UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira - SP

WALLYSONN ALVES DE SOUZA

PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Ilha Solteira - SP
2013

WALLYSONN ALVES DE SOUZA

PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo C. Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira - SP
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Souza, Wallysonn Alves de.
S729p Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno / Wallysonn Alves de Souza. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2013
92 f. :il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2013

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Controlador chaveado. 2. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. 3. Incertezas politópicas. 4. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 5. Desigualdades matriciais bilineares (BMIs). 6. Sistemas chaveados.

unesp **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

AUTOR: WALLYSONN ALVES DE SOUZA

ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RICARDO HIROSHI CALDEIRA TAKAHASHI
Departamento de Matemática / Universidade Federal de Minas Gerais

Profa. Dra. GRACE SILVA DEAECTO
Departamento de Mecânica Computacional / Faculdade de Engenharia Mecânica

Data da realização: 30 de agosto de 2013.

Aos meus pais
Edivam e Janete,
à minha esposa
Eliete Rejane
e às minhas filhas
Marianne e Manuella.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse até aqui. Em especial, agradeço:

- A Deus, por ter me concedido força, saúde e determinação;
- Ao Prof. Dr. Marcelo C. M. Teixeira, por todos ensinamentos, incentivo, confiança e orientação;
- A minha esposa Eliete pelo apoio, paciência e compreensão;
- Aos Prof. Dr. Edvaldo Assunção e ao Prof. Dr. Rodrigo Cardim, pelo acompanhamento nos trabalhos, sugestões e incentivo;
- Aos colegas dos laboratório LPC e LCPC pela ajuda e convívio;
- Aos colegas do PPGEE - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, pela convivência e pela ajuda de forma direta ou indireta;
- Ao IFG - Instituto Federal de Goiás, Câmpus Jataí, por ter concedido o afastamento integral para a realização deste doutorado;
- A todos os professores e funcionários da FEIS-UNESP, que de forma direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta tese;
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro;
- À FAPESP (Processo número 2011/17610-0) pela aquisição do sistema *2D ball balancer*.

RESUMO

Esta tese propõe novos métodos de projeto de controle chaveado para algumas classes de sistemas: lineares com incertezas politópicas e não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Inicialmente são propostos métodos que utilizam uma função quadrática de Lyapunov e a estabilidade quadrática é utilizada para projetar vários ganhos do controlador, baseado em desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities - LMIs*). Os controladores propostos são compostos por um único ganho que é escolhido por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função quadrática de Lyapunov. Para o caso linear, os controladores concebidos apresentam um melhor desempenho quando comparados com o controlador que emprega um único ganho de realimentação do estado normalmente implementado, e as LMIs utilizadas para encontrar os ganhos são mais relaxadas. Para o caso não linear, os controladores propostos também apresentaram um bom desempenho e eliminam a necessidade de encontrar as expressões explícitas das funções de pertinência que muitas vezes podem ter expressões longas e/ou complexas, ou serem desconhecidas devido às incertezas na planta. Em seguida foram propostos novos métodos de projeto de controle chaveado e um novo critério de estabilidade para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. O projeto do controlador chaveado é baseado na função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo e na minimização da derivada temporal desta função de Lyapunov. As condições do novo critério de estabilidade são representadas por um tipo de desigualdades matriciais bilineares (do inglês *Bilinear Matrix Inequalities - BMIs*) que podem ser resolvidas de forma eficiente pelo método *path-following*. Além disso, os controladores propostos também podem operar mesmo quando a referência do sinal de controle é incerta. Para verificar a eficácia da metodologia proposta são apresentadas simulações numéricas, incluindo o projeto de controladores robustos não lineares de um sistema bola viga e de um levitador magnético, e o projeto de controle robusto linear de um sistema *2D ball balancer*, sujeito a falhas, que foi implementado no laboratório.

Palavras-chave: Controlador chaveado. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Incertezas politópicas. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Desigualdades matriciais bilineares (BMIs). Sistemas chaveados.

ABSTRACT

This thesis proposes new switched control design methods for some classes of linear systems with polytopic uncertainties and uncertain nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models. Initially, are proposed methods that use a quadratic Lyapunov function and quadratic stability to design, based on Linear Matrix Inequalities (LMIs), the feedback gains. The controller gain is chosen by a switching law that returns the smallest value of the time derivative of the quadratic Lyapunov function. For the linear case, the proposed methodology presents a better performance when compared with the controller usually implemented which uses only one state feedback gain and the LMIs for finding the switched gains are more relaxed. For nonlinear plants described by Takagi-Sugeno fuzzy models, the proposed controller also presented good performance and eliminates the need to obtain the explicit expressions of the membership functions of the Takagi-Sugeno fuzzy controllers, which can often have long and/or complex expressions, or may not be known, for instance due to the plant uncertainties. The design of the switched controllers is based on a minimum-type piecewise quadratic Lyapunov function and the minimization of the time derivative of this Lyapunov function. The conditions of the new stability criterion are represented by a kind of Bilinear Matrix Inequalities (BMIs) that can be efficiently solved by the path-following method. Furthermore, the proposed switched controller can also operate even with an uncertain reference control signal. To verify the efficacy of the proposed methodology are presented numerical simulations, including robust nonlinear control designs of a ball-and-beam system and of a magnetic levitator, and finally a robust linear control design of a 2D ball balancer system, subject to failures, that was implemented in the laboratory.

Keywords: Switched controller. Takagi-Sugeno fuzzy models. Polytopic uncertainties. Linear matrix inequalities (LMIs). Bilinear matrix inequalities (BMIs). Switched systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Regiões de factibilidade utilizando o Teorema 1 (“$+$”) e o método proposto com o Corolário 1 (“$\circ$”). 35

Figura 2 Regiões factíveis utilizando os Teoremas 1 e 7 (“$+$”) e o método proposto com o Corolário 1 e o Teorema 7 (“$\circ$”). 36

Figura 3 Regiões factíveis utilizando os Teoremas 4 e 7 (“$+$”) e o método proposto com os Teoremas 6 e 7 (“$\circ$”). 37

Figura 4 Levitador Magnético. 38

Figura 5 Regiões de factibilidade utilizando os Teoremas 4 e 7 (“$+$”) e o método proposto com os Teoremas 5 e 7 (“$\circ$”). 40

Figura 6 Posição $y(t) = \bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$ e corrente elétrica $i(t)$. 42

Figura 7 Posição $y(t) = \bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$ e corrente elétrica $i(t)$, do sistema controlado, utilizando o controlador chaveado (42)-(43), considerando $y_0 = 0,09$m e $m = 0,08$Kg, $y_0 = 0,05$m e $m = 0,04$Kg, $y_0 = 0,08$m e $m = 0,05$Kg, para $t \in [0,2)$, $t \in [2,4)$ e $t \geq 4$s, respectivamente, com taxa de decaimento $\beta = 5$, restrição nos ganhos do controlador $\eta = 7$ e $\eta_x = 10$ e $\xi = 0$. 43

Figura 8 *2D ball balancer*. 44

Figura 9 Planta esquemática do *2D ball balancer* na direção x. 44

Figura 10 Simulação numérica da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u_σ do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador chaveado (33). 46

Figura 11 Simulação numérica da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador clássico (3). 47

Figura 12 Resultados práticos da direção x: posição x, ângulo θ e sinal de controle u_σ do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador chaveado (33). 48

Figura 13 Resultados práticos da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u_σ do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador chaveado (33). 48

Figura 14 Resultados práticos da direção x: posição x, ângulo θ e sinal de controle u do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador clássico (3). 49

Figura 15 Resultados práticos da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador clássico (3). 49

Figura 16 Resultados práticos da posição $x \times y$ do *2D ball balancer*. 50

Figura 17 Sistema bola-viga. 57

Figura 18 Variáveis de estado do sistema bola-viga (80) utilizando o controlador chaveado (65) (linha contínua) e o controlador fuzzy (20) (linha pontilhada), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \;\; -1 \;\; -0,2 \;\; 0]^T$. . 59

Figura 19 Sinal de controle do sistema bola-viga (80) utilizando o controlador chaveado (65) (linha contínua) e o controlador fuzzy (20) (linha pontilhada), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \;\; -1 \;\; -0,2 \;\; 0]^T$. . 60

Figura 20 Variáveis de estado do levitador magnético (49) e estado x_3 dado em (94), utilizando o controlador chaveado (65) (linha contínua) e controlador fuzzy (20) (linha pontilhada), para $y_0 \in [0,04, \;\; 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1$m, $y_0 = 0,04$m e $y_0 = 0,08$m, para $t \in [0 \; 1)$, $t \in [1 \; 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente. 63

Figura 21 Sinal de controle chaveado $v(t)$ (65) e corrente elétrica chaveada $i(t)$ (linha contínua), sinal de controle fuzzy (20) e corrente elétrica $i(t)$ (linha pontilhada), para $y_0 \in [0,04, \;\; 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1$m, $y_0 = 0,04$m e $y_0 = 0,08$m, para $t \in [0 \; 1)$, $t \in [1 \; 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente. 63

Figura 22 Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$, velocidade $(\bar{x}_2(t))$ e corrente elétrica $(i_{(\sigma,\xi)}(t))$ do sistema controlado, considerando $y_0 = 0,08$m e $m = 0,09$Kg, $y_0 = 0,05$m e $m = 0,08$Kg e $y_0 = 0,07$m e $m = 0,1$Kg, para $t \in [0 \; 1)$, $t \in [1 \; 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente. 66

Figura 23 Variáveis de estado e sinal de controle do sistema controlado, utilizando o controlador chaveado (110) (linha contínua) e o controlador fuzzy chaveado (108) (linha pontilhada), considerando a condição inicial $[-2 \;\; 1]^T$. 75

Figura 24 Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$, velocidade $(\bar{x}_2(t))$ e corrente elétrica $(i_{(v,\sigma,\xi)}(t))$ do sistema controlado, considerando $y_0 = 0,05$m e $m = 0,06$Kg, $y_0 = 0,1$m e $m = 0,1$Kg e $y_0 = 0,07$m e $m = 0,1$Kg, para $t \in [0\ 1)$, $t \in [1\ 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente. 79

Figura 25 Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$, velocidade $(\bar{x}_2(t))$ e corrente elétrica $(i_{(v,\sigma,\xi)}(t))$ do sistema controlado, considerando $y_0 = 0,05$m e $m = 0,06$Kg, $y_0 = 0,1$m e $m = 0,1$Kg e $y_0 = 0,07$m e $m = 0,1$Kg, para $t \in [0\ 1)$, $t \in [1\ 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente. 80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Parâmetros do sistema *2D ball balancer*.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 RESULTADOS PRELIMINARES 21

2.1 Estabilidade de Sistemas Lineares com Incertezas Politópicas 21

2.1.1 Estabilidade de Sistemas Lineares via LMIs 22

2.2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno e Resultados de Estabilidade 23

2.2.1 Estabilidade de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno via LMIs 25

2.3 Estabilidade e Índice de Desempenho de Sistemas Lineares e Não Lineares via LMIs 26

2.4 Conclusões Parciais 28

3 PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS PARA SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZAS POLITÓPICAS 29

3.1 Caso 1: Sistemas Lineares com uma Matriz Constante $B(\alpha) = B$ 29

3.2 Caso 2: Sistemas Lineares com uma Matriz Incerta $B(\alpha)$ 31

3.3 Caso 3: Sistemas Lineares com Incertezas no Sinal de Controle 32

3.4 Exemplos 34

3.4.1 Projeto de um controlador chaveado para um levitador magnético 38

3.5 Projeto e Implementação de um Controle Robusto Chaveado para um Sistema 2D Ball Balancer 42

3.5.1 Simulações 46

3.5.2 Resultados Práticos 47

3.6 Conclusões Parciais 50

4 PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS 51

4.1 Caso 1: Sistema Fuzzy com uma Matriz Constante $B(\alpha) = B$ 52

4.2 Caso 2: Sistema Fuzzy com Não Linearidades na Matriz $B(\alpha)$ 53

4.3 Caso 3: Sistema Fuzzy com Incerteza no Sinal de Controle 54

4.4 Exemplos 56

4.4.1 Exemplo do Caso 1: Sistema Bola Viga 56

4.4.2 Exemplo do Caso 2: Levitador Magnético 60

4.4.3 Exemplo do Caso 3: Levitador Magnético 64

4.5 Conclusões Parciais 66

5 CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS UTILIZANDO FUNÇÃO DE LYAPUNOV QUADRÁTICA POR PARTES 67

5.1 Controlador Fuzzy Chaveado 68

5.2 Controlador Chaveado 68

5.2.1 Controlador Chaveado com Incerteza na Referência da Entrada de Controle 72

5.3 Exemplos Numéricos 74

5.3.1 Exemplo 1: Estudo Comparativo do Método Proposto 74

5.3.2 Exemplo 2: Levitador Magnético 76

5.4 Conclusões Parciais 81

6 CONCLUSÕES 82

6.1 Perspectivas Futuras: 83

6.2 Publicações 83

6.2.1 Artigos completos publicados em periódicos *83*

6.2.2 Trabalhos completos publicados em anais de congressos *83*

6.2.3 Trabalhos aceitos para publicação em anais de congresso *84*

REFERÊNCIAS **85**

APÊNDICE A - O MÉTODO *PATH-FOLLOWING* **91**

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem crescido muito o interesse no estudo de problemas vinculados à teoria de controle. Boa parte destes estudos estão relacionados com análises de estabilidade e o projeto de novos controladores, com especificação de índices de desempenho como, por exemplo, taxa de decaimento, restrições na entrada e saída de controle e robustez. De uma forma geral, o grande número de estudos foi inspirado pelo uso das Desigualdades Matriciais Lineares, que aqui, serão chamadas de LMIs (do inglês *"Linear Matrix Inequalities - LMIs"*). Segundo Boyd et al. (1994), a história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos remonta há mais de 100 anos, e começa em cerca de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que hoje chamamos de teoria de Lyapunov. Naquela época, o teorema de Lyapunov, adaptado para sistemas lineares contínuos no tempo, poderia ser formulado diretamente em termos de LMIs. Mas, principalmente na década de 1980 foram abertos caminhos para que problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos, como por exemplo, com o trabalho de Bernussou, Peres e Geromel (1989). A partir daí, garantir que um sistema linear realimentado é estável é equivalente a encontrar um ganho estabilizante K e uma matriz de Lyapunov P simétrica positiva definida. Em seguida, apareceram novas condições baseadas em LMIs que garantiam a estabilidade assintótica global de sistemas não lineares, principalmente utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno como, por exemplo, (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Nos últimos anos, tem-se usado muito controladores fuzzy para resolver problemas de estabilidade de sistemas não lineares (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANIGUCHI et al., 2001; TEIXEIRA; ŻAK, 1999; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; CARDIM et al., 2007; GAINO et al., 2008), e em geral, no projeto a planta é representada através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno proposto em (TAKAGI; SUGENO, 1985). Os modelos fuzzy Takagi-Sugeno consistem da descrição de um sistema não linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, sendo que estes modelos descrevem o comportamento de forma aproximada ou exata deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados (TEIXEIRA; ŻAK, 1999).

O procedimento em que os modelos fuzzy Takagi-Sugeno descrevem um sistema não linear de forma exata foi estabelecido em (TANIGUCHI et al., 2001). Assim, a então chamada forma generalizada, descreve de forma exata um sistema não linear, como combinação de um certo número de modelos locais lineares invariantes no tempo, sendo que a combinação é realizada

por funções de pertinência fuzzy suaves e o projeto do regulador fuzzy é construído por meio da compensação distribuída paralela, como proposto em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Em meio às descobertas de novas condições baseadas em LMIs que garantem a estabilidade de sistemas lineares e não lineares, também surgiram condições, baseadas em LMIs, que garantem a estabilidade de sistemas chaveados, que nos últimos anos, devido ao surgimento de uma grande quantidade de problemas de caráter prático e acadêmico, tem atraído muita atenção da comunidade científica, iniciando principalmente com (WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994; LIBERZON; MORSE, 1999; DECARLO et al., 2000; HESPANHA; MORSE, 2002) para o caso linear e com (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000b; TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000a; FENG, 2004; FENG, 2006) para o caso não linear, utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Para plantas lineares invariantes no tempo, sua resposta transitória pode ser melhorada por meio de controladores chaveados, como afirma Sun e Ge (2005) e pode ser visto, por exemplo, em (FEUER; GOODWIN; SALGADO, 1997; MCCLAMROCH; KOLMANOBSKY, 2000; ISHII; FRANCIS, 2002; LEITH et al., 2003).

Em geral, a maioria dos trabalhos sobre sistemas lineares chaveados utilizam múltiplas funções de Lyapunov (PETTERSSON, 2004; GEROMEL; COLANERI, 2006; LIN; ANTSAKLIS, 2009; GEROMEL; DEAECTO, 2009; CARDIM et al., 2009; DEAECTO, 2010; OTSUKA; SOGA, 2010; DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011). Projeto de controladores chaveados, para sistemas lineares com sinais de entrada, formulado com Desigualdades Matriciais Bilineares (do inglês "*Bilinear Matrix Inequalities- BMIs*"), foi proposto em (PETTERSSON, 2004). A lei de chaveamento estabelece regiões nas quais os diferentes subsistemas são ativados, resultando em um subsistema linear chaveado que é exponencialmente estável. Estudos de resultados sobre a análise de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados podem ser vistos em (LIN; ANTSAKLIS, 2009), que apresenta condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica, quando a lei de chaveamento é arbitrária, e estudou o problema de estabilizabilidade chaveada, investigando sobre quais condições é possível estabilizar um sistema chaveado projetando leis de controle chaveadas. Condições necessárias e suficientes para que sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas, com apenas dois subsistemas, sejam quadraticamente estabilizáveis, via realimentação dos estados, podem ser encontradas em (OTSUKA; SOGA, 2010). Para o caso geral, a literatura apresenta apenas condições suficientes para sistemas a tempo contínuo e para o caso discreto recentemente foram estabelecidas, em (FIACCHINI; JUNGERS, 2013), condições necessárias e suficientes.

O projeto de um controle robusto com realimentação de estado, para sistemas contínuo no tempo, sujeitos a incertezas limitadas em norma pode ser visto em (GEROMEL; DEAECTO,

2009), sendo que a regra de comutação e os ganhos de realimentação dos estados são determinados a partir da minimização de uma função de custo garantido que leva em conta um critério multi-objetivo. Já o artigo (DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011) apresenta uma generalização dos resultados propostos em (GEROMEL; DEAECTO, 2009), para sistemas com incertezas politópicas, e oferece um procedimento que encontra, simultaneamente, um conjunto de ganhos de realimentação de estados e uma regra de chaveamento que torna o sistema, em malha fechada, globalmente assintoticamente estável, para todos os parâmetros incertos variantes no tempo, e assegura um custo garantido $\mathscr{H}_2$.

Embora em menor número, existem trabalhos sobre sistemas lineares chaveados que utilizam uma única função de Lyapunov, como em (XIE; YU, 2006; ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003; SOUZA et al., 2013). Em (XIE; YU, 2006) foi estudada a estabilidade de sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas. Também, foram estabelecidos critérios de estabilidade exponencial global, quando todas as matrizes dos vértices são comutativas por partes, generalizando, assim, os resultados existentes na época para sistemas lineares chaveados sem incerteza. Em (ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003) foi considerada a estabilidade quadrática para sistemas lineares chaveados contínuos e discretos no tempo, e foi proposto, para ambos os casos, uma regra de chaveamento que utiliza uma única matriz simétrica positiva definida e que depende do vetor de estado do sistema.

Como no caso linear, nos últimos anos também houve muito interesse no estudo de sistemas não lineares chaveados. Este interesse pode ser notado observando-se o crescente número de trabalhos que foram publicados sobre sistemas fuzzy Takagi-Sugeno chaveados. Em geral, esses trabalhos utilizam regras de chaveamento baseadas em regiões que dependem das variáveis premissa e/ou funções de pertinência e/ou variáveis de estado, como pode ser visto em (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000b; TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000a; FENG, 2004; FENG, 2006; ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006; DONG; YANG, 2008b; DONG; YANG, 2008a; YAN; SUN, 2010; YANG; DONG, 2010; JABRI et al., 2012; CHEN et al., 2012).

Resultados sobre leis de chaveamento que chaveiam com base nas variáveis premissas podem ser vistos em (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000b; TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000a; YANG; DONG, 2010). Em (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000b) e (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000a), foi utilizado um sistema fuzzy chaveado para representar o modelo dinâmico não linear de um veículo aerodeslizador. Em seguida, em (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000a) foi projetado um controlador fuzzy chaveado e foram estabelecidas condições que suavizam o sinal de controle, evitando, assim, o fenômeno da descontinuidade. O problema de controle $\mathscr{H}_\infty$ como realimentação dinâmica da saída foi abordado em (YANG; DONG, 2010).

Leis de chaveamento projetadas com base nos valores das funções de pertinência são consideradas em (FENG, 2004; YANG et al., 2006; DONG; YANG, 2008a; DONG; YANG, 2008b; YAN; SUN, 2010), sendo que o esquema de controle apresentado em (DONG; YANG, 2008b) é uma extensão da compensação distribuída paralela, generalizando assim, os resultados obtidos em (FENG, 2004; YANG et al., 2006). Um sistema de controle, com realimentação dinâmica da saída, que é baseado na compensação dinâmica distribuída paralela, foi proposto em (DONG; YANG, 2008a).

Leis de chaveamento baseadas no vetor de estado da planta foram propostas, por exemplo, em (ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006; JABRI et al., 2012). O projeto de controladores apresentado em (ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006) utiliza ganhos de realimentação de estados locais, obtidos da solução de um problema de otimização que assegura um desempenho de custo garantido. Condições LMIs para o projeto de controle robusto fuzzy chaveado, via compensação distribuída paralela, e um critério $\mathscr{H}_\infty$ foram obtidos em (JABRI et al., 2012), e o procedimento, para projetar o controlador, foi baseado na função de Lyapunov quadrática chaveada, proposta em (OHTAKE; TANAKA; WANG, 2002).

Recentemente, em (CHEN et al., 2012), foi proposto um controlador fuzzy chaveado que chaveia acompanhando uma função de Lyapunov quadrática por partes e foram obtidos novos critérios de estabilização menos conservadores. Porém, algumas condições estabelecidas são baseadas em uma classe particular de BMIs que, segundo os autores, podem ser resolvidas de forma eficiente pelo método *path-following* proposto em (HASSIBI; HOW; BOYD, 1999).

A principal contribuição desta tese é no projeto de controladores chaveados. São propostos novos métodos de projeto de controladores chaveados que garantem a estabilidade assintótica global (ou *"ultimate bounded"*) de sistemas lineares com incertezas politópicas e de sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Inicialmente são propostos controles que selecionam um ganho, em um conjunto de ganhos, por meio de uma lei de chaveamento que retorna menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática. Neste caso, a metodologia proposta apresenta a vantagem de estabelecer condições mais relaxadas, no projeto de controle de sistemas lineares e, para os sistemas não lineares, a vantagem de não alterar as LMIs dadas em métodos de projeto de controle comumente utilizadas como as propostas, por exemplo, em (BOYD et al., 1994; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ŻAK, 1999; TANIGUCHI et al., 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; MONTAGNER et al., 2005; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2010). Em seguida, foram propostos métodos de projeto de controladores mais gerais que escolhe os ganhos de realimentação em dois estágios. O primeiro estágio é baseado em

(GEROMEL; COLANERI, 2006) e (CHEN et al., 2012) e seleciona uma matriz simétrica positiva definida que minimiza uma função de Lyapunov quadrática por partes. O segundo estágio escolhe uma matriz simétrica auxiliar que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov, o que permite a determinação do ganho do controlador chaveado. Para o desenvolvimento desses métodos de projeto de controle novas condições para a estabilidade foram estabelecidas e algumas delas são baseadas em um tipo específico de BMIs, que podem ser resolvidas de forma eficiente pelo método *path-following* (HASSIBI; HOW; BOYD, 1999).

A ideia dos controladores chaveados propostos é utilizar a regra de chaveamento como uma espécie de "estimador" da medida dos parâmetros incertos que muitas vezes são indisponíveis para medição. Vale ressaltar que esta ideia foi primeiramente utilizada por (DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011).

De uma forma geral, as metodologias propostas nesta tese apresentam várias vantagens, como um melhor desempenho, em alguns casos, em termos de tempo de estabilização dos controladores projetados, quando comparados com o controlador não chaveado normalmente implementado como, por exemplo, os apresentados em (BOYD et al., 1994) para o caso linear e (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; CHEN et al., 2012), para o caso não linear. Em implementações práticas, no caso de sistemas não lineares, a principal vantagem é o fato de não utilizar as funções de pertinência que podem ter expressões longas e/ou complexas ou podem não serem conhecidas por conterem incertezas. Além disso, para certas classes de sistemas lineares ou não lineares, os controladores chaveados propostos podem operar mesmo com incertezas na referência do sinal de controle.

Para exemplificar a metodologia proposta, implementações computacionais foram realizadas utilizando a linguagem do YALMIP (LOFBERG, 2004), com o solver SeDuMi (STURM, 1999) ou LMILab (GAHINET et al., 1995).

Este trabalho foi organizado da seguinte forma:

- O Capítulo 2 apresenta os resultados preliminares sobre sistemas lineares com incertezas politópicas e sobre sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. São apresentadas condições baseadas em LMIs, para ambos os casos, que garantem a estabilidade assintótica, taxa de decaimento e restrições na entrada do sinal de controle.

- No Capítulo 3 é proposto um novo método de projeto de controle chaveado, para uma classe de sistemas lineares com incertezas politópicas. Os ganhos do controlador proposto, são escolhidos por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov. São apresentados exemplos numéricos e a aplicação

no controle de um levitador magnético com incertezas, para ilustrar a flexibilidade das LMIs propostas, bem como, mostrar a resposta transitória obtida, que confirma o bom desempenho do controlador proposto. Adicionalmente, é apresentado o projeto e a implementação em laboratório de um sistema de controle robusto chaveado para um *2D ball balancer* sujeito a falhas.

- No Capítulo 4, generalizou-se os resultados obtidos para sistemas lineares com incertezas politópica. Assim, estabeleceu-se, para uma classe de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, os mesmos métodos de projeto de controle chaveado descritos no Capítulo 3. Os novos métodos eliminam a necessidade da obtenção das expressões explícitas das funções de pertinência, para implementar a lei de controle. Este fato é relevante nos casos em que as funções de pertinência dependem de parâmetros incertos ou são de difícil implementação. Além disso, as aplicações no controle de um sistema bola viga e de um levitador magnético ilustram a eficiência do sistema controlado com o procedimento proposto.

- No Capítulo 5, uma generalização dos capítulos anteriores é apresentada. São estabelecidas novas condições para a estabilidade e projeto de controle chaveado de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. O controle proposto é baseado na função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo e algumas das condições de estabilidade propostas são baseadas em uma classe de BMIs que pode ser resolvida pelo método *path-following*. Para analisar o desempenho, foi realizado o projeto de um controlador chaveado para um sistema não linear, que é referência para comparar o relaxamento de critérios de estabilização. Adicionalmente, foi também projetado um controlador chaveado para um levitador magnético considerando incertezas nas não linearidades e na referência do sinal de controle.

- Em seguida, são estabelecidas as conclusões e perspectivas futuras. Então, uma lista com as publicações oriundas desta tese é exibida.

- Por fim, no Apêndice A, são apresentados os passos da aplicação do método *path-following* para obter soluções para as condições de projeto de controladores chaveados, baseado em funções de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo, propostos nesta tese.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentados os resultados preliminares sobre sistemas lineares com incertezas politópicas e sobre sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Condições LMIs, que garantem a estabilidade assintótica, taxa de decaimento e restrições na entrada do sinal de controle, são estabelecidas para ambos os caso. Assim, por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas em todo o trabalho:

$$\begin{gathered}\mathbb{K}_r = \{1,2,\ldots,r\},\ r \in \mathbb{N}; \quad x(t) = x; \quad V(x(t)) = V; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}; \\ (A,B,C,K)(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (A_i,B_i,C_i,K_i),\ \ \alpha_i \geq 0 \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1,\ \alpha = [\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r]^T,\end{gathered} \tag{1}$$

sendo $r = 2^s$ e s é o número de parâmetros incertos distintos, quando se tratar de sistemas lineares, ou o número de funções não lineares distintas na planta, quando se tratar de sistemas não lineares.

Observa-se que, quando forem abordados sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, $\alpha_i = \alpha_i(x(t))$ são funções que dependem das variáveis de estado.

2.1 Estabilidade de Sistemas Lineares com Incertezas Politópicas

Considere o sistema linear com incertezas politópicas,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \tag{2}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ como em (1), com $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Admitindo que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para a realimentação, a lei de controle amplamente utilizada na literatura é dada por (BOYD et al., 1994):

$$u(t) = -Kx(t), \qquad K \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2), obtém-se o sistema realimentado

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) - B(\alpha)Kx(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (A_i - B_i K)x(t). \tag{4}$$

Define-se uma outra lei de controle com realimentação do vetor de estado como segue:

$$u(t) = u_\alpha(t) = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i K_i x(t) = -K(\alpha)x(t), \qquad K_i \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad i \in \mathbb{K}_r. \tag{5}$$

Esta lei de controle é fictícia, pois α_i, $i \in \mathbb{K}_r$, são parâmetros incertos que podem ser indisponíveis para medição, e será utilizada na análise do controlador chaveado que será proposto.

Considerando (1) e substituindo (5) em (2), obtém-se o sistema realimentado

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K(\alpha)x(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i\alpha_j(A_i - B_iK_j)x(t). \tag{6}$$

2.1.1 Estabilidade de Sistemas Lineares via LMIs

Nesta subseção serão apresentados alguns resultados sobre estabilidade de sistemas lineares com incertezas politópicas.

Teorema 1 (Bernussou, Peres e Geromel (1989))**.** *O sistema linear com incertezas politópicas dado em* (4) *é quadraticamente estabilizável se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida X e* $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tais que, para todo* $i \in \mathbb{K}_r$*,*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM - M^TB_i^T \quad \prec \quad 0. \tag{7}$$

Se (7) *são factíveis, para* $i \in \mathbb{K}_r$*, o ganho do controlador é dado por* $K = MX^{-1}$.

Agora, a ideia é estender o Teorema 1 para o caso em que a lei de controle é como em (5). Assim, segue o seguinte teorema que foi inspirado em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Teorema 2. *O ponto de equilíbrio* $x = 0$ *do sistema linear com incertezas politópicas dado em* (6) *é globalmente assintoticamente estável, se existem uma matriz simétrica positiva definida X e matrizes* $M_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tais que, para todo* $i, j \in \mathbb{K}_r$*, as seguintes LMIs são factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^TB_i^T \quad \prec \quad 0, \tag{8}$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^TB_j^T - M_j^TB_i^T \quad \preceq \quad 0, \quad i < j. \tag{9}$$

Se (8) *e* (9) *são factíveis, os ganhos do controlador são dados por* $K_i = M_iX^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V = x^TPx$. Assim,

de (6) nota-se que

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i\alpha_j x^T (A_i - B_iK_j)^T Px + x^T P \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i\alpha_j (A_i - B_iK_j)x \\
&= x^T \left[\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 (A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_iK_i) \right] x \\
&\qquad + x^T \left[\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1+i}^{r} \alpha_i\alpha_j (A_i^T P + PA_i + A_j^T P + PA_j \right. \\
&\qquad\qquad \left. - K_j^T B_i^T P - PB_iK_j - K_i^T B_j^T P - PB_jK_i) \right] x. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Como $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, então de (10), $\dot{V} < 0$ (para $x \neq 0$) se para $i, j \in \mathbb{K}_r$

$$A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_iK_i \prec 0, \qquad (11)$$

$$A_i^T P + PA_i + A_j^T P + PA_j - K_j^T B_i^T P - PB_iK_j - K_i^T B_j^T P - PB_jK_i \preceq 0, \quad i < j. \qquad (12)$$

Definindo $X = P^{-1}$ e $M_i = K_iX$, pré e pós multiplicando as equações (11) e (12) por X obtém-se (8) e (9) e a demonstração está concluída. □

Corolário 1. *Se $B_1 = B_2 = \cdots = B_r = B$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear com incertezas politópicas dado em* (6) *é globalmente assintoticamente estável se existem uma matriz simétrica positiva definida X e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_r$,*

$$XA_i^T + A_iX - BM_i - M_i^T B^T \prec 0. \qquad (13)$$

Se (13) *são factíveis, para $i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_iX^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2, considerando $B_i = B$, $i \in \mathbb{K}_r$. □

2.2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno e Resultados de Estabilidade

O modelo fuzzy Takagi-Sugeno é descrito por regras SE-ENTÃO que representam localmente as relações de entrada e saída de um sistema não linear. Assim, como descrito em Takagi e Sugeno (1985) o modelo fuzzy Takagi-Sugeno é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\underline{\textit{Regra i:}} \quad \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \ldots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\
&\qquad \text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_ix(t) + B_iu(t), \\ y(t) = C_ix(t), \end{cases} \qquad (14)
\end{aligned}$$

sendo $i = 1,2,\ldots,r$, M_j^i, $j = 1,2,\ldots,p$ é o conjunto fuzzy j da regra i, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, $y \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $z_1(t),\ldots,z_p(t)$ são as variáveis premissas, que neste trabalho serão as variáveis de estado. Cada equação linear representada por $A_i x(t) + B_i u(t)$ será chamada de subsistema.

Como apresentado em Taniguchi et al. (2001), dado o par $(x(t),u(t))$, o vetor de saída final do sistema fuzzy é inferido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))[A_i x(t) + B_i u(t)]}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}, \\ \\ y(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}, \end{cases} \tag{15}$$

sendo

$$z(t) = [z_1(t)\ z_2(t)\ldots z_p(t)],\ w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_j^i(z_j(t)),\ \sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) > 0,\ w_i(z(t)) \geq 0, \tag{16}$$

para todo t e $i \in \mathbb{K}_r$. $M_j^i(z_j(t))$ é o "peso" do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$.

Define-se o "peso" normalizado e/ou função de pertinência de cada regra, como sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}. \tag{17}$$

De (16) e (17) pode-se notar que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(z(t)) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r.$$

Portanto, de (15)-(17), a equação (15), pode ser escrita da seguinte forma (TANIGUCHI et al., 2001):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(z(t))[A_i x(t) + B_i u(t)] = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(z(t)) C_i x(t) = C(\alpha)x(t), \end{cases} \tag{18}$$

sendo $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(z(t)) = 1$ e $\alpha_i(z(t)) \geq 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, como em (1).

Considerando o modelo fuzzy (14), os reguladores fuzzy via compensação distribuída pa-

ralela possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{c} \underline{\textit{Regra i:}} \quad \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \ldots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{ENTÂO } u(t) = -K_i x(t). \end{array} \tag{19}$$

De forma análoga à obtenção de (18), pode-se concluir que

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(z(t)) K_i x(t). \tag{20}$$

Substituindo a equação (20) em (18), considerando $z(t) = x(t)$ e lembrando que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t)) = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t)) \left[A_i x(t) - B_i \left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x(t)) K_j x(t) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t)) \left[\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x(t)) A_i x(t) - \sum_{j=1}^{r} \Big(\alpha_j(x(t)) B_i K_j x(t) \Big) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[A_i - B_i K_j \right] x(t) \\ &= [A(\alpha) - B(\alpha) K(\alpha)] x(t). \end{aligned} \tag{21}$$

2.2.1 Estabilidade de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno via LMIs

Nesta seção, serão estabelecidas condições baseadas em LMIs que garantem a estabilidade assintótica global do sistema (21).

Teorema 3 (Tanaka, Ikeda e Wang (1998))**.** *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo no tempo dado em* (21) *é globalmente assintoticamente estável, se existirem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($X \succ 0$) e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tais que para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T \prec 0, \tag{22}$$

$$(A_i + A_j) X + X (A_i + A_j)^T - B_i M_j - B_j M_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T \preceq 0, \quad i < j, \tag{23}$$

excetuando os pares (i,j) tais que $\alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t)) = 0$, para todo $x(t)$. Se (22) *e* (23) *forem factíveis os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.*

Demonstração. É análoga à demonstração do Teorema 2 e pode ser vista em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). □

Como no caso linear, considerando que $B(\alpha) = B$ é uma matriz constante segue o seguinte corolário.

Corolário 2. *Se $B_1 = B_2 = \cdots = B_r = B$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo no tempo dado em* (21) *é globalmente assintoticamente estável se existirem uma matriz simétrica positiva definida X e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_r$,*

$$XA_i^T + A_iX - BM_i - M_i^TB^T \quad \prec \quad 0. \tag{24}$$

Se (24) *são factíveis, para $i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_iX^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3, considerando $B_i = B$, $i \in \mathbb{K}_r$. □

2.3 Estabilidade e Índice de Desempenho de Sistemas Lineares e Não Lineares via LMIs

Em projeto de sistemas de controle é importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado tais como a velocidade de resposta e restrições na entrada e saída do sinal de controle. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento do sistema (21) (ou maior expoente Lyapunov), que é definido como sendo o maior $\beta \geq 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\beta t} \|x(t)\| = 0 \tag{25}$$

vale para todas a trajetórias $x(t)$.

Como em (BOYD et al., 1994, p. 66), pode-se usar uma função de Lyapunov quadrática $V = x(t)^TPx(t)$ para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema (21). A condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$, para todas a trajetórias $x(t)$, é equivalente à especificação de uma taxa de decaimento maior ou igual a β e foi utilizada nos Teoremas 4 e 5 para o caso de sistemas lineares e no Teorema 6 para sistemas não lineares.

Teorema 4 (Boyd et al. (1994))**.** *O sistema linear com incertezas politópicas dado em* (4) *é quadraticamente estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual β se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida X e $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, as seguintes LMIs são factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM - M^TB_i^T + 2\beta X \quad \prec \quad 0. \tag{26}$$

Se (26) *são factíveis, para $i \in \mathbb{K}_r$, o ganho do controlador é dado por $K = MX^{-1}$.*

Demonstração. É similar à prova do Teorema 1, considerando $\dot{V} \leq -2\beta V$ (BOYD et al., 1994). □

Teorema 5. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear com incertezas politópicas dado em* (6) *é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual β, se existem uma matriz simétrica positiva definida X ($X \succ 0$) e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^TB_i^T + 2\beta X \prec 0, \tag{27}$$

$$(A_i+A_j)X + X(A_i+A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^TB_j^T - M_j^TB_i^T + 4\beta X \preceq 0,\ i<j. \tag{28}$$

Se (27) *e* (28) *são factíveis, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_iX^{-1},\ i \in \mathbb{K}_r$.*

Demonstração. É análoga à demonstração do Teorema 2, considerando $\dot{V} \leq -2\beta V$. □

Teorema 6 (Tanaka, Ikeda e Wang (1998))**.** *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo no tempo dado em* (21) *é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual β, se existem uma matriz simétrica positiva definida X ($X \succ 0$) e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^TB_i^T + 2\beta X \prec 0, \tag{29}$$

$$(A_i+A_j)X + X(A_i+A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^TB_j^T - M_j^TB_i^T + 4\beta X \preceq 0, \quad i<j, \tag{30}$$

excetuando os pares (i,j) tais que $\alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t)) = 0$, para todo $x(t)$. Se (29) *e* (30) *forem factíveis os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_iX^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.*

Resultados que estabelecem condições LMIs que garantem restrições na entrada e saída do sinal de controle podem ser vistos, por exemplo, em (BOYD et al., 1994; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). Também, pode-se restringir a entrada do sinal de controle, de forma indireta, limitando a norma dos ganhos do controlador, como proposto em (ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000), impondo restrições em M_i, $i \in \mathbb{K}_r$ e X^{-1}. Assim, dadas as constantes $\eta > 0$ e $\eta_x > 0$, impondo que $M_i^TM_i \prec \eta I_n$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $X^{-1} \prec \eta_x I_n$, uma restrição sobre os ganhos do controlador pode ser estabelecido pelo seguinte teorema.

Teorema 7 (Šiljak e Stipanović (2000))**.** *A restrição na norma dos ganhos do controlador tal que $K_iK_i^T \leq \eta\,\eta_x^2 I_m,\ i \in \mathbb{K}_r$, é imposta, se existem constantes $\eta > 0$ e $\eta_x > 0$, tais que as LMIs dos Teoremas 2 ou 3 ou 5 ou 6 (ou 1 ou 4 substituindo $K_i = K$ e $M_i = M$), com as LMIs abaixo,*

sejam factíveis.

$$\begin{bmatrix} \eta_x I_n & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad \begin{bmatrix} \eta I_n & M_i^T \\ M_i & I_m \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad i \in \mathbb{K}_r. \tag{31}$$

Demonstração. É análoga à apresentada em (ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000). □

2.4 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi estabelecida a notação e foram apresentados resultados preliminares que serão utilizados nesta tese. Basicamente, foram apresentadas condições, baseadas em LMIs, que garantem a estabilidade assintótica, taxa de decaimento e restrições na entrada do sinal de controle de sistemas lineares com incertezas politópicas e não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

3 PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS PARA SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Neste capítulo será proposta uma nova metodologia de projeto de controladores chaveados para algumas classes de sistemas lineares com incertezas politópicas (SOUZA et al., 2013). Tal método utiliza uma única função de Lyapunov e a estabilidade quadrática para projetar vários ganhos do controlador baseado em LMIs. O controlador proposto é composto por um único ganho, que pertence a um conjunto de ganhos previamente projetados, e é selecionado por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov. A metodologia proposta apresenta várias vantagens, como: um melhor desempenho dos controladores projetados, se comparado com o controlador não chaveado normalmente implementado (BOYD et al., 1994), as LMIs utilizadas para encontrar os ganhos são mais relaxadas e, embora os ganhos sejam projetados para serem utilizados na forma de uma combinação convexa, na prática não há a necessidade de fazer tal combinação, ou seja, os parâmetros incertos não precisam ser medidos a cada instante de tempo. Além disso, é garantida a estabilidade *"ultimate bounded"* para o caso em que o sistema apresenta incertezas na referência do sinal de controle.

Para confirmar as vantagens da metodologia proposta serão apresentadas figuras comparando a regiões de factibilidade do método proposto com o método clássico que utiliza um único ganho de realimentação de estado. Para comparar o desempenho da lei de controle proposta com a lei de controle clássica, foi simulada uma aplicação no controle de um levitador magnético e realizado o projeto e implementação prática de um controlador chaveado para um sistema *2D ball balancer*. As implementações computacionais foram realizadas utilizando a linguagem do YALMIP (LOFBERG, 2004), com o solver SeDuMi (STURM, 1999) e a implementação prática foi realizada no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP).

3.1 Caso 1: Sistemas Lineares com uma Matriz Constante $B(\alpha) = B$

Nesta seção, o projeto de um controlador chaveado para o sistema linear incerto (2) é proposto, admitindo que $B(\alpha) = B$ é uma matriz constante, isto é,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t). \tag{32}$$

Antes de propor a lei de controle será estabelecida a seguinte definição, que será utilizada em toda a tese.

Definição 1. *Considere o conjunto de índices $\Omega_H(t)$ definido abaixo:*

$$\Omega_H(t) = \arg\min_{i\in\mathbb{K}_N} x^T(t)H_i x(t) = \{j \in \mathbb{K}_N : x^T(t)H_j x(t) = \min_{i\in\mathbb{K}_N} x^T(t)H_i x(t)\},$$

sendo $H_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i \in \mathbb{K}_N$, e $x(t) \in \mathbb{R}^n$. O menor índice $j \in \Omega_H(t)$ será denotado por

$$\arg\min_{i\in\mathbb{K}_N}{}^{*}\{x(t)^T H_i x(t)\} = \min_{j\in\Omega_H(t)} j.$$

Da Definição 1, nota-se que o conjunto $\Omega_H(t)$ pode conter mais que um elemento. Assim, ao definir $\arg\min^*$ estabelece-se uma forma de selecionar apenas o menor deles.

Agora, suponha que as LMIs dadas em (13) sejam factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e sejam $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador dado em (5), e $P = X^{-1}$ obtido das condições do Corolário 1. Então, da Definição 1 considerado $H_i = PBK_i$, define-se o controlador chaveado

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t); \quad \sigma = \arg\min_{i\in\mathbb{K}_r}{}^{*}\{-x(t)^T PBK_i x(t)\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \tag{33}$$

Portanto, considerando (1), o sistema controlado (32) e (33) é dado por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu_\sigma(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \Big(A_i - BK_\sigma\Big)x(t). \tag{34}$$

Teorema 8. *Admita que as condições do Corolário 1, relativas ao sistema* (32) *com a lei de controle* (5)*, sejam satisfeitas e obtenha $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, e $P = X^{-1}$. Então, a lei de controle chaveada* (33) *torna o ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema* (32)*, globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T Px$. Defina $\dot{V}_{u_\alpha}$ e $\dot{V}_{u_\sigma}$ a derivada temporal de V para o sistema (32), com as leis de controle (5) e (33), respectivamente. Então, de (32) e (33),

$$\dot{V}_{u_\sigma} = 2x^T P\dot{x} = 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\sigma) = 2x^T PA(\alpha)x + 2x^T PB(-K_\sigma)x. \tag{35}$$

De (1), $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$. Assim, notando que

$$\min_{i\in\mathbb{K}_r}\{x^T PB(-K_i)x\} \leq x^T PB\left(-\sum_{i=1}^{r} \alpha_i K_i\right)x,$$

e de (35), da lei de controle chaveada dada em (33) e de (5), observa-se que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{u_\sigma} &= 2x^T PA(\alpha)x + 2\min_{i\in\mathbb{K}_r}\{x^T PB(-K_i)x\} \\
&\leq 2x^T PA(\alpha)x + 2x^T PB\left(-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i K_i\right)x \\
&= 2x^T P\left(A(\alpha) - BK(\alpha)\right)x \\
&= 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\alpha) \\
&= \dot{V}_{u_\alpha}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) \leq \dot{V}_{u_\alpha}(x(t))$. Como as condições do Corolário 1 asseguram que $\dot{V}_{u_\alpha}(x(t)) < 0$ se $x(t) \neq 0$, a demonstração é concluída. □

Observação 1. *O Teorema 8 mostra que, se as condições do Corolário 1 forem satisfeitas, então* $\dot{V}_{u_\alpha}(x(t)) < 0$ *para todo* $x(t) \neq 0$ *e portanto* $\dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) < 0$ *para* $x(t) \neq 0$*, assegurando que o ponto de equilíbrio* $x = 0$ *do sistema controlado* (32) *e* (33) *seja globalmente assintoticamente estável. Assim, o Corolário 1 pode ser utilizado para projetar os ganhos* $K_1, K_2, \ldots, K_r$ *e a matriz* $P = X^{-1}$ *da lei de controle chaveada* (33)*. Adicionalmente, observa-se que a lei de controle chaveada* (33) *não utiliza as variáveis incertas* α_i*,* $i \in \mathbb{K}_r$*, que são necessárias para a implementação da lei de controle* (5)*. Além disso, ela também oferece uma alternativa menos conservadora do que a lei de controle clássica, para sistemas lineares incertos, apresentada em* (3)*, que utiliza apenas um ganho K no controlador.*

3.2 Caso 2: Sistemas Lineares com uma Matriz Incerta $B(\alpha)$

Neste caso, será considerado o sistema linear com incertezas politópicas como dado em (2), com $\alpha_i,\ i \in \mathbb{K}_r$, definido em (1), ou seja,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \qquad \hat{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\hat{A}_i, \quad \hat{B}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\hat{B}_i. \tag{36}$$

Seja $v(t) \in \mathbb{R}^m$ a derivada temporal do vetor de entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Defina $x_{n+l}(t)$ e $v_l(t)$, tais que $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, ou seja, $x_{n+l}(t) = u_l(t) = \int v_l(t)dt$, $l = 1, 2, \ldots, m$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases}
\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\
\dot{x}_{n+1}(t) = v_1(t), \\
\vdots \\
\dot{x}_{n+m}(t) = v_m(t),
\end{cases} \tag{37}$$

ou equivalentemente (BARMISH, 1983),

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bv(t), \tag{38}$$

sendo

$$x = [\hat{x}^T \; x_{n+1} \ldots x_{n+m}]^T,\; A(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{A}(\alpha) & \hat{B}(\alpha) \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ I_{m\times m} \end{bmatrix}.$$

Das considerações acima, nota-se que o sistema (38) é equivalente ao sistema (32) e portanto o problema cai no Caso 1. Assim, pode-se adotar o procedimento estabelecido no Caso 1 para projetar uma lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t),\; K_\sigma \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$.

3.3 Caso 3: Sistemas Lineares com Incertezas no Sinal de Controle

Neste caso, será considerado que o sistema (2) seja resultado de um processo de linearização de uma planta $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x},\bar{u})$, em um ponto de equilíbrio $\bar{x} = x_0$ e na respectiva entrada de controle $\bar{u} = u_0$. Suponha que x_0 é conhecido, $u_0 \in \mathbb{R}$ é incerto, pois depende de incertezas da planta, mas $0 < u_0 \in [u_{0_{\min}},\; u_{0_{\max}}]$ sendo que $u_{0_{\min}}$ e $u_{0_{\max}}$ são constantes conhecidas, e o sistema linearizado é dado por (1) e

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \tag{39}$$

sendo:
$x(t) = \bar{x}(t) - x_0$, $\bar{x}(t)$ o vetor de estado da planta;
$u(t) = \bar{u}(t) - u_0$, $\bar{u}(t)$ o sinal de controle da planta.

Agora, suponha que $B(\alpha)$ possa ser escrito como segue:

$$B(\alpha) = Bg(\alpha), \tag{40}$$

sendo B uma matriz constante e $g(\alpha) > 0$, para todo α dado em (1), uma função limitada que depende das incertezas da planta. Assim, o sistema (39) pode ser escrito como segue

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) = A(\alpha)x(t) + Bg(\alpha)u(t). \tag{41}$$

Admita que os ganhos $K_i = M_i X^{-1},\; i \in \mathbb{K}_r$, e a matriz $P = X^{-1}$, foram obtidos utilizando os vértices do politopo do sistema (39) e as LMIs (8) e (9) do Teorema 2. Agora, dada uma constante $\xi > 0$ e considerando na Definição 1 $H_i = PBK_i$, define-se a lei de controle

$$u(t) = u_{(\sigma,\xi)}(t) = \bar{u}_{(\sigma,\xi)}(t) - u_0, \quad \text{com} \quad \bar{u}_{(\sigma,\xi)}(t) = -K_\sigma x(t) + \gamma_\xi, \tag{42}$$

sendo

$$K_\sigma \in \{K_1, K_2, \ldots, K_r\}, \qquad \sigma = \arg\min_{i\in\mathbb{K}_r}{}^{*}\{-x^T PBK_i x\},$$
$$\gamma_\xi = \begin{cases} u_{0_{\max}}, & \text{se } x^T PB < -\xi, \\ \dfrac{(u_{0_{\min}} - u_{0_{\max}})x^T PB + \xi(u_{0_{\max}} + u_{0_{\min}})}{2\xi}, & \text{se } |x^T PB| \le \xi, \\ u_{0_{\min}}, & \text{se } x^T PB > \xi. \end{cases} \tag{43}$$

Neste contexto o seguinte teorema é proposto.

Teorema 9. *Admita que as condições do Teorema 2, relativas ao sistema* (39) *com a lei de controle* (5)*, sejam satisfeitas e obtenha* $K_i = M_i X^{-1}$*,* $i \in \mathbb{K}_r$*, e* $P = X^{-1}$*. Então, a lei de controle chaveada* (42) *e* (43) *torna o sistema* (39) *uniformemente* "ultimate bounded".

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T Px$. Defina $\dot{V}_{u_\alpha}$ e $\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}}$ a derivada temporal de V para o sistema (39), com as leis de controle (5) e (42), (43), respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} &= 2x^T P\dot{x} = 2x^T P(A(\alpha)x + Bg(\alpha)u_{(\sigma,\xi)}) \\ &= 2x^T P[A(\alpha)x - B(\alpha)K(\alpha)x + Bg(\alpha)(\overline{u}_{(\sigma,\xi)} - u_0 + K(\alpha)x)] \\ &= \dot{V}_{u_\alpha} + 2x^T PBg(\alpha)\left(-K_\sigma x + \gamma_\xi - u_0 + K(\alpha)x\right) \\ &= \dot{V}_{u_\alpha} + 2g(\alpha)\min_{i\in\mathbb{K}_r}\left\{-x^T PBK_i x\right\} + 2g(\alpha)x^T PB[\gamma_\xi - u_0 + K(\alpha)x]. \end{aligned} \tag{44}$$

Lembrando que $\alpha_i \ge 0,\ i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $g(\alpha) > 0$, $g(\alpha)B = B(\alpha)$ e notando que

$$\min_{i\in\mathbb{K}_r}\{-x^T PBK_i x\} \le -x^T PB\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i\right)x,$$

de (44) segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} &\le \dot{V}_{u_\alpha} - 2x^T PB(\alpha)\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i\right)x + 2g(\alpha)x^T PB[\gamma_\xi - u_0 + K(\alpha)x] \\ &= \dot{V}_{u_\alpha} + 2g(\alpha)x^T PB(\gamma_\xi - u_0) \end{aligned} \tag{45}$$

Agora, se $|x^T PB| > \xi$ então de (43), $g(\alpha)x^T PB(\gamma_\xi - u_0) \le 0$. Assim, de (45) $\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} \le \dot{V}_{u_\alpha} < 0$ para $x \ne 0$, visto que de acordo com o Teorema 2, o sistema (39), com a lei de controle (5), é globalmente assintoticamente estável porque $\dot{V}_{u_\alpha} < 0$ se $x(t) \ne 0$. Caso contrário, se $|x^T PB| \le \xi$ obtém-se de (43)

$$\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} \le \dot{V}_{u_\alpha} + 2g_{\max}|x^T PB| \cdot |\gamma_\xi - u_0|$$

$$\begin{aligned} &\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + 2g_{\max}|\gamma_\xi - u_0|\xi \\ &\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + 2g_{\max}(|\gamma_\xi| + |u_0|)\xi \\ &\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + 4g_{\max}\cdot u_{0_{\max}}\cdot\xi \\ &\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + \varepsilon_1, \end{aligned} \tag{46}$$

sendo que, para todo α definido em (1), $-\varepsilon$ (que é negativo) é o maior autovalor de $P(A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)) + (A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha))^T P$, $g_{\max} = \max\{g(\alpha)\}$ e $\varepsilon_1 = 4g_{\max}\cdot u_{0_{\max}}\cdot\xi$. Portanto, $\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} < 0$ se $\|x\|_2 > \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon}$. Então, conforme (CORLESS; LEITMANN, 1981) o sistema controlado é uniformemente *"ultimate bounded"* e a demonstração é concluída. □

Observação 2. *Dizer que a lei de controle chaveada* (42) *e* (43) *torna o sistema* (39) *uniformemente* "ultimate bounded" *é equivalente a dizer que as variáveis de estado do sistema não convergem necessariamente para a origem do sistema $x = 0$ e sim para uma região limitada em torno desta origem, mas com $\|x\|_2 > \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon}$. Note que, a região depende de $\varepsilon_1 = 4g_{\max}\cdot u_{0_{\max}}\cdot\xi$ e, portanto, ela pode ser ajustada de acordo com a escolha do valor do ξ. Observe que quando $\xi = 0$, a convergência $x(\infty) = 0$ é assegurada.*

Observação 3. *Nota-se que, embora não tenha sido dito, os parâmetros α_i, $i \in \mathbb{K}_r$, definidos em* (1)*, do sistema linear com incertezas politópicas* (2)*, podem ser variantes no tempo, ou seja, para $t \geq 0$, $\alpha_i = \alpha_i(t)$, $i \in \mathbb{K}_r$ e o sistema* (2) *pode ser escrito da seguinte forma:*

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(t)(A_i + B_i u(t)).$$

Portanto, os resultados estabelecidos neste capítulo valem para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (do inglês Linear Parameter Varying - LPV*).*

3.4 Exemplos

Nesta seção, serão usados exemplos para ilustrar os três casos apresentados neste capítulo. As figuras vão mostrar que as LMIs utilizadas para encontrar os ganhos do controlador (Teoremas 2, 5 e Corolário 1) são menos conservadoras do que as LMIs clássicas (Teoremas 1 e 4).

Exemplo 1. *Caso 1: Estabilidade*

Considere o sistema linear incerto dado por (32), ou seja,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t),$$

sendo

$$x(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ x_3(t)]^T, \quad A(\alpha) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 1 & 1 \\ 0 & 35 & \overline{b} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

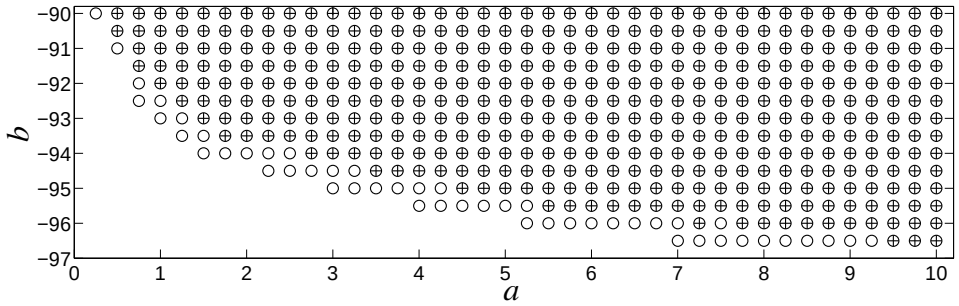
com $a \leq \overline{a} \leq 13$ e $b \leq \overline{b} \leq -36$. Assim, a matriz incerta $A(\alpha)$ pertence ao politopo de vértices:

$$[A_1|A_2|A_3|A_4] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} a & 1 & 1 & a & 1 & 1 & 13 & 1 & 1 & 13 & 1 & 1 \\ 0 & 35 & b & 0 & 35 & -36 & 0 & 35 & b & 0 & 35 & -36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

com os parâmetros a e b variando nos intervalos $0 \leq a \leq 10$ e $-97 \leq b \leq -90$, e $B_i = B$, $i = 1,2,3,4$.

Neste exemplo, a ideia é mostrar que, considerando apenas a estabilidade, a metodologia apresentada nesta tese (cuja condições são dadas no Corolário 1) pode ser mais eficiente do que a metodologia utilizada na literatura (Teorema 1). Para isso, é suficiente notar que a região de factibilidade utilizando o Corolário 1 é maior do que a região obtida ao utilizar o Teorema 1, como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Regiões de factibilidade utilizando o Teorema 1 ("+") e o método proposto com o Corolário 1 ("∘").



Fonte: Elaboração do próprio autor

Exemplo 2. *Caso 2: Estabilidade e restrição na norma dos ganhos do controlador*

Considere o sistema linear incerto dado em (36), sendo

$$\hat{x}(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)]^T, \quad \hat{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 1 \\ 35 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 \\ \overline{b} \end{bmatrix},$$

com $a \leq \overline{a} \leq 0$ e $-1 \leq \overline{b} \leq b$. Como a matriz $\hat{B}(\alpha)$ é incerta, considerando o procedimento de projeto apresentado na Seção 3.2, Caso 2, define-se a nova variável de estado $x_3(t) = u(t) =$

$\int v(t)dt$. Assim, $\dot{x}_3(t) = \dot{u}(t) = v(t)$ e obtém-se o seguinte sistema estendido

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}(\alpha) & \hat{B}(\alpha) \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ 1 \end{bmatrix} v, \tag{47}$$

ou equivalentemente,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bv,$$

sendo

$$x = [x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; x_3(t)]^T, \quad A(\alpha) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 1 & 1 \\ 35 & -1 & \overline{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

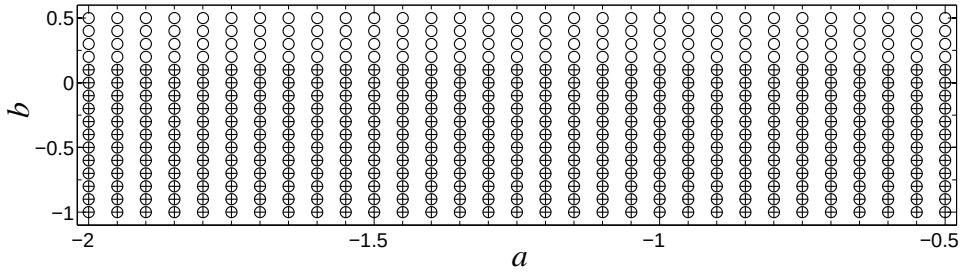
Portanto, a matriz $A(\alpha)$ pertence ao politopo de vértices:

$$[A_1|A_2|A_3|A_4] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} a & 1 & 1 & a & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 35 & -1 & b & 35 & -1 & -1 & 35 & -1 & b & 35 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

com $-2 \leq a \leq -0,5$, $-0,5 \leq b \leq 1$ e $B_i = B$, $i = 1,2,3,4$.

Em problemas de controle, é importante considerar índices de desempenho, por exemplo, restrições na norma dos ganhos do controlador. Portanto, para encontrar as regiões da factibilidade do sistema foram utilizados o Teorema 1 e o Corolário 1 juntamente com o Teorema 7, garantido assim, estabilidade e restrição na norma dos ganhos do controlador. Para a restrição na norma dos ganhos do controlador foram fixados $\eta = 1600$ e $\eta_x = 2$. Da Figura 2 pode-se observar que o método proposto é mais flexível, uma vez que a sua área factível é maior do que a gerada pelo Teorema 1.

Figura 2 - Regiões factíveis utilizando os Teoremas 1 e 7 (“$+$”) e o método proposto com o Corolário 1 e o Teorema 7 (“$\circ$”).



Fonte: Elaboração do próprio autor

Exemplo 3. *Caso 3: Estabilidade, taxa de decaimento e restrição na norma dos ganhos do controlador*

Considere o sistema linear incerto dado em (2), sendo

$$x(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)]^T, \quad A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \overline{a} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{b} \end{bmatrix},$$

com $-27 \leq \overline{a} \leq a$, $-10 \leq \overline{b} \leq b$, $-20 \leq a \leq 15$, $-9 \leq b \leq -5$ e $u = \overline{u} - u_0$ com $0 < u_0 \in [u_{0_{\min}},\ u_{0_{\max}}]$ o sinal de referência incerto.

Nota-se que $B(\alpha)$ não é constante e pode ser escrita da seguinte forma:

$$B(\alpha) = Bg(\alpha), \text{ com } g(\alpha) > 0,$$

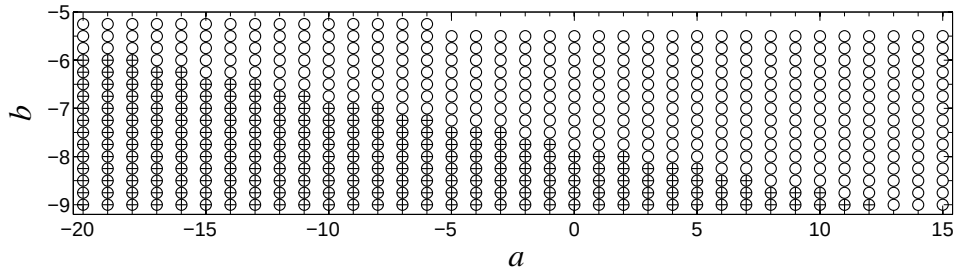
sendo $B = [0 \quad -1]^T$ e $g(\alpha) = -\overline{b}$. Assim, o problema está nas condições do Caso 3.

Como nos exemplos anteriores, serão encontradas as regiões de factibilidade do sistema, e neste caso, os Teoremas 4 e 6 serão utilizados juntamente com o Teorema 7, assegurando assim, taxa de decaimento e restrição na norma dos ganhos do controlador. Portanto, os vértices do politopo $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$, $B_1 = B_3$ e $B_2 = B_4$, são como seguem:

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix}, A_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -27 & -1 \end{bmatrix}, B_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, B_{2,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

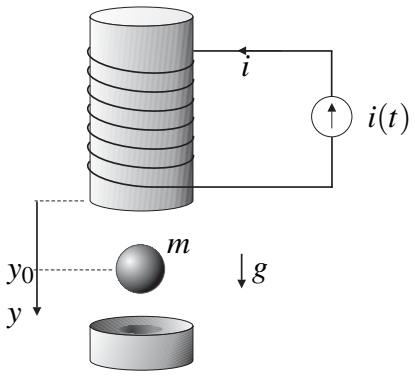
Para a simulação da região de factibilidade foram especificados nos Teoremas 4 e 6 uma taxa de decaimento maior ou igual a 3 e no Teorema 7, para a restrição da norma dos ganhos do controlador, foram fixandos $\eta = 400$ e $\eta_x = 2$. Assim, da Figura 3 observa-se que o método proposto tem uma região factível menos conservadora do que a obtida com o Teorema 4, o que mostra a sua flexibilidade.

Figura 3 - Regiões factíveis utilizando os Teoremas 4 e 7 (“+”) e o método proposto com os Teoremas 6 e 7 (“∘”).



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 4 - Levitador Magnético.



Fonte: Cardim (2009)

3.4.1 Projeto de um controlador chaveado para um levitador magnético

Para ilustrar, será projetado um sistema de controle chaveado para um levitador magnético. A Figura 4 mostra a configuração básica de um levitador magnético cujo modelo matemático (MARQUEZ, 2003, p. 24), é dado por

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg - \frac{\lambda\mu i^2}{2(1+\mu y)^2}, \tag{48}$$

sendo:

m a massa da bola;

$g = 9,8\text{m/s}^2$ a aceleração da gravidade;

$\mu = 2\text{m}^{-1}$, $\lambda = 0,460\text{H}$ e $k = 0,001\text{Ns/m}$ são parâmetros constantes;

i a corrente elétrica;

y a posição da bola.

Como em (CARDIM, 2009; SANTIM et al., 2012), definindo as variáveis de estado $\bar{x}_1 = y$ e $\bar{x}_2 = \dot{y}$ e como entrada $\bar{u} = i$, a equação (48) pode ser escrita como segue:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = g - \dfrac{k}{m}\bar{x}_2 - \dfrac{\lambda\mu i^2}{2m(1+\mu\bar{x}_1)^2}. \end{cases} \tag{49}$$

Considerou-se que durante a operação requerida $[\bar{x}_1 \;\; \bar{x}_2]^T \in D$, sendo

$$D_1 = \{[\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 \leq \bar{x}_1 \leq 0,15\}. \tag{50}$$

O objetivo deste exemplo é projetar um controlador que mantenha a bola em uma posi-

ção desejada $y = \bar{x}_1 = y_0$. Assim, o ponto de equilíbrio do sistema (49) é $\bar{x}_e = [\bar{x}_{1_e} \quad \bar{x}_{2_e}]^T = [y_0 \quad 0]^T$.

Da segunda equação de (49), observou-se que no ponto de equilíbrio, $\dot{\bar{x}}_2 = 0$ e $\bar{u} = i = i_0$, sendo $i_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\lambda\mu}(1+\mu y_0)^2}$.

Linearizando o sistema (49) em torno do ponto de equilíbrio $\bar{x} = \bar{x}_e$ e $\bar{u} = i_0$ obteve-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g\mu}{1+\mu y_0} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2\lambda\mu g}}{\sqrt{m}(1+\mu y_0)} \end{bmatrix} u, \tag{51}$$

sendo

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 - y_0, \\ x_2 = \bar{x}_2, \\ u = i - i_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 + y_0, \\ \bar{x}_2 = x_2, \\ i = u + i_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \dot{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \dot{x}_2, \\ i = u + \sqrt{\frac{2mg}{\lambda\mu}(1+\mu y_0)^2}. \end{cases}$$

Considerou-se a posição desejada y_0, conhecida e constante, com a possibilidade de assumir qualquer valor no intervalo $0,04 \leq y_0 \leq 0,11$ e a massa m incerta mas pertencente ao intervalo $0,02 \leq m \leq 0,08$. Portanto, de (50) e como $x_1 = \bar{x}_1 - y_0$, o domínio do sistema linear (51) é denotado por D_2, e dado por:

$$D_2 = \{[x_1 \ x_2 \ y_0 \ m]^T \in \mathbb{R}^4 : -0,11 \leq x_1 \leq 0,11, \quad 0,04 \leq y_0 \leq 0,11 \quad \text{e} \quad 0,02 \leq m \leq 0,08\}. \tag{52}$$

Observou-se que o sistema (51) pode ser escrito como em (41), isto é,

$$\dot{x} = A(\alpha)x + Bg(\alpha)u, \tag{53}$$

sendo $B = [0 \quad -1]^T$ e $g(\alpha) = g(m, y_0) = \frac{\sqrt{2\lambda\mu g}}{\sqrt{m}(1+\mu y_0)}$. Notou-se que $g(\alpha) > 0$, para todo $m, y_0 \in D_2$.

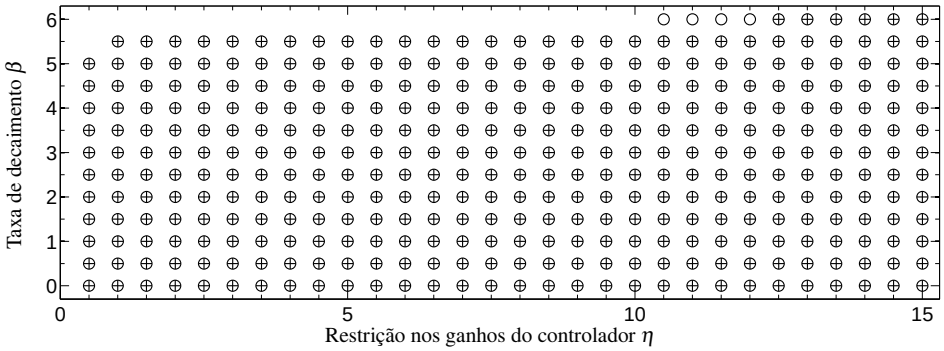
Considerando o domínio D_2 e os parâmetros constantes do levitador, obteve-se os seguintes vértices do politopo para o sistema (51)

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 36,2963 & -0,0125 \end{bmatrix}, \ A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 36,2963 & -0,05 \end{bmatrix}, \\ A_5 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 32,1311 & -0,0125 \end{bmatrix}, \ A_7 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 32,1311 & -0,05 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 = B_5 = B_7 &= [0 \ \ -27,8025]^T, \quad B_2 = B_4 = B_6 = B_8 = [0 \ \ -12,3060]^T. \end{aligned} \tag{54}$$

Inicialmente, foram encontradas a regiões de factibilidade da taxa de decaimento pela res-

trição dos ganhos do controlador, ou seja, foram usados os vértices do politopo, dados em (54), nos Teoremas 4 e 6 com taxa de decaimento maior ou igual a β, com $0 \leq \beta \leq 6,5$, e as LMIs que garantem a restrição nos ganhos do controlador, dadas no Teorema 7, com $0 \leq \eta \leq 15$ e $\eta_x = 10$. Como pode ser visto na Figura 5, o método proposto (Teoremas 5 e 7) é mais flexível que o método presente na literatura (Teoremas 4 e 7).

Figura 5 - Regiões de factibilidade utilizando os Teoremas 4 e 7 ("+") e o método proposto com os Teoremas 5 e 7 ("∘").



Fonte: Elaboração do próprio autor

Fixando a taxa de decaimento em $\beta = 5$ e os parâmetros relativos à restrição dos ganhos do controlador $\eta = 7$ e $\eta_x = 10$, os seguintes ganhos e as seguintes matrizes simétricas positivas definida, foram obtidos:

$$
\begin{aligned}
K &= [-8,9515 \quad -1,3708], \\
P &= \begin{bmatrix} 7,4262 & 1,1192 \\ 1,1192 & 0,1852 \end{bmatrix}, \\
K_1 &= [-12,9904 \quad -2,1058], \quad K_2 = [-14,0305 \quad -2,2765], \\
K_3 &= [-13,0763 \quad -2,1208], \quad K_4 = [-13,9741 \quad -2,2677], \\
K_5 &= [-13,9571 \quad -2,2647], \quad K_6 = [-15,6959 \quad -2,5472], \\
K_7 &= [-14,2103 \quad -2,3061], \quad K_8 = [-15,4792 \quad -2,5121], \\
P &= \begin{bmatrix} 6,7571 & 1,0964 \\ 1,0964 & 0,1809 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{55}
$$

com o método clássico (Teoremas 4 e 7) e o método proposto (Teoremas 5 e 7), respectivamente.

Como os ganhos do controlador foram encontrados, para implementar a lei de controle chaveada dada em (42), é necessário encontrar os valores máximos e mínimos de $u_0 = i_0$ no

domínio D_2 dado em (52). Como $i_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\lambda\mu}(1+\mu y_0)^2}$, segue que

$$\max_{m,y_0\in D_2}\{i_0(m,y_0)\} = 1,5927, \quad \min_{m,y_0\in D_2}\{i_0(m,y_0)\} = 0,7050. \tag{56}$$

Assim, fixando $\xi = 10^{-4}$ a lei de controle chaveada (42), para o levitador, é dada por:

$$u_{(\sigma,\xi)}(t) = i_{(\sigma,\xi)}(t) - i_0, \quad \text{com} \quad i_{(\sigma,\xi)}(t) = -K_\sigma x(t) + \gamma_\xi, \tag{57}$$

sendo $K_i,\ i \in \mathbb{K}_8$ e P dados em (55),

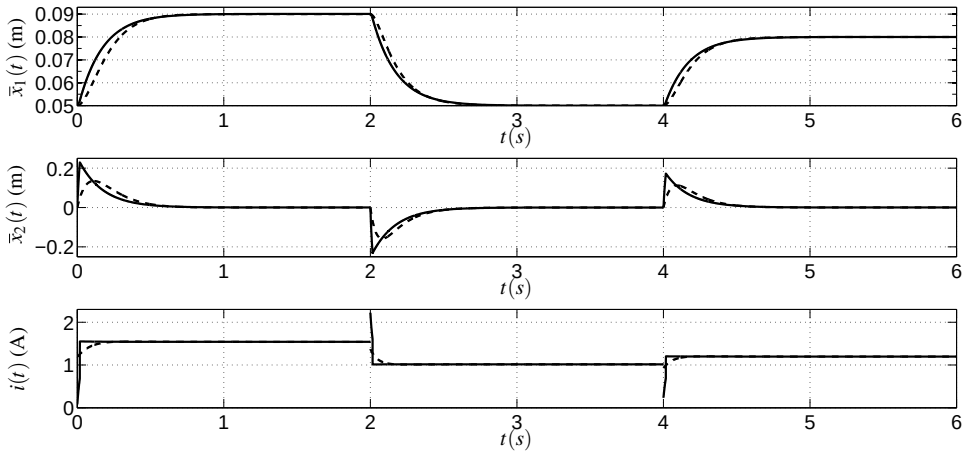
$$\begin{array}{rcl} K_\sigma & \in & \{K_1,K_2,K_3,K_4,K_5,K_6,K_7,K_8\}, \quad \sigma = \arg\min\limits_{i\in\mathbb{K}_r}^{*}\{-x(t)^T PBK_i x(t)\}, \\ \gamma_\xi & = & \begin{cases} 1,5927, & \text{se } x^T PB \le -\xi, \\ -4438,723x^T PB + 1.1488, & \text{se } |x^T PB| \le \xi, \\ 0,7050, & \text{se } x^T PB \ge \xi. \end{cases} \end{array} \tag{58}$$

Para a simulação numérica, em $t = 0$s foi considerada a condição inicial $\bar{x}(0) = [0,05 \quad 0]^T$, $m = 0,08$Kg e $y_0 = 0,09$m. Assim, $x(0) = \bar{x}(0) - [y_0 \quad 0]^T = [-0,04 \quad 0]^T$. Em $t = 1$s, da Figura 6, observa-se que o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(1) = [\bar{x}_1(1) \quad \bar{x}_2(1)]^T = [0,09 \quad 0]^T$. Mudando m de $0,08$Kg para $m = 0,04$Kg e y_0 de $0,09$m para $0,05$m em $t = 2$s, pode-se ver que o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(2) = [0,05 \quad 0]^T$, que será a nova condição inicial. Finalmente, para $t \ge 2$s, muda-se m de $0,04$Kg para $0,05$Kg e y_0 de $0,05$m para $0,08$m. Portando, como pode ser visto na Figura 6, $\bar{x}(\infty) = [0,08 \quad 0]^T$. A Figuras 6, ilustra a resposta do sistema.

Observação 4. *Como pode ser visto na Figura 6, foi apresentado a resposta do sistema controlado com o controlador chaveado* (42)-(43) *e o controlador clássico* (3)*. Entretanto, vale ressaltar que na prática não é possível implementar o controlador clássico, pois* $u(t) = \bar{u}(t) - i_0$ *e* $i_0 = \sqrt{2mg(1+\mu y_0)^2/\lambda\mu}$ *depende da massa que é incerta. Assim, foi implementado apenas para efeito de simulação.*

Observa-se que a lei de controle dada em (42) e (43) assegura que o sistema (51) é uniformemente *"ultimate bounded"* sendo m um parâmetro incerto e pertencente ao intervalo $0,02 \le m \le 0,08$ e y_0 constante e conhecida, mas podendo assumir qualquer valor no intervalo $0,04 \le y_0 \le 0,11$. Além disso, como pode ser visto na Figura 6, o novo projeto de controlador apresentado neste trabalho é mais eficiente do que o projeto comumente utilizado na literatura, visto que $\dot{V}_{u_\sigma} \le \dot{V}_{u_\alpha}$. Nota-se também, que para certos valores da taxa de decaimento β e da restrição na entrada η, como, por exemplo $\beta = 6$ e $\eta = 11$, é possível projetar o controlador (42) e não se pode projetar o controlador (3), como mostra a Figura 5.

Figura 6 - Posição $y(t) = \bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$ e corrente elétrica $i(t)$, do sistema controlado, utilizando o controlador chaveado (42)-(43) (linha contínua) e controlador clássico (3) (linha pontilhada), considerando $y_0 = 0,09$m e $m = 0,08$Kg, $y_0 = 0,05$m e $m = 0,04$Kg, $y_0 = 0,08$m e $m = 0,05$Kg, para $t \in [0,2)$, $t \in [2,4)$ e $t \geq 4$s, respectivamente, com taxa de decaimento $\beta = 5$, restrição nos ganhos do controlador $\eta = 7$ e $\eta_x = 10$ e $\xi = 10^{-4}$.



Fonte: Elaboração do próprio autor

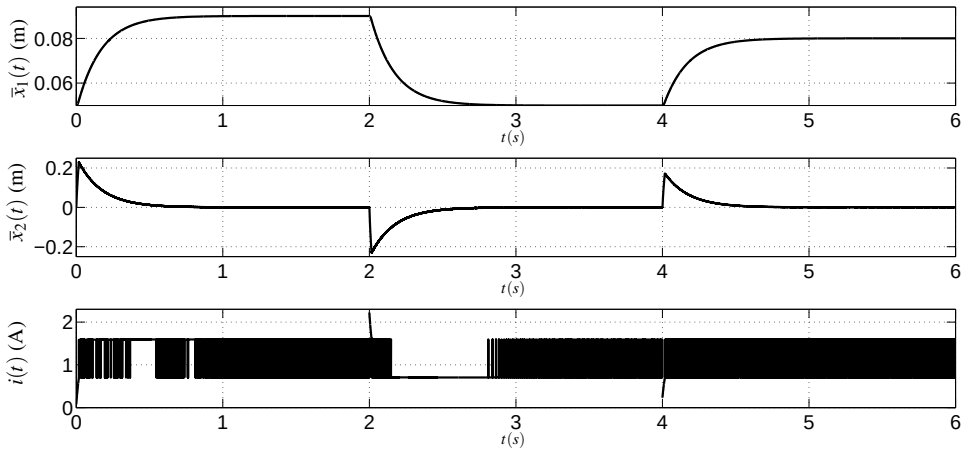
Observa-se que a função γ_ξ dada em (43), é importante para assegurar a *"uniform ultimate boundedness"* do sistema e a suavidade da entrada de controle. Nota-se também, que quando ξ é igual a zero a função γ_ξ é descontínua e, portanto, a entrada de controle também será descontínua, conforme ilustra a Figura 7. Entretanto, quando $\xi = 0$ o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema torna-se globalmente assintoticamente estável. Assim, o projetista pode escolher ξ de acordo com as suas necessidades.

3.5 Projeto e Implementação de um Controle Robusto Chaveado para um Sistema *2D Ball Balancer*

O objetivo desta seção é mostrar a eficiência da metodologia proposta, e isso será feito por meio do projeto e implementação no laboratório de um sistema de controle robusto chaveado para um sistema *2D ball balancer* , fabricado pela Quanser®, mostrado na Figura 8. Seu modelo esquemático na direção x da placa é mostrado na Figura 9, e na direção y pode ser representado da mesma forma.

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, cada um deles está ligado a um dos eixos da placa. Ao controlar a posição das

Figura 7 - Posição $y(t) = \bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$ e corrente elétrica $i(t)$, do sistema controlado, utilizando o controlador chaveado (42)-(43), considerando $y_0 = 0,09$m e $m = 0,08$Kg, $y_0 = 0,05$m e $m = 0,04$Kg, $y_0 = 0,08$m e $m = 0,05$Kg, para $t \in [0,2)$, $t \in [2,4)$ e $t \geq 4$s, respectivamente, com taxa de decaimento $\beta = 5$, restrição nos ganhos do controlador $\eta = 7$ e $\eta_x = 10$ e $\xi = 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor

engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

O modelo matemático do sistema *2D ball balancer* (QUANSER, 2008) é dado por:

$$\ddot{x}(t) = K_{bb}\theta(t), \qquad \tau\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = KV_m(t), \tag{59}$$

sendo:

$x(t)$ a posição da bola;

$\theta(t)$ o ângulo de carga;

$V_m(t) = u(t)$ o sinal de controle;

τ e K são parâmetros do fabricante;

$K_{bb} = \dfrac{2m_b g r_{arm} {r_b}^2}{L_{plate}(m_b {r_b}^2 + J_b)}$.

A descrição e os valôres das constantes são dados na Tabela 1.

O sistema (59) pode ser escrito no espaço de estados, na direção do x, como segue:

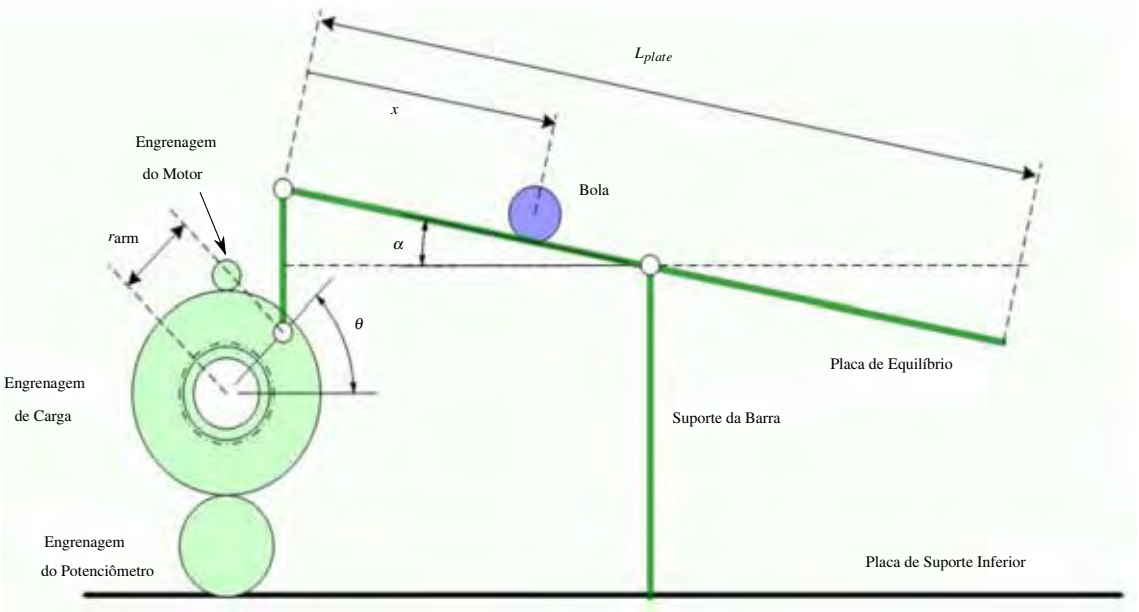
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix} u. \tag{60}$$

Figura 8 - *2D ball balancer*.

Fonte: Quanser (2008)

Fonte: Laboratório de Pesquisa em Controle - LPC(2013)

Figura 9 - Planta esquemática do *2D ball balancer* na direção *x*.



Fonte: Quanser (2008)

Tabela 1 - Parâmetros do sistema *2D ball balancer*.

Parâmetros	**Símbolo**	**Valor**
Massa da bola (Kg)	m_b	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	r_{arm}	2,54
Raio da bola (cm)	r_b	1,96
Comprimento da mesa (cm)	L_{plate}	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	K	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	τ	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida (Kgm^2)	J_b	0,0046
Parâmetro do sistema (m/s^{2}rad)	K_{bb}	1,3

Fonte: Quanser (2008).

Observava-se que a equação no espaço de estado na direção y pode ser escrita de forma semelhante à equação (60), trocando-se x por y.

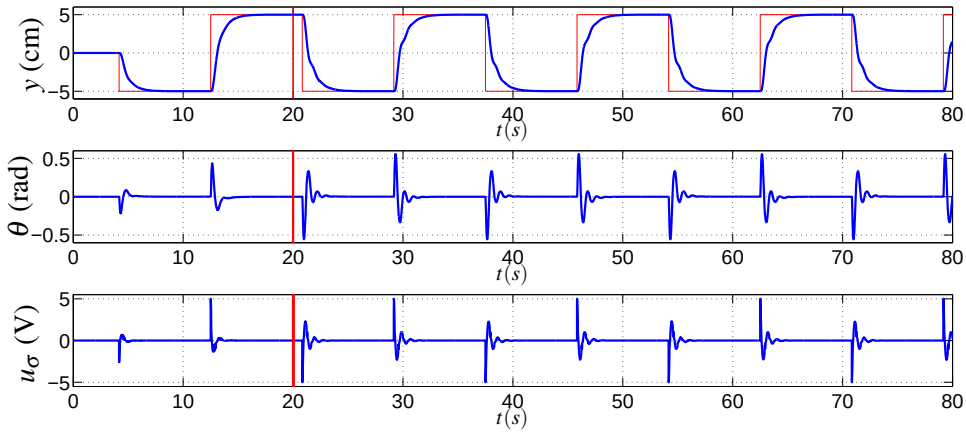
Para a simulação e implementação no laboratório, foi inserida uma falha na leitura do ângulo medido (θ), e assim, no projeto de controle foi considerado que esta falha pode chegar a 50% e ela foi modelada como sendo uma incerteza do tipo politópica. Portanto, para o projeto do controlador foram utilizados os seguintes vértices do politopo, para as direções x e y:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -17,5439 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 61,7544 \end{bmatrix}^T. \tag{61}$$

Considerando os vértices do politopo (61) e uma taxa de decaimento $\beta = 1,4$ foram obtidos os seguintes ganhos e a seguinte matriz simétrica positiva definida, para as direções x e y:

$$\begin{aligned} K_1 &= [51,4698 \;\; 43,3732 \;\; 10,2229 \;\; 0,1141], \\ K_2 &= [23,8435 \;\; 19,8702 \;\; 4,6307 \;\; 0,0358], \\ P &= 10^3 \begin{bmatrix} 6,9554 & 5,4244 & 1,1401 & 0,0679 \\ 5,4244 & 4,3804 & 0,9382 & 0,0567 \\ 1,1401 & 0,9382 & 0,2092 & 0,0130 \\ 0,0679 & 0,0567 & 0,0130 & 0,0009 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{62}$$

Figura 10 - Simulação numérica da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u_σ do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador chaveado (33).



Fonte: Elaboração do próprio autor

$$K=[169,1410 \;\; 144,6467 \;\; 32,7815 \;\; 1,4205],$$
$$P=10^5\begin{bmatrix} 4,0841 & 3,3482 & 0,7154 & 0,0342 \\ 3,3482 & 2,8149 & 0,6105 & 0,0295 \\ 0,7154 & 0,6105 & 0,1365 & 0,0068 \\ 0,0342 & 0,0295 & 0,0068 & 0,0004 \end{bmatrix}, \tag{63}$$

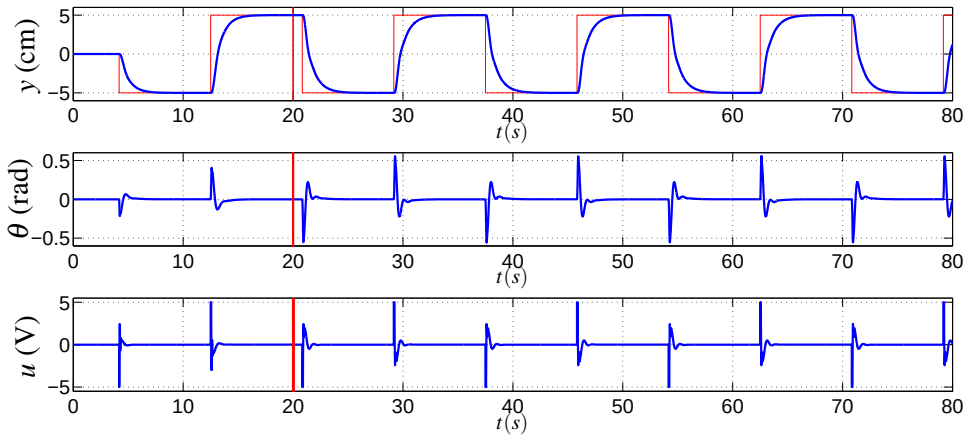
com o método proposto (Teorema 5) e o método clássico (Teorema 4), respectivamente.

Para a simulação e a implementação prática apenas as variáveis de estado x e θ estão disponíveis, e $\dot{x}$ e $\dot{\theta}$ são estimadas por meio de filtros derivativos $G_f(s) = 20s/(s+20)$. O objetivo do controle é fazer com que a bolinha siga uma trajetória pré definida, que nesta tese foi considerada como sendo um quadrado de 10cm de lado.

3.5.1 Simulações

O objetivo da simulação numérica é fazer com que a bolinha siga a referência de um quadrado de 10cm de lado. Embora os ganhos tenham sido projetados para suportar uma falha de 50%, com 20 segundos do início da simulação foi inserida uma falha de 30% na leitura do ângulo do motor da direção y da placa e foi considerada a condição inicial $[0\ 0\ 0\ 0]$. As respostas obtidas são apresentadas nas Figuras 10 e 11, utilizando o controladores (33) e (3), respectivamente. Não apresentamos a simulação da posição x, pois não foi inserida falha neste eixo.

Figura 11 - Simulação numérica da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador clássico (3).



Fonte: Elaboração do próprio autor

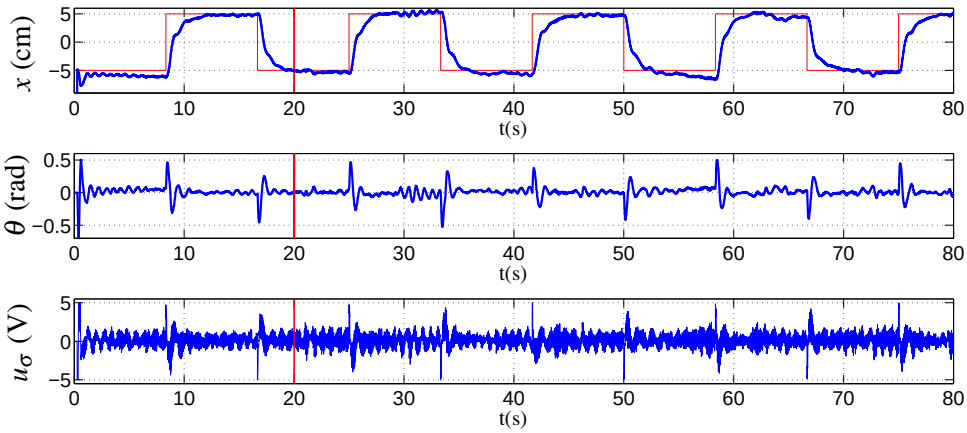
As simulações mostraram bons resultados, mas não evidenciaram os benefícios da metodologia proposta. Das Figuras 10 e 11, pode-se notar que os controladores apresentaram um bom desempenho na atenuação dos efeitos da falha de 30%, na leitura do ângulo θ, na direção y da placa.

3.5.2 Resultados Práticos

Os resultados práticos foram colhidos no LPC-FEIS-UNESP admitindo as mesmas condições das simulações numérica e foram obtidas as respostas apresentadas nas Figuras 12 a 16.

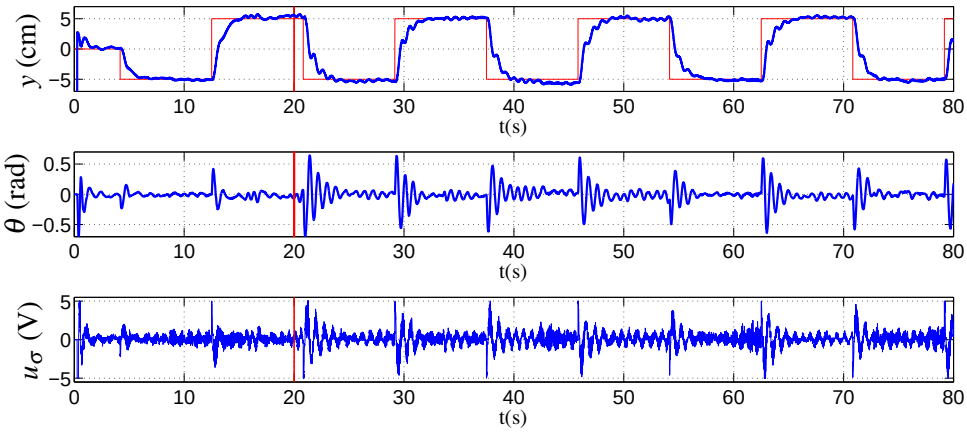
Os resultados experimentais confirmam a eficiência da metodologia proposta. Das Figuras 14 e 15, pode-se notar que com o controlador clássico (3), o sistema seguiu a posição desejada $y = \pm 5$ *cm* e manteve o ângulo da direção y próximo de zero, porém exigiu um esforço muito grande de tensão nos motores quando comparado ao controlador chaveado (33) que apresentou um melhor desempenho ao seguir a posição desejada, como pode ser visto nas Figuras 12, 13 e 16. Este fato é um tema para pesquisas futuras.

Figura 12 - Resultados práticos da direção x: posição x, ângulo θ e sinal de controle u_σ do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador chaveado (33).



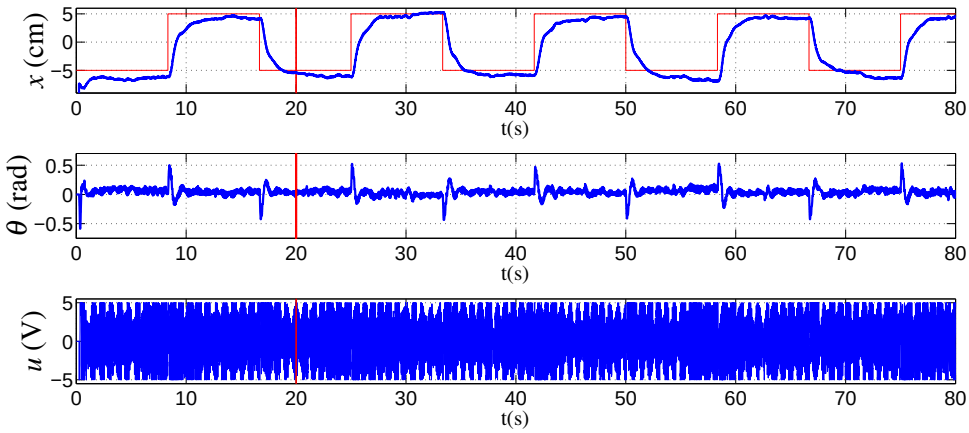
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 13 - Resultados práticos da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u_σ do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador chaveado (33).



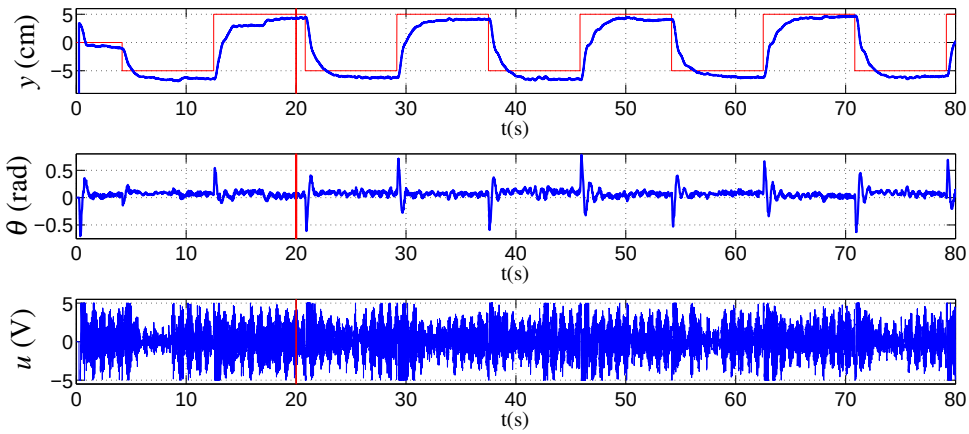
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 14 - Resultados práticos da direção x: posição x, ângulo θ e sinal de controle u do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador clássico (3).



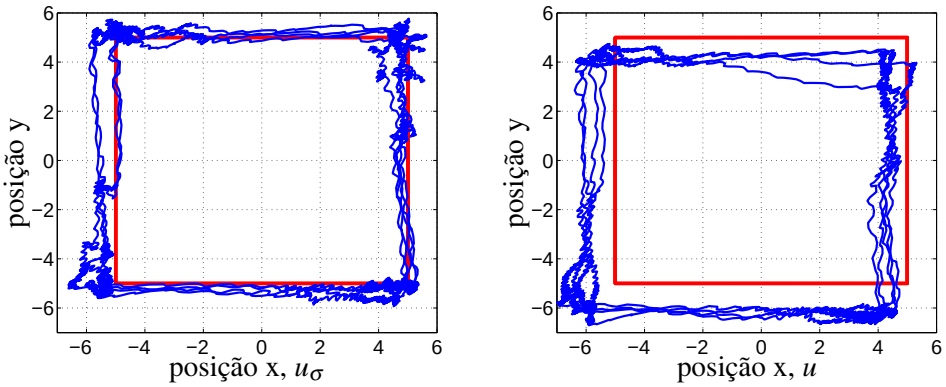
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 15 - Resultados práticos da direção y: posição y, ângulo θ e sinal de controle u do *2D ball balancer* (60) utilizando o controlador clássico (3).



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 16 - Resultados práticos da posição $x \times y$ do *2D ball balancer*.



Fonte: Elaboração do próprio autor

3.6 Conclusões Parciais

Neste capítulo foram propostos novos métodos de projeto de sistemas de controle chaveado para algumas classes de sistemas lineares com incertezas politópicas. Nos métodos propostos, os ganhos são escolhidos por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função quadrática de Lyapunov. Além disso, as LMIs utilizadas para encontrar os ganhos são menos conservadoras do que a clássica que utiliza apenas um ganho de realimentação do vetor de estado (BOYD et al., 1994), como pode ser visto nas Figuras 1, 2, 3 e 5. Por fim, foi apresentado o projeto e implementação da metodologia proposta no sistema de controle de um levitador magnético e de um *2D ball balancer*, inclusive com implementação em laboratório deste último. Os resultados práticos evidenciaram a eficácia da metodologia proposta como pode ser visto na Figura 16.

4 PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

Neste capítulo será proposto um novo método de controle chaveado para algumas classes de sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Esta nova lei de controle, que também depende das variáveis de estado, generaliza os resultados apresentados em (SOUZA et al., 2013), que considerou apenas plantas lineares. Como em (SOUZA et al., 2013) e (SANTIM, 2012), o controle proposto escolhe um ganho, em um conjunto de ganhos, por meio de uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática. A metodologia proposta permite projetar um conjunto de ganhos, baseados em LMIs e na compensação distribuída paralela, como proposto, por exemplo, em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ŻAK, 1999; TANIGUCHI et al., 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; KLUG; CASTELAN; LEITE, 2011).

A principal vantagem deste novo procedimento é a sua aplicação prática, pois elimina a necessidade de encontrar as expressões explícitas das funções de pertinência, que muitas vezes podem ser longas e/ou complexas, ou não serem conhecidas por terem incertezas. Além disso, para certas classes de sistemas não lineares, o controlador chaveado pode operar mesmo com incertezas na referência do sinal de controle. E mais, com a metodologia proposta os sistemas, em malha fechada, geralmente apresentam um tempo de estabilização menor do que aqueles obtidos com os controladores fuzzy, não chaveados, e amplamente utilizados na literatura. A metodologia também permite o acréscimo de índices de desempenho, tais como taxa de decaimento e restrições na entrada da planta e na saída, que podem ser adicionados às especificações do projeto de controle.

Resultados de simulação do controle de um sistema bola-viga e de um levitador magnético, serão apresentados para comparar o desempenho da lei de controle proposta com a lei de controle fuzzy tradicional que utiliza a compensação distribuída paralela, proposta em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANIGUCHI et al., 2001). As implementações computacionais foram realizadas utilizando a linguagem de modelagem YALMIP (LOFBERG, 2004) com o solver LMILab (GAHINET et al., 1995).

4.1 Caso 1: Sistema Fuzzy com uma Matriz Constante $B(\alpha) = B$

Nesta seção é proposto o projeto de um controlador chaveado para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (18), considerando que $B(\alpha) = B$ é uma matriz constante, isto é,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t). \tag{64}$$

Suponha que a as LMIs (24) sejam factíveis e sejam $K_i = M_i X^{-1},\ i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador dados em (20) e $P = X^{-1}$ obtidos das condições do Corolário 2. Então, considerando na Definição 1 $H_i = PBK_i$, define-se o controlador chaveado

$$u(t) = u_\sigma = -K_\sigma x, \quad \sigma = \arg\min_{i\in\mathbb{K}_r}{}^{*}\{-x^T PBK_i x\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \tag{65}$$

Portanto, de (1), o sistema controlado (64) e (65) pode ser escrito como segue:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu_\sigma = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \Big[A_i - BK_\sigma\Big] x(t). \tag{66}$$

Teorema 10. *Suponha que as condições do Corolário 2, relativas ao sistema* (64) *com a lei de controle* (20) *sejam satisfeitas e obtenha* $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$ *e* $P = X^{-1}$. *Então, a lei de controle chaveada* (65) *torna o ponto de equilíbrio* $x = 0$, *do sistema* (64), *globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T Px$, sendo $P = P^T \succ 0$. Defina $\dot{V}_{u_\alpha}$ e $\dot{V}_{u_\sigma}$ a derivada temporal de V para o sistema (64), com a lei de controle (20) e (65), respectivamente. Então, de (66),

$$\dot{V}_{u_\sigma} = 2x^T P\dot{x} = 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\sigma) = 2x^T PA(\alpha)x + 2x^T PB(-K_\sigma)x. \tag{67}$$

Assim, note que de (1) e (65),

$$\min_{i\in\mathbb{K}_r}\{x^T PB(-K_i)x\} \leq x^T PB\left(-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i K_i\right)x.$$

Portanto, de (67) e das leis dadas em (65) e (20) observa-se que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{u_\sigma} &= 2x^T PA(\alpha)x + 2\min_{i\in\mathbb{K}_r}\{x^T PB(-K_i)x\} \\
&\leq 2x^T PA(\alpha)x + 2x^T PB(-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i K_i)x \\
&= 2x^T P\left(A(\alpha) - BK(\alpha)\right)x
\end{aligned}$$

$$= \quad 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\alpha) = \dot{V}_{u_\alpha}.$$

Então, $\dot{V}_{u_\sigma} \leq \dot{V}_{u_\alpha}$. Além disso, considerando que do Corolário 2 $\dot{V}_{u_\alpha} < 0$ para $x \neq 0$, a prova está concluída. □

Observação 5. *O Teorema 10 mostra que, se as condições do Corolário 2 forem satisfeitas, então $\dot{V}_{u_\alpha}(x(t)) < 0$ para todo $x(t) \neq 0$ e assim, $\dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) < 0$ para $x(t) \neq 0$, assegurando que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado* (64) *e* (65) *seja globalmente assintoticamente estável. Assim, o Corolário 2 pode ser utilizado para projetar os ganhos $K_1, K_2, \ldots, K_r$ e a matriz $P = X^{-1}$ da lei de controle chaveada* (65)*. Além disso, note que a lei de controle chaveada* (65) *não utiliza as funções de pertinência α_i, $i \in \mathbb{K}_r$, que podem apresentar expressões complicadas para implementações práticas ou dependerem de incertezas da planta e que seriam necessárias para implementar a lei de controle* (20)*. Assim, a lei de controle proposta pode oferecer uma alternativa relativamente simples para a implementação do controlador.*

Observação 6. *Neste capítulo, por simplicidade, os novos métodos de projeto dos ganhos do controlador foram baseados no Teorema 3. Entretanto, a metodologia proposta não exclui a utilização de outros métodos de projeto de controle relaxados, também baseados em LMIs, para plantas descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, como os apresentados, por exemplo, em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; PIETROBOM; ASSUNÇÃO, 2000; TANIGUCHI et al., 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; MONTAGNER et al., 2005; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2010; CHEN et al., 2012). No Capítulo 5 o método proposto será generalizado e utilizará como base os resultados relaxados para o projeto dos ganhos do controlador apresentados em (CHEN et al., 2012).*

4.2 Caso 2: Sistema Fuzzy com Não Linearidades na Matriz $B(\alpha)$

Neste caso, será considerado o sistema fuzzy similar ao dado em (18), com α_i, $i \in \mathbb{K}_r$, definido em (1), ou seja,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \qquad \hat{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \hat{A}_i, \quad \hat{B}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \hat{B}_i. \tag{68}$$

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ a derivada temporal do vetor de entrada de controle $u \in \mathbb{R}^m$. Defina x_{n+l} e v_l,

tais que $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, $l \in \mathbb{K}_m$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = v_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) = v_m, \end{cases} \tag{69}$$

ou equivalentemente (BARMISH, 1983),

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bv(t), \tag{70}$$

sendo

$$x = [\hat{x}^T \; x_{n+1} \ldots x_{n+m}]^T,\; A(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{A}(\alpha) & \hat{B}(\alpha) \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ I_{m\times m} \end{bmatrix}.$$

Das considerações anteriores, nota-se que o sistema (70) é similar ao sistema (64), e portanto, o problema cai no Caso 1. Assim, pode-se adotar o procedimento estabelecido no Caso 1 para projetar uma lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$.

4.3 Caso 3: Sistema Fuzzy com Incerteza no Sinal de Controle

Neste caso, será considerado que a planta $\dot{\overline{x}} = f(\overline{x}, \overline{u})$, tem um ponto de equilíbrio $\overline{x} = x_0$ e a respectiva entrada de controle é igual a $\overline{u} = u_0$, tal que $f(x_0, u_0) = 0$. Suponha que x_0 é conhecido, $u_0 \in \mathbb{R}$ é incerto, porém, $0 < u_0 \in [u_{0_{\min}},\; u_{0_{\max}}]$ sendo $u_{0_{\min}}$ e $u_{0_{\max}}$ constantes conhecidas, e que a planta possa ser descrita por um sistema fuzzy Takagi-Sugeno como em (18), ou seja,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u, \tag{71}$$

sendo:
$x(t) = \overline{x}(t) - x_0$, $\overline{x}(t)$ o vetor de estado da planta;
$u(t) = \overline{u}(t) - u_0$, $\overline{u}$ a entrada de controle da planta.

Agora, suponha que $B(\alpha)$ possa ser representado da seguinte forma:

$$B(\alpha) = Bg(x(t)), \tag{72}$$

sendo B uma matriz constante e $g(x(t)) > 0$, para todo x, uma função não linear com incerteza. Assim, o sistema (71) e (72) pode ser escrito como segue:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u = A(\alpha)x(t) + Bg(x(t))u. \tag{73}$$

Admita que os ganhos $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, e a matriz $P = X^{-1}$, foram obtidos utilizando os vértices do politopo do sistema (71) nas LMIs (22) e (23) do Teorema 3, como proposto em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). Agora, dada uma constante $\xi \geq 0$ e considerando na Definição 1 $H_i = PBK_i$, define-se a lei de controle

$$u(t) = u_{(\sigma,\xi)}(t) = \overline{u}_{(\sigma,\xi)}(t) - u_0, \quad \text{com} \quad \overline{u}_{(\sigma,\xi)}(t) = -K_\sigma x(t) + \gamma_\xi, \tag{74}$$

sendo

$$\begin{gathered} K_\sigma \in \{K_1, K_2, \ldots, K_r\}, \qquad \sigma = \arg\min_{i\in\mathbb{K}_r}{}^{*}\{-x^T PBK_i x\}, \\ \gamma_\xi = \begin{cases} u_{0_{\max}}, & \text{se } x^T PB < -\xi, \\ \dfrac{(u_{0_{\min}} - u_{0_{\max}})x^T PB + \xi(u_{0_{\max}} + u_{0_{\min}})}{2\xi}, & \text{se } |x^T PB| \leq \xi, \\ u_{0_{\min}}, & \text{se } x^T PB > \xi. \end{cases} \end{gathered} \tag{75}$$

Dentro deste contexto, o seguinte teorema é proposto.

Teorema 11. *Suponha que as condições do Teorema 3, relativa ao sistema* (71) *e* (72) *com a lei de controle* (20)*, sejam satisfeitas e obtenha $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, e $P = X^{-1}$. Então, a lei de controle chaveada* (74) *e* (75) *torna o sistema* (71) *uniformemente* "ultimate bounded".

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T Px$. Defina $\dot{V}_{u_\alpha}$ e $\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}}$ a derivada temporal de V para o sistema (71), (72), com a lei de controle (20) e (74)-(75), respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} &= 2x^T P\dot{x} = 2x^T P(A(\alpha)x + Bg(x)u_{(\sigma,\xi)}) \\ &= 2x^T P\{A(\alpha)x - B(\alpha)K(\alpha)x + Bg(x)[\overline{u}_{(\sigma,\xi)} - u_0 + K(\alpha)x]\} \\ &= \dot{V}_{u_\alpha} + 2x^T PBg(x)[-K_\sigma x + \gamma_\xi - u_0 + K(\alpha)x] \\ &= \dot{V}_{u_\alpha} + 2g(x)\min_{i\in\mathbb{K}_r}\left\{-x^T PBK_i x\right\} + 2g(x)x^T PB[\gamma_\xi - u_0 + K(\alpha)x]. \end{aligned} \tag{76}$$

Lembrando que $\alpha_i > 0,\ i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $g(x) > 0$, $g(x)B = B(\alpha)$ e notando que

$$\min_{i\in\mathbb{K}_r}\{-x^T PBK_i x\} \leq -x^T PB\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i\right)x,$$

de (76), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} &\leq \dot{V}_{u_\alpha} - 2x^T PB(\alpha)\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i\right)x + 2g(x)x^T PB[\gamma_\xi - u_0 + K(\alpha)x] \\ &= \dot{V}_{u_\alpha} + 2g(x)x^T PB(\gamma_\xi - u_0). \end{aligned} \tag{77}$$

Agora, se $|x^T PB| > \xi$ então de (75), $g(x)x^T PB(\gamma_\xi - u_0) \leq 0$. Assim, de (77) $\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} \leq \dot{V}_{u_\alpha} < 0$ para $x \neq 0$, visto que o Teorema 3 assegura que o sistema (71) com a lei de controle (20) é globalmente assintoticamente estável. Por outro lado, se $|x^T PB| \leq \xi$ obtém-se de (77) e (75)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} &\leq \dot{V}_{u_\alpha} + 2g_{\max}|x^T PB| \cdot |\gamma_\xi - u_0| \\
&\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + 2g_{\max}|\gamma_\xi - u_0|\xi \\
&\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + 2g_{\max}(|\gamma_\xi| + |u_0|)\xi \\
&\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + 4g_{\max} \cdot u_{0_{\max}} \cdot \xi \\
&\leq -\varepsilon\|x\|_2^2 + \varepsilon_1, \qquad (78)
\end{aligned}$$

sendo $-\varepsilon < 0$ o maior autovalor de $P(A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)) + (A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha))^T P$ para todo α definido em (1), $g_{\max} = \max\{g(x)\}$ e $\varepsilon_1 = 4g_{\max} \cdot u_{0_{\max}} \cdot \xi$. Portanto, $\dot{V}_{u_{(\sigma,\xi)}} < 0$ se $\|x\|_2 > \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon}$. Então, de acordo com (CORLESS; LEITMANN, 1981) o sistema controlado é uniformemente *"ultimately bounded"* e a demonstração é concluída. □

4.4 Exemplos

4.4.1 Exemplo do Caso 1: Sistema Bola Viga

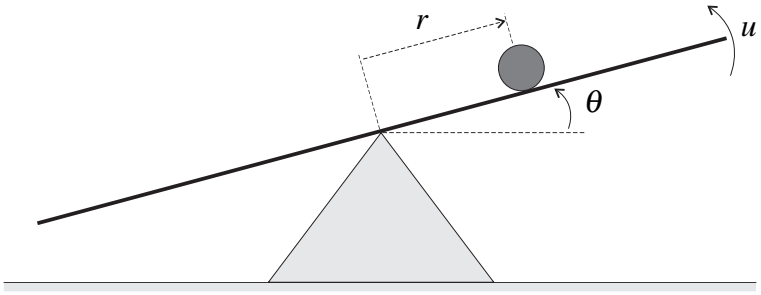
Para ilustrar este caso, será projetado um sistema de controle chaveado para um sistema bola viga, ilustrado na Figura 17, cujo modelo matemático foi estabelecido em (WANG, 1996, page 217) e é dado por:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = \beta r(t)\dot{\theta}^2(t) - \beta g \text{sen}(\theta(t)), \\ \ddot{\theta}(t) = u(t), \end{cases} \qquad (79)$$

sendo:
r a posição da bola;
θ o ângulo da viga em relação ao solo;
u é o torque aplicado na barra e o sinal de controle;
$g = 9,81$ m/s^2 e $\beta = mr^2/(J_b + mr^2)$ é um parâmetro incerto do sistema que depende da massa m, do raio r e do momento de inércia J_b da bola.

Defina as variáveis de estado $x_1 = r(t)$, $x_2 = \dot{r}(t)$, $x_3 = \theta(t)$ e $x_4 = \dot{\theta}(t)$. Então, definindo também o vetor de estado $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$, o sistema (79) pode ser escrito como segue

Figura 17 - Sistema bola-viga.



Fonte: Cardim (2009)

(CARDIM, 2009, p.31) e (SILVA, 2005, p.136):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 x_4^2 - \beta g \text{sen}(x_3), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u, \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{23}(\tilde{x}) & f_{24}(\tilde{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{80}$$

sendo $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \beta)$,

$$f_{23}(\tilde{x}) = -\frac{\alpha\beta \text{sen}(x_3)}{x_3} \quad \text{e} \quad f_{24}(\tilde{x}) = \alpha x_1 x_4. \tag{81}$$

Observa-se que, para implementação do controle chaveado (65), os ganhos do controlador serão projetados utilizando a forma generalizada proposta em (TANIGUCHI et al., 2001), e, portanto, será considerado o seguinte domínio para o sistema (80)-(81):

$$D = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq x_1 \leq 1, \quad -\frac{\pi}{12} \leq x_3 \leq \frac{\pi}{12}, \quad -2 \leq x_4 \leq 2, \quad 0,6 \leq \beta \leq 0,8\}.$$

Feitos os cálculos, foram obtidos os seguintes valores máximos e mínimos para as funções f_{23} e f_{24}:

$$\begin{aligned} a_{23_1} &= \max_{\tilde{x} \in D} \{f_{23}(\tilde{x})\} = -4,1565, & a_{23_2} &= \min_{\tilde{x} \in D} \{f_{23}(\tilde{x})\} = -5,6058, \\ a_{24_1} &= \max_{\tilde{x} \in D} \{f_{24}(\tilde{x})\} = 1,1429, & a_{24_2} &= \min_{\tilde{x} \in D} \{f_{24}(\tilde{x})\} = -1,1429. \end{aligned} \tag{82}$$

Assim, a função não linear f_{23} pode ser representada por um modelo fuzzy Takagi-Sugeno, considerando que existe uma combinação convexa com as funções de pertinência $\sigma_{23_1}(\tilde{x})$ e $\sigma_{23_2}(\tilde{x})$ e valores constantes a_{23_1} e a_{23_2} dados em (82) tais que

$$f_{23}(\tilde{x}) = \sigma_{23_1}(\tilde{x}) a_{23_1} + \sigma_{23_2}(\tilde{x}) a_{23_2}, \tag{83}$$

com

$$0 \leq \sigma_{23_1}(\tilde{x}),\ \sigma_{23_2}(\tilde{x}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sigma_{23_1}(\tilde{x}) + \sigma_{23_2}(\tilde{x}) = 1. \tag{84}$$

Portanto, de (83) e (84) segue que

$$\sigma_{23_1}(\tilde{x}) = \frac{f_{23}(\tilde{x}) - a_{23_2}}{a_{23_1} - a_{23_2}} \quad \text{e} \quad \sigma_{23_2}(\tilde{x}) = 1 - \sigma_{23_1}(\tilde{x}).$$

Analogamente, de (82), existem $\xi_{24_1}(\tilde{x})$ e $\xi_{24_2}(\tilde{x})$ tais que

$$f_{24}(\tilde{x}) = \xi_{24_1}(\tilde{x})a_{24_1} + \xi_{24_2}(\tilde{x})a_{24_2}, \tag{85}$$

com

$$0 \leq \xi_{24_1}(\tilde{x}),\ \xi_{24_2}(\tilde{x}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \xi_{24_1}(\tilde{x}) + \xi_{24_2}(\tilde{x}) = 1. \tag{86}$$

Logo, de (85) e (86) segue que

$$\xi_{24_1}(\tilde{x}) = \frac{f_{24}(\tilde{x}) - a_{24_2}}{a_{24_1} - a_{24_2}} \quad \text{e} \quad \xi_{24_2}(\tilde{x}) = 1 - \xi_{24_1}(\tilde{x}).$$

Lembrando que $\xi_{24_1}(\tilde{x}) + \xi_{24_2}(\tilde{x}) = 1$ e $\sigma_{23_1}(\tilde{x}) + \sigma_{23_2}(x) = 1$, de (83) e (85), respectivamente, segue que

$$\begin{aligned}
f_{23}(\tilde{x}) &= (\xi_{24_1}(\tilde{x}) + \xi_{24_2}(\tilde{x}))(\sigma_{23_1}(\tilde{x})a_{23_1} + \sigma_{23_2}(\tilde{x})a_{23_2}) \\
&= \sigma_{23_1}(\tilde{x})\xi_{24_1}(\tilde{x})a_{23_1} + \sigma_{23_1}(\tilde{x})\xi_{24_2}(\tilde{x})a_{23_1} + \sigma_{23_2}(\tilde{x})\xi_{24_1}(\tilde{x})a_{23_2} + \sigma_{23_2}(\tilde{x})\xi_{24_2}(\tilde{x})a_{23_2}, \\
f_{24}(\tilde{x}) &= (\sigma_{23_1} + \sigma_{23_2})(\xi_{24_1}(\tilde{x})a_{24_1} + \xi_{24_2}(\tilde{x})a_{24_2}) \\
&= \sigma_{23_1}(\tilde{x})\xi_{24_1}(\tilde{x})b_{21_1} + \sigma_{23_1}(\tilde{x})\xi_{24_2}(\tilde{x})b_{21_2} + \sigma_{23_2}(\tilde{x})\xi_{24_1}(\tilde{x})b_{21_1} + \sigma_{23_2}(\tilde{x})\xi_{24_2}(\tilde{x})b_{21_2}.
\end{aligned}$$

Agora, definindo

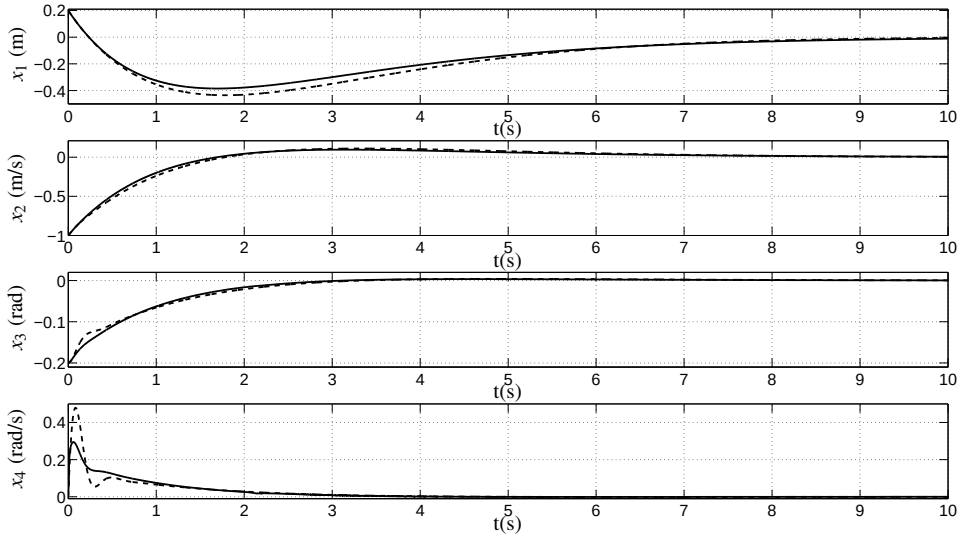
$$\begin{aligned}
\alpha_1(\tilde{x}) &= \sigma_{23_1}(\tilde{x})\xi_{24_1}(\tilde{x}), & \alpha_2(\tilde{x}) &= \sigma_{23_1}(\tilde{x})\xi_{24_2}(\tilde{x}), \\
\alpha_3(\tilde{x}) &= \sigma_{23_2}(\tilde{x})\xi_{24_1}(\tilde{x}), & \alpha_4(\tilde{x}) &= \sigma_{23_2}(\tilde{x})\xi_{24_2}(\tilde{x}),
\end{aligned} \tag{87}$$

como sendo as funções de pertinência do sistema (80) e (81), seus modelos locais são:

$$[A_1|A_2|A_3|A_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{23_1} & a_{24_1} & 0 & 0 & a_{23_1} & a_{24_2} & 0 & 0 & a_{23_2} & a_{24_1} & 0 & 0 & a_{23_2} & a_{24_2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right],$$

e $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$.

Figura 18 - Variáveis de estado do sistema bola-viga (80) utilizando o controlador chaveado (65) (linha contínua) e o controlador fuzzy (20) (linha pontilhada), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \quad -1 \quad -0,2 \quad 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor

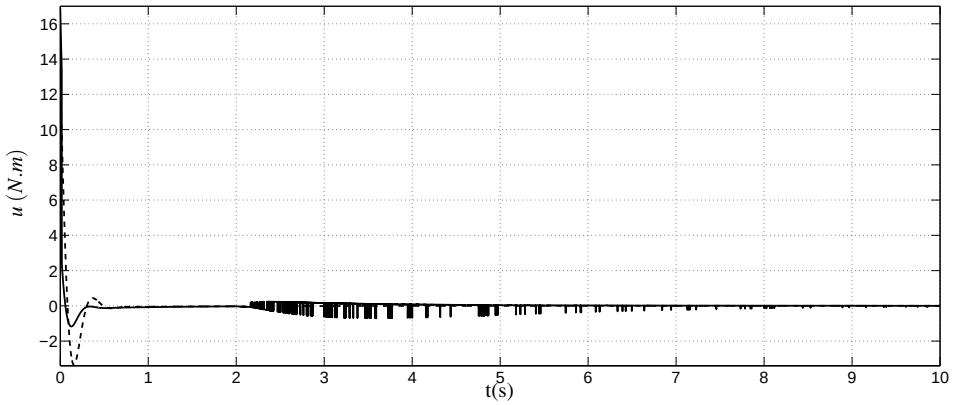
Assim, utilizando as LMIs (24), para $i \in \mathbb{K}_r$, do Corolário 2, obtém-se os seguintes ganhos do controlador e matriz simétrica positiva definida:

$$\begin{aligned} K_1 &= [-13,9643 \quad -36,1463 \quad 249,5925 \quad 14,9009], \\ K_2 &= [-23,6059 \quad -73,6067 \quad 383,2830 \quad 23,2807], \\ K_3 &= [-13,6184 \quad -34,8026 \quad 244,7968 \quad 14,6003], \\ K_4 &= [-23,2600 \quad -72,2629 \quad 378,4873 \quad 22,9801], \\ P &= \begin{bmatrix} 0,1070 & 0,1763 & -0,8247 & -0,0491 \\ 0,1763 & 0,6849 & -2,4444 & -0,1532 \\ -0,8247 & -2,4444 & 13,7418 & 0,8263 \\ -0,0491 & -0,1532 & 0,8263 & 0,0917 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{88}$$

O objetivo da simulação deste sistema de controle foi manter a bola na origem. Considerando a condição inicial $x_0 = [0,2 \quad -1 \quad -0,2 \quad 0]^T$ e o ponto de equilíbrio $x_e = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, a simulação do sistema controlado (80), (81), (65), (88) e (80), (81), (20), (88) apresentou as respostas ilustradas nas Figuras 18 e 19.

Vale observar que os ganhos foram obtidos utilizando a forma generalizada proposta em (TANIGUCHI et al., 2001). Contudo, o controlador chaveado u_σ dado em (65) não utiliza as funções de pertinência e, portanto, não é necessário encontrar e implementar tais funções.

Figura 19 - Sinal de controle do sistema bola-viga (80) utilizando o controlador chaveado (65) (linha contínua) e o controlador fuzzy (20) (linha pontilhada), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \quad -1 \quad -0,2 \quad 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Assim, uma vantagem desta nova metodologia é que pode-se eliminar todas as etapas do projeto dadas em (83)-(87) que são necessárias para encontrar as funções de pertinência, e que às vezes pode ter expressões longas e/ou complexas ou podem não serem conhecidas, quando dependem de parâmetros incertos, o que impossibilita as suas implementações em aplicações práticas, como é o caso deste exemplo.

4.4.2 Exemplo do Caso 2: Levitador Magnético

Para ilustrar este caso, será projetado o sistema de controle chaveado de um levitador magnético, cujas equações e domínio foram apresentados nas equações de (48) a (50). Assim, será utilizado o sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = g - \frac{k}{m}\bar{x}_2 - \frac{\lambda\mu i^2}{2m(1+\mu\bar{x}_1)^2}, \end{cases} \tag{89}$$

cujo ponto de equilíbrio é $\bar{x}_e = [\bar{x}_{1_e} \quad \bar{x}_{2_e}]^T = [y_0 \quad 0]^T$. Da segunda equação de (89), observa-se no ponto de equilíbrio, $\dot{\bar{x}}_2 = 0$ e $i = i_0$, sendo

$$i_0^2 = \frac{2mg}{\lambda\mu}(1+\mu y_0)^2. \tag{90}$$

Observa-se que o ponto de equilíbrio não está na origem $[\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^T = [0 \quad 0]^T$. Assim, para a análise de estabilidade é necessária a seguinte mudança de coordenadas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_1 - y_0, \\ x_2 = \bar{x}_2, \\ u = i^2 - i_0^2, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \bar{x}_1 = x_1 + y_0, \\ \bar{x}_2 = x_2, \\ i^2 = u + i_0^2, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{\bar{x}}_1, \\ \dot{x}_2 = \dot{\bar{x}}_2, \\ i^2 = u + \frac{2mg}{\lambda\mu}(1+\mu y_0)^2. \end{array}\right.$$

Assim, o sistema (89) pode ser escrito como segue:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1+\mu(x_1+y_0))^2}x_1 - \dfrac{k}{m}x_2 - \dfrac{\lambda\mu}{2m(1+\mu(x_1+y_0))^2}u. \end{array}\right. \tag{91}$$

Finalmente, considerando $z = (x_1, x_2, y_0)$ e de (91) segue que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{21}(z) & -\dfrac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21}(z) \end{bmatrix} u, \tag{92}$$

sendo

$$f_{21}(z) = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1+\mu(x_1+y_0))^2} \qquad \text{e} \qquad g_{21}(z) = \frac{-\lambda\mu}{2m(1+\mu(x_1+y_0))^2}. \tag{93}$$

Agora, define-se x_3 e v tais que $\dot{x}_3 = \dot{u} = v$, isto é, $x_3 = u$. Assim, considerando (93), o sistema (92) pode ser dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ f_{21}(z) & -\frac{k}{m} & g_{21}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v. \tag{94}$$

Após este ajuste, pode-se ver que o problema recai ao Caso 1. Assim, o procedimento descrito no Caso 1 pode ser utilizado para projetar a lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^3$.

Portanto, para encontrar os modelos locais deve-se obter os valores máximos e mínimos de funções f_{21} e g_{21}. Neste caso, será utilizada a metodologia proposta em (SANTIM et al., 2012; SANTIM, 2012), considerando a massa $m = 0,05$ Kg. Então, supõe-se que a posição desejada pertença ao conjunto $y_0 \in [0,04,\ \ 0,11]$ e, portanto, y_0 será considerado como sendo uma nova variável para a especificação do domínio D_3 das funções não lineares f_{21} e g_{21}:

$$D_3 = \{z = (x_1, x_2, y_0) \in \mathbb{R}^3 : -0,11 \leq x_1 \leq 0,11,\ \ 0,04 \leq y_0 \leq 0,11\}. \tag{95}$$

Feito os cálculos, considerando (93) e (95), obteve-se

$$\begin{aligned} a_{21_1} &= \max_{z\in D_3}\{f_{21}(z)\} = 51,4116, \\ a_{21_2} &= \min_{z\in D_3}\{f_{21}(z)\} = 25,1427, \\ b_{21_1} &= \max_{z\in D_3}\{g_{21}(z)\} = -4,4367, \\ b_{21_2} &= \min_{z\in D_3}\{g_{21}(z)\} = -12,4392. \end{aligned} \tag{96}$$

Portanto, de (96) tem-se os seguintes modelos locais:

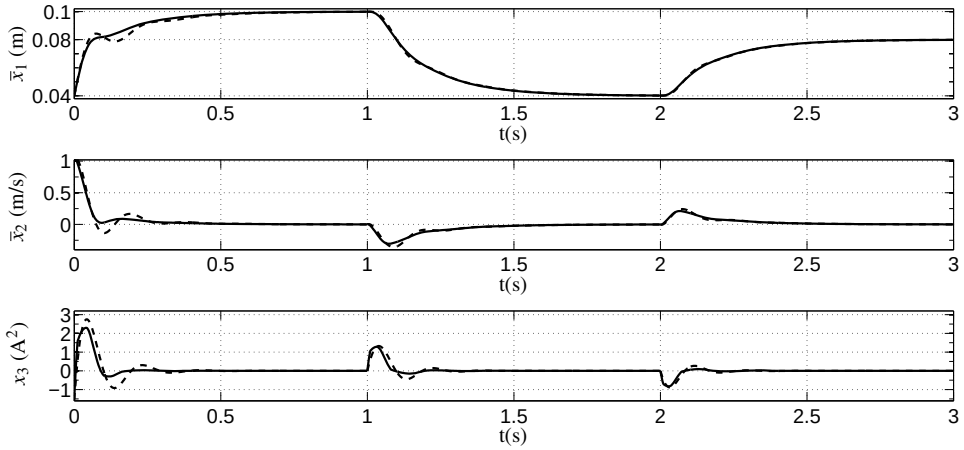
$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_1} & -0,02 & b_{21_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_1} & -0,02 & b_{21_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_2} & -0,02 & b_{21_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_2} & -0,02 & b_{21_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 = [0 \quad 0 \quad 1]^T. \end{aligned} \tag{97}$$

Utilizando as LMIs (24) do Corolário 2, os seguintes ganhos do controlador e a seguinte matriz simétrica positiva definida foram obtidos:

$$\begin{aligned} K_1 &= [-636,9216 \;\; -109,3352 \;\; 15,6269], \\ K_2 &= 10^3[-2,2199 \;\; -0,3851 \;\; 0,0535], \\ K_3 &= [-784,7978 \;\; -135,0930 \;\; 19,1611], \\ K_4 &= 10^3[-2,3678 \;\; -0,4108 \;\; 0,0570], \\ P &= \begin{bmatrix} 5,7404 & 0,8178 & -0,1420 \\ 0,8178 & 0,1424 & -0,0195 \\ -0,1420 & -0,0195 & 0,0077 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{98}$$

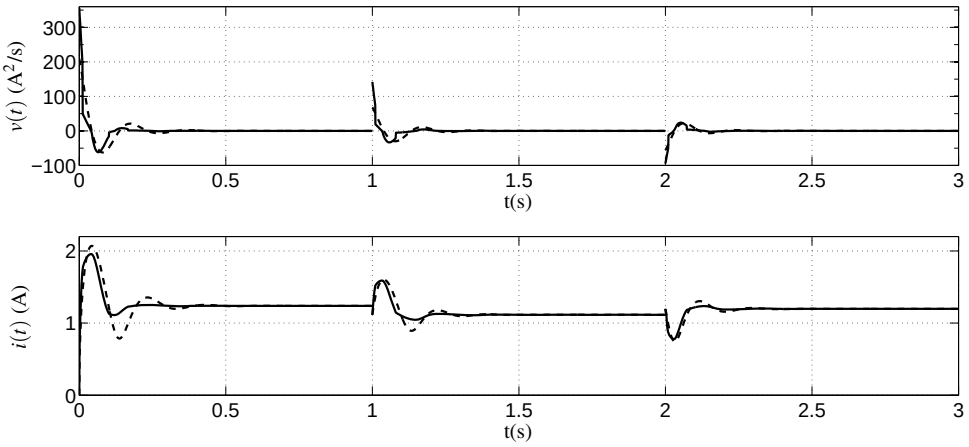
Para a simulação numérica, em $t = 0$s foi considerada a condição inicial $\bar{x}(0) = [0,04 \;\; 1]^T$ e $y_0 = 0,1$m. Como $x_3 = u = i^2 - i_0^2$ e $i_0^2 = 1,5339$ (considerando que $i^2(0) = 0$, a condição inicial para o sistema (94) é $x_0 = [0,04 \;\; 1 \;\; 0]^T - [0,1 \;\; 0 \;\; 1,5339]^T = [-0,06 \quad 1 \quad -1,5339]^T$, ou seja, $x_3(0) = -1,5339$). Em $t = 1$s, da Figura 20 observa-se que o sistema está praticamente em regime no ponto $\bar{x}(1) = [\bar{x}_1(1) \quad \bar{x}_2(1)]^T = [0,1 \quad 0]^T$ e $x_3(1) = 0$. Mudando y_0 de $0,1$m para $0,04$m pode-se ver que, em $t = 2$s, o sistema está praticamente em regime no ponto $\bar{x}(2) = [0,04 \quad 0]^T$ e $x_3(2) = 0$, que será a nova condição inicial. Finalmente, para $t \geq 2$s, muda-se y_0 de $0,04$m para $0,08$m. Assim, como mostra a Figura 20, $\bar{x}(\infty) = [0,08 \quad 0]$ e $x_3(\infty) = 0$. As Figuras 20 e 21, ilustram a resposta do sistema.

Figura 20 - Variáveis de estado do levitador magnético (49) e estado x_3 dado em (94), utilizando o controlador chaveado (65) (linha contínua) e controlador fuzzy (20) (linha pontilhada), para $y_0 \in [0,04,\ 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1$m, $y_0 = 0,04$m e $y_0 = 0,08$m, para $t \in [0\ 1)$, $t \in [1\ 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 21 - Sinal de controle chaveado $v(t)$ (65) e corrente elétrica chaveada $i(t)$ (linha contínua), sinal de controle fuzzy (20) e corrente elétrica $i(t)$ (linha pontilhada), para $y_0 \in [0,04,\ 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1$m, $y_0 = 0,04$m e $y_0 = 0,08$m, para $t \in [0\ 1)$, $t \in [1\ 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

4.4.3 Exemplo do Caso 3: Levitador Magnético

Considere o levitador magnético dado na equações (89) e (92)-(93), admitindo que a massa m é incerta, como proposto em (SOUZA et al., 2012), e defina o domínio de operação D_4,

$$D_4 = \{z = (x_1, x_2, y_0, m) \in \mathbb{R}^4 : -0,08 \leq x_1 \leq 0,1,\ 0,05 \leq y_0 \leq 0,08,\ 0,08 \leq m \leq 0,1\}. \quad (99)$$

Assim, o sistema (92) pode ser escrito como segue

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21}(z) \end{bmatrix} u, \quad (100)$$

sendo

$$\begin{aligned} f_{21}(z) &= \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1+\mu(x_1+y_0))^2}, \\ f_{22}(z) &= -\frac{k}{m}, \\ g_{21}(z) &= \frac{-\lambda\mu}{2m(1+\mu(x_1+y_0))^2}. \end{aligned} \quad (101)$$

Observa-se que o sistema (100) pode ser escrito com em (73), isto é,

$$\dot{x} = A(\alpha)x + Bg(z)u,$$

sendo $B = [0 \quad -1]^T$ e $g(z) = -g_{21}(z) = \frac{\lambda\mu}{2m(1+\mu(x_1+y_0))^2}$. Nota-se que $g(z) > 0$, para todo $z \in D_4$.

Após os cálculos, foram obtidos os seguintes valores máximos e mínimos das funções f_{21}, f_{22}, g_{21} e i_0^2, no domínio D_4:

$$\begin{aligned} a_{21_1} &= \max_{z\in D_4}\{f_{21}(z)\} = 45,2512, & b_{21_1} &= \max_{z\in D_4}\{g_{21}(z)\} = -2,4870, \\ a_{21_2} &= \min_{z\in D_4}\{f_{21}(z)\} = 26,7042, & b_{21_2} &= \min_{z\in D_4}\{g_{21}(z)\} = -6,5075, \\ a_{22_1} &= \max_{z\in D_4}\{f_{22}(z)\} = -0,0100, & \max u_0 &= \max_{z\in D_4}\{i_0^2(z)\} = 2,8667, \\ a_{22_2} &= \min_{z\in D_4}\{f_{22}(z)\} = -0,0125, & \min u_0 &= \max_{z\in D_4}\{i_0^2(z)\} = 2,0623. \end{aligned} \quad (102)$$

De (102), tem-se os seguintes modelos locais da planta (100)-(101)

$$[A_1|A_3|A_5|A_7|B_1|B_2] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_1} & a_{22_1} & a_{21_1} & a_{22_2} & a_{21_2} & a_{22_1} & a_{21_2} & a_{22_2} & b_{21_1} & b_{21_2} \end{array}\right],$$

sendo $A_1 = A_2,\ A_3 = A_4,\ A_5 = A_6,\ A_7 = A_8,\ B_1 = B_3 = B_5 = B_7$ e $B_2 = B_4 = B_6 = B_8$.

Assim, pelo Teorema 11, utilizando as LMIs (22) e (23) do Teorema 3, os seguintes ganhos

do controlador e a seguinte matriz simétrica positiva definida foram obtidos:

$$\begin{array}{llll} K_1 = [-67,1269 & -8,6056], & K_2 = [-39,6153 & -4,9426], \\ K_3 = [-67,1260 & -8,6051], & K_4 = [-39,6157 & -4,9423], \\ K_5 = [-65,5197 & -8,7998], & K_6 = [-34,0771 & -4,6633], \\ K_7 = [-65,5169 & -8,7990], & K_8 = [-34,0824 & -4,6634], \end{array} \quad P = \begin{bmatrix} 3,0219 & 0,4500 \\ 0,4500 & 0,0827 \end{bmatrix}. \tag{103}$$

Fixando $\xi = 10^{-4}$, a lei de controle (74) para o levitador é dada por

$$u(t) = u_{(\sigma,\xi)}(t) = i^2_{(\sigma,\xi)}(t) - i_0^2 \quad \text{com} \quad i^2_{(\sigma,\xi)}(t) = -K_\sigma x(t) + \gamma_\xi, \tag{104}$$

sendo $K_i,\ i \in \mathbb{K}_8$, dados em (103),

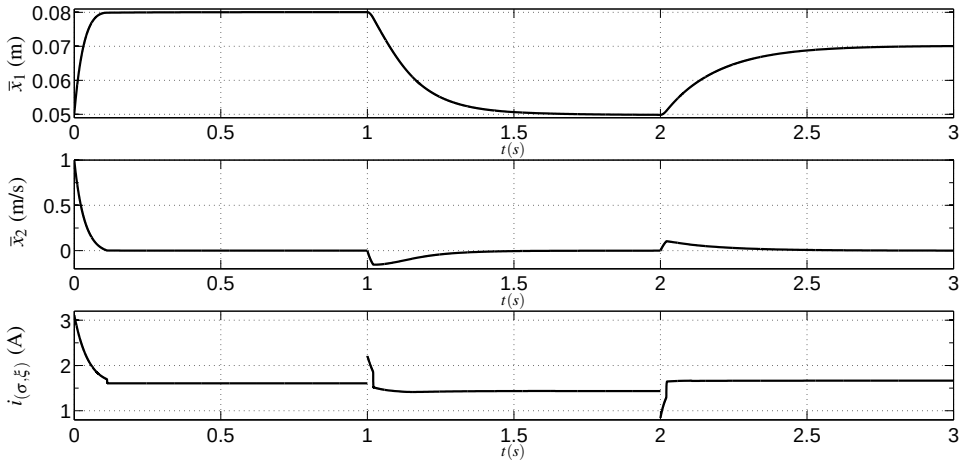
$$\begin{array}{rcl} K_\sigma & \in & \{K_1, K_2, K_3, \ldots, K_8\}, \quad \sigma = \arg\min\limits^*_{i \in \mathbb{K}_r} \{-x(t)^T PBK_i x(t)\}, \\ \gamma_\xi & = & \begin{cases} 2,8667, & \text{se } x^T PB \leq -10^{-4}, \\ -4022,3x^T PB + 2,4645, & \text{se } |x^T PB| \leq 10^{-4}, \\ 2,0623, & \text{se } x^T PB \geq 10^{-4}. \end{cases} \end{array} \tag{105}$$

Para a simulação, ilustrada na Figura 22, em $t = 0$s considerou-se a condição inicial $\bar{x}(0) = [0,05 \quad 1]^T$, $y_0 = 0,08$m e $m = 0,09$Kg. Em $t = 1$s, nota-se na Figura 22, que o sistema está praticamente em regime no ponto $\bar{x}(1) = [0,08 \quad 0]^T$. Mudando y_0 de $0,08$m para $0,05$m e m de $0,09$Kg para $0,08$Kg em $t = 2$s, pode-se ver que o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(2) = [0,05 \quad 0]^T$, que será a nova condição inicial. Finalmente, para $t \geq 2$s, muda-se y_0 de $0,05$m para $0,07$m e m de $0,08$Kg para $0,01$Kg. Assim, observa-se na Figura 22, que $x(\infty) = [0,07 \quad 0]^T$.

Observa-se que, neste caso, não é possível obter as funções de pertinência, visto que a massa é incerta, mas o método proposto supera este problema, pois não depende de tais funções. Verifica-se também que mesmo com incerteza na referência do sinal de controle a procedimento proposto é eficiente e forneceu uma resposta transitória apropriada, como mostra a Figura 22.

Observação 7. *Em um projeto de controle é importante assegurar estabilidade e outros índices de desempenhos usuais para o sistema controlado, tais como o tempo de estabilização (relacionado com a taxa de decaimento), restrições na entrada e saída do sinal de controle. A metodologia proposta permite especificar estes índices de desempenho, sem a necessidade de alterar as LMIs dadas (BOYD et al., 1994) e/ou (TANIGUCHI et al., 2001), pela adição de um novo conjunto de LMIs.*

Figura 22 - Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$, velocidade $(\bar{x}_2(t))$ e corrente elétrica $(i_{(\sigma,\xi)}(t))$ do sistema controlado, considerando $y_0 = 0,08$m e $m = 0,09$Kg, $y_0 = 0,05$m e $m = 0,08$Kg e $y_0 = 0,07$m e $m = 0,1$Kg, para $t \in [0\ 1)$, $t \in [1\ 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

4.5 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi proposto um novo método de projeto de controladores chaveado para algumas classes de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-sugeno. No sistema de controle, como no caso linear, os ganhos são escolhidos por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática. Além disso, o novo método elimina a necessidade da obtenção das expressões explícitas das funções de pertinência, para implementar a lei de controle, e não altera as LMIs dadas em métodos de projeto de controle comumente utilizadas para plantas descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, como as propostas, por exemplo, em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ŻAK, 1999; TANIGUCHI et al., 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; KLUG; CASTELAN; LEITE, 2011).

5 CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS UTILIZANDO FUNÇÃO DE LYAPUNOV QUADRÁTICA POR PARTES

Neste capítulo é proposto um novo método de projeto de controle chaveado para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. O controlador proposto é definido por uma lei de chaveamento que consiste de dois estágios. O primeiro estágio é baseado em (GEROMEL; COLANERI, 2006; CHEN et al., 2012) e seleciona uma matriz simétrica positiva definida utilizando uma função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo e o segundo estágio escolhe os ganhos do controlador que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov. Para o desenvolvimento deste método de projeto de controle, novas condições de estabilidade foram estabelecidas e algumas dessas condições são baseadas em BMIs. Estas BMIs contém termos na forma do produto de uma matriz por um escalar e segundo Chen et al. (2012) podem ser resolvidas eficientemente pelo método *path-following* (HASSIBI; HOW; BOYD, 1999). Além disso, o controlador chaveado proposto também pode operar mesmo com incerteza na referência do sinal de controle.

Os resultados estabelecidos neste capítulo são mais gerais do que os apresentados no Capítulo 4, pois não exigem que a matriz $B(\alpha)$, do sistema (18), seja constante e, além disso, utiliza funções de Lyapunov quadráticas por partes.

O método proposto foi aplicado no projeto do sistema de controle de um sistema não linear, que é considerado uma referência para comparar relaxamento de critérios de estabilização de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (CHEN et al., 2012). Além disso, são apresentados resultados de simulação da aplicação do procedimento no controle de um levitador magnético, considerando que a massa da bola que será levitada é incerta. As implementações computacionais foram realizadas utilizando a linguagem do YALMIP (LOFBERG, 2004), com o solver SeDuMi (STURM, 1999).

5.1 Controlador Fuzzy Chaveado

Nesta seção será apresentado um controlador fuzzy chaveado proposto em (CHEN et al., 2012), para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (18), reescrito como segue:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t). \tag{106}$$

Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo da seguinte forma:

$$V(x) = \min_{k \in \mathbb{K}_N} \{x^T(t) P_k x(t)\}, \tag{107}$$

sendo $P_k,\ k \in \mathbb{K}_N$, matrizes simétricas positivas definidas.

Assim, considerando a função de Lyapunov quadrática por partes (107) e da Definição 1, o controlador fuzzy chaveado proposto em (CHEN et al., 2012), pode ser escrito como segue:

$$u(t) = u_\sigma(t) = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t)) K_{i\sigma} x(t), \qquad \text{sendo} \qquad \sigma = \arg\min_{k \in \mathbb{K}_N}{}^{*} \{x(t)^T P_k x(t)\}. \tag{108}$$

Portanto, considerando (1), o sistema controlado (106) e (108) é dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u_\sigma(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j \Big(A_i - B_i K_{j\sigma}\Big) x(t). \tag{109}$$

Dentro deste contexto, considerando a função de Lyapunov quadrática por partes (107) e o controlador chaveado fuzzy (108), em (CHEN et al., 2012) foi proposto um teorema que estabeleceu critérios de estabilização mais relaxados do que os disponíveis atualmente. Entretanto, algumas das condições propostas são BMIs, pois contêm o produto de matriz por escalar. Felizmente, o tipo de BMIs que aparece pode ser resolvida de forma eficiente pelo método *path-following* (HASSIBI; HOW; BOYD, 1999).

5.2 Controlador Chaveado

Nesta seção, é proposto o projeto de um controlador chaveado para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (106). Para a determinação dos ganhos de realimentação, o controlador proposto utiliza dois estágios. O primeiro estágio, baseado em (CHEN et al., 2012), seleciona um índice $\sigma = \arg\min_{k \in \mathbb{K}_N}{}^{*} \{x^T P_k x\}$, sendo $P_k,\ k \in \mathbb{K}_N$, matrizes simétricas positivas definidas. Note que a função de Lyapunov dada em (107) é igual a $V(x) = x^T P_\sigma x$. A ideia básica do segundo estágio é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov (107), por meio da seleção do

ganho do controlador, que pertence ao conjunto de ganhos $\{K_{j\sigma},\ j \in \mathbb{K}_r\}$, sendo σ obtido no primeiro estágio. Este estágio utiliza matrizes simétricas auxiliares $Q_{jk}, j \in \mathbb{K}_r, k \in \mathbb{K}_N$, o índice σ e escolhe um índice $\nu = \arg\min_{j\in\mathbb{K}_r}{}^*\{x^T Q_{j\sigma} x\}$. Portanto, considerando os índices ν e σ obtidos, utilizando a Definição 1, define-se o controlador chaveado da seguinte forma:

$$u(t) = u_{\sigma\nu}(t) = -K_{\nu\sigma}x(t), \qquad \sigma = \arg\min_{k\in\mathbb{K}_N}{}^*\{x^T P_k x\}, \quad \nu = \arg\min_{j\in\mathbb{K}_r}{}^*\{x^T Q_{j\sigma} x\}. \tag{110}$$

Portanto, admitindo (1), o sistema controlado (106) e (110) é dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u_{\nu\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \Big(A_i - B_i K_{\nu\sigma}\Big)x(t). \tag{111}$$

Neste contexto, considerando a função de Lyapunov por partes (107) e o controlador chaveado (110), é proposto o seguinte teorema.

Teorema 12. *Suponha a existência de matrizes simétricas positivas definidas $X_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes simétricas $Z_{ik},\ R_{ik}, Y_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $M_{ik} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e escalares $\lambda_{isk} > 0$, $\beta < 0$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $k, s \in \mathbb{K}_N$:*

$$-B_i M_{jk} - M_{jk}^T B_i^T - Z_{ik} - R_{jk} \prec 0, \tag{112}$$

$$Y_{ik} \prec 0, \tag{113}$$

$$\begin{bmatrix} O_{ik} & * & * & \cdots & * \\ \lambda_{i1k}X_k & -\lambda_{i1k}X_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{i2k}X_k & 0 & -\lambda_{i2k}X_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \lambda_{iNk}X_k & 0 & \dots & 0 & -\lambda_{iNk}X_N \end{bmatrix} \prec 0, \tag{114}$$

sendo $O_{ik} = X_k A_i^T + A_i X_k + Z_{ik} + R_{ik} - \beta X_k - \sum_{s=1}^{N} \lambda_{isk} X_k - Y_{ik}$.

Então a lei de controle chaveada (110) *torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema* (106) *globalmente assintoticamente estável, sendo $Q_{jk} = X_k^{-1} R_{jk} X_k^{-1}$, $P_k = X_k^{-1}$ e os ganhos do controlador dados por $K_{jk} = M_{jk} X_k^{-1}$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_N$.*

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática por partes, dada em (107). Suponha que $V(x) = \min_{i\in\mathbb{K}_N}\{x^T P_i x\} = x^T P_\sigma x$, sendo que σ é selecionado como descrito em (110) e na Definição 1. Da análise apresentada em (CHEN et al., 2012), se $V(x(t^+)) \leq V_\sigma(x(t^+))$ então $\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}_\sigma(x(t))$. De fato, visto que

$$\dot{V}(x(t)) = \lim_{t^+\to t} \frac{V(x(t^+)) - V(x(t))}{t^+ - t} = \lim_{t^+\to t} \frac{V(x(t^+)) - V_\sigma(x(t))}{t^+ - t}$$

e, por outro lado,

$$\dot{V}_\sigma(x(t)) = \lim_{t^+ \to t} \frac{V_\sigma(x(t^+)) - V_\sigma(x(t))}{t^+ - t}.$$

Como $V(x(t^+)) \leq V_\sigma(x(t^+))$ implica que

$$\dot{V}(x(t)) = \lim_{t^+ \to t} \frac{V(x(t^+)) - V_\sigma(x(t))}{t^+ - t} \leq \lim_{t^+ \to t} \frac{V_\sigma(x(t^+)) - V_\sigma(x(t))}{t^+ - t} = \dot{V}_\sigma(x(t)).$$

Assim, lembrando que $\beta < 0$, da análise acima e de (111) segue que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) - \beta V(x) &\leq \dot{V}_\sigma(x) - \beta V_\sigma(x) = \dot{x}^T P_\sigma x + x^T P_\sigma \dot{x} - \beta x^T P_\sigma x \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T (P_\sigma A_i + A_i^T P_\sigma - P_\sigma B_i K_{v\sigma} - K_{v\sigma}^T B_i^T P_\sigma - \beta P_\sigma) x. \end{aligned} \tag{115}$$

Considerando os parâmetros de relaxamento $\lambda_{is\sigma} > 0,\ i \in \mathbb{K}_r,\ s, \sigma \in \mathbb{K}_N$, note que de (108),

$$\sum_{s=1}^{N} \lambda_{is\sigma} x^T (P_s - P_\sigma) x \geq 0.$$

Agora, suponha que existam matrizes simétricas $\overline{Z}_{ik},\ Q_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$-(P_k B_i K_{jk} + K_{jk}^T B_i^T P_k) \prec \overline{Z}_{ik} + Q_{jk}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{K}_r,\ \ k \in \mathbb{K}_N. \tag{116}$$

Portanto, de (115) e (116) segue que:

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x) - \beta V(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T \left[P_\sigma A_i + A_i^T P_\sigma - P_\sigma B_i K_{v\sigma} - K_{v\sigma}^T B_i^T P_\sigma - \beta P_\sigma + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{is\sigma} (P_s - P_\sigma) \right] x \\ &< \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T \left[P_\sigma A_i + A_i^T P_\sigma + \overline{Z}_{i\sigma} + Q_{v\sigma} - \beta P_\sigma + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{is\sigma} (P_s - P_\sigma) \right] x \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T \left[P_\sigma A_i + A_i^T P_\sigma + \overline{Z}_{i\sigma} - \beta P_\sigma + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{is\sigma} (P_s - P_\sigma) \right] x + x^T Q_{v\sigma} x. \end{aligned} \tag{117}$$

De (1) e (110), pode-se notar que

$$x^T Q_{v\sigma} x = \min_{i \in \mathbb{K}_r} (x^T Q_{i\sigma} x) \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T Q_{i\sigma} x.$$

Então, de (117) segue que

$$\dot{V}(x) - \beta V(x) \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T (P_\sigma A_i + A_i^T P_\sigma + \overline{Z}_{i\sigma} + Q_{i\sigma} - \beta P_\sigma + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{is\sigma} (P_s - P_\sigma)) x. \tag{118}$$

Agora, suponha que existam matrizes simétricas $W_{ik},\ i \in \mathbb{K}_r,\ k \in \mathbb{K}_N$, tais que

$$P_k A_i + A_i^T P_k + \overline{Z}_{ik} + Q_{ik} - \beta P_k + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{isk}(P_s - P_k) - W_{ik} \preceq 0, \quad i \in \mathbb{K}_r,\ k \in \mathbb{K}_N. \tag{119}$$

Portanto, de (118) e (119) pode-se concluir que

$$\dot{V}(x) - \beta V(x) < \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T (W_{i\sigma}) x < 0, \quad x \neq 0. \tag{120}$$

Lembrando que $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, de (120), $\dot{V}(x) - \beta V(x) < 0$ (para $x \neq 0$) se para todo $i \in \mathbb{K}_r,\ k \in \mathbb{K}_r$, obtém-se

$$W_{ik} \prec 0. \tag{121}$$

Agora, defina $X_k = P_k^{-1}$, $Z_{ik} = X_k \overline{Z}_{ik} X_k$, $R_{ik} = X_k Q_{ik} X_k$, $M_{jk} = K_{jk} X_k$ e $Y_{ik} = X_k W_{ik} X_k$. Pré e pós multiplicando as equações (116), (121) e (119) por X_k, são obtidas as equações (112), (113) e

$$A_i X_k + X_k A_i^T + Z_{ik} + R_{ik} - \beta X_k + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{isk}(X_k P_s X_k - X_k) - Y_{ik} \preceq 0. \tag{122}$$

Por fim, aplica-se o complemento de Schur em (122) e obtém-se (114), concluindo a demonstração. □

Observação 8. *Vale observar que as condições* (114) *do Teorema 12 são BMIs. Entretanto, de acordo com Chen et al. (2012), esse tipo de BMIs pode ser resolvida de forma eficiente pelo método path-following (HASSIBI; HOW; BOYD, 1999), cujos passos são apresentados com detalhes no Apêndice A, que foi inspirado no apêndice de (CHEN et al., 2012).*

Observação 9. *As condições do Teorema 12 podem serem reescritas considerando* $N = 1$*, da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} -B_i M_{j1} - M_{j1}^T B_i^T - Z_{i1} - R_{j1} &\prec 0, \\ Y_{i1} &\prec 0, \\ \begin{bmatrix} O_{i1} & * \\ \lambda_{i11} X_1 & -\lambda_{i11} X_1 \end{bmatrix} &\prec 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \end{aligned} \tag{123}$$

sendo $O_{i1} = X_1 A_i^T + A_i X_1 + Z_{i1} + R_{i1} - \beta X_1 - \lambda_{i11} X_1 - Y_{i1}$.

Agora, aplicando o complemento de Schur na terceira desigualdade de (123) *obtém-se as*

condições simplificadas dadas por:

$$\begin{aligned} -B_iM_{j1} - M_{j1}^TB_i^T - Z_{i1} - R_{j1} &\prec 0, \\ Y_{i1} &\prec 0, \\ X_1A_i^T + A_iX_1 + Z_{i1} + R_{i1} - \beta X_1 - Y_{i1} &\prec 0. \end{aligned} \tag{124}$$

5.2.1 Controlador Chaveado com Incerteza na Referência da Entrada de Controle

Nesta seção, será considerado que a planta dada por $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u})$, tem um ponto de equilíbrio $\bar{x} = x_0$ e a respectiva entrada de controle é $\bar{u} = u_0$, tais que $f(x_0, u_0) = 0$. Admita que x_0 é conhecido e $u_0 \in \mathbb{R}$ é incerto, pois depende das incertezas da planta, mas $0 < u_0 \in [u_{0_{\min}},\ u_{0_{\max}}]$ sendo que $u_{0_{\min}}$ e $u_{0_{\max}}$ são constantes conhecidas, e a planta descrita pelo sistema fuzzy Takagi-Sugeno (106), ou seja,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u, \tag{125}$$

sendo:
$x(t) = \bar{x}(t) - x_0$, $\bar{x}(t)$ é o vetor de estado da planta;
$u(t) = \bar{u}(t) - u_0$, $\bar{u}$ é a entrada de controle da planta.

Agora, considere que $B(\alpha)$ possa ser escrito da seguinte forma:

$$B(\alpha) = Bg(x(t)), \tag{126}$$

sendo que B é uma matriz de elementos constantes conhecida e $g(x(t)) > 0$, para todo x, é uma função não linear incerta e limitada. Assim, o sistema (125) pode ser reescrito como segue:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u = A(\alpha)x(t) + Bg(x(t))u. \tag{127}$$

Agora, admita que as condições (112)-(114) do Teorema 12 sejam factíveis. Então, é possível obter os ganhos $K_{jk} = M_{jk}X_k^{-1}$ e as matrizes $P_k = X_k^{-1}$, Q_{jk}, $j \in \mathbb{K}_r$, $k \in \mathbb{K}_N$. Assim, dada uma constante $\xi > 0$, define-se a lei de controle chaveada

$$u(t) = u_{(\nu,\sigma,\xi)} = \bar{u}_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) - u_0, \ \text{ com } \ \bar{u}_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) = -K_{\nu\sigma}x + \gamma_\xi, \tag{128}$$

sendo

$$\begin{aligned} &K_{\nu\sigma} \in \{K_{11}, K_{21}, \ldots, K_{r1}, \ldots, K_{rN}\}, \quad \sigma = \arg\min_{k\in\mathbb{K}_N}{}^{*}\{x^TP_kx\}, \quad \nu = \arg\min_{j\in\mathbb{K}_r}{}^{*}\{x^TQ_{j\sigma}x\}, \\ &\gamma_\xi = \begin{cases} u_{0_{\max}}, & \text{se } \ x^TP_\sigma B \le 0, \\ u_{0_{\min}}, & \text{se } \ x^TP_\sigma B > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{129}$$

Das considerações acima o seguinte teorema é proposto.

Teorema 13. *Admita que as condições do Teorema 12, relativas ao sistema* (125) *com a lei de controle* (110)*, sejam satisfeitas e obtenha* $K_{jk} = M_{jk}X_k^{-1}$*,* $P_k = X_k^{-1}$ *e* Q_{jk}*,* $j \in \mathbb{K}_r$*,* $k \in \mathbb{K}_N$*. Então, a lei de controle chaveada* (128)-(129) *torna o ponto de equilíbrio* $x = 0$*, do sistema* (125)*, globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática por partes $V = \min_{i\in\mathbb{K}_r}\{x^T P_i x\} = x^T P_\sigma x$. Defina $\dot{V}_{u_{\nu\sigma}}$ e $\dot{V}_{u_{(\nu,\sigma,\xi)}}$ a derivada temporal de V para o sistema (125) e (126), com as leis de controle (110) e (128)-(129), respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{u_{(\nu,\sigma,\xi)}} &= 2x^T P_\sigma \dot{x} = 2x^T P_\sigma [A(\alpha)x + B(\alpha)u_{(\nu,\sigma,\xi)}] \\
&= 2x^T P_\sigma [A(\alpha)x + B(\alpha)(\overline{u}_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) - u_0)] \\
&= 2x^T P_\sigma [A(\alpha)x + B(\alpha)(-K_{\nu\sigma}x + \gamma_\xi - u_0)] \\
&= 2x^T P_\sigma A(\alpha)x - 2x^T P_\sigma B(\alpha)K_{\nu\sigma}x + 2x^T P_\sigma B(\alpha)(\gamma_\xi - u_0) \\
&= 2\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T (P_\sigma A_i - P_\sigma B_i K_{\nu\sigma})x + 2g(x)x^T P_\sigma B(\gamma_\xi - u_0) \\
&= \dot{V}_{u_{\nu\sigma}} + 2g(x)x^T P_\sigma B(\gamma_\xi - u_0). \qquad (130)
\end{aligned}$$

Agora, note que de (129), $g(x)x^T P_\sigma B(\gamma_\xi - u_0) \leq 0$. Assim, de (130) $\dot{V}_{u_{(\nu,\sigma,\xi)}} \leq \dot{V}_{u_{\nu\sigma}} < 0$ para $x \neq 0$, visto que do Teorema 12 o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (125) com a lei de controle (110) é globalmente assintoticamente estável, pois $\dot{V}_{u_{\nu\sigma}} < 0$ para $x \neq 0$, e portanto a demonstração está concluída. □

Observação 10. *Observe que a entrada de controle* $\overline{u} = -K_{\nu\sigma} + \gamma_\xi$ *é descontínua devido à descontinuidade de* γ_ξ *definida em* (129)*. Note também que em algumas implementações práticas este fenômeno de descontinuidade pode ser inconveniente ou não ser permitido. Assim, como nos Capítulos 3 e 4, e em (SOUZA et al., 2013), pode ser feita uma modificação na função* γ_ξ *para torná-la contínua e assegurar a* ultimate boundedness *uniforme do sistema e suavidade da entrada de controle. Assim, basta considerar uma função* γ_ξ *como segue (SOUZA et al., 2013):*

$$\gamma_\xi = \begin{cases} u_{0_{\max}}, & se\ \ x^T P_\sigma B < -\xi, \\ \left[(u_{0_{\min}} - u_{0_{\max}})x^T P_\sigma B + \xi(u_{0_{\max}} + u_{0_{\min}})\right]/2\xi, & se\ \ |x^T P_\sigma B| \leq \xi, \\ u_{0_{\min}}, & se\ \ x^T P_\sigma B > \xi, \end{cases} \qquad (131)$$

sendo $\xi > 0$ *um parâmetro do projeto suficientemente pequeno.*

5.3 Exemplos Numéricos

5.3.1 Exemplo 1: Estudo Comparativo do Método Proposto

O seguinte exemplo tem sido utilizado em vários trabalhos e é considerado uma referência para o relaxamento de critérios de estabilização de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; CHEN et al., 2012).

Considere o sistema fuzzy Takagi-Sugeno definido pelas regras:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \quad & \text{SE } x_1 \text{ é } M_i \\ & \text{ENTÃO } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad x(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t)]^T,\ i \in \mathbb{K}_3, \end{aligned} \tag{132}$$

sendo

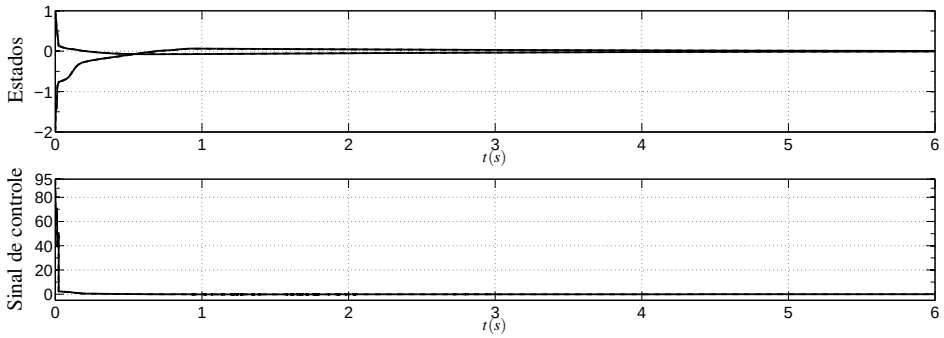
$$[A_1|A_2|A_3|B_1|B_2|B_3] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|c|c|c} 1,59 & -7,29 & 0,02 & -4,64 & -a & -4,33 & 1 & 8 & -b+6 \\ 0,01 & 0 & 0,35 & 0,21 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Suponha que $a = 2$ e $b \in [0,\ 7]$, com o máximo valor de b no intervalo discreto $0 : 0,5 : 7$. Das condições do Teorema 12, para $N = 4$, o máximo valor obtido foi $b = 6$. Assim, fixando $a = 2$ e $b = 6$, resolvendo as desigualdades (112)-(114), apresentadas no Teorema 12, para $N = 4$, pelo método *path-following* considerando no passo inicial $\beta_0 = 0,4429$ e $\lambda_{isk}(0)$, $i \in \mathbb{K}_3$ e $s,k \in \mathbb{K}_4$, escolhidos de forma aleatória (utilizando a função *rand* do Matlab), uma solução factível foi obtida para $\beta = -0,0071$. Neste caso, os ganhos do controlador, as matrizes simétricas positivas definidas da função de Lyapunov quadrática por partes (107) e as matrizes simétricas Q_{jk} foram as seguintes:

$$\begin{array}{lll} K_{11} = [3,1964 \;\; 1,5996], & K_{21} = [3,1438 \;\; 1,6354], & K_{31} = [3,1957 \;\; 1,5990], \\ K_{12} = [2,9822 \;\; 1,4083], & K_{22} = [2,9814 \;\; 1,4087], & K_{32} = [2,9822 \;\; 1,4072], \\ K_{13} = [88,7641 \;\; 73,1443], & K_{23} = [75,2306 \;\; 63,7048], & K_{33} = [75,2309 \;\; 63,6697], \\ K_{14} = [1,9312 \;\; -0,5863], & K_{24} = [0,8267 \;\; -0,0527], & K_{34} = [1,8368 \;\; -0,5619], \end{array} \tag{133}$$

$$\begin{array}{ll} P_1 = \left[\begin{array}{cc} 169,1387 & 145,8907 \\ 145,8907 & 906,3213 \end{array}\right], & P_2 = \left[\begin{array}{cc} 168,1260 & 141,6762 \\ 141,6762 & 900,0816 \end{array}\right], \\ P_3 = \left[\begin{array}{cc} 171,0932 & 152,2472 \\ 152,2472 & 915,8180 \end{array}\right], & P_4 = \left[\begin{array}{cc} 167,1593 & 131,3891 \\ 131,3891 & 892,2195 \end{array}\right], \end{array} \tag{134}$$

Figura 23 - Variáveis de estado e sinal de controle do sistema controlado, utilizando o controlador chaveado (110) (linha contínua) e o controlador fuzzy chaveado (108) (linha pontilhada), considerando a condição inicial $[-2 \;\; 1]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,9411 & 3,1029 \\ 3,1029 & 3,0112 \end{bmatrix}, \quad Q_{21} = 10^3 \begin{bmatrix} 2,9040 & 4,5544 \\ 4,5544 & 4,0824 \end{bmatrix}, \\
Q_{31} &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,9444 & 3,0926 \\ 3,0926 & 3,0520 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,8452 & 2,8836 \\ 2,8836 & 2,5406 \end{bmatrix}, \\
Q_{22} &= 10^3 \begin{bmatrix} 2,6570 & 4,1871 \\ 4,1871 & 3,4788 \end{bmatrix}, \quad Q_{32} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,8452 & 2,8835 \\ 2,8835 & 2,5453 \end{bmatrix}, \\
Q_{13} &= 10^5 \begin{bmatrix} 0,4798 & 1,0200 \\ 1,0200 & 1,3921 \end{bmatrix}, \quad Q_{23} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,7306 & 1,2216 \\ 1,2216 & 1,5526 \end{bmatrix}, \\
Q_{33} &= 10^5 \begin{bmatrix} 0,2294 & 0,7877 \\ 0,7877 & 1,1771 \end{bmatrix}, \quad Q_{14} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,6052 & 1,1802 \\ 1,1802 & 1,1775 \end{bmatrix}, \\
Q_{24} &= 10^3 \begin{bmatrix} 2,6153 & 1,6752 \\ 1,6752 & 0,2856 \end{bmatrix}, \quad Q_{34} = \begin{bmatrix} 662,1756 & 967,9830 \\ 967,9830 & 988,6938 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{135}
$$

Para a simulação, foram consideradas as mesmas condições e os dados apresentados em (CHEN et al., 2012), ou seja, a condição inicial $x(0) = [-2 \;\; 1]^T$ e as funções de pertinência

$$\alpha_1(t) = \frac{\cos(10x_1(t)) + 1}{4}, \quad \alpha_2(t) = \frac{\text{sen}(10x_1(t)) + 1}{4}, \quad \alpha_3(t) = \frac{\text{sen}(10x_1(t)) + \cos(10x_1(t)) + 2}{4}.$$

O resultado da simulação dos sistemas controlados (132), (110), (133)-(135) e (132), (108), (133)-(134) estão ilustrados na Figura 23.

A metodologia proposta (Teorema 12) apresentou um bom resultado sendo factível para o valor máximo $b = 6$, o mesmo valor dos dos métodos de relaxamento apresentados em (FANG

et al., 2006; DELMOTTE; GUERRA; KSANTINI, 2007). Note que este valor só é menor do que os apresentados em (MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009) e (CHEN et al., 2012) que obtiveram $b = 6,5$ e $b = 7$, respectivamente, considerando o estudo comparativo apresentado em (CHEN et al., 2012). No entanto, vale lembrar que o principal objetivo desta tese não é o de estabelecer novos critérios de estabilização mais relaxados, e sim propor um novo método de projeto de controle chaveado para plantas não-lineares incertas descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, que possa ser aplicado de maneira satisfatória sem a necessidade de utilizar as funções de pertinência na lei de controle. Além disso, este novo método de projeto de controle (por não utilizar as funções de pertinência) pode atuar mesmo quando a planta contém parâmetros incertos e as funções de pertinência dependem desses parâmetros. Note que os métodos apresentados, por exemplo, em (FANG et al., 2006; DELMOTTE; GUERRA; KSANTINI, 2007; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; CHEN et al., 2012), não podem ser diretamente utilizados neste caso, pois as funções de pertinências são necessárias para a implementação das leis de controle.

5.3.2 *Exemplo 2: Levitador Magnético*

Neste exemplo, será projetado o controle de um levitador magnético, dado pela equação diferencial (48), apresentada no Capítulo 3, ou de forma equivalente considerando as equações (89)-(91). Neste exemplo, será admitido que a massa (m) da bola é incerta.

Como em (100)-(101), o sistema (91) pode ser reescrito como segue

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21}(z) \end{bmatrix} u, \tag{136}$$

sendo

$$\begin{aligned} f_{21}(z) &= \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1+\mu(x_1+y_0))^2}, \\ f_{22}(z) &= -\frac{k}{m}, \\ g_{21}(z) &= \frac{-\lambda\mu}{2m(1+\mu(x_1+y_0))^2}, \end{aligned} \tag{137}$$

e $z = (x_1, x_2, y_0, m) \in \mathbb{R}^4$. Assim, para encontrar os modelos locais foram obtidos os valores máximos e mínimos das funções f_{21}, f_{22} e g_{21}. Neste caso a metodologia proposta em (SANTIM et al., 2012; SOUZA et al., 2012) será utilizada. Então, suponha que a posição desejada pertença ao conjunto $y_0 \in [0,05,\ \ 0,1]$, a massa $m \in [0,06,\ \ 0,1]$ (que é considerada incerta) e considere y_0, m como novas variáveis para a especificação do domínio D_5 das funções não lineares f_{21},

f_{22} e g_{21}:

$$D_5 = \{z = (x_1, x_2, y_0, m) \in \mathbb{R}^4 : -0,1 \leq x_1 \leq 0,1,\ \ 0,05 \leq y_0 \leq 0,1,\ \ 0,06 \leq m \leq 0,1\}. \quad (138)$$

Observe que o sistema (136) pode ser reescrito como em (127), isto é,

$$\dot{x} = A(\alpha)x + Bg(x)u, \quad (139)$$

sendo $B = [0 \quad -1]^T$ e $g(z) = g(x_1, x_2, y_0, m) = \frac{\lambda\mu}{2m(1+\mu(x_1+y_0))^2}$. Note que $g(z) > 0$, para todo $x \in D_5$.

Após os cálculos, os valores máximos e mínimos das funções f_{21}, f_{22}, g_{21} e $i_0^2(z) = \frac{2mg}{\lambda\mu}(1+\mu y_0)^2$, no domínio D_5, foram obtidos:

$$\begin{aligned}
a_{21_1} &= \max_{z\in D_5}\{f_{21}(z)\} = 48,3951,\\
a_{21_2} &= \min_{z\in D_5}\{f_{21}(z)\} = 26,0000,\\
a_{22_1} &= \max_{z\in D_5}\{f_{22}(z)\} = -0,0100,\\
a_{22_2} &= \min_{z\in D_5}\{f_{22}(z)\} = -0,0167,\\
b_{21_1} &= \max_{z\in D_5}\{g_{21}(z)\} = -2,3469,\\
b_{21_2} &= \min_{z\in D_5}\{g_{21}(z)\} = -9,4650,\\
\max u_0 &= \max_{z\in D_5}\{i_0^2(z)\} = 3,0678,\\
\min u_0 &= \max_{z\in D_5}\{i_0^2(z)\} = 1,5467.
\end{aligned} \quad (140)$$

De (140), obtém-se os seguintes modelos locais da planta (136)-(137)

$$\begin{gathered}
A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_1} & a_{22_1} \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_1} & a_{22_2} \end{bmatrix},\ A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_2} & a_{22_1} \end{bmatrix},\\
A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_2} & a_{22_2} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21_1} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21_2} \end{bmatrix},
\end{gathered} \quad (141)$$

sendo $A_1 = A_2,\ A_3 = A_4,\ A_5 = A_6,\ A_7 = A_8,\ B_1 = B_3 = B_5 = B_7$ e $B_2 = B_4 = B_6 = B_8$.

Vale observar que este sistema não apresenta problemas com factibilidade. Assim, para resolver as desigualdades (112)-(114), apresentada no Teorema 12 para $N = 2$, foram fixados $\beta_0 = -2$ e $\lambda_{isk}(0)$, sendo que $\lambda_{isk}(0)$ foram escolhidos de forma aleatória utilizando o comando *rand* do Matlab, e assim, uma solução factível foi encontrada. Neste caso, os ganhos do controlador, as matrizes simétricas positivas definidas da função de Lyapunov quadrática por partes

(107) e as matrizes simétricas Q_{jk}, $j \in \mathbb{K}_8$, $k \in \mathbb{K}_2$, são as seguintes:

$$\begin{array}{ll}
K_{11} = [-28,2676 \quad -3,3652], & K_{12} = [-27,5830 \quad -3,5562], \\
K_{21} = [-12,5336 \quad -1,2352], & K_{22} = [-12,5957 \quad -1,3727], \\
K_{31} = [-28,3030 \quad -3,3638], & K_{32} = [-27,5806 \quad -3,5367], \\
K_{41} = [-12,5093 \quad -1,2289], & K_{42} = [-12,6320 \quad -1,3664], \\
K_{51} = [-23,5195 \quad -2,9365], & K_{52} = [-22,4997 \quad -3,0800], \\
K_{61} = [-10,0612 \quad -1,2000], & K_{62} = [-10,5085 \quad -1,3822], \\
K_{71} = [-23,5313 \quad -2,9361], & K_{72} = [-22,5533 \quad -3,0798], \\
K_{81} = [-10,4454 \quad -1,2359], & K_{82} = [-10,1927 \quad -1,3458],
\end{array} \tag{142}$$

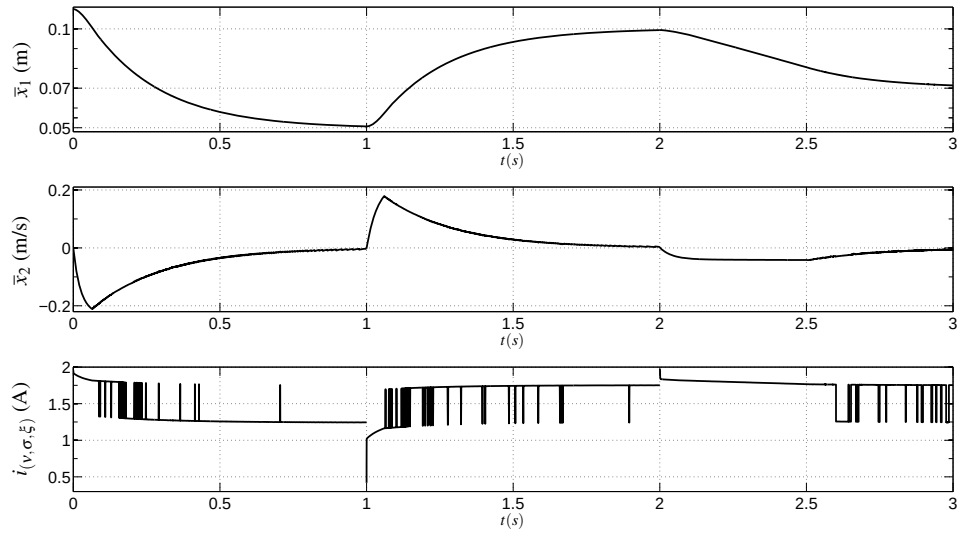
$$P_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 2,0288 & 0,2755 \\ 0,2755 & 0,0672 \end{bmatrix}, \quad P_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 1,6511 & 0,2549 \\ 0,2549 & 0,0607 \end{bmatrix}, \tag{143}$$

$$\begin{array}{ll}
Q_{11} = \begin{bmatrix} 0,0053 & -0,1359 \\ -0,1359 & 0,3891 \end{bmatrix}, & Q_{12} = \begin{bmatrix} 0,0077 & -0,1876 \\ -0,1876 & 0,6888 \end{bmatrix}, \\
Q_{21} = \begin{bmatrix} 0,0033 & -0,0776 \\ -0,0776 & 0,3173 \end{bmatrix}, & Q_{22} = \begin{bmatrix} 0,0045 & -0,1098 \\ -0,1098 & 0,5256 \end{bmatrix}, \\
Q_{31} = \begin{bmatrix} 0,0054 & -0,1364 \\ -0,1364 & 0,3923 \end{bmatrix}, & Q_{32} = \begin{bmatrix} 0,0080 & -0,1894 \\ -0,1894 & 0,7016 \end{bmatrix}, \\
Q_{41} = \begin{bmatrix} 0,0033 & -0,0776 \\ -0,0776 & 0,3193 \end{bmatrix}, & Q_{42} = \begin{bmatrix} 0,0046 & -0,1108 \\ -0,1108 & 0,5372 \end{bmatrix}, \\
Q_{51} = \begin{bmatrix} 0,0040 & -0,1114 \\ -0,1114 & 0,2148 \end{bmatrix}, & Q_{52} = \begin{bmatrix} 0,0053 & -0,1467 \\ -0,1467 & 0,3896 \end{bmatrix}, \\
Q_{61} = \begin{bmatrix} 0,0044 & -0,0586 \\ -0,0586 & 0,1472 \end{bmatrix}, & Q_{62} = \begin{bmatrix} 0,0060 & -0,0802 \\ -0,0802 & 0,2481 \end{bmatrix}, \\
Q_{71} = \begin{bmatrix} 0,0040 & -0,1116 \\ -0,1116 & 0,2160 \end{bmatrix}, & Q_{72} = \begin{bmatrix} 0,0054 & -0,1477 \\ -0,1477 & 0,3962 \end{bmatrix}, \\
Q_{81} = \begin{bmatrix} 0,0043 & -0,0595 \\ -0,0595 & 0,1517 \end{bmatrix}, & Q_{82} = \begin{bmatrix} 0,0061 & -0,0793 \\ -0,0793 & 0,2435 \end{bmatrix}.
\end{array} \tag{144}$$

Portanto, a lei de controle (128)-(129) para o levitador é dada por:

$$u(t) = u_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) = i^2_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) - i_0^2 \quad \text{com} \quad i^2_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) = -K_{\nu\sigma}x(t) + \gamma_\xi, \tag{145}$$

Figura 24 - Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$, velocidade $(\bar{x}_2(t))$ e corrente elétrica $(i_{(\nu,\sigma,\xi)}(t))$ do sistema controlado, considerando $y_0 = 0,05$m e $m = 0,06$Kg, $y_0 = 0,1$m e $m = 0,1$Kg e $y_0 = 0,07$m e $m = 0,1$Kg, para $t \in [0\ 1)$, $t \in [1\ 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

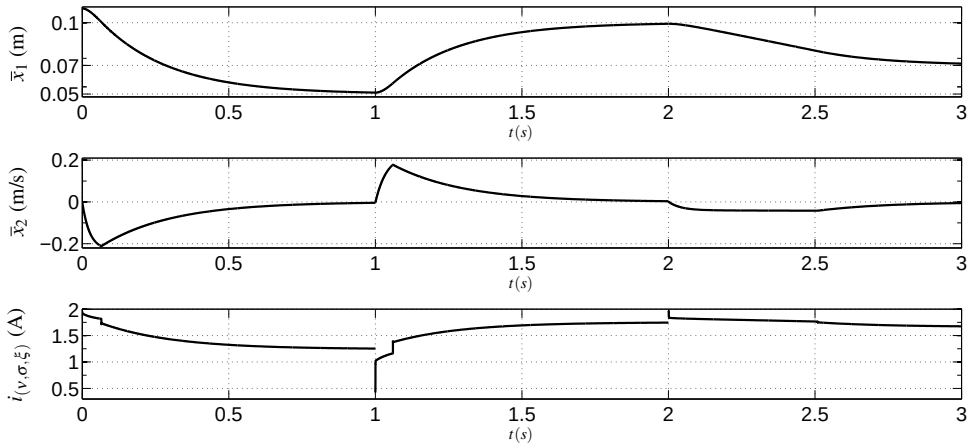
$$K_{\nu\sigma} \in \{K_{11}, K_{21}, \ldots, K_{81}, \ldots, K_{82}\}, \quad \sigma = \arg\min_{k\in\mathbb{K}_2}{}^{*}\{x^T P_k x\}, \quad \nu = \arg\min_{j\in\mathbb{K}_8}{}^{*}\{x^T Q_{j\sigma} x\},$$
$$\gamma_\xi = \begin{cases} 3,0678, & \text{se } x^T P_\sigma B \leq 0, \\ 1,5467, & \text{se } x^T P_\sigma B > 0. \end{cases} \tag{146}$$

sendo que as matrizes $K_{jk},\ P_k,\ Q_{jk},\ j \in \mathbb{K}_8,\ k \in \mathbb{K}_2$, são dadas em (142)-(144).

Para a simulação, ilustrada na Figura 24, em $t = 0$s são consideradas a condição inicial $\bar{x}(0) = [0,11\ \ 0]^T$, $y_0 = 0,05$m e a massa $m = 0,06$Kg. Em $t = 1$s observa-se na Figura 24 que o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(1) = [0,05 \quad 0]^T$. Em seguida, mudando y_0 de $0,05$m para $0,1$m e m de $0,06$Kg para $0,1$Kg, em $t = 2$s pode-se ver que o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(2) = [0,1 \quad 0]^T$, que será a nova condição inicial. Finalmente, para $t \geq 2$s muda-se y_0 de $0,1$m para $0,07$m e mantém $m = 0,01$Kg. Assim, observa-se na Figura 24 que $x(\infty) = [0,07 \quad 0]^T$.

Note que neste caso não é possível obter as funções de pertinência, visto que a massa é incerta, mas o método proposto supera este problema, pois não depende de tais funções. Observe também que, mesmo com incerteza na referência do sinal de controle ($u = i^2 - i_0^2$ sendo que $i_0^2 = \frac{2mg}{\lambda\mu}(1+\mu y_0)^2$, dada em (90), é incerta pois a massa m é incerta) a metodologia proposta foi eficiente e proporcionou uma resposta transitória apropriada, como mostra a Figura

Figura 25 - Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$, velocidade $(\bar{x}_2(t))$ e corrente elétrica $(i_{(\nu,\sigma,\xi)}(t))$ do sistema controlado, considerando $y_0 = 0,05$m e $m = 0,06$Kg, $y_0 = 0,1$m e $m = 0,1$Kg e $y_0 = 0,07$m e $m = 0,1$Kg, para $t \in [0\ 1)$, $t \in [1\ 2)$ e $t \geq 2$s, respectivamente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

24.

Da Figura 24, pode-se notar que o sinal de controle é descontínuo, mas da Observação 10 a função γ_ξ, dada em (146), pode ser alterada para que o sinal de controle seja suavizado. Neste sentido, considerando $\xi = 0,01$ a lei de controle (145) e (146) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u(t) = u_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) = i^2_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) - i_0^2 \quad \text{com} \quad i^2_{(\nu,\sigma,\xi)}(t) = -K_{\nu\sigma}x(t) + \gamma_\xi, \tag{147}$$

$$K_{\nu\sigma} \in \{K_{11}, K_{21}, \ldots, K_{81}, \ldots, K_{82}\}, \quad \sigma = \arg\min_{k\in\mathbb{K}_2}{}^*\{x^T P_k x\}, \quad \nu = \arg\min_{j\in\mathbb{K}_8}{}^*\{x^T Q_{j\sigma} x\},$$

$$\gamma_\xi = \begin{cases} 3,0678, & \text{se } x^T P_\sigma B \leq 0,01, \\ -76,0565 x^T P_\sigma B + 2,3073, & \text{se } |x^T P_\sigma B| < 0,01, \\ 1,5467, & \text{se } x^T P_\sigma B \geq 0,01. \end{cases} \tag{148}$$

sendo que as matrizes $K_{jk},\ P_k,\ Q_{jk},\ j \in \mathbb{K}_8,\ k \in \mathbb{K}_2$, são dadas em (142)-(144).

A simulação do sistema controlado, considerando as mesmas condições que gerou a Figura 24, apresentou a resposta ilustrada na Figura 25.

5.4 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi proposto um novo método de projeto de controle chaveado para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. O controlador concebido é definido por uma lei de chaveamento que consiste de dois estágios. O primeiro estágio seleciona uma matriz simétrica positiva definida utilizando uma função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo e o segundo escolhe os ganhos do controlador que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov. Além disso, a metodologia apresentada neste capítulo não exige que a matriz $B(\alpha)$, do sistema (106), seja constante. Adicionalmente, como no Capítulo 4, o controlador chaveado proposto também não depende das funções de pertinência e pode operar mesmo com incertezas nas funções de pertinência e na referência do sinal de controle.

6 CONCLUSÕES

Nesta tese foram propostos novos método de projeto de controle chaveado para algumas classes de sistemas lineares com incertezas politópicas e para algumas classes de sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

Inicialmente, no Capítulo 3, foram propostos novos métodos de projeto de controle para algumas classes de sistemas lineares com incertezas politópicas. Nestes controladores os ganhos são escolhidos por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função quadrática de Lyapunov. Além disso, as LMIs utilizadas para encontrar os ganhos são menos conservadoras do que as clássicas que utilizam apenas um ganho de realimentação do vetor de estado, propostas em (BOYD et al., 1994), como pode ser visto nas Figuras 1-3 e 5.

Em seguida, no Capítulo 4, os métodos propostos não alteram as LMIs dadas em métodos de projeto de controle comumente utilizadas para plantas não lineares descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno como propostas, por exemplo, em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANIGUCHI et al., 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009). Além disso, o novo método elimina a necessidade de obter as expressões explícitas das funções de pertinência, para implementar a lei de controle. Este fato é relevante nos casos em que as funções de pertinência dependem de parâmetros incertos ou são de difícil implementação.

Por fim, no Capítulo 5, foram propostos resultados mais gerais do que os apresentados no Capítulo 4. Foram estabelecidos novos métodos de projeto de controle e novos critérios de estabilidade de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Algumas condições do critério de estabilidade são representadas por uma classe de BMIs que pode ser resolvida de forma eficiente pelo método *path-following*. Os controladores propostos escolhem os ganhos por meio de uma lei de chaveamento que consiste de dois estágios, sendo que um desses estágios utiliza uma função de Lyapunov quadrática por partes e o outro determina o ganho chaveado que minimiza a derivada da função de Lyapunov selecionada. Vale lembrar que além de utilizar um tipo mais geral de função de Lyapunov, não foi imposto, neste capítulo, que a matriz $B(\alpha)$ do sistema fuzzy seja constante. Além disso, como nos capítulos anteriores, o método proposto também elimina a necessidade de obter as expressões explícitas das funções de pertinência e pode operar mesmo com incerteza na referência do sinal de controle.

Para todos os métodos de projeto de controle, propostos nesta tese, foram apresentados exemplos de simulações numéricas. Para o caso de sistemas lineares com incertezas politópicas foi simulado o sistema de controle de um levitador magnético (linearizado) e foi realizado o projeto e implementação no laboratório do controle robusto chaveado de um sistema *2D ball balancer* sujeito a falhas. Para o caso de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno foram simulados o controle de um sistema bola-viga, de um levitador magnético e de um sistema não linear que é considerado como uma referência para comparar relaxamento de critérios de estabilização de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. Em todos os casos os sistemas controlados apresentaram respostas transitórias apropriadas, comprovando assim, a eficácia da metodologia proposta nesta tese.

6.1 Perspectivas Futuras:

- Estabelecer os mesmos resultados do Capítulo 5, para sistemas lineares com incertezas politópicas;
- Estabelecer critérios de desempenho como, por exemplo $\mathscr{H}_\infty$, para os resultados apresentados nesta tese;
- Estabelecer os resultados apresentados nesta tese para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno discretos no tempo.

6.2 Publicações

6.2.1 Artigos completos publicados em periódicos

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*. v. 2013, 10p, 2013. Article ID 595029.

SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. *Mathematical Problems in Engineering*. New York, v. 2012, 17p, 2012. Article ID 731298.

6.2.2 Trabalhos completos publicados em anais de congressos

SOUZA, W. A.; SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto de reguladores fuzzy Takagi-Sugeno com rastreamento em uma região de operação. In:

CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA. 19., 2012, Campina Grande, *Anais*... Campina Grande: SBA, 2012. p. 2440-2446.

SILVA, J. H. P.; JÚNIOR, E. I. M.; SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R. Controle $\mathscr{H}_\infty$ com chaveamento do ganho da realimentação do vetor de estado para sistemas lineares incertos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA. 19., 2012, Campina Grande, *Anais*... Campina Grande: SBA, 2012. p. 2276-2281.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ALVES, M. P.; ASSUNÇÃO, E. Controle de um helicóptero 3-DOF utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI. 10., 2011, São João del-Rei, *Anais* ... São João del-Rei: SBA, 2011. p. 1155-1160.

6.2.3 Trabalhos aceitos para publicação em anais de congresso

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; CARNIATO, A. A. Projeto de controle chaveado robusto para sistemas descritos por modelos fuzzy takagi-sugeno. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI. 11., 2013, Fortaleza, *Anais* ... Fortaleza: SBA, 2013.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; VIEIRA, A. R.; ASSUNÇÃO, E.; RIBEIRO, J. M. S; SILVA, E. R. P. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado para um sistema *2D ball balancer*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI. 11., 2013, Fortaleza, *Anais* ... Fortaleza: SBA, 2013.

REFERÊNCIAS

ARRIFANO, N. S. D.; OLIVEIRA, V. A.; COSSI, L. V. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach. *Controle & Automação*, Campinas, v. 17, p. 213–225, jun. 2006. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-17592006000200009>. Acesso em: 23 jul. 2013.

BARMISH, B. Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 28, n. 8, p. 848–850, aug. 1983.

BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).

CARDIM, R. *Projeto de Controladores Baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável*. 2009. 120 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/bis/33004099080P0/2009-/cadim_r_dr_ilha.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2013.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estado da planta. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI, 8., 2007, Florianópolis. *Anais ...* Florianópolis: Sociedade Brasileira de Automática - SBA, 2007. 6p.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNCAO, E.; COVACIC, M. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009.

CHEN, Y.-J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W.-J.; WANG, H. Relaxed stabilization criterion for T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise-lyapunov-function-based switching fuzzy controller. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 20, n. 6, p. 1166–1173, dec. 2012.

CORLESS, M.; LEITMANN, G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 26, n. 5, p. 1139–1144, oct. 1981.

DEAECTO, G. S. *Projeto de controladores dinâmicos com comutação*. 2010. 161 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Eletrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010. Disponível em:

<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000773932>. Acesso em: 25 jul. 2013.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. *International Journal of Control*, Essex, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, sep. 2011.

DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, jul. 2000.

DELMOTTE, F.; GUERRA, T. M.; KSANTINI, M. Continuous Takagi-Sugeno's models: reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 15, n. 3, p. 426–438, jun. 2007.

DONG, J.; YANG, G.-H. Dynamic output feedback control synthesis for continuous-time T-S fuzzy systems via a switched fuzzy control scheme. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, New York, v. 38, n. 4, p. 1166–1175, aug. 2008a.

DONG, J.; YANG, G.-H. State feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems via switched fuzzy controllers. *Information Sciences*, Philadelphia, v. 178, n. 6, p. 1680–1695, mar. 2008b.

FANG, C.-H.; LIU, Y.-S.; KAU, S.-W.; HONG, L.; LEE, C.-H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 14, n. 3, p. 386–397, jun. 2006.

FENG, G. $\mathscr{H}_\infty$ controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, New York, v. 34, n. 1, p. 283–292, feb. 2004.

FENG, G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 14, n. 5, p. 676–697, oct. 2006.

FEUER, A.; GOODWIN, G. C.; SALGADO, M. Potential benefits of hybrid control for linear time invariant plants. In: PROCEEDINGS OF THE 1997 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 5., 1997, Albuquerque. *Proceedings* ... Albuquerque, 1997. v. 5, p. 2790–2794.

FIACCHINI, M.; JUNGERS, M. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched systems: a set-theory approach. In: SYMPOSIUM ON SYSTEM STRUCTURE AND CONTROL, 5., 2013, Grenoble. *Proceedings...* Grenoble: International Federation of Automatic Control, 2013. v. 5, p. 196–201.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox*: for use with Matlab. Natick: The Math Works, Inc., 1995.

GAINO, R.; TEIXEIRA, M. M. C.; CARDIM, R.; CARVALHO, A. A.; ASSUNÇÃO, E.; SANCHES, M. A. A. Controle não-linear fuzzy Takagi-Sugeno do movimento de paraplégicos utilizando acelerômetros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, 21., 2008, Salvador. *Anais...* Salvador: Sociedade Brasileira de Engenharia

Biomédica SBEB, 2008. p. 1254–1257.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, dec. 2006.

GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 593–597, feb. 2009.

HASSIBI, A.; HOW, J.; BOYD, S. A path-following method for solving BMI problems in control. In: PROCEEDINGS OF THE 1999 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2., 1999, San Diego. *Proceedings* ... San Diego, 1999. v. 2, p. 1385–1389.

HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, Amsterdam, v. 38, n. 11, p. 1905–1917, nov. 2002.

ISHII, H.; FRANCIS, B. Stabilizing a linear system by switching control with dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 47, n. 12, p. 1962–1973, dec. 2002.

JABRI, D.; GUELTON, K.; MANAMANNI, N.; JAADARI, A.; DUONG, C. C. Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, v. 14, n. 2, p. 40–49, 2012. Disponível em: <http://www.ceai.srait.ro/index.php/ceai/article/view/1294/970>. Acesso em: 25 jul. 2013.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; LEITE, V. J. S. A dynamic compensator for parameter-varying systems subject to actuator limitations applied to a T-S fuzzy system. In: 18 *TH* IFAC WORLD CONGRESS, 18., 2011, Milan. *Proceedings...* Milan: International Federation of Automatic Control, 2011. v. 18, p. 14495–14500.

LEITH, D. J.; SHORTEN, R. N.; LEITHEAD, W. E.; MASON, O.; CURRAN, P. Issues in the design of switched linear control systems: A benchmark study. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, New York, v. 17, n. 2, p. 103–118, mar. 2003.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, New York, v. 19, n. 5, p. 59–70, oct. 1999.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 54, n. 2, p. 308–322, feb. 2009.

LOFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. *Proceedings...* Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289.

MARQUEZ, H. J. *Nonlinear Control Systems: analysis and design*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

MCCLAMROCH, N. H.; KOLMANOBSKY, I. Performance benefits of hybrid control design for linear and nonlinear systems. *Proceedings of the IEEE*, New York, v. 88, n. 7, p. 1083–1096, jul. 2000.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. LMI approach for $\mathscr{H}_\infty$ linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, New York, v. 152, n. 2, p. 195–201, mar. 2005.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and $\mathscr{H}_\infty$ control of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, New York, v. 17, n. 4, p. 863–873, aug. 2009.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Relaxações convexas de convergência garantida para o projeto de controladores para sistemas nebulosos de Takagi Sugeno. *Controle & Automação*, Campinas, v. 21, p. 82–95, fev. 2010.

OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. A construction method of switching Lyapunov function for nonlinear systems. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 1., 2002, Honolulu. *Proceedings...* Honolulu: IEEE, 2002. p. 221–226.

OTSUKA, N.; SOGA, T. Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems composed of two subsystems. *International Journal of Control and Automation*, Sandy Bay, v. 3, n. 1, p. 35–42, mar. 2010.

PETTERSSON, S. Controller design of switched linear systems. In: PROCEEDINGS OF THE 2004 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 4., 2004, Boston. *Proceedings ...* Boston, 2004. v. 4, p. 3869–3874.

QUANSER. *2D Ball Balancer Control using QUARC*: Instructor manual. Ontário, Canadá, 2008. 87 p.

SANTIM, M. P. A. *Projeto e Implementação com Chaveamento de Reguladores Fuzzy Takagi-Sugeno para um Conjunto de Pontos de Operação*. 2012. 84 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/bis-/33004099080P0/2012/santim_mpa_me_ilha.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2013.

SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, p. 17, apr. 2012. Disponível em: <http://www-.hindawi.com/journals/mpe/2012/731298/>. Acesso em: 25 jul. 2013.

ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIĆ, D. M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 6, n. 5, p. 461–493, jun. 2000. Disponível em: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2000/810975/abs/>. Acesso em: 25 jul. 2013.

SILVA, N. A. P. da. *Projeto de controladores automáticos com atualização das condições iniciais*. 2005. 193 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

SOUZA, W.; ALVES, M. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto de reguladores fuzzy Takagi-Sugeno com rastreamento em uma região de operação. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 19., 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: Sociedade Brasileira de Automática - SBA, 2012. p. 6.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2013, p. 10, apr. 2013. Disponível em: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/595029/>. Acesso em: 25 jul. 2013.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, Essex, v. 11–12, p. 625–653, 1999.

SUN, Z.; GE, S. S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 41, n. 2, p. 181–195, feb. 2005.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, feb. 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, may 1998.

TANAKA, K.; IWASAKI, M.; WANG, H. O. Stability and smoothness conditions for switching fuzzy systems. In: PROCEEDINGS OF THE 2000 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 4., 2000, Chicago. *Proceedings* ... Chicago, 2000a. v. 4, p. 2474–2478.

TANAKA, K.; IWASAKI, M.; WANG, H. O. Stable switching fuzzy control and its application to a hovercraft type vehicle. In: FUZZ IEEE 2000. THE NINTH IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2., 2000, San Antonio. *Proceedings*... San Antonio, 2000b. v. 2, p. 804–809.

TANIGUCHI, T.; K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, aug. 2001.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, out. 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŻAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, abr. 1999.

TEIXEIRA, M. C. M.; PIETROBOM, H. C.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI. *Controle & Automação*, Campinas, v. 11, n. 01, p. 37–48, fev. 2000.

WANG, L.-X. *A course in fuzzy systems and control*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista. *Proceedings*... Lake Buena Vista: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492–3497.

XIE, D.; YU, M. Stability analysis of switched linear systems with polytopic uncertainties. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS, SMC'06, 2006, Taipei. *Proceedings...* Taipei: IEEE, 2006. v. 5, p. 3749–3753.

YAN, S.; SUN, Z. Study on separation principles for T-S fuzzy system with switching controller and switching observer. *Neurocomputing*, Amsterdam, v. 73, n. 13-15, p. 2431–2438, aug. 2010.

YANG, B.; YU, D.; FENG, G.; CHEN, C. Stabilisation of a class of nonlinear continuous time systems by a fuzzy control approach. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, New York, v. 153, n. 4, p. 427–436, Jul. 2006.

YANG, G.-H.; DONG, J. Switching fuzzy dynamic output feedback $\mathscr{H}_\infty$ control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, New York, v. 40, n. 2, p. 505–516, abr. 2010.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, Essex, v. 76, n. 7, p. 747–753, nov. 2003.

APÊNDICE A - O MÉTODO *PATH-FOLLOWING*

Neste apêndice será apresentado o método path-following (HASSIBI; HOW; BOYD, 1999). Segundo Chen et al. (2012), a ideia básica do método *path-following* é resolver BMIs linearizadas considerando uma pequena perturbação nas variáveis relacionadas com os termos bilineares. Portanto, os termos de segunda ordem que estão relacionados com a pequena perturbação das variáveis podem ser desconsiderados.

A seguir, baseado no apêndice de (CHEN et al., 2012), serão apresentados os passos para resolver os critérios de estabilização do Teorema 12 pelo método *path-following*.

Passo 1: Fixe $\eta = 0$ e escolha de forma aleatória $\hat{\lambda}_{isk}(0) > 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $s,k \in \mathbb{K}_N$.

Passo 2: Fixe $\lambda_{isk} = \hat{\lambda}_{isk}(\eta)$ e resolva o seguinte problema de otimização:

$$\min_{X_k, Z_{ik}, R_{ik}, Y_{ik}, M_{ik}} \ \beta \ \text{ sujeito a } \ X_k \succ 0 \ \ \text{e} \ \ (112)-(114). \tag{149}$$

Passo 3: Para X_k obtido no Passo 2, resolva o seguinte problema de otimização, com as versões linearizadas das desigualdades $X_k \succ 0$ e (114), em torno de X_k e λ_{isk}:

$$\min_{\Delta X_k, \delta\lambda_{isk}, Z_{ik}, R_{ik}, Y_{ik}, M_{ik}} \ \beta \ \text{ sujeito às LMIs } \ (112)-(113) \text{ e } (151)-(155), \tag{150}$$

sendo

$$X_k + \Delta X_k \succ 0, \quad k \in \mathbb{K}_N, \tag{151}$$

$$\lambda_{isk} + \delta\lambda_{isk} > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \ \ s,k \in \mathbb{K}_N, \tag{152}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}05X_k^2 & * \\ \Delta X_k & I_n \end{bmatrix} \succ 0, \quad k \in \mathbb{K}_N, \tag{153}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}05\lambda_{isk}^2 & * \\ \delta\lambda_{isk} & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \ \ s,k \in \mathbb{K}_N, \tag{154}$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{ik} & * \\ \lambda_{i1k}X_k + \lambda_{i1k}\Delta X_k + \delta\lambda_{i1k}X_k & -(\lambda_{i1k}X_1 + \lambda_{i1k}\Delta X_1 + \delta\lambda_{i1k}X_1) \\ \lambda_{i2k}X_k + \lambda_{i2k}\Delta X_k + \delta\lambda_{i2k}X_k & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_{iNk}X_k + \lambda_{iNk}\Delta X_k + \delta\lambda_{iNk}X_k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \dots & 0 \\ -(\lambda_{i2k}X_2 + \lambda_{i2k}\Delta X_2 + \delta\lambda_{i2k}X_2) & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & -(\lambda_{iNk}X_N + \lambda_{iNk}\Delta X_N + \delta\lambda_{iNk}X_N) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (155)$$

com

$$\Lambda_{ik} = (X_k + \Delta X_k)A_i^T + A_i(X_k + \Delta X_k) + Z_{ik} + R_{ik} - \beta(X_k + \Delta X_k) - \sum_{s=1}^{N}(\lambda_{isk}X_k + \lambda_{isk}\Delta X_k + \delta\lambda_{isk}X_k) - Y_{ik}.$$

Observa-se que as LMIs (153) e (154) são adicionadas com o objetivo de minimizar a perturbação das variáveis X_k e λ_{isk} e tornar o aproximação linear válida.

Passo 4: Para os $\delta\lambda_{isk}$ obtidos no Passo 3, atualize $\hat{\lambda}_{isk}$ de tal modo que $\hat{\lambda}_{isk}(\eta+1) = \hat{\lambda}_{isk}(\eta) + \delta\lambda_{isk}$. Em seguida, fixa-se $\eta = \eta + 1$ e vá para o Passo 2.

Critério de parada: A iteração para quando $\beta < 0$ é obtido no Passo 2, que significa que a solução do critério de estabilização do Teorema 12 foi encontrada. A iteração também para quando $\beta > 0$ e β não pode ser melhorado em relação às iterações anteriores, que significa que a solução do critério de estabilização do Teorema 12 não pode ser encontrada pelo método *path-following*.