_S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U(S, I, Q_S) = \left(S - S_1 - S_1 \ln \frac{S}{S_1} \right) + I + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(Q_S - Q_{S1} - Q_{S1} \ln \frac{Q_S}{Q_{S1}} \right)$$

Observe que a função U é de classe C^1 no interior de Ω_1 , e P_1 é um mínimo global de $U(S, I, Q_S)$ em Ω_1 , e $U(S_1, I_1, Q_{S1}) = 0$, ou seja, U é definida positiva. E sua derivada com relação ao tempo t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(S, I, Q_S) &= \frac{dS}{dt} - \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(\frac{dQ_S}{dt} - \frac{Q_{S1}}{Q_S} \frac{dQ_S}{dt} \right) \\ &= \left(1 - \frac{S_1}{S} \right) \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(1 - \frac{Q_{S1}}{Q_S} \right) \frac{dQ_S}{dt} \\ &= \left(1 - \frac{S_1}{S} \right) [\Delta - \alpha SI - (\mu + \nu + \eta_S) S + \rho_S Q_S] \\ &\quad + [\alpha SI - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I) I] \\ &\quad + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(1 - \frac{Q_{S1}}{Q_S} \right) [\eta_S S - (\mu + \rho_S) Q_S] \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = (\mu + \nu + \eta_S) S_1 - \rho_S Q_{S1}$ e $\eta_S = (\mu + \rho_S) \frac{Q_{S1}}{S_1}$, obtém-se $\Delta = (\mu + \nu) S_1 + \mu Q_{S1}$ e assim, $\frac{dU}{dt}$ é reescrita como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt}(S, I, Q_S) &= \left(1 - \frac{S_1}{S}\right) \left[(\mu + \nu) S_1 + \mu Q_{S1} - \alpha SI - (\mu + \nu) S - (\mu + \rho_S) \frac{Q_{S1}}{S_1} S + \rho_S Q_S \right] \\
&\quad + [\alpha SI - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I) I] \\
&\quad + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(1 - \frac{Q_{S1}}{Q_S}\right) \left[(\mu + \rho_S) \frac{Q_{S1}}{S_1} S - (\mu + \rho_S) Q_S \right] \\
&= \left(1 - \frac{S_1}{S}\right) \left[(\mu + \nu) S_1 + \mu Q_{S1} - \alpha SI - \left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S1}}{S_1}\right) S \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{S_1}{S}\right) \left[-\rho_S \frac{Q_{S1}}{S_1} S + \rho_S Q_S \right] + [\alpha SI - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I) I] \\
&\quad + \rho_S Q_{S1} \left(1 - \frac{Q_{S1}}{Q_S}\right) \left[\frac{S}{S_1} - \frac{Q_S}{Q_{S1}} \right] \\
&= S_1 \left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S1}}{Q_S}\right) \left(2 - \frac{S_1}{S} - \frac{S}{S_1}\right) + \rho_S Q_{S1} \left(2 - \frac{S_1}{S} \frac{Q_S}{Q_{S1}} - \frac{Q_{S1}}{Q_S} \frac{S}{S_1}\right) \\
&\quad + [\alpha S_1 - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)] I \\
&= -S_1 \left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S1}}{Q_S}\right) \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} - \sqrt{\frac{S}{S_1}}\right)^2 - \rho_S Q_{S1} \left(\sqrt{\frac{S_1}{S} \frac{Q_S}{Q_{S1}}} - \sqrt{\frac{S}{S_1} \frac{Q_{S1}}{Q_S}}\right)^2 \\
&\quad - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I) \left(1 - \frac{\alpha S_1}{\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I}\right) I
\end{aligned}$$

Reescrevendo em função de R_c :

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt}(S, I, Q_S) &= -S_1 \left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S1}}{Q_S}\right) \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} - \sqrt{\frac{S}{S_1}}\right)^2 - \rho_S Q_{S1} \left(\sqrt{\frac{S_1}{S} \frac{Q_S}{Q_{S1}}} - \sqrt{\frac{S}{S_1} \frac{Q_{S1}}{Q_S}}\right)^2 \\
&\quad - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I) (1 - R_c) I
\end{aligned}$$

E com isso, segue que se $R_c \leq 1$, U' é definida negativa, e, pelo teorema 2.3, P_1 é assintoticamente estável.

O número R_c , é chamado de Valor de Reprodutibilidade Efetiva, pois o modelo sofre ações como vacinação, tratamento e isolamento.

- $P_2 = (S_2, I_2, Q_{S2})$

onde

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{S_1}{R_c} \\
I_2 &= \frac{\Delta R_c}{\alpha S_1} \left(1 - \frac{1}{R_c}\right) \\
Q_{S2} &= \frac{\eta_S S_2}{\mu + \rho_S}
\end{aligned}$$

Seja a função de Lyapunov V definida por:

$$V : \{(S, I, Q_S) \in \Omega_1 : S, Q_S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(S, I, Q_S) = \left(S - S_2 - S_2 \ln \frac{S}{S_2} \right) + \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right) + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(Q_S - Q_{S_2} - Q_{S_2} \ln \frac{Q_S}{Q_{S_2}} \right)$$

Segue que a função V é de classe C^1 no interior de Ω_1 , e P_1 é um mínimo global de $V(S, I, Q_S)$ em Ω_1 , e $V(S_2, I_2, Q_{S_2}) = 0$, ou seja, V é definida positiva. E sua derivada com relação ao tempo t é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(S, I, Q_S) &= \left(1 - \frac{S_2}{S} \right) \frac{dS}{dt} + \left(I - \frac{I_2}{I} \right) \frac{dI}{dt} + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(1 - \frac{Q_{S_2}}{Q_S} \right) \frac{dQ_S}{dt} \\ &= \left(1 - \frac{S_2}{S} \right) [\Delta - \alpha SI - (\mu + \nu + \eta_S) S + \rho_S Q_S] \\ &\quad + \left(I - \frac{I_2}{I} \right) [\alpha S - (\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I)] I \\ &\quad + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(1 - \frac{Q_{S_2}}{Q_S} \right) [\eta_S S - (\mu + \rho_S) Q_S] \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = (\mu + \nu + \eta_S) S_2 - \rho_S Q_{S_2} + \alpha S_2 I_2$, $(\kappa + \mu + \phi + \sigma + \eta_I) = \alpha S_2$ e $\eta_S = \frac{(\mu + \rho_2) Q_{S_2}}{S_2}$, segue que $\Delta = (\mu + \nu) S_2 + \mu Q_{S_2} + \alpha S_2 I_2$, assim:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(S, I, Q_S) &= \left(1 - \frac{S_2}{S} \right) [(\mu + \nu) S_2 + \mu Q_{S_2} + \alpha S_2 I_2 - \alpha SI \\ &\quad - \left(\mu + \nu + \frac{(\mu + \rho_2) Q_{S_2}}{S_2} \right) S + \rho_S Q_S] + (I - I_2) [\alpha S - \alpha S_2] I \\ &\quad + \frac{\rho_S}{\mu + \rho_S} \left(1 - \frac{Q_{S_2}}{Q_S} \right) \left[\frac{(\mu + \rho_2) Q_{S_2}}{S_2} S - (\mu + \rho_S) Q_S \right] \\ &= \left(1 - \frac{S_2}{S} \right) \left[\left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S_2}}{Q_S} \right) S_2 - \left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S_2}}{Q_S} \right) S \right] \\ &\quad + \rho_S Q_{S_2} \left(-\frac{S}{S_2} + \frac{Q_S}{Q_{S_2}} + 1 - \frac{S_2 Q_S}{S Q_{S_2}} \right) + \left(1 - \frac{S_2}{S} \right) (\alpha S_2 I_2 - \alpha SI) \\ &\quad + \alpha (I - I_2) (S - S_2) + \rho_S Q_{S_2} \left(\frac{S}{S_2} - \frac{Q_S}{Q_{S_2}} - \frac{S Q_{S_2}}{S_2 Q_S} + 1 \right) \\ &= S_2 \left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S_2}}{S_2} \right) \left(2 - \frac{S}{S_2} - \frac{S_2}{S} \right) + \alpha S_2 I_2 \left(2 - \frac{S_2}{S} - \frac{S}{S_2} \right) \\ &\quad + \rho_2 Q_{S_2} \left(2 - \frac{S_2 Q_S}{S Q_{S_2}} - \frac{S Q_{S_2}}{S_2 Q_S} \right) \\ &= -S_2 \left(\mu + \nu + \mu \frac{Q_{S_2}}{S_2} + \alpha S_2 I_2 \right) \left(\sqrt{\frac{S_2}{S}} - \sqrt{\frac{S}{S_2}} \right)^2 \\ &\quad - \rho_2 Q_{S_2} \left(\sqrt{\frac{S_2 Q_S}{S Q_{S_2}}} - \sqrt{\frac{S Q_{S_2}}{S_2 Q_S}} \right)^2 \end{aligned}$$

Então $\frac{dV}{dt}$ é sempre definida negativa, e com isso, pelo teorema 2.3, P_2 é assintoticamente estável.

Note que P_2 só é válido, do ponto de vista biológico, se $R_c > 1$.

Este modelo aqui apresentado inclui por exemplo, o processo de quarentena como uma maneira de reduzir o período médio de infecção, isolando infectados para que não transmitam a doença. Uma análise mais detalhada deste modelo se faz necessária, tendo em vista que uma fração dos indivíduos isolados, retornam à classe de suscetíveis, caso não estejam infectados. Se estiverem infectados, deveriam ser tratados.

6 Conclusão

Nesta dissertação, foram apresentados, inicialmente, conceitos de estabilidade para sistemas de equações diferenciais lineares e não lineares. Para determinar o tipo de estabilidade foram apresentados dois importantes teoremas: o primeiro e o segundo método de Lyapunov. O primeiro método permite estudar a estabilidade do sistema a partir das características de seus autovalores, enquanto o segundo método permite um estudo por meio de funções de Lyapunov.

No capítulo 3, foi feito um estudo de três modelos clássicos em Epidemiologia: SIS, SIR e SIRS; o primeiro com população constante e variável, e os dois últimos com população constante. A análise de estabilidade desses modelos foi feita através do primeiro método de Lyapunov, ou seja, pelas características dos autovalores do sistema. O primeiro modelo – SIS – envolve duas equações diferenciais. Já os modelos SIR e SIRS, os quais envolvem três variáveis, foram estudados através de combinações dessas variáveis, duas a duas, para facilitar nos cálculos, pois com isso, obtém-se também um sistema de duas equações diferenciais, já que a população é considerada constante. Em alguns momentos, quando nada se podia afirmar a respeito da estabilidade do sistema, foi necessário fazer um estudo da variação da variável em questão com relação ao tempo. Devido a essas indeterminações, o primeiro método acaba sendo um procedimento mais trabalhoso.

No capítulo 4, variações dos modelos clássicos SIS, SIR e SIRS apresentados no capítulo 3, foram consideradas. Uma entrada constante de recrutados e o número de nascimentos diferente do número de mortes foram incluídos, ou seja, a população é variável. Neste capítulo, a análise foi feita utilizando o segundo método de Lyapunov. Foi possível perceber que esse método é mais direto, pois não foi necessário estudar as variáveis duas a duas, e ainda, foi possível considerar uma população não constante. Para os resultados finais dos modelos desse capítulo, tomou-se como base o Valor de Reprodutibilidade Basal, R_0 . Concluiu-se que, dos dois equilíbrios endêmicos encontrados, P_1 e P_2 , o primeiro é sempre assintoticamente estável se $R_0 \leq 1$, e quando isso ocorre, P_2 não existe, do ponto de vista biológico. Caso $R_0 > 1$, então P_2 existe, e é assintoticamente estável.

Por fim, no capítulo 5, foi estudado um modelo SIR para a gripe H1N1, proposto por Alcaraz[1], para obter medidas de controle para evitar surtos epidêmicos. No

modelo apresentado, há isolamento de suscetíveis e infectados, tratamento de infectados e vacinação de suscetíveis, somando um total de sete variáveis. Porém, o estudo foi feito sobre um subsistema, com somente três variáveis, devido a dificuldade de encontrar funções de Lyapunov adequadas. Foi feito um estudo qualitativo, com base no Valor de Reprodutibilidade Efetiva, R_e , e os resultados obtidos são análogos aos dos modelos do capítulo 4.

Vale ressaltar que nos modelos do capítulo 3, quando a população total era constante, o equilíbrio $(N, 0)$ era sempre instável, visto que a população de suscetíveis era igual à população total, e não havendo infectados, a epidemia não se estabelece. Já nos demais modelos, quando a população era variável, o equilíbrio $\left(\frac{\Delta}{\mu}, 0\right)$ e $\left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0\right)$ do capítulo 4 e $\left(\frac{(\mu+\rho_S)\Delta}{(\mu+\rho_S)(\mu+\nu)+\mu\eta_S}, 0, \frac{\eta_S\Delta}{(\mu+\rho_S)(\mu+\nu)+\mu\eta_S\Delta}\right)$ do capítulo 5 eram sempre assintoticamente estáveis, mas não se deve confundir esses fatos, pois no segundo caso, na população de suscetíveis entra uma taxa constante, Δ , de imigrações e nascimentos, e ainda, a população de suscetíveis não é igual a população total.

Foi visto também que, nos modelos estudados, o Valor de Reprodutibilidade Basal e Reprodutibilidade Efetiva dizem muito a respeito da estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados. De fato, esses valores determinam se a epidemia se espalhará ou se será erradicada, já que são o número de infecções secundárias, causadas por um primeiro infectado na população.

Analisando de uma forma geral os dois métodos utilizados, tem-se que o segundo método é mais prático, e permite um estudo num sistema com mais de duas variáveis. Em contrapartida, não é tão fácil encontrar funções de Lyapunov adequadas, o que faz com que nem sempre esse método seja utilizado.

Muitas outras variações dos modelos epidemiológicos aqui apresentados são encontradas na literatura, principalmente em Capasso[7].

Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2011.
- [2] ALCARAZ, G. G.; LEON, C. V. de. Modeling control strategies for influenza a h1n1 epidemics: Sir models. *Revista Mexicana de Física S (58)*, v. 1, p. 37–43, 2012.
- [3] BESSA, G. R. *Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: Modelos Presa-Predador e Competições entre Espécies*. Dissertação (Mestrado) — IGCE / UNESP, Rio Claro, 2011.
- [4] BASSANEZI, R. C.; JR, W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. 1. ed. São Paulo: HARBRA ltda, 1988.
- [5] LEON, C. V. de. On the global stability of sis, sir and sirs epidemic models with standard incidence. *Chaos, Solitons and Fractals*, Elsevier ltda, v. 44, p. 1106–1110, 2011.
- [6] WAKE, G. C.; KOROBEINIKOV, A. Lyapunov functions and global stability for sir, sirs and sis epidemiological models. *Applied Mathematical Letters*, Elsevier, v. 15, p. 955–960, 2002.
- [7] CAPASSO, V. *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. Berlim: Springer-Verlag, 1993.
- [8] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. 2. ed. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, INC, 1980.
- [9] HALE, J. K.; KOÇAK, H. *Dynamics and Bifurcations*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [10] KESHET, L. E. *Mathematical Models in Biology*. 1. ed. Vancouver: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [11] MURRAY, J. D. Mathematical Biology. In: *Biomathematics Texts, vol. 19*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1989.

-
- [12] YANG, H. M. *Epidemiologia Matemática*. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2001.
- [13] Dados sobre Influenza A H1N1 no sítio eletrônico da Organização Mundial de Saúde (OMS). Acesso em setembro de 2012. Disponível em: <<http://www.who.int/>>.

A Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Equações diferenciais de ordem n em geral são escritas na forma:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

onde $y^{(n)}$ é a derivada de ordem n de $y = y(t)$.

Entretanto, é possível facilitar o estudo transformando essa equação em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Para isto, faz-se:

$$\begin{array}{ll} x_1 = y & x'_1 = x_2 \\ x_2 = y' & x'_2 = x_3 \\ x_3 = y'' & \Rightarrow x'_3 = x_4 \\ \vdots & \vdots \\ x_n = y^{n-1} & x'_n = y^{(n)} \end{array}$$

Disso, segue que:

$$\begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_4 \\ \vdots \\ x'_n = F(t, x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

que é um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

De uma forma geral, pode-se escrever um sistema de n equações de primeira ordem como:

$$\begin{array}{l} x'_1 = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_3 = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

Aqui serão apresentados alguns resultados para sistemas de equações lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes, os quais são da forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{A.1}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (x'_1 \ x'_2 \ \cdots \ x'_n)^T \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ com } a_{ij} \in \mathbb{R} \\ \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T \end{array} \right.$$

Se forem procuradas soluções na forma $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\xi}e^{\lambda t}$, então a seguinte equação deve ser satisfeita

$$(A - \lambda I) \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (\text{A.2})$$

ou seja, λ é um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor, ambos associados a matriz A . Uma vez obtidos os autovalores através da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

autovetores são determinados substituindo-se em A.2 os autovalores encontrados.

Para o caso de n autovalores reais distintos, a solução geral é dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{\lambda_n t} \quad (\text{A.3})$$

Se existirem autovalores iguais ou complexos, após algumas manipulações algébricas, é possível obter um conjunto fundamental de soluções e a solução de aspecto característico ao de (A.3).

Como uma solução do sistema (A.1) é uma função vetorial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$, então essa função pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no espaço n -dimensional $x_1 x_2 \dots x_n$.

Como nem sempre é possível efetuar os cálculos necessários para se ter uma boa análise de um sistema de equações diferenciais de ordem n , uma alternativa para esse problema é fazer uma análise geométrica, que muitas vezes permite uma abordagem satisfatória. Assim sendo, essa curva será vista como uma trajetória percorrida por uma partícula em movimento com velocidade $\frac{dx}{dt}$, especificada pela equação diferencial. E para que seja possível visualizar essa trajetória, será tratado somente o caso bidimensional¹. Deste modo, o plano $x_1 x_2$ e o conjunto de trajetórias serão chamados de plano de fase.

É claro que, dependendo da natureza dos autovalores de A , diferentes retratos de fase são obtidos, os quais serão analisados a seguir.

¹O estudo do caso $n \times n$ não nos permite uma visualização gráfica para o estudo qualitativo que desejamos, contudo é análogo ao caso 2×2 , sendo feito através de combinações desses últimos.

A.1 Autovalores Reais

A.1.1 Caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

A solução geral é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} e^{\lambda_2 t} \quad (\text{A.4})$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, segue que, se $c_1 = 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção de $\boldsymbol{\xi}^{[2]}$. Do mesmo modo, se $c_2 = 0$, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção de $\boldsymbol{\xi}^{[1]}$. E, independente das constantes c_1 e c_2 , $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ sempre que $t \rightarrow \infty$.

Além disso, escrevendo a solução (A.4) da seguinte forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_2 t} \left[c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} \right]$$

segue que, como $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, então quando $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ seguindo a trajetória de $c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]}$, ou seja, dada qualquer condição inicial a solução tende à solução identicamente nula na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{[2]}$, a menos que esta condição inicial esteja na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{[1]}$, como já descrito acima.

Exemplo A.1. Considere o sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cujas solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

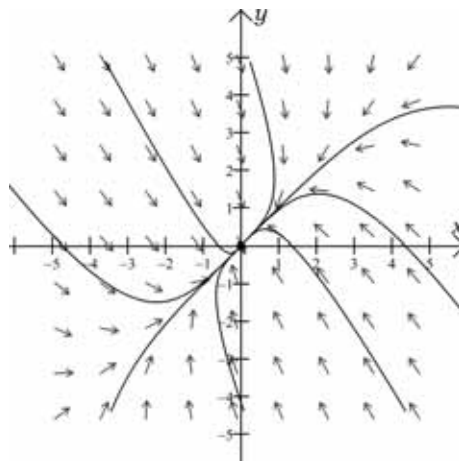


Figura A.1: Plano de fase para o exemplo A.1.

Neste caso, a solução é dita assintoticamente estável, e o ponto $(0,0)$ é chamado nó atrator ou sorvedouro.

A figura A.1 é característica para exemplos em que os autovalores são negativos.

A.1.2 Caso $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

A solução geral é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} e^{\lambda_2 t} \quad (\text{A.5})$$

Quando $t \rightarrow \infty$, se $c_1 = 0$, então $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$, com o sinal dependendo apenas da constante c_2 . Da mesma forma, se $c_2 = 0$, então $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$, com o sinal dependendo apenas da constante c_1 . Já no caso de $c_1, c_2 \neq 0$, a solução (A.5) será analisada como segue:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t} \left[c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right]$$

Como $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, então quando $t \rightarrow \infty$, $c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ se torna desprezível, fazendo com que a solução tenda a infinito, numa trajetória com direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{[1]}$.

Exemplo A.2. Considere o sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cuja solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}$.

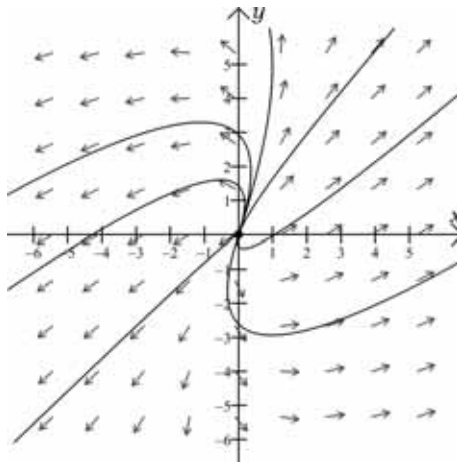


Figura A.2: Plano de fase para o exemplo A.2.

Neste caso, a solução é dita instável, e o ponto $(0, 0)$ é chamado nó ou fonte. A figura A.2 é típica para autovalores positivos.

A.1.3 Caso $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Novamente, tomando a solução geral na forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} e^{\lambda_2 t}$$

segue que, para $t \rightarrow \infty$, tem-se $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$, dependendo apenas do sinal de c_2 . Ainda mais, como $c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} e^{\lambda_1 t}$ se torna desprezível, segue que, qualquer que seja a condição inicial, ela tenderá a infinito numa trajetória na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{[2]}$, exceto se a condição inicial estiver na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{[1]}$, pois neste caso, $c_2 = 0$ e, conseqüentemente, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$.

Exemplo A.3. Considere o sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cuja solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

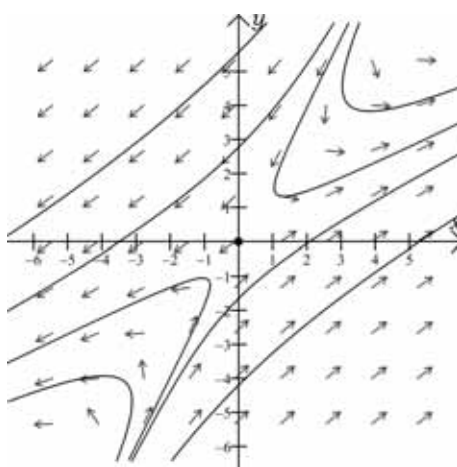


Figura A.3: Plano de fase para o exemplo A.3.

Neste caso, a solução é dita instável, e o ponto $(0, 0)$ é chamado ponto de sela. A figura A.3 é típica de autovalores de sinais contrários.

A.1.4 Caso $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0$, com autovetores independentes

A solução geral é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} e^{\lambda t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} e^{\lambda t} \quad (\text{A.6})$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, se $c_1 = 0$, segue que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ numa trajetória de direção $\boldsymbol{\xi}^{[2]}$, e se $c_2 = 0$, segue que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ numa trajetória de direção $\boldsymbol{\xi}^{[1]}$. Para a análise do caso $c_1, c_2 \neq 0$, a solução (A.6) será escrita como segue:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} \right]$$

Observe que $c_1 \boldsymbol{\xi}^{[1]} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{[2]} = c \boldsymbol{\xi}$, com $c \in \mathbb{R}$, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção do novo autovetor $\boldsymbol{\xi}$, e como $\boldsymbol{\xi}^{[1]}$ e $\boldsymbol{\xi}^{[2]}$ são arbitrários e independentes, é possível ter diversos $\boldsymbol{\xi}$. Logo, o plano de fase será formado por retas que passam pela origem.

Exemplo A.4. Considere o sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cuja solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

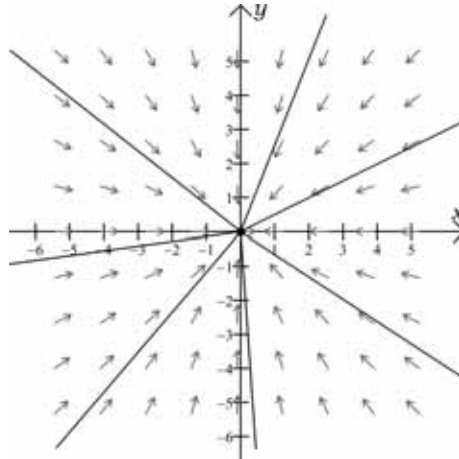


Figura A.4: Plano de fase para o exemplo A.4, com autovetores independentes.

Neste caso, a solução é dita assintoticamente estável, e o ponto $(0, 0)$ é chamado nó próprio ou ponto estrela.

A.1.5 Caso $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 > 0$, com autovetores independentes

Este caso é análogo ao caso anterior e difere apenas no sentido da trajetória, pois neste caso, quando $t \rightarrow \infty$, $\|x(t)\| \rightarrow \infty$, dependendo apenas do sinal de c_1 e c_2 .

Exemplo A.5. Considere o sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cuja solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$.

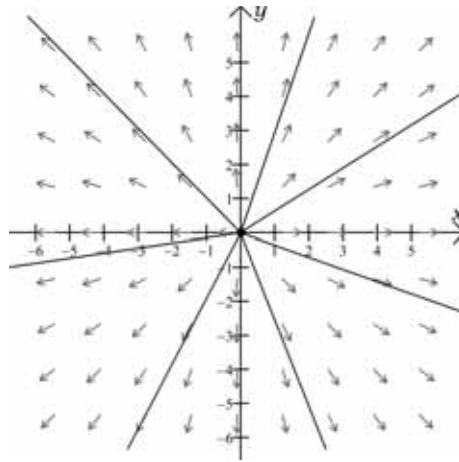


Figura A.5: Plano de fase para o exemplo A.5, com autovetores independentes.

Neste caso, a solução é dita instável, e o ponto $(0, 0)$ também é chamado nó próprio ou ponto estrela.

A.1.6 Caso $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0$, com autovetores dependentes

A solução geral é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} + c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t}) \quad (\text{A.7})$$

sendo $\boldsymbol{\eta}$ o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido λ (ver Boyce[2]).

Deste modo, fazendo $t \rightarrow \infty$, segue que, se $c_1 = 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}$, já que o termo $e^{\lambda t}$ tende a zero mais rapidamente que $t e^{\lambda t}$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda t} / t e^{\lambda t} = 0$); se $c_2 = 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}$. E, se $c_1, c_2 \neq 0$, segue que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}$, pois o termo $\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t}$ se torna dominante.

Exemplo A.6. Considere o sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cuja solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$.

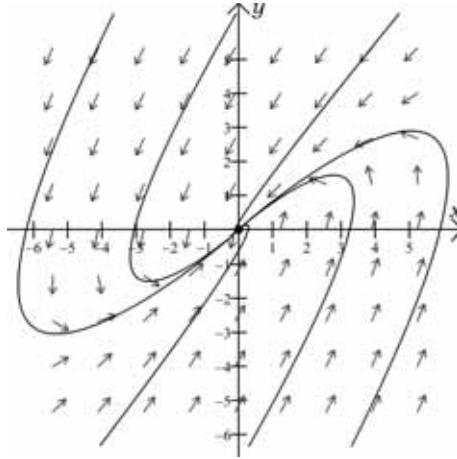


Figura A.6: Plano de fase para o exemplo A.6, com autovetores dependentes.

Neste caso, a solução é dita assintoticamente estável, e o ponto $(0, 0)$ é chamado nó impróprio ou degenerado.

A.1.7 Caso $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, com autovetores dependentes

A solução geral é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} + c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta} e^{\lambda t}) \quad (\text{A.8})$$

sendo $\boldsymbol{\eta}$ o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido ξ .

Quando $t \rightarrow \infty$, segue que, se $c_1 = 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$ na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}$, já que o termo $\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t}$ é dominante, como no caso anterior; se $c_2 = 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$ na direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}$. E, se $c_1, c_2 \neq 0$, é necessário uma análise mais detalhada. Se $c_1, c_2 > 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$; se $c_1, c_2 < 0$, então $\mathbf{x}(t) \rightarrow -\infty$; ambos na direção de $\boldsymbol{\xi}$, pois o termo $\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t}$ é dominante.

Quando c_1 e c_2 têm sinais opostos, é possível escrever a solução (A.8) como segue:

$$\mathbf{x}(t) = [(c_1 \boldsymbol{\xi} + c_2 \boldsymbol{\eta}) + c_2 \boldsymbol{\xi} t] e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{x}(t) = [c_3 \boldsymbol{\mu} + c_2 \boldsymbol{\xi} t] e^{\lambda t}$$

Note que existe uma nova constante c_3 e um novo autovetor $\boldsymbol{\mu}$, mas mesmo assim, o termo dominante continua sendo $\boldsymbol{\xi} t e^{\lambda t}$, ou seja, $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ na direção de $\boldsymbol{\xi}$.

Exemplo A.7. Considere o sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cuja solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \right]$.

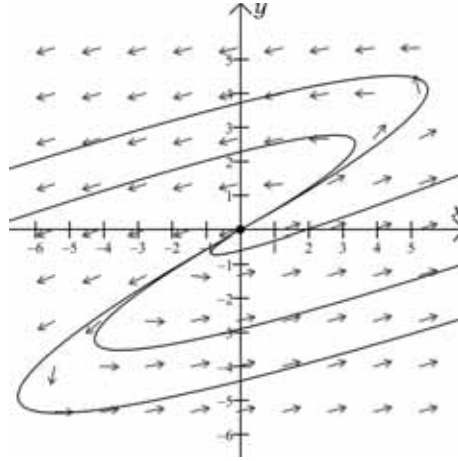


Figura A.7: Plano de fase para o exemplo A.7, com autovetores dependentes.

Neste caso, a solução é dita instável, e o ponto $(0, 0)$ também é chamado nó impróprio ou degenerado.

A.2 Autovalores Complexos

A.2.1 Caso $\lambda = a \pm bi$

Para este caso, será feita uma análise a partir do sistema, em vez de fazê-la a partir da solução. Para isto, considere os autovalores na forma $\lambda = a \pm bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Isto significa que o sistema de equações diferenciais pode ser visto como segue:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{A.9})$$

e escrevendo na forma escalar, tem-se:

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 \\ x_2' &= -bx_1 + ax_2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A partir de agora, serão utilizadas coordenadas polares r, θ , ou seja:

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{x_2}{x_1} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Derivando as equações (A.11) em relação à t :

$$\begin{aligned} rr' &= x_1x_1' + x_2x_2' \\ \theta' \sec^2\theta &= \frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{x_1^2} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

E substituindo as equações (A.10) em (A.12), tem-se:

$$\begin{aligned} r &= ke^{at} \\ \theta &= -bt + \theta_0 \end{aligned}$$

que são as equações paramétricas em coordenadas polares do sistema A.9, onde $k \in \mathbb{R}$ e θ_0 é o valor de θ quanto $t = 0$.

Pode-se observar que, como é considerado $b > 0$, a medida que t aumenta, tem-se que θ diminui, isto é, a trajetória é no sentido horário; do mesmo modo que, se $b < 0$, a medida que t aumenta, θ também aumenta, isto é, a trajetória é no sentido anti-horário.

Também segue que, quando $t \rightarrow \infty$, $|r| \rightarrow \infty$, se $a > 0$, da mesma forma, se $a < 0$, então $r \rightarrow 0$.

Portanto, a trajetória é espiral, e o sentido e a direção dependem apenas do sinal de a e b , se $a > 0$, a solução é dita instável, e se $a < 0$ a solução é dita assintoticamente estável.

Exemplo A.8. Considere o sistema:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ 4,5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

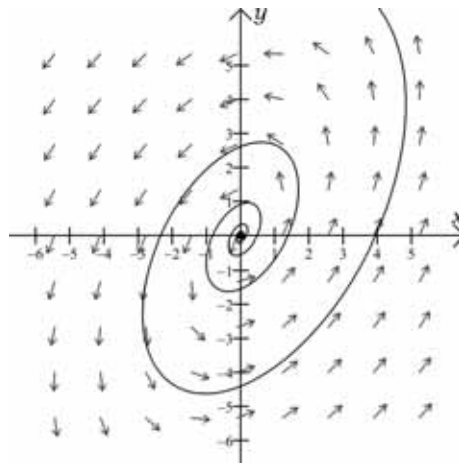


Figura A.8: Plano de fase para o A.8.

Temos os autovalores $\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{11}i$. E como $a = \frac{3}{2} > 0$, a solução é instável.

A.2.2 Caso $\lambda = \pm bi$

Ocorre algo similar ao caso anterior, a diferença é que agora os autovalores são da forma $\lambda = \pm ib$, com $b \in \mathbb{R}^+$, e conseqüentemente o sistema de equações diferenciais é como segue:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{A.13})$$

Seguindo os mesmos passos utilizados anteriormente, obtemos as seguintes equações paramétricas do sistema A.13:

$$\begin{aligned} r &= k \\ \theta &= -bt + \theta_0 \end{aligned}$$

Neste caso, como r é constante, as trajetórias serão círculos com centro na origem, e o sentido (horário ou anti-horário) depende apenas do sinal de b , como no caso anterior.

Exemplo A.9. Considere o sistema:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

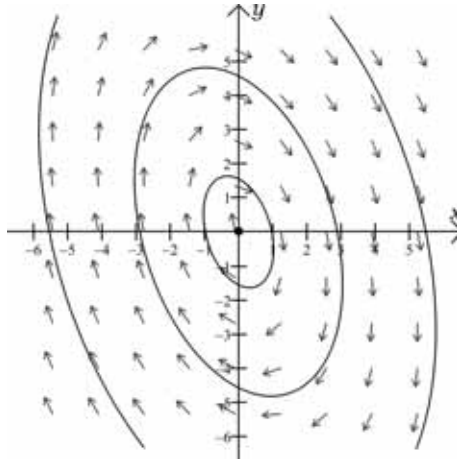


Figura A.9: Plano de fase para o exemplo A.9.

Neste caso, a solução é dita estável, e o ponto $(0,0)$ é chamado centro.

Analisando todos esses casos, é possível concluir três possíveis situações:

1. **Estabilidade Assintótica:** Quando $t \rightarrow \infty$ as trajetórias tendem ao ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Este é o caso em que os autovalores são reais negativos ou complexos com parte real negativa.
2. **Estabilidade:** Quando $t \rightarrow \infty$ as trajetórias não tendem ao ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, mas permanecem limitadas. Este é o caso em que os autovalores são imaginários puros.
3. **Instabilidade:** Quando $t \rightarrow \infty$ as trajetórias, exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tendem a infinito. Este é o caso em que os autovalores são reais positivos, ou ao menos um autovalor é real positivo, ou os autovalores são complexos com parte real positiva.