LUIS RAFAEL BENITO CASTRO

SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE DUFFIN–KEMMER–PETIAU

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

Guaratinguetá
2011

DADOS CURRICULARES

LUIS RAFAEL BENITO CASTRO

NASCIMENTO	02.02.1979 – LIMA/PERU
FILIAÇÃO	Luis Alejandro Benito Castro Elena Clara Castro de Benito
1997/2003	Curso de Graduação Escuela Profesional de Física – Universidad Nacional del Callao – Peru.
2005/2007	Curso de Pós–Graduação em Física, nível Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.
2007/2011	Curso de Pós–Graduação em Física, nível Doutorado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

de forma especial à minha família, ao meu filho Luiz,
e à minha esposa Isabel que são a maior motivação na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a todas as pessoas que fizeram possível concluir este trabalho. Em especial a meu orientador Prof. Dr. Antonio Soares de Castro por sua orientação, dedicação e auxílio.

Aos professores do Grupo de Física de Partículas e Campos da Universidade Estadual Paulista - Campus de Guaratinguetá - FEG pelas correções sugeridas ao trabalho.

Aos meus pais Luis Alejandro e Elena Clara, por sua paciência, amor e que jamais deixaram de me incentivar.

Aos meus colegas de sala Helton Silva Gaspar e Marcelo Gonçalves Garcia pela coexistência harmoniosa durante os dois últimos anos do meu doutorado. Também quero agradecer aos meus colegas Augusto Rueda Chumbes, Angel Obispo Vasquez, Carlos Coronado Villalobos, Elver Mitma Pillaca, Freddy Luis Machuca, Luis Arroyo Meza e Tatiana Ramos Cardoso pela paciência e amizade.

À minha família.

Este trabalho contou com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

“A maior recompensa do nosso
trabalho não é o que nos
pagam por ele, mas aquilo em
que ele nos transforma ”

John Ruskin

CASTRO, L. R. B. **Soluções Analíticas da Equação de Duffin–Kemmer–Petiau**. 2011. 59 f. Tese (Doutorado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.

RESUMO

Fazemos uma revisão detalhada de alguns fundamentos básicos do formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Analisamos as consequências sobre o potencial matricial V para fornecer uma quadricorrente conservada. Também analisamos o comportamento das interações vetoriais mínimas e não mínimas sob as transformações de paridade, conjugação de carga e reversão temporal. A ambiguidade do acoplamento eletromagnético (interação vetorial mínima) também é revisada em detalhe. Algums conceitos errados sobre hermiticidade e valores esperados na teoria de DKP difundidos na literatura são discutidos. Além disso, neste trabalho desenvolvemos uma forma alternativa de procurar soluções analíticas da equação de DKP tridimensional (setor spin-0) para o caso de acoplamentos vetoriais (mínimo e não-mínimo). Considerando potenciais com simetria esférica, o problema pode ser *mapeado* num problema de Sturm-Liouville (da mecânica quântica não relativística) para um dos componentes do espinor de DKP. Neste processo a quadricorrente, a condição de normalização e valores esperados também podem ser expressos em termos desse componente do espinor de DKP de uma forma simples. Como uma aplicação do método desenvolvido, consideramos uma forma linear para os acoplamentos vetoriais.

PALAVRAS - CHAVE: Equação de Duffin–Kemmer-Petiau, Equação de onda relativística, Estados ligados.

CASTRO, L. R. B. **Analytical Solutions of the Duffin–Kemmer–Petiau Equation**. 2011. 59 f. Tese (Doutorado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.

ABSTRACT

A detailed review of some basics fundamentals of the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) formalism is made. The consequences on the potential matrix V for furnish a conserved four-current are analyzed. We also analyze the behavior of minimal and nonminimal vector interactions under parity transformation, charge conjugation and time reversal. The ambiguity of the electromagnetic coupling (minimal vector interaction) is also reviewed in detail. Some misconceptions about the hermiticity and expectation values of the DKP theory widespread in the literature are discussed. In addition, an alternative way to search for analytical solutions of the DKP equation in (3+1) dimensions (spin-0 sector) in the case of vector coupling (minimal and nonminimal) is developed. Considering potentials with spherical symmetry, the problem can be mapped into a Sturm-Liouville problem (nonrelativistic quantum mechanics) for one of the components of the DKP spinor. In this process, the four-current, normalization condition and expectation values can also be expressed in terms of that component of the DKP spinor in a simple way. As an application of the developed method, we consider a linear form for the vector couplings.

KEYWORDS: Duffin–Kemmer–Petiau equation, Relativistic wave equation, Bound states.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O formalismo de primeira ordem de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [1]-[4] tem sido utilizado na análise de interações relativísticas de hádrons com núcleos como uma alternativa para análise baseada nos formalismos de segunda ordem convencionais de Klein-Gordon-Fock (KGF) e Proca. O ônus da equivalência entre os formalismos representou uma objeção à teoria DKP por um longo tempo e somente recentemente foi mostrado que eles fornecem os mesmos resultados no caso das interações vetoriais minimamente acopladas, sob a condição de interpretar corretamente os componentes do espinor de DKP [5]-[6]. No entanto, a equivalência entre DKP e o formalismo de Proca já tinha um precedente [7]. A equivalência não é mantida se considerarmos correntes parcialmente conservadas [8] nem com interações escalares [9]. Por outro lado, existe uma ambiguidade a respeito do acoplamento vetorial mínimo que tem sido objeto de algum debate. Podemos introduzir o acoplamento mínimo na equação de movimento ou na forma hamiltoniana da teoria DKP, mas essas duas formas não são equivalentes [4]. O formalismo de DKP mostra ser melhor do que o formalismo de KGF na análise dos decaimentos K_{l3}, na razão $\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)/\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$, e nos deslocamentos de níveis e larguras em átomos piônicos [10]. Além disso, o formalismo DKP goza de uma riqueza de acoplamentos incapazes de serem expressos nas teorias de KGF e Proca. Os acoplamentos são classificados dependendo de como se comportam com respeito às transformações de Lorentz. Para o setor escalar (spin-0), as interações são constituídas por dois escalares, dois vetores e dois tensores [11], emquanto que para o setor vetorial (spin-1) são constituídas por dois escalares, dois vetores, um pseudoescalar, dois pseudovetores e oito termos tensoriais [12]. Os termos tensoriais são evitados em aplicações porque fornecem efeitos não-causais [11]-[13]. Um certo número de diferentes acoplamentos no formalismo de DKP, com acoplamentos escalar e vetorial em analogia com a fenomenologia de Dirac para o espalhamento de próton-núcleo, tem sido empregado no tratamento fenomenológico de espalhamentos elásticos méson-núcleo em médias energias com uma melhor concordância com os dados experimentais quando comparado aos formalismos de KGF e Proca [14]-[19]. Por outro lado, a teoria de DKP experimentou uma nova retomada devido à descoberta de uma nova corrente vetorial conservada [5], [20]-[25], cujo componente temporal positivo-definido poderia ser um candidato a uma corrente de probabilidade, e como bônus uma esperança para evitar o paradoxo de Klein para os bósons [25]. No entanto, foi mostrado que a nova corrente proposta não pode ser associada a uma corrente de probabilidade [26]. Um esforço para consertar essa nova corrente foi feito em [27] mas em [28] foram mostradas algumas inconsistências. Na referência [28] também foi mostrado que o paradoxo de Klein pode existir na teoria de DKP com interações vetoriais minimamente acopladas. A teoria de DKP também experimentou um novo fôlego no contexto de aplicações em cromodinâmica quântica [29], dinâmica hamiltoniana covariante [30], espaço de fase relativístico [31], espaço-tempo curvo [32], abordagem causal [6], [33], tunelamento superlumial [24], modelo de Bohm [22], [25], [26], matriz S [34], invariância de Galileu em cinco dimensões [35], mecânica pseudoclássica [36], condensado de Bose-Einstein [37], campos magnéticos homogêneos [38], fase de Aharonov-Casher [39], potencial de Aharonov-Bohm [40], massa dependente do tempo e o potencial degrau vetorial [41], massa dependente do tempo e campos vetoriais dependentes do tempo [42], oscilador tensorial de DKP (acoplamento tensorial com um potencial linear) [43]-[50] e suas propriedades termodinâmicas [51], oscilador vetorial de DKP (acoplamento vetorial não-mínimo com um potencial quadrático [44] e acoplamentos vetoriais mínimo e não-mínimo com um potencial linear [46]), oscilador de sexto grau (acoplamento tensorial com um potencial linear mais um cúbico) [52], potencial degrau [25], [28], [53]-[55], potencial vetorial de Woods-Saxon [56], potencial vetorial de Hulthen deformado [57], poço quadrado vetorial [58], potenciais vetoriais coulombianos [47], [49],[58]-[60], degraus vetoriais não-mínimos [61]-[62] e acoplamentos vetoriais não-mínimo com um potencial linear [63].

Um dos objetivos desta tese é rever algums fundamentos básicos da teoria de DKP. Para esse propósito, impomos condições sobre o potencial matricial para obter uma quadricorrente conservada. Focalizando o caso de interações vetoriais (mínimas e não-mínimas), analisamos o comportamente sob as transformações de paridade, conjugação de carga e reversão temporal. A ambiguidade a respeito do acoplamento eletromagnético (vetorial mínimo) também é revisada em detalhe, e usando a conservação da quadricorrente e a interpretação correta dos componentes físicos do espinor de DKP tentamos clarificar essa discrepância. Algums conceitos errados sobre hermiticidade e valores esperados na teoria de DKP difundidos na literatura são discutidos. Ademais, nesta tese desenvolvemos uma forma alternativa de procurar soluções analíticas da equação de DKP tridimensional para o setor escalar da teoria. Considerando acoplamentos vetoriais (mínimo e não-mínimo) com simetria esférica, o problema pode ser *mapeado* num problema de Sturm-Liouville (da mecânica quântica não-relativística) para um dos componente do espinor DKP, dessa forma a procura de soluções da equação de DKP torna-se mais clara e transparente. Nesse contexto analisamos a conservação do momento angular total e as condições de contorno. Como uma aplicação do método, consideramos uma forma linear para os acoplamentos vetoriais. O problema reduz-se à procura de soluções de uma equação diferencial biconfluente de Heun [64]. As soluções exatas e o espectro são encontradas de uma forma analítica. O caso de um potencial linear não-mínimo, já difundido na literatura [65], é obtido como uma caso particular. Deve ser mencionado que grande parte do método desenvolvido valeu-se de um recente trabalho [66] que foi apresentado no XXX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos em 2009.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos uma breve revisão de algums fundamentos básicos do formalismo de DKP, a álgebra DKP é discutida na seção 2.1, a covariância de Lorentz é discutida na seção 2.2, a equação DKP conjugada e a equação de continuidade são discutidas nas seções 2.3 e 2.4, respectivamente. A condição de normalização e os valores esperados são discutidos nas seção 2.5. Os projetores de Umezawa e interações na equação de DKP são discutidos nas seções 2.6 e 2.7, respectivamente. O acoplamento eletromagnético e a forma hamiltoniana da equação de DKP são discutidos na seção 2.8. No capítulo 3, desenvolvemos um método para procurar soluções analíticas da equação de DKP tridimensional com acoplamentos vetoriais que apresentam simetria esférica. Na seção 3.2 aplicamos o método desenvolvido e consideramos uma forma linear para os acoplamentos vetoriais. As soluções exatas são apresentadas de uma forma fechada e o espectro apresenta, além da degenerescência essencial onipresente para qualquer campo de força central, uma degenerescência acidental. Finalmente, no capítulo 4 apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

Formalismo de Duffin–Kemmer–Petiau (DKP)

Tentando resolver o problema dos estados de energia negativa da equação de Klein-Gordon-Fock (KGF) [67], Dirac [68] propôs uma equação relativística de primeira ordem, quer dizer, derivada de primeira ordem no tempo, assim como a própria equação de Schrödinger. Entretanto, as equações relativísticas devem tratar as coordenadas espaciais e temporal de uma maneira simétrica, dessa forma as derivadas com respeito às coordenadas espaciais também deveriam ser de primeira ordem. A partir dessas considerações Dirac considerou a seguinte forma

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi(x) = 0 \tag{2.1}$$

invariante pelas transformações de Lorentz, onde o campo $\psi(x)$ tem quatro componentes e cada componente de ψ deve satisfazer a equação de KGF. Os fatores γ^{μ} são matrizes que obedecem à álgebra

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{2.2}$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski. A equação (2.1) passou a ser conhecida como a equação de Dirac. Com o sucesso da equação de Dirac para a descrição de partículas relativísticas de massa m e spin $1/2$, aparece o interesse em direcionar esforços na busca de equações relativísticas de primeira ordem que descrevam partículas de spin-0 e spin-1, que possam ser usadas como uma forma alternativa às equações de segunda ordem de KGF e Proca, respectivamente. Essas investigações tiveram início com de Broglie [69] e prosseguiram com Petiau [1] e, independentemente, com Kemmer [2] e Duffin [3]. A forma final foi apresentada por Kemmer em 1939 [4] e passou a ser conhecida como a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). A equação de DKP pode ser vista como uma direta generalização da equação de Dirac em que as matrizes γ são substituídas por matrizes que satisfazem uma álgebra mais complicada, conhecida como álgebra de DKP.

A equação de DKP é expressa por

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi(x) = 0 \tag{2.3}$$

onde

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\lambda} + \beta^{\lambda}\beta^{\nu}\beta^{\mu} = \beta^{\mu}\eta^{\nu\lambda} + \beta^{\lambda}\eta^{\mu\nu} \tag{2.4}$$

A álgebra DKP das matrizes β^{μ} têm três representações irredutíveis: a representação unidimensional é trivial, a representação de 5 dimensões está associada com partículas de spin 0 (setor escalar) e a representação de 10 dimensões com partículas de spin 1 (setor vetorial). O estado dinâmico ψ para uma partícula de spin 0 tem um espinor de 5 componentes e para partículas de spin 1 tem um espinor de 10 componentes. De fato, as equações de Dirac e DKP são casos particulares da equação conhecida como equação de Bhabha [70]. As quatro matrizes quadradas que definem o spin são dadas pelas representações da álgebra $so(5)$ e fornece uma equação de onda para cada spin. A representação 4-dimensional $R_5(1/2, 1/2)$, por exemplo, fornece a equação de Dirac, enquanto as representações 5-dimensional $R_5(1, 0)$ e 10-dimensional $R_5(1, 1)$ fornecem a equação de DKP para spin-0 e spin-1, respectivamente [71]-[72].

2.1 Álgebra DKP

A principal diferença entre as teorias de DKP e Dirac é a álgebra satisfeita pelas matrizes que aparecem na equação de movimento. As matrizes β^{μ} satisfazem a relação (2.4). A partir dessa relação podemos obter uma série de propriedades úteis.

Fazendo $\mu = \nu = \lambda$ em (2.4), obtemos

$$(\beta^{\mu})^3 = \beta^{\mu}\eta^{\mu\mu}. \tag{2.5}$$

Por outro lado, um conjunto de matrizes que complementam às matrizes β^{μ} pode ser definido por

$$\eta^{\mu} \equiv 2(\beta^{\mu})^2 - \eta^{\mu\mu} \tag{2.6}$$

que satisfaz

$$(\eta^{\mu})^2 = (\eta^{\mu\mu})^2 = 1\,. \tag{2.7}$$

A comutatividade entre as matrizes η^{μ} e as β^{μ} pode ser estabelecida a partir de (2.6). Multiplicando (2.6) por β^{ν} à direita

$$\eta^{\mu}\beta^{\nu} = 2(\beta^{\mu})^2\beta^{\nu} - \eta^{\mu\mu}\beta^{\nu}, \tag{2.8}$$

o primeiro termo no segundo membro de (2.8) pode ser obtido a partir de (2.4). Fazendo $\mu = \nu$ em (2.4) obtemos

$$(\beta^\mu)^2\beta^\nu + \beta^\nu(\beta^\mu)^2 = \beta^\mu\eta^{\mu\nu} + \beta^\nu\eta^{\mu\mu} \tag{2.9}$$

A partir de (2.9) podemos obter outra relação útil. Fazendo $\mu \neq \nu$ em (2.9) podemos obter

$$(\beta^\mu)^2(\beta^\nu)^2 = (\beta^\nu)^2(\beta^\mu)^2, \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu \tag{2.10}$$

Assim, substituindo (2.9) em (2.8) obtemos

$$\{\eta^\mu, \beta^\nu\} = 2\beta^\mu\eta^{\mu\nu}\,. \tag{2.11}$$

De tal forma que

$$\begin{array}{c} \{\eta^\mu, \beta^\nu\} = 0, \qquad \mu \neq \nu \\ \\ \{\eta^\mu, \beta^\nu\} = 2\eta^{\mu\mu}\beta^\mu, \quad \mu = \nu \end{array} \tag{2.12}$$

Por outro lado, multiplicando (2.6) por β^μ à direita

$$\begin{aligned} \eta^\mu\beta^\mu &= 2\left(\beta^\mu\right)^2\beta^\mu - \eta^{\mu\mu}\beta^\mu \\ &= 2\left(\beta^\mu\right)^3 - \eta^{\mu\mu}\beta^\mu \\ &= \beta^\mu\eta^{\mu\mu} \end{aligned} \tag{2.13}$$

e analogamente, multiplicando (2.6) por β^μ à esquerda

$$\beta^\mu\eta^\mu = \beta^\mu\eta^{\mu\mu} \tag{2.14}$$

logo,

$$\eta^\mu\beta^\mu = \beta^\mu\eta^\mu \tag{2.15}$$

ou seja,

$$[\eta^\mu, \beta^\mu] = 0\,. \tag{2.16}$$

A relação de comutação entre os η^μ pode ser obtida diretamente, multiplicando (2.6) por η^ν à direita

$$\begin{aligned} \eta^\mu\eta^\nu &= \eta^\mu\left[2\left(\beta^\nu\right)^2 - \eta^{\nu\nu}\right] \\ &= 2\eta^\mu\left(\beta^\nu\right)^2 - \eta^{\nu\nu}\eta^\mu \\ &= 2\left(\eta^\mu\beta^\nu\right)\beta^\nu - \eta^{\nu\nu}\eta^\mu \end{aligned} \tag{2.17}$$

usando (2.8) em (2.17), obtemos

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(2\beta^{\mu}g^{\mu\nu} - \beta^{\nu}\eta^{\mu}\right)\beta^{\nu} - \eta^{\nu\nu}\eta^{\mu} \\
&= 4\beta^{\mu}\beta^{\nu}\eta^{\mu\nu} - 2\beta^{\nu}\left(\eta^{\mu}\beta^{\nu}\right) - \eta^{\nu\nu}\eta^{\mu} \\
&= 4\beta^{\mu}\beta^{\nu}\eta^{\mu\nu} - 2\beta^{\nu}\left(2\beta^{\mu}\eta^{\mu\nu} - \beta^{\nu}\eta^{\mu}\right) - \eta^{\nu\nu}\eta^{\mu} \\
&= 4\beta^{\mu}\beta^{\nu}\eta^{\mu\nu} - 4\beta^{\nu}\beta^{\mu}\eta^{\mu\nu} + 2\beta^{\nu}\beta^{\nu}\eta^{\mu} - \eta^{\nu\nu}\eta^{\mu} \\
&= 4\eta^{\mu\nu}\left(\beta^{\mu}\beta^{\nu} - \beta^{\nu}\beta^{\mu}\right) + \left(2\beta^{\nu}\beta^{\nu} - \eta^{\nu\nu}\right)\eta^{\mu} \\
&= 4\eta^{\mu\nu}\left[\beta^{\mu}, \beta^{\nu}\right] + \eta^{\nu}\eta^{\mu} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

de forma que

$$\left[\eta^{\mu}, \eta^{\nu}\right] = 4\eta^{\mu\nu}\left[\beta^{\mu}, \beta^{\nu}\right] \qquad (2.19)$$

para o caso em que $\mu \neq \nu$ temos

$$\left[\eta^{\mu}, \eta^{\nu}\right] = 0\,. \qquad (2.20)$$

Outra relação útil entre as matrizes β^{μ} é quando $\lambda = \mu$. Fazendo $\lambda = \mu$ em (2.4), temos

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\mu} = \beta^{\mu}\eta^{\nu\mu}\,. \qquad (2.21)$$

Se escolhemos uma representação para as matrizes β tal que

$$\left(\beta^{\mu}\right)^{\dagger} = \eta^{\mu\mu}\beta^{\mu} \qquad (2.22)$$

as matrizes η^{μ} tornam-se hermitianas, ou seja, $(\eta^{\mu})^{\dagger} = \eta^{\mu}$.

É possível determinar uma matriz D que atue sobre as matrizes β^{μ} e forneça seu conjugado hermitiano

$$D\beta^{\mu}D = \left(\beta^{\mu}\right)^{\dagger} \qquad (2.23)$$

onde $D^2 = 1$. Desta forma

$$
\begin{aligned}
D\beta^{\mu}D &= \left(\beta^{\mu}\right)^{\dagger} \\
&= \eta^{\mu\mu}\beta^{\mu} \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

multiplicando (2.24) por D à direita temos

$$D\beta^{\mu} = \eta^{\mu\mu}\beta^{\mu}D \qquad (2.25)$$

multiplicando (2.24) por D à esquerda temos

$$\beta^{\mu}D = \eta^{\mu\mu}D\beta^{\mu} \qquad (2.26)$$

de forma que

$$[\beta^\mu, D] = \eta^{\mu\mu} [D, \beta^\mu] \tag{2.27}$$

ou seja,

$$(\eta^{\mu\mu} + 1) [D, \beta^\mu] = 0 \tag{2.28}$$

De (2.28) vemos que se $\mu = 0$, então $[D, \beta^0] = 0$, e se $\mu = i$, obtemos que $[D, \beta^i]$ é arbitrario. Precisamos obter uma condição válida para todo μ, nesse sentido a única possibilidade válida para todo μ é considerar que $[D, \beta^\mu] = 0$. Mas, de (2.16) temos que

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\mu &= \beta^\mu \eta^\mu \\ \eta^\mu D (D\beta^\mu) &= (\beta^\mu D) D\eta^\mu \end{aligned} \tag{2.29}$$

uma vez que $D^2 = 1$. Como $D\beta^\mu = \beta^\mu D$, temos

$$\beta^\mu D (D\eta^\mu - \eta^\mu D) = 0 \tag{2.30}$$

e concluímos que

$$[D, \eta^\mu] = 0 \tag{2.31}$$

Como, de (2.20), $[\eta^\mu, \eta^\nu] = 0$, em princípio D pode ser escolhida como $D = \eta^\mu$, onde se verifica que $D^2 = (\eta^\mu)^2 = 1$. Com (2.22) e (2.23) temos que $(\beta^\mu)^\dagger = D\beta^\mu D = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu$. Pode-se enxergar que esta última expressão é satisfeita se e somente se

$$D = \eta^0 \tag{2.32}$$

Desta forma

$$(\beta^\mu)^\dagger = \eta^0 \beta^\mu \eta^0 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu \tag{2.33}$$

Portanto, a matriz responsável pela conjugação hermitiana das matrizes β^μ é a matriz η^0, ou seja, as matrizes β^μ são hermitianas com respeito a η^0.

2.1.1 As representações irredutíveis da teoria DKP

O conjunto das matrizes β^μ mais o operador unidade geram um anel consistente com a álgebra de spin inteiro [71]. A álgebra expressada por (2.4) gera um conjunto de 126 matrizes independentes. Esta álgebra deve possuir então três representações irredutíveis (pelo teorema de Frobenius-Schur)(ver Kemmer [4])

$$126 = 1^2 + 5^2 + 10^2. \tag{2.34}$$

Temos então uma representação de primeira ordem (trivial) sem significado físico, uma representação de quinta ordem que descreve partículas de spin 0 (também chamado de setor escalar da teoria de DKP) e uma representação de décima ordem representando partículas de spin 1 (ou setor vetorial).

O espinor de DKP apresenta um excesso de componentes e a teoria deve ser suplementada por uma equação que permita a eliminação dos componentes redundantes. Esta equação é obtida multiplicando a equação de DKP (2.3) por $1-\beta^0\beta^0$

$$\begin{gathered}\left(1-\beta^0\beta^0\right)\left(i\beta^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0\\ \left(1-\beta^0\beta^0\right)\left(i\beta^0\partial_0 + i\beta^i\partial_i - m\right)\psi = 0\\ i\beta^0\partial_0\psi + i\beta^i\partial_i\psi - m\psi - i\left(\beta^0\right)^3\partial_0\psi - i\left(\beta^0\right)^2\beta^i\partial_i\psi + m\left(\beta^0\right)^2\psi = 0\end{gathered} \tag{2.35}$$

de (2.5) temos, para o caso em que $\mu = 0$

$$\left(\beta^0\right)^3 = \beta^0 \tag{2.36}$$

analogamente, de (2.9) temos, para $\mu = 0$ e $\nu = i$

$$\left(\beta^0\right)^2\beta^i = \beta^i - \beta^i\left(\beta^0\right)^2 \tag{2.37}$$

e reescrevemos (2.35) como

$$\begin{gathered}i\beta^0\partial_0\psi + i\beta^i\partial_i\psi - m\psi - i\beta^0\partial_0\psi - i\left[\beta^i - \beta^i\left(\beta^0\right)^2\right]\partial_i\psi + m\left(\beta^0\right)^2\psi = 0\\ i\beta^i\left(\beta^0\right)^2\partial_i\psi + m\left(\beta^0\right)^2\psi - m\psi = 0\end{gathered} \tag{2.38}$$

ou seja,

$$i\beta^i\beta^0\beta^0\partial_i\psi = m\left(1-\beta^0\beta^0\right)\psi \tag{2.39}$$

Como veremos a seguir, a equação (2.39) expressa três (quatro) componentes do espinor pelos outros dois (seis) componentes e suas derivadas espaciais no setor escalar (vetorial) de forma que os componentes supérfluos desaparecem e restam somente os componentes físicos da teoria de DKP. As equações de KGF e Proca são obtidas selecionando os setores de spin 0 e spin 1, respectivamente, da teoria de DKP para um bóson livre.

2.1.2 Uma representação explícita das matrizes β

Para o setor escalar da teoria DKP (spin-0) usaremos a representação dada por [59],[73]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix}\theta & \overline{\mathbf{0}}\\ \overline{\mathbf{0}}^T & \mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad \beta^i = \begin{pmatrix}\widetilde{0} & \rho_i\\ -\rho_i^T & \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad i = 1,2,3 \tag{2.40a}$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.41}$$

em que $\overline{\mathbf{0}}$, $\widetilde{0}$ e $\mathbf{0}$ são matrizes nulas de 2×3, 2×2 e 3×3, respectivamente, enquanto o sobrescrito T designa a matriz transposta. Nessa representação temos que

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{I}} & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}}^T & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

em que $\overline{\mathbf{I}}$ e $\mathbf{I}$ são matrizes identidade de 2×2 e 3×3, respectivamente.

Para o setor vetorial da teoria DKP (spin-1) usaremos a representação dada por [58]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & e_i & \overline{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overline{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

onde s_i são matrizes 3×3 em que $(s_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$, e_i são matrizes 1×3 em que $(e_i)_{1j} = \delta_{ij}$ e $\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, enquanto $\mathbf{0}$ designa a uma matriz nula de 3×3. Nessa representação temos que

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} -1 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

2.2 Covariância de Lorentz na teoria DKP

Vamos estudar a covariância da equação de DKP sob transformações de Lorentz. A covariância expressa que sob as transformações

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu, \qquad \bar{\partial}_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \, \partial_\nu \tag{2.45}$$

$$\tilde{\psi}(\bar{x}) = U(\Lambda)\psi(\bar{x}), \qquad \bar{m} = m \tag{2.46}$$

a equação de DKP permanece invariante, ou seja

$$\left(i\bar{\beta}^\mu \bar{\partial}_\mu - \bar{m}\right) \tilde{\psi}(\bar{x}) = 0 \tag{2.47}$$

além disso as matrizes $\bar{\beta}$ devem satisfazer as relações da álgebra DKP, i.e

$$\bar{\beta}^{\mu}\bar{\beta}^{\nu}\bar{\beta}^{\lambda} + \bar{\beta}^{\lambda}\bar{\beta}^{\nu}\bar{\beta}^{\mu} = \bar{\beta}^{\mu}\eta^{\nu\lambda} + \bar{\beta}^{\lambda}\eta^{\mu\nu} \tag{2.48}$$

Para lograr isso devemos encontrar a forma explícita das transformações $U(\Lambda)$ e $\bar{\beta}^{\mu}$. Substituindo as transformações (2.45) e (2.46) em (2.47), obtemos

$$i\bar{\beta}^{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}U(\Lambda)\partial_{\nu}\psi(x) - mU(\Lambda)\psi(x) = 0 \tag{2.49}$$

logo, multiplicando (2.49) por U^{-1} à esquerda temos

$$i\left(U^{-1}\bar{\beta}^{\mu}U\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\right)\partial_{\nu}\psi(x) - m\psi(x) = 0 \tag{2.50}$$

que comparando com a forma da equação de DKP, vemos que as matrizes β devem-se transformar como

$$U^{-1}(\Lambda)\bar{\beta}^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\beta^{\nu}\,. \tag{2.51}$$

Agora construamos o operador $U(\Lambda)$ para as transformações de Lorentz próprias infinitesimais, dadas por

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} + O(\Delta\omega^2), \qquad \Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu} \tag{2.52}$$

para isso expandimos $U(\Lambda)$ em potencias de $\Delta\omega^{\mu\nu}$

$$U(\Lambda) = 1 + i\alpha\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2)\,. \tag{2.53}$$

Substituindo isso em (2.51) obtemos

$$\bar{\beta}^{\mu} + i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta}\bar{\beta}^{\mu}S^{\alpha\beta} = \beta^{\mu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\beta^{\nu} + i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\beta^{\mu} + O(\Delta\omega^2)\,. \tag{2.54}$$

Igualando os coeficientes dos polinômios (em $\Delta\omega$) de ambos termos de (2.54), obtemos que

$$\bar{\beta}^{\mu} = \beta^{\mu}, \qquad i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta}\left[\beta^{\mu}, S^{\alpha\beta}\right] = \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\beta^{\nu}\,. \tag{2.55}$$

A primeira destas relações estabelece juntamente com a transformação (2.51) que as matrizes β^{μ} devem ser independentes das coordenadas escolhidas no espaço de Minkowski. A segunda equação pode ser usada para determinar a forma explícita do gerador infinitesimal $S^{\mu\nu}$ e o valor do coeficiente α, e eles são dados por

$$S^{\mu\nu} = [\beta^{\mu}, \beta^{\nu}] \quad \text{e} \quad \alpha = -\frac{i}{2}\,, \tag{2.56}$$

respectivamente.

A partir das transformações de Lorentz próprias infinitesimais podemos gerar uma transformação própria finita, isto pode ser obtido pela aplicação sucessiva das transformações infinitesimais. A transformação de Lorentz própria finita fica completamente determinada por

$$U(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\,\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\,. \tag{2.57}$$

É importante destacar que isso nos dá a lei de transformação do campo DKP e das matrizes β^{μ} sob a ação de transformações contínuas.

2.3 A equação DKP conjugada

Pode-se definir um campo $\bar{\psi}$ correspondente ao conjugado de ψ, no sentido de respeitar uma equação de movimento análoga a (2.3), isso será útil para construir a equação de continuidade na teoria DKP. Aplicando o conjugado hermitiano sobre a equação de DKP (2.3) temos

$$\begin{aligned}
\left[\left(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi\right]^{\dagger} &= 0\\
-i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\beta^{\mu\dagger} - m\psi^{\dagger} &= 0\\
i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu}\eta^{0} + m\psi^{\dagger} &= 0
\end{aligned} \tag{2.58}$$

multiplicando (2.58) por η^0 à direita

$$\begin{aligned}
i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu}\eta^{0}\eta^{0} + m\psi^{\dagger}\eta^{0} &= 0\\
i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu} + m\psi^{\dagger}\eta^{0} &= 0
\end{aligned} \tag{2.59}$$

definindo o espinor adjunto $\bar{\psi}$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\eta^{0} \tag{2.60}$$

obtemos a equação de DKP conjugada

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu} + m\bar{\psi} = 0\,. \tag{2.61}$$

Podemos agora olhar para a lei de transformação de $\bar{\psi}$ sob uma transformação de Lorentz

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger}\eta^{0} = \psi^{\dagger}U^{\dagger}\eta^{0} = \bar{\psi}\eta^{0}U^{\dagger}\eta^{0}\,, \tag{2.62}$$

mas $\eta^0 U^\dagger \eta^0 = U^{-1}$, portanto

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1} \tag{2.63}$$

que é a lei de transformação esperada para um objeto conjugado, já que o produto matricial $\bar{\psi}\psi$ gera uma quantidade escalar (invariante sob transformações de Lorentz).

2.4 A equação de continuidade na teoria DKP

A equação da continuidade na teoria de DKP é obtida através do processo padrão. Multiplicando a equação de DKP (2.3) por $\bar{\psi}$ à esquerda

$$i\bar{\psi}\beta^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi = 0 \tag{2.64}$$

e multiplicando a equação de DKP conjugada (2.61) por ψ à direita

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 \tag{2.65}$$

somando (2.64) e (2.65)

$$\bar{\psi}\beta^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi = 0 \tag{2.66}$$

ou seja,

$$\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi = 0 \tag{2.67}$$

desta forma é possível definir a densidade de quadricorrente

$$J^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi \tag{2.68}$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ (sem implicações na lei de conservação) é necessário para que se obtenha uma densidade de quadricorrente em conformidade com aquela usada na teoria de KGF e seu limite não-relativístico (ver e.g. [75]).
De (2.68) obtemos que

$$\begin{aligned} J^{0} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^{0}\psi \equiv \rho \\ J^{i} &\equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^{i}\psi \end{aligned} \tag{2.69}$$

e a equação (2.67) se torna

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0 \tag{2.70}$$

que possui a forma da equação da continuidade. No entanto, o componente temporal de J^{μ} (ou seja, J^{0}) não é positivo-definido, o que impede que J^{0} seja interpretado como uma densidade de probabilidade. Todavia J^{0} pode ser interpretado como uma densidade de carga.

2.5 Condição de normalização e os valores esperados

A condição de normalização $\int d\tau J^0 = \pm 1$ é expressa na teoria de DKP como

$$\int d\tau \bar{\psi}\beta^0\psi = \pm 2 \tag{2.71}$$

em que o sinal positivo (negativo) deve ser usado para uma carga positiva (negativa). O valor esperado de qualquer observável $\mathcal{O}$ é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int d\tau\, \psi^\dagger \eta^0 \left(\beta^0 \mathcal{O}\right) \psi}{\int d\tau\, \psi^\dagger \eta^0 \beta^0 \psi} \tag{2.72}$$

onde $\beta^0\mathcal{O}$ deve ser hermitiano com respeito a η^0, ou seja, $\left[\eta^0 \left(\beta^0\mathcal{O}\right)\right]^\dagger = \eta^0 \left(\beta^0\mathcal{O}\right)$, para assegurar que $\langle \mathcal{O} \rangle$ seja uma quantidade real.

2.6 Os projetores de Umezawa

Do estudo das representações irredutíveis da teoria de DKP na subseção 2.1.1, foi observado que o espinor de DKP apresenta um excesso de componentes e que o uso da equação (2.39) exclui tais componentes supérfluas do espinor, restando apenas seus componentes físicos. De forma a facilitar a identificação dos componentes físicos do espinor DKP, Umezawa [76] formulou um conjunto de "projetores" que selecionam componentes do espinor ψ que se transformam sob Lorentz de acordo com as leis de transformações usuais de escalar, vetores e tensores de ordem 2. Portanto o uso desses projetores ajudam na identificação do setor físico da teoria DKP.

2.6.1 Setor escalar

Define-se os operadores [11]

$$P \equiv \frac{1}{3}\left(\beta^\mu \beta_\mu - 1\right), \quad P^\mu \equiv P\beta^\mu \tag{2.73}$$

que satisfazem as seguintes relações algébricas

$$P^2 = P \tag{2.74}$$

$$P^\mu \beta^\nu = P\beta^\mu \beta^\nu = P\eta^{\mu\nu} \tag{2.75}$$

$$PS^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}P = 0 \tag{2.76}$$

$$P^\mu S^{\nu\lambda} = \eta^{\mu\nu}P^\lambda - \eta^{\mu\lambda}P^\nu \tag{2.77}$$

Dadas as transformações de Lorentz, $(\beta^\mu)' = \beta^\mu$, $P' = P$, $(P^\mu)' = (P\beta^\mu)' = P^\mu$ e usando a propriedade (2.76) pode-se mostrar que

$$(P\psi)' = P'\psi' = PU\psi = P\left(1 + \frac{1}{2}\,\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2)\right)\psi = P\psi \tag{2.78}$$

Pode-se ver que $P\psi$ transforma-se como um campo escalar (invariante sob transformações de Lorentz).

Analogamente, para o projetor P^μ, temos que

$$(P^\mu\psi)' = P^\mu U\psi = P^\mu\left(1 + \frac{1}{2}\,\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2)\right)\psi \tag{2.79}$$

usando a propriedade (2.77) obtemos que

$$(P^\mu\psi)' = \left(\delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\lambda + O(\Delta\omega^2)\right)P^\lambda\psi = \Lambda^\mu{}_\lambda\,P^\lambda\psi \tag{2.80}$$

concluímos assim, que $P^\mu\psi$ transforma-se como um vetor de Lorentz. Portanto, esses operadores que foram definidos de forma independente da representação, são chamados de projetores do setor escalar da teoria DKP. Esses operadores selecionam as componentes do espinor ψ que se transformam como um campo escalar e como o seu vetor gradiente associado.

Por outro lado, aplicando o operador P à equação de DKP (2.3) temos

$$iP\beta^\mu\partial_\mu\psi - mP\psi = 0 \tag{2.81}$$

como $P\beta^\mu = P^\mu$ podemos reescrever (2.81) como

$$i\partial_\mu P^\mu\psi = mP\psi\,. \tag{2.82}$$

Aplicando P^ν à equação de DKP (2.3)

$$iP^\nu\beta^\mu\partial_\mu\psi - mP^\nu\psi = 0 \tag{2.83}$$

usando $P^\nu\beta^\mu = P\eta^{\mu\nu}$, (2.83) torna-se

$$P^\nu\psi = \frac{i}{m}\partial^\nu P\psi \tag{2.84}$$

substituindo (2.84) em (2.82)

$$i\partial_\mu\left(\frac{i}{m}\partial^\mu P\psi\right) - mP\psi = 0 \tag{2.85}$$

logo

$$\partial_\mu \partial^\mu (P\psi) + m^2 (P\psi) = 0 \tag{2.86}$$

que é a equação de KGF para um bóson livre. Portanto, quando o operador projeção P é aplicado à equação de DKP, imediatamente o setor de spin 0 da teoria é selecionado, fornecendo apenas o componente físico do espinor que obedece à equação de KGF livre.

Na representação explícita das matrizes β^μ dadas por (2.40a), P é escrito no setor escalar como

$$P = \mathrm{diag}\,(1, 0, 0, 0, 0) \tag{2.87}$$

assim, ao aplicarmos P ao espinor DKP dado por $\psi^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)$ obtemos

$$P\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.88}$$

donde é possível inferir que o componente físico do espinor ψ para o setor escalar é dado por ψ_1, de forma que os quatro componentes restantes do espinor (ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5) podem ser escritos em termos de ψ_1 usando (2.84).

2.6.2 Setor vetorial

Analogamente ao caso escalar, podemos definir projetores [76]

$$R^\mu = \left(\beta^1\right)^2 \left(\beta^2\right)^2 \left(\beta^3\right)^2 \left(\beta^\mu \beta^0 - \eta^{\mu 0}\right), \quad R^{\mu\nu} = R^\mu \beta^\nu \tag{2.89}$$

das definições temos as seguintes propriedades

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu} \tag{2.90}$$

$$R^{\mu\nu}\beta^\alpha = R^\mu \eta^{\nu\alpha} - R^\nu \eta^{\mu\alpha} \tag{2.91}$$

$$R^\mu S^{\nu\lambda} = \eta^{\mu\nu} R^\lambda - \eta^{\mu\lambda} R^\nu \tag{2.92}$$

$$R^{\mu\nu} S^{\alpha\beta} = \eta^{\nu\alpha} R^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} - \eta^{\nu\beta} R^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\beta} R^{\nu\alpha} \tag{2.93}$$

As propriedades anteriores nos permitem mostrar que sob uma transformação de Lorentz temos que

$$(R^\mu \psi)' = \Lambda^\mu{}_\lambda R^\lambda \psi \tag{2.94}$$

se transforma como um vetor de Lorentz, e que

$$(R^{\mu\nu}\psi)' = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\,\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\,R^{\alpha\beta}\psi \tag{2.95}$$

se transforma como um tensor de segundo ordem.

Novamente, por meio da aplicação dos projetores do setor vetorial à equação DKP (2.3) obtemos

$$\partial_{\nu}R^{\mu\nu}\psi = -imR^{\mu}\psi \tag{2.96}$$

e aplicando $R^{\mu\nu}$ à equação de DKP (2.3) e usando (2.91) temos

$$R^{\mu\nu}\psi = \frac{i}{m}\,U^{\nu\mu} \tag{2.97}$$

onde

$$U^{\mu\nu} = \partial^{\mu}R^{\nu}\psi - \partial^{\nu}R^{\mu}\psi \tag{2.98}$$

Substituindo (2.97) em (2.96)

$$\begin{aligned} \partial_{\nu}\left(\frac{i}{m}\,U^{\nu\mu}\right) &= -imR^{\mu}\psi \\ \partial_{\nu}U^{\nu\mu} &= -m^{2}R^{\mu}\psi \end{aligned} \tag{2.99}$$

temos, portanto

$$\left\{ \begin{array}{c} U^{\mu\nu} = \partial^{\mu}R^{\nu}\psi - \partial^{\nu}R^{\mu}\psi \\ \partial_{\nu}U^{\nu\mu} = -m^{2}R^{\mu}\psi \end{array} \right. \tag{2.100}$$

que são as equações de Proca para um bóson livre. Combinando as equações de Proca temos que

$$\begin{gathered} \partial_{\nu}\left(\partial^{\nu}R^{\mu}\psi - \partial^{\mu}R^{\nu}\psi\right) = -m^{2}R^{\mu}\psi \\ \partial_{\nu}\partial^{\nu}R^{\mu}\psi - \partial_{\nu}\partial^{\mu}R^{\nu}\psi + m^{2}R^{\mu}\psi = 0 \end{gathered} \tag{2.101}$$

aplicando ∂_{μ} à (2.101) obtemos

$$\begin{gathered} \partial_{\mu}\partial_{\nu}\partial^{\nu}R^{\mu}\psi - \partial_{\mu}\partial^{\mu}\partial_{\nu}R^{\nu}\psi + m^{2}\partial_{\mu}R^{\mu}\psi = 0 \\ \partial_{\nu}\partial^{\nu}\partial_{\mu}R^{\mu}\psi - \partial_{\mu}\partial^{\mu}\partial_{\nu}R^{\nu}\psi + m^{2}\partial_{\mu}R^{\mu}\psi = 0 \\ m^{2}\partial_{\mu}R^{\mu}\psi = 0 \end{gathered} \tag{2.102}$$

portanto

$$\partial_{\mu}R^{\mu}\psi = 0 \tag{2.103}$$

aplicando (2.103) em (2.101)

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) R^\mu \psi = 0\,. \tag{2.104}$$

Portanto, a equação (2.104) satisfaz a equação de KGF para $R^\mu\psi$ com um vínculo dado por (2.103).

Aplicando R^μ ao espinor ψ, na representação das matrizes β^μ dadas por (2.43), temos

$$R^0\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^1\psi = \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^2\psi = \begin{pmatrix} -\psi_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^3\psi = \begin{pmatrix} -\psi_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.105}$$

Logo, os componentes do espinor ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 são os componentes físicos do espinor do setor de spin 1 da teoria de DKP. Desta forma, os quatro primeiros componentes do espinor obedecem à equação de KGF livre, ao passo que os outros seis componentes do espinor (ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8, ψ_9 e ψ_{10}) são escritos em termos dos quatro primeiros componentes do espinor usando (2.97).

É útil definir o operador projeção P para o setor vetorial. Neste caso usando a representação das matrizes β dadas por (2.43) P é escrito como

$$P = (\beta^\mu \beta_\mu - 2) = \mathrm{diag}\,(1,1,1,1,0,0,0,0,0,0) \tag{2.106}$$

quer dizer que P aplicado ao espinor DKP ψ seleciona as quatro componentes superiores.

2.7 Interações na teoria DKP

A equação de DKP com interações pode ser escrita como

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m - V)\psi = 0 \tag{2.107}$$

onde o potencial matricial geral V é escrito em termos de 25 (100) matrizes linearmente independentes que pertencem à representação irredutível de quinta (décima) ordem associada ao setor escalar (vetorial) da teoria DKP. Na presença de interações a equação de DKP conjugada se torna

$$
\begin{gathered}
\left(i\beta^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi - V\psi\right)^{\dagger} = 0 \\
-i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\beta^{\mu\dagger} - m\psi^{\dagger} - \psi^{\dagger}V^{\dagger} = 0 \\
i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu}\eta^{0} + m\psi^{\dagger} + \psi^{\dagger}V^{\dagger} = 0 \\
i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu}\eta^{0}\eta^{0} + m\psi^{\dagger}\eta^{0} + \psi^{\dagger}\eta^{0}\eta^{0}V^{\dagger}\eta^{0} = 0 \\
i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu} + m\psi^{\dagger}\eta^{0} + \psi^{\dagger}\eta^{0}\eta^{0}V^{\dagger}\eta^{0} = 0
\end{gathered} \tag{2.108}
$$

como $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\eta^{0}$ temos que

$$
i\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu} + m\bar{\psi} + \bar{\psi}\eta^{0}V^{\dagger}\eta^{0} = 0 \tag{2.109}
$$

A equação da continuidade na teoria de DKP com interações gerais é obtida de maneira análoga ao caso livre, multiplicando (2.107) por $\bar{\psi}$ à esquerda, (2.109) por ψ à direita e somando ambas as equações resultantes, obtendo

$$
i\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi + \bar{\psi}\left(\eta^{0}V^{\dagger}\eta^{0} - V\right)\psi = 0 \tag{2.110}
$$

mas $J^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi$; logo

$$
2i\partial_{\mu}J^{\mu} + \bar{\psi}\left(\eta^{0}V^{\dagger}\eta^{0} - V\right)\psi = 0 \tag{2.111}
$$

que pode ser reescrita como

$$
\partial_{\mu}J^{\mu} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\left(V - \eta^{0}V^{\dagger}\eta^{0}\right)\psi = 0 \tag{2.112}
$$

e a quadricorrente será conservada apenas quando V for hermitiano com respeito a η^{0}. O potencial matricial geral V pode ser escrito em termos de estruturas de Lorentz bem definidas, estas estruturas são classificadas dependendo de como se comportam com respeito às transformações de Lorentz. Para o setor escalar, as interações são constituídas por dois escalares, dois vetores e dois tensores [11], emquanto que para o setor vetorial são constituídas por dois escalares, dois vetores, um pseudoescalar, dois pseudovetores e oito termos tensoriais [12]. Os termos tensoriais são evitados em aplicações porque fornecem efeitos não-causais [11]-[13].

No presente estudo serão tratadas as interações vetoriais para o setor de spin 0 (setor escalar) da teoria de DKP, de forma que o potencial matricial V de (2.107) é escrito como

$$
V = \beta^{\mu}A_{\mu}^{(1)} + i[P, \beta^{\mu}]A_{\mu}^{(2)} \tag{2.113}
$$

onde P é o operador projeção definido por (2.87) no setor escalar e definido por (2.106) no setor vetorial, de tal forma que $\bar{\psi}P\psi$ comporta-se como um escalar e $\bar{\psi}\left[P,\beta^{\mu}\right]\psi$ comporta-se como um vetor. $A_{\mu}^{(1)}$ e $A_{\mu}^{(2)}$ são as funções do potencial quadrivetor. É interesante notar que $A_{\mu}^{(1)}$ é acoplado minimamente, mas não $A_{\mu}^{(2)}$. Por tal motivo convencionaremos chamar de acoplamento vetorial mínimo e vetorial não-mínimo. Substituindo (2.113) em (2.107) obtemos

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m - \beta^{\mu}A_{\mu}^{(1)} - i[P,\beta^{\mu}]A_{\mu}^{(2)})\psi = 0 \tag{2.114}$$

Um ponto muito importante a notar é que o potencial matricial (2.113) leva a uma quadricorrente conservada, mas o mesmo não acontece se em lugar de $i[P,\beta^{\mu}]$ for utilizado $P\beta^{\mu}$ ou $\beta^{\mu}P$ como em [14]-[15], [17], [19].

A partir do estudo da simetria PCT na teoria de DKP (ver Apêndice A), observamos que $A_{\mu}^{(2)}$ é invariante sob conjugação de carga, o que significa que ele não acopla com a carga do bóson. Em outras palavras, $A_{\mu}^{(2)}$ não distingue partículas de antipartículas e assim o espectro destas interações é simétrico com relação a $E = 0$. Portanto, estas interações não mínimas não podem exibir o paradoxo de Klein. O célebre paradoxo de Klein é um fenômeno em que o coeficiente de reflexão excede a unidade e é interpretado como sendo devido à criação de pares pelo potencial. Este paradoxo surge para potenciais suficientemente intensos.

2.8 Acoplamento eletromagnético e a forma hamiltoniana na teoria DKP

Do estudo da seção 2.7, foi observado que as componentes físicas da teoria DKP livre obedecem à equação de KGF no setor escalar e à equação de Proca no setor vetorial da teoria. O ônus da equivalência entre os formalismos representou uma objeção à teoria DKP por um longo tempo e somente recentemente foi mostrado que eles fornecem os mesmos resultados no caso das interações vetoriais minimamente acopladas, sob a condição de interpretar corretamente os componentes do espinor de DKP [5]-[6]. No entanto, a equivalência entre DKP e o formalismo de Proca já tinha um precedente [7]. A equivalência não é mantida se considerarmos correntes parcialmente conservadas [8] ou interações escalares [9]. Por outro lado, existe uma ambiguidade a respeito do acoplamento vetorial mínimo que tem sido objeto de algum debate. Podemos introduzir o acoplamento mínimo na equação de movimento ou na forma hamiltoniana da teoria DKP, mas essas duas formas não são equivalentes [4]. O principal inconveniente é quando se constroi a forma hamiltoniana a partir das equações de movimento minimamente acopladas, em tal caso aparece um termo extra chamado de termo anômalo, e adicionalmente o tensor energia-momentum não é conservado. Este termo aparentemente não tem significado físico, pois desaparece quando selecionamos os componentes físicos do espinor de DKP [5]-[6].

Devido à descoberta de uma nova corrente vetorial conservada [20]-[25], dada por

$$S^{\mu} = \Theta^{\mu\nu} u_{\nu} \tag{2.115}$$

onde u_{ν} é a quadrivelocidade ($u^{\nu} u_{\nu} = 1$) and $\Theta^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum, cuja componente temporal $S^{0} = \psi^{\dagger}\psi \geq 0$ no referencial de laboratório, é tentador interpretar esta corrente alternativa como uma corrente de probabilidade e como bônus uma esperança para evitar o paradoxo de Klein para bósons [25]. Críticas sobre S^{μ} já tem precedente. Struyve *et al.* [26] mostraram que S^{μ} não é conservada quando a interação eletromagnética é introduzida na equação de DKP e assim S^{0} não pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade. Os autores de [26] encontram que

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} J_{\mu}\,, \tag{2.116}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{(1)} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(1)}$ é o tensor campo eletromagnético. Na referência [26], argumentaram que o tensor energia-momentum não é conservado porque a partícula carregada troca energia e momentum com o campo eletromagnético. Recentemente, Datta [27] tentou consertar a nova corrente considerando

$$S'^{\,\mu} = S^{\mu} + \frac{e}{m} \int dx^{\mu} F^{\lambda\nu} J_{\lambda} u_{\nu} \tag{2.117}$$

com $\partial_{\mu} S'^{\,\mu} = 0$. Aliás, Datta tentou cuidar da observação feita na referência [26] sobre as trocas de energia e momentum da partícula com o campo externo incluindo o campo eletromagnético como parte do sistema. De (2.117) pode-se ver que há um fator 4 espúrio no segundo termo de $S'^{\,\mu}$ devido ao proceso de soma de quatro termos idênticos (quatro usos do teorema fundamental do cálculo envolvendo $F^{\lambda\nu} J_{\lambda} u_{\nu}$) por considerar o termo de fonte em (2.116) como um termo de corrente adicional, não apenas isso, mas também $\partial_{\mu} S'^{\,\mu} \neq 0$. Na referência [28] argumenta-se que a nova corrente conservada deve ser escrita como

$$\tilde{S}^{\mu} = S^{\mu} + \frac{1}{4}\frac{e}{m} \int dx^{\mu} F^{\lambda\nu} J_{\lambda} u_{\nu} \tag{2.118}$$

de modo que $\tilde{S}^{\mu}$ sem dúvidas satisfaz $\partial_{\mu} \tilde{S}^{\mu} = 0$. Vale a pena notar, que $\tilde{S}^{0}$ carrega uma dependência temporal até mesmo para o caso de uma equação de DKP independente do tempo e é infinita nos pontos do espaço onde o potencial sofre descontinuidades finitas como foi mostrado em [28]. De fato, $\tilde{S}^{\mu}$ é uma quantidade conservada, ela não pode ser associada a uma corrente de probabilidade.

Na referência [26] analisa-se a ambiguidade de introduzir o acoplamento mínimo e os autores sugerem que devemos introduzir o acoplamento mínimo via a forma covariante das equações de DKP, a fim de obter a teoria de KGF minimamente acoplada. Por outro lado, na referência [25] os autores sugerem que devemos introduzir o acoplamento mínimo na forma hamiltoniana da teoria DKP. Portanto, esta discrepância ainda não encontrou uma conclusão definitiva. Uma tentativa para clarificar esta discrepância pode ser encontrada se analisarmos a densidade de quadricorrente nessas duas formas de introduzir o acoplamento mínimo. A teoria DKP livre expressa em uma versão hamiltoniana é dada por [4]

$$i\partial_0\psi = H\psi, \qquad H = i\left[\beta^j, \beta^0\right]\partial_j + m\beta^0. \tag{2.119}$$

a qual, em conjunto com o vínculo

$$i\beta^i\beta^0\beta^0\partial_i\psi = m\left(1-\beta^0\beta^0\right)\psi \tag{2.120}$$

são equivalentes à equação DKP livre (2.3). Note que neste contexto podemos mostrar que $H^\dagger = H$. A equação de DKP com acoplamento vetorial mínimo é escrita como

$$i\beta^\mu D_\mu\psi - m\psi = 0 \tag{2.121}$$

onde a derivada covariante é dada por $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu^{(1)}$, e a versão hamiltoniana tem a seguinte forma

$$i\partial_0\psi = H\psi, \quad H = i\left[\beta^j, \beta^0\right]D_j + eA_0^{(1)} + m\beta^0 + \frac{ie}{2m}F_{\mu\nu}\left(\beta^\mu\beta^0\beta^\nu + \beta^\mu\eta^{0\nu}\right) \tag{2.122}$$

com o tensor campo eletromagnético dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{(1)} - \partial_\nu A_\mu^{(1)}$. O último termo em H é chamado de termo anômalo e aparentemente não tem significado físico. Por este motivo os autores de [25] sugerem que devemos introduzir o acoplamento mínimo na forma hamiltoniana da teoria DKP. Visto que

$$\left(iF_{0j}\beta^j\beta^0\beta^0\right)^\dagger = -\left(iF_{0j}\beta^j\beta^0\beta^0\right) + iF_{0j}\beta^j \tag{2.123}$$

H não é igual a $H^\dagger$, em contradição do que foi indicado em [5]. Devido a isso, o método de invariantes de Lewis-Riesenfeld (LR) para estudar potenciais dependentes do tempo não é diretamente aplicável como foi feito na referência [77], e já criticado em [78]. Neste estágio é importante notar que a hamiltoniana dada por (2.122) deve ser hermitiana com respeito a η^0 e não com respeito a β^0 como foi indicado por Zeleny [79]. Zeleny indica que um operador, e em particular a hamiltoniana devem ser neo-hermitianos ($\beta^0\hat{O} = \hat{O}^\dagger\beta^0$). Além disso, Zeleny afirma que a hamiltoniana livre e com interação eletromagnética não são neo-hermitianas, por tal motivo ele tenta construir hamiltonianas neo-hermitianas. Pode ser mostrado de forma fácil que tanto a hamiltoniana livre quanto a hamiltoniana com interação eletromagnética são hermitianas com respeito a η^0 (ver Apêndice B), e portanto $\langle H\rangle$ é uma quantidade real.

Retomando a questão da ambiguidade com a interação eletromagnética, vamos começar com a equação de movimento. Do estudo da seção 2.7, foi mostrado que a equação de DKP com acoplamento vetorial mínimo fornece uma densidade de quadricorrente conservada. Por outro lado, usando o método padrão para obter a lei de conservação para J^{μ} a partir da forma hamiltoniana (2.122) obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}J^{\mu} &= \left[(D_j)^* \bar{\psi}\right] \beta^0\beta^0\beta^j\psi + \bar{\psi}\beta^j\beta^0\beta^0 D_j\psi \\ &= \left(\partial_j\bar{\psi}\right) \beta^0\beta^0\beta^j\psi + \bar{\psi}\beta^j\beta^0\beta^0 \left(\partial_j\psi\right) + ieA_j^{(1)}\bar{\psi}[\beta^j, \beta^0\beta^0]\psi \end{aligned} \tag{2.124}$$

Neste caso podemos enxergar que surge um termo de fonte na lei de conservação para J^{μ}.

Este resultado contraditório pode ser resolvido seguindo a sugestão apresentada nas referências [5] e [6]. Em vez de trabalhar com a representação específica para as matrizes β^{μ} adotada nesta tese, escolhemos um caminho alternativo.

Para o setor scalar (spin-0) usaremos a álgebra-P (ver Apêndice C.1), a partir desta álgebra podemos mostrar que

$$\beta^0\beta^0\beta^j = P^j, \quad \beta^j\beta^0\beta^0 = {}^jP \tag{2.125}$$

portanto (2.124) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}J^{\mu} &= \left[(D_j)^* \bar{\psi}\right] P^j\psi + \left[\bar{\psi}\left({}^jP\right)\right] D_j\psi \\ &= \frac{i}{m}\left\{\left[(D_j)^*(P\psi)^{\dagger}\right] D^j(P\psi) - \left[\left(D^j\right)^*(P\psi)^{\dagger}\right] D_j(P\psi)\right\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.126}$$

este resultado pode ser visto como algo natural, já que são teorias equivalentes.

Agora concentremos nossa atenção para o setor vetorial (spin-1). Neste caso usaremos a álgebra-V (ver Apêndice C.2), a partir de esta álgebra podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \beta^0\beta^0\beta^i &= \sum_{\lambda}\left({}^{\lambda}R\right)\left(R^{\lambda i}\right) - \left({}^0R\right)\left(R^{0i}\right) - \left({}^{0i}R\right)\left(R^0\right) \\ \beta^i\beta^0\beta^0 &= \sum_{\lambda}\left(R^{i\lambda}\right)\left(R^{\lambda}\right) - \left({}^{i0}R\right)\left(R^0\right) - \left({}^iR\right)\left(R^{i0}\right) \end{aligned} \tag{2.127}$$

de modo que (2.124) resulta em

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J^\mu &= \bar{\psi}\left(R^0\right) D_i\big(R^{0i}\psi\big) + \left[D_i^*\bar{\psi}\left({}^{i0}R\right)\right]\big(R^0\psi\big) \\
&= -\left(R^0\psi\right)^\dagger D_i\big(R^{0i}\psi\big) - \left[D_i^*\left(R^{i0}\psi\right)^\dagger\right]\big(R^0\psi\big) \qquad (2.128) \\
&= 0
\end{aligned}$$

novamente, os componentes físicos do espinor DKP fornecem uma quadricorrente conservada se usamos as equações de movimento ou a forma hamiltoniana. Portanto, não existe nenhum problema em introduzir o acoplamento mínimo nas equações de movimento ou na forma hamiltoniana, pois essas duas formas fornecem uma quadricorrente conservada.

Capítulo 3

Soluções analíticas da equação de DKP

Soluções analíticas de equações relativísticas são importantes não apenas porque elas fornecem as correções relativísticas para as teorias não-relativísticas quando as partículas estão sujeitas a potenciais suficientemente intensos, mas também pela importância intrínseca de se obter novas soluções. Conseguimos obter algumas soluções analíticas da equação de DKP para bósons sujeitos a potenciais unidimensionais considerando misturas dos acoplamentos escalar, vetorial mínimo e vetorial não-mínimo que recentemente foram difundidas na literatura [9], [28], [54]-[55], [61]-[63], [78].

Neste capítulo desenvolvemos uma forma alternativa de procurar soluções analíticas para o setor escalar ($S=0$) da equação tridimensional de DKP para o acoplamento vetorial (mínimo e não-mínimo). Esta forma alternativa refere-se ao uso do projetor P para selecionar o setor escalar da teoria de DKP, nesse processo obtém-se uma equação efetiva tipo KGF. Neste caso, o problema é *mapeado* num problema de Sturm-Liouville para o primeiro componente do espinor e os demais componentes podem ser expressos em termos do primeiro de uma forma simples. Deve ser mencionado que grande parte da retórica empregada no desenvolvimento do formalismo valeu-se de um recente trabalho [66].

3.1 Setor escalar ($S=0$)

O operador projeção P dado por (2.73) satisfaz as relações $P^2=P$ e $P^\dagger=P$. Definindo $P^\mu=P\beta^\mu$ e ${}^\mu P=\beta^\mu P$, podemos obter as seguintes relações [11]

$$\beta^\mu = P^\mu + {}^\mu P, \qquad P^\mu\beta^\nu = P\eta^{\mu\nu}$$

$$(P^\mu)P = P({}^\mu P) = 0, \qquad (P^\mu)(P^\nu) = ({}^\mu P)({}^\nu P) = 0 \tag{3.1}$$

Logo, aplicando P e P^ν à equação de DKP (2.114) e usando as relações (3.1), obtemos

$$i\left(D_\mu - A_\mu^{(2)}\right)(P^\mu\psi) = m(P\psi) \tag{3.2}$$

e

$$i(D_\mu + A_\mu^{(2)})(P\psi) = m(P_\nu\psi) \tag{3.3}$$

respectivamente. Aqui, $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu^{(1)}$. Combinando essas equações obtemos

$$\left[D^\mu D_\mu + m^2 + (\partial^\mu A_\mu^{(2)}) - \left(A^{(2)}\right)_\mu \left(A^{(2)}\right)^\mu\right](P\psi) = 0 \tag{3.4}$$

Por outro lado, usando (3.1), a quadricorrente J^μ pode ser escrita como

$$j^\mu = -\frac{1}{m}\,\mathrm{Im}\left[(P\psi)^\dagger D^\mu (P\psi)\right] \tag{3.5}$$

Nota-se que, na ausência do acoplamento vetorial não-mínimo, (3.4) é reduzida à equação de KGF com acoplamento vetorial mínimo. Podemos enxergar que $A_\mu^{(2)}$ não intervém explicitamente na corrente. A equação (3.4) pode ser vista como uma equação de KGF generalizada.

Usando a representação das matrizes β^μ para o setor escalar dada por (2.40a) e se os potenciais vetoriais são independente do tempo, o espinor pode ser reescrito como $\psi(\overrightarrow{r}, t) = \phi(\overrightarrow{r})\exp(-iEt)$, onde E é a energia do bóson. Neste caso (3.3) torna-se

$$\phi_2 = \frac{1}{m}\left(E - A_0^{(1)} + iA_0^{(2)}\right)\phi_1 \tag{3.6}$$

$$\overrightarrow{\zeta} = \left(\overrightarrow{\nabla} - i\overrightarrow{A}^{(1)} - \overrightarrow{A}^{(2)}\right)\phi_1 \tag{3.7}$$

onde

$$\overrightarrow{\zeta} = \frac{m}{i}(\phi_3, \phi_4, \phi_5)^T \tag{3.8}$$

e (3.4) fornece

$$\left[\left(i\overrightarrow{\nabla} + \overrightarrow{A}^{(1)}\right)^2 + \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}^{(2)} + \overrightarrow{A}^{(2)}\cdot\overrightarrow{A}^{(2)}\right]\phi_1 = k^2\phi_1 \tag{3.9}$$

onde

$$k^2 = \left(E - A_0^{(1)}\right)^2 - m^2 + \left(A_0^{(2)}\right)^2 . \tag{3.10}$$

Enquanto isso,

$$j^0 = \frac{E - A_0^{(1)}}{m}|\,\phi_1|^2, \quad \overrightarrow{j} = \frac{1}{m}\left[\mathrm{Im}\left(\phi_1^*\overrightarrow{\nabla}\phi_1\right) - \overrightarrow{A}^{(1)}|\,\phi_1|^2\right] . \tag{3.11}$$

É importante ressaltar que j^0 torna-se negativo em regiões do espaço em que $E < A_0^{(1)}$ (circunstância associada ao paradoxo de Klein).

Se considerarmos potenciais com simetria esférica

$$\left(A^{(\alpha)}\right)^\mu(\overrightarrow{r}) = \left(A_0^{(\alpha)}(r), A_r^{(\alpha)}(r)\hat{r}\right), \quad \text{com } \alpha = 1, 2 \tag{3.12}$$

então a equação de DKP permite a seguinte fatoração

$$\phi_1(\overrightarrow{r}) = \frac{U_\kappa(r)}{r}\, Y_{lm_l}(\theta,\varphi) \tag{3.13}$$

onde Y_{lm_l} são os harmônicos esféricos, com $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m_l = -l, -l+1, \ldots, l$, $\int d\Omega\, Y^*_{lm_l} Y_{l'm_{l'}} = \delta_{ll'}\delta_{m_l m_{l'}}$ e κ representa todos os números quânticos que podem ser necessários para caracterizar ϕ_1. A função radial U obedece a seguinte equação radial

$$\left[\left(i\frac{d}{dr} + A_r^{(1)}\right)^2 + 2\,\frac{A_r^{(2)}}{r} + \frac{dA_r^{(2)}}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} + (A_r^{(2)})^2\right] U = k^2 U \tag{3.14}$$

a forma $id/dr + A_r^{(1)}$ em (3.14) sugere que o componente espacial do acoplamento vetorial mínimo pode ser suprimido através da redefinição do espinor em

$$U = \exp(i\Lambda)\, u, \quad A_r^{(1)} = \frac{d\Lambda}{dr} \tag{3.15}$$

Sem qualquer dúvida

$$\left(i\frac{d}{dr} + A_r^{(1)}\right) U = i\exp(i\Lambda)\,\frac{du}{dr}, \quad \left(i\frac{d}{dr} + A_r^{(1)}\right)^2 U = -\exp(i\Lambda)\,\frac{d^2u}{dr^2} \tag{3.16}$$

de tal forma que para $r \neq 0$ a equação radial torna-se

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[k^2 - 2\,\frac{A_r^{(2)}}{r} - \frac{dA_r^{(2)}}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(A_r^{(2)}\right)^2\right] u = 0 \tag{3.17}$$

e porque $\nabla^2\,(1/r) = -4\pi\delta(\overrightarrow{r})$, a menos que os potenciais contenham uma função delta na origem, deve-se impor a condição de Dirichlet homogênea $u\,(0) = 0$ [80]. Além disso, da condição de normalização $\int d\tau\, j^0 = \pm 1$ vê-se que u deve ser normalizado de acordo com

$$\int_0^\infty dr\,|u|^2\,\frac{E - A_0^{(1)}}{m} = \pm 1 \tag{3.18}$$

Portanto, para o movimento em um campo central, a solução da equação tridimensional de DKP pode ser encontrada resolvendo uma equação tipo-Schrödinger. Os outros componentes são obtidos através das equações (3.6) e (3.7). Note-se que o espinor de DKP é um autoestado do operador de paridade e como $\eta^0 = \mathrm{diag}\,(1, 1, -1, -1, -1)$ a paridade de $\overrightarrow{\zeta}$ é oposta àquela de ϕ_1 e ϕ_2. Além disso, o operador de spin $S_k = i\varepsilon_{klm}\beta^l\beta^m$ [4] satisfaz as relações de comutação

$$\begin{aligned} [S_k, \beta^0] &= [S_k, [P, \beta^0]] = 0 \\ [S_k, \beta^l] &= i\varepsilon_{klm}\beta^m, \quad [S_k, [P, \beta^l]] = i\varepsilon_{klm}[P, \beta^m] \end{aligned} \tag{3.19}$$

e assim o momento angular total $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S}$ satisfaz

$$[\overrightarrow{J}, \beta^\mu p_\mu] = [\overrightarrow{J}, \beta^\mu A_\mu] = [\overrightarrow{J}, [P, \beta^\mu] A_\mu] = \overrightarrow{0} \tag{3.20}$$

de tal forma que o espinor DKP é também um autoestado de $\overrightarrow{J}^2$ e J_3. Assim, o espinor DKP pode ser classificado pela paridade, pelo momento angular total, e a terceira componente do momento angular total. De fato,

$$\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} \widetilde{0} & \overline{0} \\ \overline{0}^T & \overrightarrow{s} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

onde s_k são as matrizes 3×3 em que $(s_k)_{lm} = -i\varepsilon_{klm}$. Como resultado, $\overrightarrow{S}$ não age sobre os dois componentes superiores do espinor DKP. Isso significa que os números quânticos do momento angular orbital de ϕ_1 e ϕ_2 são bons números quânticos. Com o número quântico do momento angular orbital l referentes aos dois componentes superiores do espinor DKP, $\overrightarrow{\zeta}$ em (3.7) pode ser escrito como [81]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\zeta} = \overrightarrow{Y}_{l,l-1,m_l}\sqrt{\frac{l}{2l+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} - A_r^{(2)}\right)\frac{u(r)}{r} \\ -\overrightarrow{Y}_{l,l+1,m_l}\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} - A_r^{(2)}\right)\frac{u(r)}{r} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nesta última expressão, $\overrightarrow{Y}_{Jlm_J}(\theta, \varphi)$ são os chamados harmônicos esféricos vetoriais. Eles formam um conjunto ortonormal completo e satisfazem

$$\overrightarrow{J}^2 \overrightarrow{Y}_{Jlm_J} = J\,(J+1)\,\overrightarrow{Y}_{Jlm_J}, \quad \overrightarrow{L}^2 \overrightarrow{Y}_{Jlm_J} = l\,(l+1)\,\overrightarrow{Y}_{Jlm_J}, \quad J_3 \overrightarrow{Y}_{Jlm_J} = m_J \overrightarrow{Y}_{Jlm_J} \tag{3.23}$$

e $\overrightarrow{Y}_{l,l\pm1,m_l}$ se transforma sob paridade como

$$\overrightarrow{Y}_{l,l\pm1,m_l}(\theta - \pi, \varphi + \pi) = (-1)^{l+1}\,\overrightarrow{Y}_{l,l\pm1,m_l}(\theta, \varphi) \tag{3.24}$$

Vê-se que se os dois componentes superiores do espinor DKP são autofunções de $\overrightarrow{L}^2$ com um número quântico do momento angular orbital l, os três componentes inferiores serão uma superposição linear de dois tipos de autofunções de $\overrightarrow{L}^2$. Um desses com número quântico de momento angular orbital $l+1$ e outro com $l-1$. O fato de que os componentes superior e inferior do espinor DKP têm diferentes números quânticos de momento angular está relacionado com o fato de que $\overrightarrow{L}$ não ser uma quantidade conservada na teoria DKP. No entanto, o número quântico do momento angular orbital do primeiro componente do espinor DKP é igual ao número quântico do momento angular total do espinor DKP, como deveria ser, já que ϕ_1 descreve uma partícula sem spin. Daqui resulta que a paridade do espinor DKP é dada por $(-1)^l$.

3.2 O oscilador DKP vetorial estendido

Considerando os acoplamentos vetoriais da forma

$$A_0^{(1)} = m^2\omega_0^{(1)}r, \quad A_r^{(1)} = 0, \quad A_0^{(2)} = m^2\omega_0^{(2)}r, \quad A_r^{(2)} = m^2\omega_r^{(2)}r \tag{3.25}$$

onde $\omega_0^{(1)}$, $\omega_0^{(2)}$ e $\omega_r^{(2)}$ são quantidades adimensionais. Nosso problema é resolver (3.17) para u e determinar as energias permitidas.

Verifica-se que u obedece a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\varepsilon^2 - br - cr^2 - \frac{l\,(l+1)}{r^2}\right]u = 0 \tag{3.26}$$

onde

$$\varepsilon^2 = E^2 - m^2 - 3m^2\omega_r^{(2)}, \quad b = 2Em^2\omega_0^{(1)}, \quad c = m^4\Omega^2 \tag{3.27}$$

com

$$\Omega^2 = \left(\omega_r^{(2)}\right)^2 - \left(\omega_0^{(1)}\right)^2 - \left(\omega_0^{(2)}\right)^2 \tag{3.28}$$

A solução para (3.26) com Ω e ε reais é justamente a solução da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico tridimensional mais um potential linear. Conforme $r \to 0$ obtém-se as seguintes equações assintóticas e suas respectivas soluções

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \varepsilon^2 u = 0, \quad u \sim \left\{ \begin{array}{c} 1 + i\varepsilon r \\ 1 - i\varepsilon r \end{array} \right. , \quad \text{para } l = 0 \tag{3.29}$$

e

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l\,(l+1)}{r^2}u = 0, \quad u \sim \left\{ \begin{array}{c} r^{l+1} \\ r^{-l} \end{array} \right. , \quad \text{para } l \neq 0 \tag{3.30}$$

Nesta circunstância, os comportamentos assintóticos (3.29) e (3.30) em conjunto com as condições $u(0) = 0$ e $\int_0^\infty dr\,|u|^2 < \infty$ ditam que a solução próximo da origem válida para todo valor de l pode ser escrita como sendo proporcional a r^{l+1}. Colocando

$$u(r) = r^{l+1}\exp\left(-\frac{\sqrt{c}}{2}r^2 - \frac{b}{2\sqrt{c}}r\right)g(r)$$

e introduzindo a seguinte variável nova e parâmetros

$$x = \sqrt[4]{c}\, r, \quad \alpha = 2l + 1, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt[4]{c^3}}, \quad \gamma = \frac{b^2 + 4\, c\, \varepsilon^2}{4\sqrt{c^3}} \tag{3.31}$$

verifica-se que a solução para todo r pode ser expressa como uma solução da equação diferencial biconfluente de Heun [64]

$$x\, \frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\alpha + 1 - \beta x - 2x^2\right) \frac{dg}{dx} + \left[(\gamma - \alpha - 2)\, x - \Delta\right] g = 0 \tag{3.32}$$

com

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\delta + \beta\,(\alpha + 1)\right] . \tag{3.33}$$

Para o nosso problema $\delta = 0$. A equação diferencial biconfluente de Heun tem uma singularidade regular em $x = 0$ e uma singularidade irregular em $x = \infty$. Conforme $x \to \infty$, percebe-se de (3.32) que g cresce como e^{x^2} a menos que $\gamma = \alpha + 2$ quando g torna-se uma constante. Na realidade g apresenta a solução se comportando como x^s para grandes valores de x, sob a condição que $\gamma = \alpha + 2 + 2s$ com $s \geq 0$. A solução regular na origem é dada por

$$N\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\,(j)}{\Gamma\,(\alpha + 1 + j)}\, \frac{a_j}{j!}\, x^j \tag{3.34}$$

onde $\Gamma\,(z)$ é a função gama, $a_0 = 1$ e os coeficientes restantes da expansão em série, para $\beta \neq 0$, satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$a_{j+2} = \left[(j + 1)\,\beta + \Delta\right] a_{j+1} - (j + 1)\,(j + \alpha + 1)\,(\gamma - \alpha - 2 - 2j)\, a_j\, . \tag{3.35}$$

A série é convergente para x no intervalo $[0, \infty)$ e tende a e^{x^2} quando $x \to \infty$, exceto se a série for truncada. Na verdade, g apresenta soluções polinomiais de grau n quando $a_{n+1} = 0$ e $\gamma = \alpha + 2 + 2n$. Substituindo a última condição em (3.35) obtemos que

$$a_{j+2} = \left[(j + 1)\,\beta + \Delta\right] a_{j+1} - (j + 1)\,(j + \alpha + 1)\,(2n - 2j)\, a_j\, . \tag{3.36}$$

Se $j = n$ obtemos $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$. Portanto, existem n coeficientes diferentes de zero e a série (3.34) torna-se um polinômio de grau n. Por exemplo, se $n = 0$ e $j = 0$, temos que $a_1 = a_2 = 0$ e $a_0 \neq 0$ neste caso a série torna-se um polinômio de grau 0 (constante). Se $n = 1$ os valores de j são 0 e 1. Da relação de recorrência (3.36) obtemos $a_2 = a_3 = 0$ e

$$a_1 = 4\frac{\alpha + 1}{\alpha + 3}\, \frac{a_0}{\beta}\, . \tag{3.37}$$

Neste caso os coeficientes a_0 e a_1 são diferentes de zero e portanto a série (3.34) torna-se um polinômio de grau 1. De (3.37) pode-se observar que se $\beta = 0$ fornece $a_1 = \infty$, portanto o caso para $\beta = 0$ não pode ser obtido como um caso limite pois os coeficientes do polinômio de grau n explodem.

Neste caso a condição de quantização $\gamma = \alpha + 2 + 2n$ implica que

$$|E| = m \sqrt{\frac{1 + 3\omega_r^{(2)} + (2\widetilde{n} + 3)\,|\Omega|}{1 + \left(\omega_0^{(1)}/\Omega\right)^2}}, \quad \text{com } \widetilde{n} = n + l \ \text{ para } \ \omega_0^{(1)} \neq 0 \tag{3.38}$$

É fácil verificar que l pode tomar os valores $0, 1, 2, ..., \widetilde{n}$ e que todos os níveis de energia, exceto o estado fundamental ($\widetilde{n} = 0$), são degenerados. A degenerescência do nível de energia para um dado número quântico principal $\widetilde{n}$ é dada por $(\widetilde{n} + 1)^2$. Note-se que a condição $\Omega \in \mathbb{R}$ requer que $\left(\omega_r^{(2)}\right)^2 > \left(\omega_0^{(1)}\right)^2 + \left(\omega_0^{(2)}\right)^2$.

3.2.1 Oscilador DKP vetorial não-mínimo

Como um caso especial, consideramos $\beta = 0$ ($\omega_0^{(1)} = 0$), o caso de um oscilador harmônico tridimensional efetivo [65]. Neste caso g apresenta soluções de polinômio de grau n quando $\gamma = \alpha + 2 + 4n$. Desta vez, só potências pares em x aparecem e $N\left(\alpha, 0, \gamma, 0; x\right)$ é igual a $M((\alpha + 2 - \gamma)/4, 1 + \alpha/2; x^2)$, onde a função hipergeométrica confluente (função de Kummer) $M(a, b, z)$, ou ${}_1F_1(a, b, z)$, é dada pela série

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + j)}{\Gamma(b + j)} \frac{z^j}{j!} \tag{3.39}$$

Vale a pena notar que neste último caso $N\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x\right)$ torna-se proporcional a $L_{\frac{\widetilde{n}-l}{2}}^{(l+1/2)}(x)$, o polinômio de Laguerre generalizado. A condição de quantização $\gamma = \alpha + 2 + 4n$ implica que

$$|E| = m\sqrt{1 + 3\omega_r^{(2)} + (2\widetilde{n} + 3)\,|\Omega|}, \quad \text{com } \widetilde{n} = 2n + l \ \text{ para } \ \omega_0^{(1)} = 0 \tag{3.40}$$

Usando a condição de normalização $\left|\int d\tau\, j^0\right| = |E|/m \int d\tau\, |\,\phi_1|^2 = 1$, com $|E| \neq 0$, e que os polinômios de Laguerre generalizados são padronizados como [82]

$$\int_0^{\infty} d\xi\, \xi^{\alpha} e^{-\xi} \left[L_n^{(\alpha)}(\xi)\right]^2 = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \tag{3.41}$$

obtemos que

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{2m\,|\,\Omega|^{l+3/2}\left(\frac{\widetilde{n}-l}{2}\right)!}{|E|\,\Gamma\left(\frac{\widetilde{n}+l+3}{2}\right)}}\, r^l e^{-|\,\Omega|r^2/2}\, L_{\frac{\widetilde{n}-l}{2}}^{(l+1/2)}\left(|\,\Omega|r^2\right) Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \tag{3.42}$$

Note que l pode assumir os valores $0, 2, ..., \widetilde{n}$ quando $\widetilde{n}$ é um número par, e $1, 3, ..., \widetilde{n}$ quando $\widetilde{n}$ é um número ímpar. Todos os níveis de energia, com exceção do nível de energia para $\widetilde{n} = 0$, são degenerados. A degenerescência do nível de energia para um dado número quântico principal $\widetilde{n}$ é dada por $(\widetilde{n}+1)(\widetilde{n}+2)/2$. Observe que a condição $\Omega \in \mathbb{R}$ requer que $|\,\omega_r^{(2)}| > |\,\omega_0^{(2)}|$, o que significa que o componente espacial do potencial deve ser mais intenso do que o componente temporal. Existe um conjunto infinito de energias discretas (simétricas ao redor de $E = 0$ como deveria ser já que $A_\mu^{(2)}$ não distingue partículas de antipartículas) independentemente do sinal de $\omega_0^{(2)}$. Em geral, $|E|$ é maior para $\omega_r^{(2)} > 0$ do que para $\omega_r^{(2)} < 0$. A energia aumenta com o número quântico principal e é uma função monotonicamente decrescente de $\omega_0^{(2)}$. Para $\omega_r^{(2)} < 0$ e $\omega_0^{(2)} = 0$ o espectro aquiesce $|E| = m$ para $\tilde{n} = 0$. A fim de garantir o espectro real, as constantes de acoplamento $\omega_0^{(2)}$ e $\omega_r^{(2)}$ devem satisfazer o seguinte vínculo

$$\sqrt{\left(\omega_r^{(2)}\right)^2 - \left(\omega_0^{(2)}\right)^2} > -\left(1 + 3\omega_r^{(2)}\right)/(2\tilde{n}+3) \tag{3.43}$$

de tal forma que não pode haver estados ligados para $\omega_r^{(2)} < 0$ com pequenos números quânticos principais e $|\,\omega_r^{(2)}|$ suficientemente pequeno. Isto significa que para $\omega_r^{(2)} < 0$ e $|\,\omega_r^{(2)}|$ suficientemente pequeno uma série de soluções com o menor número quântico principal não existem. Para $|\,\omega_r^{(2)}| \simeq |\,\omega_0^{(2)}|$ temos uma elevada densidade de estados muito delocalizados (pois $\Omega \simeq 0$). Para $|\,\omega_r^{(2)}| \gg |\,\omega_0^{(2)}|$ tem-se que

$$|E| \simeq m\sqrt{1 + 3\omega_r^{(2)} + (2\tilde{n}+3)\,|\,\omega_r^{(2)}|} \tag{3.44}$$

de modo que $|E| > m$ para $\omega_r^{(2)} > 0$. Em relação a $\omega_r^{(2)} < 0$, tanto quanto $\omega_r^{(2)}$ diminui, o espectro move-se em direção a $E = 0$, exceto para $\omega_0^{(2)} = 0$ que mantém $|E| \geq m$. Por outro lado, no limite de acoplamento fraco, $|\,\omega_r^{(2)}| \ll 1$ e $|\,\omega_0^{(2)}| \ll 1$, $|E| \simeq m$ para pequenos números quânticos, e (3.40) torna-se

$$|E| \simeq m\left[1 + \frac{3}{2}\omega_r^{(2)} + \left(\tilde{n} + \frac{3}{2}\right)\sqrt{\left(\omega_r^{(2)}\right)^2 - \left(\omega_0^{(2)}\right)^2}\right] \tag{3.45}$$

Devido a este espectro de níveis de energia igualmente espaçados, pode-se dizer que o potencial vetorial não-mínimo linear descreve um verdadeiro oscilador DKP vetorial.

Capítulo 4

Conclusões

Nesta tese, foi feita uma revisão detalhada dos conceitos básicos da teoria de DKP. Levantamos questão sobre alguns tópicos apresentados na literatura, como por exemplo a definição de valores esperados. Da análise da construção da quadricorrente para a teoria DKP com interações, foi mostrado que a conservação da quadricorrente impõe restrições severas sobre as estruturas das possíveis interações e que acoplamentos vetoriais não-mínimos têm sido usados impropriamente nos deslocamentos de níveis e larguras em átomos piônicos e na fenomenologia dos espalhamentos elásticos méson-núcleo [14]-[15], [17], [19]. Mostramos que as interações vetoriais mínimas e não-mínimas se comportam de formas diferentes sob as transformações de conjugação de carga e reversão temporal, mas ambas são invariantes sob PCT. Em particular, interações vetoriais não-mínimas não têm homólogos na teoria de KGF. A quadricorrente de carga conservada mais a operação de conjugação de carga são critérios suficentes para inferir sobre a ausência do paradoxo de Klein em interações vetoriais não-mínimas, ou a possível presença nas interações vetoriais mínimas. Embora o paradoxo de Klein não possa ser tratado como injustificado na teoria de DKP com interação vetorial minimamente acoplada, ele nunca faz a sua aparição no caso de interação vetorial não-mínimo pois essa classe de interação não acopla com a carga da partícula.

No caso do acoplamento vetorial não-mínimo, tanto os níveis de energia das partículas quanto os das antipartículas são membros do espectro, e o espectro das partículas e das antipartículas é simétrico em relação a $E = 0$. Logo, se a interação é atrativa (repulsiva) para bósons, ela também será atrativa (repulsiva) para os antibósons. No entanto, não há cruzamento entre estes níveis de energia uma vez que os possíveis estados com $E = 0$ são não-normalizáveis. Este fato implica que não existe um canal para uma criação espontânea de bósons-antibósons e, por esta razão, a interpretação de partícula única na teoria de DKP está assegurada.

Usando a conservação da quadricorrente e da interpretação correta dos componentes físicos do espinor DKP, tentamos clarificar a ambiguidade existente a respeito do acoplamento vetorial mínimo. Partindo desse ponto de vista, a ambiguidade enxergada por

Kemmer no seu trabalho original [4], não existe. Também foi analisada a hermiticidade para a teoria DKP livre e com interação vetorial mínima, mostrando que o operador H da versão hamiltoniana não precisa ser hermitiano no sentido padrão, nem hermitiano com respeito a β^0 como foi indicado por Zeleny [79]. Pelo contrário qualquer operador (incluindo H) precisa ser hermitiano com respeito a η^0, ou seja $[\eta^0 (\beta^0 \mathcal{O})]^\dagger = \eta^0 (\beta^0 \mathcal{O})$, para fornecer autovalores reais.

Focalizando o caso de interações vetoriais (mínimas e não-mínimas), foi mostrada uma forma alternativa de procurar soluções analíticas para setor escalar da equação tridimensional de DKP. O problema foi *mapeado* num problema de Sturm-Liouville (da mecânica quântica não-relativística) para o primeiro componente do espinor DKP e os demais componentes puderam ser obtidos em termos do primeiro de uma forma simples. Neste processo, a quadricorrente conservada também foi expressa em termos do primeiro componente do espinor DKP de tal forma que a procura de soluções da equação de DKP tornou-se mais clara e transparente. A conservação do momento angular total foi derivado a partir das suas propriedades de comutação com cada termo da equação de DKP.

A solução para potentiais vetoriais (mínimo e não-mínimo) de forma linear foi encontrada resolvendo um problema tipo Schrödinger para o oscilador harmônico tridimensional mais um potencial linear para o primeiro componente do espinor de DKP. Encontramos que este problema reduz-se ao encontro de soluções de uma equação diferencial biconfluente de Heun [64]. As condições de contorno apropiadas foram impostas de uma forma simples, observando a ausência de potenciais delta de Dirac. As soluções exatas foram apresentadas em uma forma fechada e o espectro apresenta, além da degenerescência essencial onipresente para qualquer campo de força central, uma degenerescência acidental. O caso do potencial linear não-mínimo, já discutido na literatura [65], foi obtido como um caso particular.

A estratégia esboçada nesta tese pode ser estendida e adotada para a análise dos estados estados ligados e espalhamento de bósons de spin-1. Atualmente estamos aprofundando esta análise e posteriormente divulgaremos os resultados.

Apêndice A

Simetria CPT na teoria DKP

A.1 Paridade

A paridade é determinada através da aplicação do operador paridade $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}P_0$, em que P_0 atua sobre as funções efetuando a transformação $\vec{r} \to -\vec{r}$, procedendo como um operador linear:

$$P_0 \left[\alpha f\left(\vec{r}, t\right) + \beta g\left(\vec{r}, t\right)\right] P_0^{-1} = \alpha f\left(-\vec{r}, t\right) + \beta g\left(-\vec{r}, t\right) \tag{A.1}$$

O operador paridade, quando aplicado sobre o espinor, fornece

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}\psi\left(\vec{r}, t\right) &= \mathcal{P}P_0\psi\left(\vec{r}, t\right) \\ &= \mathcal{P}\psi\left(-\vec{r}, t\right) \\ &\equiv \psi_P\left(\vec{r}, t\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}\left[\hat{\mathcal{P}}\psi\left(\vec{r}, t\right)\right] &= \hat{\mathcal{P}}\left[\mathcal{P}\psi\left(-\vec{r}, t\right)\right] \\ &= \mathcal{P}\left[\hat{\mathcal{P}}\psi\left(-\vec{r}, t\right)\right] \\ &= \mathcal{P}^2\psi\left(\vec{r}, t\right) \\ &= \psi\left(\vec{r}, t\right) \end{aligned} \tag{A.3}$$

portanto, a matriz $\mathcal{P}$ deve ser tal que $\mathcal{P}^2 = 1$. Aplicando $\hat{\mathcal{P}}$ à equação de DKP (2.114)

$$\begin{gathered} \Big\{ i\hat{\mathcal{P}}\beta^0\hat{\mathcal{P}}^{-1}\partial_0 + i\hat{\mathcal{P}}\beta^i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\partial_i\hat{\mathcal{P}}^{-1} - m - \hat{\mathcal{P}}V_s^{(1)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} \\ -\hat{\mathcal{P}}P\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}V_s^{(2)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} - \hat{\mathcal{P}}\beta^0\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_0^{(1)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} - \hat{\mathcal{P}}\beta^i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_i^{(1)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} \\ -i\hat{\mathcal{P}}[P,\beta^0]\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_0^{(2)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} - i\hat{\mathcal{P}}[P,\beta^i]\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_i^{(2)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} \Big\} \hat{\mathcal{P}}\psi\left(\vec{r}, t\right) = 0 \end{gathered} \tag{A.4}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\{ i\mathcal{P}\beta^0\mathcal{P}^{-1}\partial_0 - i\mathcal{P}\beta^i\mathcal{P}^{-1}\partial_i - m - P_0V_s^{(1)}P_0^{-1} \right.\\
&-\mathcal{P}P\mathcal{P}^{-1}P_0V_s^{(2)}P_0^{-1} - \mathcal{P}\beta^0\mathcal{P}^{-1}P_0A_0^{(1)}P_0^{-1} - \mathcal{P}\beta^i\mathcal{P}^{-1}P_0A_i^{(1)}P_0^{-1}\\
&\left. -i\mathcal{P}[P,\beta^0]\mathcal{P}^{-1}P_0A_0^{(2)}P_0^{-1} - i\mathcal{P}[P,\beta^i]\mathcal{P}^{-1}P_0A_i^{(2)}P_0^{-1}\right\}\psi_P\left(\vec{r},t\right) = 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Comparando as equações (2.114) e (A.5), de maneira a tornar (A.5) covariante, devemos ter

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\beta^0\mathcal{P}^{-1} &= \beta^0\\
\mathcal{P}\beta^i\mathcal{P}^{-1} &= -\beta^i
\end{aligned} \tag{A.6}$$

que é satisfeita com $\mathcal{P} = \exp(i\delta_P)\eta^0$. Como $\mathcal{P}^2 = 1$, o fator δ_P pode assumir os valores 0 ou $\frac{\pi}{2}$, donde podemos inferir que

$$\mathcal{P}^{\dagger} = \exp(-i\delta_P)\eta^{0\dagger} = \exp(-i\delta_P)\eta^0 \tag{A.7}$$

de forma que $\mathcal{P}$ é unitária, i.e.,

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{\dagger} = 1 \tag{A.8}$$

Como a matriz P comuta com η^{μ}, podemos assegurar que, sob paridade, as relações

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}P\mathcal{P}^{-1} &= P\\
\mathcal{P}[P,\beta^0]\mathcal{P}^{-1} &= [P,\beta^0]\\
\mathcal{P}[P,\beta^i]\mathcal{P}^{-1} &= -[P,\beta^i]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

são obedecidas. As funções potenciais devem se comportar sob paridade como

$$\begin{aligned}
P_0V_s^{(1)}\left(\vec{r},t\right)P_0^{-1} &= V_s^{(1)}\left(-\vec{r},t\right)\\
P_0V_s^{(2)}\left(\vec{r},t\right)P_0^{-1} &= V_s^{(2)}\left(-\vec{r},t\right)\\
P_0A_0^{(1)}\left(\vec{r},t\right)P_0^{-1} &= A_0^{(1)}\left(-\vec{r},t\right)\\
P_0A_i^{(1)}\left(\vec{r},t\right)P_0^{-1} &= -A_i^{(1)}\left(-\vec{r},t\right)\\
P_0A_0^{(2)}\left(\vec{r},t\right)P_0^{-1} &= A_0^{(2)}\left(-\vec{r},t\right)\\
P_0A_i^{(2)}\left(\vec{r},t\right)P_0^{-1} &= -A_i^{(2)}\left(-\vec{r},t\right)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

A paridade da densidade de quadricorrente é obtida através de

$$J^{\mu}\left(\vec{r},t\right) = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi = \frac{1}{2}\psi^{\dagger}\eta^0\beta^{\mu}\psi \tag{A.11}$$

em que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}\psi = \psi_P\left(\vec{r},t\right) \\
\therefore \psi = \hat{\mathcal{P}}^{-1}\psi_P\left(\vec{r},t\right) \\
\psi^\dagger = \left(\hat{\mathcal{P}}^{-1}\psi_P\right)^\dagger = \psi_P^\dagger\left(\hat{\mathcal{P}}^{-1}\right)^\dagger
\end{aligned} \tag{A.12}$$

como $\mathcal{P} = \exp(i\delta_P)\eta^0$, inferimos que

$$\psi^\dagger = \psi_P^\dagger\hat{\mathcal{P}} \tag{A.13}$$

logo

$$\begin{aligned}
J^\mu\left(\vec{r},t\right) &= \frac{1}{2}\psi_P^\dagger\hat{\mathcal{P}}^{-1}\eta^0\beta^\mu\hat{\mathcal{P}}\psi_P \\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}_P\hat{\mathcal{P}}^{-1}\beta^\mu\hat{\mathcal{P}}\psi_P
\end{aligned} \tag{A.14}$$

E determinamos a paridade de J^0

$$\begin{aligned}
J^0\left(\vec{r},t\right) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_P\hat{\mathcal{P}}^{-1}\beta^0\hat{\mathcal{P}}\psi_P \\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}_P\beta^0\psi_P \\
&= J_P^0\left(\vec{r},t\right) \\
&= J^0\left(-\vec{r},t\right)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

portanto, J^0 é invariante sob paridade. Analogamente, para J^i

$$\begin{aligned}
J^i\left(\vec{r},t\right) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_P\hat{\mathcal{P}}^{-1}\beta^i\hat{\mathcal{P}}\psi_P \\
&= -\frac{1}{2}\bar{\psi}_P\beta^i\psi_P \\
&= -J_P^i\left(\vec{r},t\right) \\
&= -J^i\left(-\vec{r},t\right)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

e J^i muda de sinal sob paridade. Para a determinação da paridade dos componentes do espinor faremos uso das representações para as matrizes beta dos setores escalar e vetorial (dadas por (2.40a) e (2.43), respectivamente). Aplicando o operador paridade sobre o espinor do setor escalar, temos

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}\psi\left(\vec{r},t\right) &= e^{i\delta_P}\eta^0\psi\left(-\vec{r},t\right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\delta_P}\psi_1\left(-\vec{r},t\right) \\ e^{i\delta_P}\psi_2\left(-\vec{r},t\right) \\ -e^{i\delta_P}\psi_3\left(-\vec{r},t\right) \\ -e^{i\delta_P}\psi_4\left(-\vec{r},t\right) \\ -e^{i\delta_P}\psi_5\left(-\vec{r},t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

A paridade dos componentes do espinor não pode ser determinada; todavia podemos determinar a *paridade relativa* entre os componentes do espinor: os componentes ψ_1 e ψ_2 têm mesma paridade, oposta a ψ_3, ψ_4 e ψ_5. Analogamente, para o setor vetorial, temos que os componentes ψ_1, ψ_8, ψ_9 e ψ_{10} têm mesma paridade, oposta a ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5, ψ_6 e ψ_7 .

A.2 Conjugação de carga

A conjugação de carga é definida através do operador conjugação de carga $\hat{C} = \mathcal{C}K$, em que K atua sobre as funções efetuando o complexo conjugado e a conjugação da carga, se portando como um operador antilinear

$$K\left[\alpha f\left(\vec{r},t\right) + \beta g\left(\vec{r},t\right)\right]K^{-1} = \alpha^* f_C^*\left(\vec{r},t\right) + \beta^* g_C^*\left(\vec{r},t\right) \tag{A.18}$$

em que o subscrito C indica a troca da carga. A atuação do operador conjugação de carga sobre o espinor fornece

$$\begin{aligned}
\hat{C}\psi\left(\vec{r},t\right) &= \mathcal{C}K\psi\left(\vec{r},t\right) \\
&= \mathcal{C}\psi^*\left(\vec{r},t\right) \\
&\equiv \psi_C\left(\vec{r},t\right)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\hat{C}\left[\hat{C}\psi\left(\vec{r},t\right)\right] &= \hat{C}\left[\mathcal{C}\psi^*\left(\vec{r},t\right)\right] \\
&= \mathcal{C}\left[\hat{C}\psi^*\left(\vec{r},t\right)\right] \\
&= \mathcal{C}^2\psi\left(\vec{r},t\right) \\
&= \psi\left(\vec{r},t\right)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

e a matriz $\mathcal{C}$ deve cumprir $\mathcal{C}^2 = 1$.

Aplicando $\hat{C}$ à equação de DKP (2.114) obtemos

$$\begin{aligned}&\left\{-i\mathcal{C}\beta^0\mathcal{C}^{-1}\partial_0 - i\mathcal{C}\beta^i\mathcal{C}^{-1}\partial_i - m - KV_s^{(1)}K^{-1}\right.\\ &-\mathcal{C}^{-1}P\mathcal{C}^{-1}KV_s^{(2)}K^{-1} - \mathcal{C}\beta^0\mathcal{C}^{-1}KA_0^{(1)}K^{-1} - \mathcal{C}\beta^i\mathcal{C}^{-1}KA_i^{(1)}K^{-1}\\ &\left.+i\mathcal{C}[P,\beta^0]\mathcal{C}^{-1}KA_0^{(2)}K^{-1} + i\mathcal{C}[P,\beta^i]\mathcal{C}^{-1}KA_i^{(2)}K^{-1}\right\}\psi_C\left(\vec{r},t\right) = 0\end{aligned} \tag{A.21}$$

Ao confrontarmos as equações (2.114) e (A.21), de maneira a tornar (A.21) covariante, encontramos

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\beta^0\mathcal{C}^{-1} &= -\beta^0\\ \mathcal{C}\beta^i\mathcal{C}^{-1} &= -\beta^i\end{aligned}$$

que é satisfeita com $\mathcal{C} = \exp(i\delta_C)\eta^0\eta^1$. Como $\mathcal{C}^2 = 1$, o fator δ_C pode tomar os valores 0 ou $\frac{\pi}{2}$, donde concluímos que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\dagger &= \exp(-i\delta_C)\left(\eta^0\eta^1\right)^\dagger\\ &= \exp(-i\delta_C)\eta^{1\dagger}\eta^{0\dagger}\\ &= \exp(-i\delta_C)\eta^1\eta^0\\ &= \exp(-i\delta_C)\eta^0\eta^1\end{aligned} \tag{A.22}$$

logo, $\mathcal{C}$ é unitária

$$\mathcal{C}\mathcal{C}^\dagger = 1 \tag{A.23}$$

E podemos assegurar que, sob conjugação de carga, as relações

$$\begin{aligned}\mathcal{C}P\mathcal{C}^{-1} &= P\\ \mathcal{C}[P,\beta^0]\mathcal{C}^{-1} &= -[P,\beta^0]\\ \mathcal{C}[P,\beta^i]\mathcal{C}^{-1} &= -[P,\beta^i]\end{aligned} \tag{A.24}$$

são obedecidas. As funções potenciais, que são reais, devem se comportar sob conjugação de carga como

$$\begin{aligned}KV_s^{(1)}\left(\vec{r},t\right)K^{-1} &= V_{sC}^{(1)}\left(\vec{r},t\right) = V_s^{(1)}\left(\vec{r},t\right)\\ KV_s^{(2)}\left(\vec{r},t\right)K^{-1} &= V_{sC}^{(2)}\left(\vec{r},t\right) = V_s^{(2)}\left(\vec{r},t\right)\\ KA_0^{(1)}\left(\vec{r},t\right)K^{-1} &= A_{0C}^{(1)}\left(\vec{r},t\right) = -A_0^{(1)}\left(\vec{r},t\right)\\ KA_i^{(1)}\left(\vec{r},t\right)K^{-1} &= A_{iC}^{(1)}\left(\vec{r},t\right) = -A_i^{(1)}\left(\vec{r},t\right)\\ KA_0^{(2)}\left(\vec{r},t\right)K^{-1} &= A_{0C}^{(2)}\left(\vec{r},t\right) = A_0^{(2)}\left(\vec{r},t\right)\\ KA_i^{(2)}\left(\vec{r},t\right)K^{-1} &= A_{iC}^{(2)}\left(\vec{r},t\right) = A_i^{(2)}\left(\vec{r},t\right)\end{aligned} \tag{A.25}$$

A conjugação de carga da densidade de quadricorrente é obtida de maneira análoga ao caso da paridade

$$J^{\mu}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi = \frac{1}{2}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu}\psi \tag{A.26}$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{C}\psi &= \psi_C(\vec{r},t) \\ \therefore \psi &= \hat{C}^{-1}\psi_C(\vec{r},t) \\ \psi^{\dagger} = \left(\hat{C}^{-1}\psi_C\right)^{\dagger} &= \psi_C^{\dagger}\left(\hat{C}^{-1}\right)^{\dagger} = \psi_C^{\dagger}\hat{C} \end{aligned} \tag{A.27}$$

portanto

$$\begin{aligned} J^{\mu}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\psi_C^{\dagger}\hat{C}\eta^{0}\beta^{\mu}\hat{C}^{-1}\psi_C \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_C\hat{C}\beta^{\mu}\hat{C}^{-1}\psi_C \\ &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}_C\beta^{\mu}\psi_C \\ &= -J_C^{\mu}(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{A.28}$$

e J^{μ} muda de sinal sob conjugação de carga.

A conjugação de carga relativa entre os componentes do espinor mostra que os componentes ψ_2 e ψ_3 têm mesma conjugação de carga, oposta a ψ_1, ψ_4 e ψ_5, para o setor escalar. Analogamente, para o setor vetorial, temos que os componentes ψ_1, ψ_2, ψ_6, ψ_7, ψ_9 e ψ_{10} têm mesma conjugação de carga, oposta a ψ_3, ψ_4, ψ_5 e ψ_8 . É importante ressaltar que no caso independente do tempo teremos a mudança $E_C = -E$.

A.3 Reversão temporal

A reversão temporal é determinada através do operador reversão temporal, $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}T_0$, em que T_0 atua sobre as funções efetuando o complexo conjugado e a transformação $t \to -t$, atuando como um operador antilinear:

$$T_0\left[\alpha f(\vec{r},t) + \beta g(\vec{r},t)\right]T_0^{-1} = \alpha^* f^*(\vec{r},-t) + \beta^* g^*(\vec{r},-t) \tag{A.29}$$

a atuação do operador reversão temporal sobre o espinor fornece

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}\psi(\vec{r},t) &= \mathcal{T}T_0\psi(\vec{r},t) \\ &= \mathcal{T}\psi^*(\vec{r},-t) \\ &\equiv \psi_T(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{A.30}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{T}}\left[\hat{\mathcal{T}}\psi\left(\vec{r},t\right)\right] &= \hat{\mathcal{T}}\left[\mathcal{T}\psi^{*}\left(\vec{r},-t\right)\right] \\ &= \mathcal{T}\left[\hat{\mathcal{T}}\psi^{*}\left(\vec{r},-t\right)\right] \\ &= \mathcal{T}^{2}\psi\left(\vec{r},t\right) \\ &= \psi\left(\vec{r},t\right)\end{aligned} \tag{A.31}$$

e a matriz $\mathcal{T}$ deve se sujeitar a $\mathcal{T}^2 = 1$.

Aplicando $\hat{\mathcal{T}}$ à equação de DKP (2.114) obtemos

$$\begin{gathered}\left\{i\mathcal{T}\beta^{0}\mathcal{T}^{-1}\partial_{0} - i\mathcal{T}\beta^{i}\mathcal{T}^{-1}\partial_{i} - m - T_{0}V_{s}^{(1)}T_{0}^{-1}\right. \\ -\mathcal{T}P\mathcal{T}^{-1}T_{0}V_{s}^{(2)}T_{0}^{-1} - \mathcal{T}\beta^{0}\mathcal{T}^{-1}T_{0}A_{0}^{(1)}T_{0}^{-1} - \mathcal{T}\beta^{i}\mathcal{T}^{-1}T_{0}A_{i}^{(1)}T_{0}^{-1} \\ \left.+i\mathcal{T}[P,\beta^{0}]\mathcal{T}^{-1}T_{0}A_{0}^{(2)}T_{0}^{-1} + i\mathcal{T}^{-1}[P,\beta^{i}]\mathcal{T}^{-1}T_{0}A_{i}^{(2)}T_{0}^{-1}\right\}\psi_{T}\left(\vec{r},t\right) = 0\end{gathered} \tag{A.32}$$

Cotejando as equações (2.114) e (A.32), na condição de tornar (A.32) covariante, devemos ter

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\beta^{0}\mathcal{T}^{-1} &= \beta^{0} \\ \mathcal{T}\beta^{i}\mathcal{T}^{-1} &= -\beta^{i}\end{aligned} \tag{A.33}$$

que é satisfeita com $\mathcal{T} = \exp(i\delta_T)\eta^0$. Como $\mathcal{T}^2 = 1$, o fator δ_T pode assumir os valores 0 ou $\frac{\pi}{2}$, donde inferimos que

$$\mathcal{T}^{\dagger} = \exp(-i\delta_T)\eta^{0\dagger} = \exp(-i\delta_T)\eta^{0} \tag{A.34}$$

logo $\mathcal{T}$ é unitária, i.e.,

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^{\dagger} = 1 \tag{A.35}$$

Com isso, asseguramos que as relações

$$\begin{aligned}\mathcal{T}P\mathcal{T}^{-1} &= P \\ \mathcal{T}[P,\beta^{0}]\mathcal{T}^{-1} &= [P,\beta^{0}] \\ \mathcal{T}[P,\beta^{i}]\mathcal{T}^{-1} &= -[P,\beta^{i}]\end{aligned} \tag{A.36}$$

são obedecidas. As funções potenciais devem se comportar sob reversão temporal como

$$\begin{aligned}
T_0 V_s^{(1)}(\vec{r},t)\,T_0^{-1} &= V_{sT}^{(1)}(\vec{r},t) = V_s^{(1)}(\vec{r},-t) \\
T_0 V_s^{(2)}(\vec{r},t)\,T_0^{-1} &= V_{sT}^{(2)}(\vec{r},t) = V_s^{(2)}(\vec{r},-t) \\
T_0 A_0^{(1)}(\vec{r},t)\,T_0^{-1} &= A_{0T}^{(1)}(\vec{r},t) = A_0^{(1)}(\vec{r},-t) \\
T_0 A_i^{(1)}(\vec{r},t)\,T_0^{-1} &= A_{iT}^{(1)}(\vec{r},t) = -A_i^{(1)}(\vec{r},-t) \\
T_0 A_0^{(2)}(\vec{r},t)\,T_0^{-1} &= A_{0T}^{(2)}(\vec{r},t) = -A_0^{(2)}(\vec{r},-t) \\
T_0 A_i^{(2)}(\vec{r},t)\,T_0^{-1} &= A_{iT}^{(2)}(\vec{r},t) = A_i^{(2)}(\vec{r},-t)
\end{aligned} \tag{A.37}$$

A reversão temporal da densidade de quadricorrente é obtida por

$$J^{\mu}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi = \frac{1}{2}\psi^{\dagger}\eta^{0}\beta^{\mu}\psi \tag{A.38}$$

em que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{T}}\psi &= \psi_T(\vec{r},t) \\
\therefore \psi &= \hat{\mathcal{T}}^{-1}\psi_T(\vec{r},t) \\
\therefore \psi^{\dagger} &= \psi_T^{\dagger}\hat{\mathcal{T}}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

portanto

$$\begin{aligned}
J^{\mu}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\psi_T^{\dagger}\hat{\mathcal{T}}\eta^{0}\beta^{\mu}\hat{\mathcal{T}}^{-1}\psi_T \\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}_T\hat{\mathcal{T}}\beta^{\mu}\hat{\mathcal{T}}^{-1}\psi_T
\end{aligned} \tag{A.40}$$

E determinamos a reversão temporal de J^0

$$\begin{aligned}
J^{0}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_T\hat{\mathcal{T}}\beta^{0}\hat{\mathcal{T}}^{-1}\psi_T \\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}_T\beta^{0}\psi_T \\
&= J_T^{0}(\vec{r},t)
\end{aligned} \tag{A.41}$$

portanto, J^0 é invariante sob reversão temporal. Analogamente, para J^i

$$\begin{aligned}
J^{i}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_T\hat{\mathcal{T}}^{-1}\beta^{i}\hat{\mathcal{T}}\psi_T \\
&= -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_T\beta^{i}\psi_T\right) \\
&= -J_T^{i}(\vec{r},t)
\end{aligned} \tag{A.42}$$

e J^i muda de sinal sob reversão temporal.

A reversão temporal relativa entre os componentes do espinor mostra que, como no caso da paridade, os componentes ψ_1 e ψ_2 têm mesma reversão temporal, oposta a ψ_3, ψ_4

e ψ_5, para o setor escalar. Para o setor vetorial, temos que os componentes ψ_1, ψ_8, ψ_9 e ψ_{10} têm mesma reversão temporal, oposta a ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5, ψ_6 e ψ_7 .

Apêndice B

Forma hamiltoniana e hermiticidade

B.1 Caso livre

A forma hamiltoniana da equação de DKP livre é dada por

$$i\partial_0\psi = H\psi, \qquad H = \left[\beta^j, \beta^0\right](i\partial_j) + m\beta^0. \tag{B.1}$$

com o vínculo

$$\beta^k\beta^0\beta^0(i\partial_k)\psi = m\left(1 - \beta^0\beta^0\right)\psi \tag{B.2}$$

A partir da álgebra das matrizes β é fácil mostrar que

$$\left[\beta^i, \beta^0\right]^\dagger = \left[\beta^i, \beta^0\right] \tag{B.3}$$

e o operador momento linear $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$ é hermitiano e comuta com as matrizes β^μ. Com tudo isso, podemos mostrar que $H^\dagger = H$.

Por outro lado, multiplicando (B.1) por β^0 à esquerda e usando o vínculo (B.2), obtemos

$$\beta^0 H = -\beta^k(i\partial_k) + m \tag{B.4}$$

Aplicando o conjugado hermitiano sobre a equação (B.4) temos que

$$\left(\beta^0 H\right)^\dagger = \beta^k(i\partial_k) + m \neq \beta^0 H \tag{B.5}$$

deste resultado Zeleny [79] conclui que nem a forma hamiltoniana livre é neo-hermitiana por essa razão ele tenta construir hamiltonianas neo-hermitianas.

Em contrapartida, se usamos o critério correto fornecido na seção 2.5 pode-se mostrar que

$$\eta^0\left(\beta^0 H\right) = -\eta^0\beta^k(i\partial_k) + \eta^0 m \tag{B.6}$$

e aplicando o conjugado hermitiano em (B.6) temos que

$$\left[\eta^0\left(\beta^0 H\right)\right]^\dagger = \beta^k\eta^0\left(i\partial_k\right) + \eta^0 m = \eta^0\left(\beta^0 H\right) \tag{B.7}$$

Portanto a forma hamiltoniana livre da teoria DKP é hermitiana com respeito a η^0.

B.2 Caso com interação eletromagnética

A análise desenvolvida na seção anterior pode ser estendida para o caso com interação eletromagnética. Neste caso a forma hamiltoniana tem a seguinte forma

$$i\partial_0\psi = H\psi, \quad H = i\left[\beta^j, \beta^0\right] D_j + eA_0^{(1)} + m\beta^0 + \frac{ie}{2m}F_{\mu\nu}\left(\beta^\mu\beta^0\beta^\nu + \beta^\mu\eta^{0\nu}\right) \tag{B.8}$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu^{(1)}$ é a derivada covariante e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{(1)} - \partial_\nu A_\mu^{(1)}$ é o tensor campo eletromagnético. Além disso, o vínculo torna-se

$$\beta^k\beta^0\beta^0\left(i\partial_k\right)\psi - e\beta^k\beta^0\beta^0 A_k\psi = m\left(1 - \beta^0\beta^0\right)\psi \tag{B.9}$$

Visto que

$$\left(iF_{0j}\beta^j\beta^0\beta^0\right)^\dagger = -\left(iF_{0j}\beta^j\beta^0\beta^0\right) + iF_{0j}\beta^j \tag{B.10}$$

H não é igual a $H^\dagger$.

Por sua vez, multiplicando (B.8) por β^0 à esquerda e usando o vínculo (B.9), obtemos

$$\beta^0 H = -\beta^k\left(i\partial_k\right) + e\beta^k A_k + e\beta^0 A_0 + m \tag{B.11}$$

Aplicando o conjugado hermitiano sobre a equação (B.11) temos que

$$\left(\beta^0 H\right)^\dagger = \beta^k\left(i\partial_k\right) - e\beta^k A_k + e\beta^0 A_0 + m \neq \beta^0 H \tag{B.12}$$

de forma semelhante ao caso livre.

Por outro lado, pode-se mostrar que

$$\eta^0\left(\beta^0 H\right) = -\eta^0\beta^k\left(i\partial_k\right) + e\eta^0\beta^k A_k + e\beta^0 A_0 + \eta^0 m \tag{B.13}$$

e aplicando o conjugado hermitiano na equação anterior obtemos

$$\left[\eta^0\left(\beta^0 H\right)\right]^\dagger = \beta^k\eta^0\left(i\partial_k\right) - e\beta^k\eta^0 A_k + e\beta^0 A_0 + \eta^0 m = \eta^0\left(\beta^0 H\right) \tag{B.14}$$

Portanto a forma hamiltoniana com interação eletromagnética da teoria DKP é hermitiana com respeito a η^0.

Apêndice C

Propriedades dos operadores projeção

C.1 Setor escalar ($S = 0$)

O setor escalar da teoria de DKP pode ser descrito por um conjunto de operadores $\{P, {}^{\mu}P, P^{\mu}, {}^{\mu}P^{\nu}\}$ com as propriedades [8]:

$$\begin{aligned} P\left(P^{\mu}\right) &= P^{\mu}, \quad \left({}^{\mu}P\right)P = {}^{\mu}P \\ \left(P^{\mu}\right)P &= P\left({}^{\mu}P\right) = 0 \\ \left({}^{\mu}P\right)\left(P^{\nu}\right) &= {}^{\mu}P^{\nu}, \quad \left(P^{\mu}\right)\left({}^{\nu}P\right) = g^{\mu\nu}P \end{aligned} \tag{C.1}$$

Portanto

$$\begin{aligned} P^{2} &= P, \quad P\left({}^{\mu}P^{\nu}\right) = \left({}^{\mu}P^{\nu}\right)P = 0, \quad \left(P^{\mu}\right)\left(P^{\nu}\right) = \left({}^{\nu}P\right)\left({}^{\mu}P\right) = 0 \\ \beta^{\mu} &= P^{\mu} + {}^{\mu}P, \quad \bar{\psi}P = \left(P\psi\right)^{\dagger} \end{aligned} \tag{C.2}$$

Naturalmente, decorre da álgebra-P que

$$\beta^{0}\beta^{0}\beta^{j} = P^{j}, \quad \beta^{j}\beta^{0}\beta^{0} = {}^{j}P \tag{C.3}$$

C.2 Setor vetorial ($S = 1$)

Da mesma forma que no caso do setor escalar, o setor vetorial da teoria DKP pode ser descrita por um conjunto de operadores $\{{}^{\mu}V^{\nu},\, {}^{\mu}V^{\nu\lambda},\, {}^{\nu\lambda}V^{\mu},\, {}^{\nu\lambda}V^{\mu\sigma}\}$ [8], com

$$
\begin{aligned}
{}^{\mu}V^{\nu} &= \left({}^{\mu}R\right)\left(R^{\nu}\right), \quad {}^{\mu}V^{\nu\lambda} = \left({}^{\mu}R\right)\left(R^{\nu\lambda}\right) \\
{}^{\nu\lambda}V^{\mu} &= \left({}^{\nu\lambda}R\right)\left(R^{\mu}\right), \quad {}^{\nu\lambda}V^{\mu\sigma} = \left({}^{\nu\lambda}R\right)\left(R^{\mu\sigma}\right)
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\left(R^{\mu}\right)\left({}^{\nu}R\right) &= \left(R^{0}\right)g^{\mu\nu}, \quad \left(R^{\mu}\right)\left(R^{\nu\lambda}\right) = \left(R^{\nu\lambda}\right)g^{\mu 0}, \quad \left(R^{\mu}\right)\left(R^{\nu}\right) = \left(R^{\nu}\right)g^{\mu 0} \\
\left(R^{\mu\nu}\right)\left({}^{\lambda}R\right) &= \left(R^{\mu}\right)\left({}^{\nu\lambda}R\right) = \left(R^{\mu\nu}\right)\left(R^{\lambda}\right) = 0 \\
\left(R^{\mu\nu}\right)\left({}^{\lambda\sigma}R\right) &= \left(R^{0}\right)\Delta^{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad \Delta^{\mu\nu\lambda\sigma} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

tendo em vista (C.5) obtemos

$$
\begin{aligned}
\left({}^{\mu}V^{\nu\lambda}\right)\left({}^{\rho\sigma}V^{\tau}\right) &= \left({}^{\mu}V^{\tau}\right)\Delta^{\nu\lambda\rho\sigma} \\
\left({}^{\mu}V^{\nu\lambda}\right)\left({}^{\tau}V^{\rho\sigma}\right) &= \left({}^{\nu\lambda}V^{\mu}\right)\left({}^{\rho\sigma}V^{\tau}\right) = 0 \\
\beta^{\mu} &= \sum_{\lambda}\left({}^{\mu\lambda}V^{\lambda} + {}^{\lambda}V^{\lambda\mu}\right) \\
\bar{\psi}\left(R^{0}\right) &= \left(R^{0}\psi\right)^{\dagger}\eta^{00}, \quad \bar{\psi}\left({}^{i0}R\right) = \left(R^{i0}\psi\right)^{\dagger}\eta^{00}
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

Além disso, podemos obter algumas relações úteis

$$
\begin{aligned}
\beta^{0}\beta^{0}\beta^{i} &= \sum_{\lambda}\left({}^{\lambda}R\right)\left(R^{\lambda i}\right) - \left({}^{0}R\right)\left(R^{0i}\right) - \left({}^{0i}R\right)\left(R^{0}\right) \\
\beta^{i}\beta^{0}\beta^{0} &= \sum_{\lambda}\left(R^{i\lambda}\right)\left(R^{\lambda}\right) - \left({}^{i0}R\right)\left(R^{0}\right) - \left({}^{i}R\right)\left(R^{i0}\right)
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

Referências Bibliográficas

[1] G. Petiau, Acad. R. Belg. A. Sci. Mém. Collect. 16, 1, 1936.

[2] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A 166, 127, 1938.

[3] R.J. Duffin, Phys. Rev. 54, 1114, 1938.

[4] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A 173, 91, 1939.

[5] M. Nowakowski, Phys. Lett. A 244, 329, 1998.

[6] J.T. Lunardi et al., Phys. Lett. A 268, 165, 2000.

[7] M. Riedel, Relativistische Gleichungen fuer Spin-1 Teilchen, Diplomarbeit, Institute for Theorical Physics, Johann Wolfgang Goethe-University, Frankfurt/Main, 1979.

[8] E. Fischblach, M.M. Nieto e C.K. Scott, J. Math. Phys. 14, 1760, 1973.

[9] T.R. Cardoso, L.B. Castro e A.S. de Castro, Int. J. Theor. Phys. 49, 10, 2010.

[10] E. Fischbach et al., Phys. Rev. Lett. 26, 1200, 1971; E. Fischbach et al., Phys. Rev. Lett. 27, 1407, 1971; E. Fischbach e M.M. Nieto, Phys. Rev. Lett. 29, 1046, 1972; N.G. Deshpande e P. C. McNamee, Phys. Rev. D 5, 1012, 1972; A.O. Barut e Z.Z. Aydin, Phys. Rev. D 6, 3340, 1972; E. Fischbach, M.M. Nieto e C.K. Scott, Phys. Rev. D 7, 207, 1973; Z.Z. Aydin e A.O. Barut, Phys. Rev. D 7, 3522, 1973; M.D. Scadron e R.L. Thews, Phys. Rev. D 9, 2180, 1974; E. Fischbach et al., Phys. Rev. D 9, 2183, 1974; E. Fischbach, M.M. Nieto e C.K. Scott, Prog. Theor. Phys. 51, 1585, 1974; F.T. Meiere et al., Phys. Rev. D 8, 4209, 1973.

[11] R.F. Guertin e T.L. Wilson, Phys. Rev. D 15, 1518, 1977.

[12] B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman e P.M. Mathews, J. Phys. A 12, 665, 1979.

[13] R.F. Guertin e T.L. Wilson, Nuovo Cimento 18, 483, 1977.

[14] B.C. Clark et al., Phys. Rev. Lett. 55, 592, 1985.

[15] G. Kälbermann, Phys. Rev. C 34, 2240, 1986; R.E. Kozack et al., Phys. Rev. C 37, 2898, 1988; R.E. Kozack, Phys. Rev. C 40, 2181, 1989.

[16] V.K. Mishra et al., Phys. Rev. C 43, 801, 1991.

[17] L.J. Kurth et al., Phys. Rev. C 50, 2624, 1994; R.C. Barret e Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A 585, 311c, 1995; L.J. Kurth et al., Nucl. Phys. A 585, 335c, 1995.

[18] S. Ait-Tahar, J.S. Al-Khalili e Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A 589, 307, 1995.

[19] B.C. Clark et al., Phys. Lett. B 427, 231, 1998.

[20] P. Ghose, D. Home e M.N.S. Roy, Phys. Lett. A, 183, 267, 1993.

[21] P. Ghose, Phys. Lett. A, 191, 362, 1994.

[22] P. Ghose, Found. Phys., 26, 1441, 1996.

[23] P. Ghose e M.K. Samal, Phys. Rev. E, 64, 036620, 2001.

[24] P. Ghose et al., Phys. Lett. A, 290, 205, 2001.

[25] P. Ghose, M.K. Samal e A. Datta, Phys. Lett. A, 315, 23, 2003.

[26] W. Struyve et al., Phys. Lett. A 322, 84, 2004.

[27] A. Datta, High Spin Field Theories and Relativistic Quantum Mechanics of Bosons, in Bosons, Ferromagnetism and Crystal Growth Research, Horizons in World Physics, edited by E. Seifer (Nova Publishers, New York, 2007) Vol. 257, Chap. 4, pp. 119-149.

[28] T.R. Cardoso, L.B. Castro e A.S. de Castro, Phys. Lett. A 372, 5964, 2008.

[29] V. Gribov, Eur. Phys J. C 10, 71, 1999.

[30] I.V. Kanatchikov, Rep. Math. Phys. 46, 107, 2000.

[31] M.C.B. Fernandes e J.D.M. Viannna, Found. Phys. 29, 201, 1999; A.O. Bolivar, Physica A 315, 601, 2002.

[32] V.M. Red´kov, quant-ph/9812007; J.T. Lunardi, B.M. Pimentel e R.G. Teixieira, Gen. Rel. Grav. 34, 491, 2002; R. Casana et al., Int. J. Mod. Phys. A 17, 4197, 2002; R. Casana et al., Gen. Rel. Grav. 34, 1941, 2002; R. Casana et al., Class. Quantum Grav. 20, 2457, 2003; R. Casana et al., Class. Quantum Grav. 22, 3083, 2003; K. Sogut e A. Havare, Class. Quantum Grav. 23, 7129, 2005; R. Casana, C.A.M. de Melo e B.M. Pimentel, Class. Quantum Grav. 24, 723, 2007.

[33] J.T. Lunardi et al., Int. J. Mod. Phys. A 17, 205, 2002.

[34] B.M. Pimentel e V.Ya. Fainberg, Theor. Math. Phys. 124, 1234, 2000; V.Ya. Fainberg e B.M. Pimentel, Phys. Lett. A 271, 16, 2000.

[35] M. de Montigny et al., J. Phys. A 33, L273, 2000; M. de Montigny et al., J. Phys. A 34, 8901, 2001; M.C.B. Fernandes, A.E. Santana e J.D.M. Viannna, J. Phys. A 36, 3841, 2003; J.D.M. Viannna, M.C.B. Fernandes e A.E. Santana, Found. Phys. 35, 109, 2005; E.S. Santos e L.M. Abreu, J. Phys. A 41, 075407, 2008.

[36] R. Casana et al., hep-th/0506193.

[37] R. Casana et al., Phys. Lett. A 316, 33, 2003.

[38] J. Daicic e N.E. Frankel, J. Phys. A 26, 1397, 1993; K. Sogut, A. Havare e I. Acikgoz, J. Math. Phys. 43, 3952, 2002.

[39] J.A. Swansson e B.H.J. McKellar, J. Phys. A 34, 1051, 2001.

[40] A. Boumali, Can. J. Phys. 82, 67, 2004; A. Boumali, Can. J. Phys. 85, 1417, 2007.

[41] M. Merad, Int. J. Theor. Phys. 46, 2105, 2007.

[42] M. Merad, H. Bada e A. Lecheheb, Czech. J. Phys. 56, 765, 2006.

[43] N. Debergh, J. Ndimubandi e D. Strivay, Z. Phys. C 56, 421, 1992; Y. Nedjadi e R.C. Barret, J. Phys. A 27, 4301, 1994.

[44] Y. Nedjadi, S. Ait-Tahar e R.C. Barret, J. Phys. A 31, 3867, 1998.

[45] Y. Nedjadi e R.C. Barret, J. Phys. A 31, 6717, 1998.

[46] D.A. Kulikov, R.S. Tutik e A.P. Yaroshenko, Mod. Phys. Lett. A 20, 43, 2005.

[47] I. Boztosun et al., J. Math. Phys. 47, 062301, 2006.

[48] A. Boumali, J. Math. Phys. 49, 022302, 2008.

[49] Y. Kasri e L. Chetouani, Int. J. Theor. Phys. 47, 2249, 2008.

[50] L.M. Abreu, E.S. Santos e J.D.M. Vianna, J. Phys. A: Math. Theor. 43, 495402, 2010.

[51] A. Boumali, Phys. Scr. 76, 669, 2007.

[52] F. Yaşuk M. Karakoc e I. Boztosun, Phys. Scr. 78, 045010, 2008.

[53] L. Chetouani et al., Int. J. Theor. Phys. 43, 1147, 2004.

[54] T.R. Cardoso, L.B. Castro e A.S. de Castro, Nuclear Phys. B, Proceedings Supplement, 199, 203, 2010.

[55] L. B. Castro, T. R. Cardoso e A. S. de Castro, Nuclear Phys. B, Proceedings Supplement, 199, 207, 2010.

[56] B. Boutabia-Chéraitia e T. Boudjedaa, Phys. Lett. A 338, 97, 2005.

[57] F. Yaşuk et al., Phys. Scr. 71, 340, 2005.

[58] Y. Nedjadi e R.C. Barret, J. Math. Phys. 35, 4517, 1994.

[59] Y. Nedjadi e R.C. Barret, J. Phys. G 19, 87, 1993.

[60] S. Gönen, A. Havare e N. Unal, hep-th/0207087.

[61] T.R. Cardoso, L.B. Castro e A.S. de Castro, Can. J. Phys. 87, 857, 2009.

[62] T.R. Cardoso, L.B. Castro e A.S. de Castro, Can. J. Phys. 87, 1185, 2009.

[63] T.R. Cardoso, L.B. Castro e A.S. de Castro, J. Phys. A, Math. Theor. 43, 055306, 2010.

[64] A. Ronveaux, Heun's Differential Equations, Oxford University Press, New York, 1995.

[65] L.B. Castro e A.S. de Castro, Phys. Lett. A, 375, 2596, 2011.

[66] L.B. Castro e A.S. de Castro, The central field problem for massive spinless bosons coupled by a nonminimal vector interaction, XXX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2009.

[67] O. Klein, Zeit. Physik 37, 895, 1926; V. Fock, Zeit. Physik 38, 242, 1926; W. Gordon, Zeit. Physik 40, 117, 1926.

[68] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. A 117, 610, 1928.

[69] L. de Broglie, Compt. Rend. 199, 445, 1934.

[70] H.J. Bhabha, Rev. Mod. Phys. 17, 200, 1945; H.J. Bhabha, Rev. Mod. Phys. 21, 451, 1949.

[71] R.A. Krajcik e M.M. Nieto, Phys. Rev. D 10, 4049, 1974.

[72] R.A. Krajcik e M.M. Nieto, Am. J. Phys. 45, 818, 1977.

[73] N. Debergh, J. Ndimubandi e D. Strivay, Z. Phys. C 56, 421, 1992.

[74] Y. Nedjadi e R.C. Barret, J. Phys. A 27, 4301, 1994.

[75] H.M. Pilkuhn, Relativistic Quantum Mechanics. Berlin, Springer, 2003.

[76] H. Umezawa, Quantum Field Theory. North-Holland, Amsterdan, 1956.

[77] M. Merad e S. Bensaid, J. Math. Phys. 48, 073515, 2007.

[78] L.B. Castro e A.S. de Castro, J. Math. Phys. 51, 034101, 2010.

[79] W.B. Zeleny, Phys. Rev. 158, 1223, 1967.

[80] R. Shankar, Principles of Quantum Mechanics, 2nd ed., Plenum Press, New York, 1994.

[81] G.B. Arfken e H.J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, 5th ed., Harcourt/Academic Press, San Diego, 1966.

[82] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, Toronto, 1965.