

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

“Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural utilizando o elemento finito prismático regular parabólico”

MAICON MARINO ALBERTINI

Orientador: Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Conhecimento: Estruturas

Ilha Solteira – SP
Agosto / 2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico
de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

- A334a Albertini, Maicon Marino.
Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural
utilizando o elemento finito prismático regular parabólico / Maicon Marino Albertini. --
Ilha Solteira: [s.n.], 2009
158 f. : il., fots. color.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha
Solteira. Área de Conhecimento: Estruturas, 2009
- Orientador: Rogério de Oliveira Rodrigues
Bibliografia: p. 155-158
1. Alvenaria – Estruturas. 2. Método dos elementos finitos. 3. Teorias não-lineares.
4. Comportamento estrutural não-lineares. 5. Prismas.

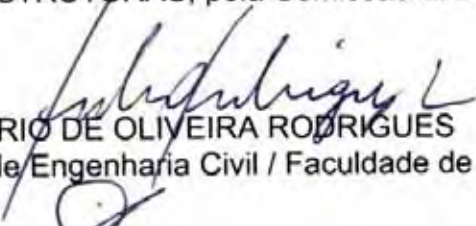
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural utilizando o elemento finito prismático regular parabólico

AUTOR: MAICON MARINO ALBERTINI

ORIENTADOR: Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA CIVIL, Área: ESTRUTURAS, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. JEFFERSON SIDNEY CAMACHO

Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. MARCIO ROBERTO SILVA CORREA

Departamento de Engenharia de Estruturas / Escola de Engenharia de São Carlos-USP

Data da realização: 07 de agosto de 2009.

Dedico este trabalho a todos meus familiares e amigos que contribuíram
com apoio, dedicação e incentivo para mais esta conquista em minha
vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade de crescimento e amadurecimento, me dando força e coragem para enfrentar o desconhecido.

Ao professor Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues, por não medir esforços no desenvolvimento deste trabalho para que tudo ocorresse conforme o planejado, proporcionando toda ajuda e apoio que precisei.

Ao Prof. Dr. Jefferson S. Camacho, pelas valiosas contribuições e por todo acompanhamento aos trabalhos laboratoriais.

Ao Prof. Dr. Jorge Luis Akasaki, pela confiança.

Aos meus pais Cloves e Sandra, por todo apoio que precisei e que sem a ajuda e compreensão deles eu jamais teria alcançado este objetivo.

Ao meu irmão Marlon e minha namorada Ana Cláudia por segurar a barra em momentos difíceis.

Aos grandes incentivadores, desde os tempos da graduação, em especial ao Prof. MSc. Roberto Racanicchi.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil, que a cada dia de convivência proporcionaram um aumento de meus conhecimentos de forma exponencial.

Aos amigos que fiz ao longo desta caminhada, cada um sabe que contribui do seu jeito, que essas amizades se preservem por toda vida.

RESUMO

ALBERTINI, M. M., **Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural utilizando o elemento finito prismático regular parabólico**. 2009. 158f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

Com a expansão da Engenharia de Estruturas e os diferentes sistemas construtivos que vêm ao longo dos anos surgindo na indústria da construção civil, o Engenheiro Estrutural necessita incorporar a análise numérica como uma ferramenta de trabalho usual, de modo a manter a qualidade e a competitividade de seu trabalho, ainda que a análise dos projetos em alvenaria estrutural tenha sua modelagem bastante simples. A princípio, as ferramentas computacionais que buscam traduzir a realidade do comportamento deste método construtivo devem ser incorporadas como parte essencial ao auxílio no desenvolvimento destes projetos.

Embasando-se neste princípio, o presente trabalho tem como objetivo principal a simulação numérica do comportamento não-linear físico de prismas, vazios e cheios com graute, de alvenaria estrutural submetidos a ações verticais. A discretização estrutural é feita por meio do Método dos Elementos Finitos, utilizando elementos prismáticos regulares parabólicos com vinte nós, simulando as partes do bloco de concreto (14 x 19 x 29 cm), as aberturas que receberão o graute e as juntas de argamassa, permitindo assim a modulação tridimensional dos prismas, bem como a introdução separada do módulo de elasticidade do concreto, do graute e da argamassa.

Como parte integrante deste trabalho está a dedução do elemento finito a ser utilizado na discretização do prisma e para a consideração da não-linearidade física dos materiais utiliza-se o critério de Mohr-Coulomb, permitindo representar a diminuição da rigidez em função da ruptura do material. O programa desenvolvido foi utilizado para a simulação de vários ensaios realizados no NEPAE - Núcleo de Estudo e Pesquisa da Alvenaria Estrutural, cujos resultados apresentados são bastante satisfatórios.

Palavras-chave: alvenaria estrutural; Método dos Elementos Finitos; comportamento estrutural não-linear, prismas.

ABSTRACT

ALBERTINI, M. M., **Experimental and numeric analysis of behavior of prisms of structural masonry using the prismatic regular parabolic finite element**. 2009. 138f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

With the expansion of the structures engineering and the different constructive systems that have been appearing as the years pass by in the industry of the building site, the structural engineer needs to incorporate the numeric analysis as an usual tool of work in a way to keep the quality and the competitiveness of his work, although the analysis of the projects in structural masonry is quite simple as modeling. At first, the computational tools that try to translate the reality of the behavior of this constructive method should be incorporate as an essential part to the aid in the development of these projects.

Based on this idea, the present work main goal is the numeric simulation of the nonlinear physicist behavior of prisms, empty and full of concrete, of structural masonry submitted to vertical actions. The structural discretization is made by the Finite Elements Method, using prismatic elements with twenty joints, simulating the parts of the concrete block (14 x 19 x 29 cm), the openings that will receive the graute and the mortar joints, which allows the three-dimensional modulation of the prisms, as well as the separated introduction of the module of elasticity of the concrete block, of the concrete and of the mortar.

A part of this work is the deduction of the finite element that will be used in the discretization of the prism. For the consideration of the nonlinear physics of the materials, the criterion of Mohr-coulomb will be used, permitting to represent the decrease of the rigidity in function of the rupture of the material. The developed program was used for the simulation of several rehearsals accomplished in NEPAE - *Núcleo de Estudo e Pesquisa da Alvenaria Estrutural*, whose presented results are quite satisfactory.

Key word: structural masonry; Finite Elements Method; nonlinear structural behavior, prisms.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Comportamento tensão x deformação típico do concreto...	24
Figura 2.2 - Curva típica tensão x deformação axial e tensão x deformação volumétrica do concreto para ensaio de compressão uniaxial.	25
Figura 2.3 - Critério de Mohr-Coulomb.....	27
Figura 2.4 - Representação geométrica da superfície de ruptura do critério de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais.....	28
Figura 3.1 - Elemento finito prismático regular parabólico com vinte nós.....	45
Figura 3.2 - Pirâmide de Pascal (Fonte: ZIENKIEWICZ (2000)).....	46
Figura 3.3 - Valores para as coordenadas nodais (Fonte: ZIENKIEWICZ (2000)).....	47
Figura 4.1 - Estado de tensão na alvenaria.....	74
Figura 5.1 - Capeamento dos blocos	81
Figura 5.2 - Blocos vazios capeados em ambas as faces sem instrumentação	81
Figura 5.3 - Esquema de posicionamento dos extensômetros. Fonte: ANDOLFATO (2002, p. 55).	82
Figura 5.4 - Sistema de aquisição de dados. Fonte: Logullo (2006, p. 47).	83
Figura 5.5 - Bloco instrumentado durante ensaio de carregamento	84
Figura 5.6 - Gráfico Tensão x Deformação dos extensômetros nos blocos vazios	86
Figura 5.7 - Gráfico Tensão x Deformação dos LVDT's nos Blocos vazios	87
Figura 5.8 - Sobreposição dos dados obtidos com LVDT e Extensômetro.	88
Figura 5.9 - Modo de ruptura dos blocos vazios.....	89
Figura 5.10 - Amostra de parede do bloco fixada nos elementos especiais.	90
Figura 5.11 - Corpo-de-prova posicionado na prensa para realização do ensaio.....	91
Figura 5.12 - Amostra de parede rompida após ensaio de tração.....	93
Figura 5.13 - Corpos-de-prova argamassas A1 e A2.....	94

Figura 5.14 - Corpo-de-prova preparado para receber carregamento...	95
Figura 5.15 - Relação Tensão x Deformação da Argamassa A01	97
Figura 5.16 - Relação Tensão x Deformação da Argamassa A02	98
Figura 5.17 - Modo de ruptura dos corpos-de-prova de argamassa.	99
Figura 5.18 - Ensaio de compressão axial em prensa manual em CP de argamassa	100
Figura 5.19 - Ensaio de compressão diametral em prensa manual em CP de argamassa (Método Brasileiro)	100
Figura 5.20 - Corpos-de-prova de graute.....	102
Figura 5.21 - Corpo-de-prova de graute instrumentado e posicionado em máquina de ensaio	104
Figura 5.22 - Relação tensão x deformação do graute.....	105
Figura 5.23 - Ensaio de compressão diametral em CP de graute.....	106
Figura 5.24 - Prismas assentados com argamassa A1 (PR2-A1).....	108
Figura 5.25 - Prismas assentados com argamassa A2 (PR2-A2).....	108
Figura 5.26 - Prismas assentados com argamassa A2 e cheios de graute (PR2-A2-G1).....	109
Figura 5.27 - Esquema de instrumentação dos prismas.....	111
Figura 5.28 - Instrumentos utilizados no trabalho: célula de carga, LVDT, sistema de aquisição.	111
Figura 5.29 - Prisma instrumentado.	112
Figura 5.30 - Modo de ruptura do prisma PR2-A01.....	114
Figura 5.31 - Modo de ruptura do prisma PR2-A02.....	115
Figura 5.32 - Fissuração nos prismas PR2-A02-G1.....	117
Figura 5.33 - Relação tensão x deformação do bloco assentado com a argamassa A01	118
Figura 5.34 - Relação tensão x deformação do bloco assentado com a argamassa A02	118
Figura 5.35 - Relação tensão x deformação do bloco assentado com a argamassa A02 e grauteado.	119
Figura 5.36 - Relação tensão x deformação da Argamassa A01 no prisma vazio.....	120
Figura 5.37 - Relação tensão x deformação da Argamassa A02 no prisma vazio.....	121
Figura 5.38 - Relação tensão x deformação da Argamassa A02 no prisma com graute.	122

Figura 5.39 - Relação tensão-deformação genérica.....	124
Figura 6.1 - Prisma subdividido em elementos.....	129
Figura 6.2 - Posição das camadas de nós nos primas.....	130
Figura 6.3 - Camada 01 de nós	131
Figura 6.4 - Camada 02 de nós	131
Figura 6.5 - Camada 03 de nós	132
Figura 6.6 - Camada 04 de nós	132
Figura 6.7 - Camada 05 de nós	133
Figura 6.8 - Camada 06 de nós	133
Figura 6.9 - Camada 07 de nós	134
Figura 6.10 - Camada 08 de nós	134
Figura 6.11 - Camada 09 de nós	135
Figura 6.12 - Camada 10 de nós	135
Figura 6.13 - Camada 11 de nós	136
Figura 6.14 - Fluxograma geral de cálculo.....	137
Figura 7.1 - Primeiros elementos a romper no PR2-A01.....	143
Figura 7.2 - Gráfico Força x Deslocamento comparativo entre resultados experimentais e numéricos obtidos - PR2-A01.....	144
Figura 7.3 - Primeiros elementos a romper no PR2-A02.....	146
Figura 7.4 - Gráfico Força x Deslocamento comparativo entre resultados experimentais e numéricos obtidos - PR2-A02.....	147
Figura 7.5 - Gráfico Força x Deslocamento comparativo entre resultados experimentais e numéricos obtidos - PR2-A02-G1.....	150

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores mínimos de resistências da NBR 6136/07.....	65
Tabela 2 - Dimensões das espessuras em função da classe, NBR 6136/07.	66
Tabela 3 - Dimensões reais, NBR 6136/07.....	66
Tabela 4 - Exigências mínimas para argamassa. Fonte: NBR 8798/85....	71
Tabela 5 - Traços e resistências especificadas pela BS 5628 - Parte 1 (1992).....	75
Tabela 6 - Quantidade de blocos e ensaios a serem realizados.....	80
Tabela 7 - Resultados dos ensaios: Blocos Vazios.....	85
Tabela 8 - Resistência à tração das amostras de parede.....	92
Tabela 9 - Resistência à compressão das amostras de parede.....	92
Tabela 10 - Argamassas e dosagem	94
Tabela 11 - Quantidade de corpos-de-prova de cada argamassa e ensaios a serem realizados.	94
Tabela 12 - Resistência à compressão Argamassa A01.....	96
Tabela 13 - Resistência à compressão Argamassa A02.....	96
Tabela 14 - Relação entre f_c e f_t para argamassas.	101
Tabela 15 - Dosagem do graute.	102
Tabela 16 - Quantidade de corpos-de-prova de graute e ensaios.....	102
Tabela 17 - Resistência a compressão do Graute G1.....	103
Tabela 18 - Relação entre f_c e f_t para graute.	106
Tabela 19 - Ensaios realizados com os prismas.....	109
Tabela 20 - Resistência dos prismas PR2-A01.....	113
Tabela 21 - Resistência dos prismas PR2-A02.....	114
Tabela 22 - Resistência dos prismas PR2-A02-G1.....	116
Tabela 23 - Deslocamento dos nós 653, 669, 729 e 745 no PR2-A01....	143
Tabela 24 - Deslocamento dos nós 653, 669, 729 e 745 no PR2-A02....	146
Tabela 25 - Deslocamento dos nós 653, 669, 729 e 745 no PR2-A02-G1.	149

LISTA DE SÍMBOLOS

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Componentes de deformações lineares (específicas) nas direções x, y, z
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Componentes de deformações (específicas) de cisalhamento ou de distorções
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Componentes normais de tensões nas direções x, y, z
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Componentes cisalhantes de tensão
E	Módulo de elasticidade longitudinal
ν	Coefficiente de Poisson
f_c	Resistência à compressão do material
c	Coesão do material
ϕ	Ângulo de atrito interno do material
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
I_1	Primeiro invariante do tensor das tensões
J_2	Segundo invariante do tensor desviador
Π_p	Energia potencial total
U	Energia de deformação elástica
Ω	Energia potencial das forças externas
$\underline{f}_e$	Vetor de forças nodais equivalentes do elemento
$\underline{d}$	Vetor das componentes de deslocamento nodais
μ_0	Energia de deformação específica
V_e	Volume do elemento

ϕ	Matriz das funções de forma do elemento
$\tilde{E}$	Matriz dos coeficientes elásticos
$\tilde{L}$	Operadores de derivação
$\underline{u}$	Vetor dos deslocamentos do elemento finito
$\tilde{k}_s$	Matriz de rigidez secante do elemento
$\underline{p}_v$	Vetor de forças volumétricas
$\underline{p}_s$	Vetor de forças superficiais
$\underline{p}_c$	Vetor de forças concentradas no elemento
ξ, η, ζ	Coordenadas adimensionais ou normalizadas
x, y, z	Coordenadas cartesianas do sistema local
a, b, c	Dimensões do elemento finito
f_c	Resistência à compressão média
f_t	Resistência à tração média
A, L, D	Dimensões do corpo-de-prova, sendo: Área do corpo-de-prova, comprimento do corpo-de-prova e diâmetro do corpo-de-prova
E_0	Módulo de elasticidade inicial
E_{INST}	Módulo de elasticidade instantâneo
R	Redutor de rigidez

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	17
1.1 - TEMA E MOTIVAÇÃO	17
1.2 - OBJETIVOS	19
1.3 - APRESENTAÇÃO	20
CAPÍTULO 2 - MODELO FÍSICO NÃO-LINEAR PARA CONCRETO	22
2.1 - COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO CONCRETO	23
2.2 - CRITÉRIO DE RUPTURA DE MOHR-COULOMB	26
CAPÍTULO 3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	30
3.1 - PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL ESTACIONÁRIA	31
3.2 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	34
3.2.1 - <i>Vetor das forças nodais equivalentes</i>	39
3.2.2 - <i>Matriz de rigidez do elemento</i>	42
3.3 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR PARABÓLICO	44
CAPÍTULO 4 - ALVENARIA ESTRUTURAL	63
4.1 - DEFINIÇÃO	63
4.2 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	63
4.3 - BLOCOS DE CONCRETO	64
4.4 - ARGAMASSAS DE ASSENTAMENTO	68
4.4.1 - <i>Trabalhabilidade</i>	69
4.4.2 - <i>Retenção de água</i>	71
4.4.3 - <i>Aderência</i>	72
4.4.4 - <i>Resistência à compressão</i>	72
4.4.5 - <i>Assentamento</i>	75
4.5 - GRAUTE	76
CAPÍTULO 5 - ANÁLISE EXPERIMENTAL	79
5.1 - BLOCOS VAZIOS	79
5.1.1 - <i>Procedimento para ensaio dos blocos</i>	80
5.1.2 - <i>Ensaio de resistência à compressão de blocos vazios</i>	83
5.1.3 - <i>Ensaio de tração das paredes do bloco</i>	89
5.2 - ARGAMASSAS	93

5.2.1 -	<i>Ensaio de compressão das argamassas</i>	<i>95</i>
5.2.2 -	<i>Correlação entre resistência à compressão e resistência à tração da argamassa</i>	<i>99</i>
5.3 -	<i>GRAUTE</i>	<i>101</i>
5.3.1 -	<i>Resistência à compressão</i>	<i>103</i>
5.3.2 -	<i>Deformabilidade</i>	<i>104</i>
5.3.3 -	<i>Correlação entre resistência à compressão e resistência à tração do graute</i>	<i>105</i>
5.4 -	<i>PRISMAS</i>	<i>107</i>
5.4.1 -	<i>Preparação dos prismas vazios e grauteados</i>	<i>107</i>
5.4.2 -	<i>Procedimento para ensaio dos prismas</i>	<i>109</i>
5.4.3 -	<i>Capeamento dos prismas</i>	<i>110</i>
5.4.4 -	<i>Determinação da resistência à compressão axial e deformabilidade dos prismas</i>	<i>110</i>
5.4.5 -	<i>Resistência dos prismas</i>	<i>112</i>
5.4.6 -	<i>Deformabilidade do bloco no prisma.</i>	<i>117</i>
5.4.7 -	<i>Deformabilidade da argamassa no prisma</i>	<i>119</i>
5.5 -	<i>DETERMINAÇÃO DA RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO</i>	<i>122</i>
5.5.1 -	<i>Módulo de elasticidade instantâneo do bloco.....</i>	<i>123</i>
5.5.2 -	<i>Módulo de elasticidade instantâneo do graute.....</i>	<i>125</i>
5.5.3 -	<i>Módulo de elasticidade instantâneo da argamassa.....</i>	<i>126</i>
CAPÍTULO 6 -	ANÁLISE NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS	128
6.1 -	<i>ANÁLISE NUMÉRICA</i>	<i>128</i>
6.2 -	<i>DISCRETIZAÇÃO DO PRISMA</i>	<i>129</i>
6.3 -	<i>FLUXOGRAMA GERAL DE CÁLCULO</i>	<i>136</i>
CAPÍTULO 7 -	ANÁLISE COMPARATIVA	141
7.1 -	<i>PRISMA VAZIO ASSENTADO COM ARGAMASSA A01</i>	<i>141</i>
7.2 -	<i>PRISMA VAZIO ASSENTADO COM ARGAMASSA A02</i>	<i>144</i>
7.3 -	<i>PRISMA GRAUTEADO ASSENTADO COM ARGAMASSA A02.....</i>	<i>147</i>
CAPÍTULO 8 -	CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
8.1 -	<i>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS</i>	<i>151</i>
8.2 -	<i>CONCLUSÃO</i>	<i>153</i>
8.3 -	<i>PROPOSTA PARA DESENVOLVIMENTO FUTURO.....</i>	<i>153</i>

REFERÊNCIAS	155
ANEXO I	A-1

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Tema e motivação

Conforme citado por Logullo (2006, p. 17), impulsionada pelos baixos custos e o déficit habitacional nacional, a alvenaria estrutural apresenta grande potencial de crescimento por propiciar maior racionalidade na execução da obra, redução de consumo e desperdício dos materiais, aumentando a eficiência da mão-de-obra, além de apresentar nítidas vantagens quanto à diminuição de espessuras de revestimento a serem utilizadas.

A compatibilização de todos os elementos envolvidos na alvenaria, tais como bloco, argamassa, graute e armadura, é primordial e indispensável para se maximizar e aperfeiçoar o seu desempenho, com o aproveitamento de todo o potencial do sistema. Essa compatibilidade só é possível com o conhecimento das características dos materiais e dos fenômenos físicos e mecânicos, desenvolvidos na alvenaria quando em regime de trabalho (MENDES, 1998, p. 2).

Segundo a NBR 10837 (1989, p.14), as tensões admissíveis da alvenaria devem ser baseadas na resistência dos prismas na idade de 28 dias ou na idade em que a estrutura estiver submetida ao carregamento total.

Por outro lado, o engenheiro sempre tem por meta representar os fenômenos físicos através da modelagem numérica. Porém, muitas vezes, estes fenômenos estão além do alcance de abstrações matemáticas. É nesse momento que se recorre à natureza para subsidiar as informações necessárias para se entender o

comportamento de um sistema, através da modelagem física (ANDOLFATO, 2002, p. 5).

Segundo Faglioni (2006), a análise estrutural estática objetiva a determinação da intensidade e da forma de distribuição dos esforços em um determinado sistema estrutural, quando ele é submetido a carregamentos quaisquer, sem que estes variem ao longo do tempo. Assim, o campo de tensões calculado deve apresentar um equilíbrio entre as forças internas e externas, bem como deslocamentos contínuos.

De acordo com o tipo de comportamento estrutural que se deseja estudar, a análise pode ser linear ou não-linear. No caso de análise linear, deve-se levar em consideração a manutenção da geometria inicial (linearidade geométrica) e das propriedades físicas (linearidade física) específicas do material como referência no equilíbrio do sistema; já no caso da análise não-linear, considera-se a alteração da geometria (não-linearidade geométrica) ou das propriedades físicas do material (não-linearidade física) ou, ainda, a alteração geométrica e física (dupla não-linearidade).

Uma vez que os sistemas estruturais são, geralmente, admitidos como meios contínuos, a maior dificuldade encontrada na análise estrutural está no fato de que as equações consistentes de equilíbrio que governam esses sistemas são equações diferenciais parciais e devem satisfazer suas condições de contorno. Cabe ressaltar que os sistemas estruturais contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade, em função dessa continuidade, fato esse que dificulta a resolução do problema.

Para transposição de tal dificuldade, com o advento dos computadores, foram desenvolvidos métodos numéricos, capazes de transformar o sistema estrutural contínuo em um sistema estrutural discreto, com um número finito de graus de liberdade, dando uma boa resposta no que diz respeito ao comportamento real da estrutura. Dentre esses métodos, pode-se citar o Método das Diferenças Finitas,

Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno, entre outros.

O MEF tem por premissa a discretização dos sistemas estruturais por meio da divisão de seus componentes em pequenas regiões, chamadas elementos finitos, que conectados entre si formam o conjunto estrutural discreto.

Para problemas estáticos, a discretização utilizando o MEF resulta num sistema de equações algébricas que são facilmente resolvidas, aplicando-se técnicas computacionais adequadas. De posse do sistema de equações citado, é possível resolver o problema estrutural desejado, uma vez que, para tais sistemas, é fácil a imposição das condições de contorno da estrutura. No entanto, a solução obtida por esse método é uma aproximação da resposta do problema real, e para que essa aproximação seja mais refinada, é necessária a escolha ideal das quantidades de elementos finitos e dispô-los de maneira adequada, de forma a simular o mais próximo possível o caso real.

Aliando a representação de um fenômeno físico com a modelagem numérica, o presente trabalho vem a contribuir com uma análise experimental e numérica de prismas de alvenaria estrutural, validando um modelo numérico capaz de determinar a resistência última de prismas com a variação de algumas propriedades dos materiais que o constituem.

1.2 - Objetivos

Este trabalho tem por objetivos:

- determinar experimentalmente o comportamento não-linear de cada material que constitui o prisma de alvenaria estrutural;
- desenvolver e apresentar a matriz de rigidez do elemento finito prismático regular parabólico de 20 nós;

- discretizar e analisar numericamente prismas com as mesmas características obtidas experimentalmente;
- validar o modelo discreto, por meio de análise comparativa com resultados obtidos nos ensaios realizados em laboratório.

1.3 - Apresentação

Neste primeiro capítulo procurou-se mostrar uma visão geral do trabalho desenvolvido, descrevendo-se, para tanto, tema e motivação, objetivos do trabalho e, finalizando, uma apresentação sucinta dos capítulos subseqüentes.

No Capítulo 2 será apresentado de forma sucinta o Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb, critério esse utilizado para prever a ruptura dos elementos utilizados na discretização dos prismas e implementado com uma sub-rotina do sistema principal.

No Capítulo 3 serão mostradas algumas definições e formulações básicas do MEF, que permitem descrever um sistema estrutural contínuo em um sistema estrutural discreto, através da utilização de elementos finitos previamente escolhidos em função do sistema a ser estudado, bem como os procedimentos adotados para obtenção da matriz de rigidez do elemento finito prismático regular parabólico com vinte nós, utilizados na discretização dos elementos que constituem o prisma.

No Capítulo 4 são feitas algumas considerações sobre a alvenaria estrutural, onde são abordados os tipos de alvenaria, materiais que constituem e a importância de cada material na avaliação do conjunto. Estão também apresentados fatores condicionados a cada material capaz de comprometer o seu comportamento quando atuante em conjunto com os demais.

No Capítulo 5 são descritos todos os experimentos realizados em laboratório, imprescindíveis à análise na qual se tem

por objetivo este trabalho. São descritos os ensaios realizados assim como os resultados obtidos, são apresentadas as curvas tensão-deformação de cada material, por fim sendo determinados seus respectivos módulos de elasticidade instantâneos.

No Capítulo 6 são apresentados todos os elementos da análise numérica, nele estão descritos aspectos referentes à discretização do prisma e fluxograma geral de cálculo do programa que realizará a análise não-linear por meio do MEF, utilizando-se um processo incremental de carregamento.

No Capítulo 7 será validado o modelo numérico proposto através de vários exemplos, para isso, serão confrontados seus resultados com os resultados obtidos em ensaios laboratoriais, sobrepondo-se as curvas que relacionam a força aplicada com os deslocamentos de um ponto específico e comum às duas análises.

No Capítulo 8 será realizada a discussão dos resultados obtidos, seguido da conclusão e de uma proposta para desenvolvimento futuro nesta mesma linha de pesquisa.

Por fim, as referências bibliográficas serão listadas, bem como o anexo onde está apresentada a matriz de rigidez para o elemento finito prismático regular parabólico de vinte nós.

CAPÍTULO 2 - MODELO FÍSICO NÃO-LINEAR PARA CONCRETO

As relações constitutivas apresentadas pela Mecânica dos Sólidos, dadas pelas equações (2.1) a (2.6), são válidas apenas quando considerado que os materiais estruturais apresentam um comportamento elástico linear.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \quad (2.6)$$

Contudo, tanto o concreto quanto a argamassa apresentam, para determinados níveis de sollicitação, um comportamento não-linear, caracterizado pela relação não-linear entre tensão e

deformação. Esse tipo de comportamento é manifestado por meio da capacidade de acomodar grandes deformações em relação ao acréscimo de uma pequena parcela de carregamento, e também do surgimento de deformações irreversíveis ou plásticas.

Dessa forma para a análise da deformação e da ruptura de prismas em alvenaria estrutural é conveniente a utilização de modelos que permitam representar a diminuição da rigidez, bem como a consideração de deformações irreversíveis.

O comportamento do concreto pode ser modelado por meio da simulação matemática das relações entre tensão e deformação, a partir de uma série de experimentos simples, em que se procura definir a forma da superfície de ruptura do concreto, desconsiderando-se os mecanismos microscópicos intrínsecos do material. Muitos modelos, ou critérios de ruptura, podem ser encontrados na literatura, onde comumente os mesmos são definidos no espaço das tensões pelo número de constantes mecânicas do material. Neste trabalho, será adotado o critério de Mohr-Coulomb, que tem sido muito utilizado para modelar o comportamento do concreto submetido a um estado qualquer de tensões.

2.1 - Comportamento não-linear do concreto

A principal causa do surgimento de deformações irreversíveis no concreto é o processo de microfissuração interna do material. Tal processo ocorre principalmente na zona de transição na região definida entre a pasta de cimento e o agregado graúdo, e é responsável pela diminuição da rigidez estrutural, conforme ilustrado na Figura 2.1.

Segundo MacGregor (1997), apud Buchaim (2001), as microfissuras têm abertura inferior a $10\mu\text{m}$ e comprimento inferior a 13 mm, antes mesmo da aplicação do carregamento. Após a aplicação do carregamento, a microfissuração acontece gradativamente no interior

do concreto como resultado da alteração da distribuição de tensões entre a pasta de cimento e o agregado graúdo, e se dá pela ausência ou perda progressiva da aderência na zona de transição.

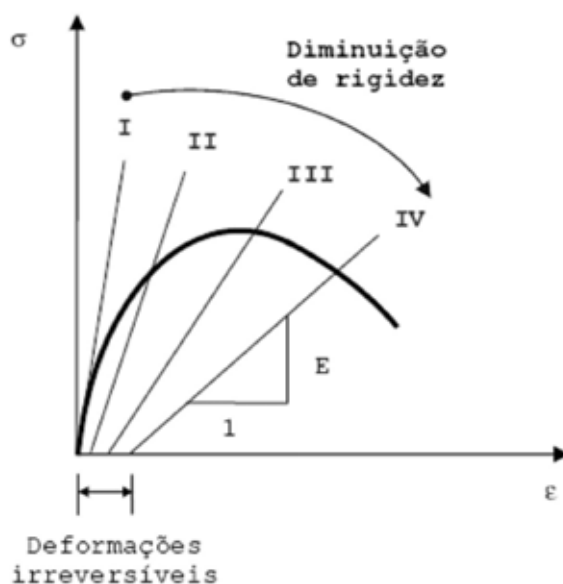


Figura 2.1 - Comportamento tensão x deformação típico do concreto.

Na compressão uniaxial do concreto até a ruptura, a microfissuração transforma-se em macrofissuração (fissuras visíveis). Nesse processo distinguem-se quatro fases, que estão representadas na Figura 2.1, mostrando a diminuição de rigidez de cada etapa (redução do módulo de elasticidade) e o aparecimento de deformações irreversíveis, e na Figura 2.2, que ilustra quais são as faixas de valores de tensão correspondentes a cada etapa, em função da resistência a compressão do concreto.

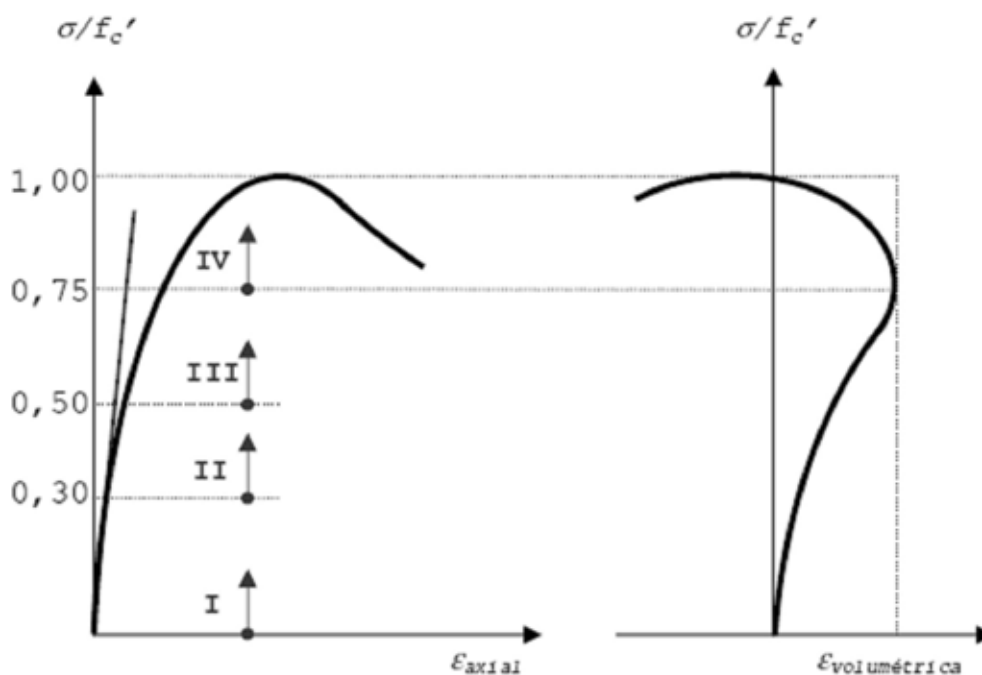


Figura 2.2 - Curva típica tensão x deformação axial e tensão x deformação volumétrica do concreto para ensaio de compressão uniaxial.

Na primeira fase, correspondente a tensões até cerca de 30% da sua resistência à compressão, o concreto apresenta comportamento elástico linear, sem apresentar deformações permanentes, conforme mostrado na Figura 2.2, sendo que as fissuras instaladas no elemento antes do carregamento mantêm-se praticamente inalteradas após o início do mesmo.

Na segunda fase, para tensões aplicadas maiores que $0,3.f_c$, sendo f_c a resistência a compressão, o concreto começa a apresentar comportamento não-linear, já apresentando deformações permanentes. Nessa fase, devido à concentração de tensão nas fissuras já existentes, ocorre, o aparecimento de fissuras na interface agregado-pasta de cimento, chamadas fissuras de aderência. Essas fissuras são estáveis e só se propagam se houver aumento de força.

Na terceira fase, para tensões aplicadas acima de $0,5.f_c$, ocorre o início da fissuração na pasta de cimento, com união das

fissuras na zona de transição (fissuras de aderência). A propagação das fissuras ainda é estável, não aumentando para valores de força constantes. A fissuração dá-se paralelamente à direção de aplicação do carregamento, e este estágio é chamado limite de descontinuidade (BUCHAIM, 2001).

Na quarta fase, para tensões aplicadas na faixa de $(0,75 \text{ a } 0,80) \cdot f_c$, as fissuras aumentam até o limite crítico, podendo conduzir o elemento até a ruptura. Nesta fase, o concreto apresenta fraturas dependentes do tempo, dando início ao processo reverso da deformação volumétrica, que passa da contração a expansão.

2.2 - Critério de ruptura de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb é uma generalização da equação de ruptura de Coulomb definida por:

$$\tau = c - \sigma \tan \phi \quad (2.7)$$

em que τ é a tensão de cisalhamento, σ é a tensão normal, c é a coesão e ϕ ângulo de atrito interno do material. Essa equação indica que há ruptura do material, quando a tensão de cisalhamento num determinado plano vence a resistência a deslizamento originada de duas parcelas: uma proveniente da referida coesão do material, outra vinda de uma fração da tensão normal atuante nesse mesmo plano.

Graficamente, a equação (2.7) representa uma reta tangente ao maior círculo de tensões principais, como mostrado na Figura 2.3. Quando o par de tensões $(-\sigma, |\tau|)$ atuantes em um ponto qualquer do material situarem-se sobre tal reta ocorrerá a ruptura do material.

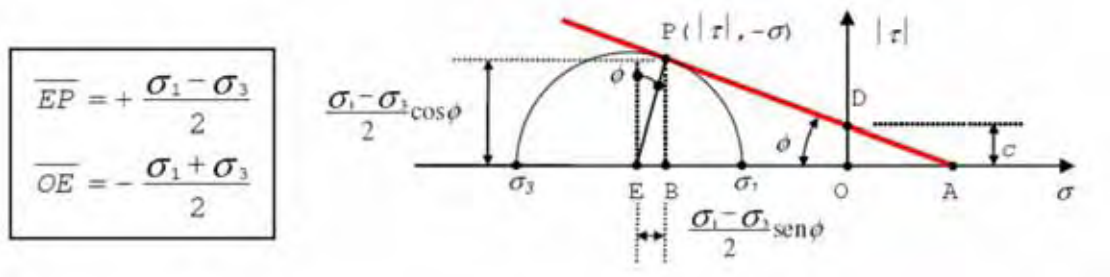


Figura 2.3 - Critério de Mohr-Coulomb.

Por meio da Figura 2.3 e para $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, a equação (2.7) pode ser reescrita em função das tensões principais. Sendo a distância entre os pontos O e B dados por:

$$OB = OE - EB = -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin \phi \quad (2.8)$$

Substituindo-se na equação (2.7) resulta:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos \phi = c - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin \phi \right) \cdot \tan \phi \quad (2.9)$$

e após algumas simplificações obtém-se a equação (2.10).

$$\frac{\sigma_1 (1 + \sin \phi)}{2c \cdot \cos \phi} - \frac{\sigma_3 (1 - \sin \phi)}{2c \cdot \cos \phi} = 1 \quad (2.10)$$

O critério ainda pode ser escrito em função dos invariantes (I_1 , J_2 , θ), onde I_1 representa o primeiro invariante do tensor das tensões e é definido pela equação (2.11) e J_2 o segundo invariante do tensor desviador dado pela equação (2.12).

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= -s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{11}s_{33} + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot (I_1^2 - 3I_2) \\
&= \frac{1}{6} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Sendo assim, utilizando as relações de σ_1 e σ_3 contidas na equação (2.13), onde as tensões principais ficam definidas em função apenas dos invariantes (I_1 , J_2 , θ) e substituindo-se na equação (2.10), obtém-se o critério em função de (I_1 , J_2 , θ), como mostra a equação (2.14).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 120^\circ) \\ \cos(\theta + 120^\circ) \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin(\theta + 60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_2} \sin \phi \cdot \cos(\theta + 60^\circ) - c \cdot \cos \phi &= 0 \\
f(I_1, J_2, \theta) &= 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

No espaço das tensões principais, o critério de Mohr-Coulomb é representado por uma pirâmide hexagonal irregular, conforme ilustra a Figura 2.4, cujo contorno define a superfície de ruptura do material.

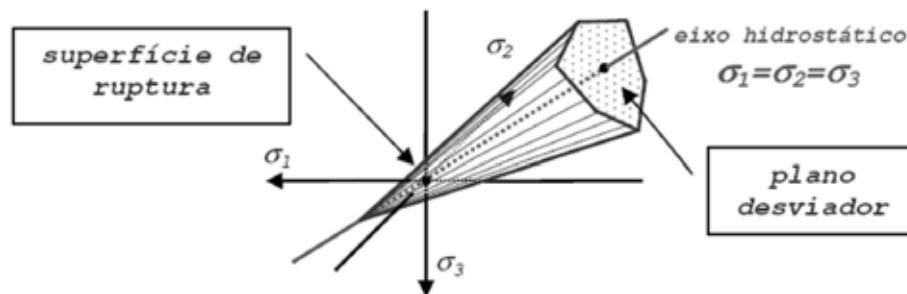


Figura 2.4 - Representação geométrica da superfície de ruptura do critério de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais.

Na aplicação do critério de Mohr-Coulomb para o concreto, os parâmetros c e ϕ podem ser definidos em função da resistência à tração f_t e da resistência à compressão f_c do material, obtidas por meio de um ensaio de tração simples e de compressão simples, respectivamente.

Dessa forma, para ensaio de compressão simples os valores das tensões principais são dados por $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ e $\sigma_3 = f_c$ e para ensaio de tração simples por $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e $\sigma_1 = f_t$. Substituindo-se tais valores na equação (2.10), obtêm-se as equações (2.15) e (2.16).

$$f_c = -\frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.15)$$

$$f_t = +\frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (2.16)$$

Resolvendo-se esse sistema de equações chega-se às equações (2.17) e (2.18) que definem, respectivamente, o ângulo de atrito interno e a coesão em função das resistências f_t e f_c .

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{f_c + f_t}{f_c - f_t} \right) \quad (2.17)$$

$$c = -\frac{f_c (1 - \sin \phi)}{2 \cos \phi} = +\frac{f_t (1 + \sin \phi)}{2 \cos \phi} \quad (2.18)$$

CAPÍTULO 3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Quando aplicado a problemas de análise estrutural, o conceito básico do Método dos Elementos Finitos (MEF) é tal que um contínuo (o sistema estrutural) pode ser modelado analiticamente pela sua subdivisão em pequenas regiões (os elementos finitos).

Esses elementos são interconectados entre si e com o meio externo por meio de pontos nodais situados em seu contorno. Os deslocamentos desses pontos nodais são os parâmetros básicos desconhecidos do problema.

Para definir o estado de deslocamento de cada elemento deve-se escolher um conjunto de funções relacionadas com os deslocamentos nodais do elemento. Essas funções são chamadas de funções de forma do elemento.

A partir dessas funções de forma pode-se, então, definir o estado de deformação do elemento, que, juntamente com as deformações iniciais e com as propriedades constitutivas do material, definirão o estado de tensão em todo o elemento e também no seu contorno.

Por ser um método de discretização, a solução obtida é aproximada e para se obter uma resposta satisfatória, usualmente, deve-se escolher o tipo adequado de elemento finito, a quantidade e a disposição geométrica do mesmo.

A definição do tipo apropriado de elemento finito é dada em função do sistema estrutural que se deseja analisar. Para isso, os elementos finitos são classificados em: elementos lineares, elementos laminares e elementos sólidos.

Os elementos lineares, também conhecidos como elementos de barras, são elementos em que uma dimensão é muito maior do que as outras duas. Estes são subdivididos em elementos de pórticos planos e espaciais, de treliças planas e espaciais, de vigas e de grelhas.

Já os elementos laminares são elementos em que uma dimensão é muito menor do que as outras duas e são subdivididos em elementos de placa, de chapa e de casca.

Os elementos sólidos são elementos em que as três dimensões têm a mesma ordem de grandeza e permitem obter uma distribuição qualquer de tensões na estrutura.

Para a formulação do MEF é necessária, primeiramente, a formulação da equação de equilíbrio do sistema estrutural. Para tanto, pode-se utilizar o Princípio da Energia Potencial Estacionária.

3.1 - Princípio da Energia Potencial Estacionária

Um sistema estrutural é dito ser conservativo quando o trabalho das forças internas e das forças externas independe do caminho percorrido pela estrutura, quando da passagem de sua configuração de equilíbrio inicial para outra qualquer.

Para sistemas estruturais conservativos, em que a sua configuração final satisfaça a compatibilidade interna e as condições essenciais de contorno do sistema, a energia potencial total Π_p pode ser expressa como:

$$\Pi_p = U + \Omega \tag{3.1}$$

em que U é a energia de deformação, também chamada de energia potencial interna, e Ω a energia potencial das forças externas atuantes.

Para um sistema estrutural que foi discretizado em um número finito de elementos, a energia potencial total do sistema é a soma da energia potencial de cada elemento, ou seja:

$$\Pi_P = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi_{pe} \quad (3.2)$$

sendo n_e o número de elementos finitos que compõe o sistema estrutural.

A energia potencial de cada elemento Π_{pe} é dada por:

$$\Pi_{pe} = U_e + \Omega_e \quad (3.3)$$

onde U_e é a energia de deformação acumulada pelo elemento e Ω_e é a energia potencial das forças externas na configuração deformada do elemento.

Admitindo-se que o carregamento do sistema seja aplicado nos nós estruturais, a energia potencial das forças externas de cada elemento é dada por:

$$\Omega_e = -\tilde{f}_e^T \tilde{d} \quad (3.4)$$

em que $\tilde{f}_e$ é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento e $\tilde{d}$ é o vetor das componentes dos deslocamentos genéricos para cada nó do elemento.

A energia de deformação de cada elemento é definida por:

$$U_e = \int_{V_e} \mu_0 dV_e \quad (3.5)$$

sendo μ_0 a energia de deformação específica dada pela equação (3.6) e na forma matricial pela equação (3.7).

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz} \right\} \quad (3.6)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\sigma} \quad (3.7)$$

Para o equilíbrio de um sistema estrutural, a função da energia potencial total Π_p deve ser estacionária, ou seja, a sua variação deve ser zero, como mostra a equação (3.8).

$$\delta \Pi_p = 0 \quad (3.8)$$

Em termos de funções ordinárias, existe uma condição em que a derivada de uma função em relação a uma variável independente é nula e a função em si tem um máximo, um mínimo ou um valor constante. Se a condição de estacionaridade fornece um valor mínimo, então, de acordo com o Teorema de Lagrange, o estado de equilíbrio é estável.

Aplicando-se tal conceito para o funcional de cada elemento e admitindo-se que a energia de deformação seja obtida em termos de deslocamentos nodais com o auxílio de funções interpoladoras conhecidas, então o funcional Π_{pe} passa a ser uma função, tendo como variáveis independentes os deslocamentos $\underline{d}$ e a sua

variação torna-se igual ao seu diferencial, ou seja, $\delta\Pi_{pe} = d\Pi_{pe}$. Desse modo, como o funcional está escrito em função das variáveis independentes tem-se:

$$\delta\Pi_{pe} = \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_1} \delta d_1 + \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_2} \delta d_2 + \dots + \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_n} \delta d_n \quad (3.9)$$

mas como $\delta d_1 = dd_1; \delta d_2 = dd_2; \dots; \delta d_n = dd_n$ e $\delta\Pi_{pe} = d\Pi_{pe}$, obtém-se a relação dada pela equação (3.10).

$$d\Pi_{pe} = \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_1} dd_1 + \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_2} dd_2 + \dots + \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_n} dd_n \quad (3.10)$$

Como os deslocamentos são simultaneamente não nulos, pode-se aplicar o Princípio da Energia Potencial Estacionária, resultando um sistema de equações (3.11) a ser resolvido.

$$\frac{\delta\Pi_{pe}}{\delta d_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.11)$$

3.2 - Formulação do Método dos Elementos Finitos

O primeiro passo na aplicação do MEF é dividir a estrutura em um número adequado de elementos em função da precisão dos mesmos. Os deslocamentos dos pontos nodais dos elementos são, então, generalizados em função das coordenadas da estrutura.

Desse modo, os deslocamentos $\underline{u}$ do elemento finito podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais $\underline{d}$, por meio da utilização de funções de forma apropriadas. Essa relação é definida pela equação (3.12),

$$\underline{u} = \underline{\phi} \cdot \underline{d} \quad (3.12)$$

em que $\underline{\phi}$ é a matriz que contém as funções de forma e relaciona os deslocamentos que ocorrem ao longo do eixo longitudinal com os deslocamentos nodais do elemento.

A energia de deformação de um elemento, de acordo com a definição da energia de deformação específica dada pela equação (3.7), pode ser escrita como mostra a equação (3.13).

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV_e \quad (3.13)$$

As relações constitutivas, dadas pelas equações (2.1) a (2.6), podem ser organizadas na forma matricial, sendo então, definidas por:

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (3.14)$$

em que $\underline{E}$ é a matriz que contém os coeficientes elásticos do material estrutural, representada pela equação (3.15).

$$\underline{\underline{E}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Reorganizando as equações (3.4), (3.13) e (3.14) na equação (3.3), a energia de deformação total do elemento pode ser reescrita de acordo com a equação (3.16).

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} dV_e - \underline{\underline{f}}_E^T \underline{\underline{d}} \quad (3.16)$$

As relações diferenciais entre deformações e deslocamentos, dadas pelas equações (3.17) a (3.22) organizadas na forma matricial, ficam definidas pela equação (3.23),

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.20)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.21)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.22)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{u}} \quad (3.23)$$

na qual a matriz $\underline{\underline{L}}$ contém os operadores de derivação, dada pela equação (3.24).

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.23), obtém-se:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \phi d \quad (3.25)$$

ou

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{d}} \quad (3.26)$$

em que

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\phi}} \quad (3.27)$$

Substituindo-se agora a equação (3.26) na equação (3.16), e sabendo que $\underline{\underline{\varepsilon}}^T = \underline{\underline{d}}^T \underline{\underline{B}}^T$, obtém-se:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\underline{\underline{d}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{d}}) dV_e - \underline{\underline{f}}_E^T \underline{\underline{d}} \quad (3.28)$$

ou, simplesmente,

$$\Pi_{pe} = U_e(\underline{\underline{d}}) - \underline{\underline{f}}_E^T \underline{\underline{d}} \quad (3.29)$$

Aplicando-se, finalmente a equação (3.11) na equação (3.29), encontra-se:

$$\frac{\partial U_e(\underline{\underline{d}})}{\partial d_j} - \underline{\underline{f}}_E = 0 \quad (3.30)$$

Cada uma das expressões do tipo (3.30) fornecerá uma equação algébrica, que organizada na forma matricial resultará:

$$\underline{\underline{k}}_s \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{f}}_E \quad (3.31)$$

em que $\underline{\underline{k}}_s$ é a matriz de rigidez secante do elemento.

Para todo o sistema estrutural, a partir das contribuições de todos os elementos, pode-se utilizar o processo de expansão e acumulação, encontrando-se o sistema de equações fornecido pela relação (3.32).

$$\tilde{K}_s \tilde{D} = \tilde{F}_E \quad (3.32)$$

Com a obtenção dos deslocamentos nodais do sistema estrutural, as funções deslocamento ficam determinadas, podendo-se então calcular o valor da deformação do elemento utilizando a equação (3.26) ou (3.27) e, com isso, calcula-se o valor da tensão do elemento, utilizando-se a equação (3.14), finalizando o processo de cálculo.

3.2.1 - Vetor das forças nodais equivalentes

3.2.1.1 - Forças distribuídas no volume do elemento

Para forças volumétricas, a energia potencial pode ser obtida por meio da integração do produto entre o deslocamento e a respectiva força atuante distribuída pelo volume, conforme mostra a equação (3.33).

$$\Omega_e = - \int_{V_e} \tilde{u}^T \tilde{p}_{V_e} dV_e \quad (3.33)$$

Analogamente ao tratamento dado aos deslocamentos, as funções do carregamento atuante no elemento finito podem ser escritas em função dos valores dos carregamentos nodais, por meio de funções de forma apropriadas, como mostra a equação (3.34).

$$\underline{\underline{p}}_{V_e} = \underline{\underline{\phi}}_p \underline{\underline{p}}_{V_e}^n \quad (3.34)$$

Assim, substituindo-se as equações (3.12) e (3.34) na equação (3.33) obtém-se a equação (3.35).

$$\Omega_e = - \int_{V_e} \underline{\underline{d}}^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}}_p \underline{\underline{p}}_{V_e}^n dV_e \quad (3.35)$$

Como os deslocamentos e o carregamento são agora parâmetros nodais independentes, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\Omega_e = - \underline{\underline{d}}^T \int_{V_e} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}}_p dV_e \underline{\underline{p}}_{V_e}^n \quad (3.36)$$

ou, simplesmente,

$$\Omega_e = - \underline{\underline{d}}^T \underline{\underline{f}}_E \quad (3.37)$$

em que,

$$\underline{\underline{f}}_E = \int_{V_e} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}}_p dV_e \underline{\underline{p}}_{V_e}^n \quad (3.38)$$

é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento para forças volumétricas.

3.2.1.2 - Forças distribuídas na superfície do elemento

Para forças superficiais, a energia potencial pode ser obtida por meio da integração do produto entre o deslocamento e a

respectiva força atuante distribuída pela superfície, conforme indica a equação (3.39).

$$\Omega_E = - \int_{S_e} \tilde{u}^T \tilde{p}_{S_e} dS_e \quad (3.39)$$

Escrevendo-se as funções do carregamento atuante no elemento finito em função dos valores dos carregamentos nodais, por meio de funções de forma apropriadas, obtém-se a equação (3.40).

$$\tilde{p}_{S_e} = \phi_{\tilde{p}} \tilde{p}_{S_e}^n \quad (3.40)$$

Substituindo-se as equações (3.12) e (3.40) na equação (3.39) e sendo os deslocamentos e o carregamento parâmetros nodais independentes, obtém-se:

$$\Omega_e = - \tilde{d}^T \int_{S_e} \phi^T \phi_{\tilde{p}} dS_e \tilde{p}_{S_e}^n \quad (3.41)$$

ou, simplesmente,

$$\Omega_e = - \tilde{d}^T \tilde{f}_E \quad (3.42)$$

em que,

$$\tilde{f}_E = \int_{S_e} \phi^T \phi_{\tilde{p}} dS_e \tilde{p}_{S_e}^n \quad (3.43)$$

é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento para forças superficiais.

3.2.1.3 - Forças concentradas em qualquer ponto do elemento

Para forças concentradas, a energia potencial pode ser obtida por meio do produto entre o deslocamento e a respectiva força concentrada atuante, conforme mostra a equação (3.45).

$$\Omega_e = -\tilde{u}^T \tilde{p}_c \quad (3.44)$$

Substituindo-se a equação (3.12) na equação (3.44) obtém-se:

$$\Omega_e = -\tilde{d}^T \tilde{\phi}^T \tilde{p}_c \quad (3.45)$$

ou, simplesmente,

$$\Omega_e = -\tilde{d}^T \tilde{f}_E \quad (3.46)$$

em que,

$$\tilde{f}_E = \tilde{\phi}^T \tilde{p}_c \quad (3.47)$$

é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento para forças concentradas.

3.2.2 - Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez de um elemento finito pode ser obtida trabalhando-se algebricamente a equação (3.28). Sabendo-se que a integral no volume do elemento não depende dos deslocamentos nodais, esses passam a ser parâmetros independentes, podendo ser retirados da integral contida em (3.28), resultando a equação (3.48).

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \tilde{d}^T \int_{V_e} \left(\tilde{B}^T E \tilde{B} \right) dV_e \tilde{d} - \tilde{f}_E^T \tilde{d} \quad (3.48)$$

Na forma genérica, a equação anterior torna-se:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \tilde{d}^T k_s \tilde{d} - \tilde{f}_E^T \tilde{d} \quad (3.49)$$

em que K_s é a matriz de rigidez secante do elemento, e é dada pela equação (3.50).

$$k_s = \int_{V_e} \left(\tilde{B}^T E \tilde{B} \right) dV_e \quad (3.50)$$

Aplicando-se o Princípio da Energia Potencial Estacionária na equação (3.49), tem-se:

$$\delta \Pi_{pe} = \frac{1}{2} \delta \tilde{d}^T k_s \tilde{d} + \frac{1}{2} \tilde{d}^T k_s \delta \tilde{d} - \delta \tilde{d}^T \tilde{f}_E = 0 \quad (3.51)$$

sendo que,

$$\delta \tilde{d}^T k_s \tilde{d} = \tilde{d}^T k_s \delta \tilde{d} \quad (3.52)$$

obtém-se a equação (3.53).

$$\delta \tilde{d}^T \left(k_s \tilde{d} - \tilde{f}_E \right) = 0 \quad (3.53)$$

Como a variação dos deslocamentos é não-nula, encontra-se que:

$$\underline{k}_s \underline{d} - \underline{f}_E = 0 \quad (3.54)$$

sendo a matriz de rigidez $\underline{k}_s$, de cada elemento, obtida facilmente utilizando-se a equação (3.50).

Para toda a estrutura, via processo de expansão e acumulação, obtém-se a matriz de rigidez global e o vetor global de forças nodais equivalentes, respeitando-se a correspondência entre cada termo matricial com o respectivo deslocamento nodal global, respectivamente pelas equações (3.48) e (3.49).

$$\underline{K}_s = \sum_{e=1}^{n_e} \underline{k}_s^e \quad (3.55)$$

$$\underline{F}_E = \sum_{e=1}^{n_e} \underline{f}_E^e \quad (3.56)$$

3.3 - Matriz de rigidez do elemento finito prismático regular parabólico

Para simular o concreto, o graute e a argamassa, considerando o prisma como uma série de elementos sólidos, foi adotado, o elemento finito prismático regular parabólico com vinte nós, de lados $2a$, $2b$ e $2c$, conforme mostrado na Figura 3.1. Cada nó desse elemento possui três graus de liberdade, ou seja, deslocamentos nas direções x , y e z .

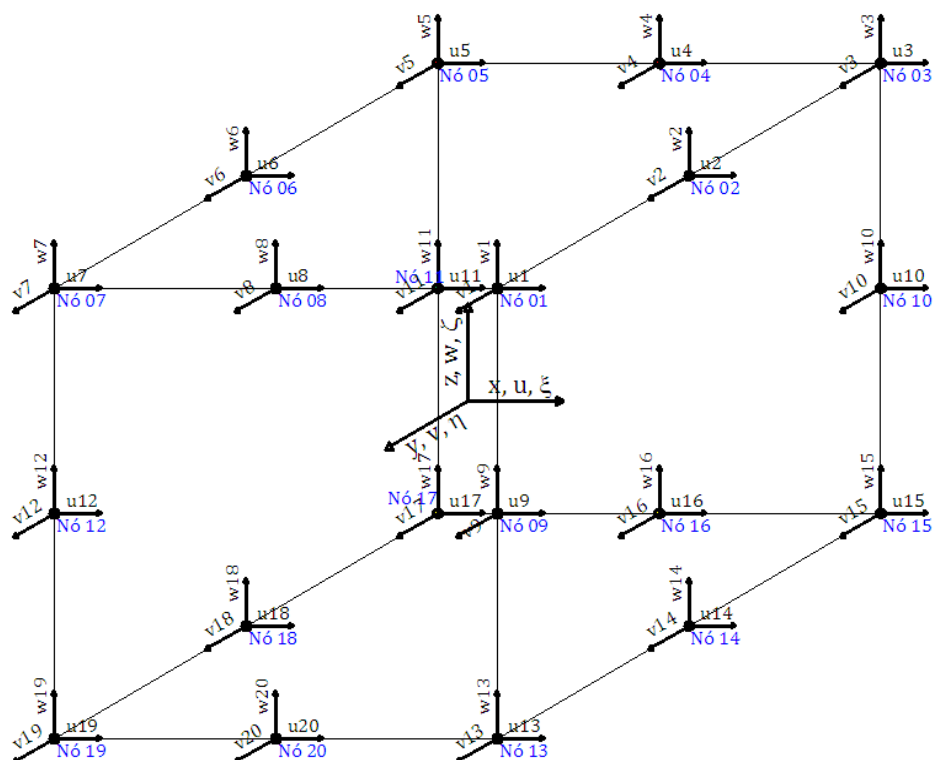


Figura 3.1 - Elemento finito prismático regular parabólico com vinte nós.

As funções aproximadoras desse elemento contêm vinte monômios extraídos do polinômio algébrico cúbico completo em x , y e z . Nesse caso, para garantir a continuidade com os deslocamentos dos elementos adjacentes, a função deslocamento deve variar parabolicamente ao longo dos lados (ZIENKIEWICZ e CHEUNG, 1967). Sendo assim, para um sistema de coordenadas adimensionais com origem no centróide do elemento, ou seja:

$$\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}; \zeta = \frac{z}{c} \quad (3.57)$$

as funções interpoladoras para os deslocamentos u , v e w , são dadas pelas equações (3.58), (3.59) e (3.60), respectivamente, todos extraídos da pirâmide de Pascal, apresentada na Figura 3.2.

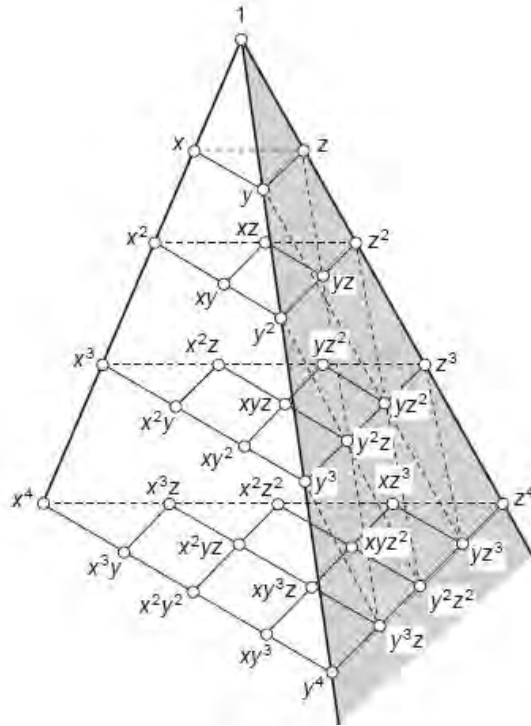


Figura 3.2 - Pirâmide de Pascal (Fonte: ZIENKIEWICZ (2000)).

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta, \zeta) = & \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \xi + \alpha_3 \cdot \eta + \alpha_4 \cdot \zeta + \alpha_5 \cdot \xi^2 + \alpha_6 \cdot \eta^2 + \alpha_7 \cdot \zeta^2 + \dots \\
 & \dots + \alpha_8 \cdot \xi\eta + \alpha_9 \cdot \xi\zeta + \alpha_{10} \cdot \eta\zeta + \alpha_{11} \cdot \xi^2\eta + \alpha_{12} \cdot \xi\eta^2 + \alpha_{13} \cdot \xi^2\zeta + \dots \\
 & \dots + \alpha_{14} \cdot \xi\zeta^2 + \alpha_{15} \cdot \eta^2\zeta + \alpha_{16} \cdot \eta\zeta^2 + \alpha_{17} \cdot \xi\eta\zeta + \alpha_{18} \cdot \xi^2\eta\zeta + \dots \\
 & \dots + \alpha_{19} \cdot \xi\eta^2\zeta + \alpha_{20} \cdot \xi\eta\zeta^2
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
 v(\xi, \eta, \zeta) = & \beta_1 + \beta_2 \cdot \xi + \beta_3 \cdot \eta + \beta_4 \cdot \zeta + \beta_5 \cdot \xi^2 + \beta_6 \cdot \eta^2 + \beta_7 \cdot \zeta^2 + \dots \\
 & \dots + \beta_8 \cdot \xi\eta + \beta_9 \cdot \xi\zeta + \beta_{10} \cdot \eta\zeta + \beta_{11} \cdot \xi^2\eta + \beta_{12} \cdot \xi\eta^2 + \beta_{13} \cdot \xi^2\zeta + \dots \\
 & \dots + \beta_{14} \cdot \xi\zeta^2 + \beta_{15} \cdot \eta^2\zeta + \beta_{16} \cdot \eta\zeta^2 + \beta_{17} \cdot \xi\eta\zeta + \beta_{18} \cdot \xi^2\eta\zeta + \dots \\
 & \dots + \beta_{19} \cdot \xi\eta^2\zeta + \beta_{20} \cdot \xi\eta\zeta^2
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta, \zeta) = & \gamma_1 + \gamma_2 \cdot \xi + \gamma_3 \cdot \eta + \gamma_4 \cdot \zeta + \gamma_5 \cdot \xi^2 + \gamma_6 \cdot \eta^2 + \gamma_7 \cdot \zeta^2 + \dots \\
 & \dots + \gamma_8 \cdot \xi\eta + \gamma_9 \cdot \xi\zeta + \gamma_{10} \cdot \eta\zeta + \gamma_{11} \cdot \xi^2\eta + \gamma_{12} \cdot \xi\eta^2 + \gamma_{13} \cdot \xi^2\zeta + \dots \\
 & \dots + \gamma_{14} \cdot \xi\zeta^2 + \gamma_{15} \cdot \eta^2\zeta + \gamma_{16} \cdot \eta\zeta^2 + \gamma_{17} \cdot \xi\eta\zeta + \gamma_{18} \cdot \xi^2\eta\zeta + \dots \\
 & \dots + \gamma_{19} \cdot \xi\eta^2\zeta + \gamma_{20} \cdot \xi\eta\zeta^2
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Na forma matricial, essas equações são dadas por:

$$\underline{u} = \underline{\varphi} \cdot \underline{\alpha} \quad (3.61)$$

em que

$$\underline{u} = \{u \ v \ w\};$$

$$\underline{\varphi} = [\underline{\varphi}_1 \ \underline{\varphi}_2 \ \underline{\varphi}_3];$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \xi^2\zeta & \xi\zeta^2 & \eta^2\zeta & \eta\zeta^2 & \xi\eta\zeta & \xi^2\eta\zeta & \xi\eta^2\zeta & \xi\eta\zeta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \varphi_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \xi^2\zeta & \xi\zeta^2 & \eta^2\zeta & \eta\zeta^2 & \xi\eta\zeta & \xi^2\eta\zeta & \xi\eta^2\zeta & \xi\eta\zeta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \varphi_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \xi^2\zeta & \xi\zeta^2 & \eta^2\zeta & \eta\zeta^2 & \xi\eta\zeta & \xi^2\eta\zeta & \xi\eta^2\zeta & \xi\eta\zeta^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\underline{\alpha}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{18} \alpha_{19} \alpha_{20} \dots \\ \dots \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_7 \beta_8 \beta_9 \beta_{10} \beta_{11} \beta_{12} \beta_{13} \beta_{14} \beta_{15} \beta_{16} \beta_{17} \beta_{18} \beta_{19} \beta_{20} \dots \\ \dots \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8 \gamma_9 \gamma_{10} \gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{13} \gamma_{14} \gamma_{15} \gamma_{16} \gamma_{17} \gamma_{18} \gamma_{19} \gamma_{20} \dots \end{bmatrix}$$

Substituindo-se os valores das coordenadas nodais na matriz $\underline{\varphi}$, conforme o esquema mostrado na Figura 3.3, e seguindo o critério de numeração de nós apresentado na Figura 3.1, tem-se:

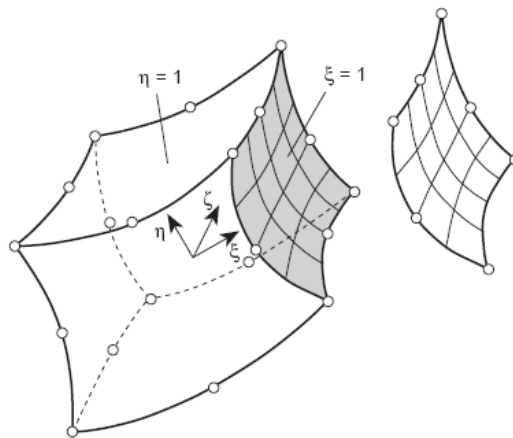


Figura 3.3 - Valores para as coordenadas nodais (Fonte: ZIENKIEWICZ (2000)).

Da equação (3.83), obtém-se a matriz $\underline{\alpha}$, em função da matriz dos deslocamentos $\underline{d}$, como mostra a equação (3.86):

$$\underline{\alpha} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{d} \quad (3.86)$$

Substituindo-se a equação (3.86) na (3.61), e comparando-se com a equação (3.12), obtém-se que a matriz das funções de forma $\underline{\phi}$, para o elemento finito prismático regular parabólico com vinte nós, é dada pela equação (3.87).

$$\underline{\phi} = \underline{\varphi} \cdot \underline{A}^{-1} \quad (3.87)$$

Explicitamente, a matriz $\underline{\phi}$ é dada pela equação que segue:

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{i+1} & 0 & 0 & \dots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{i+1} & 0 & \dots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{i+1} & \dots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

com os N_i sendo apresentados pelas equações de (3.89) á (3.108).

$$N01 := \frac{(\zeta+1)(\eta+1)(1+\xi)(\xi+\eta+\zeta-2)}{8} \quad (3.89)$$

$$N02 := -\frac{(\eta-1)(\eta+1)(\zeta+1)(1+\xi)}{4} \quad (3.90)$$

$$N03 := -\frac{(\zeta+1)(\eta-1)(1+\xi)(\xi-\eta+\zeta-2)}{8} \quad (3.91)$$

$$N04 := \frac{(\xi-1)(1+\xi)(\zeta+1)(\eta-1)}{4} \quad (3.92)$$

$$N05 := - \frac{(\zeta + 1)(\eta - 1)(\xi - 1)(\xi + \eta - \zeta + 2)}{8} \quad (3.93)$$

$$N06 := \frac{(\eta - 1)(\eta + 1)(\zeta + 1)(\xi - 1)}{4} \quad (3.94)$$

$$N07 := \frac{(\zeta + 1)(\eta + 1)(\xi - 1)(\xi - \eta - \zeta + 2)}{8} \quad (3.95)$$

$$N08 := - \frac{(\xi - 1)(1 + \xi)(\zeta + 1)(\eta + 1)}{4} \quad (3.96)$$

$$N09 := - \frac{(\zeta - 1)(\zeta + 1)(\eta + 1)(1 + \xi)}{4} \quad (3.97)$$

$$N10 := \frac{(\zeta - 1)(\zeta + 1)(\eta - 1)(1 + \xi)}{4} \quad (3.98)$$

$$N11 := - \frac{(\zeta - 1)(\zeta + 1)(\eta - 1)(\xi - 1)}{4} \quad (3.99)$$

$$N12 := \frac{(\zeta - 1)(\zeta + 1)(\eta + 1)(\xi - 1)}{4} \quad (3.100)$$

$$N13 := - \frac{(\zeta - 1)(\eta + 1)(1 + \xi)(\xi + \eta - \zeta - 2)}{8} \quad (3.101)$$

$$N14 := \frac{(\eta - 1)(\eta + 1)(\zeta - 1)(1 + \xi)}{4} \quad (3.102)$$

$$N15 := \frac{(\zeta - 1)(\eta - 1)(1 + \xi)(\xi - \eta - \zeta - 2)}{8} \quad (3.103)$$

$$N16 := -\frac{(\xi-1)(1+\xi)(\zeta-1)(\eta-1)}{4} \quad (3.104)$$

$$N17 := \frac{(\zeta-1)(\eta-1)(\xi-1)(\xi+\eta+\zeta+2)}{8} \quad (3.105)$$

$$N18 := -\frac{(\eta-1)(\eta+1)(\zeta-1)(\xi-1)}{4} \quad (3.106)$$

$$N19 := -\frac{(\zeta-1)(\eta+1)(\xi-1)(\xi-\eta+\zeta+2)}{8} \quad (3.107)$$

$$N20 := \frac{(\xi-1)(1+\xi)(\zeta-1)(\eta+1)}{4} \quad (3.108)$$

Conforme visto no item 3.2.2, a matriz de rigidez de um elemento finito qualquer pode ser deduzida por meio da equação (3.50). Para o elemento finito prismático regular parabólico, em termos das coordenadas adimensionais dadas pela equação (3.57), pode-se reescrever a equação (3.50) como segue.

$$\underline{k}_s = abc \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B^T E B) d\xi d\eta d\zeta \right] \quad (3.109)$$

Da definição dada pela equação (3.27) e sendo a matriz $\underline{\phi}$ do elemento finito prismático regular parabólico dada pela equação (3.88), obtém-se a equação (3.110), que define a matriz $\underline{B}$, para esse elemento:

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \end{array} & \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \end{array} & \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} & \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{array} & \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{array} & \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} & \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \end{array} \\ \hline \underbrace{\hspace{10em}}_{N_1} & \underbrace{\hspace{10em}}_{N_2} & \underbrace{\hspace{10em}}_{N_i \quad i \rightarrow 3..19} & \underbrace{\hspace{10em}}_{N_{20}} \end{array} \right] \quad (3.110)$$

em que,

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{(\zeta + 1)(\eta + 1)(2\xi + \eta + \zeta - 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{(\zeta + 1)(1 + \xi)(\xi + 2\eta + \zeta - 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial z} = \frac{(\eta + 1)(1 + \xi)(\xi + \eta + 2\zeta - 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = -\frac{(\zeta + 1)(-1 + \eta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{(\zeta + 1)(1 + \xi)\eta}{2b}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial z} = -\frac{(1 + \xi)(-1 + \eta^2)}{4c}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = -\frac{(\zeta + 1)(\eta - 1)(2\xi - \eta + \zeta - 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = - \frac{(\zeta + 1)(1 + \xi)(\xi - 2\eta + \zeta - 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial z} = - \frac{(\eta - 1)(1 + \xi)(\xi - \eta + 2\zeta - 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{(\zeta + 1)(\eta - 1)\xi}{2a}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{(\zeta + 1)(\xi^2 - 1)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial z} = \frac{(\eta - 1)(\xi^2 - 1)}{4c}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial x} = - \frac{(\zeta + 1)(\eta - 1)(2\xi + \eta - \zeta + 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial y} = - \frac{(\xi - 1)(\zeta + 1)(\xi + 2\eta - \zeta + 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial z} = - \frac{(\eta - 1)(\xi - 1)(\xi + \eta - 2\zeta + 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial x} = \frac{(\zeta + 1)(-1 + \eta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial y} = \frac{(\xi - 1)(\zeta + 1)\eta}{2b}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial z} = \frac{(\xi - 1)(-1 + \eta^2)}{4c}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial x} = \frac{(\zeta + 1)(\eta + 1)(2\xi - \eta - \zeta + 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial y} = \frac{(\xi - 1)(\zeta + 1)(\xi - 2\eta - \zeta + 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial z} = \frac{(\eta + 1)(\xi - 1)(\xi - \eta - 2\zeta + 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial x} = -\frac{(\zeta + 1)(\eta + 1)\xi}{2a}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial y} = -\frac{(\zeta + 1)(\xi^2 - 1)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial z} = -\frac{(\eta + 1)(\xi^2 - 1)}{4c}$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial x} = -\frac{(\eta + 1)(-1 + \zeta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial y} = -\frac{(1 + \xi)(-1 + \zeta^2)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial z} = -\frac{(\eta + 1)(1 + \xi)\zeta}{2c}$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial x} = \frac{(\eta - 1)(-1 + \zeta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial y} = \frac{(1 + \xi)(-1 + \zeta^2)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial z} = \frac{(\eta - 1)(1 + \xi)\zeta}{2c}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} = -\frac{(\eta - 1)(-1 + \zeta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial y} = -\frac{(\xi - 1)(-1 + \zeta^2)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial z} = -\frac{(\eta - 1)(\xi - 1)\zeta}{2c}$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} = \frac{(\eta + 1)(-1 + \zeta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial y} = \frac{(\xi - 1)(-1 + \zeta^2)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial z} = \frac{(\eta + 1)(\xi - 1)\zeta}{2c}$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x} = -\frac{(\zeta - 1)(\eta + 1)(2\xi + \eta - \zeta - 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial y} = -\frac{(1 + \xi)(\zeta - 1)(\xi + 2\eta - \zeta - 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial z} = -\frac{(\eta + 1)(1 + \xi)(\xi + \eta - 2\zeta - 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_{14}}{\partial x} = \frac{(\zeta - 1)(-1 + \eta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_{14}}{\partial y} = \frac{(1 + \xi)(\zeta - 1)\eta}{2b}$$

$$\frac{\partial N_{14}}{\partial z} = \frac{(1 + \xi)(-1 + \eta^2)}{4c}$$

$$\frac{\partial N_{15}}{\partial x} = \frac{(\zeta - 1)(\eta - 1)(2\xi - \eta - \zeta - 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_{15}}{\partial y} = \frac{(1 + \xi)(\zeta - 1)(\xi - 2\eta - \zeta - 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_{15}}{\partial z} = \frac{(\eta - 1)(1 + \xi)(\xi - \eta - 2\zeta - 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_{16}}{\partial x} = -\frac{(\zeta - 1)(\eta - 1)\xi}{2a}$$

$$\frac{\partial N_{16}}{\partial y} = -\frac{(\zeta - 1)(\xi^2 - 1)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_{16}}{\partial z} = -\frac{(\eta - 1)(\xi^2 - 1)}{4c}$$

$$\frac{\partial N_{17}}{\partial x} = \frac{(\zeta - 1)(\eta - 1)(2\xi + \eta + \zeta + 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_{17}}{\partial y} = \frac{(\zeta - 1)(\xi - 1)(\xi + 2\eta + \zeta + 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_{17}}{\partial z} = \frac{(\eta - 1)(\xi - 1)(\xi + \eta + 2\zeta + 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_{18}}{\partial x} = -\frac{(\zeta - 1)(-1 + \eta^2)}{4a}$$

$$\frac{\partial N_{18}}{\partial y} = -\frac{(\zeta - 1)(\xi - 1)\eta}{2b}$$

$$\frac{\partial N_{18}}{\partial z} = -\frac{(\xi - 1)(-1 + \eta^2)}{4c}$$

$$\frac{\partial N_{19}}{\partial x} = - \frac{(\zeta - 1)(\eta + 1)(2\xi - \eta + \zeta + 1)}{8a}$$

$$\frac{\partial N_{19}}{\partial y} = - \frac{(\zeta - 1)(\xi - 1)(\xi - 2\eta + \zeta + 1)}{8b}$$

$$\frac{\partial N_{19}}{\partial z} = - \frac{(\eta + 1)(\xi - 1)(\xi - \eta + 2\zeta + 1)}{8c}$$

$$\frac{\partial N_{20}}{\partial x} = \frac{(\zeta - 1)(\eta + 1)\xi}{2a}$$

$$\frac{\partial N_{20}}{\partial y} = \frac{(\zeta - 1)(\xi^2 - 1)}{4b}$$

$$\frac{\partial N_{20}}{\partial z} = \frac{(\eta + 1)(\xi^2 - 1)}{4c}$$

Sendo a matriz $\tilde{E}$ definida pela equação (3.15) e com a matriz $\tilde{B}$ dada pela equação (3.110), pode-se, por meio da equação (3.109), obter a matriz de rigidez do elemento finito prismático regular parabólico, que é mostrada pela equação (3.111).

$$K_s = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K_{1,7} & K_{1,8} & K_{1,9} & K_{1,10} \\ & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} & K_{2,5} & K_{2,6} & K_{2,7} & K_{2,8} & K_{2,9} & K_{2,10} \\ & & K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} & K_{3,7} & K_{3,8} & K_{3,9} & K_{3,10} \\ & & & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} & K_{4,7} & K_{4,8} & K_{4,9} & K_{4,10} \\ & & & & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,7} & K_{5,8} & K_{5,9} & K_{5,10} \\ & & & & & K_{6,6} & K_{6,7} & K_{6,8} & K_{6,9} & K_{6,10} \\ & & & & & & K_{7,7} & K_{7,8} & K_{7,9} & K_{7,10} \\ & & & & & & & K_{8,8} & K_{8,9} & K_{8,10} \\ & & & & & & & & K_{9,9} & K_{9,10} \\ & & & & & & & & & K_{10,10} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Sim.

Os coeficientes $\tilde{K}$ internos a matriz (3.111) são definidos pelas matrizes apresentadas no Anexo I.

CAPÍTULO 4 - ALVENARIA ESTRUTURAL

4.1 - Definição

Define-se como alvenaria estrutural o sistema construtivo cujos elementos que desempenham a função estrutural são os mesmos que fazem a vedação, neste caso, a alvenaria. Assim, esse sistema transforma duas etapas da construção (estrutura e fechamento) em apenas uma, reduzindo o tempo de execução da obra.

A grande vantagem deste sistema construtivo é a integração dos conceitos de racionalização, produtividade e qualidade, produzindo edificações com bom desempenho tecnológico, aliado a uma boa relação custo/benefício.

4.2 - Considerações gerais

A alvenaria estrutural pode ser classificada segundo as suas exigências estruturais, de acordo com a NBR 10837/1989 em:

Alvenaria estrutural armada: quando toda parede é armada, respeitando-se as taxas mínimas de armaduras, as quais servem para resistir às tensões de tração e, parcialmente, de compressão. As armaduras são dispostas nas aberturas dos blocos e, posteriormente, preenchidas com graute (micro-concreto);

Alvenaria estrutural não armada: quando não se utiliza armadura com função estrutural, apenas construtiva, para prevenir e corrigir problemas patológicos como fissuras, concentração de tensões em pontos localizados, dentre outros;

Alvenaria estrutural parcialmente armada: quando alguns elementos resistentes são projetados como armados e outros como não armados;

Alvenaria estrutural protendida: quando é inserida armadura ativa que segundo Parsekian e Franco (2000), são formadas por barras de aço com rosca em uma das pontas e um fixador na outra extremidade, sendo a protensão aplicada por meio de um torquímetro, de modo a aumentar as tensões de compressão nas paredes, e também a resistência dos elementos à tração.

4.3 - Blocos de concreto

Sabendo-se que a principal função da alvenaria estrutural é resistir aos esforços de compressão atuantes no painel, ou parede, a resistência de seus componentes é fundamental na resistência global deste, sendo assim, a resistência do bloco é fundamental para o conjunto já que este o compõe em média de 90% a 95% do total.

Muitos métodos de cálculo de alvenaria estrutural baseiam-se nos valores das resistências dos componentes para estabelecer a verificação da resistência das paredes, utilizando correlações de resistências entre blocos-paredes, ou blocos-prismas, para estabelecerem a capacidade última de cálculo do elemento estrutural, como é o caso da Norma Britânica (GARCIA, 2000) citado por LOGULLO(2006, p. 22).

No Brasil, o cálculo do dimensionamento de resistência, na alvenaria estrutural é preconizado pela NBR 10837, que prescreve o feito a partir de ensaios com prismas de dois blocos.

Os blocos de concreto usados em alvenaria estrutural são classificados segundo a norma brasileira NBR 6136 (2007) em:

- **classe A:** com função estrutural, para uso em elementos de alvenaria acima ou abaixo do nível do solo;

- **classe B:** com função estrutural para uso em elementos de alvenaria acima do nível do solo;
- **classe C:** com função estrutural para uso em elemento de alvenaria acima do nível do solo;
- **classe D:** sem função estrutural para uso de elemento acima do nível do solo.

A NBR 6136 (2007) estabelece que a resistência à compressão característica deva ser atendida conforme indicado na Tabela 1.

Tabela 1 - Valores mínimos de resistências da NBR 6136/07.

<i>Classe</i>	<i>Resistência Característica f_{bk} MPa</i>	<i>Absorção média em %</i>		<i>Retração %</i>
		<i>Agregado normal</i>	<i>Agregado leve</i>	
<i>A</i>	$\geq 6,0$	$\leq 10,0\%$	$\leq 13,0\%$ (média)	$\leq 0,065\%$
<i>B</i>	$\geq 4,0$		$\leq 16,0\%$ (individual)	
<i>C</i>	$\geq 3,0$			
<i>D</i>	$\geq 2,0$			

As Tabelas 2 e 3 apresentam respectivamente as dimensões modulares e as dimensões das paredes dos blocos, sendo que a NBR 6136 (2007).

Tabela 2 - Dimensões das espessuras em função da classe, NBR 6136/07.

Famílias de blocos											
Designação	Nominal	20	15		12,5			10		7,5	
	Módulo	M-20	M- 15		M- 12,5			M-10		M-7,5	
	Amarração	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/2	1/2	1/3	1/2
	Linha	20 X 40	15 X 40	15 X 30	12,5 X 40	12,5 X 25	12,5 x 37,5	10 X 40	10 X 30	10 x 30	7,5x 40
Largura (mm)		190	140	140	115	115	115	90	90	90	65
Altura (mm)		190	190	190	190	190	190	190	190	190	190
Comprimento (mm)	Inteiro	390	390	290	390	240	365	390	190	290	390
	Meio	190	190	140	190	115	-	190	90	-	190
	2/3	-	-	-	-	-	240	-	-	190	-
	1/3	-	-	-	-	-	115	-	-	90	-
	Amarração L	-	340	-	-	-	-	-	-	-	-
	Amarração T	-	540	440	-	365	365	-	290	290	-
	Compens. A	90	90	-	90	-	-	90	-	-	90

Tabela 3 - Dimensões reais, NBR 6136/07.

Classe	Designação	Paredes longitudinais ¹⁾ mm	Paredes transversais	
			Paredes ¹⁾ mm	Espessura equivalente ²⁾ mm/m
A	M-15	25	25	188
	M-20	32	25	188
B	M-15	25	25	188
	M-20	32	25	188
C	M-10	18	18	135
	M-12,5	18	18	135
	M-15	18	18	135
	M-20	18	18	135
D	M-7,5	15	15	113
	M-10	15	15	113
	M-12,5	15	15	113
	M-15	15	15	113
	M-20	15	15	113

1) Média das medidas das paredes tomadas no ponto mais estreito.

2) Soma das espessuras de todas as paredes transversais aos blocos (em milímetros), dividida pelo comprimento nominal do bloco (em metros).

Gallegos, citado por Logullo (2006, p. 16), diz que altos valores de resistência dos blocos poderiam ser associados à sua boa qualidade, porém a grande variedade de formas e dimensões dos blocos, principalmente altura, impossibilita relacionar diretamente os resultados de ensaios de compressão com sua qualidade. Com isso, a resistência à compressão é função não só da resistência intrínseca da unidade, mas também da altura e forma do bloco.

Sabe-se que a resistência à compressão dos blocos é considerada o mais importante parâmetro de projeto do edifício de alvenaria estrutural, não podendo deixar de enfatizar que outras propriedades físicas são imprescindíveis para o comportamento adequado das paredes, tais como: resistência à tração, capacidade de absorção, textura superficial, porosidade, capacidade de resistência ao fogo e estabilidade dimensional.

Conforme apresentado por Mohamad (1998, p.13) a alvenaria, quando carregada axialmente, dependendo da rigidez de seus materiais, sofrerá tensões de tração no bloco e confinamento na argamassa, com isso é importante determinar também a resistência à tração dos blocos estruturais.

Sabe-se que a fissuração estrutural é causada por tensões de tração desenvolvidas perpendicularmente à direção das tensões de compressão. Com o surgimento de fissuras ocorre uma diminuição da capacidade resistente do conjunto, onde qualquer aumento expressivo do carregamento axial pode levá-lo à ruptura, sendo assim, quanto maior a capacidade resistente do conjunto, ou da parede, à tração, maior a sua resistência a esforços de compressão.

É importante citar que mesmo sabendo-se que a resistência das unidades é o principal fator condicionante da resistência da alvenaria, o aumento de resistência dos blocos não resulta em incrementos proporcionais de resistência da alvenaria. No Brasil, a razão entre a resistência da alvenaria e a resistência dos blocos, diminui com o acréscimo da resistência da unidade com um fator

variando entre 25 e 70% para a alvenaria de blocos de concreto, conforme apresentado por Juste (2001, p. 13).

4.4 - Argamassas de assentamento

A NBR 8798 (1985, p.3), apresenta argamassa de assentamento como um elemento utilizado na ligação de blocos, garantindo distribuição uniforme de esforços, composta de cimento, agregado miúdo, água e cal ou outra adição destinada a conferir plasticidade e retenção de água de hidratação da mistura. Cabe destacar que as principais funções da argamassa de assentamento são:

- Unir as unidades de alvenaria e ajudá-las a resistir aos esforços laterais;
- Absorver as pequenas deformações naturais da alvenaria;
- Distribuir uniformemente todos os esforços da parede em toda a superfície resistente do elemento bloco;
- Isolar a edificação, selando as juntas contra penetração da água das chuvas e ventos.

Segundo NBR 8798 (1985, p.8) o preparo da argamassa deve seguir as seguintes etapas:

- Medição de todos os materiais, cimento, agregado, cal, aditivo e água, com tolerância de 3%, exceto o aditivo, que é de 5%;
- Quando a mistura for manual e de pequeno volume, deve ser feita sobre uma superfície plana e impermeável, primeiro misturando o material seco (cimento e agregado), de maneira a obter-se cor uniforme, em seguida adicionando, aos poucos, água até a obtenção de uma massa de aspecto uniforme.
- Quando for mecânica, lançar primeiramente parte da água e todo o agregado, posteriormente, com o misturador já em funcionamento, adicionar o cimento e após algumas voltas do misturador lançar a cal hidratada e o restante da água. O tempo mínimo de amassamento, em segundos, deve ser superior a 240.d,

120.d ou 60.d, conforme o eixo do misturados seja: inclinado, horizontal ou vertical. O valor 'd' corresponde ao diâmetro máximo do tambor, em metros.

Segundo Cavalheiro (1995, p.2), houve nos últimos anos um grande desenvolvimento tecnológico, de controle e produção na área de concreto. Isso não ocorreu na mesma intensidade na área de argamassas devido à falta de conhecimentos das reais características necessárias deste material que, mesmo tendo funções divergentes com as do concreto, normalmente é qualificado para possuir as mesmas propriedades.

Fatores importantes para a resistência à compressão da alvenaria são as propriedades mecânicas da argamassa, uma vez que o mecanismo de ruptura, na maioria das vezes, está ligado à junta entre argamassa e bloco.

De acordo com Cavalheiro (1995, p.3), as propriedades da argamassa podem ser divididas em termos temporais, ou seja, argamassa plástica e endurecida.

As propriedades da argamassa no estado plástico influenciam diretamente as propriedades no estado endurecido e, conseqüentemente, as características da estrutura final (ASTM C270-03b, AMERICAN 2004, p. 157). Essas propriedades no estado plástico podem ser resumidas em trabalhabilidade e retenção de água, enquanto as propriedades no estado endurecido são, basicamente, aderência, durabilidade, elasticidade e resistência a compressão.

4.4.1 - Trabalhabilidade

A trabalhabilidade é uma combinação de várias propriedades, como consistência, plasticidade e coesão. Uma argamassa com boa trabalhabilidade é facilmente identificada pela facilidade de aplicação e pelo suporte ao peso do bloco quando assentado, facilitando o alinhamento.

Sabatini (1984, p. 84) define trabalhabilidade como a propriedade capaz de fazer com que o pedreiro produza com rendimento otimizado um trabalho satisfatório, rápido e econômico. Esta propriedade, por agir diretamente na melhor aplicação do material, faz com que todas as outras propriedades sejam subordinadas a ela.

Ainda que esta propriedade seja importante e, por esta razão uma das mais estudadas dentre as da argamassa, ainda hoje não se conseguiu desenvolver um método capaz de quantificá-la empiricamente. Isso ocorre dado ao fato desta propriedade ser formada por diversas características distintas.

Assim sendo, a trabalhabilidade é quantificada indiretamente através de uma correlação com a consistência da argamassa. Consistência é a propriedade de uma argamassa ter maior ou menor facilidade de opor resistência a uma dada deformação. As argamassas são classificadas segundo sua consistência em secas, plásticas ou fluidas.

Sabatini (1984, p. 84-86) destaca em seu trabalho que esta propriedade é influenciada por: relação água/aglomerante, relação aglomerante/areia, granulometria e natureza da areia e qualidade do aglomerante.

A NBR 8798 (1985, p.7) define os limites de consistência para argamassa de assentamento para alvenaria estrutural. Esses limites são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Exigências mínimas para argamassa. Fonte: NBR 8798/85.

Propriedades	Argamassa	
	Exigência	Método
Consistência	230 ± 10 mm	NBR 7215
Retenção de Água	$\geq 75\%$	ASTM C - 91
Resistência à compressão axial	≥ 9 MPa ou $\geq f_{akj}$	NBR 7215

4.4.2 - Retenção de água

Retenção de água é a capacidade da argamassa de reter a água de amassamento pelo maior tempo possível. A água é de fundamental importância na argamassa, primeiro por agir como líquido lubrificante, dando a trabalhabilidade necessária para o assentamento e, segundo, por combinar quimicamente os materiais aglomerantes do tipo hidráulico, causando assim o endurecimento da argamassa.

O processo de perda de água da argamassa inicia-se no instante da mistura, por evaporação. Posterior a esta etapa, a argamassa é aplicada sobre a superfície dos blocos, instante na qual a velocidade de perda aumenta, pela absorção desta pelos poros do bloco. Fenômeno este que causa danos a ambos os elementos: na argamassa, retira a água necessária para a reação do aglomerante, o que gera perda imediata de aderência e de resistência à compressão, além de diminuir a plasticidade; no bloco, causa uma dilatação local na área de contato, diminuindo ainda mais a aderência devido à retração por secagem.

A capacidade de reter água está intimamente ligada à tensão de superfície da pasta aglomerante, que normalmente conserva a água necessária para lubrificar os grãos de areia e hidratar o

aglomerante. Sendo esta propriedade variável com o potencial de absorção do bloco, Davison (1961), citado por Silva Jr. (2007, p.21), afirma que para diferentes tipos de argamassa, a perda de água por sucção é crescente para blocos com IRA (*Initial Rate Absorption* - Taxa Inicial de Absorção) até valores entre 30 e 50g/min/194 cm², diminuindo para blocos com IRA maiores.

Na quantificação da retenção de água não se leva em consideração a perda por evaporação, e sim, somente a perda por absorção do bloco. A NBR 13279 (1995, p.1) indica o ensaio normatizado para obtenção deste valor e a NBR 8798 (1985, p.7) indica os valores mínimos, conforme nos mostra a Tabela 4.

4.4.3 - Aderência

Sabatini (1984, p.88) define aderência como a capacidade que a interface bloco-argamassa possui em absorver tensões tangenciais e normais a ela sem romper-se. Destaca-se ainda a grande importância do bloco nesta propriedade, não sendo somente a argamassa a única a influenciá-la.

De acordo com Solorzano (1994), citado por Silva Jr. (2007, p.21), as características das argamassas influentes na aderência são: trabalhabilidade, retenção de água, porosidade e granulometria da areia. Além disso, pode-se citar a influência das condições de execução e cura da alvenaria. Deste modo, torna-se impossível quantificar a capacidade de aderência somente através das propriedades da argamassa.

4.4.4 - Resistência à compressão

A argamassa de assentamento tem valores do fator a/c elevados, quando comparado com os utilizados no concreto, visto que a resistência à compressão não é a característica mais desejável e que a água é fator decisivo para a ocorrência de boa

trabalhabilidade. Desta maneira, a propriedade de resistência à compressão da argamassa, para fins de assentamento, não é preponderante dentre as demais, sendo somente supervisionada para que não seja um valor muito abaixo da resistência dos blocos, de modo a não prejudicar o conjunto.

São muitos os trabalhos que apresentam a importância da argamassa ter resistência à compressão próxima a da alvenaria, cujo embasamento se fundamenta na boa resistência final do conjunto. Ramalho e Corrêa (2003, p. 76) citam que apenas se a resistência da argamassa for menor que 30% ou 40% da resistência do bloco é que essa influência passa a ser considerável, estabelecendo assim uma margem de afastamento entre as resistências bastante considerável.

Gomes (1974), citado por Silva Jr. (2007, pg. 22), concluiu, por exemplo, que paredes sujeitas à compressão simples moldadas com argamassa de resistência superior à resistência dos blocos apresentam rupturas bruscas, comportamento este que surgiu devida a alta rigidez da argamassa e que deve ser evitado.

No que diz respeito à forma de ruptura dos prismas, Mohamad (1998, p. 106), verificou que quando foram utilizadas argamassas menos resistentes que os blocos, a ruptura dos prismas se deu de forma 'dúctil', ocorrendo um esfacelamento da parte externa das paredes dos blocos, iniciando na área próxima à junta e propagando-se para o restante do bloco. Para argamassas com o mesmo nível de resistência que o bloco, na área líquida, a ruptura ocorreu de forma frágil, no plano vertical do prisma.

Na alvenaria sujeita à compressão, a argamassa tende a expandir lateralmente mais que o bloco. Devido à argamassa estar ligada mecanicamente com o bloco, ela é restringida lateralmente, surgindo assim tensões de tração nos blocos e de compressão na argamassa, sendo assim a argamassa fica submetida a um estado triaxial de tensões e o bloco a um estado biaxial de tensões, conforme ilustrado pela Figura 4.1.

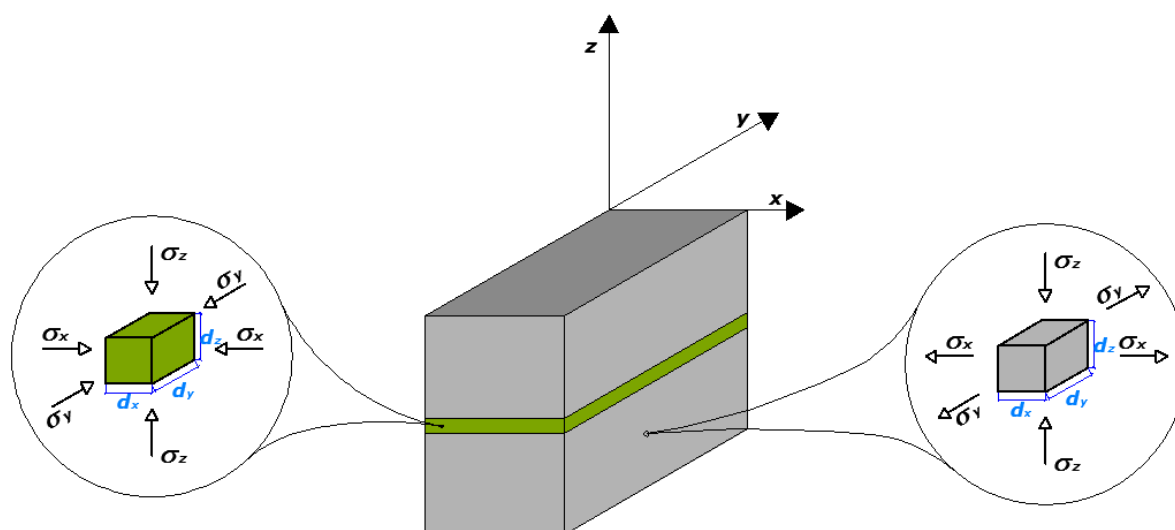


Figura 4.1 - Estado de tensão na alvenaria.

A resistência à compressão da argamassa, determinada através de corpos-de-prova cilíndricos, deve ser somente usada para controle de qualidade da argamassa e não representativa da resistência atingida por estas nas paredes, pois os fatores influentes, como as condições de adensamento, cura, o confinamento pelos pratos da prensa, pelo bloco e situações circunstanciais como absorção da água pelo bloco, são diferentes para cada situação (MENDES, 1998, p.39) citado por Silva (2007).

Drysdale e Guo (1995), citado por Mendes (1998, p.39), observaram que as relações da resistência à compressão das argamassas curadas ao ar livre (situação da argamassa como componente na alvenaria) e curadas segundo a norma, em câmara úmida, são dadas por 0,63 e 0,47, para argamassas traço (1 : 1 : 6) e (1 : 1,5 : 4,5), respectivamente.

A norma britânica BS 5625-Parte1(1992) descreve as resistências mínimas a serem observadas para os traços recomendados, indicados na Tabela 5.

Tabela 5 - Traços e resistências especificadas pela BS 5628 - Parte 1 (1992).

Tipo de argamassa	Traço em volume	Resistência média à compressão (MPa) - 28 dias	
		Ensaio em Laboratório	Ensaio em Obra
(i)	1 : 0 a 0,25 : 3	16,0	11,0
(ii)	1 : 0,5 : 4 a 4,5	6,5	4,5
(iii)	1 : 1 : 5 a 6	3,6	2,5
(iv)	1 : 2 : 8 a 9	1,5	1,0

A norma britânica apresenta que quanto maior é a resistência dos blocos, maior é a influência da resistência das argamassas na resistência de todo o conjunto denominado alvenaria.

Destaca-se também que a norma brasileira NBR 8798 (1985, p.4) também define a resistência mínima da argamassa de assentamento para alvenaria estrutural. Estes valores já foram apresentados na Tabela 4.

4.4.5 - Assentamento

Segundo a NBR 8798 (1985, p.3) a argamassa deve ser aplicada em superfícies limpas, sem agregados soltos ou excesso de água para que possa haver perfeita aderência e união entre argamassa e bloco. O cordão de argamassa tem que ser do diâmetro tal que após o assentamento do bloco, ocasione uma junta da espessura de 10 ± 3 mm.

As espessuras das juntas de argamassa produzem grande influência na resistência final da alvenaria, sendo que sua variação, para mais ou para menos, pode ocasionar variação da resistência do conjunto.

Ramalho e Corrêa (2003, p. 76) citam que tal espessura não pode ser muito pequena, pois permitiria, que em uma falha

executiva, as superfícies dos blocos acabassem se tocando, produzindo assim uma elevada concentração de tensões.

Os estudos de Francis (1971), citado por Ramalho e Corrêa (2003, p.76), provaram que há um decréscimo da resistência da parede com o aumento da espessura da junta horizontal, devido ao menor confinamento desta pelas paredes das unidades. Este confinamento é que garante a resistência da argamassa, mesmo que esta tenha obtido baixa resistência em ensaios com corpos-de-prova cilíndricos.

Mohamad (1998, p.86) comparou resultados com espessuras de 7 e 10 mm na alvenaria, chegando a um acréscimo de 34% de resistência nas de menor espessura, confirmando a importância da execução das juntas na espessura recomendada.

4.5 - Graute

A NBR-8798(1985, p.3) define graute como elemento para preenchimento dos vazios dos blocos e canaletas, visando a solidarização da armadura a estes elementos e proporcionando um aumento da capacidade resistente. Sua composição é feita à base de cimento, agregado miúdo, agregado graúdo, água e cal, ou outra adição destinada a conferir trabalhabilidade e reter a água de hidratação à mistura.

A classificação dos tipos de graute segundo a NBR-8798 (1985, p.9) é feita através da dimensão máxima do agregado a ser utilizado, sendo considerado como graute fino os que possuem agregado com diâmetro máximo inferior ou igual a 4,8 mm, e, como graute grosso, os que possuem diâmetro superior a 4,8 mm.

Os furos dos blocos de concreto devem ser grandes o suficiente para optar por um graute grosso, sendo mais interessante por serem mais econômicos (menor consumo de cimento) e apresentarem redução de fissuras causadas pela retração, conforme apresentado por LOGULLO (2006, p. 30).

Uma das propriedades relevantes do graute é a trabalhabilidade, onde a fluidez e a coesão, duas propriedades contrárias, devem estar em um estado de equilíbrio, para que se possa obter um graute eficiente (CALÇADA citado por SILVA, 2003).

A trabalhabilidade do graute está também ligada a outras propriedades como a consistência e plasticidade. Com isto, um dos parâmetros usados para se medir a trabalhabilidade do graute é a sua consistência, que é determinada através do ensaio de abatimento do tronco de cone, regulamentado pela NBR 7223 (1992) e que segundo a NBR 8798 (1985) deve ser de 200 ± 30 mm.

Segundo Drysdale et al., 1994, citado por Cunha (2001), o abatimento pelo ensaio do tronco de cone deve ser de 200 a 250 mm; já a NBR 8798 (1985) determina um abatimento de 200 ± 30 mm.

Fator de grande importância é a resistência do graute à compressão para a resistência final da alvenaria. Com a necessidade de se obter um graute com boa trabalhabilidade, o mesmo passa a ter relações a/c (água / cimento) altas, da ordem de 0,8 a 1,2, assim fazendo com que a resistência tenda a diminuir.

Gallegos, citado por Silva (2003, p.49), afirma que, com a absorção da água por parte do bloco, a relação a/c fica reduzida em torno de 0,5 a 0,6, porém, não podendo ser considerada como fator de ganho na resistência da alvenaria, pois a sucção de água pelo bloco cria uma interface bloco-graute porosa, que resulta em uma menor área de contato entre estes componentes, diminuindo a capacidade resistente da alvenaria.

Cunha (2001, p. 35) cita que para que o bloco e o graute atuem como estrutura homogênea é necessário que exista uma boa aderência entre ambos. A ausência de aderência, ou fraca, entre os blocos e o graute diminuem as características do material composto da alvenaria, pois a transferência de tensões entre esses materiais depende dessa aderência.

A resistência à compressão exigida pela NBR 8798 (ASSOCIAÇÃO, 1985, p.7) deve ser superior ou igual a 14 MPa ou a resistência característica a certa idade expressa no projeto da obra.

Cunha (2001, p. 113) em seus ensaios concluiu que a resistência final de prismas grauteados de blocos de concreto é superior à dos prismas vazios com relação à suas áreas líquidas, independente do tipo de graute e argamassa utilizada, afirmando que seus resultados mostraram uma integração entre blocos, argamassas e grautes, funcionando como um material monolítico.

Camacho e Rodrigues(1999), citado por Logullo (2006, pg.33), em seu estudo sobre a influência do graute na resistência da alvenaria, verificaram que o graute permite o aumento de resistência da alvenaria na mesma relação entre a área bruta e a área líquida do bloco, desde que graute e bloco apresentem aproximadamente a mesma resistência. Além de afirmarem que a adoção de grautes cada vez mais resistentes representa elevação de custo e não contribui muito para o aumento da resistência da alvenaria.

Foi constada por Romagna (2000, p. 53) pouca diferença existente nas resistências dos grautes moldados em corpos-de-prova e extraídos dos vazados dos blocos, resultado que contradiz a maioria dos pesquisadores os quais afirmam que a resistência do graute, quando na alvenaria, é maior graças à redução do fator água cimento.

Romagna (2000, p. 92) observou que as rupturas para os prismas grauteados foram simultâneas às dos componentes, e acredita-se que esta tenha sido provocada pela expansão lateral do graute com incremento de tensões de tração no bloco.

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE EXPERIMENTAL

Essa etapa do trabalho envolveu ensaios para determinação das características físicas e ensaios finais de resistência à compressão e à tração. O trabalho foi desenvolvido no laboratório do Núcleo de Ensino e Pesquisa da Alvenaria Estrutural - NEPAE, da Unesp - Faculdade de Engenharia Civil de Ilha Solteira.

Portanto, serão aqui descritos os procedimentos de execução dos ensaios, tais como os resultados obtidos.

5.1 - Blocos Vazios

Como já citado anteriormente sabe-se que os blocos correspondem à maior parte do montante total da alvenaria, portanto eles devem atender aos requisitos de desempenho essenciais para as unidades de alvenaria, como: resistência mecânica, durabilidade, dimensões padronizadas, tolerância dimensional, massa e facilidade de manuseio, entre outras. Sendo assim, é fundamental que sejam conhecidas as suas propriedades para o entendimento da alvenaria como um todo.

Serão utilizados blocos inteiros, com dimensões 14 cm x 19 cm x 29 cm, cujo recebimento foi feito em um único lote. Quanto às características visuais, que também podem ocasionar o comprometimento da capacidade resistente dos blocos, as amostras apresentaram aspecto homogêneo, sendo que as arestas vivas estavam livres de trincas e imperfeições.

Para a realização dos ensaios de caracterização física dos blocos no que diz respeito à capacidade resistente, para

obtenção da curva tensão-deformação, foram seguidas as quantificações apresentadas na Tabela 6, onde é apresentado o tipo de ensaio e o que se deseja obter, com o respectivo número de amostras.

Tabela 6 - Quantidade de blocos e ensaios a serem realizados.

Tipo de Ensaio	Corpo-de-prova	Nº Amostras	Resistência	Deformações
Compressão	Blocos	2	Sim	Não
Compressão	Blocos	4	Sim	Sim

5.1.1 - Procedimento para ensaio dos blocos

Para a determinação da resistência à compressão axial foram utilizados os procedimentos preconizados pela NBR 12118 (2006).

5.1.1.1 - Capeamento dos blocos

A utilização do capeamento das superfícies dos corpos-de-prova a serem ensaiados é necessária para garantir o paralelismo entre suas faces, contribuindo com uma distribuição homogênea do carregamento nas unidades. A norma NBR 12118 (2006) indica para a regularização das faces dos corpos-de-prova que sejam utilizadas pastas ou argamassa à base de gesso, enxofre, cimento, pozolana ou outro qualquer material, e que a espessura média do capeamento não deve exceder 3,0 mm.

Maurício, Camacho e Andolfato (2004, p. 31) indicaram o gesso e o enxofre como sendo os materiais para capeamento mais indicados para estudos experimentais de resistência à compressão axial de blocos de concreto para alvenaria estrutural. Baseado nesses resultados optou-se por utilizar o gesso como material de

capeamento, devido ao fato deste material ser mais fácil para manipulação.

Assim, o capeamento foi feito com uma pasta de gesso nas proporções de 1,0 : 0,6 (gesso : água). Os corpos-de-prova foram capeados com uma fina camada dessa mistura, garantindo a regularidade de sua superfície, que se apresentará plana e uniforme no momento do ensaio.

Para a realização desse capeamento foi utilizado um capeador metálico próprio para esse fim, promovendo a regularização e paralelismo das faces capeadas, que pode ser observado na Figura 5.1.



Figura 5.1 – Capeamento dos blocos

A seguir são apresentados os blocos vazios a serem ensaiados após o processo de capeamento em ambas as faces.



Figura 5.2 - Blocos vazios capeados em ambas as faces sem instrumentação

5.1.1.2 - Determinação da Resistência à Compressão Axial e Deformabilidade dos Blocos

Para a determinação da resistência à compressão axial dos blocos foram utilizados os procedimentos descritos pela norma NBR 12188 (2006). Como os procedimentos para a realização da medida do módulo de elasticidade de blocos de alvenaria não são contemplados pela norma brasileira, serão adotados procedimentos comumente utilizados em laboratórios de pesquisas, utilizando-se extensômetros e células de carga.

Foram utilizados extensômetros elétricos instalados a meia altura e no centro alternado de cada septo do bloco, como observado na Figura 5.3.

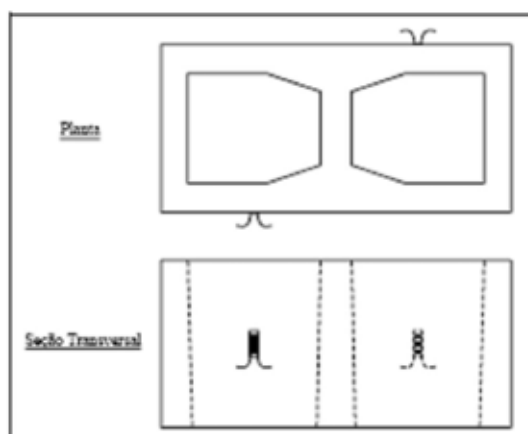


Figura 5.3 - Esquema de posicionamento dos extensômetros.
Fonte: ANDOLFATO (2002, p. 55).

A célula de carga utilizada possui capacidade de 1000 kN e foi posicionada entre a prensa universal e o perfil metálico. Todos os ensaios foram realizados com auxílio de um sistema de aquisição de dados e o sistema computacional DASY LAB 6.0, no qual foram ligados os equipamentos para aquisição instantânea dos dados relativos aos extensômetros elétricos, LVDTs e célula de carga.



Figura 5.4 - Sistema de aquisição de dados. Fonte: Logullo (2006, p. 47).

5.1.1.3 - Características Físicas dos Blocos

Conforme apresentado por KOGA (2008), que utilizou blocos do mesmo lote dos empregados nestes ensaios, a média da área bruta dos blocos ensaiados é de $414,69 \text{ cm}^2$ e a média da área líquida é igual a $283,23 \text{ cm}^2$, relacionando-se a área líquida com a bruta, tem-se que a área líquida é igual a 68,3% da área bruta. A absorção de água média das unidades é de 4,68 %.

Segundo as prescrições da NBR 6136 (2007) as unidades estudadas se enquadram dentro da classificação de blocos vazados, ou seja, a área líquida é inferior a 75% da área bruta. Os valores de absorção dos blocos ensaiados também estão dentro dos limites de aceitação da mesma norma, que determina o valor máximo de absorção como sendo 10%.

5.1.2 - Ensaio de resistência à compressão de blocos vazios

Foram realizados ensaios de compressão axial nos blocos para determinação de sua resistência última à compressão,

viabilizando uma carga segura para retirada dos LVDTs utilizados para aferir as deformações em pontos específicos dos blocos.

A Figura 5.5 apresenta um bloco vazio e os instrumentos de medida das deformações durante um ensaio de carregamento.



Figura 5.5 - Bloco instrumentado durante ensaio de carregamento

5.1.2.1 - Resistência à compressão

A Tabela 7 apresenta os resultados dos ensaios de resistência para blocos vazios, cuja tensão média que os levou à ruína igual a 31,35 MPa, tensão esta calculada pela relação entre o carregamento total e a área líquida do bloco.

Tabela 7 - Resultados dos ensaios: Blocos Vazios

CP	Carga de Fissuração (kN)	Carga de Ruptura (kN)	f _c (MPa)
** 1	477,0	760,0	26,83
** 2	431,0	700,0	24,71
* 3	651,0	890,7	31,45
* 4	597,0	888,8	31,38
* 5	713,0	887,3	31,33
* 6	669,0	885,0	31,25
		Média	31,35
		Desv. Pad.	0,08
		Coef. Var.	0,27%

* Limite da prensa universal onde foram feitos os ensaios

** Corpos-de-prova ensaiados para saber o instante em que os equipamentos deveriam ser retirados

5.1.2.2 - Deformabilidade

A Figura 5.6 mostra a relação tensão x deformação que foi obtida através da média das leituras realizadas pelos extensômetros instalados nas faces do bloco.

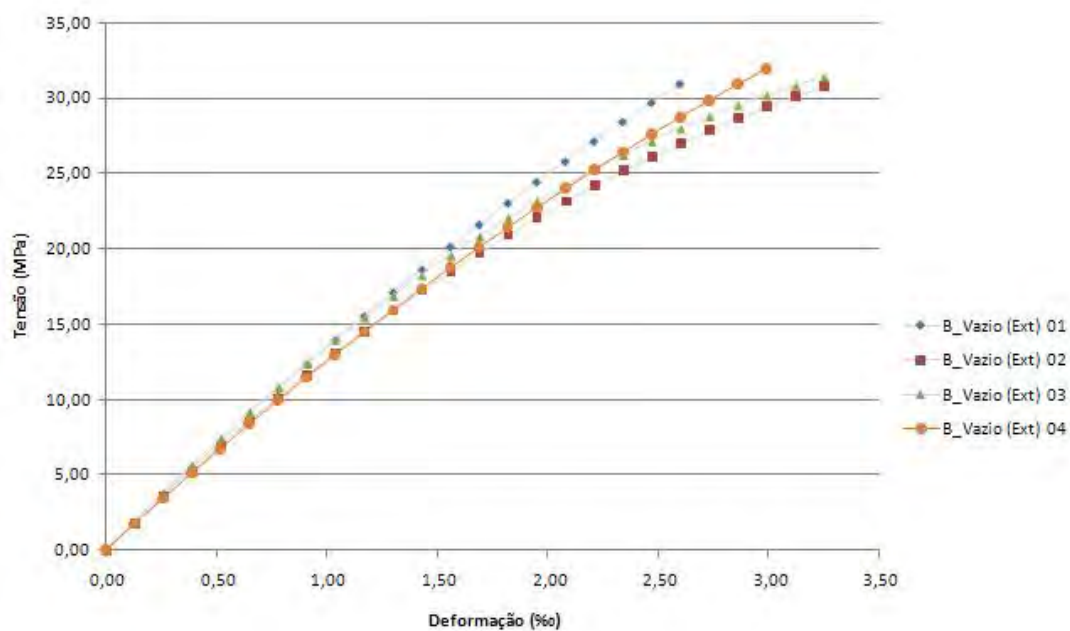


Figura 5.6 - Gráfico Tensão x Deformação dos extensômetros nos blocos vazios

Foram também realizadas leituras de deslocamentos em determinados pontos por meio de LVDT's, em faces opostas as que receberam os extensômetros elétricos, para uma contra prova das leituras. A Figura 5.7 apresenta os respectivos gráficos.

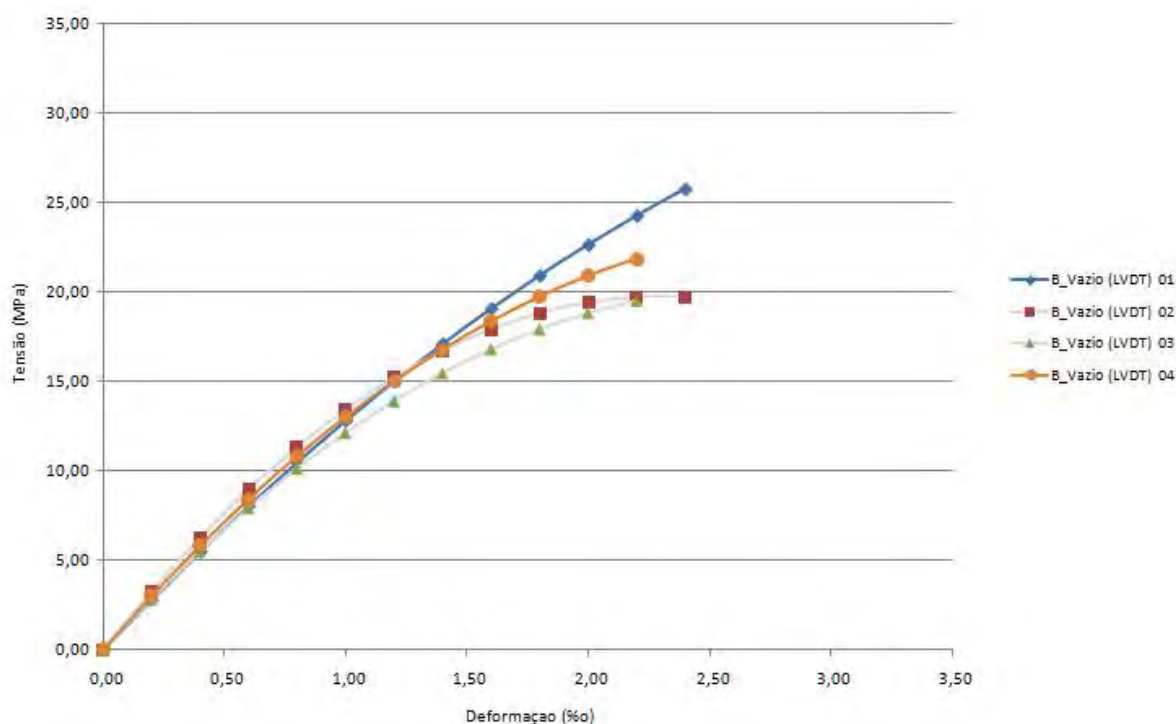


Figura 5.7 - Gráfico Tensão x Deformação dos LVDT's nos Blocos vazios

Para uma melhor compreensão dos resultados, a Figura 5.8 mostra a sobreposição dos dois gráficos já mostrados, permitindo a análise comparativa dos dados obtidos através das duas leituras.

Na referida Figura 5.8, pode-se constatar um comportamento semelhante para os dois equipamentos de medição das deformações, notando-se uma diferença nos pontos finais das curvas que foram obtidas através das leituras dos LVDTs devido à retirada do equipamento com aproximadamente 70% da carga de ruptura estimada.

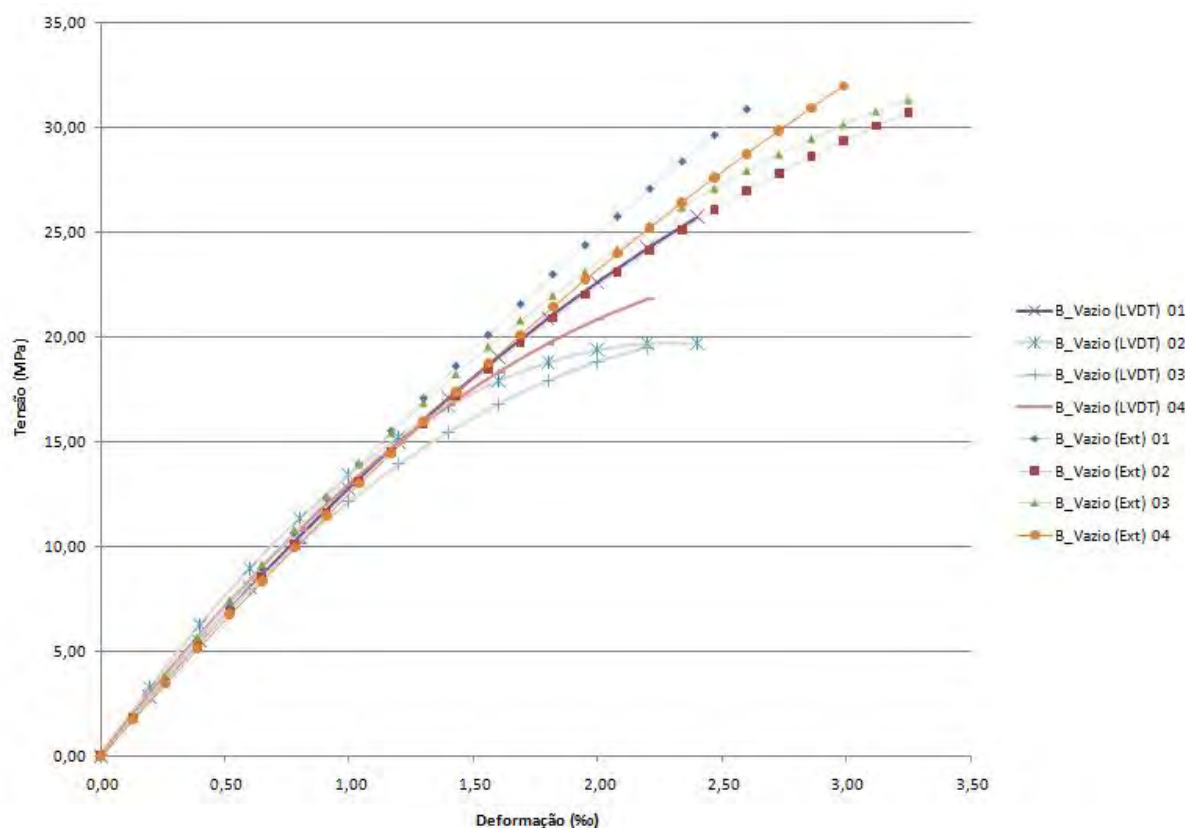


Figura 5.8 - Sobreposição dos dados obtidos com LVDT e Extensômetro.

5.1.2.3 - Modo de ruptura

A ruptura dos blocos ocorreu após o surgimento de fissuras inclinadas nas faces externas, estas que ocorreram com aproximadamente 70% da carga de ruptura. Após as primeiras fissuras, os blocos ainda resistiram a uma considerável parcela de carga, sendo que na Figura 5.9 é mostrada a forma de ruína obtida. Ressalva-se ainda que a maior parte dos blocos não atingiu a ruptura por uma limitação da máquina de ensaios e da célula de carga utilizada em 1000 kN.



Figura 5.9 - Modo de ruptura dos blocos vazios

5.1.3 - Ensaio de tração das paredes do bloco

Buscando-se a real resistência à tração das paredes do bloco após prensagem, vibração e cura, nesta etapa desenvolveu-se um ensaio de resistência à tração com amostras que foram extraídas de alguns blocos.

As amostras extraídas das paredes laterais, ou seja, das paredes de dimensão 29 cm, e paredes de fundo, dimensão de 14 cm, foram fixadas em elementos metálicos especiais feitos justamente para estes ensaios. As amostras tinham dimensão média de 4,00 x 4,00 cm e altura de 7,00 cm.

Tais elementos eram constituídos de uma chapa metálica de dimensões 4,0 x 4,0 cm onde foram soldados três elos de corrente, elos estes que foram colocados o intuito de trabalhar como uma rótula durante a aplicação da carga, dando assim uma distribuição homogênea de tensões ao longo das amostras, evitando qualquer tipo de flexão que pudesse causar uma ruptura prematura.

A Figura 5.10 nos permite visualizar uma amostra extraída do bloco já devidamente fixada nos elementos especiais feito para permitir a interação entre a prensa e o elemento de concreto.



Figura 5.10 – Amostra de parede do bloco fixada nos elementos especiais.

A fixação entre a amostra do bloco e o elemento metálico foi feita utilizando cola especial com secagem lenta. Após secagem o corpo-de-prova foi devidamente posicionado na prensa universal de ensaios, onde foi sujeito a uma prova de carga até sua ruptura.

A Figura 5.11 nos mostra o corpo-de-prova, já devidamente posicionado na prensa para realização do ensaio.



Figura 5.11 - Corpo-de-prova posicionado na prensa para realização do ensaio.

5.1.3.1 - Correlação entre resistência à compressão e resistência à tração do bloco

Para obter uma boa relação entre as resistências à tração e à compressão, optou-se por ensaiar amostras das paredes também à compressão e posteriormente compará-las entre si.

A Tabela 8 apresenta as resistências à tração obtidas nos ensaios de tração citados no item anterior, e a Tabela 9 apresenta a resistência à compressão das amostras extraídas da parede.

Tabela 8 – Resistência à tração das amostras de parede.

Pos.	Dim. X (cm)	Dim. Y (cm)	Área Transversal (cm ²)	Carga Tração (kgf)	Carga Tração (kN)	f _t (kN/cm ²)
Fundo	2,910	3,560	10,360	340,000	3,335	0,322
Fundo	3,470	2,780	9,647	300,000	2,943	0,305
					Média	0,314
Lado	3,620	3,280	11,874	345,000	3,384	0,285
Lado	3,360	3,440	11,558	220,000	2,158	0,187
					Média	0,236
				Média Geral		0,275

Tabela 9 – Resistência à compressão das amostras de parede.

Pos.	Dim. X (cm)	Dim. Y (cm)	Área Transversal (cm ²)	Carga Compressão (kgf)	Carga Compressão (kN)	f _c (kN/cm ²)
Fundo	3,76	3,45	12,972	5100	50,031	3,857
Fundo	3,60	4,20	15,12	2250	22,0725	1,460
Fundo	3,71	3,16	11,7236	3450	33,8445	2,887
					Média	2,735
Lado	3,42	3,38	11,5596	2250	22,0725	1,909
Lado	3,24	3,46	11,2104	5250	51,5025	4,594
Lado	3,43	2,99	10,2557	3700	36,297	3,539
					Média	3,348
				Média Geral		3,041

Comparando-se a resistência à tração média que foi de 2,75 MPa e à compressão média que foi de 30,41 MPa pode-se concluir que a resistência à tração é aproximadamente 9,05% da resistência à compressão.

5.1.3.2 - Modo de ruptura

A Figura 5.12 permite visualizar uma amostra da parede de um bloco de concreto após ruptura em ensaio de tração.



Figura 5.12 - Amostra de parede rompida após ensaio de tração.

Pode ser observado na figura acima a ruptura perpendicular à direção de atuação da carga, o que mostra uma boa distribuição da carga ao longo da seção transversal da amostra.

5.2 - Argamassas

Para tal estudo foram utilizadas duas resistências distintas de argamassa, denominadas A01 e A02, das quais A1 é uma argamassa mais pobre, com uma relação cimento/agregados menor, e A2 uma argamassa mais rica em teor de cimento, o que torna A1 uma argamassa menos resistente e A2 uma argamassa mais resistente.

A Tabela 10 apresenta o traço das argamassas em volume.

Tabela 10 - Argamassas e dosagem

Argamassa	Cimento	Cal	Areia	a/c
A1	1	1	8	1,20
A2	1	1	4,5	1,20

Para cada dosagem de argamassa foram extraídos 6 corpos-de-prova com diâmetro de 50 mm e altura de 100 mm, conforme prescrições da NBR 7215/96, Figura 5.13, onde foram ensaiados de acordo com a Tabela 11.



Figura 5.13 - Corpos-de-prova argamassas A1 e A2.

Tabela 11 - Quantidade de corpos-de-prova de cada argamassa e ensaios a serem realizados.

Tipo de Ensaio	Corpo-de-prova	Nº Amostras	Resistência	Deformações
Compressão	A1	2	Sim	Não
Compressão	A1	4	Sim	Sim
Compressão	A2	2	Sim	Não
Compressão	A2	4	Sim	Sim

Os corpos-de-prova ficaram submetidos a um período de cura inicial ao ar livre, seguido de uma cura final em água até a data da ruptura.

5.2.1 - Ensaio de compressão das argamassas

Anterior a ruptura foi realizado o capeamento dos corpos-de-prova com gesso, seguindo especificações normativas que visam o paralelismo entre as faces. A espessura do capeamento segue os padrões da NBR 7215/96 em seu item 3.5.4, cuja espessura máxima deve ser de 2 mm.

A prensa de ensaio foi devidamente preparada e limpa para receber os corpos-de-prova, estes que foram devidamente centrados em relação ao eixo de carregamento para receberem a carga.

A velocidade de carregamento da máquina de ensaio, conforme prescrito em norma foi equivalente a $(0,25 \pm 0,05)$ MPa/s.

A Figura 5.28 apresenta um corpo-de-prova devidamente preparado e instrumentado, centrado na máquina de ensaios antes da aplicação de carga.



Figura 5.14 - Corpo-de-prova preparado para receber carregamento.

5.2.1.1 - Resistência à compressão

Conforme apresentado nas Tabelas 12 e 13, a resistência à compressão da argamassa A01, que é a argamassa menos resistente, é de 2,87 MPa, e a da argamassa A02 de 6,12 MPa.

Tabela 12 - Resistência à compressão Argamassa A01.

CP	Carga de Fissuração (kN)	Carga de Ruptura (kN)	f _c (MPa)
A01 (1)	3,8	5,8	2,95
A01 (2)	4,3	5,2	2,65
A01 (3)	4,5	5,7	2,90
A01 (4)	4,0	5,3	2,69
A01 (5)	3,5	5,7	2,89
A01 (6)	5,0	6,2	3,16
Média			2,87
Desv. Pad.			0,19
Coef. Var.			6,49%

Tabela 13 - Resistência à compressão Argamassa A02.

CP	Carga de Fissuração (kN)	Carga de Ruptura (kN)	f _c (MPa)
A02 (1)	9,0	11,8	6,01
A02 (2)	10,0	11,5	5,86
A02 (3)	10,0	11,3	5,78
A02 (4)	12,0	13,9	7,08
A02 (5)	10,5	12,2	6,21
A02 (6)	9,5	11,4	5,81
Média			6,12
Desv. Pad.			0,50
Coef. Var.			8,09%

5.2.1.2 - Deformabilidade

A Figura 5.15 apresenta a relação tensão x deformação obtida nos ensaios para a argamassa A01, cuja resistência à ruptura média é de 2,87 MPa, seguida da Figura 5.16, que mostra o gráfico

tensão x deformação da argamassa A02, que obteve resistência de ruptura de 6,12 MPa.

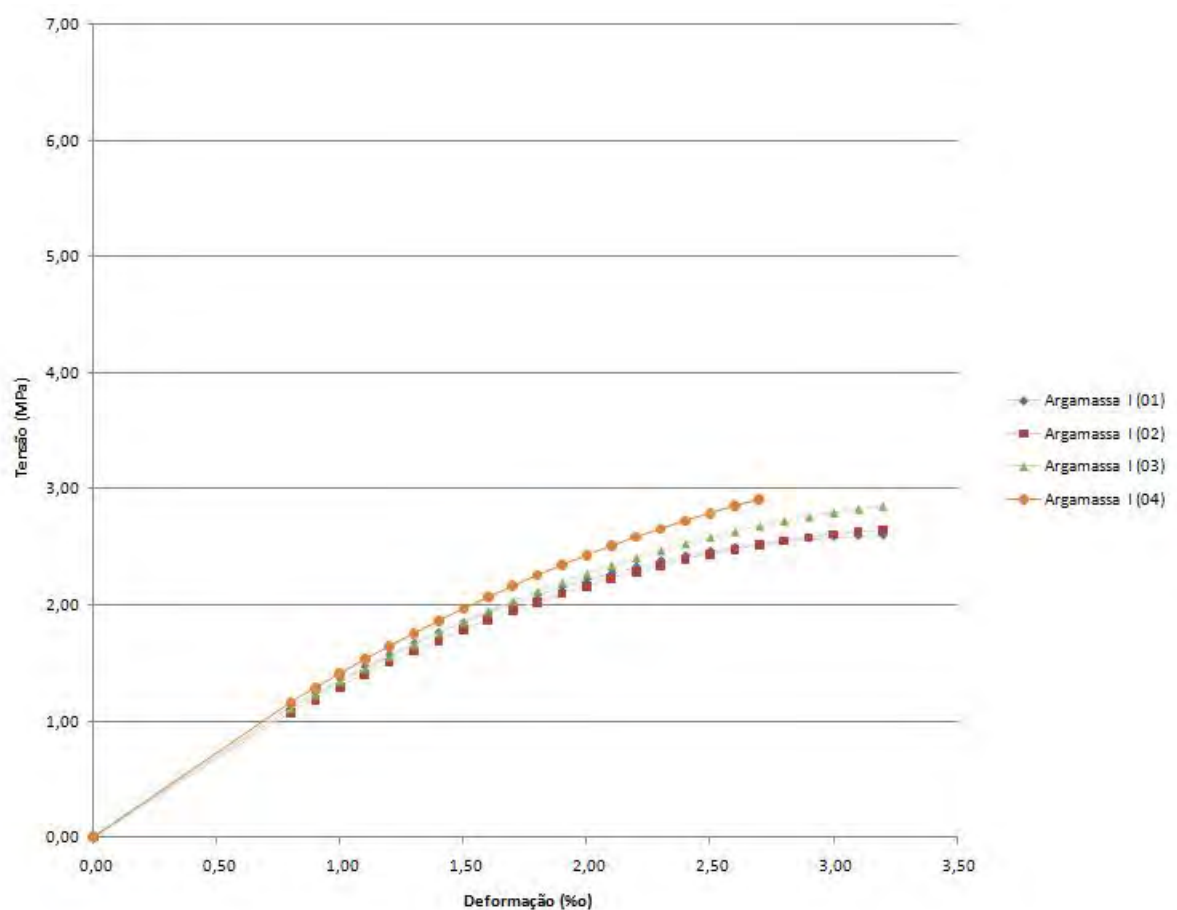


Figura 5.15 - Relação Tensão x Deformação da Argamassa A01

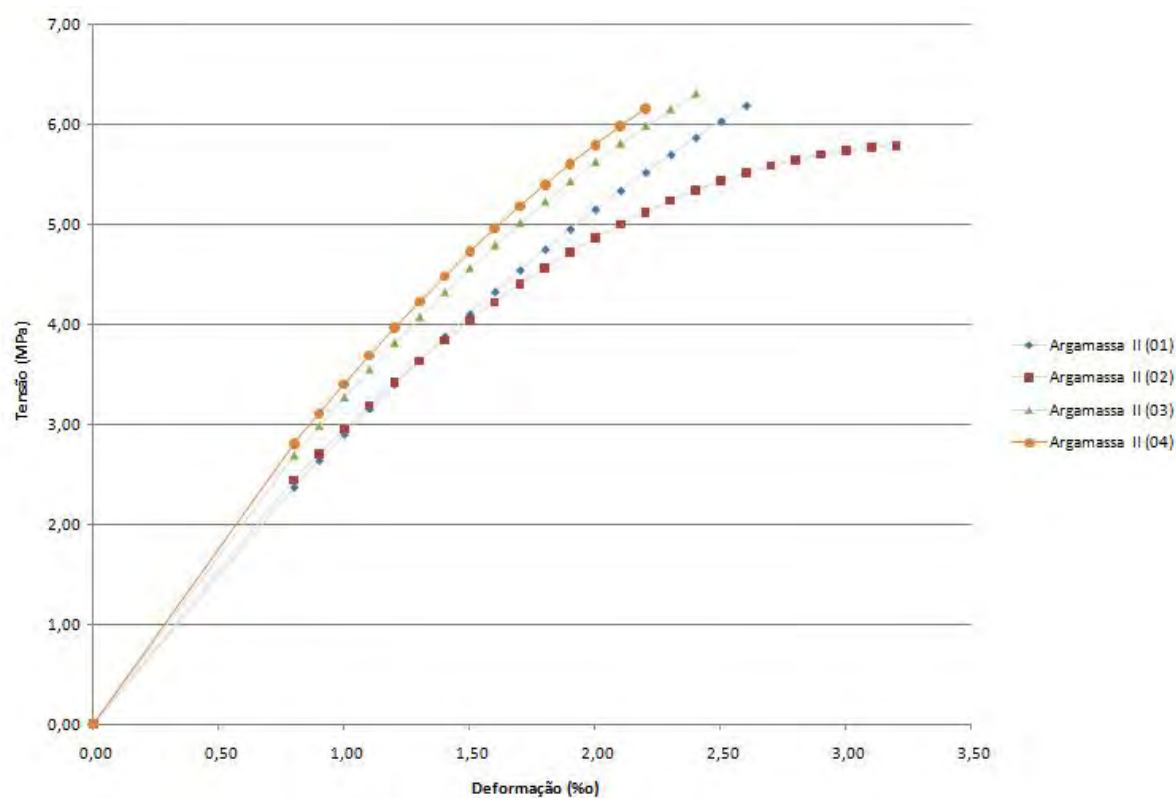


Figura 5.16 - Relação Tensão x Deformação da Argamassa A02

5.2.1.3 - Modo de ruptura

Todos os corpos-de-prova dos dois tipos de argamassa ensaiados seguiram a mesma forma de ruptura, e sua ruína típica pode ser observada na Figura 5.17.



Figura 5.17 - Modo de ruptura dos corpos-de-prova de argamassa.

5.2.2 - Correlação entre resistência à compressão e resistência à tração da argamassa

Nesta etapa do trabalho buscou-se uma relação entre a resistência à compressão e a resistência à tração da argamassa, para isto, foram confeccionados 08 corpos-de-prova com a dosagem da argamassa A02, argamassa de maior resistência, onde 04 unidades foram sujeitas a ensaio de compressão axial e 04 unidades a ensaio de compressão diametral.

A Figura 5.18 apresenta o corpo-de-prova de argamassa antes e depois do ensaio de compressão axial.

Este ensaio foi realizado em uma prensa manual com anel dinamométrico e capacidade para 50 kN de força.



Figura 5.18 - Ensaio de compressão axial em prensa manual em CP de argamassa

A Figura 5.19 ilustra com o corpo-de-prova antes da aplicação de carga (lado esquerdo), e após a aplicação da carga (lado direito), no ensaio de compressão diametral.

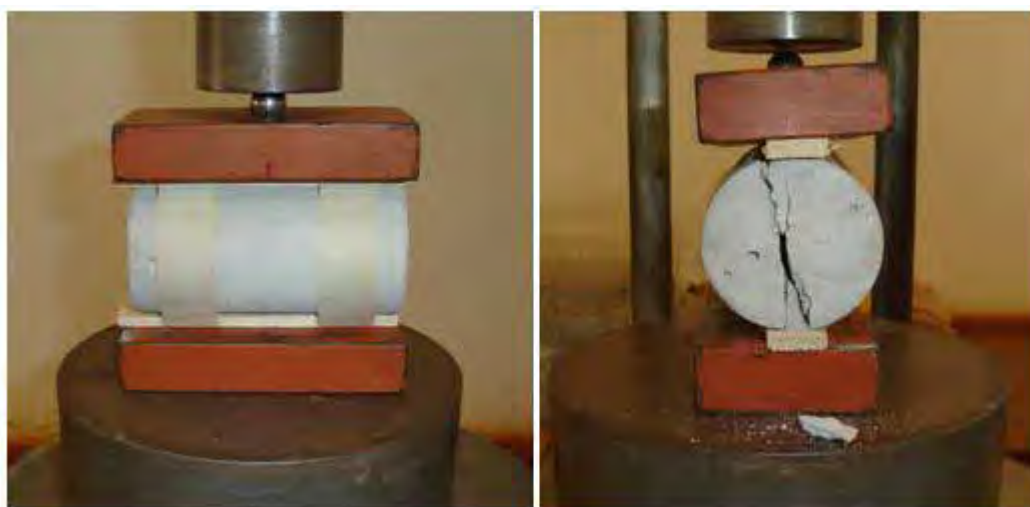


Figura 5.19 - Ensaio de compressão diametral em prensa manual em CP de argamassa (Método Brasileiro)

Para realização deste ensaio foram preconizadas as recomendações da NBR 7222 (1996). A velocidade de carregamento foi de $(0,05 \pm 0,02)$ MPa/s, e a resistência à tração média foi obtida pela equação (5.1), onde F representa a carga diametral de ruptura.

$$f_t = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot D \cdot L} \quad (5.1)$$

A Tabela 14 apresenta as relações entre a resistência à compressão (f_c) da argamassa A02, obtida no ensaio de compressão axial e a resistência à tração (f_t), obtida no ensaio de compressão diametral.

Tabela 14 - Relação entre f_c e f_t para argamassas.

D (cm)	L (cm)	A (cm ²)	Carga Axial (kN)	Carga Diametral (kN)	f_c (kN/cm ²)	f_t (kN/cm ²)
5	10	19,635	11,38	8,85	0,580	0,113
5	10	19,635	11,76	7,94	0,599	0,101
5	10	19,635	12,57	8,99	0,640	0,114
5	10	19,635	12,61	7,76	0,642	0,099
					Média:	17,40%
					Desvio Padrão:	1,71%
					Variância:	9,833%

Com base no apresentado anteriormente, pode-se dizer que a resistência à tração das argamassas representa em média 17,40% da sua resistência à compressão.

5.3 - Graute

Nesta etapa realizou-se uma análise isolada do graute que foi utilizado para preencher os septos dos prismas. A Tabela 15 apresenta a dosagem utilizada no graute.

Tabela 15 - Dosagem do graute.

Graute	Cimento	Pedrisco	Areia	a/c
G1	1	1,83	2,17	0,775

Para determinação da relação entre tensão e deformação foram utilizados 06 corpos-de-prova, Figura 5.20, cujas informações extraídas em ensaios estão apresentadas na Tabela 16.



Figura 5.20 - Corpos-de-prova de graute.

Tabela 16 - Quantidade de corpos-de-prova de graute e ensaios.

Tipo de Ensaio	Corpo-de-prova	Nº Amostras	Resistência	Deformações
Compressão	G1	2	Sim	Não
Compressão	G1	4	Sim	Sim

Os corpos-de-prova assim como os de argamassa foram submetidos às mesmas condições de cura das argamassas que compreendeu um período de cura inicial ao ar livre, seguido de uma cura final em água até a data da ruptura.

5.3.1 - Resistência à compressão

Anteriormente ao ensaio foram previstas todas as recomendações da NBR 7215/96, no que se refere ao capeamento, condições gerais da máquina de ensaios e alinhamento do corpo-de-prova.

A velocidade de carregamento da máquina de ensaio, conforme prescrito em norma foi equivalente a $(0,25 \pm 0,05)$ MPa/s.

A Tabela 17 apresenta as cargas de ruptura dos corpos-de-prova, tais como, a carga onde se iniciou a fissuração e sua resistência final.

Tabela 17 - Resistência a compressão do Graute G1.

CP	Carga de Fissuração (kN)	Carga de Ruptura (kN)	f_c (MPa)
G1 (1)	15,4	21,6	11,00
G1 (2)	15,7	22,2	11,31
G1 (3)	21,1	30,7	15,62
G1 (4)	18,3	27,6	14,05
G1 (5)	18,9	25,7	13,10
G1 (6)	20,5	27,8	14,15
Média:			13,20
Desv. Pad.:			1,78
Coef. Var.:			13,50%

Em análise a Tabela 17, pode-se dizer que a resistência média do graute foi de 13,2 MPa.

No entanto, sabe-se que essa resistência muito abaixo da resistência do bloco não é adequada para fins práticos, porém, para o objetivo de validação entre o modelo experimental e o modelo numérico proposto neste trabalho não oferece problemas.

5.3.2 - Deformabilidade

Durante os ensaios de carregamento axial foram feitas leituras de deformações com a utilização de extensômetros elétricos através de sistema de aquisição conectado a um computador.

A Figura 5.21 apresenta um corpo-de-prova de graute devidamente instrumentado e posicionado na máquina de ensaios.



Figura 5.21 - Corpo-de-prova de graute instrumentado e posicionado em máquina de ensaio

A Figura 5.22 apresenta as curvas que relacionam a tensão com a deformação dos corpos-de-prova para os 04 ensaios de deformação, conforme apresentado na Tabela 16. Cada curva apresentada representa um ensaio realizado e as leituras vão do início do carregamento até a ruptura do corpo-de-prova.

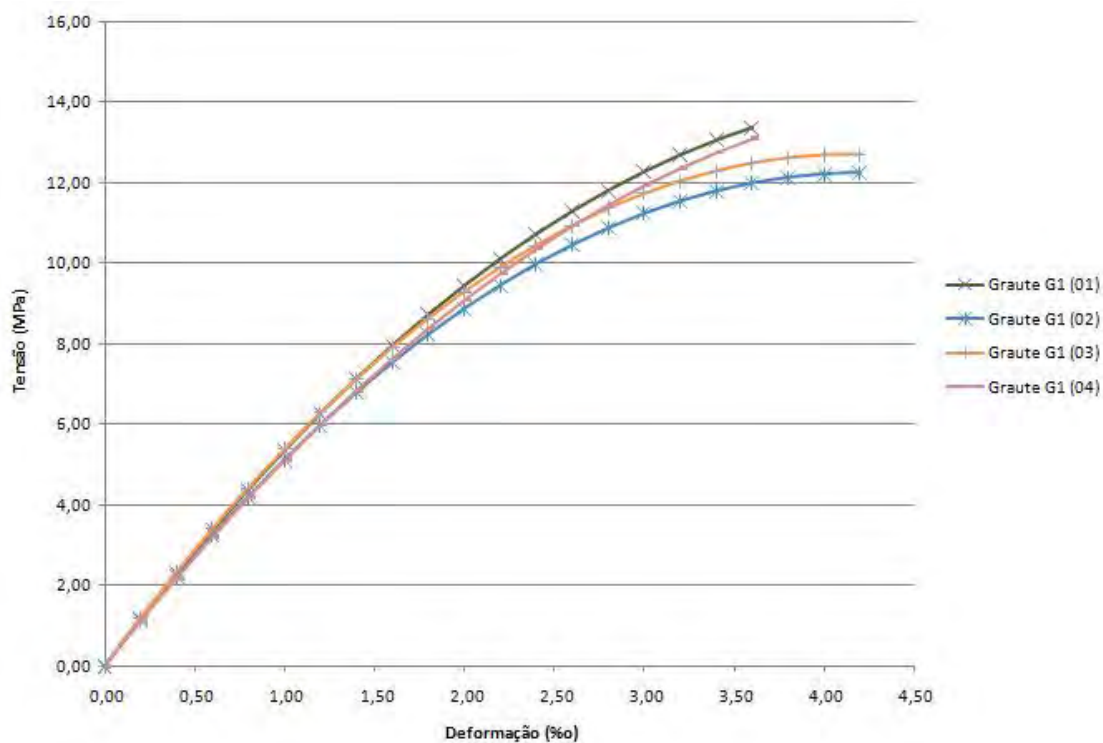


Figura 5.22 - Relação tensão x deformação do graute.

5.3.3 - Correlação entre resistência à compressão e resistência à tração do graute

Nesta etapa foram feitas comparações entre a resistência à compressão e a resistência à tração de corpos-de-prova de graute, para tanto, foram realizados ensaios de compressão axial e compressão diametral, cuja comparação entre si buscou uma relação da resistência à tração como um percentual da resistência à compressão.

A Figura 5.23 mostra um corpo-de-prova de graute em ensaio de compressão diametral.



Figura 5.23 – Ensaio de compressão diametral em CP de graute.

Foram realizados ensaios em 06 corpos-de-prova, sendo 03 submetidos a ensaios de resistência última a carregamentos axiais e 03 a ensaios de resistência última à carregamentos diametraais conforme apresentado na Tabela 18.

Tabela 18 - Relação entre f_c e f_t para graute.

D (cm)	L (cm)	A (cm ²)	Carga Axial (kN)	Carga Diametral (kN)	f_c (kN/cm ²)	f_t (kN/cm ²)
10	20	78,54	121,64	49,05	1,549	0,156
10	20	78,54	114,78	49,05	1,461	0,156
10	20	78,54	95,16	39,24	1,212	0,125
Média:						10,36%
Desv. Pad.:						0,30%
Variância:						2,940%

Em análise a Tabela 18 pode-se concluir que a resistência à tração do graute apresenta em média 10,36% da resistência à compressão.

5.4 - Prismas

A NBR 8215 (1983, p. 1) define prisma como o conjunto composto pela justaposição de dois blocos de concreto, unidos por junta de argamassa, destinados ao ensaio de compressão axial.

Esses ensaios em prismas são adotados como base para se calcular a resistência de projeto da alvenaria à compressão por muitas normas de cálculo. Os ensaios em prismas vêm sendo empregados por muitos pesquisadores para a determinação da resistência à compressão da alvenaria estrutural. Esses ensaios apresentam a vantagem de serem mais rápidos e econômicos do que os ensaios de paredes (ROMAGNA, 2000, p. 19).

A relação entre altura e espessura do prisma é um fator importante para validar a resistência do prisma com a da alvenaria. Normalmente, é considerado que uma relação altura-espessura aproximadamente igual a cinco, seja suficiente para eliminar os efeitos dos pratos da prensa e apresentar valores precisos de resistência à compressão axial da alvenaria.

Para os prismas ensaiados neste estudo, a relação encontrada foi de 2,60. Também foram utilizadas duas resistências distintas de argamassa, denominadas A01 e A02, sendo elas baseadas nas resistências dos blocos em suas áreas líquidas.

5.4.1 - Preparação dos prismas vazios e grauteados

Foram executadas seis unidades de prismas PR2-A01, seis de prismas PR2-A02 e seis PR2-A02-G1 com graute.

A Figura 5.24, Figura 5.25 e Figura 5.26 apresentam respectivamente os prismas PR2-A1, PR2-A2 e PR2-A2-G1 com graute.



Figura 5.24 - Prismas assentados com argamassa A1 (PR2-A1).

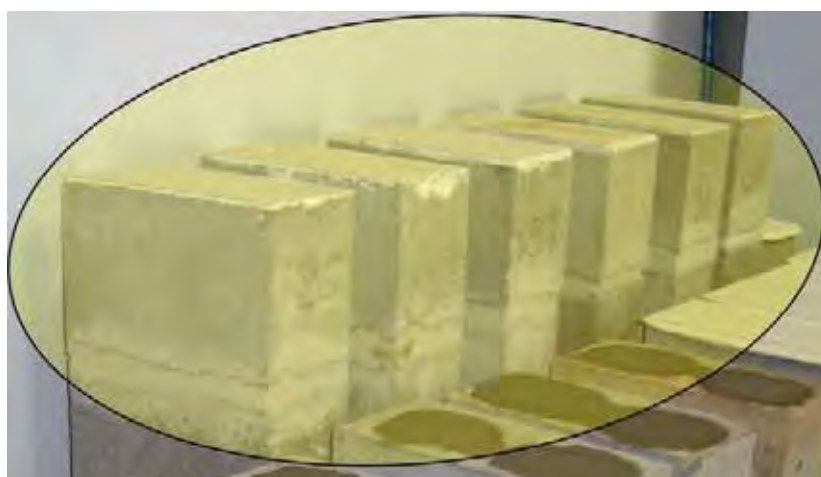


Figura 5.25 - Prismas assentados com argamassa A2 (PR2-A2).



Figura 5.26 - Prismas assentados com argamassa A2 e cheios de graute (PR2-A2-G1).

Totalizaram esta etapa experimental do trabalho 18 prismas e o número de ensaios realizados está apresentado na Tabela 19.

Tabela 19 - Ensaios realizados com os prismas.

Tipo de Ensaio	Corpo-de-prova	Nº Amostras	Resistência	Deformações
Compressão	PR2-A1	2	Sim	Não
Compressão	PR2-A1	4	Sim	Sim
Compressão	PR2-A2	2	Sim	Não
Compressão	PR2-A2	4	Sim	Sim
Compressão	PR2-A2-G1	2	Sim	Não
Compressão	PR2-A2-G1	4	Sim	Sim

5.4.2 - Procedimento para ensaio dos prismas

A norma especifica um valor básico para a resistência do prisma, que é um valor médio obtido por meio de uma série de ensaios. Portanto, ao contrário dos blocos, quando se trata de resistência do prisma (f_p), não se fala em resistência característica e, sim, em resistência média.

Nesse ensaio, pode-se estudar também o comportamento do graute, uma vez que o ensaio pode ser realizado com prisma cheio ou vazio. Ele também fornece resultado mais preciso do que o ensaio com bloco isolado, fornecendo um valor maior para a resistência final da alvenaria, quando comparado com aquele.

Para a determinação da resistência à compressão axial forma utilizados os procedimentos preconizados pela NBR 12188 (2006).

5.4.3 - Capeamento dos prismas

Os prismas de alvenaria que não receberão graute no seu interior são compostos por dois blocos, e estes foram previamente capeados com gesso, seguindo o mesmo processo de capeamento dos blocos a serem ensaiados isolados.

Nos prismas grauteado apenas o bloco inferior recebeu capeamento de gesso inicial, sendo o bloco posterior capeado posteriormente ao enchimento com graute.

5.4.4 - Determinação da resistência à compressão axial e deformabilidade dos prismas

Os prismas de alvenaria foram ensaiados e instrumentados de modo a se obter o máximo possível de informações a cada ensaio. A Figura 5.27 apresenta como foram instrumentados os prismas, e a Figura 5.28, os instrumentos utilizados para a medida das deformações da argamassa e do bloco.

Os prismas receberam ainda mais 02 LVDTs que foram responsáveis pelas leituras das deformações do conjunto bloco-argamassa. Estes foram posicionados do centro do bloco superior ao centro do bloco inferior.

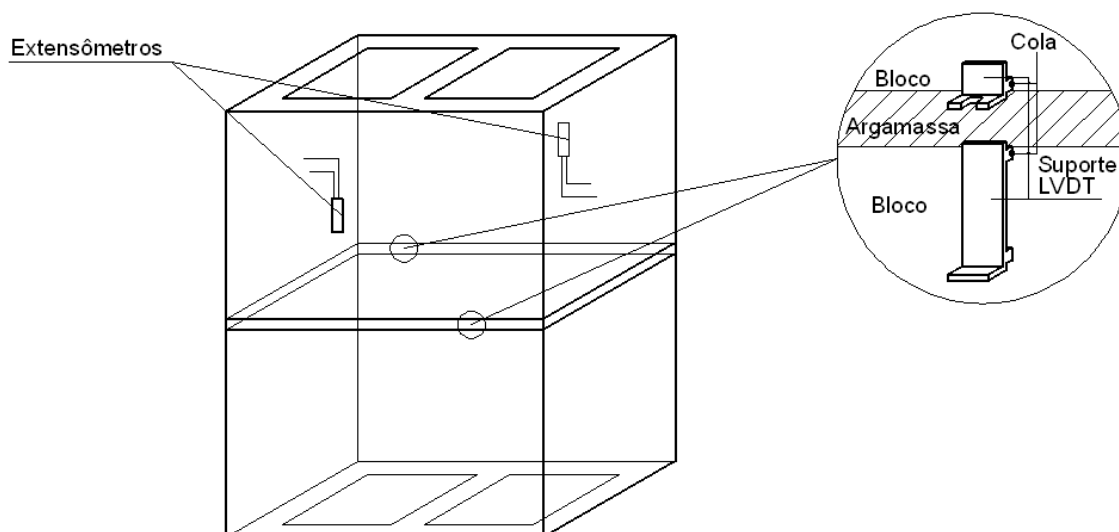


Figura 5.27 - Esquema de instrumentação dos prismas.



Figura 5.28 - Instrumentos utilizados no trabalho: célula de carga, LVDT, sistema de aquisição.

Compreendem-se como estudo de deformações nesta etapa, três leituras distintas, ou seja, foram realizadas as leituras das deformações específicas no elemento do bloco, seguida de leituras na junta de argamassa e por fim, do conjunto prisma.

A Figura 5.29 apresenta um dos prismas que foram ensaiados com toda a instrumentação e os pontos onde foram realizadas as leituras, sendo importante ressaltar que estas leituras foram feitas nas duas faces do prisma opostas e com a inversão dos lados no posicionamento dos instrumentos de leitura.



Figura 5.29 - Prisma instrumentado.

5.4.5 - Resistência dos prismas

Através do ensaio de carregamento axial direto foram levadas à ruptura dois prismas, estes para se estimar uma carga segura para retirada dos equipamentos de leitura das deformações.

A Tabela 20 apresenta as resistências, tais como as cargas onde se iniciou o processo de fissuração para os prismas, classificados neste trabalho como PR2-A01.

Tabela 20 - Resistência dos prismas PR2-A01.

CP	Carga de Fissuração (kN)	Carga de Ruptura (kN)	f_c (MPa)
** 1	450,0	629,2	22,22
** 2	520,0	731,0	25,81
3	500,0	643,4	22,72
4	550,0	723,3	25,54
5	430,0	571,6	20,18
6	400,0	505,3	17,84
		Média:	22,38
		Desv. Pad.:	3,08
		Coef. Var.:	13,75%

** Corpos-de-prova ensaiados para saber o instante em que os equipamentos deveriam ser retirados

Em análise aos dados pode-se observar que a resistência dos prismas foi de 22,38 MPa e a fissuração ocorreu em média com a aplicação de 70% a 80 % da carga.

A Figura 5.30 apresenta o modo de ruptura do prisma PR2-A01, sendo que a fissuração ocorreu paralela à direção do carregamento.



Figura 5.30 - Modo de ruptura do prisma PR2-A01.

A Tabela 21 apresenta as resistências do segundo lote de prismas ensaiados denominados por PR2-A02.

Tabela 21 - Resistência dos prismas PR2-A02.

CP	Carga de Fissuração (kN)	Carga de Ruptura (kN)	f_c (MPa)
** 1	370,0	540,0	19,07
** 2	450,0	666,8	23,54
* 3	350,0	460,4	16,25
* 4	360,0	481,3	16,99
* 5	320,0	434,1	15,33
* 6	400,0	533,9	18,85
		Média:	18,34
		Desv. Pad.:	2,94
		Coef. Var.:	16,01%

** Corpos-de-prova ensaiados para saber o instante em que os equipamentos deveriam ser retirados

Neste lote de prismas pode-se observar que a resistência média à compressão foi de 18,34 MPa e as fissurações ocorreram entre 70% e 75% da carga total aplicada.

A Figura 5.31 apresenta o modo de ruptura do prisma PR2-A02, onde se pode observar fissuração paralela ao eixo de atuação da carga.



Figura 5.31 - Modo de ruptura do prisma PR2-A02.

Em uma última análise foram realizados os ensaios dos prismas, cujos blocos foram assentados sob argamassa do tipo A02, argamassa mais resistente, e posteriormente preenchidos com graute, estes referenciados por PR2-A02-G1.

Para o cálculo da resistência à compressão dos prismas grauteados, considerou-se o quociente entre a força de ruptura e a sua área bruta.

Tabela 22 - Resistência dos prismas PR2-A02-G1.

CP	Carga de Fissuração (kN)	Carga de Ruptura (kN)	f_c (MPa)
* 1	900,0	990,0	23,87
* 2	880,0	990,0	23,87
* 3	800,0	888,0	21,41
* 4	850,0	888,1	21,42
* 5	800,0	889,1	21,44
* 6	830,0	882,3	21,28
		Média:	22,22
		Desv. Pad.:	1,29
		Coef. Var.:	5,79%

* Limite da prensa universal onde foram feitos os ensaios

Nestes últimos ensaios, por limitações da máquina de ensaios, não foi possível levar os prismas até a sua ruptura, pois a capacidade da máquina, quanto da célula de carga, é de 1000 kN.

Contudo a carga de fissuração foi determinada e esta ocorreu com a aplicação em média de 880 kN. A Figura 5.32 apresenta a fissuração em um dos prismas PR2-A02-G1.

Destaca-se ainda que o prisma executado com argamassa de menor resistência, A01, ofereceu uma maior resistência ao conjunto, em relação ao prisma executado com argamassa mais resistente, A02. Esse fato pode ter sido consequência da grande deformabilidade da argamassa menos resistente, fazendo com que a espessura da junta ficasse muito reduzida, possibilitando a transferência das cargas de forma quase direta entre os blocos.



Figura 5.32 - Fissuração nos prismas PR2-A02-G1.

5.4.6 - Deformabilidade do bloco no prisma.

A leitura da deformabilidade do bloco no prisma foi feita utilizando-se extensômetros elétricos conforme ilustrado na Figura 5.27.

Com as leituras das deformações e uma posterior relação com as tensões devidas à carga aplicada, foi possível o traçado da curva tensão-deformação para o bloco que constitui o prisma PR2-A01, ilustrado na Figura 5.33, e a relação tensão-deformação para o bloco do prisma PR2-A02 apresentada na Figura 5.34.

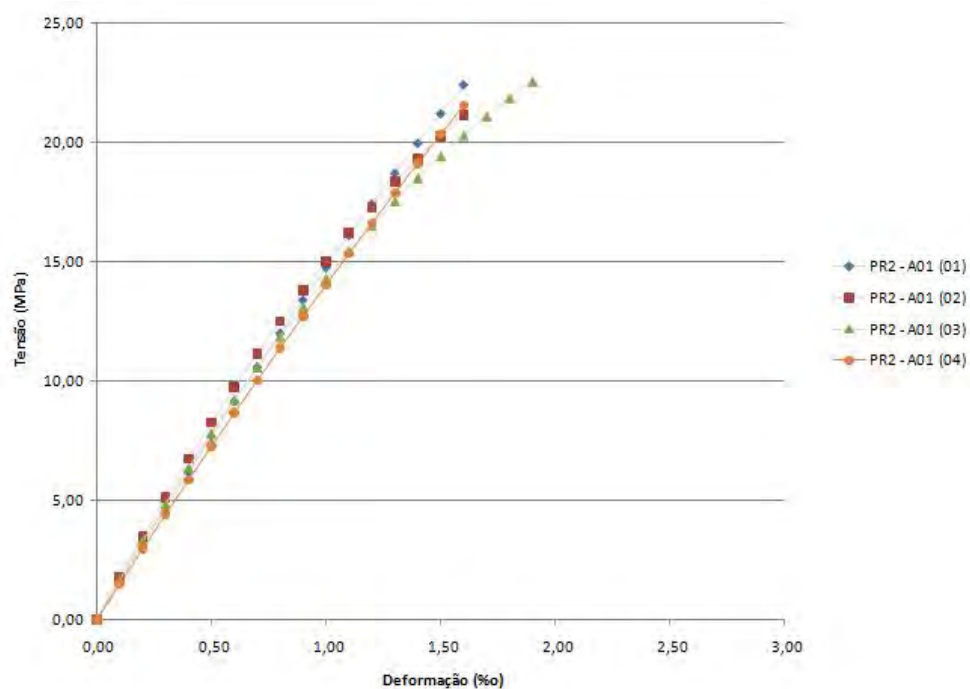


Figura 5.33 - Relação tensão x deformação do bloco assentado com a argamassa A01

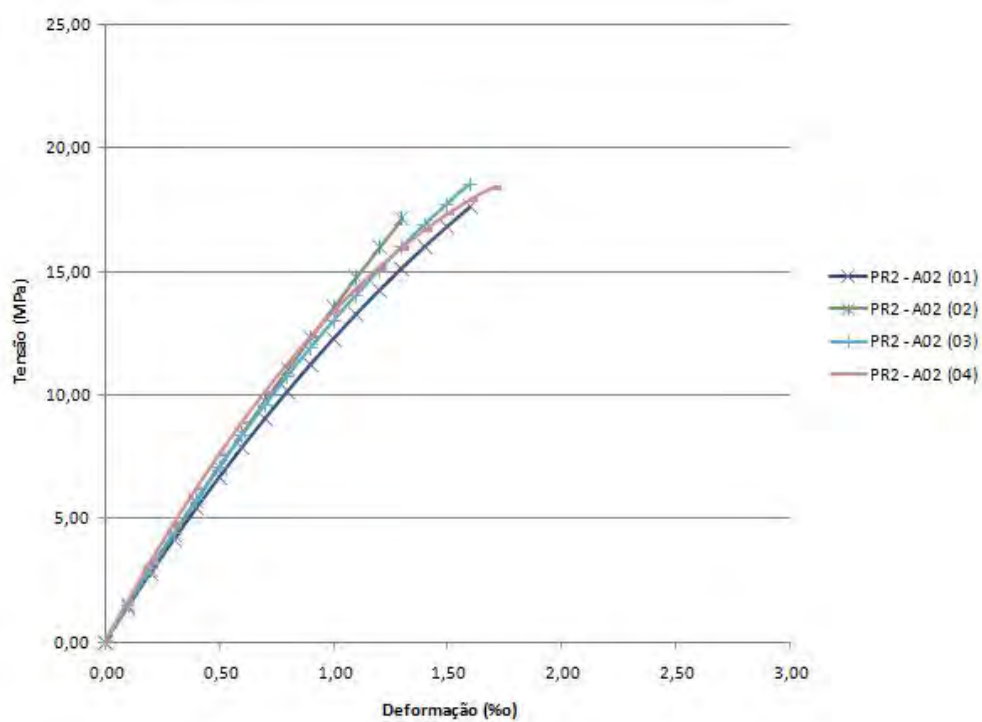


Figura 5.34 - Relação tensão x deformação do bloco assentado com a argamassa A02

Para os prismas com enchimento dos seus septos com graute, a Figura 5.35 ilustra a relação tensão-deformação.

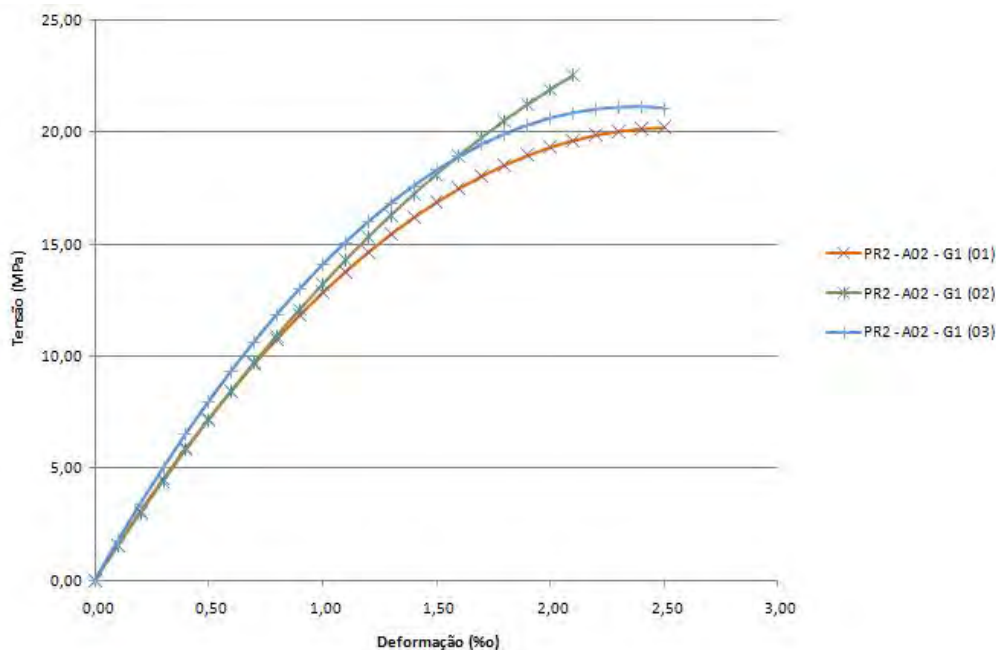


Figura 5.35 - Relação tensão x deformação do bloco assentado com a argamassa A02 e grauteado.

5.4.7 - Deformabilidade da argamassa no prisma

Outra deformação importante a ser observada foi a da argamassa que se encontrava confinada entre os blocos no prisma. Estas leituras foram feitas com a utilização de LVDT's, cujo esquema de posicionamento para leitura das deformações está ilustrado na Figura 5.27.

A Figura 5.36 apresenta a relação tensão-deformação para a argamassa utilizada no assentamento do bloco para o prisma PR2-A01.

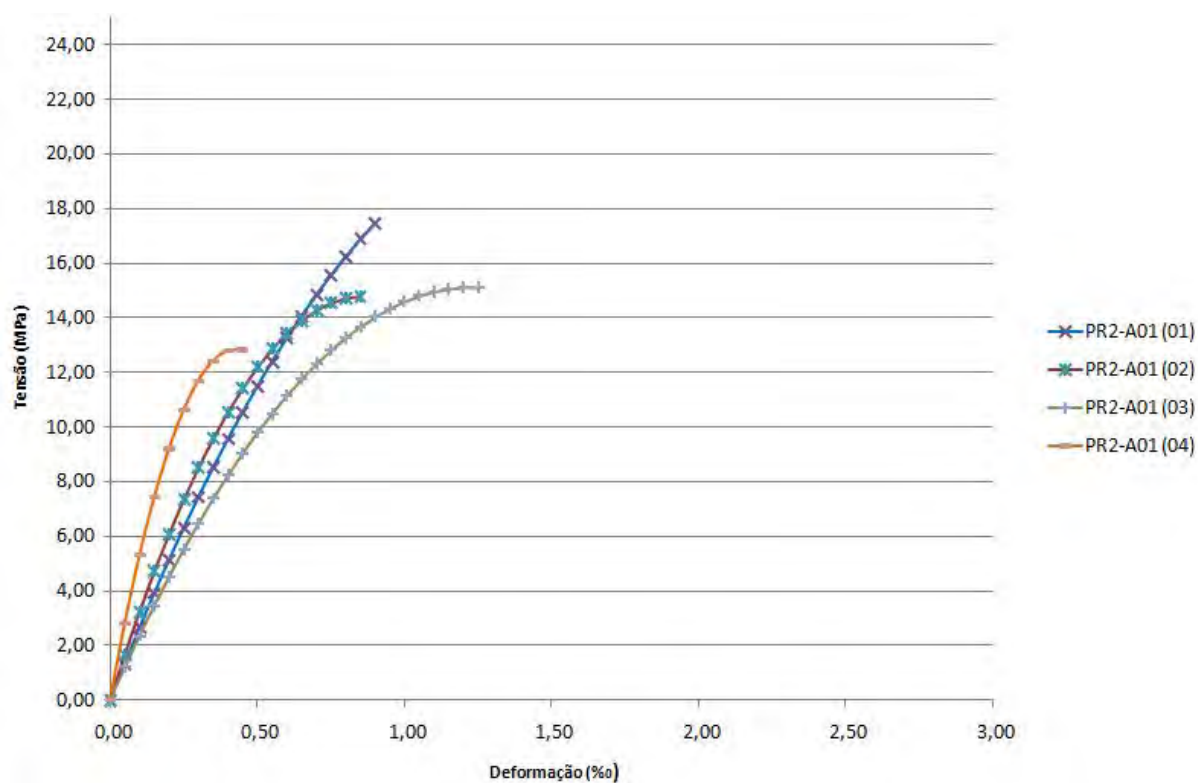


Figura 5.36 - Relação tensão x deformação da Argamassa A01 no prisma vazio.

A Figura 5.37 apresenta a relação tensão-deformação para a argamassa utilizada no assentamento do bloco para o prisma PR2-A02.

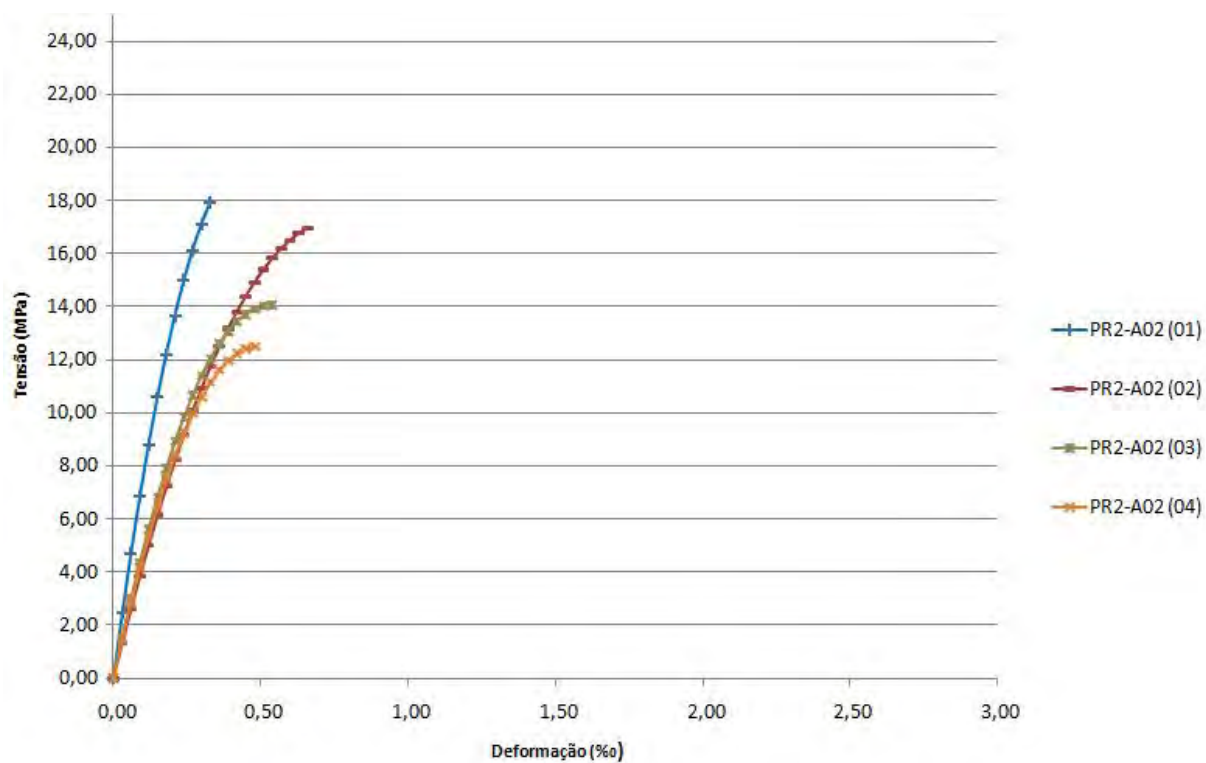


Figura 5.37 - Relação tensão x deformação da Argamassa A02 no prisma vazio.

Para os prismas PR2-A02-G1 a relação tensão-deformação da argamassa encontra-se apresentada na Figura 5.38.

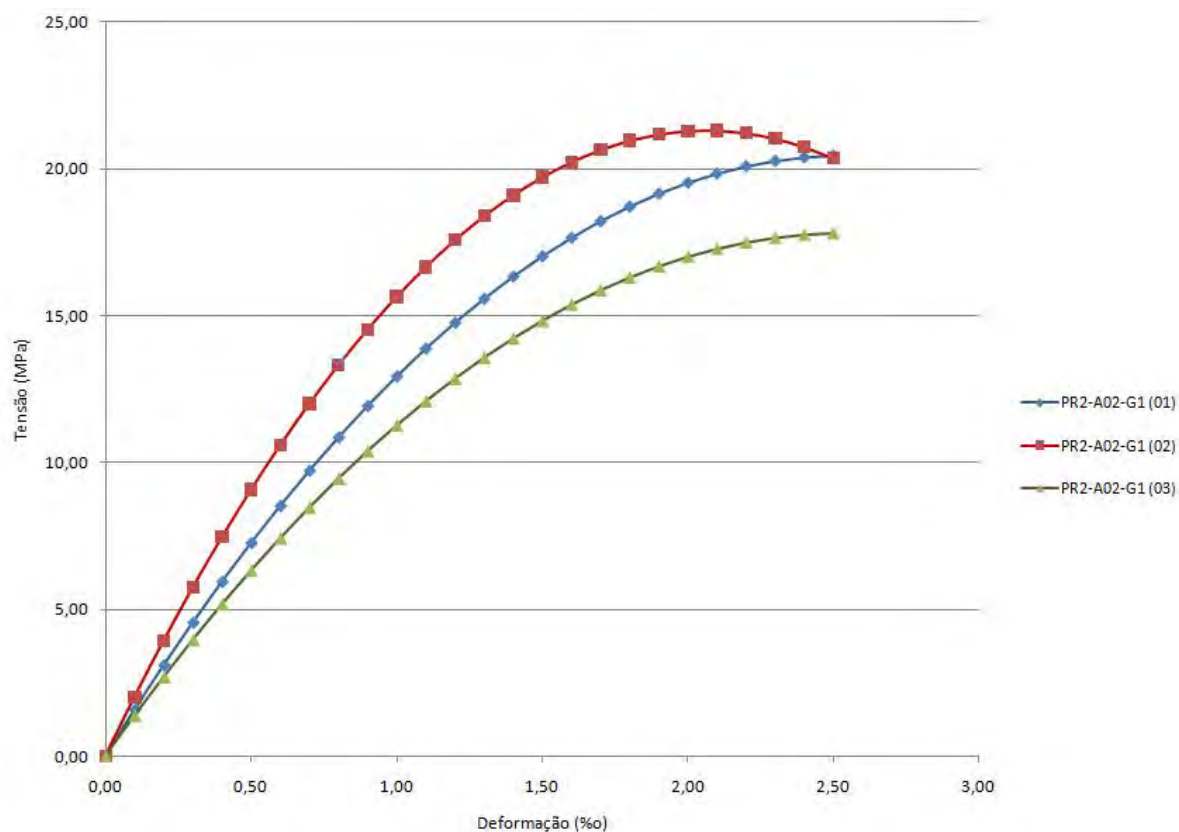


Figura 5.38 - Relação tensão x deformação da Argamassa A02 no prisma com graute.

5.5 - Determinação da relação tensão-deformação

Sabe-se que o concreto, assim como a argamassa, é um material considerado isotrópico, mas, que para determinados níveis de tensão, apresenta um comportamento não-linear, por isso deve ser levado em consideração à alteração do módulo de elasticidade em função da variação das tensões.

Na formulação do Método dos Elementos Finitos, a equação básica de equilíbrio estático ($K \cdot d = F$) tem por premissa o fato de o sistema ser considerado como linear.

Para o equacionamento da matriz de rigidez do elemento prismático regular parabólico, considerou-se o comportamento linear do material.

Para contornar esse problema, na simulação numérica será utilizado o processo incremental de forças, sendo que, após cada incremento, o módulo de elasticidade será corrigido em função das deformações principais de cada elemento em função dos respectivos deslocamentos nodais.

5.5.1 - Módulo de elasticidade instantâneo do bloco

Em análise as curvas de tendência obtidas dos gráficos apresentados na Figura 5.33, Figura 5.34 e Figura 5.35 pôde-se obter a equação que melhor se ajusta as curvas nas três situações experimentadas dada por:

$$\sigma = -4,7025 \cdot 10^5 \cdot \varepsilon^2 + 1484,74 \cdot \varepsilon \quad (5.2)$$

Levando-se em consideração que os blocos do mesmo lote atingiram uma resistência a ruptura de 31,35 MPa e tornando essa resistência como uma das características fundamentais do comportamento desta curva, a equação (5.2) pode ser reescrita como segue.

$$\sigma = -1,50 \cdot 10^5 \cdot f_c \cdot \varepsilon^2 + 473,6 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.3)$$

A Figura 5.39 apresenta uma curva genérica de relação tensão-deformação, ilustrando o módulo de elasticidade inicial e os respectivos módulos de elasticidade instantâneos em função de f_c e de ε .

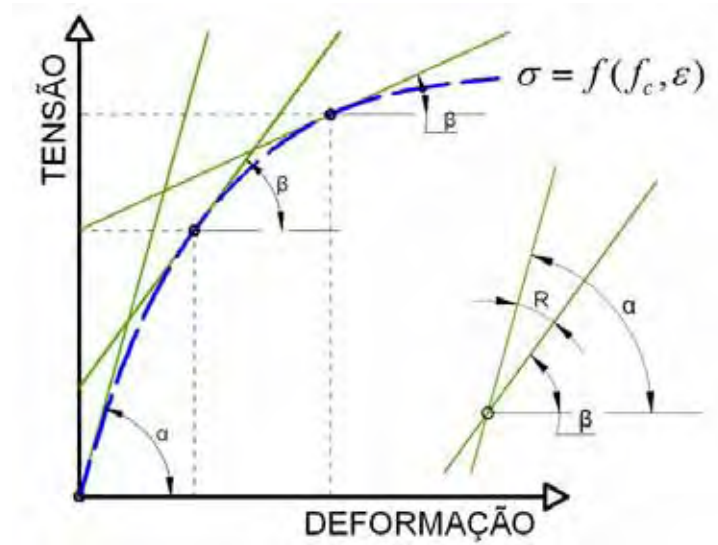


Figura 5.39 - Relação tensão-deformação genérica.

Inicialmente tem-se que o módulo de elasticidade inicial (E_0) é definido por:

$$E_0 = \tan(\alpha) \quad (5.4)$$

E para outro ponto qualquer da curva:

$$E_{INST} = \tan(\beta) \quad (5.5)$$

Sendo assim:

$$\beta = \alpha - R \quad (5.6)$$

onde R é um redutor a ser determinado e que dependa da deformação sofrida pelo elemento e da resistência do material.

Conhecido da trigonometria que:

$$\tan(\beta) = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (5.7)$$

Para a situação em questão pode-se dizer então que:

$$E_{INST} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \quad (5.8)$$

Com isso o módulo de elasticidade instantâneo do bloco é definido por:

$$E_{INST} = 473,6 \cdot f_c - 3,00 \cdot 10^5 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.9)$$

onde o módulo de elasticidade inicial para o bloco é dado por:

$$E_0 = 473,6 \cdot f_c \quad (5.10)$$

e o redutor R , que reduzirá o módulo de elasticidade do bloco com o aumento das deformações, é dado por:

$$R = -3,00 \cdot 10^5 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.11)$$

5.5.2 - Módulo de elasticidade instantâneo do graute

Em análise as curvas de tendência obtidas no gráfico apresentado na Figura 5.22 pôde-se obter a equação que melhor se ajusta as curvas que representam a relação entre a tensão e a deformação sofrida pelo graute:

$$\sigma = -2,845 \cdot 10^5 \cdot \varepsilon^2 + 1350 \cdot \varepsilon \quad (5.12)$$

Levando-se em consideração que o graute atingiu uma resistência a ruptura de 13,2 MPa e tornando essa resistência como uma das características fundamentais do comportamento desta curva, a equação (5.12) pode ser reescrita como segue.

$$\sigma = -215530 \cdot f_c \cdot \varepsilon^2 + 1022 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.13)$$

Utilizando-se a equação (5.8) o módulo de elasticidade instantâneo do graute é dado por:

$$E_{INST} = 1022 \cdot fc - 4,31 \cdot 10^5 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.14)$$

onde o módulo de elasticidade inicial para o graute é dado por:

$$E_0 = 1022 \cdot fc \quad (5.15)$$

e o redutor R , que reduzirá o módulo de elasticidade do graute com o aumento das deformações, é dado por:

$$R = -4,31 \cdot 10^5 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.16)$$

5.5.3 - Módulo de elasticidade instantâneo da argamassa

Em análise as curvas de tendência obtidas dos gráficos apresentados na Figura 5.36 e Figura 5.37, pôde-se obter a equação que melhor se ajusta as curvas nas duas situações experimentadas já levando em consideração a resistência das argamassas utilizadas no assentamento dos blocos dada por:

$$\sigma = -6,5 \cdot 10^4 \cdot fc \cdot \varepsilon^2 + 510,6 \cdot fc \cdot \varepsilon \quad (5.17)$$

Utilizando-se a equação (5.8) o módulo de elasticidade instantâneo da argamassa é dado por:

$$E_{INST} = 510,6 \cdot fc - 1,30 \cdot 10^5 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.18)$$

onde o módulo de elasticidade inicial para a argamassa é dado por:

$$E_0 = 510,6 \cdot fc \quad (5.19)$$

e o redutor R , que reduzirá o módulo de elasticidade da argamassa com o aumento das deformações, é dado por:

$$R = -1,30 \cdot 10^5 \cdot f_c \cdot \varepsilon \quad (5.20)$$

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

6.1 - Análise Numérica

Para que na análise numérica haja padrões para comparação de resultados com a análise experimental, inicialmente foi necessária a discretização dos prismas por meio de elementos, etapa esta realizada com a elaboração de rotinas computacionais capazes de discretizar um prisma de dois blocos baseando-se nos padrões de medida do bloco a ser utilizado e na espessura da junta de argamassa.

O gerador de elementos fará a discretização dos prismas que foram ensaiados, passando a ser parte integrante do programa institucional FEISdec - *Finite Element for Idealization of Structures: development and execution by computer*, utilizado como plataforma de pesquisa para aplicação de resultados científicos advindos de trabalhos de Iniciação Científica e do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da FEIS / UNESP.

Após a discretização dos prismas, a análise numérica foi realizada por meio do Método dos Elementos Finitos, utilizando o elemento prismático regular parabólico, desenvolvido e apresentado no CAPÍTULO 3, Item 3.3, deste trabalho, e implementado em programa computacional desenvolvido em Visual Basic.

Assim, o programa teve condição de verificar o comportamento do prisma, tendo como resposta as forças atuantes e os deslocamentos em cada nó dos elementos, bem como a determinação do

ponto de ruptura dos elementos, utilizando os critérios descritos no CAPÍTULO 2 deste trabalho.

6.2 - Discretização do prisma

Para posterior interpretação do programa computacional, baseado no MEF que fará a análise numérica não-linear física, fez-se necessária a elaboração em um arquivo de entrada cujo conteúdo é pertinente a todas as informações do prisma modelo a ser analisado.

Através de rotinas de discretização procurou-se subdividir o prisma em elementos, cuja posição de alguns nós ficassem em lugares estratégicos aos que foram instalados os equipamentos de leitura dos ensaios experimentais, para posterior avaliação da relação força x deslocamento.

A Figura 6.1 apresenta o prisma em uma visão tridimensional tal como a sua subdivisão em elementos.

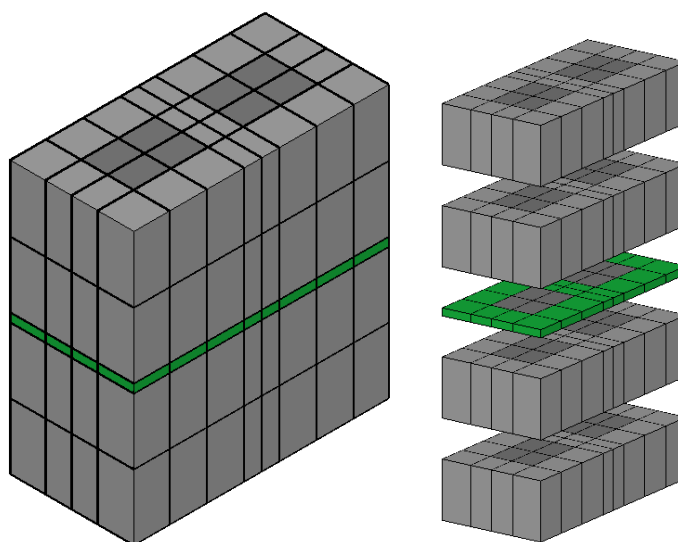


Figura 6.1 - Prisma subdividido em elementos.

Devido às rotinas de discretização serem todas em funções das dimensões dos elementos que compõem o prisma, o critério de

numeração nodal e o de numeração dos elementos torna-se uma constante no sistema. Com isso apresenta-se na Figura 6.2 a localização de cada camada de nós que irá compor o modelo em análise.

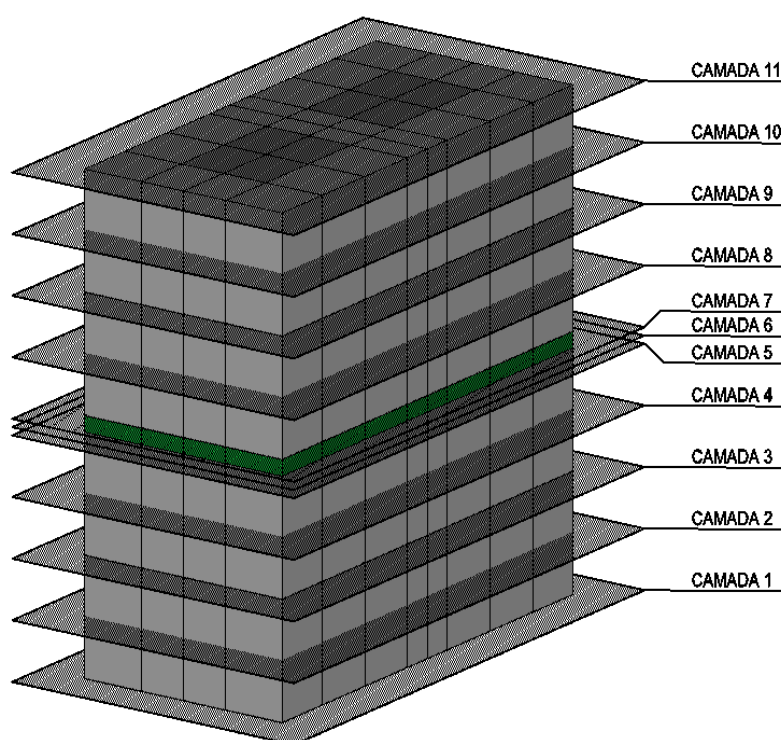


Figura 6.2 - Posição das camadas de nós nos primas

As imagens apresentadas da Figura 6.3 a Figura 6.13, estão esquematizando a posição de cada nó em cada uma das camadas apresentadas na Figura 6.2, assim como os elementos que estão esquematizados pela letra correspondente ao material e a sua numeração.

Para o material "Bloco" foi atribuída a letra B seguida da numeração do elemento no modelo, para os elementos que representarão o material "Argamassa" foi atribuída à letra A seguida da numeração do elemento, e por fim aos elementos que poderão corresponder ao material "Graute", ou serem atribuídos como vazios, septos, levando a letra G seguida da numeração do elemento.

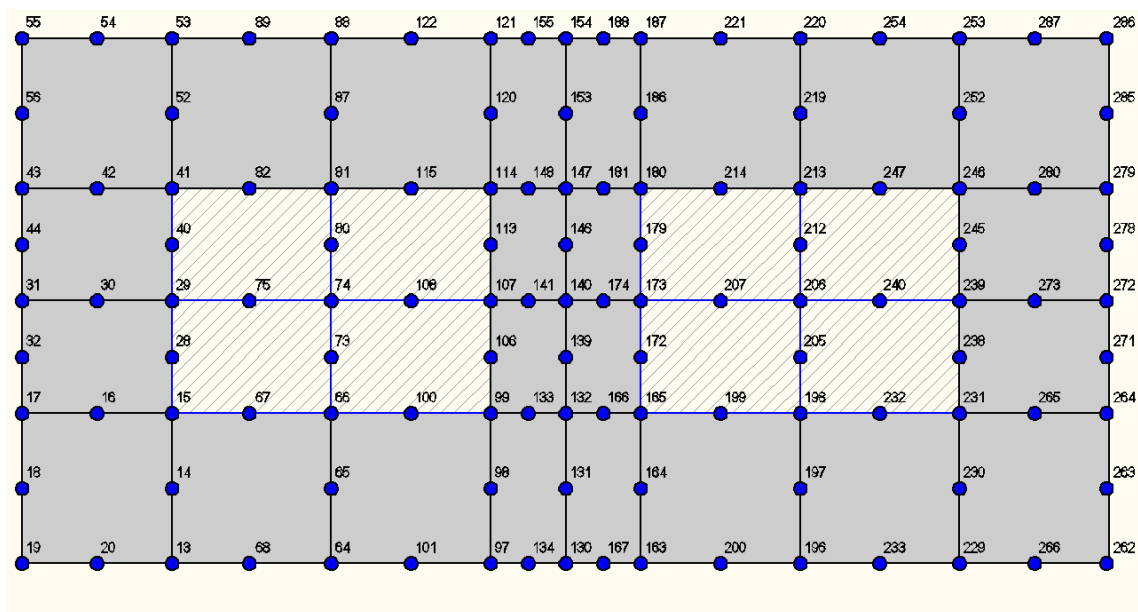


Figura 6.3 - Camada 01 de nós

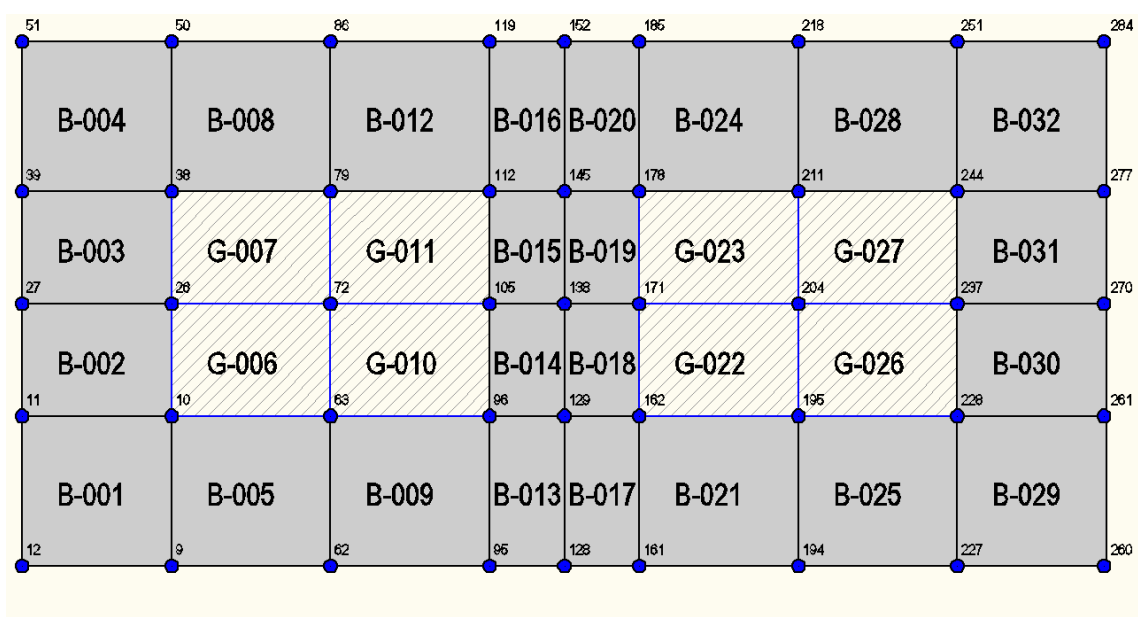


Figura 6.4 - Camada 02 de nós

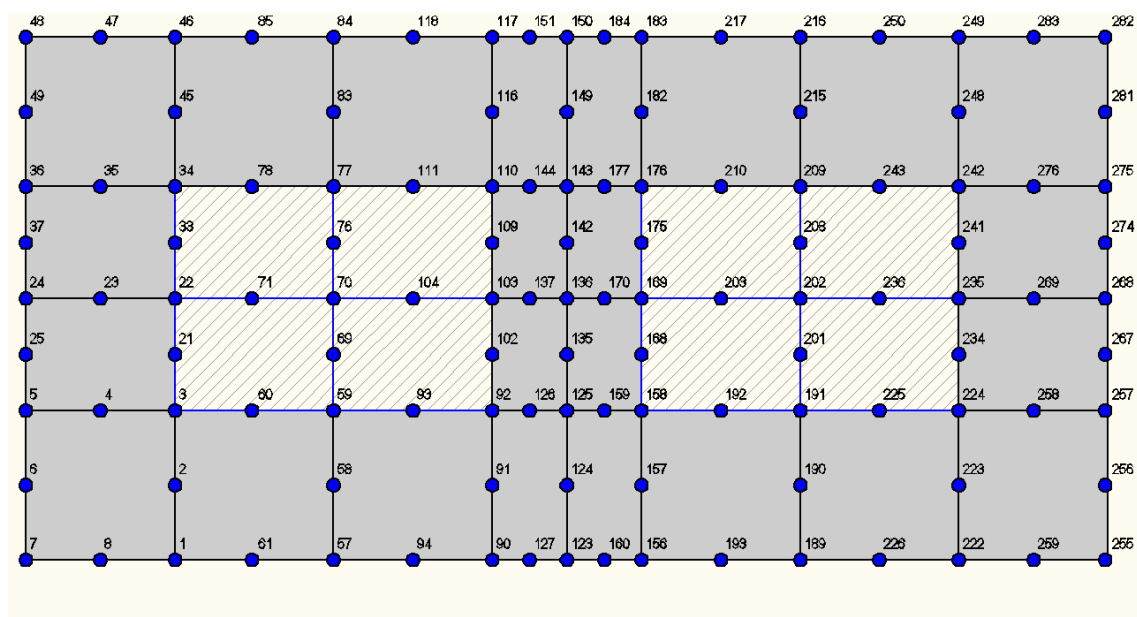


Figura 6.5 - Camada 03 de nós

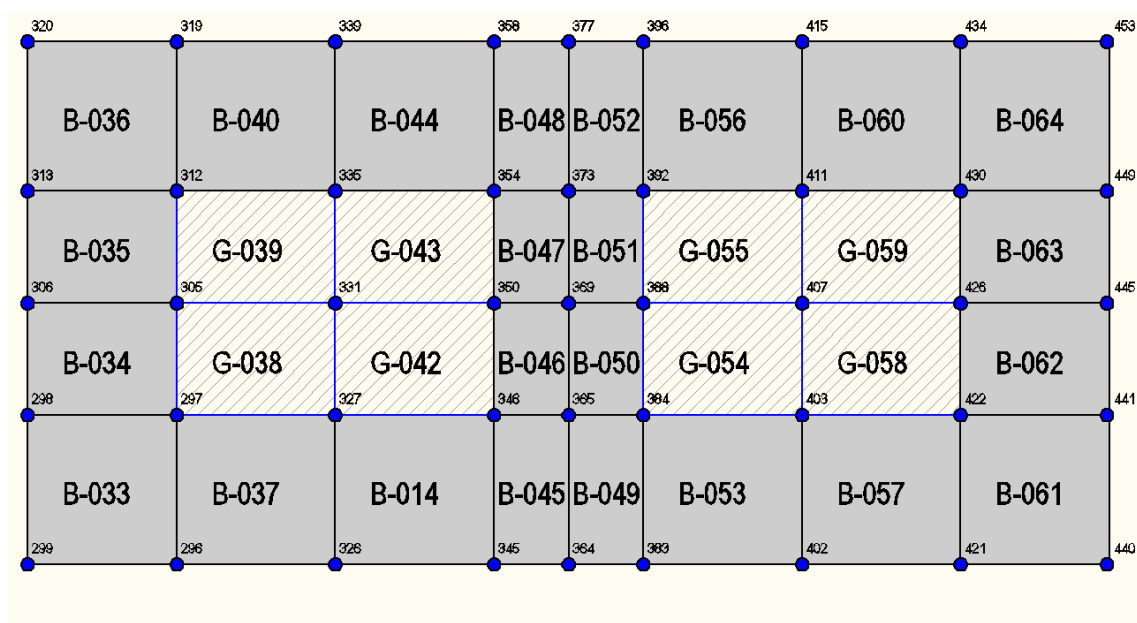


Figura 6.6 - Camada 04 de nós

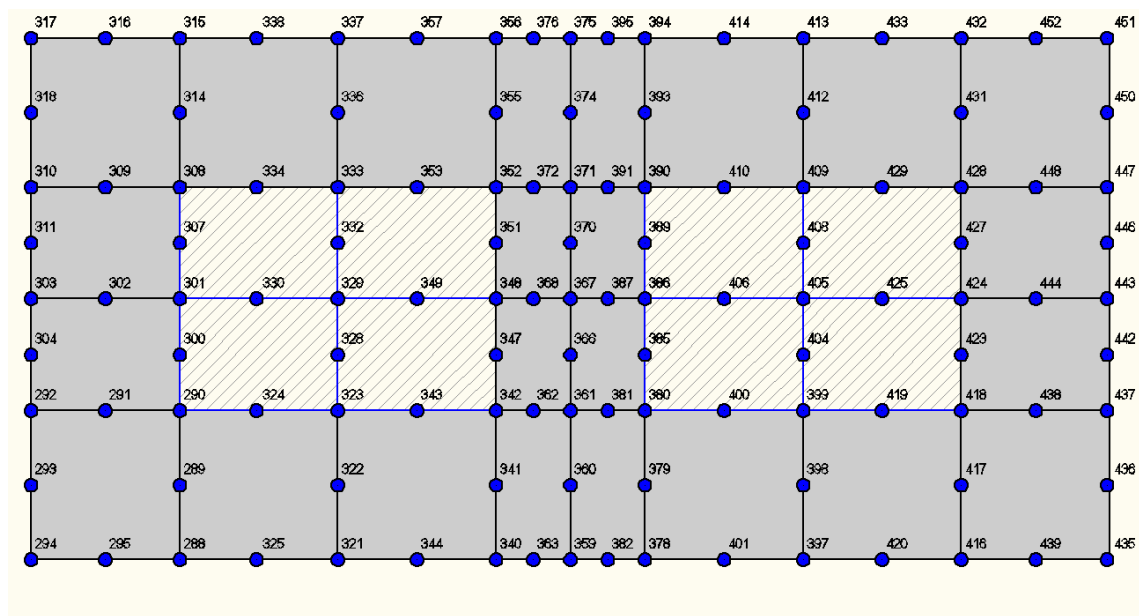


Figura 6.7 - Camada 05 de nós

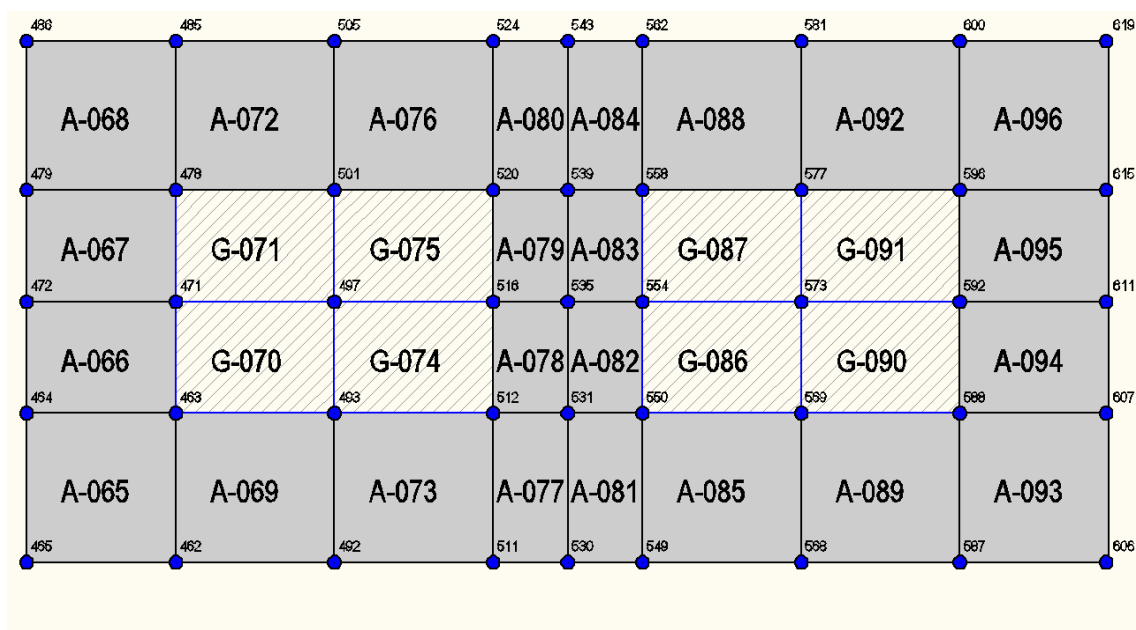


Figura 6.8 - Camada 06 de nós

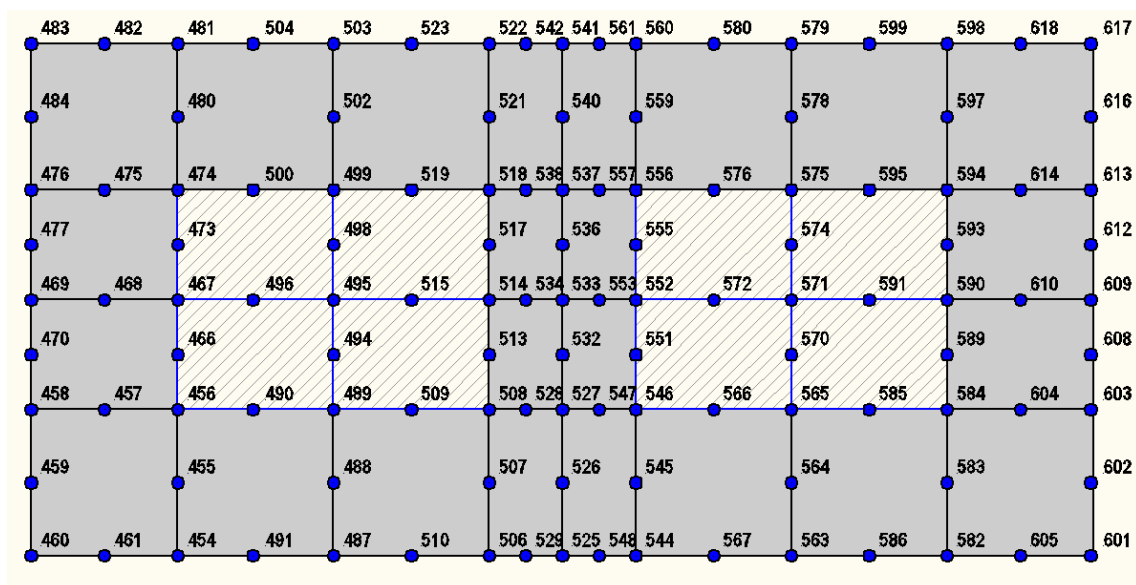


Figura 6.9 - Camada 07 de nós

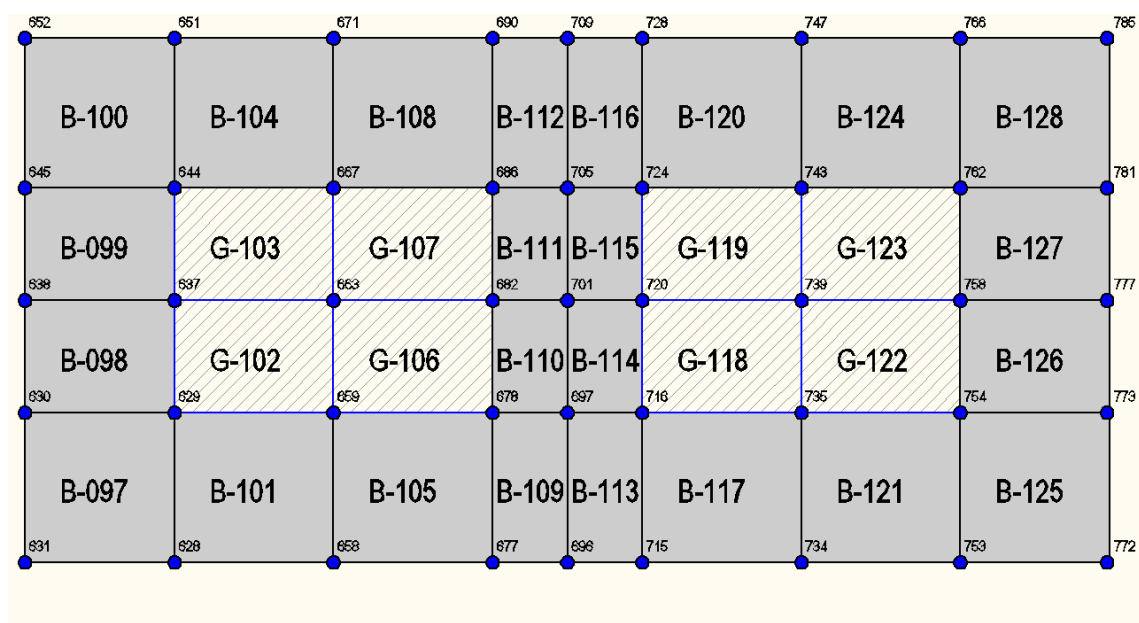


Figura 6.10 - Camada 08 de nós

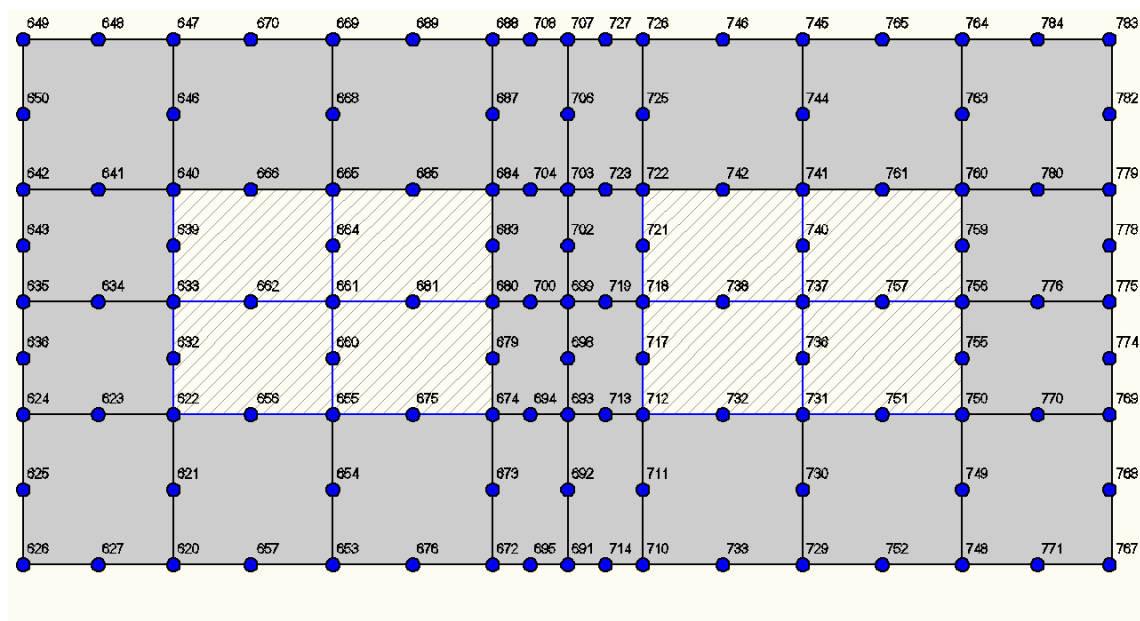


Figura 6.11 - Camada 09 de nós

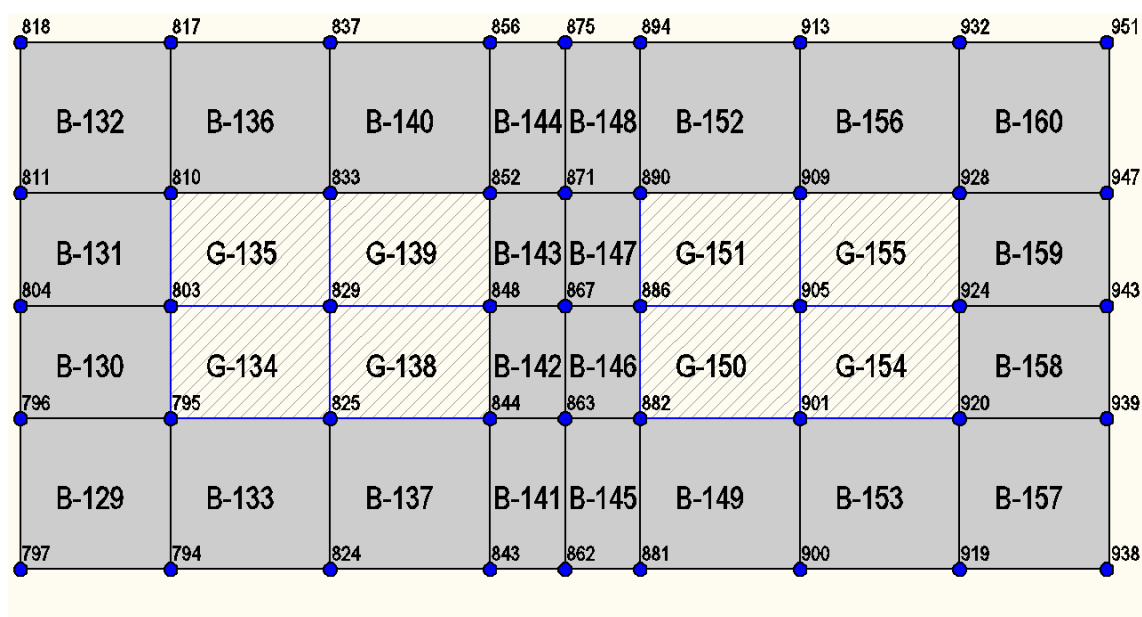


Figura 6.12 - Camada 10 de nós

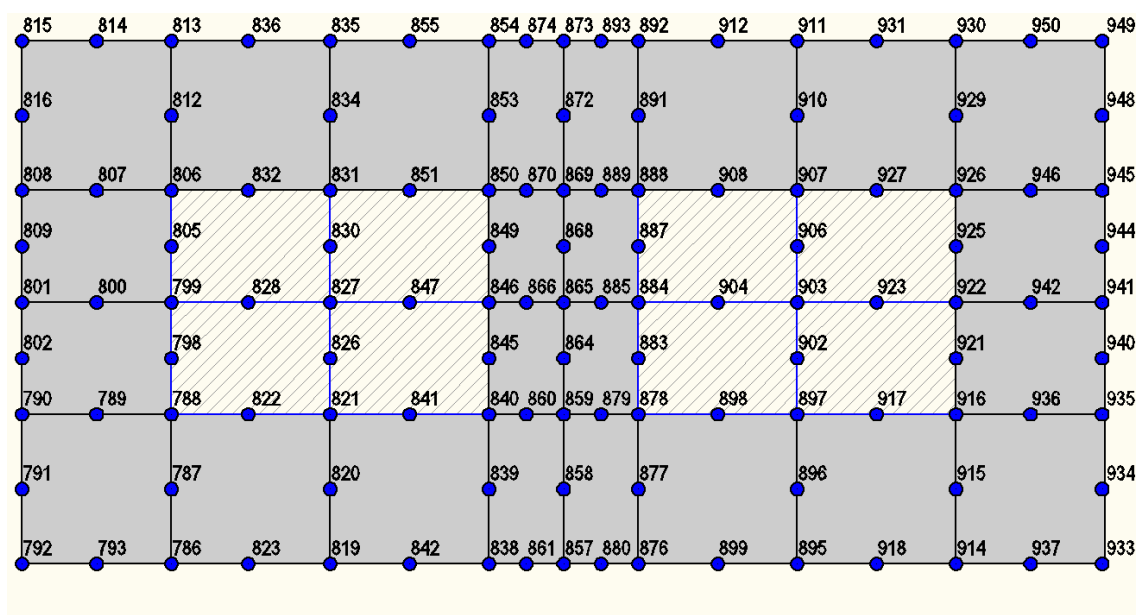


Figura 6.13 - Camada 11 de nós

Todos os nós que compõem a camada 01 de nós, Figura 6.3, receberam restrição de translação nas três direções, e os nós que compõem a camada 11 de nós, Figura 6.13, receberam carregamentos proporcionais aos elementos que pertencem, sem qualquer restrição.

6.3 - Fluxograma geral de cálculo

O esquema geral de cálculo é apresentado na Figura 6.14, sendo que cada bloco do fluxograma contém o nome de uma sub-rotina específica, cuja função é descrita nos itens subseqüentes.

O processo incremental de carregamento aqui adotado consiste na subdivisão do carregamento em um número conhecido de incrementos, aplicados de forma acumulativa. À medida que a força vai sendo incrementada, efetua-se o cálculo e o armazenamento dos deslocamentos, com conseqüente cálculo das deformações e das tensões em cada elemento, para posterior aplicação do critério de ruptura e correção do módulo de elasticidade instantâneo do material.

Caso a ruptura do elemento venha a ser verificada, é feita uma redução total do módulo de elasticidade, de forma

individual no elemento verificado, para posterior armazenamento dos deslocamentos nodais.

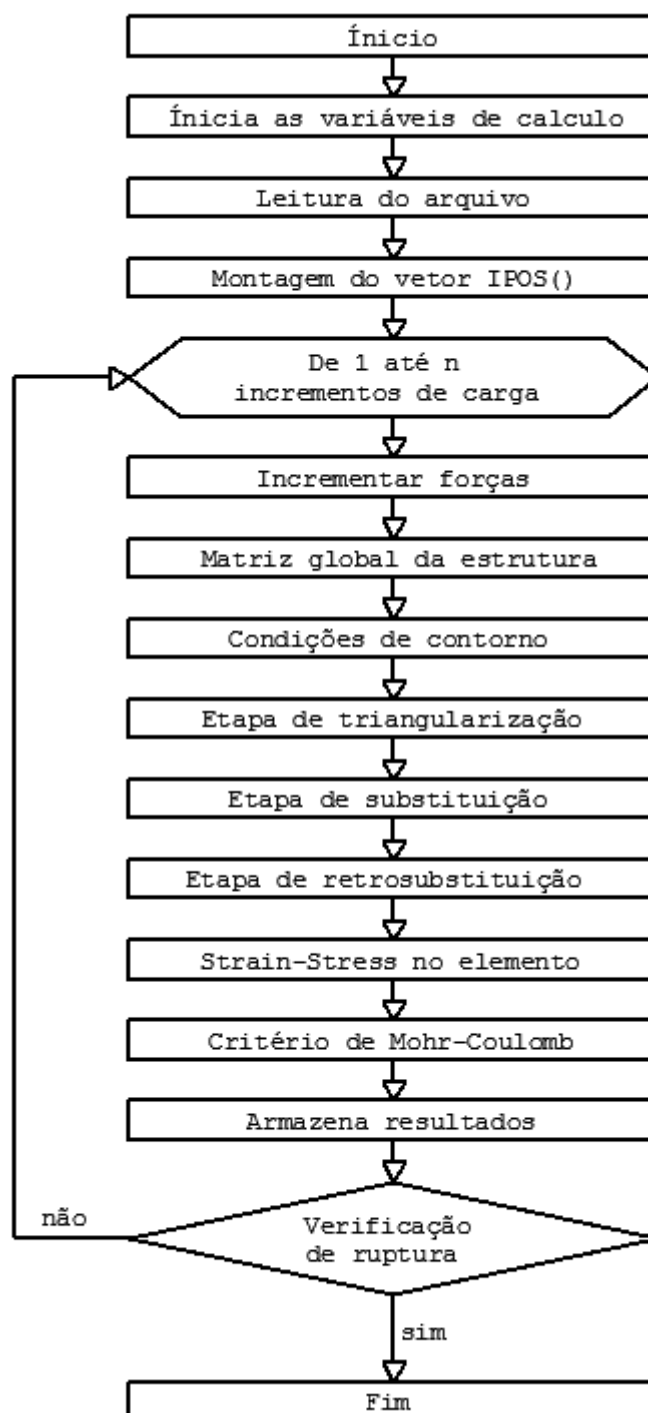


Figura 6.14 - Fluxograma geral de cálculo.

a) Sub-rotina INICIA AS VARIÁVEIS CÁLCULO

Essa sub-rotina tem a função de atribuir valores iniciais às variáveis utilizadas no cálculo e posterior verificação da consistência dos dados atribuídos.

b) Sub-rotina LEITURA DO ARQUIVO

Aqui é realizada a leitura do arquivo que contém todas as informações do modelo tais como características físicas do modelo e do material.

c) Sub-rotina MONTAGEM DO VETOR IPOS()

A técnica de armazenamento da matriz de rigidez utilizada no programa computacional é denominada de altura efetiva de coluna ou *skyline*. Essa técnica corresponde ao armazenamento, dentro de um vetor de trabalho principal, das colunas da parte triangular superior da matriz e dos elementos da diagonal principal, a partir do primeiro elemento não nulo de cada coluna. Esse armazenamento é realizado em forma sequencial por coluna, de cima para baixo.

Para esse tipo de armazenamento, é necessária ainda a construção de um vetor auxiliar que indique, dentro do vetor de trabalho principal, as posições dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez, sendo tal vetor auxiliar denominado de vetor (IPOS).

d) Sub-rotina INCREMENTAR FORÇA

Essa sub-rotina tem a função de atualizar o valor das forças externas (F_e) para cada incremento de carregamento.

e) Sub-rotina MATRIZ GLOBAL DA ESTRUTURA

Monta a matriz global da estrutura, a partir da matriz tangente de cada elemento, conforme será visto no CAPÍTULO 3 - Item 3.3 - , utilizando-se a técnica de expansão e acumulação.

e) Sub-rotina CONDIÇÕES DE CONTORNO

Aplica as condições de contorno previamente impostas ao elemento e lidas no arquivo de entrada de dados.

f) RESOLUÇÃO DO SISTEMA

A resolução do sistema é feita utilizando-se o Método de Cholesky, que decompõe o sistema em duas matrizes triangulares, uma superior e outra inferior, possibilitando a substituição e a retro-substituição do sistema para obtenção dos acréscimos dos deslocamentos requeridos para cada incremento de carregamento.

g) Sub-rotina STRAIN-STRESS ELEMENTO

Calcula os valores das deformações e das tensões principais de cada elemento.

h) Sub-rotina CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB

Depois de calculadas as tensões de cada elemento de concreto, são calculadas as tensões principais na rotina *Strain-Stress Elemento*, para aplicação do Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb, conforme descrito no CAPÍTULO 2 -, Item 2.2 - , deste trabalho. Caso seja verificada a ruptura do elemento, é feita uma redução total do módulo de elasticidade, de forma individual, para posterior armazenamento dos deslocamentos nodais. Caso isso não ocorra, efetua-se uma redução parcial do módulo de elasticidade, em função da deformação principal de compressão de cada elemento.

i) Sub-rotina ARMAZENA RESULTADOS

Essa sub-rotina tem a função de armazenar os resultados obtidos ao final da aplicação de cada incremento de carregamento.

i) Sub-rotina VERIFICAÇÃO DE RUPTURA

Essa rotina tem a funcionalidade de verificar após cada processo incremental de carga se algum dos elementos rompeu, caso retorne verdadeiro, o programa é finalizado apresentando o relatório

final, caso falso, incrementa-se a carga e corrige-se o módulo de elasticidade do elemento repetindo todo o processo novamente.

CAPÍTULO 7 - ANÁLISE COMPARATIVA

Serão apresentados neste capítulo, exemplos que contemplam a análise estática de prismas em alvenaria estrutural, levando-se em consideração o comportamento não-linear dos materiais e utilizando-se para discretização dos elementos do prisma o elemento finito prismático regular parabólico desenvolvido neste trabalho.

Os exemplos contemplarão uma comparação entre os resultados experimentais obtidos no CAPÍTULO 5, com os resultados das simulações numéricas, obtidas computacionalmente, na tentativa de validar o modelo de ruptura de Mohr-Coulomb e os redutores dos módulos de elasticidade dos materiais.

Para solução numérica foi utilizado um programa desenvolvido em Visual Basic, onde foram utilizadas as resistências obtidas no CAPÍTULO 5 e seguida a discretização apresentada no CAPÍTULO 6, item 6.2.

7.1 - Prisma vazio assentado com argamassa A01

Neste exemplo será feita a comparação entre os resultados dos ensaios dos prismas vazios que foram feitos com a utilização da argamassa tipo A01, argamassa mais fraca, com os resultados numéricos.

Este prisma está referenciado neste trabalho como PR2-A01, e os elementos que constituem os septos na discretização para análise computacional receberam como atribuição o módulo de

elasticidade inicial nulo, simulando assim a condição de não existência dos elementos finitos.

Para efeito de aplicação das cargas receberam carregamento somente os elementos que apresentassem rigidez diferente de zero, assim como as condições de apoio também foram atribuídas aos elementos com rigidez não nula.

As características físicas dos materiais utilizados são:

- Bloco:

$$f_{cb} = 3,135 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{tb} = 0,267 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{0,b} = 1484,77 \text{ kN/cm}^2$$

- Argamassa:

$$f_{ca} = 0,288 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{ta} = 0,0465 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{0,a} = 147,06 \text{ kN/cm}^2$$

A Tabela 23 mostra os resultados finais dos deslocamentos, na direção z, dos nós 653, 669, 729 e 745 no PR2-A01, nós estes que se encontram nas mesmas posições relativas a direção Z e que tiveram comportamentos iguais por questões de simetria.

A ruptura dos primeiros elementos ocorreu no incremento de carga número 59 e que corresponde a uma carga de 590 kN, aproximadamente 590 kN.

A Figura 7.2 apresenta os resultados força versus deslocamento para os nós cujo deslocamento esta tabelado acima, comparados com os resultados obtidos experimentalmente para o prisma PR2-A01.

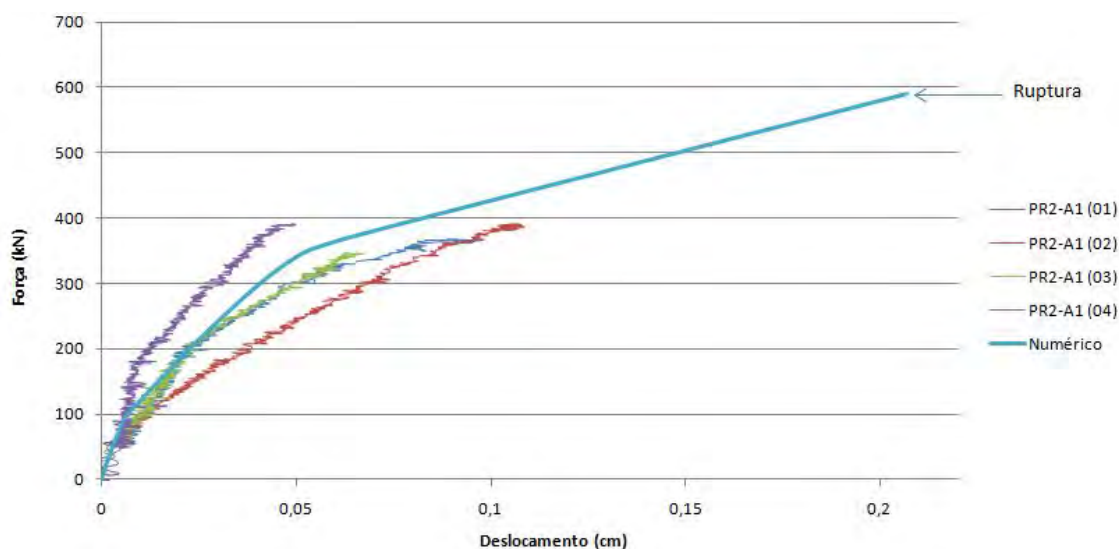


Figura 7.2 - Gráfico Força x Deslocamento comparativo entre resultados experimentais e numéricos obtidos - PR2-A01.

É de grande importância destacar que no gráfico apresentado na Figura 7.2, apresenta-se a nuvem de dados obtida experimentalmente, nuvem esta limitada pela retirada dos equipamentos de aferição com uma carga segura, antes da ruptura do prisma.

7.2 - Prisma vazio assentado com argamassa A02

Neste exemplo será feita a comparação entre os resultados dos ensaios dos prismas vazios que foram feitos com a utilização da argamassa tipo A02, argamassa mais resistente, com os resultados numéricos.

Este prisma está referenciado neste trabalho como PR2-A02, e os elementos que constituem os septos na discretização para análise computacional receberam como atribuição o módulo de elasticidade inicial nulo, simulando assim a condição de não existência dos elementos finitos.

Para efeito de aplicação das cargas receberam carregamento somente os elementos que apresentassem rigidez diferente de zero, assim como as condições de apoio também foram atribuídos aos elementos com rigidez não nula.

As características físicas dos materiais utilizados são:

- Bloco:

$$f_{cb} = 3,135 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{tb} = 0,267 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{0,b} = 1484,77 \text{ kN/cm}^2$$

- Argamassa:

$$f_{ca} = 0,612 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{ta} = 0,1065 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{0,a} = 312,49 \text{ kN/cm}^2$$

A Tabela 24 mostra os resultados finais dos deslocamentos, na direção Z, dos nós 653, 669, 729 e 745 no PR2-A02, nós estes que se encontram nas mesmas posições relativas a direção Z e que tiveram comportamentos iguais por questões de simetria.

A ruptura dos primeiros elementos ocorreu no incremento de carga número 53 e que corresponde a uma carga de 530 kN, aproximadamente 530 kN.

A Figura 7.4 apresenta os resultados força versus deslocamento para os nós cujo deslocamento está tabelado anteriormente, comparados com os resultados obtidos experimentalmente para o prisma PR2-A02.

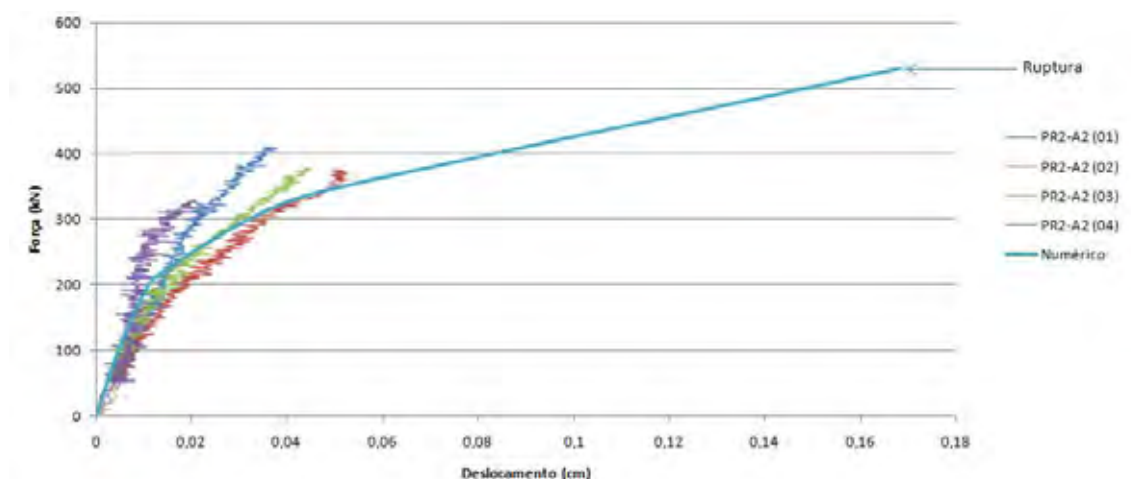


Figura 7.4 - Gráfico Força x Deslocamento comparativo entre resultados experimentais e numéricos obtidos - PR2-A02.

Destaca-se que no gráfico apresentado na Figura 7.4, apresenta-se a nuvem de dados obtida experimentalmente, nuvem esta limitada pela retirada dos equipamentos de aferição com uma carga segura, antes da ruptura do prisma.

7.3 - Prisma grauteado assentado com argamassa A02

Neste exemplo será feita a comparação entre os resultados dos ensaios dos prismas que foram preenchidos com graute e que foram assentados com a utilização da argamassa tipo A02, argamassa mais resistente, com os resultados numéricos.

Este prisma está referenciado neste trabalho como PR2-A02-G1, e os elementos que constituem os septos na discretização para análise computacional receberam como atribuição o módulo de

elasticidade inicial do graute, simulando assim a condição de um prisma cheio.

Para efeito de aplicação das cargas receberam carregamento todos os elementos da face superior do prisma, assim como receberam vinculação com o exterior todos os elementos da face inferior.

As características físicas dos materiais utilizados são:

- Bloco:

$$f_{cb} = 3,135 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{tb} = 0,267 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{0,b} = 1484,77 \text{ kN/cm}^2$$

- Argamassa:

$$f_{ca} = 0,612 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{ta} = 0,1065 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{0,a} = 312,49 \text{ kN/cm}^2$$

- Graute:

$$f_{cg} = 1,32 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{tg} = 0,1367 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{0,g} = 1350,0 \text{ kN/cm}^2$$

A Tabela 25 mostra os resultados finais dos deslocamentos, na direção Z, dos nós 653, 669, 729 e 745 no PR2-A02, nós estes que se encontram nas mesmas posições relativas à direção Z e que tiveram comportamentos iguais por questões de simetria.

Realizou-se a análise numérica com a aplicação de carga até a capacidade da máquina de ensaios, 1000 kN, onde ao final desta não houve a ruptura de nenhum elemento.

Tabela 25 - Deslocamento dos nós 653, 669, 729 e 745 no PR2-A02-G1.

INC.	FORÇA (kN)	DESLOC. (cm)	INC.	FORÇA (kN)	DESLOC. (cm)	INC.	FORÇA (kN)	DESLOC. (cm)
1	20	0,00058	18	360	0,01378	35	700	0,10671
2	40	0,00117	19	380	0,01526	36	720	0,11775
3	60	0,00178	20	400	0,01683	37	740	0,12988
4	80	0,00240	21	420	0,01851	38	760	0,14201
5	100	0,00303	22	440	0,02030	39	780	0,15414
6	120	0,00368	23	460	0,02222	40	800	0,16627
7	140	0,00435	24	480	0,02432	41	820	0,17839
8	160	0,00503	25	500	0,02666	42	840	0,19052
9	180	0,00574	26	520	0,02935	43	860	0,20265
10	200	0,00646	27	540	0,03262	44	880	0,21478
11	220	0,00721	28	560	0,03731	45	900	0,22691
12	240	0,00799	29	580	0,04396	46	920	0,23904
13	260	0,00880	30	600	0,05321	47	940	0,25117
14	280	0,00966	31	620	0,06323	48	960	0,26330
15	300	0,01055	32	640	0,07394	49	980	0,27543
16	320	0,01151	33	660	0,08505	50	1000	0,28756
17	340	0,01258	34	680	0,09584			

A Figura 7.5 apresenta o gráfico força versus deslocamento para os nós cujo deslocamento esta tabelado anteriormente, comparados com os resultados obtidos experimentalmente para o prisma PR2-A02-G1.

Este gráfico apresenta o final do ensaio sem ruptura de nenhum elemento.

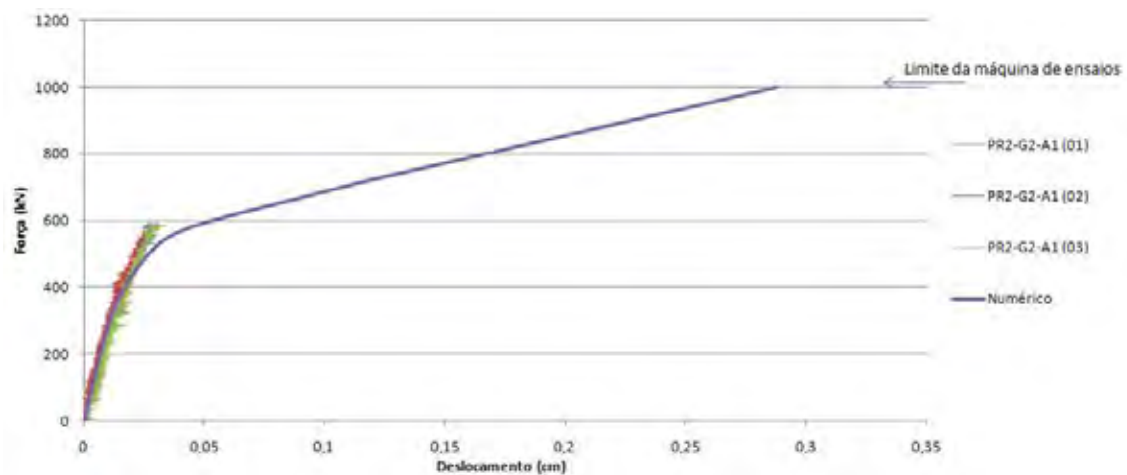


Figura 7.5 - Gráfico Força x Deslocamento comparativo entre resultados experimentais e numéricos obtidos - PR2-A02-G1.

Apresenta-se no gráfico da Figura 7.4 uma nuvem de dados obtida experimentalmente, nuvem esta limitada pela retirada dos equipamentos de aferição com uma carga segura, antes da ruptura do prisma.

CAPÍTULO 8 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1 - Discussão dos resultados

Este trabalho iniciou com a apresentação do Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb seguido de uma breve descrição a respeito do Método dos Elementos Finitos, enfatizando o desenvolvimento matemático para elaboração da matriz de rigidez do elemento finito prismático regular parabólico.

Prosseguiu-se com uma descrição do conceito de alvenaria estrutural, onde a ênfase maior se deu na apresentação das características e funcionalidades de cada material que constituiria este método construtivo.

Neste contexto, procurou-se conhecer e caracterizar todos os materiais utilizados no prisma e determinar experimentalmente suas resistências à compressão, à tração e comportamento característico da curva tensão versus deformação até sua ruptura. Embasado neste modelo tensão versus deformação, propôs-se uma equação para este comportamento da qual foi possível determinar o módulo de elasticidade instantâneo do material quando sujeito a certos níveis de deformação, diminuição da rigidez com o acréscimo de tensões.

Com o intuito de validar os resultados obtidos numericamente com os dados obtidos experimentalmente, foram elaborados três exemplos que simularam numericamente os três ensaios realizados em laboratório, apresentando como resposta um gráfico força versus deslocamento, relativo aos mesmos pontos onde foram

instalados equipamentos de leitura de deformação, LVDT's, que fizeram a aferição da deformação do prisma.

Analizando-se os resultados das curvas força versus deslocamento do modelo numérico sobrepostas aos dados experimentais, pode-se avaliar uma boa compatibilidade. Em todos os gráficos de comparação pode-se observar a sobreposição dos dados numéricos com os dados experimentais, traduzindo o comportamento força-deslocamento oferecido pelo modelo numérico proposto idêntico aos experimentais.

Com relação à ruptura dos elementos que constituíram o prisma, o Critério de Mohr-Coulomb foi capaz de prever os elementos que romperam inicialmente, sendo estes os mesmos elementos verificados experimentalmente.

Nos ensaios dos prismas PR2-A01 e PR2-A02 foi constatada a fissuração excessiva no bloco superior instante antes da ruptura, quando que numericamente os primeiros elementos a romperem foram justamente estes que tiveram tais fissurações durante a experimentação.

Para os prismas que constituíram o grupo PR2-A02-G1 não se conseguiu verificar a sua carga de ruptura experimentalmente, porém, a sobreposição das curvas força versus deslocamento e a não ruptura de nenhum elemento no processo numérico até a carga de 1000 kN indicam que o modelo também tange a bons resultados.

Com relação à força numérica de ruptura, para o prisma PR2-A01 experimentalmente foi obtida uma carga média de ruptura de 634,0 kN, enquanto que numericamente a carga experimentada foi de 590 kN, para o prisma PR2-A02 a carga média experimental foi de 519,4 kN, e numericamente esta teve magnitude de 530 kN, finalmente para o prisma PR2-A02-G1 tanto a carga aplicada no ensaio quanto a carga limite adotada no programa foi atingida sem que houvesse ruptura de nenhum elemento.

Em relação aos resultados apresentados anteriormente pode-se observar a resistência maior do conjunto, onde foi utilizada uma argamassa de menor resistência, prisma PR2-A01. Esse fato pode ter sido consequência da grande deformabilidade da argamassa menos resistente, fazendo com que a espessura da junta ficasse muito reduzida, possibilitando a transferência das cargas de forma quase direta entre os blocos.

8.2 - Conclusão

Com base no apresentado anteriormente, pode-se concluir que o procedimento numérico adotado, composto pela discretização dos prismas, introdução incremental do carregamento, utilização do Critério de Mohr-Coulomb e com os redutores de rigidez propostos, determinados com base em resultados experimentais, foi implementado com êxito, mostrando-se ser aplicável para análise da alvenaria estrutural. Tal procedimento oferece bons resultados, tanto quanto ao comportamento das deformações, como a valores de ruptura para determinação da resistência média do prisma, podendo assim ser utilizado na discretização de prismas.

8.3 - Proposta para desenvolvimento futuro

Sugere-se para um desenvolvimento futuro, baseando na eficácia do comportamento estrutural dos prismas de alvenaria, em função do modelo discreto utilizando o elemento finito prismático regular parabólico, a discretização de paredes para um estudo mais aprofundado da transferência de tensões internas.

Com relação ao modelo de ruptura adotado, sugere-se um estudo mais abrangente, para que se consiga desenvolver um equacionamento matemático capaz de verificar todos os mecanismos de

ruptura enfatizando o surgimento de fissuras, em nível micro dos materiais, antes que ocorra a ruptura total do material.

REFERÊNCIAS

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING END MATERIALS - **ASTM**. Masonry Standards for the building industry. 5. ed. Estados Unidos: ASTM International, 2004. 583p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13279**: argamassa para assentamento e paredes e revestimento de paredes e tetos - determinação da resistência à compressão. Rio de Janeiro: ABNT, 1995. 1p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6136**: blocos vazados de concreto simples para alvenaria estrutural. Rio de Janeiro: ABNT, 2007. 18p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7222**: execução e controle de obras em alvenaria estrutural de blocos vazados de concreto. Rio de Janeiro: ABNT, 1994. 3p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8798**: execução e controle de obras em alvenaria estrutural de blocos vazados de concreto. Rio de Janeiro: ABNT, 1985. 15p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10837**: cálculo de alvenaria estrutural de blocos vazados de concreto. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1989. 20p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 12118**: Blocos vazados de concreto para alvenaria - Métodos de ensaio. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2006.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION. Code of practice for structural use of masonry. Part 1: Unreinforced masonry: **BS 5628**. London, 1978.

BUCHAIM, R. (2001). **A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica**. São Paulo. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

CAMACHO, J. S.; RODRIGUES, R. O., **Utilização do graute na alvenaria estrutural**. Anais do 41º Congresso Brasileiro de Concreto, Salvador, 1999. Artigo técnico. Salvador, BA. 1999. p.142.

CAVALHEIRO, O. P. **Argamassa de assentamento: receita, dosagem ou adequação de traço?** In: Simpósio Brasileiro de Tecnologia das Argamassas, 1, Goiânia. ANAIS... Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 1995. 9 p.

CUNHA, E. H. **Análise experimental do comportamento de prismas grauteados em alvenaria estrutural**. 2001. 150f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2001.

DRYSDALE, R. G.; HAMID, A. A.; BAKER L. R. **Masonry structures: behavior and design**. Prentice Hall, New Jersey, 1994.

DRYSDALE, R.G.; GUO, P. **Strength Characteristics of Interlocking Dry-Stacked Concrete Block Masonry**, In: Proceedings of the Seventh Canadian Masonry Symposium, Hamilton, Ontario, 1995.

FAGLIONI, A. F. **Análise não-linear de vigas de concreto utilizando elemento finito prismático regular linear associado ao de barra**. Ilha Solteira, FEIS-UNESP. 2006. 122p.

JUSTE, A. E. **Estudo da resistência e deformabilidade da alvenaria de blocos de concreto submetido a esforços de compressão**. 2001. 236f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001

KOGA, C. A., **Estudo dos prismas de alvenaria estrutural de blocos de concreto**, 51 P. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008

LOGULLO, B. G. **Influência do graute e da taxa de armadura no comportamento da alvenaria de blocos de concreto**. 2006. 192f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

MAURÍCIO, R. M.; CAMACHO, J.; ANDOLFATO, R. P. **Resistência à Compressão Axial de Blocos de Concreto Capeados com Diferentes Materiais**. In: 46º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 2004, Florianópolis. 46º Congresso Brasileiro do Concreto. Florianópolis: Ivo J. Padaratz e Túlio N. Bittencourt, 2004. v. VI, p. 1271-1280.

MENDES, R. J. K. **Resistência à compressão de alvenarias de blocos cerâmicos estruturais**. 1998. 185p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.

MOHAMAD, G. **Comportamento mecânico na ruptura de prismas de blocos de concreto**. Florianópolis, 1998. 114p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina.

PARSEKIAN, G.A., FRANCO, L.S., **Recomendações para projeto e execução de alvenaria estrutural protendida**. [S.l.: s.n., 2000?].

RAMALHO, M. A. e CORRÊA, M. R. S. **Projeto de edifícios de alvenaria estrutural**. 1. ed. São Paulo: Pini, 2003. 174 p.

RODRIGUES, R. O. (1999). **Introdução ao Método dos Elementos Finitos : Notas de aula**. Ilha Solteira. FEIS-UNESP. 43p.

ROMAGNA, R. H. **Resistência á compressão de prismas de blocos de concreto grauteados e não grauteados**. 2000. 195f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

SABBATINI, F. H. **Processos construtivos de edifícios de alvenaria sílico-calcária**. São Paulo, 1984. 298p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

SAVASSI, W. (1996). **Introdução ao Método dos Elementos Finitos : em análise linear de estruturas**. São Carlos, EESC-USP. 260p.

SILVA JUNIOR, D.M., **Análise numérica do comportamento não-linear de prismas de alvenaria estrutural submetidos a ações verticais utilizando o elemento finito prismático regular linear.**, 98 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007.

SILVA, A. F., **Avaliação da resistência à compressão da alvenaria estrutural**, 109 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008.

SILVA, WILSON J. **Estudo experimental de ligações entre paredes de alvenaria estrutural de blocos cerâmicos sujeitas a ações verticais**, 144p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista. Ilha Solteira. 2003.

SOLORZANO, M. G. P. **Características e desempenho de juntas de argamassa na alvenaria estrutural de blocos de concreto**. São Paulo: USP/EPEC, 1995. 25p. (Boletim Técnico, Bt/Pcc/141).

SORIANO, H. L. (2003). **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. EdUSP. 579p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. 5.ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 3v.

ANEXO I

$$K_{1,2} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23(1-v)}{135a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{2v}{45ab} & \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8(1-v)}{27a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27b^2} + \frac{v}{27ab} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{2v}{45ab} & \frac{31(1-v)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & -\frac{2v}{45bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27b^2} + \frac{v}{27ab} & \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} - \frac{17v}{90bc} \\ \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{23(1-v)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{v}{30bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{15b^2}{27a^2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{v}{27ab} & \frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} + \frac{v}{50ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27b^2} + \frac{7v}{27ab} & \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{16(1-v)}{27b^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{7v}{27bc} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} + \frac{v}{30ac} & \frac{v}{27bc} + \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{1,4} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31(1-v)}{135a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} - \frac{2v}{45ab} & -\frac{2v}{45ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27a^2} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} - \frac{2v}{45ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{7v}{27ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} + \frac{v}{30bc} \\ \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23(1-v)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} - \frac{7v}{27ac} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{v}{30ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8(1-v)}{27b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} + \frac{17v}{90ac} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{9ca}{9cb} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{1,5} := \left[\begin{array}{cccccc} -\frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{30ab} + \frac{30b}{27c^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} - \frac{7v}{27ac} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{v}{30ab} + \frac{30b}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{7v}{27bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} & -\frac{v}{27bc} - \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2(1-v)}{9a^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8v}{27bc} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} \\ \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{1,6} := \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} \\ -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} \\ \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{27c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2(1-v)}{9a^2} \\ -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2(1-v)}{9a^2} & -\frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \\ -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} & -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \end{array} \right]$$

$$K_{1,9} := \left[\begin{array}{l} \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{11(1-v)}{270a^2}, \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba}, \frac{31v}{540ab}, \frac{31v}{540ac}, \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ac} + \frac{17v}{90ac} \\ - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} - \frac{31v}{540ab}, \frac{11(1-v)}{270b^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2}, \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540bc}, \frac{31v}{540cb}, \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ab}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27bc}, \frac{2v}{27bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ - \frac{31v}{540ac} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540bc}, \frac{31v}{540bc} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb}, \frac{11(1-v)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2}, \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ac}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27bc}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ 4\left(\frac{1}{2}-v\right) - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ab}, \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ac}, \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{8(1-v)}{45a^2}, 0, -\frac{4v}{15ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ 2\left(\frac{1}{2}-v\right) - \frac{2v}{27ab}, \frac{2v}{27ab} + \frac{4(1-v)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27bc}, 0, -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8(1-v)}{27b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0 \\ 17\left(\frac{1}{2}-v\right) - \frac{17v}{90ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc}, \frac{2v}{27cb} + \frac{4(1-v)}{45c^2}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, -\frac{4v}{15ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, -\frac{8(1-v)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{1,10} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17(1-v)}{135a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} - \frac{v}{60ab} & \frac{v}{135ac} + \frac{135c}{60ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{1-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2} & -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} \\ -\frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} + \frac{v}{60ab} & \frac{29(1-v)}{270b^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{v}{60bc} - \frac{1-v}{60cb} & -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{1-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{v}{30bc} \\ \frac{v}{135ac} + \frac{135c}{60ca} & -\frac{v}{60bc} + \frac{1-v}{60cb} & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17(1-v)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{1-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & -\frac{1-v}{30cb} - \frac{17v}{90bc} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{1-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ 4\left(\frac{1}{2}-v\right) - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{17v}{90ac} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{4(1-v)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ 17\left(\frac{1}{2}-v\right) - \frac{17v}{90ca} + \frac{17ac}{90ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & \frac{4(1-v)}{45c^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{2,2} := \begin{bmatrix} \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49(1-v)}{135a^2}, -\frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba}, \frac{29v}{135ab}, \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca} + \frac{135ca}{135ac}, \frac{1}{2}-v, \frac{1}{2}-v, \frac{16(1-v)}{27a^2}, \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, \frac{v}{27ca} - \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ac} \\ -\frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} - \frac{29v}{135ab}, \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, -\frac{29v}{135bc}, \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, \frac{1}{2}-v, \frac{7v}{27ab} + \frac{27ab}{27a^2}, \frac{1}{2}-v, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, \frac{1}{2}-v - \frac{30cb}{30bc} \\ \frac{29v}{135ac} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, -\frac{29v}{135bc} - \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, \frac{49(1-v)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, \frac{1}{2}-v, \frac{7v}{27ca} - \frac{27ca}{30cb}, \frac{1}{2}-v, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ \frac{1}{2}-v, \frac{1}{2}-v, \frac{16(1-v)}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27a^2}, \frac{1}{2}-v, \frac{7v}{27ba} + \frac{27ab}{27ac}, -\frac{1}{27ca} - \frac{7v}{27ac}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, 0, 0 \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{v}{27ab}, -\frac{1}{2}-v, \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, \frac{1}{2}-v, \frac{1-v}{30cb} - \frac{v}{30bc}, 0, \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, -\frac{4v}{15bc} - \frac{15cb}{15cb} \\ -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac}, -\frac{1}{2}-v, \frac{v}{30cb} - \frac{1-v}{30bc}, \frac{1-v}{15c^2} - \frac{15b^2}{27a^2}, 0, -\frac{4v}{15bc} - \frac{15cb}{15cb}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{2,3} := \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31(1-v)}{135a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} + \frac{2v}{45ab} & -\frac{2v}{45ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} - \frac{17v}{90ac} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} \\ \frac{23(1-v)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & -\frac{31v}{540bc} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8(1-v)}{27b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} \\ \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{v}{30ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{16(1-v)}{27a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{7v}{27ba} - \frac{7v}{27ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{7v}{27ac} - \frac{7v}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{2,5} := \left[\begin{array}{cccccccc} -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{1}{2}-v & -\frac{7v}{27ca} - \frac{7v}{27ac} \\ \frac{17v}{90ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc} & -\frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{7v}{27bc} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & \frac{1}{2}-v \\ -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27c^2} + \frac{v}{27cb} - \frac{v}{27bc} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} & \frac{v}{27bc} + \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & \frac{1}{2}-v & -\frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} \\ -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{4v}{27ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{4v}{27ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \end{array} \right]$$

$$K_{2,6} := \left[\begin{array}{cccccc} -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{1-v}{30ba} & \frac{1-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} \\ \frac{1-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{27c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{8v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{4v}{27ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ -\frac{8v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{27ac}{27ac} - \frac{27ca}{27ca} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \end{array} \right]$$

$$K_{2,\gamma} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{29(1-v)}{270a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} - \frac{v}{60ab} & \frac{\frac{1}{2}-v}{60ac} - \frac{v}{60ca} & \frac{1}{2}-v & \frac{v}{27ba} + \frac{2v}{27ab} & -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{v}{30ac} \\ -\frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} + \frac{v}{60ab} & \frac{17(1-v)}{135b^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2} & -\frac{v}{135bc} - \frac{135cb}{135c^2} & -\frac{v}{135bc} - \frac{135cb}{135c^2} & \frac{1}{2}-v & -\frac{1}{27cb} - \frac{v}{27bc} \\ -\frac{v}{60ac} + \frac{1}{60ca} & -\frac{v}{135bc} - \frac{135cb}{135c^2} & \frac{1}{2}-v & \frac{1}{2}-v & \frac{1}{2}-v & \frac{1}{2}-v \\ 4\left(\frac{1}{2}-v\right) + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{4(1-v)}{27a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ac} - \frac{27ca}{27a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ab} + \frac{2v}{27ab} & -\frac{4v}{27ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2v}{9ac} + \frac{9ca}{9cb} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90b^2} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90b^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2v}{9bc} + \frac{9ca}{9cb} \\ -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90b^2} & \frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{2v}{9bc} + \frac{9ca}{9cb} & -\frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{2,8} := \left[\begin{array}{l} \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23(1-v)}{135a^2}, -\frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} - \frac{31v}{540ab}, \frac{2v}{45ac}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca}, -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2}, \frac{8(1-v)}{27a^2}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27ac} \\ \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} - \frac{31v}{540ab}, \frac{23(1-v)}{135b^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, -\frac{2v}{45bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} \\ -\frac{2v}{45ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca}, \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb}, \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31(1-v)}{135a^2}, \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca}, \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{16(1-v)}{27a^2}, 0, 0 \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, -\frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, \frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} - \frac{17v}{90bc}, 0, \frac{8(1-v)}{45b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, \frac{4v}{15bc} - \frac{15cb}{15cb} \\ \frac{1}{v} - \frac{27ac}{27ca}, \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{v}{30bc}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15c^2} + \frac{1-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, 0, -\frac{4v}{15bc} + \frac{15cb}{15cb}, \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{2,9} := \left[\begin{array}{l} \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17(1-v)}{135a^2}, -\frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} + \frac{v}{60ab} + \frac{135ac}{135ac}, \frac{v}{2}, \frac{1-v}{2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2}, -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2}, -\frac{2v}{27ab}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{17v}{90ac} \\ \frac{1}{60} - \frac{v}{60a} - \frac{v}{60b} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2}, -\frac{1}{60ba} + \frac{v}{60ab} + \frac{135ac}{135ac}, \frac{v}{2}, \frac{1-v}{2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2}, -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2}, -\frac{2v}{27ab}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{17v}{90ac} \\ \frac{1}{135} - \frac{v}{135a} + \frac{1}{135c} - \frac{v}{60ba} - \frac{v}{60bc} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2}, -\frac{1}{60ba} + \frac{v}{60ab} + \frac{135ac}{135ac}, \frac{v}{2}, \frac{1-v}{2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2}, -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2}, -\frac{2v}{27ab}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{17v}{90ac} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{1}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2}, -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, \frac{1}{27ca} + \frac{v}{27ac}, -\frac{1}{9c^2}, \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, -\frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{1}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, -\frac{1}{30cb} - \frac{17v}{90bc}, \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, -\frac{2v}{9c^2}, \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{1}{27ca} + \frac{v}{27ac}, -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{v}{30bc}, -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{1}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca}, \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb}, -\frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{2,10} := \left[\begin{array}{c} \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2} + \frac{11(1-v)}{270b^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} + \frac{31v}{540ab} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ac} - \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} + \frac{31v}{540cb} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ab} - \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} + \frac{31v}{540ab} + \frac{11(1-v)}{270b^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} + \frac{31v}{540cb} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2} + \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90bc} \\ - \frac{31v}{540ac} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} + \frac{31v}{540bc} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} + \frac{11(1-v)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2} + \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90bc} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} - \frac{4(1-v)}{27a^2} + \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2}, \quad 0, \quad 0 \\ - \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90bc}, \quad 0, \quad - \frac{8(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} + \frac{4v}{15bc} + \frac{15c}{15bc} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90bc}, \quad \frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, \quad 0, \quad \frac{4v}{15bc} + \frac{15c}{15bc}, \quad - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \end{array} \right]$$

$K_{3,3} =$

$$K_{3,4} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23(1-v)}{135a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} + \frac{2v}{45ab} & -\frac{31v}{540ac} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{1-v}{2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15b^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2} & \frac{1-v}{2} - \frac{v}{27ba} + \frac{v}{27ab} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} - \frac{2v}{45ab} & \frac{31(1-v)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{1-v}{2} - \frac{v}{27ba} + \frac{v}{27ab} & \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{1}{2} - \frac{v}{30cb} + \frac{17v}{90bc} \\ -\frac{31v}{540ac} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{23(1-v)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{v}{30bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{1}{2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15b^2} - \frac{27a^2}{27a^2} \\ \frac{1}{2} - \frac{v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{v}{27ab} & -\frac{v}{30ac} - \frac{1-v}{30ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{1}{2} - \frac{v}{27ba} + \frac{7v}{27ab} & -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{16(1-v)}{27b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{7v}{27bc} - \frac{1-v}{27cb} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{v}{30ac} - \frac{1-v}{30ca} & -\frac{v}{27bc} - \frac{1-v}{27cb} & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{3,5} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90b^2a} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & \\ \frac{17v}{90ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90b^2a} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27b^2c} & -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90b^2a} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27b^2c} & -\frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} \\ \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27b^2c} & -\frac{4(1-v)}{27c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27b^2c} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} \\ -\frac{2(1-v)}{9a^2} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2a} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2a} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2a} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4v}{27b^2c} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2a} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27b^2c} \\ \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4v}{27b^2c} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27b^2c} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{3,6} := \left[\begin{array}{cccccc} -\frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{v}{30ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{7v}{27ac} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{v}{30ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{7v}{27bc} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc} \\ 7\left(\frac{1}{2}-v\right) + \frac{v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27bc} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2(1-v)}{9a^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8v}{27bc} \\ -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{3,8} := \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17(1-v)}{135a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} - \frac{v}{60ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{135ac} - \frac{v}{135ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2} & -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} \\ -\frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} + \frac{v}{60ab} & \frac{29(1-v)}{270b^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{60cb} & -\frac{v}{60bc} + \frac{\frac{1}{2}-v}{60cb} & -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{v}{30bc} \\ -\frac{v}{135ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{135ca} & \frac{v}{60bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{60cb} & \frac{\frac{1}{2}-v}{60bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{60cb} & -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} + \frac{17v}{90bc} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{1-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{4(1-v)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{17v}{90ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{4(1-v)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{3,9} := \left[\begin{array}{l} \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} + \frac{31v}{540ab} + \frac{2v}{45ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} + \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{v}{30ac} \\ \\ \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} + \frac{31v}{540ab} + \frac{23(1-v)}{135b^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} + \frac{2v}{45bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ac} + \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} + \frac{v}{27bc} \\ \\ \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} + \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31(1-v)}{135b^2} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} + \frac{17v}{90ac} - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8(1-v)}{45a^2} + \frac{0}{15ac} - \frac{4v}{15ca} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{16(1-v)}{45c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \\ -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{16(1-v)}{27b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} + \frac{0}{15ac} \\ \\ \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{v}{30ac} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} + \frac{1-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} + \frac{4v}{15ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} - \frac{16(1-v)}{45c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{3,10} := \left[\begin{array}{l} \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{29(1-v)}{270a^2}, -\frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} + \frac{v}{60ab}, -\frac{v}{60ac}, -\frac{\frac{1}{2}-v}{60ca}, \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4(1-v)}{27a^2}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} - \frac{v}{60ab}, \frac{17(1-v)}{135b^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2}, -\frac{135bc}{135c^2}, -\frac{135bc}{135b^2}, \frac{v}{135bc}, -\frac{\frac{1}{2}-v}{2}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2}, -\frac{4(1-v)}{27a^2}, -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{17v}{90bc} \\ \frac{v}{60ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{60ca}, -\frac{v}{135bc} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17(1-v)}{135b^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2}, -\frac{135c^2}{135c^2}, -\frac{135c^2}{135b^2}, -\frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2}, \frac{2v}{27ac}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca}, -\frac{17v}{90bc}, -\frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, \frac{4(1-v)}{45a^2}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, -\frac{1}{30ca} - \frac{17v}{90ac}, -\frac{\frac{1}{2}-v}{2}, \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2}, -\frac{4v}{27ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab}, \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, -\frac{1}{27cb} - \frac{v}{27bc}, -\frac{\frac{1}{2}-v}{27c^2}, -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2}, -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{v}{30ac}, -\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc}, -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, \frac{2v}{9ac} + \frac{9ca}{9cb}, -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{4,4} := \begin{bmatrix} \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49(1-v)}{135a^2}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba}, & \frac{29v}{135ab}, & \frac{29v}{135ac}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16(1-v)}{27a^2}, & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, & \frac{v}{27ab}, & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} \\ \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} - \frac{29v}{135ab}, & \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, & \frac{29v}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{29v}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ab}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{1}{2}-v \\ -\frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} - \frac{29v}{135ab}, & \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, & \frac{29v}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{29v}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ab}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{1}{2}-v \\ -\frac{29v}{135ac} - \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{29v}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{29v}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{49(1-v)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, & \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ac} + \frac{27ca}{30bc}, & \frac{v}{1-v}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v \\ \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ac} + \frac{27ca}{30bc}, & \frac{7v}{27ac} + \frac{27ca}{30bc}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, & 0, & 0, & 0 \\ -\frac{1}{15c^2} - \frac{1}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ab}, & \frac{7v}{27ac} + \frac{27ca}{30bc}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{v}{27ab}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, & \frac{4v}{15bc} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15cb}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15bc} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15cb}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15bc} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15cb} \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{30cb} + \frac{v}{30bc}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, & \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, & \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, & \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{4,5} := \left[\begin{array}{cccccccc} -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \\ -\frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \\ -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{27c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{4v}{27ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \\ \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2(1-v)}{9b^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \\ \frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{4v}{27ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \end{array} \right]$$

$$K_{4,6} := \left[\begin{array}{cccccccc} -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{7v}{27ac} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & \\ -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & -\frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{7v}{27bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & \\ -\frac{\frac{1}{2}-v}{27c^2} + \frac{v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & \frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} & -\frac{v}{27bc} - \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \\ -\frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{4v}{27ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{8v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \\ -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & -\frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2(1-v)}{9b^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \\ -\frac{4v}{27ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{8v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \end{array} \right]$$

$$K_{4,7} := \left[\begin{array}{l} \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17(1-v)}{135a^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} + \frac{v}{60ab} - \frac{v}{135ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{135ca} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} - \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{17v}{90ac} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{60ba} - \frac{v}{60ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2} - \frac{v}{60bc} - \frac{60bc}{60cb} - \frac{\frac{1}{2}-v}{2} - \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{4(1-v)}{27b^2} + \frac{45c^2}{45a^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} \\ - \frac{\frac{1}{2}-v}{135ac} - \frac{135ca}{60bc} - \frac{v}{60cb} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{17(1-v)}{135c^2} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270a^2} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{17v}{90ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2} - \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} - \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ - \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} - \frac{1}{30cb} + \frac{17v}{90bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} + \frac{17v}{90bc} - \frac{4v}{27ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} - \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ - \frac{v}{27ac} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{v}{30bc} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{1-v}{15c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} - \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} - \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} - \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{4,8} := \begin{bmatrix} \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{11(1-v)}{270a^2}, & \frac{31v}{540ab} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} + \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca}, & \frac{31v}{540ab} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} + \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca}, & \frac{31v}{540ab} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} + \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca}, & \frac{4(1-v)}{27a^2}, & \frac{2v}{27ab}, & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, & \frac{2v}{27ac}, & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} + \frac{31v}{540ab}, & \frac{11(1-v)}{270b^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb}, & \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} + \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca}, & \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} + \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} + \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca}, & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ab}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{4(1-v)}{27ab}, & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{17v}{90bc}, & \frac{17v}{90bc} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} \\ \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca}, & \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb}, & \frac{11(1-v)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270b^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb}, & \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270cb} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{270c^2} + \frac{11\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb}, & \frac{2v}{27ac}, & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca}, & \frac{17v}{4(1-v)} + \frac{90bc}{45c^2}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2}, & \frac{4(1-v)}{27a^2}, & \frac{2v}{27ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca}, & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8(1-v)}{27a^2}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2}, & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{17v}{90bc}, & 0, & -\frac{8(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & -\frac{4v}{15bc} - \frac{15cb}{15cb}, & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15bc} - \frac{15cb}{15cb}, & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15bc} - \frac{15cb}{15cb} \\ -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca}, & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{17v}{90bc}, & \frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2}, & 0, & -\frac{4v}{15bc} - \frac{15cb}{15cb}, & -\frac{8(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8(1-v)}{27a^2}, & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8(1-v)}{27a^2}, & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{8(1-v)}{27a^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{4,10} := \left[\begin{array}{l} \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} - \frac{31v}{540ab} - \frac{2v}{45ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} + \frac{8(1-v)}{27a^2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} \\ \\ \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ba} - \frac{31v}{540ab} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} - \frac{2v}{45bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{45b^2} + \frac{4(1-v)}{27a^2} - \frac{2v}{15c^2} - \frac{17v}{90cb} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} - \frac{v}{30bc} \\ \\ \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} - \frac{2v}{45bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} - \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{31(1-v)}{135a^2} + \frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} - \frac{17v}{30cb} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{30cb} - \frac{1-v}{15c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{1-v}{27a^2} \\ \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{16(1-v)}{27a^2} - \frac{16(1-v)}{15c^2} + \frac{1-v}{27a^2} \\ \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{2v}{27ab} - \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} + \frac{17v}{90bc} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90bc} - \frac{1-v}{15c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90cb} + \frac{30bc}{90cb} - \frac{v}{90cb} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{1-v}{15c^2} + \frac{17v}{27a^2} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} - \frac{1-v}{15c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15cb} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15cb} - \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{5,5} := \begin{bmatrix} \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8(1-v)}{45a^2}, -\frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ \frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0 \\ 0, 0, \frac{32(1-v)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, 0, \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8(1-v)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, -\frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ -\frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, -\frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ 0, 0, \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, 0, \frac{32(1-v)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{5,6} := \left[\begin{array}{c} \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2}, \frac{8(1-v)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16(1-v)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ -\frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{8(1-v)}{45b^2}, \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, \frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16(1-v)}{45b^2}, 0 \\ 0, 0, \frac{8(1-v)}{27c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, 0, \frac{16(1-v)}{27c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16(1-v)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0, \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{8(1-v)}{45b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, \frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{8(1-v)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ 0, 0, \frac{16(1-v)}{27c^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, 0, 0, \frac{8(1-v)}{27c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{5,\gamma} := \left[\begin{array}{ccccccc} -\frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{v}{30ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30b^2} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{2(1-v)}{9a^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{v}{30ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30b^2} & -\frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{v}{27bc} + \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} \\ \frac{7v}{27ac} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & \frac{7v}{27bc} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \\ \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30b^2} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90b^2} - \frac{90ba}{45a^2} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8v}{27bc} \\ \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{5,8} := \left[\begin{array}{cccccc} -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{4v}{27ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & -\frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{4v}{27ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \\ -\frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{8v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ -\frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{v}{27bc} - \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{7v}{27ac} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & -\frac{7v}{27bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{1-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{8v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \end{array} \right]$$

$$K_{5,9} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2(1-v)}{9a^2} & -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{17v}{90ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} & \\ \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{27c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & -\frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{2v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4v}{27bc} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4v}{27bc} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{5,10} := \left[\begin{array}{cccccc} -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{17v}{90ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2(1-v)}{9b^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} + \frac{v}{27ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{8v}{27ac} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{4v}{27ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{27c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{4v}{27ac} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \end{array} \right]$$

$$K_{6,6} := \begin{bmatrix} \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8(1-v)}{45a^2}, -\frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ \frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8(1-v)}{45a^2}, 0 \\ 0, 0, \frac{32(1-v)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, 0, \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \\ \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8(1-v)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0, \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, \frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, 0 \\ -\frac{4v}{15ab} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, -\frac{4v}{15ab} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ba}, \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0 \\ 0, 0, \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, 0, 0, 0, \frac{32(1-v)}{27c^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{6,7} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2(1-v)}{9a^2} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{17v}{90ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} \\ \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{27c^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{4v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & -\frac{2(1-v)}{9a^2} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} \\ \frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{4v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \end{array} \right]$$

$$K_{6,8} := \begin{bmatrix} -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ac} - \frac{27ca}{27ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ -\frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{4(1-v)}{45b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{27bc}{27cb} & -\frac{2v}{27cb} - \frac{27bc}{27cb} & \frac{2(1-v)}{9b^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & -\frac{v}{27ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{27bc}{27cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{27bc}{27cb} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \\ \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{4v}{27ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & \frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{6,9} := \begin{bmatrix} -\frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{v}{30ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{v}{30ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{v}{27bc} - \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{8v}{27bc} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} - \frac{7v}{27ac} & -\frac{7v}{27bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9a^2} \\ \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} & -\frac{17v}{90ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{v}{30ab} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} \\ -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} + \frac{v}{27bc} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{8v}{27bc} \end{bmatrix}$$

$$K_{6,10} := \left[\begin{array}{cccccc} -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4(1-v)}{45a^2} & \frac{17v}{90ab} + \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{4v}{27ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{v}{30ab} + \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ba} & -\frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} + \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{v}{27bc} & -\frac{8(1-v)}{27c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2} & -\frac{4v}{27ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \\ 16\left(\frac{1}{2}-v\right) - \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{v}{27ac} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} & -\frac{2v}{9ab} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ -\frac{v}{30ab} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ba} & -\frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{v}{27bc} + \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} & -\frac{2v}{9ab} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ba} & -\frac{2(1-v)}{9b^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27ca} - \frac{7v}{27ac} & -\frac{7v}{27bc} + \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{16(1-v)}{27c^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{8v}{27ac} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9b^2} \end{array} \right]$$

$$K_7, 8 = \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23(1-v)}{135a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} + \frac{2v}{45ab} & -\frac{31v}{540ac} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} + \frac{v}{27ab} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & & \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} - \frac{2v}{45ab} & \frac{31(1-v)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27b^2} + \frac{v}{27ab} & \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{1-v}{30cb} + \frac{17v}{90bc} & & \\ -\frac{31v}{540ac} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{23(1-v)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{2v}{27ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & \frac{v}{90cb} + \frac{30v}{30bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & & \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{v}{27ab} & -\frac{v}{30ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & & \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} + \frac{7v}{27ab} & \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{16(1-v)}{27b^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{7v}{27bc} - \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & & \\ -\frac{v}{30ac} - \frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} & -\frac{v}{27bc} - \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{27cb}{27cb} & -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} & & \end{array} \right]$$

$$K_{7,10} := \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31(1-v)}{135a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} - \frac{2v}{45ab} & \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & \frac{1}{2}-v & \frac{16(1-v)}{27a^2} & -\frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} \\ -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} + \frac{2v}{45ab} & \frac{23(1-v)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & -\frac{31v}{540bc} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & \frac{1}{2}-v & \frac{7v}{27ba} - \frac{7v}{27ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} - \frac{v}{30bc} \\ -\frac{2v}{45ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & -\frac{31v}{540bc} - \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23(1-v)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{7v}{27ac} + \frac{1}{2}-v & -\frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} - \frac{v}{30bc} & -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ 4\left(\frac{1}{2}-v\right) - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{1-v}{27b^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{1}{2}-v - \frac{v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & -\frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} - \frac{v}{30ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ -\frac{1}{2}-v - \frac{v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8(1-v)}{27b^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{1}{2}-v - \frac{17v}{30ca} - \frac{17v}{90ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} + \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{1-v}{15a^2} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2v}{9cb} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} & \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{8,8} := \begin{bmatrix} \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49(1-v)}{135a^2}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} - \frac{29v}{135ab}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16(1-v)}{27a^2}, & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ab}, & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac} \\ \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} - \frac{29v}{135ab}, & \frac{49(1-v)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, & \frac{29v}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ba} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2}-v \\ \frac{29v}{135ba} - \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ab}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{49(1-v)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2}, & \frac{7v}{27ac} + \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{15c^2}, & \frac{1}{15b^2}, & \frac{1}{15a^2} \\ \frac{1}{2}-v, & \frac{16(1-v)}{27a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ab} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{32(1-v)}{27a^2}, & 0, & 0 \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} + \frac{v}{27ab}, & \frac{1}{15c^2} - \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & \frac{4v}{15bc} + \frac{15cb}{15c^2}, & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15c^2} \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} + \frac{v}{27ac}, & \frac{1}{30cb} + \frac{v}{30bc}, & \frac{1}{15c^2} - \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, & 0, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2}, & \frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2}, & \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{8,9} := \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31(1-v)}{135a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} + \frac{2v}{45ab} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{2v}{45ab} & \frac{2v}{45ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ca} & -\frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{1-v}{15a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} - \frac{17v}{90ac} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27cb} - \frac{2v}{27bc} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45ba} - \frac{2v}{45ab} & \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8(1-v)}{27b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} \\ \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{31v}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23(1-v)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540bc} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540cb} & \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90ca} + \frac{v}{30ac} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27cb} - \frac{2v}{27bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{15b^2}{27a^2} - \frac{16(1-v)}{27a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{7v}{27ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{27ba} - \frac{7v}{27ab} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{8v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{v}{27ac} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} & \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{8,10} :=$$

$$K_{9,9} := \begin{bmatrix} \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49(1-v)}{135a^2}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} + \frac{29v}{135ab}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2}, & \frac{1-v}{15a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ab}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{v}{30ac} \\ \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} + \frac{29v}{135ab}, & \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49(1-v)}{135a^2}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135bc} + \frac{29v}{135cb}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca}, & \frac{v}{27ab}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16(1-v)}{27b^2}, & \frac{1-v}{15a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{v}{27cb} \\ \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca} + \frac{29v}{135ac}, & \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135bc} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb}, & \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49(1-v)}{135a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{30ac}, & \frac{7v}{27bc}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15c^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{1-v}{15a^2}, & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} - \frac{v}{27ab}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2}, & \frac{16(1-v)}{45a^2}, & 0, & \frac{4v}{15ac} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27ba} - \frac{1-v}{15c^2} - \frac{16(1-v)}{27b^2} - \frac{1}{15a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{7v}{27bc} - \frac{1}{27cb}, & 0, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}-v, & \frac{v}{27bc} - \frac{1-v}{27cb}, & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{1}{15c^2} - \frac{1}{15a^2}, & \frac{1}{2}-v, & \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ac} + \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15ca}, & \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45a^2}, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{Q,10} := \left[\begin{array}{cccccc} \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23(1-v)}{135a^2} & -\frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{2v}{45ab} & \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{\frac{1}{2}-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8(1-v)}{27a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27b^2} + \frac{v}{27ab} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} - \frac{2v}{45ab} & \frac{31(1-v)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & -\frac{2v}{45bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{\frac{1}{2}-v}{27b^2} - \frac{v}{27ab} + \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{1-v}{15b^2} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} & \frac{\frac{1}{2}-v}{30cb} - \frac{17v}{90bc} \\ \frac{31v}{540ac} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{540ca} & \frac{2v}{45bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45cb} & \frac{23(1-v)}{135c^2} + \frac{31\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{23\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135a^2} & -\frac{2v}{27ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ca} & -\frac{v}{90cb} - \frac{17\left(\frac{1}{2}-v\right)}{90bc} & -\frac{4(1-v)}{45c^2} + \frac{1}{15b^2} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \\ -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{1-v}{15a^2} & \frac{7\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} + \frac{v}{27ab} & \frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} + \frac{v}{30ac} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2v}{9ac} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{27b^2} + \frac{7v}{27ab} & -\frac{\frac{1}{2}-v}{15c^2} - \frac{16(1-v)}{27b^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & \frac{7v}{27bc} + \frac{27c^2}{27cb} & -\frac{8v}{27ab} - \frac{8\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27ba} & \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9c^2} & \frac{2v}{9bc} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} \\ \frac{\frac{1}{2}-v}{30ca} + \frac{v}{30ac} & \frac{v}{27bc} + \frac{27c^2}{27cb} & -\frac{1-v}{15c^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27b^2} - \frac{\frac{1}{2}-v}{15a^2} & -\frac{2v}{9ac} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9ca} & -\frac{2v}{9bc} + \frac{2\left(\frac{1}{2}-v\right)}{9cb} & \frac{2(1-v)}{9c^2} \end{array} \right]$$

$$K_{10,10} := \left[\begin{array}{l} \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49(1-v)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} - \frac{29v}{135ab} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca} + \frac{29v}{135ac} - \frac{1}{2}-v \frac{1}{2}-v \\ \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ba} - \frac{29v}{135ab} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca} - \frac{29v}{135ab} + \frac{1}{2}-v \frac{1}{2}-v \\ \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135ca} - \frac{29v}{135ab} + \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135b^2} - \frac{29\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135c^2} + \frac{49\left(\frac{1}{2}-v\right)}{135cb} + \frac{49(1-v)}{135c^2} + \frac{1}{2}-v \frac{1}{2}-v \\ \frac{1}{2}-v \frac{1}{2}-v \frac{16(1-v)}{27a^2}, \quad \frac{1}{2}-v \frac{7v}{27ba} + \frac{1}{2}-v \frac{7v}{27ca} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32(1-v)}{27a^2}, \quad 0, \quad 0 \\ 7\left(\frac{1}{2}-v\right) \frac{v}{27ba} + \frac{v}{27ab}, \quad -\frac{1}{15c^2} \frac{1-v}{15b^2} - \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{15cb} - \frac{1}{30cb} \frac{1-v}{27a^2}, \quad 0, \quad -\frac{16(1-v)}{45b^2} + \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45c^2} + \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2}, \quad -\frac{4v}{15bc} - \frac{15bc}{15cb} \\ 7\left(\frac{1}{2}-v\right) \frac{v}{27ca} - \frac{v}{27ac}, \quad -\frac{1}{30cb} \frac{1-v}{30bc} - \frac{v}{30bc} + \frac{1-v}{15c^2} - \frac{15b^2}{27a^2}, \quad 0, \quad -\frac{4v}{15bc} - \frac{15bc}{15cb}, \quad \frac{16\left(\frac{1}{2}-v\right)}{45b^2} + \frac{16(1-v)}{45c^2} + \frac{32\left(\frac{1}{2}-v\right)}{27a^2} \end{array} \right]$$