

**unesp** 

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA



**PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA**

**Máximos e Mínimos na Geometria**

**Renata Aparecida Bonati Nogueira**

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO  
2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

**Renata Aparecida Bonati Nogueira**

# **Máximos e Mínimos na Geometria**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador  
**Prof. Dr. Wladimir Seixas**

**Rio Claro/SP**  
**2025**

N778m Nogueira, Renata Aparecida Bonati  
Máximos e mínimos na geometria / Renata Aparecida Bonati  
Nogueira. -- Rio Claro, 2025  
105 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual  
Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio  
Claro  
Orientador: Wladimir Seixas

1. Geometria euclidiana. 2. Construções geométricas. 3. Princípios  
de máximo. I. Título.

## **Impacto potencial desta pesquisa**

Essa pesquisa tem como objetivo apresentar aos alunos do Ensino Superior, diferentes maneiras de se resolver problemas em geometria que envolvam a determinação de máximos e mínimos.

## **Potential impact of this research**

This research aims to present to university students different methods of solving geometry problems involving the determination of maxima and minima.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Renata Aparecida Bonati Nogueira  
MÁXIMOS E MÍNIMOS NA GEOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
Orientador

---

Prof. Dr. Sílvio Luís Amâncio de Abreu  
Prefeitura Municipal de Cerquilha / Cerquilha (SP)

---

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti  
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Conceito: Aprovado

**Rio Claro (SP), 13 de novembro de 2025**

*Aos meus familiares, pelo amor incondicional e por estarem sempre me apoiando.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de sabedoria e força, por me guiar em cada etapa da minha vida, iluminando meu caminho e dando-me coragem para enfrentar desafios.

Expresso minha mais profunda gratidão a todas as pessoas que, de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, pelo apoio incansável, pela paciência e pelos valiosos ensinamentos. Sua orientação foi essencial para meu crescimento profissional e acadêmico, e sou imensamente grata por todo o conhecimento compartilhado.

Aos meus professores, que ao longo da minha trajetória me inspiraram com sua dedicação e amor pelo ensino. Cada aprendizado e “puxão de orelha” foi fundamental para que chegasse até aqui.

Aos meus pais, por todo o amor, incentivo e ensinamentos que me moldaram como pessoa. Sem seu apoio incondicional e seus valores, essa caminhada não teria sido possível.

Ao meu marido, pelo companheirismo, paciência e incentivo constante. Sua presença e apoio foram fundamentais nos momentos mais desafiadores, e sou muito grata por ter você ao meu lado.

À minha filha, minha maior inspiração e motivação, que me enche de amor e me ensina todos os dias, o verdadeiro significado da perseverança. Que esse trabalho seja também um exemplo para você, mostrando que com dedicação e esforço, podemos alcançar nossos sonhos.

Aos meus irmãos, pelo carinho e apoio ao longo dessa jornada. Saber que posso contar com vocês torna cada desafio mais leve.

Aos meus cunhada, cunhados, sobrinhas, sogros e amigos por cada palavra de incentivo, pelo apoio nos momentos difíceis e pelos momentos de alegria que tornaram essa caminhada mais leve e especial.

À todos vocês, meus sincero agradecimento. Essa conquista também é de vocês!

*"Feliz aquele que transfere o que sabe  
e aprende o que ensina."*

Cora Coralina

# Resumo

Problemas envolvendo máximos e mínimos possuem importantes aplicações na Matemática, nas Engenharias e na Economia. Na Matemática, diversos problemas geométricos envolvem a determinação de máximos e mínimos sob certas restrições, como, por exemplo, maximizar áreas e volumes. Alguns desses problemas podem ser tratados sem o uso do Cálculo Diferencial e Integral, sendo diretamente tratados no contexto da geometria euclidiana.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma coletânea de problemas geométricos que envolvem máximos e mínimos, cujo foco principal é determinar soluções através do uso de construções, bem como na utilização de teorias e propriedades da geometria euclidiana, evitando cálculos excessivamente complexos ou aprofundados. As teorias e propriedades são sempre apresentadas e demonstradas antes de sua aplicação na resolução dos respectivos problemas, buscando assim um texto auto-contido.

Além disso, todo o desenvolvimento inclui construções geométricas realizadas com o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra. Dessa forma, espera-se oferecer à comunidade matemática um material didático rico em discussões e resoluções de problemas geométricos relevantes, contribuindo para o aprofundamento conceitual e a prática geométrica.

**Palavras-chave:** Geometria euclidiana. Construções geométricas. Princípios de máximo.

# Abstract

Problems involving maxima and minima have important applications in Mathematics, Engineering, and Economics. In Mathematics, various geometric problems involve determining maxima and minima under certain constraints, such as, for example, maximizing areas and volumes. Some of these problems can be addressed without the use of Differential and Integral Calculus, being directly handled within the context of Euclidean geometry.

The aim of this work is to present a collection of geometric problems involving maxima and minima, with a primary focus on finding solutions through constructions, as well as the use of theories and properties of Euclidean geometry, avoiding excessively complex or advanced calculations. The theories and properties are always introduced and demonstrated before their application in solving the respective problems, thereby producing a self-contained text. Furthermore, the entire development includes geometric constructions carried out with the aid of the dynamic geometry software GeoGebra.

In this way, the work aims to provide the mathematical community with didactic material rich in discussions and solutions to relevant geometric problems, contributing to conceptual understanding and geometric practice.

**Keywords:** Euclidean geometry. Geometric constructions. Maximum principles.

# Lista de Figuras

2.1	Ponto simétrico em relação a uma reta. . . . .	18
2.2	Desigualdade triangular. . . . .	19
2.3	Construção para a solução do Teorema 2.4. . . . .	20
2.4	Construção para a solução do Problema 2.5. . . . .	20
2.5	Hipóteses do Problema 1. . . . .	21
2.6	Construção para a solução do Problema 1. . . . .	21
2.7	Construção para a solução do Problema 2 - Parte 1. . . . .	23
2.8	Construção para a solução do Problema 2 - Parte 2. . . . .	24
2.9	Solução do Problema 2. . . . .	25
2.10	Hipóteses do Problema 3. . . . .	26
2.11	Construção da solução do Problema 3. . . . .	27
2.12	Hipóteses do Problema 4. . . . .	27
2.13	Construção da solução do Problema 4. . . . .	28
2.14	Solução do Problema 5. . . . .	29
2.15	Construção da solução do Problema 6. . . . .	30
2.16	Região convexa. . . . .	31
2.17	Bases médias de um triângulo. . . . .	31
2.18	Medida da base média de um triângulo. . . . .	32
2.19	Base média para o trapézio. . . . .	32
2.20	Hipóteses do Problema 7. . . . .	33
2.21	Construção da solução do Problema 7. . . . .	34
2.22	Solução do Problema 7. . . . .	35
3.1	Elementos de um círculo. . . . .	38
3.2	O centro $O$ da circunferência pertence a uma das cordas. . . . .	39
3.3	O centro $O$ da circunferência está dentro do ângulo inscrito. . . . .	40
3.4	O centro $O$ da circunferência está fora do ângulo inscrito. . . . .	41
3.5	O centro $O$ da circunferência está fora do ângulo inscrito. . . . .	41
3.6	Teorema de Ptolomeu. . . . .	43
3.7	Desigualdade de Ptolomeu: $PDAE$ é inscritível . . . . .	44

3.8	$P$ pertencente a circunferência circunscrita a um triângulo equilátero $ABC$	45
3.9	Ponto $P$ na região interna do triângulo $ABC$ .	46
3.10	Rotacionando o triângulo $ABC$ em $60^\circ$ em torno do vértice $C$ .	47
3.11	O ponto $P$ pertence a um dos lados do triângulo $ABC$ .	47
3.12	Rotacionando o triângulo $ABC$ em $60^\circ$ em torno do vértice $C$	47
3.13	O ponto $P$ pertence a região exterior ao triângulo $ABC$ .	48
3.14	Rotacionando o segmento $PC$ em $60^\circ$ em torno de $C$ .	48
3.15	Ponto Torricelli - Fermat	49
3.16	Ponto $M$ na região interna do triângulo $ABC$ .	50
3.17	Problema 8 - o ponto $X$ é exterior ao triângulo $ABC$ .	51
3.18	Rotação $60^\circ$ no sentido anti-horário em torno do vértice $A$ .	52
3.19	Tetraedro $ABCD$ .	54
3.20	Tetraedro.	55
3.21	Hipóteses do Exemplo 3.10	56
3.22	Construção do Exemplo 3.10.	57
3.23	Continuação da construção do Exemplo 3.10.	58
3.24	Cálculo da área superficial para o tetraedro.	63
3.25	$ax + by + cz \geq 2\text{Área}[ABC]$ .	64
3.26	Incentro da pirâmide.	65
4.1	Construção do arco capaz.	68
4.2	Lugares geométricos para diferentes valores de $\varphi$ .	68
4.3	Construção para o problema 12.	69
4.4	Construção para o problema 12 - caso tangente.	70
4.5	Curvas de níveis para a função $f(M) = OM$ .	71
4.6	Curvas de níveis para a função $f(M) = MA^2 + MB^2$ .	72
4.7	Curvas de níveis para a função $f(M) = MA^2 - MB^2$ .	73
4.8	Construção da solução do Problema 13	76
4.9	Mediana em função dos lados de um triângulo.	78
4.10	Construção da solução do Problema 14.	81
4.11	Construção da solução do Problema 15.	83
5.1	Exemplos para o Teorema dos sete círculos.	85
5.2	Teorema de Ceva (enunciado).	86
5.3	Teorema de Ceva (demonstração).	87
5.4	Teorema de Ceva para cordas.	88
5.5	Teorema de Ceva para 3 arcos.	90
5.6	Ilustração para o Lema 5.3.	91
5.7	Ilustração para o Teorema 5.4.	92
5.8	Teorema dos sete círculos - Tangência externa.	93

---

5.9	Três círculos tangentes entre si. . . . .	93
5.10	Exemplos de sete Círculos com pontos de tangência não ocorrendo sucessivamente. . . . .	94
5.11	Cadeia triangular . . . . .	95
5.12	Cadeia triangular - Primeiros dois círculos. . . . .	96
5.13	Relação entre os raios dos círculos $x$ e $y$ . . . . .	97
5.14	Lei dos cossenos . . . . .	98
5.15	Relações em um círculo. . . . .	101
5.16	Heptágono. . . . .	101

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Desigualdade triangular e base média de um triângulo</b>	<b>17</b>
2.1	Reflexões em retas . . . . .	18
2.2	Desigualdade triangular . . . . .	19
2.3	Base média de um triângulo . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Ponto de Torricelli - Fermat e desigualdades algébricas</b>	<b>37</b>
3.1	Ponto de Torricelli - Fermat . . . . .	37
3.2	Desigualdades Algébricas . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Princípio da tangência e máximos e mínimos com uso do cálculo diferencial</b>	<b>67</b>
4.1	Princípio de tangência . . . . .	67
4.2	Máximos e mínimos com uso do cálculo diferencial . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Teorema de seis círculos</b>	<b>85</b>
5.1	Cadeia de círculos . . . . .	85
5.2	Um teorema sobre um triângulo e seis círculos . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>104</b>
	<b>Referências</b>	<b>105</b>

# 1 Introdução

A busca por máximos e mínimos é uma das ideias mais antigas e fundamentais da matemática, especialmente na geometria. Desde a Antiguidade, matemáticos e filósofos exploraram problemas relacionados a formas, distâncias e áreas, buscando respostas para questões que envolviam otimização, mesmo sem a ferramenta moderna do Cálculo Diferencial. Esses estudos não apenas ajudaram a desvendar propriedades intrínsecas das figuras geométricas, mas também abriram caminho para o desenvolvimento de novos conceitos matemáticos que seriam fundamentais para o avanço da ciência.

Na Grécia Antiga, grandes matemáticos como Euclides e Arquimedes deram os primeiros passos na investigação de problemas geométricos envolvendo máximos e mínimos. Arquimedes, por exemplo, destacou-se ao estudar áreas e volumes. No livro VI do Elementos de Euclides, a proposição 27, foi o primeiro problema de máximo que chegou até nós, com a prova de que o quadrado é, de todos os retângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima.

Dentre os problemas gregos mais antigos, temos a lenda da Rainha Dido de Cartago, que segundo a tradição, teria recebido um pedaço de couro de boi e cortado-o em tiras finas para cercar a maior área possível. Na qual a maior área possível é uma circunferência (Figueiredo, 2018).

Mais tarde, Zenodorus estudou a área de uma figura com perímetro fixado e o volume de um sólido com superfície fixada. Ele verificou que entre todos os polígonos regulares com mesmo perímetro o polígono regular é o que abrange a maior área. Esses tipos de problemas serão sempre clássicos.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma coletânea de problemas envolvendo máximos e mínimos na geometria, cujas resoluções serão desenvolvidas mediante a aplicação de definições e teoremas da geometria euclidiana. Busca-se, dessa forma, uma abordagem mais acessível, dispensando cálculos elaborados e aprofundados. As teorias e propriedades necessárias serão previamente enunciadas e demonstradas antes da resolução dos problemas que delas dependem. Dentre os problemas propostos, alguns clássicos que são encontrados nas Olimpíadas Brasileira de Matemática (OBM) e Olimpíadas Internacional da Matemática (IMO). Adicionalmente, será empregado o software GeoGebra como recurso auxiliar nas construções e análises geométricas.

A escolha do software GeoGebra justifica-se por suas características dinâmicas e abrangentes, constituindo uma ferramenta matemática destinada a todos os níveis educacionais. Ele integra, em uma única plataforma, geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo, o que o torna especialmente versátil para uso acadêmico. Além disso, o GeoGebra disponibiliza uma plataforma online com mais de um milhão de recursos educacionais gratuitos, desenvolvidos e compartilhados por uma comunidade global de usuários presente em quase todos os países.

O GeoGebra destaca-se como líder mundial no fornecimento de software dinâmico para o ensino e a aprendizagem nas áreas de ciência, tecnologia, engenharia e matemática, promovendo inovações didáticas que potencializam a compreensão dos conteúdos matemáticos. Seu mecanismo suporta desde simples demonstrações até sistemas completos de avaliação online, facilitando a formulação e a comprovação de conjecturas geométricas.

Por meio do GeoGebra, as construções geométricas assumem papel fundamental no processo de ensino, possibilitando a aplicação prática dos conceitos teóricos e favorecendo uma aprendizagem mais interativa e visual. Essa combinação entre funcionalidades técnicas e recursos educacionais consolida o GeoGebra como uma ferramenta indispensável para pesquisas e práticas pedagógicas no campo da matemática.

Esse trabalho está dividido da seguinte maneira:

No capítulo 2, teremos três seções. A seção 2.1, apresentaremos a definição da reflexão em retas e sua propriedade para conseguirmos solucionar os problemas que aparecerá adiante. A seção 2.2, demonstraremos o teorema da desigualdade triangular, teoremas retirados do texto de Rezende e Queiroz (2008) e algumas questões enunciadas por Barbosa (2003), Tikhomirov (1990), Araújo (1998) e Ruoff (1982), envolvendo problemas isoperimétricos. Utilizaremos o GeoGebra para guiar os passos de algumas soluções dos problemas. A seção 2.3, definiremos plano convexo, demonstraremos os teoremas da base média do triângulo e do trapézio, para podermos concluir com o auxílio do GeoGebra a solução do problema do autor Araújo (1998).

No capítulo 3, teremos duas seções, onde a seção 3.1, abordaremos teoremas clássico como, o Teorema de Ptolomeu, Desigualdade de Ptolomeu, Teorema de Van Schooten, Teorema de Pompeiu, Teorema do Ponto de Torricelli - Fermat, para auxiliar no desenvolvimento da resposta do problema do autor Andreescu *et al.* (2007). E também, iremos tratar o problema para determinar o ponto pelo qual a soma das distância a ele com as faces seja único mínimo. E para isso usaremos o teorema que um ponto no interior de um tetraedro regular terá soma das distâncias desse ponto com as faces sendo uma constante (3.9). Já a seção 3.2, trabalhando com problemas envolvendo área máxima, abordaremos conceitos trigonométricos e métricos, mas, não aprofundado, pois não é nosso objetivo. Mostraremos também, a desigualdade média aritmética - média geométrica, desigualdade de Cauchy-Schwarz e Desigualdade Minkowski.

No capítulo 4, também teremos duas seções, nas quais, a seção 4.1, mencionaremos

problemas geométricos extremos usando curvas de nível de funções definidas no plano, portanto, teremos teorema do Princípio da Tangência, Teorema de Leibniz, definições e exemplos que irão nos ajudarmos a solucionar os problemas propostos. Na seção 4.2, apresentaremos dois problemas utilizando o cálculo diferencial para auxiliarmos na melhor resolução dos mesmos. No qual um problema necessita determinar o menor comprimento e já o outro o valor máximo da razão de dois segmentos.

Por fim, teremos o último capítulo 5, abordaremos duas seções, com que, a seção 5.1, o teorema dos setes círculos. Ele mostra que há muitas relações bonitas envolvendo apenas linhas e círculos ainda esperando para serem descobertas. Evelyn, Money-Coutts e Tyrell publicaram esse teorema pela primeira vez em 1974. Desde então, outras provas surgiram. E nesse trabalho, iremos apresentar uma prova simples para o teorema sobre um triângulo e seis círculos, que consta na seção 5.2 utilizando apenas geometria elementar. E assim, conseguiremos resolver o problema envolvendo cadeia de círculos a um triângulo  $ABC$ .

Na seção 6, é realizado uma análise do trabalho, citando a importância do mesmo para os discentes e docentes para o ensino superior.

Nas Referências, listamos os livros, artigo e links dos trabalhos estudados.

Todas as figuras, foram desenvolvidas pela autora através do GeoGebra.

## 2 Desigualdade triangular e base média de um triângulo

Ao abordar o cálculo da menor distância e do menor perímetro, estamos tratando de problemas clássicos de otimização limitados a valores mínimos. Este capítulo está estruturado em três seções distintas.

A primeira seção dedica-se à apresentação rigorosa das definições e propriedades das reflexões em retas, ferramentas básicas e recorrentes na resolução dos problemas ao longo de todo o capítulo.

Na segunda seção, procede-se à demonstração do teorema da desigualdade triangular, fundamental na geometria euclidiana, que estabelece que, para quaisquer segmentos que formem um triângulo, a soma dos comprimentos de dois deles é superior ao comprimento do terceiro. Além disso, são apresentados os teoremas de [Rezende e Queiroz \(2008\)](#), os quais pré-requisitos matemáticos específicos indispensáveis para a abordagem dos problemas propostos.

A terceira seção contempla lemas auxiliares, a definição formal de plano convexo, o teorema de base média, e a generalização conhecida como teorema de base média do trapézio, elementos essenciais para a consecução das projeções e resolução dos problemas mencionados.

Essa posição metodológica assegura o embasamento teórico necessário, habilitando o rigor matemático exigido para o desenvolvimento das soluções neste capítulo.

Além desses pré-requisitos, trabalharemos com algumas notações específicas da geometria euclidiana:

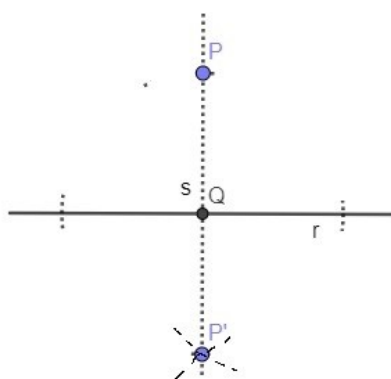
1. Definimos **pontos** por letras latinas maiúsculas e **retas** por letras minúsculas.
2. Iremos supor que é possível traçar uma única reta por dois pontos dados. Neste caso, sendo  $r$  a reta determinada por esses dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$ , no qual denotaremos por:  $r = \overleftrightarrow{AB}$ .
3. O ponto  $A$ , situado na reta  $r$ , divide esta em duas partes, quais sejam, as **semirretas** de origem  $A$ . Escolhendo os pontos  $B$  e  $C$  sobre  $r$ , um em cada uma de tais partes, denotaremos as semirretas de origem  $A$  por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .

## 2.1 Reflexões em retas

Consideremos o plano euclidiano com o seu sistema axiomático definido sobre pontos e retas munido de uma distância  $d$ . A distância  $d$  é definida como o comprimento dos segmentos.

Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  não pertencente a reta  $r$ , para determinarmos o ponto simétrico  $P'$  do ponto  $P$  em relação a reta  $r$  traçamos a reta  $s$ , perpendicular à  $r$  pelo ponto  $P$ , e consideramos  $P'$  em  $s$ ,  $P'$  distinto de  $P$ , tal que  $P'Q = PQ$ , sendo  $Q = \text{proj}_r P = r \cap s$ . Denotaremos neste trabalho por  $PQ$  o comprimento do segmento de reta  $\overline{PQ}$  de extremidades nos pontos  $P$  e  $Q$ . Observamos que a reta  $r$  é a mediatriz de  $\overline{PP'}$ . Ver Figura 2.1.

Figura 2.1: Ponto simétrico em relação a uma reta.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 2.1.** Seja uma reta  $r$ . A transformação que leva cada ponto  $P$  do plano em seu simétrico  $P'$  em relação à reta  $r$  é chamada reflexão na reta  $r$  ou simetria de reflexão na reta  $r$ , a qual indicaremos por  $R_r$ . A reta  $r$  é chamada eixo da reflexão de  $R_r$ .

A seguir temos as propriedades da reflexão em retas.

**Propriedade 2.2.** Valem as seguintes afirmações:

1.  $R_r(P) = P$  se, e somente se,  $P$  é o ponto de  $r$ .
2. Se  $s$  é uma reta perpendicular a  $r$ , então  $R_r(s) = s$ .
3. A transformação inversa da reflexão de uma reta  $r$  é uma reflexão nessa mesma reta.

Uma isometria é toda função entre regiões do plano que preserva distâncias entre quaisquer dois pontos, ou seja,  $T$  uma isometria no plano se para quaisquer pontos  $A, B$  do plano, então  $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$ . É fácil verificar que a reflexão  $R_r$  é uma isometria.

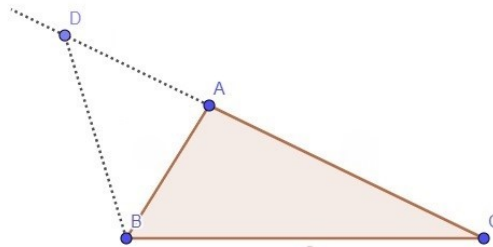
## 2.2 Desigualdade triangular

Nas resoluções de alguns problemas que envolvem máximos ou mínimos podem ser solucionados fazendo uso da desigualdade triangular.

**Teorema 2.3** (Desigualdade triangular). *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

*Demonstração.* Consideremos  $ABC$  um triângulo qualquer. Queremos mostrar que  $BA + AC > BC$ . Seja  $D$  um ponto da semirreta oposta a  $\overrightarrow{CA}$  tal que  $DA = BA$  conforme mostra a Figura 2.2.

Figura 2.2: Desigualdade triangular.



Fonte: Elaborada pela autora.

O triângulo  $ABD$  é isósceles com base  $\overline{BD}$ . Como  $A$  está entre  $C$  e  $D$ , temos  $DC = DA + AC$ , ou ainda,  $DC = BA + AC$ . Por outro lado, o ângulo  $\widehat{BDC}$  é congruente ao ângulo  $\widehat{DBA} < \widehat{DBC}$ . Assim, se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes, e o lado maior é oposto ao ângulo maior, ou seja, do triângulo  $DBC$  obtemos  $BC < DC$ . Portanto,  $BA + AC > BC$  e a afirmação se verifica.  $\square$

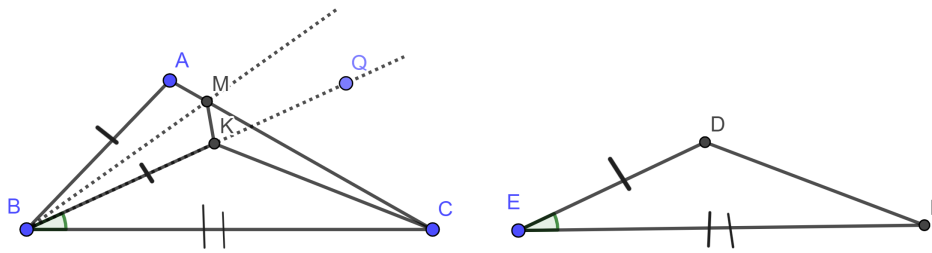
Como consequência do Teorema 2.3 temos que se  $a, b$  e  $c$  são as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo, então  $|b - c| < a < b + c$ .

**Teorema 2.4.** (Rezende; Queiroz, 2008, p.50) *Se dois lados de um triângulo são congruentes respectivamente a dois lados de um segundo triângulo, e a medida do ângulo compreendido do primeiro triângulo é maior que a medida do ângulo compreendido do segundo, então o lado oposto do primeiro triângulo é maior que o lado oposto do segundo.*

*Demonstração.* Sejam  $ABC$  e  $DEF$  triângulos quaisquer com  $AB = DE, BC = EF$  e  $m(\widehat{B}) > m(\widehat{E})$  onde  $m$  denota a medida do ângulo. Vamos mostrar que  $AC > DF$ .

Consideremos a semirreta  $\overrightarrow{BQ}$ , com  $Q$  e  $A$  no mesmo lado da reta  $BC$  tal que o ângulo  $\widehat{QBC}$  seja congruente ao ângulo  $\widehat{E}$ . Sobre  $\overrightarrow{BQ}$  consideremos um ponto  $K$  tal que  $BK = DE$  conforme mostra a Figura 2.3.

Figura 2.3: Construção para a solução do Teorema 2.4.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como  $BK = ED$ ,  $BC = EF$  e  $m(\widehat{KBC}) = m(\widehat{DEF})$ , segue pela congruência de triângulos LAL (lado-ângulo comum-lado) que os triângulos  $KBC$  e  $DEF$  são congruentes, e conseqüentemente os segmentos  $\overline{KC}$  e  $\overline{DF}$  são congruentes.

Se  $K \in \overline{AC}$ , então  $KC < AC$  e, portanto,  $DF < AC$ .

Suponhamos então que  $K \notin \overline{AC}$ . Seja  $M$  o ponto em que a bissetriz do  $\widehat{ABK}$  intercepta o segmento  $\overline{AC}$ , ou seja, bissetriz é a semirreta  $\overrightarrow{BM}$  que divide o ângulo  $\widehat{ABK}$  em dois ângulos iguais, então, temos  $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{MBK})$  e  $\overline{BM}$  é lado comum para os triângulos  $ABM$  e  $MBK$ . Além disso,  $AB = BK$ . Logo, os triângulos  $ABM$  e  $MBK$  são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo comum-lado). Portanto,  $MA = MK$ .

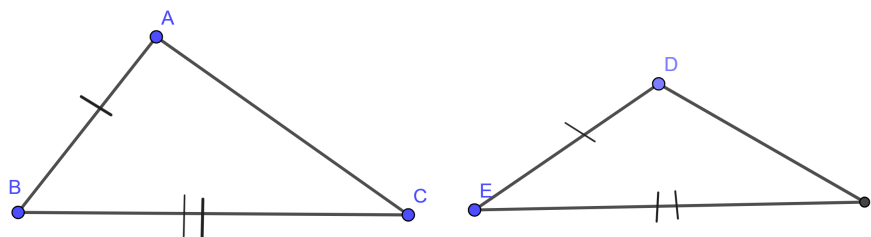
Pela desigualdade triangular (Teorema 2.3) aplicada no triângulo  $MKC$  temos  $KC < CM + MK$ . Resulta que  $DF = KC < CM + MA = AC$ , isto é,  $DF < AC$ .  $\square$

Temos a recíproca do Teorema 2.4.

**Teorema 2.5.** (Rezende; Queiroz, 2008, p.51) *Se dois lados de um triângulo são congruentes respectivamente a dois lados de um outro triângulo, e o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo, então o ângulo compreendido no primeiro triângulo é maior que o ângulo compreendido no segundo.*

*Demonstração.* Sejam  $ABC$  e  $DEF$  triângulos quaisquer, com  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  e  $AC > DE$  conforme mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4: Construção para a solução do Problema 2.5.



Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos mostrar que  $m(\widehat{B}) > m(\widehat{E})$ .

Se  $m(\widehat{B}) < m(\widehat{E})$ , pelo Teorema 2.4 temos  $AC < DF$ , o que contradiz a hipótese.

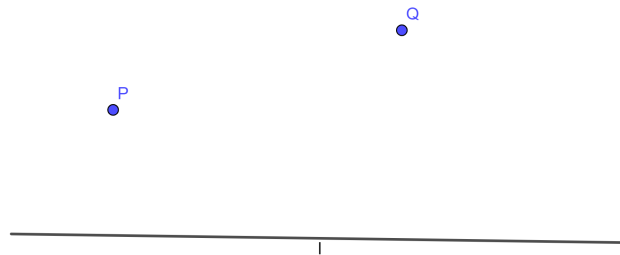
Por outro lado, se  $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$ , como  $AB = DE$  e  $BC = EF$ , então pelo caso LAL (lado-ângulo comum-lado), o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $DEF$  e concluímos que  $AC = DF$ , o que também contradiz a hipótese.

Portanto, por tricotomia <sup>1</sup>,  $m(\hat{B}) > m(\hat{E})$ . □

**Problema 1.** (Adaptado de *Barbosa (2003, p. 69)*) São dados dois pontos  $P$  e  $Q$  do mesmo lado da reta  $l$ . Determinar um ponto  $O$  em  $l$  tal que a soma das distâncias de  $O$  a  $P$  e de  $O$  a  $Q$  seja a menor possível.

*Solução.* A Figura 2.5 ilustra as hipóteses do Problema 1.

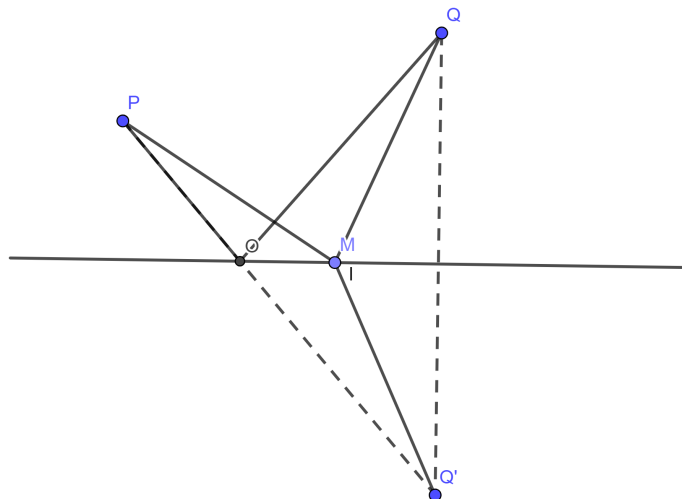
Figura 2.5: Hipóteses do Problema 1.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja um ponto  $M \in l$  qualquer e  $Q'$  a imagem de  $Q$  pela reflexão da reta  $l$ . Temos que  $\overline{MQ}$  é congruente a  $\overline{MQ'}$ . Assim,  $MQ + MP = MQ' + MP$  com  $M \in l$ . Ver Figura 2.6.

Figura 2.6: Construção para a solução do Problema 1.



Fonte: Elaborada pela autora.

<sup>1</sup>Uma e somente uma das condições se verifica:  $x < y$  ou  $x = y$  ou  $x > y$ . (Guidorizzi, 2001, pág. 27)

Se  $M$  não pertence ao segmento  $\overline{PQ'}$ , a desigualdade triangular aplicada ao triângulo  $PMQ'$  afirma que  $PM + MQ' > PQ'$  e, se  $M$  for a intersecção de  $\overline{PQ'}$  com  $l$ , temos a igualdade, isto é,  $PM + MQ' = PQ'$ . Portanto, se  $O = M$ , temos que a soma  $PO + OQ$  será a menor possível.  $\blacklozenge$

Na engenharia deparamos com esse tipo de problema com várias aplicações no cotidiano, tais como:

- Definir a localização ideal de uma instalação, como uma parada de transporte público (ônibus, metrô) para atender passageiros que moram próximos aos pontos  $P$  e  $Q$ , minimizando o deslocamento total.
- Escolher o ponto de encontro em uma rota ou estrada para que duas pessoas que estão em  $P$  e  $Q$  se encontrem no menor caminho possível.
- Planejar a posição de um equipamento ou recurso em um canteiro de obras, fábrica ou armazém, para atender a pontos de demanda próximos, reduzindo o custo de entrega.

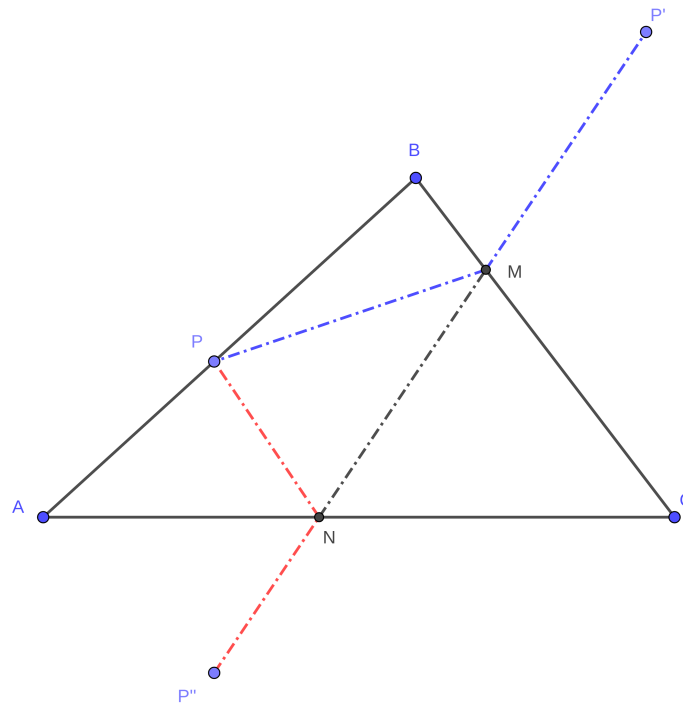
Em geral, em todas situações deseja-se determinar uma trajetória entre dois locais fixos usando um caminho intermediário restrito a uma reta, refletindo minimização de tempo, distância ou custo de deslocamento no dia a dia.

**Problema 2.** (*Tikhomirov, 1990, p. 3*) *Inscriver um triângulo de perímetro mínimo em um dado triângulo de ângulo agudo.*

*Solução.* Seja um triângulo  $ABC$  com um dos ângulos um ângulo agudo. Sem perda de generalidade, vamos supor que  $\widehat{ACB}$  seja este ângulo agudo. Queremos determinar os pontos  $M, N$  e  $P$  nos lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente, tal que o perímetro do triângulo  $MNP$  seja mínimo, isto é,  $MN + NP + PM$  é mínimo.

Para entender a construção da solução deste problema, consideremos primeiramente um ponto arbitrário  $P$  no segmento  $\overline{AB}$ . Seja  $P'$  a reflexão do ponto  $P$  na reta  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $P''$  a reflexão de  $P$  na reta  $\overleftrightarrow{AC}$ . Ver Figura 2.7.

Figura 2.7: Construção para a solução do Problema 2 - Parte 1.



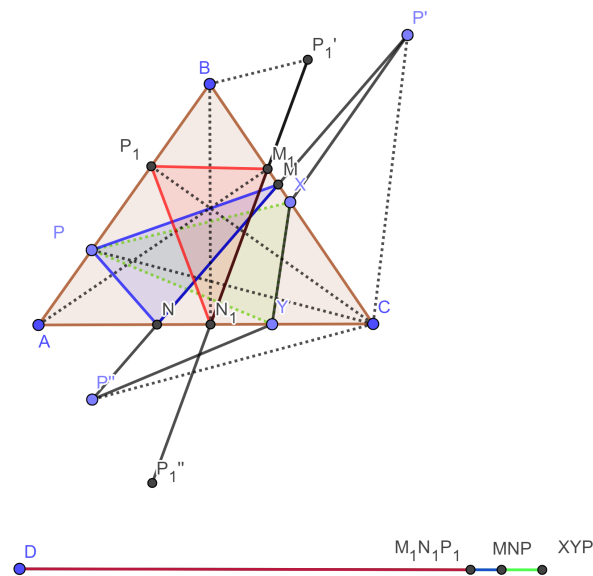
Fonte: Elaborada pela autora.

Pela definição da reflexão, segue que  $CP' = CP = CP''$ . Os triângulos  $PCP'$  e  $PCP''$  são isósceles de bases  $PP'$  e  $PP''$ , respectivamente. Assim,  $AC$  é a bissetriz do ângulo  $P''\hat{C}P$ . Logo,  $m(P''\hat{C}A) = m(A\hat{C}P) = \alpha$ . Analogamente,  $BC$  é a bissetriz do ângulo  $P\hat{C}P'$  e  $m(P\hat{C}B) = m(B\hat{C}P') = \beta$ . Segue então que  $m(A\hat{C}B) = m(A\hat{C}P) + m(P\hat{C}B) = \alpha + \beta$  e  $m(P'\hat{C}P'') = 2(\alpha + \beta)$ . Por hipótese, o ângulo  $A\hat{C}B$  é agudo. Logo,  $2(\alpha + \beta) < 180^\circ$ , o que implica afirmar que os pontos  $P$ ,  $C$  e  $P''$  não são colineares. O segmento de reta  $\overline{P'P''}$  irá interceptar os lados  $BC$  e  $AC$  do triângulo  $ABC$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. O perímetro do triângulo  $MNP$  é igual a comprimento do segmento  $\overline{P'P''}$ .

De forma análoga, se  $X$  e  $Y$  forem pontos quaisquer em  $BC$  e  $AC$ , respectivamente, o perímetro do triângulo  $XPY$  será igual  $XP + PY + YX$ , que é maior ou igual a  $P'P''$ . Logo, o perímetro do triângulo  $XPY$  é maior ou igual ao perímetro do triângulo  $PMN$ . A igualdade é válida quando  $X = M$  e  $Y = N$ . Ver Figura 2.8.



Figura 2.9: Solução do Problema 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

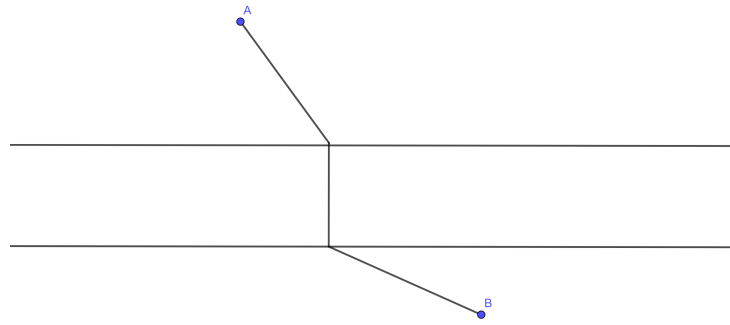


Esse problema pode ser modelado na logística de entregas de mercadorias, permitindo a redução de custos e do tempo gasto nas entregas.

Alguns problemas podem envolver a existência de retas paralelas. Neste caso, é válido o Axioma das Paralelas: “Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta”.

**Problema 3.** (Araújo, 1998, p. 100) *Dois pontos, A e B, estão separados por um rio cujas margens são (localmente) retas paralelas. Em que ponto P de uma das margens do rio devemos construir uma ponte de modo a minimizar o percurso entre as duas cidades? Supomos que a ponte é perpendicular às margens, e que irá ligar as cidades por estradas cujo trajeto é também uma linha reta. As hipóteses do problema são mostradas na Figura 2.10.*

Figura 2.10: Hipóteses do Problema 3.



Fonte: Elaborada pela autora.

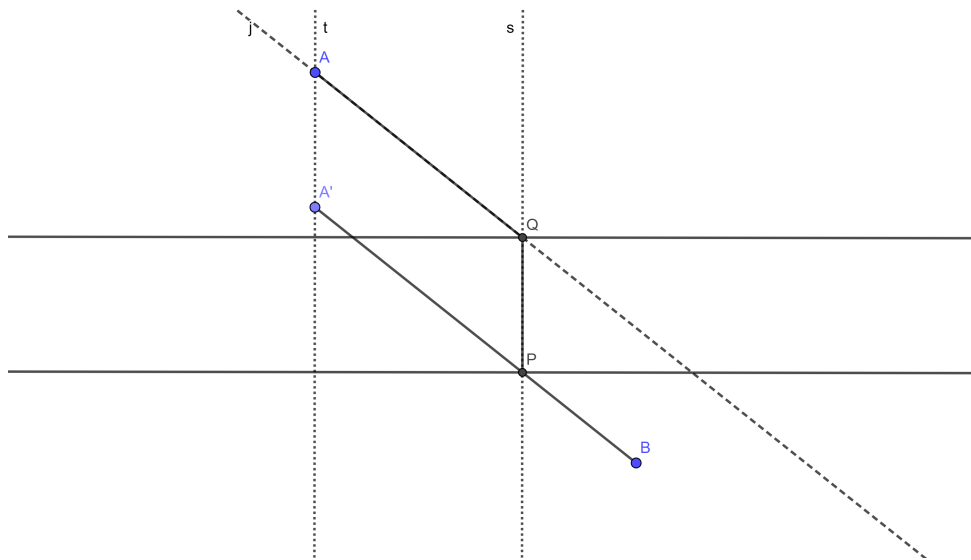
*Solução.* Dado as duas cidades  $A$  e  $B$  separadas por um rio de largura  $l$  sendo suas margens retas paralelas. Consideraremos a ponte como uma segmento de reta perpendicular às margens do rio.

Para resolvermos este problema faremos a seguinte construção geométrica:

1. Traçamos por  $A$  uma reta  $t$  perpendicular à margem do rio;
2. Determinamos  $A' \in t$ , com  $AA' = l$ ;
3. Traçamos o segmento  $A'B$ ;
4. Seja  $P$  a interseção de  $A'B$  com a margem do rio em relação à  $B$ ;
5. Traçamos por  $P$  uma reta  $s$  perpendicular ao rio;
6. Determinamos  $Q$  como a interseção da reta  $s$  com a margem do rio em relação à  $A$ ;
7. Traçamos o segmento  $AQ$ .

Esta construção é mostrada na Figura 2.11.

Figura 2.11: Construção da solução do Problema 3.

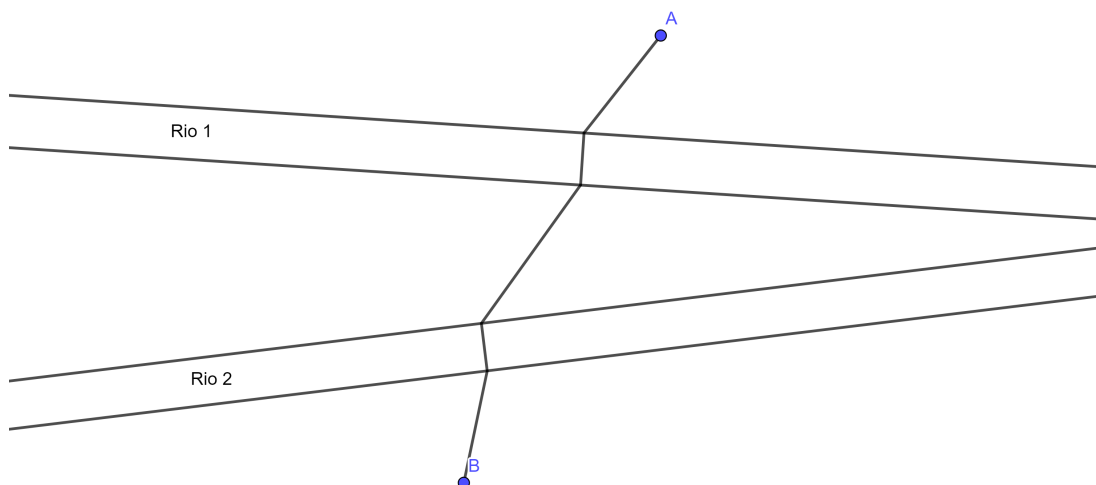


Fonte: Elaborada pela autora.

Pela construção, temos que as retas  $t$  e  $s$  são paralelas. Logo,  $AA' = l = PQ$  e  $AA'PQ$  é um paralelogramo. Assim,  $A'P = AQ$ . Como a menor distância entre dois pontos do plano é obtido por um segmento de reta, então o segmento  $A'B$  é a menor distância entre  $A$  e  $B$  excluindo a largura do rio. E como  $A'B = A'P + PB = AQ = PB$ . Portanto, a menor distância deste problema é o dado pelo segmentos  $AQ$ ,  $QP$  e  $PB$ . ♦

**Problema 4.** (Araújo, 1998, p. 100) Análogo ao problema 3, mas agora considerando dois rios que separam as cidades  $A$  e  $B$ , como mostra a Figura 2.12.

Figura 2.12: Hipóteses do Problema 4.



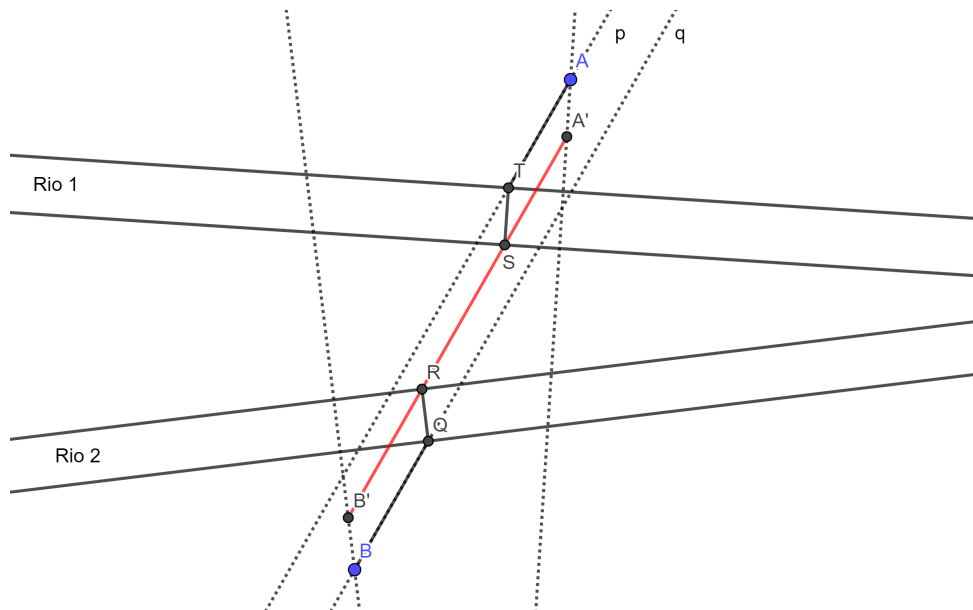
Fonte: Elaborada pela autora.

*Solução.* Para construir o menor caminho de  $A$  em  $B$  passando por dois rios faremos a seguinte construção:

1. Pelos pontos  $A$  e  $B$  traçamos retas perpendiculares aos rios 1 e 2, respectivamente.
2. Determinamos nessas perpendiculares os pontos  $A'$  e  $B'$  distantes de  $A$  e  $B$  conforme a largura (distância entre as retas) do rio 1 e 2, respectivamente.
3. Traçamos  $\overline{A'B'}$  determinando os pontos  $S$  e  $R$  nas margens internas do rio.
4. Traçamos a reta  $p$  paralela a  $\overline{A'B'}$  passando por  $A$ .
5. Traçamos a reta  $q$  paralela a  $\overline{A'B'}$  passando por  $B$ .
6. Determinamos o ponto  $T$  na intersecção da reta  $p$  com a margem externa do rio 1.
7. Determinamos o ponto  $Q$  na intersecção da reta  $q$  com a margem externa do rio 2.
8. Traçamos os segmentos  $\overline{AT}$ ,  $\overline{TS}$ ,  $\overline{SR}$ ,  $\overline{RQ}$  e  $\overline{QB}$ .

A Figura 2.13 mostra a construção descrita anteriormente.

Figura 2.13: Construção da solução do Problema 4.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como a reta  $p$  é paralela a  $\overline{A'B'}$ , segue que  $AT = A'S$  e  $AA' = TS$ . Do mesmo modo, a reta  $q$  é paralela a  $\overline{A'B'}$ . Então,  $BQ = B'R$  e  $BB' = RQ$ . Concluimos assim que  $AT$ ,  $TS$ ,  $SR$ ,  $RQ$  e  $QB$  será o menor caminho.  $\blacklozenge$

**Problema 5.** (Ruoff, 1982, p. 495, adaptado) O morador da casa  $A$  quer buscar água no rio ( $r$ ) e lenha na beirada da mata ( $m$ ), e levar para a casa  $B$ . Em quais pontos,  $X$

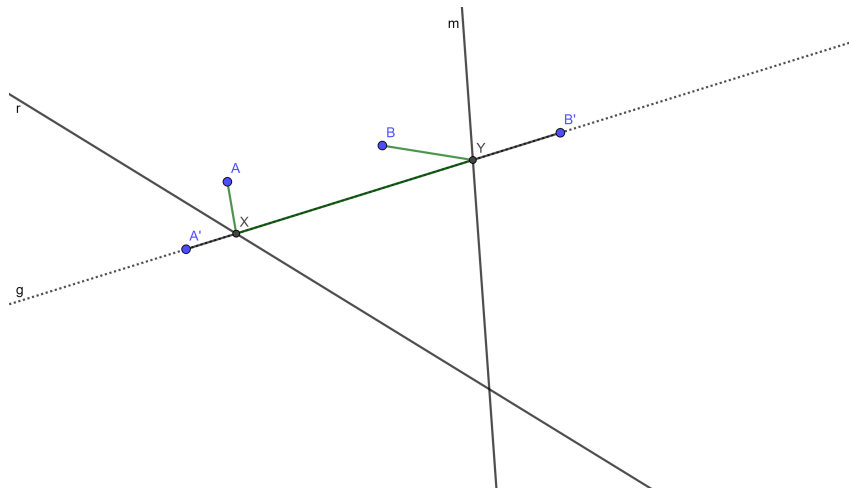
do rio e  $Y$  da mata, o morador tem que buscar a água e a lenha, respectivamente, para que o trajeto  $AX + XY + YB$  tenha o menor comprimento possível?

*Solução.* Dados os pontos  $A$  e  $B$ , o rio representado pela reta  $r$  e a beirada da mata como a reta  $m$ .

Sejam  $A'$  o simétrico de  $A$  em relação à reta  $r$  e  $B'$  o simétrico de  $B$  em relação à  $m$ .

Traçamos a reta  $g$  pelos pontos  $A'$  e  $B'$ . Determinamos os pontos  $X$  e  $Y$  fazendo a intersecção da reta  $g$  com as retas  $r$  e  $m$ , respectivamente. Segue que os pontos  $A', X, Y$  e  $B'$  são colineares. Além disso,  $AX = A'X$  e  $BY = B'Y$ . Portanto,  $\overline{AX} \cup \overline{XY} \cup \overline{YB}$  é o caminho de menor distância. Ver Figura 2.14.

Figura 2.14: Solução do Problema 5.



Fonte: Elaborada pela autora.



Esse princípio otimiza pontes entre cidades separadas por rios e matas, custos de estrada e tempo de viagem comuns, comuns em engenharia civil para travessias perpendiculares.

**Problema 6.** (Araújo, 1998, p. 101) *Mostre que o triângulo de menor perímetro, entre aqueles com base e altura dadas, é o isósceles.*

*Solução.* Dado um triângulo qualquer cujo um dos lados é dado pelo segmento  $\overline{MN}$  e altura por um segmento de comprimento  $h$ .

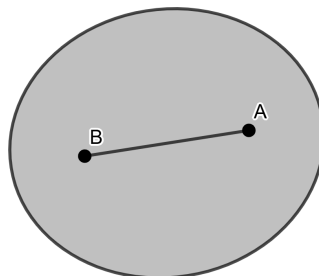
Inicialmente, traçamos uma reta  $l$  paralela a  $\overline{MN}$  com a distância de  $\overline{MN} = h$ . Refletindo  $N$  pela reta perpendicular a  $N$  em relação a reta  $l$ , temos o ponto  $N'$ . Em seguida, traçamos o segmento em  $MN'$  determinando o ponto  $P$  na intersecção de  $MN'$  com a reta  $l$ .

Obtemos assim, um triângulo  $MNP$  com  $MN = b$ ,  $MP = a = NP$  e perímetro igual a  $b + 2a$ .



**Definição 2.6.** Uma Região  $\mathcal{R}$  do plano é convexa quando, para todos os pontos  $A, B \in \mathcal{R}$ , tivermos  $\overline{AB} \subset \mathcal{R}$ .

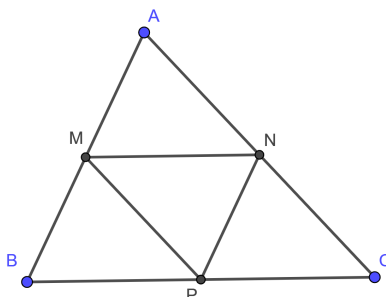
Figura 2.16: Região convexa.



Fonte: Elaborada pela autora.

Primeiramente, definimos base média de um triângulo como o segmento que une os pontos médios de dois de seus lados. Assim, todo triângulo possui exatamente três bases médias. Nas notações da Figura 2.17, as bases médias do triângulo  $ABC$  são os segmentos  $\overline{MN}$ ,  $\overline{NP}$  e  $\overline{MP}$ .

Figura 2.17: Bases médias de um triângulo.



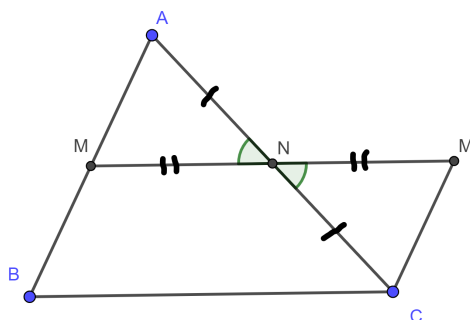
Fonte: Elaborada pela autora.

Dizemos, ainda, que  $MN$  é a base média relativa ao vértice  $A$  (ou ao lado  $BC$ ). Analogamente,  $NP$  e  $MP$  são, respectivamente, as bases médias de  $ABC$  relativas aos vértices  $B$  e  $C$  (ou aos lados  $AB$  e  $AC$ , também respectivamente). Por fim, o triângulo  $MNP$  é denominado triângulo medial de  $ABC$ .

**Teorema 2.7** (Teorema da base média). *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se  $MN$  é a base média de  $ABC$  relativa a  $BC$ , então os segmentos  $\overline{MN}$  e  $\overline{BC}$  são paralelos. Reciprocamente, se pelo ponto médio  $M$  do lado  $AB$  traçarmos a reta paralela ao lado  $BC$ , então tal reta intersecta o lado  $AC$  em seu ponto médio  $N$ . Mais ainda,  $MN = \frac{1}{2}BC$ .*

*Demonstração.* Para a primeira parte, nas notações da Figura 2.18, consideremos o ponto  $M'$  na semirreta  $\overrightarrow{MN}$  tal que  $MN = NM'$ .

Figura 2.18: Medida da base média de um triângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

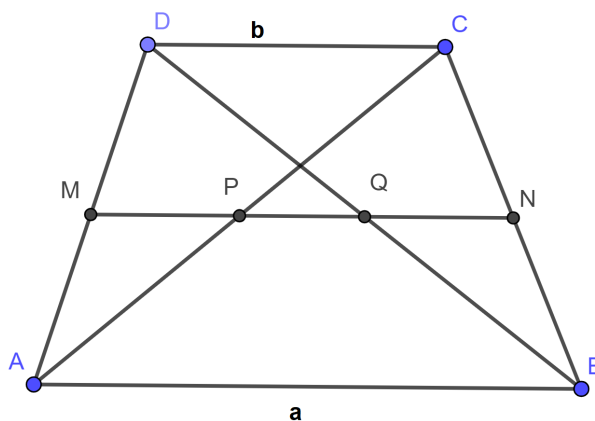
Como  $N$  é o ponto médio do segmento  $AC$  e os ângulos  $\widehat{ANM}$  e  $\widehat{CNM'}$  são congruentes (ângulos opostos pelo vértice), os triângulos  $AMN$  e  $CM'N$  são congruentes pelo caso  $LAL$  (lado-ângulo comum-lado). Portanto,  $M'C = MA$  e  $M'CN$  e  $MÂN$  são congruentes. Segue que os segmentos  $\overline{M'C}$  e  $\overline{AM}$  são paralelos. Assim,  $BM = AM = M'C$  e  $\overline{BM}$  e  $\overline{M'C}$  são paralelos.

Tendo dois lados opostos iguais e paralelos, então o quadrilátero  $MBCM'$  é um paralelogramo. Logo,  $\overline{BC}$  e  $\overline{MM'}$ , em particular,  $\overline{MN}$  são paralelos. Mais ainda, segue que  $MM' = 2MN = 2BC$ .

Reciprocamente, seja  $r$  a reta que passa pelo ponto médio  $M$  do lado  $AB$  e é paralela ao lado  $BC$ . Como, por hipótese,  $\overline{MN}$  também passa por  $M$  e é paralela a  $BC$ , segue do Axioma das Paralelas que  $r$  coincide com  $\overline{MN}$ , em particular,  $N \in r$ .  $\square$

**Teorema 2.8** (Base média do trapézio). (*Neto, 2013, p. 62*) *Seja  $ABCD$  um trapézio de base  $AB$  e  $CD$  e lados não paralelos  $AD$  e  $BC$ . Sejam, ainda,  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados não paralelos  $AD$  e  $BC$ , respectivamente, e  $P$  e  $Q$  os pontos médios das diagonais  $AC$  e  $BD$ , também respectivamente (ver Figura 2.19).*

Figura 2.19: Base média para o trapézio.



Fonte: Elaborada pela autora.

Então, valem as seguintes afirmações:

1.  $M, N, P$  e  $Q$  são colineares e o segmento  $\overline{MN}$  é paralelo aos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .
2.  $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$  e  $PQ = \frac{1}{2}|AB - CD|$ .

*Demonstração.* Nas notações da Figura 2.19, como  $MP$  é base média do triângulo  $DAC$ , segue do Teorema 2.7 que os segmentos  $\overline{MP}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos e  $MP = \frac{1}{2}CD = \frac{b}{2}$ . Por outro lado, como  $MQ$  é base média do triângulo  $ADB$ , segue também que  $\overline{MQ}$  e  $\overline{AB}$  são paralelos e  $MQ = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ . Como  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos, segue do Axioma da Paralelas que  $MP = MQ$ , isto é,  $M, P$  e  $Q$  são colineares. Então,  $\overline{MQ} = \overline{MP} \cup \overline{PQ}$  e

$$PQ = |MQ - MP| = \left| \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD \right| = \frac{1}{2}|AB - CD|.$$

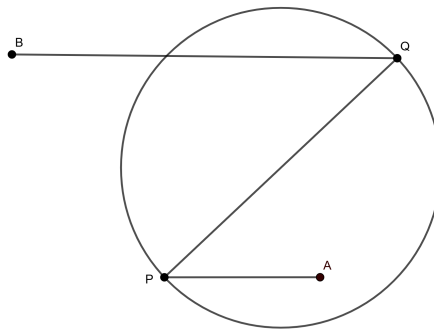
Por outro lado, argumentando com as bases médias  $NQ$  e  $NP$  dos triângulos  $CBD$  e  $ABC$ , respectivamente, concluímos que  $P, Q$  e  $N$  são colineares (Pontos que pertencem uma mesma reta) e  $NQ = \frac{1}{2}DC = \frac{b}{2}$ . Portanto, segue que  $\overline{MN} = \overline{MQ} \cup \overline{QN}$  e

$$MN = MQ + NQ = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{a + b}{2}.$$

□

**Problema 7.** (Araújo, 1998, p. 102) São dados uma circunferência  $\Gamma$  e dois pontos, um deles ( $A$ ) no interior  $\Gamma$  e outro ( $B$ ) no exterior. Construa dois pontos diametralmente opostos  $P, Q \in \Gamma$  de tal forma que a soma  $AP + PQ + QB$  assumo o menor valor possível. Ver Figura 2.20.

Figura 2.20: Hipóteses do Problema 7.



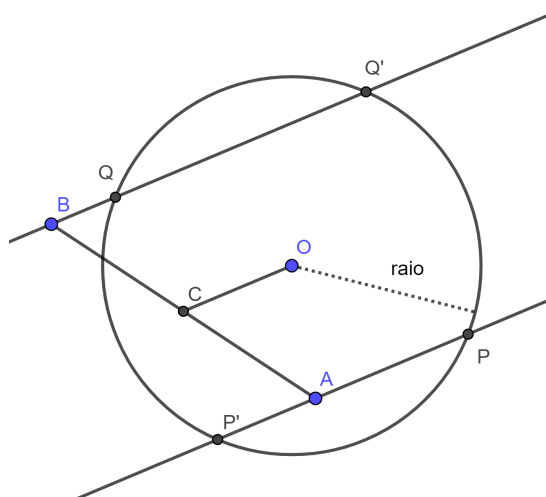
Fonte: Elaborada pela autora.

*Solução.* Dada a circunferência  $\Gamma$  de raio  $R$  e dois pontos  $A$  e  $B$ , com  $A$  no interior de  $\Gamma$  e  $B$  no exterior  $\Gamma$ .

Para construirmos os pontos  $P, Q \in \Gamma$ , faremos os seguintes passos:

1. Traçamos o segmento  $\overline{AB}$  e determinamos seu ponto médio  $C$ ;
2. Traçamos o segmento  $\overline{OC}$ ;
3. Determinamos a reta paralela a  $\overline{OC}$  passando por  $A$ ;
4. Determinamos a reta paralela a  $\overline{OC}$  passando por  $B$ ;
5. Determinamos os pontos  $P, P', Q$  e  $Q'$  a partir das intersecções das retas paralelas traçadas no item anterior com a circunferência  $\Gamma$ , conforme mostra a Figura 2.21.

Figura 2.21: Construção da solução do Problema 7.



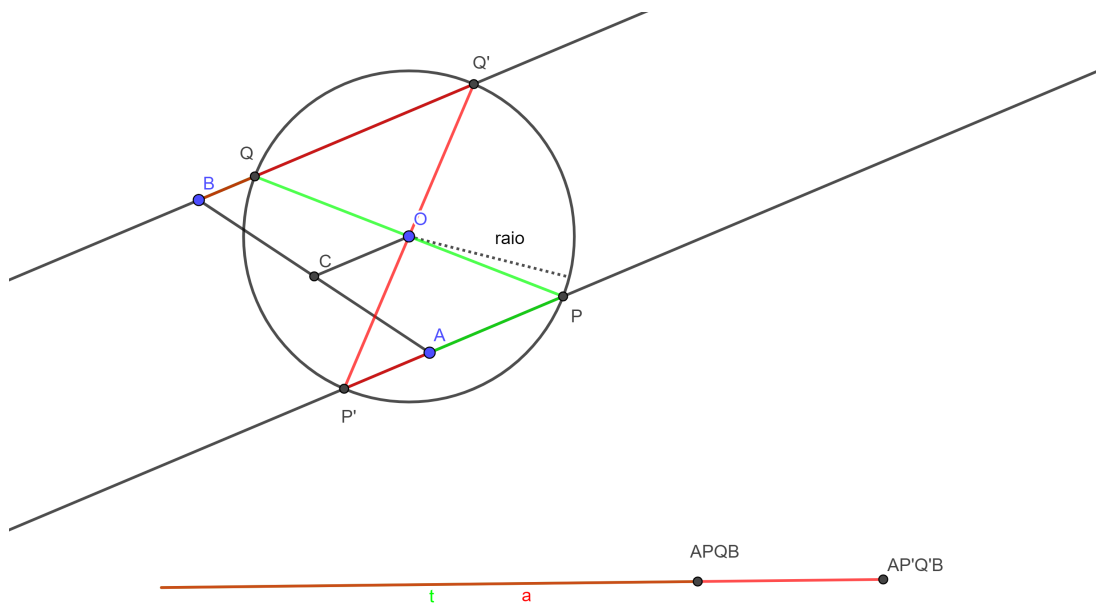
Fonte: Elaborada pela autora.

6. Traçamos os segmentos em  $\overline{PQ}$  e  $\overline{P'Q'}$ .

A escolha por qual solução será feita a partir da comparação dos segmentos  $\overline{AP}$  e  $\overline{QQ'}$ , considerando o menor deles.

Para ilustrar esta construção e assim, obtendo o menor caminho, consideremos um ponto  $X$  qualquer sobre a circunferência  $\Gamma$  e  $Y$  o ponto diametralmente oposto à  $X$ , conforme mostra a Figura 2.22.

Figura 2.22: Solução do Problema 7.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para a demonstrar que a construção é a solução do problema, observamos inicialmente que o polígono  $APQB$  é um trapézio com  $BQ$  e  $AP$  seus lados paralelos. Uma vez que  $PO = OQ = R$  e  $AC = CB$  ( $C$  é ponto médio), podemos aplicar o Teorema 2.7. Assim,  $OC = \frac{1}{2}(AP + BQ)$ .

Por outro lado, para quaisquer par de pontos,  $R$  e  $S$  considerados sobre a circunferência e diametralmente opostos, sempre teremos  $RS = 2R$ . Logo, para obter o mínimo solicitado no problema devemos minimizar apenas  $AS + BR$ . Se considerarmos agora os pontos  $P$  e  $Q$ , anteriormente obtidos, segue pela desigualdade triangular que,

$$AP \leq AS + SP,$$

$$BQ \leq BR + RQ.$$

Logo,

$$AP + BQ \leq (AS + SP) + (BR + RQ) = (AS + BR) + (SP + RQ).$$

A igualdade ocorre quando  $P = S$  e  $R = Q$ , que é o mínimo de  $AP + BQ$ . Portanto, a construção feita minimiza a soma  $AP + PQ + QB$ .  $\blacklozenge$

A aplicabilidade estende-se ao uso de drones ou agentes de vigilância em zonas circulares, como parques e campos, nos quais o percurso se inicia em um ponto interno  $A$ , atravessa um diâmetro  $PQ$  para fins de monitoramento e finaliza em um ponto externo  $B$ . Essa configuração mínima assegura uma cobertura eficiente, com menor consumo de bateria ou esforço operacional. Da mesma forma, robôs autônomos empregados em ambi-

entes industriais circulares utilizam essa otimização para determinar trajetórias entre  $A$  e  $B$  ao longo de superfícies cerâmicas, prática comum em processos de automação fabril ou em sistemas de jogos que envolvem caminhos restritos a regiões circulares.

## 3 Ponto de Torricelli - Fermat e desigualdades algébricas

Este capítulo aborda problemas de maior complexidade, cuja resolução requer a aplicação de teoremas clássicos e desigualdades fundamentais. O conteúdo está organizado em duas seções.

A primeira seção trata do problema de otimização geométrica: Determine o ponto  $X$  no plano tal que a soma das distâncias aos vértices de um dado triângulo  $ABC$  seja mínima. A solução deste problema exige o conhecimento de teoremas essenciais, a saber: o Teorema do Ponto de Torricelli-Fermat e o Teorema de Pompeiu. Ressalta-se que a demonstração do Teorema do Ponto de Torricelli-Fermat depende previamente da Desigualdade de Ptolomeu e do Teorema de Van Schooten. Adicionalmente, a demonstração do Teorema de Van Schooten também requer a aplicação da Desigualdade de Ptolomeu, estabelecendo assim uma estrutura hierárquica de dependências teóricas.

A segunda seção concentra-se em problemas de maximização de área, nos quais são empregadas as desigualdades clássicas entre média aritmética, média geométrica e a desigualdade de Minkowski.

### 3.1 Ponto de Torricelli - Fermat

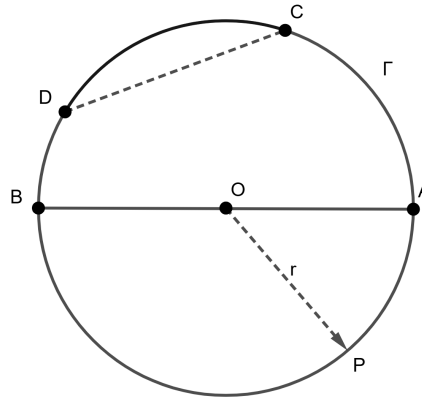
Iniciaremos essa seção citando todos os teoremas e conceitos necessários para poder solucionar o problema citado no começo do capítulo.

Além de pontos, retas, semirretas e segmentos, os círculos serão objetos de grande importância em nosso estudo, principalmente nas próximas demonstrações. Precisamente, dados um ponto  $O$  e um raio  $r > 0$  (que deve ser pensando como comprimento de um segmento), o **círculo de centro**  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de todos pontos  $P$  no plano que estão à distância  $r$  de  $O$ , isto é, tais que  $\overline{OP} = r$ .

Como regra geral, círculos serão denotados por letras gregas maiúsculas. Por exemplo, o círculo da Figura 3.1 será denotado por  $\Gamma$  (lê-se *gama*). Podemos escrever também  $\Gamma(O; r)$ , caso queiramos enfatizar que o centro  $\Gamma$  é o ponto  $O$  e seu raio é  $r$ .

Considere a Figura 3.1. Dado um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  denominamos **raio** do mesmo a todo segmento que une o centro  $O$  a um de seus pontos, por exemplo,  $OA$ ,  $OB$  e  $OP$  são raios do círculo  $\Gamma$ .

Figura 3.1: Elementos de um círculo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma **corda** de  $\Gamma$  é um segmento que une dois pontos quaisquer do círculo; um **diâmetro** de  $\Gamma$  é uma corda que passa por seu centro. Nas notações da Figura 3.1,  $AB$  e  $CD$  são cordas de  $\Gamma$ , sendo  $AB$  um diâmetro. Todo diâmetro irá dividir o círculo em duas partes iguais, denominadas **semicírculos**; reciprocamente, se uma corda de um círculo o divide em duas partes iguais, então tal corda deve, necessariamente, ser um diâmetro do círculo.

Ainda em relação à Figura 3.1, podemos observar que uma parte do círculo  $\Gamma$  aparece em negrito. Tal parte corresponde a um **arco** de círculo, ou seja, a uma parte do círculo delimitada por dois de seus pontos. Observamos que há uma certa ambiguidade nessa definição, devido ao fato de que dois pontos sobre um círculo determinam dois arcos. Em geral, resolveremos essa situação nos referindo ao **arco menor** ou ao **arco maior**  $\widehat{CD}$ . Desse modo, diremos que a parte do círculo  $\Gamma$  em negrito na Figura 3.1 é o arco menor  $\widehat{CD}$ .

Pensando em círculos, podemos citar o ângulo central e os ângulos inscritos. Por definição, um ângulo central de uma círculo é um ângulo cujo vértice é o seu centro. Já um ângulo inscrito é aquele cujo vértice está sobre o círculo e cujos lados são cordas.

Para denotarmos um ângulo qualquer, utilizamos a notação em que a letra correspondente ao vértice aparece com acento circunflexo entre as outras duas letras que representam os pontos das semirretas que definem o ângulo, por exemplo,  $\widehat{BAC}$  denota o ângulo inscrito de vértice  $A$  formado pelas semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ . Para denotarmos a medida de um ângulo qualquer, utilizaremos a letra  $m$  antes do ângulo trabalhado, ou seja,  $m(\widehat{BAC})$  denotará a medida do ângulo  $\widehat{BAC}$ .

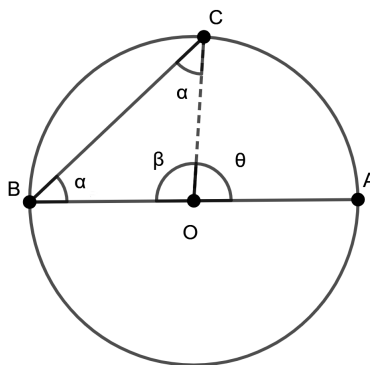
O Teorema 3.1 mostra como determinar a medida de um ângulo inscrito.

**Teorema 3.1** (Teorema do ângulo inscrito). *Se  $AB$  e  $AC$  são cordas de um círculo de centro  $O$ , então a medida do ângulo inscrito  $\widehat{BAC}$  é igual à metade da medida do ângulo central  $\widehat{BOC}$  correspondente.*

*Demonstração.* Consideremos três casos separadamente:

- (a) O centro  $O$  da circunferência pertence a uma das cordas. Neste caso, a corda é o próprio diâmetro da circunferência.

Figura 3.2: O centro  $O$  da circunferência pertence a uma das cordas.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como os segmentos  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$  são de mesma medida, pois são iguais ao raio da circunferência. Desta forma, o triângulo  $OBC$  é isósceles, cuja base é  $BC$ . Então a  $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{BCO}) = \alpha$ .

O segmento  $AB$  é o diâmetro da circunferência e podemos denotar por  $\beta$  o ângulo suplementar de  $\theta$ . O ângulo central será então dado por

$$\beta = 180^\circ - \theta.$$

Como para todos os triângulos, a soma dos ângulos internos é sempre igual a  $180^\circ$ , então temos:

$$\alpha + \alpha + \beta = 180^\circ$$

Substituindo  $\beta$  por  $180^\circ - \theta$ , segue que

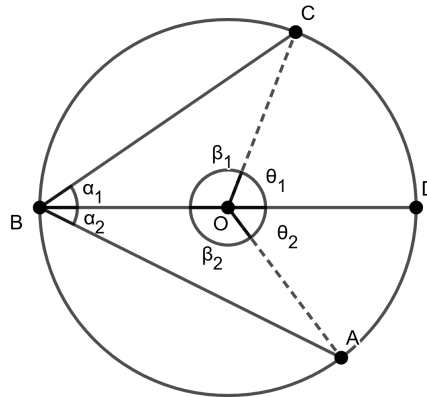
$$\alpha + \alpha + 180^\circ - \theta = 180^\circ$$

Logo,  $\theta = 2\alpha$ .

E assim, provamos o primeiro caso.

- (b) O centro  $O$  da circunferência está dentro do ângulo inscrito, conforme mostra a Figura 3.3.

Figura 3.3: O centro  $O$  da circunferência está dentro do ângulo inscrito.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja  $BD$  o diâmetro da circunferência, dividindo os ângulos central e inscrito, em duas partes. Temos,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ . Como  $BO = OC$  (raio da circunferência) segue então que o triângulo  $BOC$  é isósceles com base  $BC$ . Assim,  $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{BCO}) = \alpha_1$  e  $\theta_1$  é suplementar a  $\beta_1$ , isto é,  $\theta_1 = 180^\circ - \beta_1$ . Logo,

$$2\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ.$$

Substituindo  $\beta_1$  por  $180^\circ - \theta_1$ , segue que:

$$2\alpha_1 + 180^\circ - \theta_1 = 180^\circ.$$

$$\theta_1 = 2\alpha_1.$$

Analogamente para o triângulo  $BOA$ , temos:

$$\theta_2 = 2\alpha_2.$$

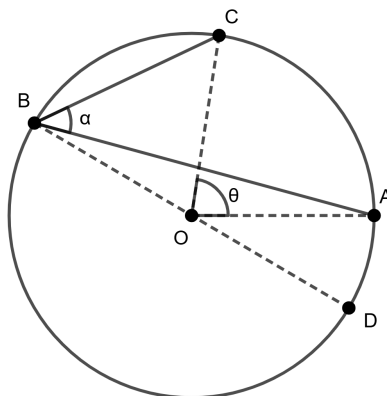
Por outro lado, temos:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha.$$

E demonstramos o segundo caso.

- (c) O centro  $O$  da circunferência está fora do ângulo inscrito, conforme mostra a Figura 3.4.

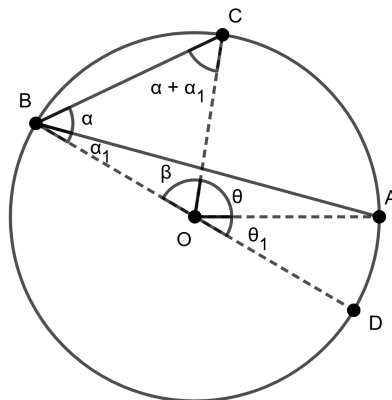
Figura 3.4: O centro  $O$  da circunferência está fora do ângulo inscrito.



Fonte: Elaborada pela autora.

Inicialmente, traçamos o diâmetro  $BD$  da circunferência, definindo outros dois ângulos:  $\theta_1$  e  $\alpha_1$ , conforme a Figura 3.5.

Figura 3.5: O centro  $O$  da circunferência está fora do ângulo inscrito.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja  $\beta$  o ângulo suplementar do ângulo  $\theta + \theta_1$ , que é o ângulo central  $\widehat{COD}$ . Assim,

$$\beta = 180^\circ - (\theta + \theta_1).$$

Do primeiro caso, onde o centro da circunferência pertence a uma das cordas, segue que

$$\theta + \theta_1 = 2(\alpha + \alpha_1). \tag{3.1}$$

Analogamente, para o ângulo  $D\widehat{B}A$ , temos:

$$\theta_1 = 2\alpha_1. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), temos:

$$\theta + 2\alpha_1 = 2(\alpha + \alpha_1)$$

Ou seja,

$$\theta = 2\alpha.$$

Portanto, terminamos a última parte da demonstração.

□

**Propriedade 3.2.** Um quadrilátero convexo  $ABCD$ , de lados  $AB, BC, CD$  e  $DA$ , é inscritível se, e somente se, uma qualquer das condições a seguir for satisfeita:

- (a)  $m(D\widehat{A}B) + m(B\widehat{C}D) = 180^\circ$ . (Ângulos suplementares).
- (b)  $m(B\widehat{A}C) = m(B\widehat{D}C)$ .

Para a demonstração dessas propriedades ver [Neto \(2013, p. 128\)](#)

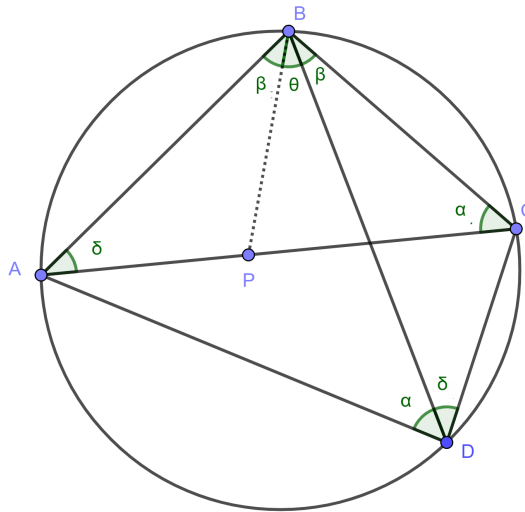
**Definição 3.3.** Um quadrilátero é denominado quadrilátero cíclico se existir uma circunferência que intercepte seus quatro vértices.

**Teorema 3.4** (Teorema de Ptolomeu). *No quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos dois pares de lados opostos.*

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um quadrilátero cíclico na circunferência  $\Gamma$  com  $AB, AD, BC$  e  $CD$  seus lados e  $AC$  e  $BD$  suas diagonais. Ver Figura 3.6.

Por construção, traçamos  $BP$  com  $P \in \overline{AC}$  tal que  $m(A\widehat{B}P) = m(D\widehat{B}C) = \beta$ . É imediato que  $AP + PC = AC$ . Como  $m(A\widehat{D}B) = m(A\widehat{C}B) = \alpha$ , pois são ângulos inscritos em  $\Gamma$  de mesmo arco  $\widehat{AB}$ . Mais ainda,  $m(A\widehat{B}D) = m(P\widehat{B}C) = \beta + \theta$ , então pelo caso de semelhança  $AAA$  (ângulo-ângulo-ângulo), temos que os triângulos  $ABD$  e  $PBC$  são semelhantes.

Figura 3.6: Teorema de Ptolomeu.



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim,

$$\frac{AD}{PC} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow PC \cdot BD = AD \cdot BC \quad (3.3)$$

Do mesmo modo,  $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{BDC}) = \delta$ , uma vez que são ângulos inscritos em  $\gamma$  de mesmo arco  $\widehat{BC}$  e  $m(\widehat{ABP}) = m(\widehat{CBD}) = \beta$ . Pelo caso de semelhança AAA (ângulo-ângulo-ângulo), temos que os triângulos  $ABP$  e  $BCD$  são semelhantes. Assim,

$$\frac{AP}{CD} = \frac{AB}{BD} \Leftrightarrow AP \cdot BD = AB \cdot CD \quad (3.4)$$

Somando (3.3) e (3.4) temos:

$$PC \cdot BD + AP \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD,$$

ou seja,

$$BD \cdot (PC + AP) = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Portanto,

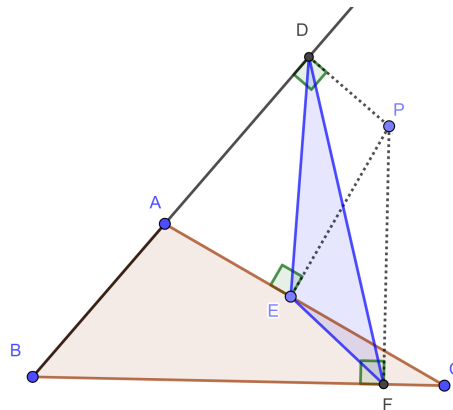
$$BD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

□

**Teorema 3.5** (Desigualdade de Ptolomeu). *Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer e  $P$  um ponto do plano, então  $AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP$ . A igualdade ocorre se, e somente se, o quadrilátero  $ABCP$  é inscritível.*

*Demonstração.* Sejam  $E \in \overleftrightarrow{AC}$ ,  $F \in \overleftrightarrow{BC}$  e  $D \in \overleftrightarrow{AB}$ , tais que os segmentos  $\overline{PD}$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overline{PE}$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overline{PF}$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{BC}$ . Ver Figura 3.7.

Figura 3.7: Desigualdade de Ptolomeu:  $PDAE$  é inscritível



Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos que  $m(\widehat{ADP}) + m(\widehat{AEP}) = 180^\circ$  garantindo que o quadrilátero  $PDAE$  é inscritível (Propriedade 3.2 (a)). Além disso,  $AP$  será o diâmetro do círculo circunscrito pois  $m(\widehat{AEP}) = 90^\circ$ . Por outro lado,  $m(\widehat{DAE}) = 180^\circ - m(\widehat{A})$  onde  $\widehat{A}$  é o ângulo interno do triângulo  $ABC$ . Como

$$m(\widehat{EPD}) + m(\widehat{PDA}) + m(\widehat{DAE}) + m(\widehat{AEP}) = 360^\circ.$$

Segue que

$$m(\widehat{EPD}) = 180^\circ - m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{A}).$$

Aplicando a lei dos senos<sup>1</sup> no triângulo  $PED$ , Neto (2013, p. 188)

$$\frac{ED}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{DP}{\text{sen}(\widehat{PED})}$$

e no triângulo  $APD$ ,

$$\frac{AP}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{DP}{\text{sen}(\widehat{DAP})},$$

e sendo que  $\widehat{PED}$  e  $\widehat{DAP}$  subentendem o mesmo arco, segue que

$$\text{sen } \widehat{A} = \frac{ED}{AP}. \tag{3.5}$$

Analogamente, para o triângulo  $ABC$  temos

$$\text{sen } \widehat{A} = \frac{BC}{2R} \tag{3.6}$$

<sup>1</sup>A lei dos senos resolverá, principalmente, o caso de obter outros elementos de um triângulo onde os ângulos são conhecidos e apenas um lado é conhecido. A Lei dos Senos possui também forte relacionamento com a circunferência circunscrita ao triângulo. Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados do triângulo  $ABC$  e  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  sendo os ângulos internos no triângulo, temos  $\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}}$ .

sendo  $R$  o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ . Comparando as equações (3.5) e (3.6), temos a identidade

$$\frac{ED}{AP} = \frac{BC}{2R} \Leftrightarrow ED = \frac{BC \cdot AP}{2R}.$$

Observamos que os quadriláteros  $BFPD$  e  $CPEF$  também são inscritíveis. Por analogia, temos as identidades

$$FD = \frac{AC \cdot BP}{2R} \quad \text{e} \quad FE = \frac{AB \cdot CP}{2R}.$$

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo  $DEF$ , temos

$$FE + ED > FD \Leftrightarrow \frac{AB \cdot CP}{2R} + \frac{BC \cdot AP}{2R} > \frac{AC \cdot BP}{2R}.$$

Logo,

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP.$$

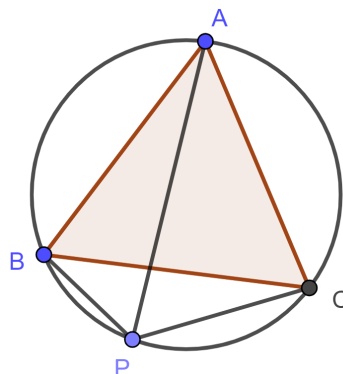
Aplicando o Teorema 3.4 concluímos que

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP.$$

□

**Teorema 3.6** (Teorema de Van Schooten). *Seja um ponto  $P$  pertencente a circunferência que circunscribe um triângulo equilátero  $ABC$ . O maior dos segmentos,  $PA, PB$  ou  $PC$ , será a soma dos dois segmentos mais curtos, ou seja, se  $PB$  for o maior então  $PA = PB + PC$ .*

Figura 3.8:  $P$  pertencente a circunferência circunscrita a um triângulo equilátero  $ABC$



Fonte: Elaborada pela autora.

*Demonstração.* Para provar este teorema utilizamos o Teorema 3.4 de Ptolomeu no qua-

drilátero  $ABPC$  inscrito na circunferência, conforme mostra a Figura 3.8. Dessa maneira,

$$BC.PA = AC.PB + AB.PC.$$

Como o triângulo  $ABC$  é equilátero segue que  $AB = AC = BC = a$  e assim,

$$a.PA = a.PB + a.PC.$$

Portanto,

$$PA = PB + PC.$$

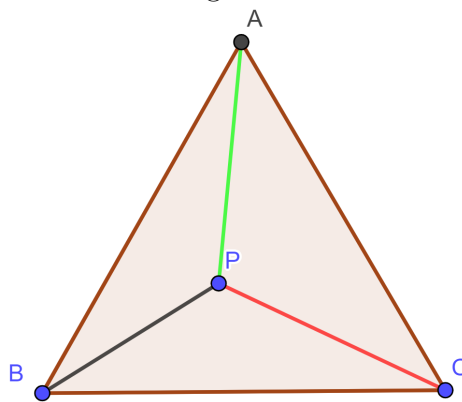
□

**Teorema 3.7** (Teorema de Pompeiu). *Dado um triângulo equilátero  $ABC$  no plano e um ponto  $P$  no plano do triângulo  $ABC$ , os comprimentos  $PA, PB$  e  $PC$  formam os lados de um triângulo.*

*Demonstração.* Dividimos a demonstração em 3 casos:

(a) O ponto  $P$  pertence a região interna do triângulo como mostra a Figura 3.9.

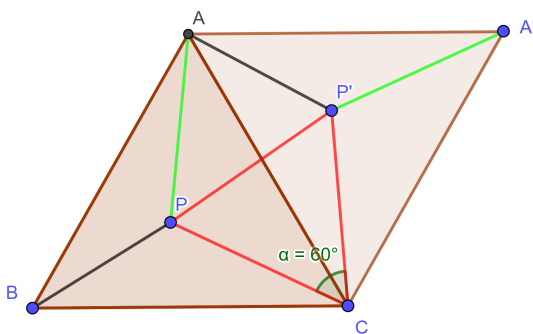
Figura 3.9: Ponto  $P$  na região interna do triângulo  $ABC$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Rotacionando o triângulo  $ABC$  em  $60^\circ$  em torno do vértice  $C$  no sentido horário, encontraremos  $A'$  e  $P'$  (Ver Figura 3.10). Observamos que  $B$  irá coincidir com o ponto  $A$  após a rotação. Considerando o triângulo  $PP'A$  verificamos que  $P'A = PB$  e o triângulo  $PP'C$  é equilátero, pois  $m(\widehat{PCP'}) = 60^\circ$  e  $PC = P'C$  com cada ângulo da base  $PP'$  do triângulo  $PP'C$  medindo  $60^\circ$ . Daí  $PP' = PC$  e segue que os lados do triângulo  $PP'A$  são  $PA, PB$  e  $PC$  e não são colineares.

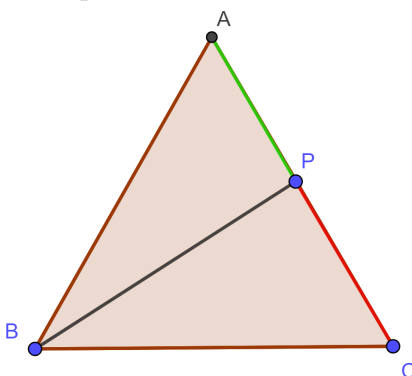
Figura 3.10: Rotacionando o triângulo  $ABC$  em  $60^\circ$  em torno do vértice  $C$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

(b) O ponto  $P$  pertence a um dos lados do triângulo  $ABC$  como mostra a Figura 3.11.

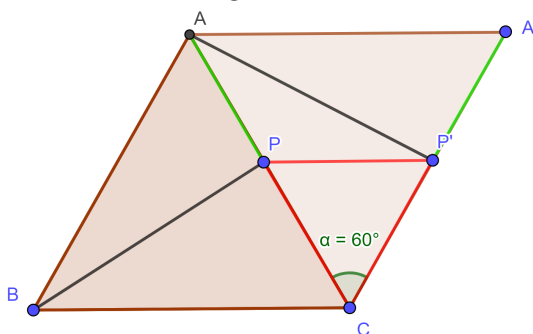
Figura 3.11: O ponto  $P$  pertence a um dos lados do triângulo  $ABC$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Ao rotacionar o triângulo  $ABC$  em  $60^\circ$  em torno do vértice  $C$  encontraremos  $A'$  e  $P'$  as respectivas imagens dos pontos  $A$  e  $P$ . Observamos que  $B$  coincide com  $A$  após a rotação. Ver Figura 3.12.

Figura 3.12: Rotacionando o triângulo  $ABC$  em  $60^\circ$  em torno do vértice  $C$



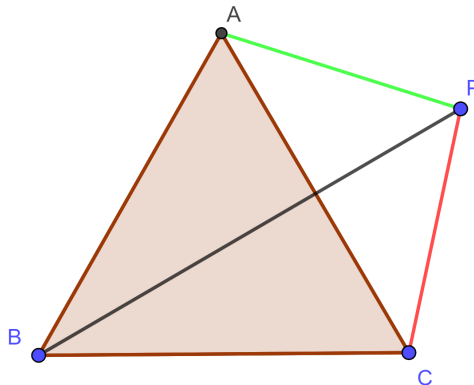
Fonte: Elaborada pela autora.

No triângulo  $PP'A$ ,  $P'A = PB$  e o triângulo  $PP'C$  será equilátero, pois  $\widehat{PCP'} = 60^\circ$

e  $PC = P'C$  com cada ângulo da base  $PP'$  do triângulo  $PP'C$  medindo  $60^\circ$ . Segue então que  $PP' = PC$  e os lados do triângulo  $PP'A$  são  $PA, PB$  e  $PC$ .

(c) O ponto  $P$  pertence a região exterior ao triângulo  $ABC$ . Ver Figura 3.13.

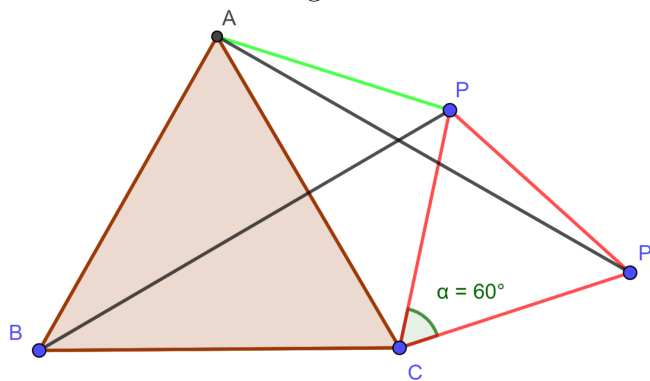
Figura 3.13: O ponto  $P$  pertence a região exterior ao triângulo  $ABC$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Rotacionando em  $60^\circ$  no sentido horário em torno do vértice  $C$  o triângulo  $ABC$  e o segmento  $PC$ . Determinamos o ponto  $P'$  conforme mostra a Figura 3.14.

Figura 3.14: Rotacionando o segmento  $PC$  em  $60^\circ$  em torno de  $C$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos que o triângulo  $PCP'$  é isósceles pois  $PC = P'C$ . Mais ainda, o ângulo entre eles mede  $60^\circ$ , ou seja,  $m(\widehat{PCP'}) = 60^\circ$ . Assim, os ângulos da base do triângulo  $PCP'$  também medem  $60^\circ$ . O triângulo  $PCP'$  é equilátero.

O triângulo  $PBC$  é congruente ao triângulo  $ACP'$  pelo caso de congruência  $LAL$  pois  $BC = AC, PC = P'C$  e os ângulos  $\widehat{PCB} = \widehat{AP'C}$ . Por fim, observamos que o triângulo  $APP'$  possui medidas  $AP, PB$  e  $PC$  que são lados de um triângulo de Pompeiu.

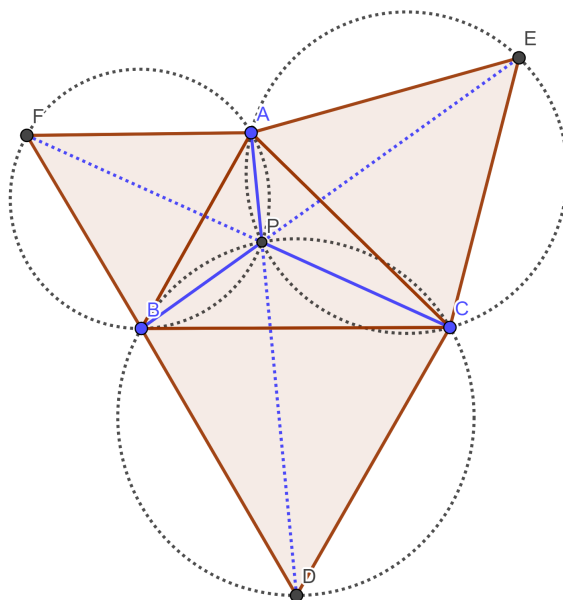
□

**Teorema 3.8** (Ponto de Torricelli - Fermat). *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Em cada lado construímos externamente três triângulos equiláteros  $ABF$ ,  $ACE$  e  $BCD$ . Afiramos que:*

- (a) *As três circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros se interceptam em um ponto  $P$ , ou seja,  $C(ABF) \cap C(ACE) \cap C(BCD) = \{P\}$ .*
- (b) *Os segmentos  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  são concorrentes em  $P$ , ou seja,  $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$ .*
- (c)  *$AD = BE = CF = PA + PB + PC$ .*
- (d) *Para todos os pontos  $M$  do plano para o triângulo  $ABC$ , segue que  $MA + MB + MC \geq AD = PA + PB + PC$ .*

*Se o ponto  $P$  minimizar a expressão  $MA + MB + MC$  este ponto é chamado de ponto Torricelli - Fermat. Ver Figura 3.15.*

Figura 3.15: Ponto Torricelli - Fermat



Fonte: Elaborada pela autora.

*Demonstração.*

- (a) Sejam  $A$  e  $P$  os pontos de intersecção das circunferências  $C(ABF)$  e  $C(ACE)$ . Como o quadrilátero  $APBF$  é inscrito na circunferência  $C(ABF)$  segue que os ângulos opostos são suplementares. Por outro lado,  $m(\widehat{AFB}) = 60^\circ$ , então:

$$m(\widehat{APB}) + m(\widehat{AFB}) = 180^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{APB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Analogamente, por  $APCE$  ser inscrito, temos:

$$m(\widehat{APC}) + m(\widehat{AEC}) = 180^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{APC}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

e

$$m(\widehat{APB}) + m(\widehat{APC}) + m(\widehat{BPC}) = 360^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{BPC}) = 120^\circ.$$

Assim,

$$m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BDC}) = 180^\circ.$$

O ângulos  $\widehat{BPC}$  e  $\widehat{BDC}$  são suplementares. Logo, o quadrilátero  $BPCD$  também é inscritível, isto é,  $P \in C(BCD)$ . Portanto,  $C(ABF) \cap C(ACE) \cap C(BCD) = \{P\}$ .

- (b) Basta mostrar que os pontos  $(C, P, F)$ ,  $(A, P, D)$  e  $(B, P, E)$  são colineares. De fato, sabemos que  $m(\widehat{APC}) = 120^\circ$  e  $m(\widehat{APF}) = m(\widehat{ABF}) = 60^\circ$  uma vez que são ângulos inscritos ao mesmo arco  $\widehat{AB}$ . Então,

$$m(\widehat{APC}) + m(\widehat{APF}) = 180^\circ.$$

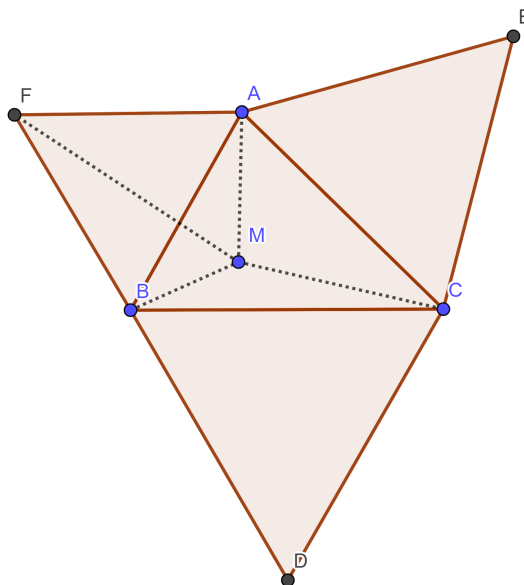
Daí, os pontos  $C, P$  e  $F$  são colineares. De modo análogo, chegaremos a conclusão que os pontos  $(A, P, D)$  e  $(B, P, E)$  também são colineares. Portanto,  $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$ .

- (c) Iremos mostrar que  $CF = PA + PB + PC$ . Como  $P \in C(ACB)$  e o triângulo  $ABF$  é equilátero, pelo Teorema 3.6 (Van Schooten) segue que  $PF = PA + PB$ . Assim,

$$CF = PF + PC \Leftrightarrow CF = PA + PB + PC.$$

- (d) Seja um ponto  $M$  qualquer na região interna do triângulo  $ABC$  conforme mostra a Figura 3.16.

Figura 3.16: Ponto  $M$  na região interna do triângulo  $ABC$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Aplicando a desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3.5) para o triângulo  $ABF$  e o ponto  $M$  segue que

$$AM \cdot BF + AF \cdot BM \geq MF \cdot AB.$$

Pelo fato do triângulo  $ABF$  ser equilátero, temos

$$AM + BM \geq MF.$$

Somando  $CM$  em ambos lados da desigualdade e aplicando a desigualdade triangular,  $CM + MF \geq CF$ , temos:

$$AM + BM + CM \geq CM + MF \implies AM + BM + CM \geq CF.$$

Como,  $CF = PA + PB + PC$  segue que

$$AM + BM + CM \geq PA + PB + PC.$$

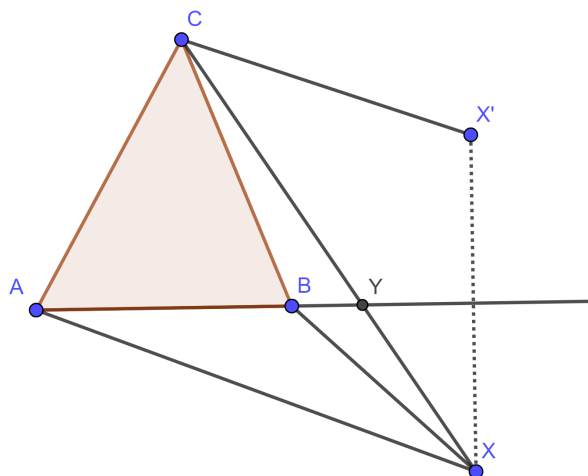
Portanto, o ponto de um triângulo que minimiza a soma das distâncias até os três vértices é o ponto Torricelli-Fermat.

□

**Problema 8.** (Problema 1.1.7 (Andresescu et al., 2007, p. 8)) Determine o ponto  $X$  no plano tal que a soma das distâncias aos vértices de um dado triângulo  $ABC$  seja mínima, isto é,  $t(x) = AX + BX + CX$  é mínimo.

*Solução.* Suponhamos que o ponto  $X$  seja exterior ao triângulo  $ABC$ . Então, uma das retas  $AB, BC, CA$ , digamos  $AB$ , tem a propriedade do triângulo  $ABC$  e o ponto  $X$  estão em semiplanos diferentes determinados por esta reta, conforme mostra a Figura 3.17.

Figura 3.17: Problema 8 - o ponto  $X$  é exterior ao triângulo  $ABC$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Consideremos a reflexão  $X'$  de  $X$  em relação à reta que liga os pontos  $A$  e  $B$ . Temos que  $AX' = AX, BX' = BX$ . Além disso, o segmento  $CX$  cruza a reta  $AB$  em algum ponto  $Y$  com  $XY = X'Y$ . Pela desigualdade triangular, temos

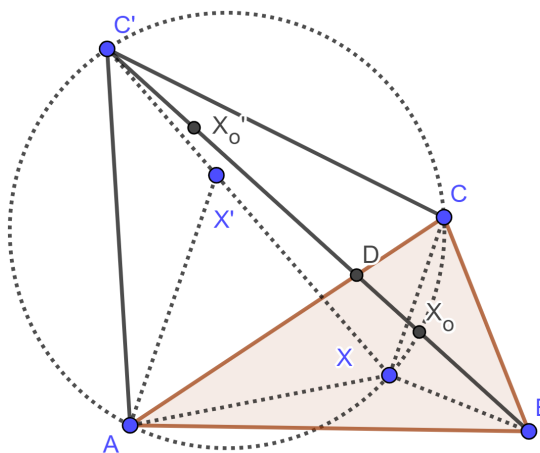
$$CX' \leq CY + X'Y = CY + XY = CX$$

uma vez que  $C, X$  e  $Y$  são colineares. Logo,  $t(X') < t(X)$ .

Assim, podemos nos restringir aos casos nos quais o ponto  $X$  está no interior ou na fronteira do triângulo  $ABC$ . Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  as medidas dos ângulos dos vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo  $ABC$ , respectivamente. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\gamma \geq \alpha \geq \beta$ . Então,  $\alpha$  e  $\beta$  são ambos ângulos agudos.

Denotemos por  $\varphi$  a rotação de  $60^\circ$  no sentido anti-horário em torno do vértice  $A$ . Para qualquer ponto  $M$  no plano seja  $M' = \varphi(M)$ . Então, o triângulo  $AMM'$  é um triângulo equilátero. Em particular, o triângulo  $ACC'$  é equilátero. Consideremos um ponto arbitrário  $X$  na região interna do triângulo  $ABC$  conforme ilustrado na Figura 3.18.

Figura 3.18: Rotação  $60^\circ$  no sentido anti-horário em torno do vértice  $A$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Segue que  $AX = XX'$ , enquanto  $X' = \varphi(X)$  e  $C' = \varphi(C)$  implica  $CX = C'X$ . Consequentemente,  $t(X) = BX + XX' + X'C'$ , ou seja,  $t(X)$  é igual ao comprimento do segmento (linha tracejada na Figura 3.18)  $BXX'C'$ .

Consideramos agora três casos:

- (a)  $\gamma < 120^\circ$ . Neste caso,  $m(\widehat{BC'C'}) = \gamma + 60^\circ < 180^\circ$ . Como  $\alpha < 90^\circ$ , também temos  $m(\widehat{BAC'}) < 180^\circ$ . Assim, o segmento de reta  $BC'$  intercepta o lado  $AC$  em algum ponto  $D$  (ver Figura 3.18). Denotemos por  $X_o$  o ponto de intersecção de  $BC'$  com o círculo

circunscrito do triângulo  $ACC'$ .  $X_o$  pertence ao segmento de reta  $BD$  e  $X_o'$  está em  $C'X_o$  uma vez que  $m(\widehat{AX_oC'}) = m(\widehat{AC'C'}) = 60^\circ$ . Além disso, temos

$$t(X_o) = BX_o + X_oX_o' + X_o'C' = BC',$$

então  $t(X_o) \leq t(X)$  para qualquer ponto  $X$  no triângulo  $ABC$ . A igualdade ocorre apenas para  $X$  e  $X'$  em  $BC'$ , o que só é possível quando  $X = X_o$ .

Observamos que o ponto  $X_o$  construído acima satisfaz  $m(\widehat{AX_oC}) = m(\widehat{AX_oB}) = m(\widehat{BX_oC}) = 120^\circ$ .  $X_o$  é o ponto de Torricelli para o triângulo  $ABC$ .

- (b)  $\gamma = 120^\circ$ . O segmento  $BC'$  contém  $C$  e  $t(X) = BX + XX' + X'C' = BC'$  precisamente quando  $X = C$ .

Observamos que ambos os casos 1 e 2 seguem o Teorema 3.7 (de Pompeiu). Na verdade, o triângulo  $ACC'$  é equilátero e temos  $t(X) = AX + BX + CX \geq C'X + BX \geq BC'$ .

- (c)  $\gamma > 120^\circ$ . Então,  $BC'$  não tem ponto comum com o lado  $BC$ . Se  $AX \geq AC$  e usando a desigualdade triangular, segue que  $t(X) = AX + BX + CX \geq AC + BC$ . Se  $AX < AC$  então  $X'$  está no triângulo  $ACC'$  e  $t(X) = BX + XX' + X'C' > AC + BC$  já que o retângulo  $C$  está no  $BC'X'X$ . Em ambos casos a igualdade ocorre precisamente quando  $X = C$ .

Concluimos, se todos os ângulos do triângulo  $ABC$  forem menores que  $120^\circ$ , então  $t(X)$  é mínimo quando  $X$  coincide com o ponto  $ABC$  de Torricelli. Se um dos ângulos do triângulo  $ABC$  não for menor que  $120^\circ$ , então  $t(X)$  é mínimo quando  $X$  coincide com o vértice desse ângulo.



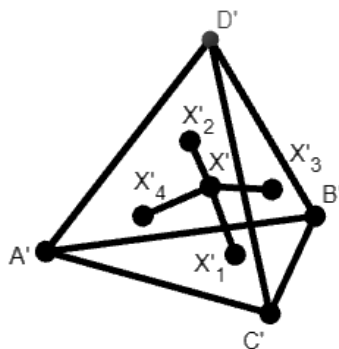
A ideia do ponto de Fermat de um triângulo é amplamente utilizada para encontrar soluções ideais que minimizam a soma de distâncias, sendo aplicável ao gerenciamento de custos, à logística e a decisões estratégicas financeiras.

Assim, prosseguindo com o estudo do tetraedro, define-se o tetraedro regular como um poliedro constituído por quatro faces triangulares equiláteras congruentes. Segue o teorema:

**Teorema 3.9.** *Para qualquer ponto  $X$  no interior de um tetraedro regular  $ABCD$ , a soma das distâncias de  $X$  às quatro faces do tetraedro é constante.*

*Demonstração.* Sejam  $X$  um ponto qualquer no interior do tetraedro regular  $ABCD$  e  $X_1, X_2, X_3$  e  $X_4$  as projeções ortogonais do ponto  $X$  sobre as quatro faces, como ilustrado na Figura 3.19.

Figura 3.19: Tetraedro  $ABCD$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Os segmentos que ligam os vértices do tetraedro ao ponto  $X$ , particionam o tetraedro em quatro pirâmides triangulares de mesmo vértice  $X$  e bases congruentes (faces do tetraedro regular  $ABCD$ ),  $XABC$ ,  $XABD$ ,  $XBCD$  e  $XACD$ . A soma dos volumes dessas pirâmides é igual ao volume do tetraedro. Se  $S$  é a área da base,  $h$  a altura do tetraedro e  $V$  o volume, temos a expressão  $V = \frac{1}{3}S \cdot h$ , e

$$\frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}S \cdot d_1 + \frac{1}{3}S \cdot d_2 + \frac{1}{3}S \cdot d_3 + \frac{1}{3}S \cdot d_4,$$

onde  $d_1 = \overline{XX_1}$ ,  $d_2 = \overline{XX_2}$ ,  $d_3 = \overline{XX_3}$ ,  $d_4 = \overline{XX_4}$  são as distâncias de  $X$  até cada uma das faces. Simplificando a igualdade anterior, obtemos:

$$h = d_1 + d_2 + d_3 + d_4.$$

Assim, mostramos que a soma das distâncias do ponto  $X$  às quatro faces do tetraedro regular  $ABCD$  é constante e igual à altura do tetraedro.  $\square$

A aplicação desse tipo de problema pode ocorrer na Física, especialmente na análise de distribuição de pressão e de fluidos. Em vasos tetraédricos regulares contendo fluido incompressível, a soma constante das distâncias de um ponto interno às faces relaciona-se à pressão hidrostática uniforme, o que auxilia no cálculo das forças exercidas sobre membranas ou sensores internos, por exemplo, em tanques de armazenamento criogênico ou na modelagem de fluxos em cavidades dinâmicas.

Na Engenharia, por sua vez, esse princípio pode ser empregado na análise estrutural e de materiais, otimizando o posicionamento de sensores ou reforços em estruturas tetraédricas (por exemplo, treliças espaciais em antenas ou suportes em implantes médicos). A soma fixa das distâncias implica uma distribuição equilibrada das perpendiculares às faces, garantindo um monitoramento mais uniforme das deformações.

**Problema 9.** *Seja  $ABCD$  um tetraedro regular no espaço. Determine os pontos  $X$ , no espaço, tais que a soma*

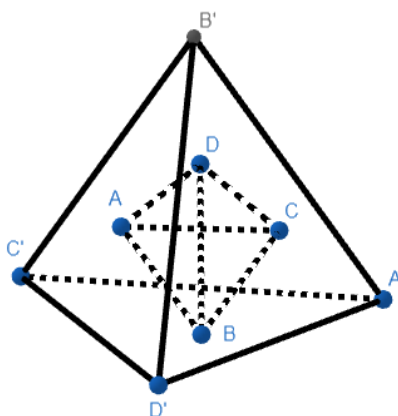
$$S(X) = AX + BX + CX + DX$$

*possui um único mínimo.*

*Solução.* Vamos utilizar o resultado do Teorema 3.9, ou seja, que a soma das distâncias de  $X'$  às quatro faces do tetraedro  $A'B'C'D'$  é constante.

Inicialmente, construímos um tetraedro regular  $A'B'C'D'$  com faces paralelas às faces correspondentes de  $ABCD$  de maneira que o ponto  $A$  no triângulo  $B'C'D'$ ,  $B$  no triângulo  $A'C'D'$ ,  $C$  no triângulo  $A'B'D'$  e  $D$  no triângulo  $A'B'C'$ . Para a construção deste tetraedro basta usarmos a dilatação  $\phi$  de centro  $O$  sendo  $O$  o centro de  $ABCD$  e razão  $k = -3$ . Para qualquer ponto  $X$  definimos  $X' = \phi(X)$ . Então  $A'B'C'D'$  é o tetraedro desejado. Ver Figura 3.20.

Figura 3.20: Tetraedro.



Fonte: Elaborada pela autora.

Considere um ponto  $X$  interno ao tetraedro  $A'B'C'D'$ . Sejam  $x, y, z$  e  $t$  as distâncias de  $X$  faces de  $A'B'C'D'$ , respectivamente. Se  $h'$  o comprimento da altura do tetraedro  $A'B'C'D'$ , então

$$\text{Vol}(A'B'C'D') = \frac{h'}{3} \text{Área}[A'B'C'].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A'B'C'D') &= \text{Vol}(XB'C'D') + \text{Vol}(XA'C'D') + \text{Vol}(XA'B'D') + \text{Vol}(XA'B'C') \\ &= \frac{x}{3} \text{Área}[B'C'D'] + \frac{y}{3} \text{Área}[A'C'D'] + \frac{z}{3} \text{Área}[A'B'D'] + \frac{t}{3} \text{Área}[A'B'C'], \end{aligned}$$

Uma vez que o tetraedro  $A'B'C'D'$  é regular segue que

$$\text{Área}[B'C'D'] = \text{Área}[A'C'D'] = \text{Área}[A'B'D'] = \text{Área}[A'B'C'].$$

Assim,

$$\frac{h'}{3} \text{Área}[A'B'C'] = \frac{x + y + z + t}{3} \text{Área}[A'B'C'],$$

o que resulta em  $x + y + z + t = h'$ .

Se  $X$  for externo ao tetraedro  $A'B'C'D'$ , então os tetraedros  $XB'C'D'$ ,  $XA'C'D'$ ,  $XA'B'D'$  e  $XA'B'C'D'$  cobrem  $A'B'C'D'$  e assim a soma de seus volumes é maior que o volume de  $A'B'C'D'$ . Portanto, neste caso,  $x + y + z + t > h'$ .

Para encontrar o mínimo de  $S(X)$ , observamos que sempre temos  $x \leqslant XA$ , onde a igualdade é válida apenas quando  $XA$  for perpendicular ao plano do triângulo  $B'C'D'$ . Do mesmo modo,  $y \leqslant XB$ ,  $z \leqslant XC$  e  $t \leqslant XD$ . Assim,  $S(X) \geqslant x + y + z + t \geqslant h'$ . Além disso, a igualdade  $S(X) = h'$  é válida se, e somente se,  $X$  estiver nas perpendiculares que passam por  $A, B, C$  e  $D$  às faces correspondentes de  $A'B'C'D'$ . Claramente o único ponto  $X$  com esta propriedade é  $X = 0$ . Esta é a solução única do problema.  $\blacklozenge$

## 3.2 Desigualdades Algébricas

Uma grande variedade de problemas geométricos sobre máximos e mínimos podem ser resolvidos usando desigualdades algébricas apropriadas. Muitas desigualdades algébricas podem ser interpretadas geometricamente com tais problemas. Um exemplo bem conhecido é a desigualdade média aritmética - média geométrica, isto é,

$$\frac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, (x, y \geqslant 0).$$

Essa desigualdade algébrica é equivalente ao seguinte problema geométrico:

*De todos os retângulos com perímetro fixado, o quadrado tem área máxima.*

Como é de se esperar, ao utilizarmos esta abordagem, a solução é normalmente dada pelos casos em que ocorrem a igualdade.

Primeiramente, vamos mostrar geometricamente a desigualdade para dois números construtíveis.

**Exemplo 3.10.** Mostremos geometricamente que a média aritmética de dois números é maior ou igual a média geométrica.

Sejam os segmentos  $a$  e  $b$  de medidas quaisquer conforme mostra a Figura 3.21.

Figura 3.21: Hipóteses do Exemplo 3.10



Fonte: Elaborada pela autora.

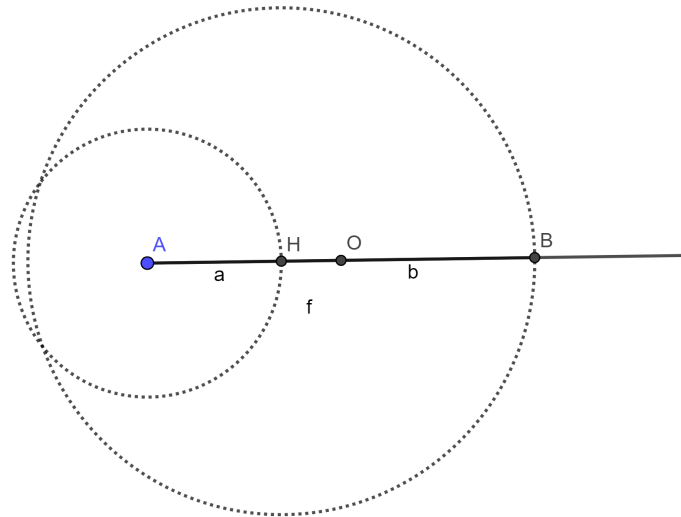
Primeiramente, vamos fazer a construção geométrica da Média Aritmética ( $MA$ ) de dois números (segmentos construtíveis).

1. Traçamos uma reta qualquer a reta  $f$ .
2. Transportando com o compasso o segmento  $a$  na reta  $f$  obtemos os pontos extremos  $A$  e  $H$ .
3. Transportando com o compasso o segmento  $b$  na reta  $f$  tendo agora como pontos extremos os pontos  $H$  e  $B$ .

Assim, temos  $AB = a + b$ .

4. Determinamos o ponto médio  $O$  do segmento  $AB$  e traçamos a circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB$ . Ver Figura 3.22.

Figura 3.22: Construção do Exemplo 3.10.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como o raio  $R$  é a metade do diâmetro temos

$$a + b = 2R \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{a + b}{2}. \quad (3.7)$$

Logo, a média aritmética dos segmentos  $a$  e  $b$ , usando a notação  $(MA_{(a,b)})$  será dada por  $MA_{(a,b)} = R$ .

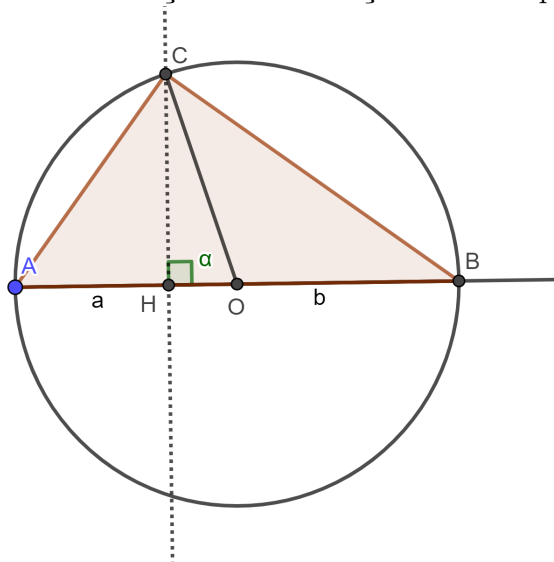
Agora passemos para a construção geométrica da média geométrica ( $MG$ ) de dois números (segmentos construtíveis).

Partindo da mesma circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB$  obtida para a construção da média aritmética continuamos a construção geométrica:

1. Traçamos a reta perpendicular  $g$  ao segmento  $AB$  no ponto  $H$ .

2. Na intersecção da reta  $g$  com a circunferência determinamos o ponto  $C$ .
3. Traçamos o segmento  $OC$ .
4. Traçamos o triângulo  $ABC$ . Ver Figura 3.23.

Figura 3.23: Continuação da construção do Exemplo 3.10.



Fonte: Elaborada pela autora.

Pelo teorema do ângulo inscrito na circunferência,  $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ , pois o ângulo central do arco  $\widehat{AB}$  mede  $180^\circ$ . Assim, o triângulo  $ABC$  é retângulo. Dividindo o triângulo  $ABC$  em dois triângulos,  $AHC$  e  $HBC$ , com  $m(\widehat{BCA}) = 90^\circ$ , segue que  $\widehat{HCA}$  é complementar ao  $\widehat{BCH}$ . Temos então que  $m(\widehat{CAH}) = m(\widehat{BCH})$  e  $m(\widehat{HCA}) = m(\widehat{HBC})$ . Logo, o triângulo  $AHC$  é semelhante ao triângulo  $HBC$ , pelo caso AAA, pois  $m(\widehat{CAH}) = m(\widehat{BCH})$  e  $m(\widehat{HCA}) = m(\widehat{HBC})$ . Segue que

$$\frac{AH}{HC} = \frac{CH}{HB} \Leftrightarrow \frac{a}{h} = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h^2 = ab \Leftrightarrow h = \sqrt{ab}.$$

Logo, a média geométrica dos segmentos  $a$  e  $b$ , usando a notação  $(MG_{(a,b)})$  será dada por  $MG_{(a,b)} = h$ .

Traçando o segmento  $OC = R$  na circunferência de centro  $O$ , temos o triângulo retângulo  $OCH$  com  $m(\widehat{OHC}) = 90^\circ$  e  $OC$  sua hipotenusa.

Uma vez que o maior lado sempre é oposto ao maior ângulo e  $OC$  é oposto ao ângulo  $m(\widehat{OHC}) = 90^\circ$ , então

$$OC = R \geq CH = h \Leftrightarrow MA_{(a,b)} = \frac{a+b}{2} \geq MG_{(a,b)} = \sqrt{a \cdot b}.$$

O Teorema 3.11 generaliza o resultado.

**Teorema 3.11** (Desigualdade média aritmética - média geométrica). *Para quaisquer números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , temos:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .*

Para demonstrar o Teorema 3.11 utilizaremos o lema a seguir.

**Lema 3.12.** *Se  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ , tais que o produto  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ , então  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ . A igualdade é válida se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ .*

*Demonstração.* Utilizando o Princípio de Indução Finita sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , temos  $x_1 = 1$ . Logo,  $x_1 \geq 1$ , o que torna o resultado verdadeiro.

Hipótese de indução: Suponhamos que para  $n = k$ , a afirmação seja válida, ou seja,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k.$$

Mostraremos que o resultado é válido para  $n = k + 1$ . Para isto, consideremos  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}_+^*$  e  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k+1} = 1$ . Assim temos dois casos para analisar:

- Todos os  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$  são iguais, isto é,  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1}$ . Como todos são iguais a 1, concluímos que  $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = k + 1$ . Logo, o resultado vale para  $n = k + 1$ , quando cada um dos números é igual a 1.
- Nem todos os números são iguais, isto é, há entre eles os números menores que 1 e outros que são maiores que 1, pois não podemos ter todos os números menores que 1 e nem todos os números maiores que 1, visto que o produto de todos eles deve ser igual a 1. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que  $x_k > 1$  e  $x_{k+1} < 1$ . Segue que

$$(x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k - x_k x_{k+1} + x_{k+1} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k - x_k x_{k+1} + x_{k+1} > 1.$$

Acrescentando  $k$  em ambos os membros da desigualdade, temos

$$k + x_k - x_k x_{k+1} + x_{k+1} > k + 1.$$

Voltando na expressão  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot (x_k \cdot x_{k+1}) = 1$  e usando a hipótese de indução, temos

$$x_1 + x_2 + \dots + (x_k \cdot x_{k+1}) \geq k \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1}.$$

Somando em ambos os membros  $x_k + x_{k+1}$  obtemos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - (x_k \cdot x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}.$$

Como  $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - (x_k \cdot x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$  e  $k + x_k - x_k x_{k+1} + x(k+1) > k+1$ , então

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k+1.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a afirmação é verdadeira para todo  $n$ .

□

Com base no Lema 3.12 vamos agora demonstrar o Teorema 3.11.

*Demonstração.* (Teorema 3.11). Consideremos  $MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ , então

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}{MG} = 1.$$

Elevando ambos os lados a potência  $n$  temos

$$\frac{x_1 \cdots x_n}{MG^n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{MG} \cdot \frac{x_2}{MG} \cdots \frac{x_n}{MG} = 1.$$

Aplicando o Lema 3.12, temos que

$$\frac{x_1}{MG} + \frac{x_2}{MG} + \cdots + \frac{x_n}{MG} \geq n.$$

Logo,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \cdot MG \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq MG$$

Substituindo  $MG$  concluímos que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

□

**Teorema 3.13** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dados  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  números reais tem-se*

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Além disso, a igualdade só ocorre se existir um número real  $\alpha$ , tal que  $x_i = \alpha \cdot y_i$ , para todo natural  $1 \leq i \leq n$ .

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(v) = (x_1v - y_1)^2 + (x_2v - y_2)^2 + \cdots + (x_nv - y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (x_iv - y_i)^2 \geq 0.$$

Como  $(x_iv - y_i)^2 = x_i^2v^2 - 2x_iy_iv + y_i^2$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , podemos reescrever a expressão de  $f$  como

$$f(v) = v^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2v \sum_{i=1}^n x_iy_i + \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Por outro lado, como  $f$  representa uma função quadrática em  $v$  temos que  $f(v) \geq 0$  para todo  $v$  real se, e somente se, o discriminante for menor ou igual a zero, isto é,

$$4 \left( \sum_{i=1}^n x_iy_i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 0$$

Segue que

$$\left( \sum_{i=1}^n x_iy_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

ou ainda,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_iy_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o discriminante se anula, isto é, a função admite uma raiz real  $\alpha$ . Para isto, cada parcela  $(x_i\alpha - y_i)^2$ , deve ser nula, ou equivalente para  $x_i = \frac{y_i}{\alpha}$  com  $1 \leq i \leq n$ .  $\square$

**Teorema 3.14** (Desigualdade Minkowski). *Dados  $x_i, y_i$  com  $1 \leq i \leq n$ , números reais. Então,*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

*Demonstração.* Partimos da seguinte igualdade:

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_iy_i. \quad (3.8)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito de 3.8 e lembrando que  $a \leq |a|$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right)^2.$$

Tomando raiz quadrada em ambos os lados, obtemos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

□

**Problema 10.** *De todos os triângulos com um determinado perímetro, encontre aquele com área máxima.*

*Solução.* Consideremos um triângulo  $ABC$  qualquer com seus lados dados pelas medidas,  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ . A Fórmula de Heron (Rezende; Queiroz, 2008, p. 118), a área de  $A$  é dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde  $2s = a + b + c$ . Pela desigualdade da média aritmética-média geométrica (Teorema 3.11) temos:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{3s - 2s}{3} = \frac{s}{3}.$$

Ou ainda,

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}.$$

Logo,

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^4}{27}.$$

onde a igualdade é válida se, e somente se,  $s-a = s-b = s-c$ , ou seja,  $a = b = c$ . Assim, a área  $A$  de qualquer triângulo com perímetro  $2s$  não excede  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  e é igual a  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  apenas para o triângulo equilátero. ♦

A propriedade segundo a qual o triângulo equilátero maximiza a área entre todas as figuras triangulares com perímetro fixo apresenta aplicações significativas em diversos campos que demandam otimização geométrica e racionalização de materiais. Em arquitetura e engenharia, essa característica orienta o desenvolvimento de coberturas, painéis modulares, treliças e malhas estruturais cujo contorno é previamente determinado, permitindo obter a maior área possível a partir de um mesmo comprimento de bordas, reduzindo desperdícios e favorecendo a estabilidade estrutural. No design de produtos, especialmente em embalagens, lonas protetoras e superfícies destinadas a coberturas agrícolas ou logísticas, a forma equilátera assegura melhor aproveitamento do espaço interno, contribuindo para a eficiência operacional e para a economia de insumos. Assim, a adoção dessa geometria mostra-se recorrente em soluções que exigem maximização de área, distribuição equilibrada de esforços e maior eficiência espacial.

**Problema 11.** De todos os tetraedros de volume  $V$  fixado, o tetraedro regular tem a área superficial mínima.

*Solução.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Consideremos o conjunto de pontos  $D$  no espaço tal que volume do tetraedro  $ABCD$  é igual a  $V$ . Sabemos que

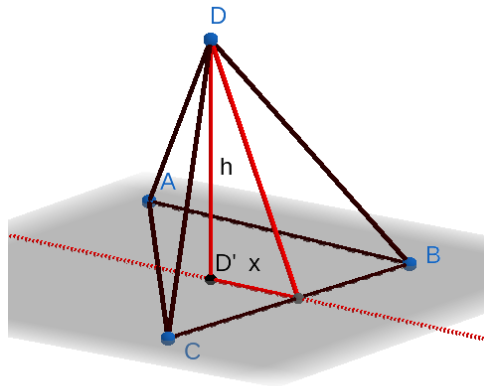
$$V = \frac{1}{3} \text{Área}[ABC] \times h.$$

sendo a  $h$  a altura do tetraedro em relação à base  $ABC$ . Assim, a distância do ponto  $D$  ao plano determinado pelo triângulo  $ABC$  será  $h$  e é dada por  $\frac{3V}{\text{Área}[ABC]}$ . Seja  $D'$  a projeção ortogonal<sup>2</sup> do ponto  $D$  no plano do triângulo  $ABC$ , e  $x, y$  e  $z$  as distâncias de  $D'$  aos lados  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente.

Para a área superficial total  $S$  do tetraedro  $ABCD$  temos (ver Figura 3.24),

$$\begin{aligned} S &= \text{Área}[ABC] + \frac{1}{2}(a\sqrt{h^2 + x^2} + b\sqrt{h^2 + y^2} + c\sqrt{h^2 + z^2}) \\ &= \text{Área}[ABC] + \frac{1}{2}(\sqrt{(ah)^2 + (ax)^2} + \sqrt{(bh)^2 + (by)^2} + \sqrt{(ch)^2 + (cz)^2}). \end{aligned}$$

Figura 3.24: Cálculo da área superficial para o tetraedro.



Fonte: Elaborada pela autora.

Aplicando a desigualdade de Minkowski (Teorema 3.14) obtemos

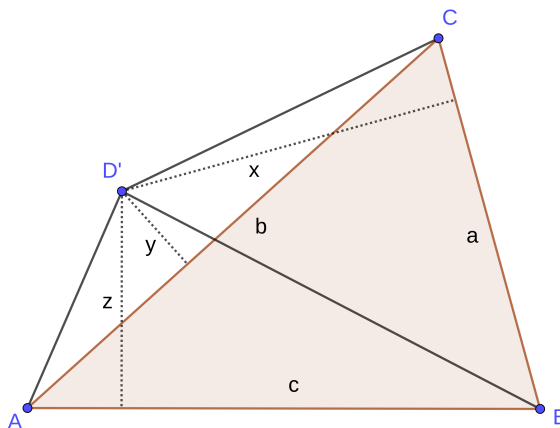
$$S \geq \text{Área}[ABC] + \frac{1}{2} \sqrt{(ah + bh + ch)^2 + (ax + by + cz)^2}.$$

Por outro lado,  $ax + by + cz \geq 2\text{Área}[ABC]$ . De fato, temos os triângulos  $D'BC$ ,  $D'AC$  e  $D'AB$  (Ver Figura 3.25) cujas áreas são  $\frac{1}{2}ax$ ,  $\frac{1}{2}by$  e  $\frac{1}{2}cz$ , respectivamente. É fácil verificar

<sup>2</sup>A projeção ortogonal de um ponto  $P$  do espaço sobre um plano  $\alpha$  é o ponto  $P'$  em que a perpendicular a  $\alpha$  traçada por  $P$  intercepta o plano  $\alpha$  (Neto, 2013, pág. 271).

que  $ax + by + cz \geq 2\text{Área}[ABC]$  sendo que a igualdade é válida apenas se  $D'$  estiver dentro do triângulo  $ABC$ .

Figura 3.25:  $ax + by + cz \geq 2\text{Área}[ABC]$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim,

$$S \geq \text{Área}[ABC] + \frac{1}{2} \sqrt{(ah + bh + ch)^2 + 4\text{Área}[ABC]^2}, \quad (3.9)$$

onde a igualdade é válida quando  $D'$  está no interior do triângulo  $ABC$  e  $x = y = z$ , ou seja, se e somente se  $D'$  é o incentro<sup>3</sup> do triângulo  $ABC$ .

Consideremos agora apenas os tetraedros  $ABCD$  para os quais o ponto  $D'$  coincide com o incentro do triângulo  $ABC$ . Dado um número real  $S_o > 0$  é possível determinar um triângulo  $ABC$  tal que  $\text{Área}[ABC] = S_o$ . Então, substituindo essas condições na relação (3.9) temos

$$S \geq S_o + \sqrt{h^2 s^2 + S_o^2},$$

onde  $s$  é o semiperímetro do triângulo  $ABC$  e  $h = \frac{3V}{S_o}$ . Segue do problema 10 que  $s^2 \geq 3\sqrt{3}S_o$ , sendo que a igualdade é válida apenas para o triângulo equilátero  $ABC$ . Logo,

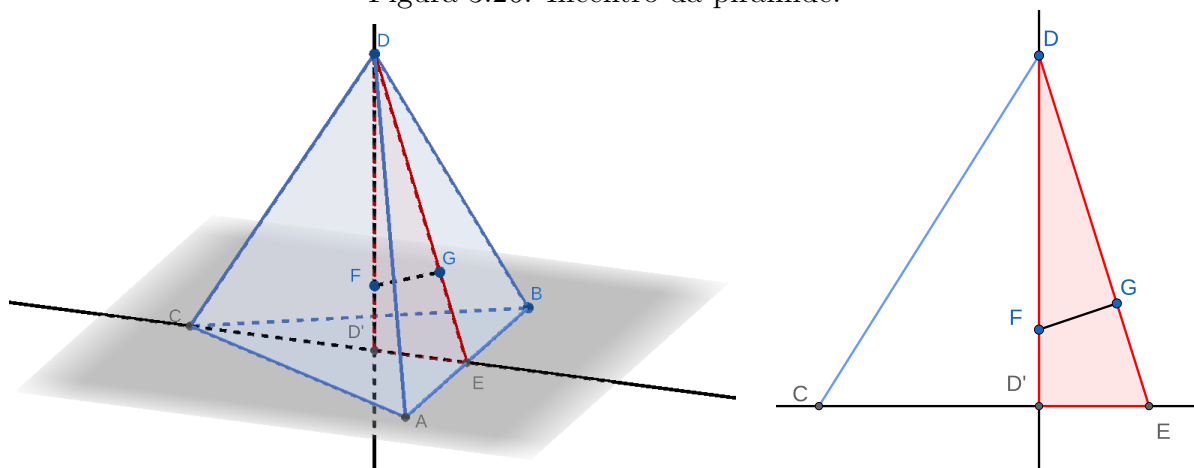
$$S \geq S_o + \sqrt{\frac{9V^2}{S_o^2} 3\sqrt{3}S_o + S_o^2} = S_o + \sqrt{27\sqrt{3}\frac{V^2}{S_o} + S_o^2}.$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, triângulo  $ABC$  for equilátero.

Os argumentos acima mostram que basta considerarmos as pirâmides  $ABCD$  de base dada por triângulo equilátero e volume  $V$ . Assim, consideremos tal pirâmide denotando por  $\alpha$  o ângulo entre uma face lateral e a base da pirâmide. Vamos determinar o valor de  $\alpha$  para o qual a área superficial  $S$  é mínima. Neste caso, seja  $F$  o incentro da pirâmide  $ABCD$  e  $D'$  o incentro do triângulo  $ABC$  conforme mostra a Figura 3.26.

<sup>3</sup>O ponto de encontro das bissetrizes, que é também o centro da circunferência inscrita a um triângulo, é chamado incentro do triângulo. (Rezende; Queiroz, 2008, pág. 94).

Figura 3.26: Incentro da pirâmide.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seguem os seguintes resultados:

- (a) Se  $AB = a$  segue do triângulo  $ABC$  que  $D'E = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ .  
 (b) O segmento  $EF$  é a bissetriz do ângulo  $D'\hat{E}G$ .  
 (c) No triângulo  $D'EF$  temos  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .  
 (d) No triângulo  $DD'E$  temos

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} \left( \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right).$$

- (e) Sabemos ainda que  $3V = hS_o = \frac{ha^2\sqrt{3}}{4}$ .

Como consequência,

$$3V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \left( \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) = \frac{a^3 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))}.$$

Logo,  $a^3 = \frac{12V(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ . Por outro lado, temos

$$r^3 = \frac{a^3}{24\sqrt{3}} \operatorname{tg}^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{24\sqrt{3}} \frac{12V(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \operatorname{tg}^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{V}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Sabemos que  $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$  terá seu valor máximo<sup>4</sup> quando  $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$ . Logo,

$$r^3 \leq \frac{V}{8\sqrt{3}}.$$

onde a igualdade é válida se, e somente se,  $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

Recordando que  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$  segue que  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Aplicando esta condição ao triângulo  $DD'E$  temos que

$$DE = \frac{D'E}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{6}\sqrt{3}}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$DE$  é a altura do triângulo da face lateral  $ABD$  e irá se repetir para as demais faces laterais do tetraedro. Como o triângulo  $ABD$  tem base  $AB = a$  segue que, a aresta lateral  $AD$  terá comprimento

$$AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2.$$

Isso significa que todas as arestas laterais do tetraedro tem comprimento  $a$ , ou seja,  $ABCD$  é um tetraedro regular. ◆

Esse tipo de problema encontra aplicação na engenharia mecânica e na arquitetura, especialmente no desenvolvimento de estruturas que devem manter um volume interno fixo, como embalagens, suportes ou módulos construtivos, permitindo minimizar a quantidade de material empregada na superfície. Em materiais avançados, essa abordagem inspira o uso de modelos baseados em tetraedros regulares em redes cristalinas ou em aerogéis, favorecendo a otimização da resistência mecânica com a menor área exposta possível.

<sup>4</sup>Basta fazer o estudo análogo ao da equação  $x(1-x) = 0$ .

# 4 Princípio da tangência e máximos e mínimos com uso do cálculo diferencial

Quando abordamos problemas de máximo e mínimo na geometria, frequentemente buscamos determinar não apenas pontos ou distâncias extremas, mas também os ângulos de maior ou menor medida possíveis. Para tais análises, é necessário empregar métodos de cálculo diferencial, incluindo o estudo de curvas de nível de funções definidas no plano, assim como análises de crescimento e decréscimo de funções em determinados pontos específicos. Essas técnicas são essenciais para a resolução de problemas de otimização envolvendo outros ângulos, aplicando derivadas para identificar pontos críticos e analisar o comportamento das funções em relação às variáveis envolvidas.

## 4.1 Princípio de tangência

Nesta seção resolveremos problemas geométricos extremos usando curvas de nível de funções definidas no plano.

**Problema 12.** *Seja  $l$  uma reta dada no plano e  $A$  e  $B$  dois pontos do mesmo lado da reta. Encontre um ponto  $M$  em  $l$  tal que o ângulo  $\widehat{AMB}$  seja máximo.*

Para resolver esse problema necessitaremos de alguns resultados preliminares.

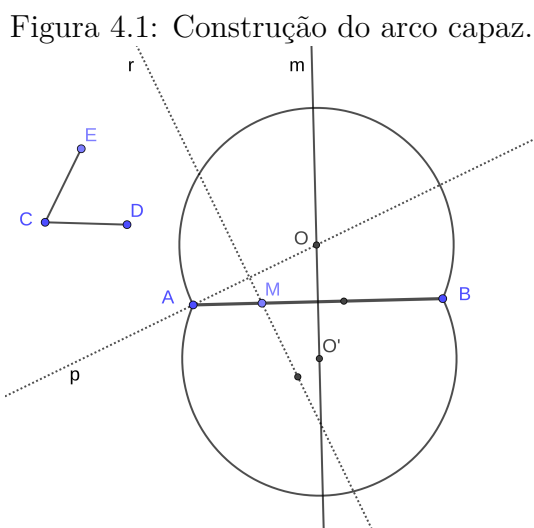
**Exemplo 4.1** (Construção do arco capaz). Dado o segmento  $AB$  e o ângulo  $\widehat{CDE}$ . Determinar o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{CDE})$ .

Consideremos a seguinte construção:

1. Por qualquer ponto  $M$  do segmento  $AB$  copiamos o ângulo dado  $\widehat{CDE}$ .
2. Traçamos por  $M$  a reta  $r$  que faz o ângulo  $\widehat{CDE}$  com o segmento  $AB$ .
3. Traçamos por um dos extremos do segmento  $AB$  a reta perpendicular à reta  $r$ .
4. Traçamos a reta  $m$  mediatriz do segmento  $AB$ .

5. Determinamos o ponto  $O$  que é a intersecção das retas  $m$  e  $r$ .
6. Traçamos o arco de circunferência de centro  $O$  e que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .
7. O ponto simétrico  $O'$  irá determinar o arco de circunferências.

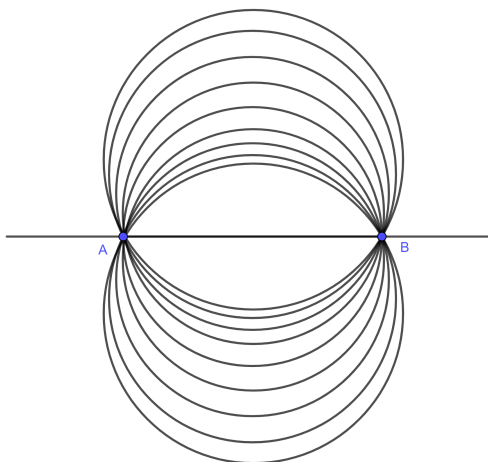
Os dois arcos determinados são lugares geométricos dos pontos do plano que satisfazem as condições do exemplo. Ver Figura 4.1. Para a justificativa da construção ver [Rezende e Queiroz \(2008, p. 132\)](#).



Fonte: Elaborada pela autora.

Um outro resultado importante é que ao variarmos os valores do ângulo  $\varphi$ , obtemos uma família de arcos que cobrem todo o plano, exceto os pontos da reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ . Ver Figura 4.2.

Figura 4.2: Lugares geométricos para diferentes valores de  $\varphi$ .

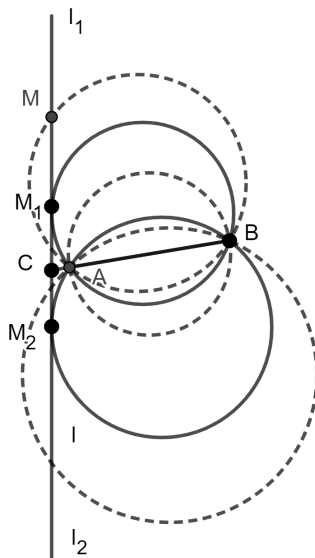


Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos agora para a solução do Problema 12.

*Solução.* Primeiramente, consideremos o caso que a reta  $l$  intercepta a reta  $AB$ . Seja  $C$  o ponto de intersecção, e sejam  $l_1$  e  $l_2$  as duas semirretas determinadas por  $C$  na reta  $l$ . Consideremos o arco  $\gamma_1$  da família de arcos descrita anteriormente que é tangente a semirreta  $l_1$  com  $M_1$  o ponto de tangência de  $\gamma_1$  com  $l_1$ , conforme mostra a Figura 4.3.

Figura 4.3: Construção para o problema 12.



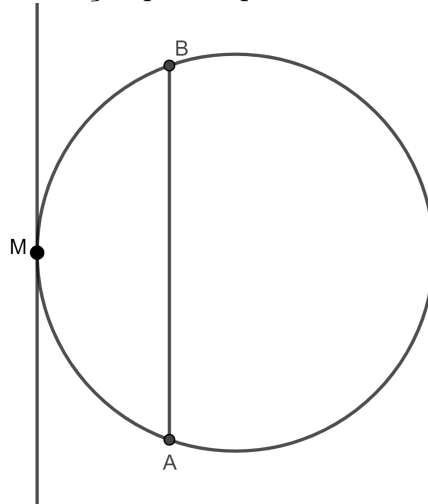
Fonte: Elaborada pela autora.

Claramente  $\gamma_1$  é um arco no menor círculo que passa por  $A$  e  $B$  que tem um ponto comum com o ponto  $l_1$ . Assim, para qualquer ponto  $M$  em  $l_1$  diferente de  $M_1$  temos  $m(\widehat{AMB}) < m(\widehat{AM_1B})$ . Analogamente, a semirreta  $l_2$  é tangente a algum arco  $\gamma_2$  em algum ponto  $M_2$  e  $m(\widehat{AMB}) < m(\widehat{AM_2B})$  para qualquer ponto  $M$  em  $l_2$  diferente de  $M_2$ .

A solução é dada por  $M_1$  ou  $M_2$  (ou ambos), dependendo de qual dos ângulos  $\widehat{ACM_1}$  e  $\widehat{ACM_2}$  é agudo. Observamos que os pontos  $M_1$  e  $M_2$  são determinados pelas igualdades  $CM_1 = CM_2 = \sqrt{CA \cdot CB}$  tratadas aqui como retas secantes ou tangentes.

Se a reta  $l$  for paralela a  $AB$ , então existe apenas um arco da família descrita acima que é tangente a  $l$ . Nesse caso, a solução é dada pelo ponto de intersecção  $M$  em  $l$  pela bissetriz perpendicular do segmento de reta  $AB$ . Ver Figura 4.4.

Figura 4.4: Construção para o problema 12 - caso tangente.



Fonte: Elaborada pela autora.

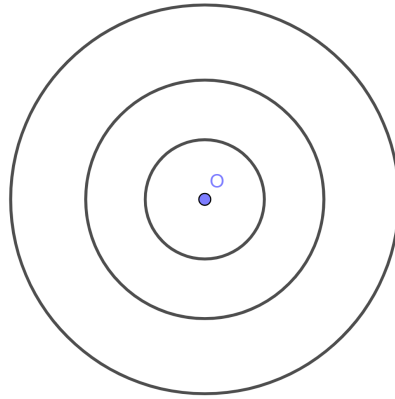


Destacamos os pontos mais importantes na solução do Problema 12:

1. Investigamos o comportamento do ângulo  $\widehat{AMB}$  não apenas para pontos  $M$  ligados em  $l$ , mas também para pontos externos de  $l$ . Isto é, consideramos o ângulo  $\widehat{AMB}$  como uma função  $f(M) = \widehat{AMB}$  do ponto variável  $M$  no plano.
2. Observamos o comportamento da função  $f$ . Isso foi feito por meio dos arcos nos quais os valores de  $f$  eram iguais. Essas curvas podem ser definidas para qualquer função  $f$  dependendo de um ponto  $M$  no plano (ou parte dele), e são chamadas de curvas de nível de  $f$ . Isto é, se  $\lambda$  for qualquer número real, a curva de nível de  $f$  correspondente a  $\lambda$  é o conjunto  $L_\lambda$  de todos os pontos  $M$  no domínio de  $f$  tal que  $f(M) = \lambda$ , ou seja,  $L_\lambda = \{M : f(M) = \lambda\}$ .

Vejamos a seguir alguns exemplos de funções e suas curvas de níveis.

**Exemplo 4.2.** Seja  $O$  um ponto fixo no plano e seja  $f$  dada por  $f(M) = OM$  ( $f$  é a função que a todo ponto  $M$  do plano associa a medida do comprimento do segmento  $OM$ ). Então, para  $r > 0$  a curva de nível  $L_r$  é uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . Ver Figura 4.5.

Figura 4.5: Curvas de níveis para a função  $f(M) = OM$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 4.3.** Sejam  $A$  e  $B$  pontos fixos no plano e a função  $f$  definida por  $f(M) = MA^2 + MB^2$ , para todo ponto  $M$  ( $f$  é a função que a todo ponto  $M$  do plano associa a soma dos quadrados das medidas dos segmentos  $MA$  e  $MB$ ). Para descrevermos as curvas de nível consideremos as coordenadas dos pontos  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $M = (x, y)$ . Assim,

$$f(M) = MA^2 + MB^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2.$$

Expandindo e agrupando os termos:

$$f(M) = 2x^2 - 2x(x_A + x_B) + x_A^2 + x_B^2 + 2y^2 - 2y(y_A + y_B) + y_A^2 + y_B^2.$$

Ou ainda,

$$f(M) = 2(x^2 + y^2) - 2x(x_A + x_B) - 2y(y_A + y_B) + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2).$$

Lembrando que as coordenadas do ponto médio  $O$  do segmento  $AB$  é dada por  $O = (x_O, y_O) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ , reescrevemos

$$f(M) = 2(x^2 + y^2) - 4x \cdot x_O - 4y \cdot y_O + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2).$$

Completando quadrados segue que

$$\begin{aligned} f(M) &= 2 \left[ (x^2 - 2x \cdot x_O + x_O^2) - x_O^2 + (y^2 - 2y \cdot y_O + y_O^2) - y_O^2 \right] + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2) \\ &= 2 \left[ (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 - x_O^2 - y_O^2 \right] + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2). \end{aligned}$$

Isto é,

$$f(M) = 2 \cdot MO^2 - 2(x_O^2 + y_O^2) + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2). \quad (4.1)$$

Verificamos ainda que

$$OA^2 = (x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 = x_O^2 + x_A^2 - 2x_Ox_A + y_O^2 + y_A^2 - 2y_Oy_A$$

e

$$OB^2 = (x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2 = x_O^2 + x_B^2 - 2x_Ox_B + y_O^2 + y_B^2 - 2y_Oy_B.$$

Segue então que

$$OA^2 + OB^2 = 2(x_O^2 + y_O^2) + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2) - 2x_O(x_A + x_B) - 2y_O(y_A + y_B).$$

Isto é,

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= 2(x_O^2 + y_O^2) + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2) - 4x_O^2 - 4y_O^2 \\ &= -2(x_O^2 + y_O^2) + (x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2). \end{aligned}$$

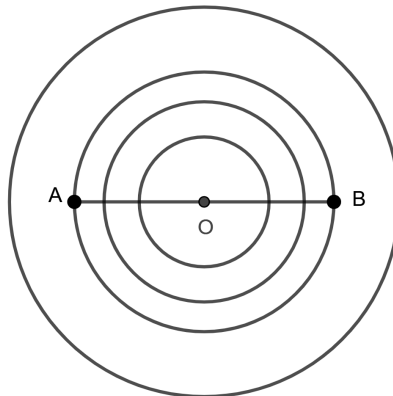
Substituindo em (4.1) temos

$$f(M) = 2.MO^2 + OA^2 + OB^2.$$

Assim, os pontos  $M$  para os quais  $f(M) = r > \frac{1}{2}AB$  serão aqueles que  $MO$  é constante.

Logo,  $M$  está em uma circunferência de centro  $O$  e raio  $MO = \sqrt{\frac{r - OA^2 - OB^2}{2}}$ . Ver Figura 4.6.

Figura 4.6: Curvas de níveis para a função  $f(M) = MA^2 + MB^2$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 4.4.** Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos fixos no plano e seja  $f(M) = MA^2 - MB^2$ . Então as curvas de nível de  $f(M)$  são retas perpendiculares a reta  $AB$ .

De fato, sejam  $M$  um ponto qualquer do plano. Seja  $P$  o pé da perpendicular pelo ponto  $M$  sobre a reta  $AB$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras para os triângulos  $MPA$  e

$MPB$  temos

$$MA^2 = MP^2 + AP^2 \quad (4.2)$$

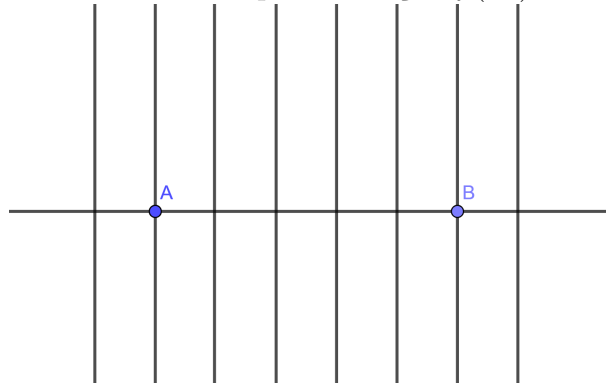
$$MB^2 = MP^2 + BP^2 \quad (4.3)$$

Subtraindo a Equação (4.2) da Equação (4.3) obtemos

$$MA^2 - MB^2 = AP^2 - BP^2.$$

Logo, fixado  $r \in \mathbb{R}$ , os pontos  $M$  para os quais  $f(M) = r$  estão sobre uma reta perpendicular a reta  $AB$ . Ver Figura 4.7.

Figura 4.7: Curvas de níveis para a função  $f(M) = MA^2 - MB^2$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Os Exemplos 4.3 e 4.4 são casos especiais de um resultado mais geral.

**Teorema 4.5.** *Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , números reais e sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , pontos dados no plano. Consideremos a função,*

$$f(M) = \lambda_1 MA_1^2 + \lambda_2 MA_2^2 + \dots + \lambda_n MA_n^2$$

*e denotamos por  $L_\mu$  a curva de nível de  $f(M)$  correspondente ao número real  $\mu$ . Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$ , então  $L_\mu$  é um círculo, um ponto ou o conjunto vazio.*
2. *Se  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , então  $L_\mu$  é uma reta, ou plano inteiro ou o conjunto vazio.*

*Demonstração.* Consideremos um sistema de coordenadas retangulares arbitrário  $Oxy$  no plano, e sejam  $M = (x, y)$  e  $A_i = (x_i, y_i)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Então,  $M \in L_\mu$ , se e somente se,

$$\lambda_1[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] + \dots + \lambda_n[(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2] = \mu$$

Fazendo a expansão obtemos

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x^2 - 2(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n)x - 2(\lambda_1y_1 + \cdots + \lambda_ny_n)y \\ & + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)y^2 + \lambda_1(x_1^2 + y_1^2) + \cdots + \lambda_n(x_n^2 + y_n^2) = \mu \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definimos

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \\ \alpha &= \lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n, \\ \beta &= \lambda_1y_1 + \cdots + \lambda_ny_n, \\ \gamma &= \lambda_1(x_1^2 + y_1^2) + \cdots + \lambda_n(x_n^2 + y_n^2) - \mu. \end{aligned}$$

Substituindo na Equação (4.4) obtemos

$$\lambda x^2 - 2\alpha x + \lambda y^2 - 2\beta y + \gamma = 0. \quad (4.5)$$

Se  $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$ , então, completando quadrados, temos

$$\lambda \left( x^2 - 2\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \right) - \frac{\alpha^2}{\lambda} + \lambda \left( y^2 - 2\frac{\beta}{\lambda}y + \frac{\beta^2}{\lambda^2} \right) - \frac{\beta^2}{\lambda} + \gamma = 0.$$

e a Equação (4.5) é equivalente a

$$\left( x - \frac{\alpha}{\lambda} \right)^2 + \left( y - \frac{\beta}{\lambda} \right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \lambda\gamma}{\lambda^2}. \quad (4.6)$$

Esta equação define:

- (a) uma circunferência de centro  $O = \left( \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right)$  e raio  $\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \lambda\gamma}}{|\lambda|}$  se  $\alpha^2 + \beta^2 - \lambda\gamma > 0$ ;
- (b) o ponto  $O = \left( \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right)$ , se  $\alpha^2 + \beta^2 - \lambda\gamma = 0$ ;
- (c) o conjunto vazio se  $\alpha^2 + \beta^2 - \lambda\gamma < 0$ .

Se  $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ , então a Equação 4.5 é reescrita como  $-2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$  e define

- (a) uma reta se  $\alpha$  e  $\beta$  não são simultaneamente nulos,
- (b) todo o plano se  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , e
- (c) o conjunto vazio se  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma \neq 0$ .

□

**Problema 13.** Determinar os pontos  $M$  na circunferência circunscrita a um triângulo  $ABC$  tal que a soma  $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$  é:

(a) um mínimo

(b) um máximo

Para a solução deste problema necessitaremos de alguns resultados e definições.

**Definição 4.6.** O circuncentro é definido como o centro da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$  e é determinado a partir da intersecção das três mediatrizes associadas aos lados deste triângulo.

**Exemplo 4.7.** Sejam os pontos  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  e  $C = (x_3, y_3)$  vértices de um triângulo no plano e  $\mu$  um determinado número. Seja

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Pelo Teorema 4.5, a curva de nível  $L_\mu$  da função  $f$  será:

- (a) um círculo com centro  $G = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$  se  $2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) - \mu > 0$ ,
- (b) o ponto  $G = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$  se  $2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) - \mu = 0$ , ou
- (c) o conjunto vazio se  $2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) - \mu < 0$ .

No caso da função  $f$ , só faz sentido  $\mu > 0$  pois  $f$  é a soma de quadrados e assim, maior ou igual a 0 (será o ponto  $G$ ). Portanto, para  $\mu > 0$  a curva de nível  $L_\mu$  será uma circunferência de centro  $G$ .

No Exemplo 4.7, o ponto  $G = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$  é denominado centroide ou baricentro do triângulo  $ABC$ . Geometricamente, o centroide de um triângulo é determinado pelo ponto de intersecção de suas medianas.

Vemos que vários problemas geométricos que tratam de extremos no plano podem ser enunciados da seguinte forma: determinar o valor máximo (ou mínimo) de uma função  $f$  no plano ao longo de uma dada curva plana  $L$ . Na solução do Problema 12 mostramos que o valor máximo da função  $f(M) = A\widehat{M}B$  ao longo da reta  $l$  é atingido nos pontos onde  $l$  é a tangente a uma curva de nível da função  $f$ . De forma mais geral, temos o seguinte:

**Teorema 4.8** (Princípio da tangência). *O valor máximo (mínimo) de uma dada função  $f$  definida em pontos do plano euclidiano ao longo de uma dada curva  $L$  é atingido em pontos onde a curva  $L$  é tangente a uma curva de nível de  $f$ .*

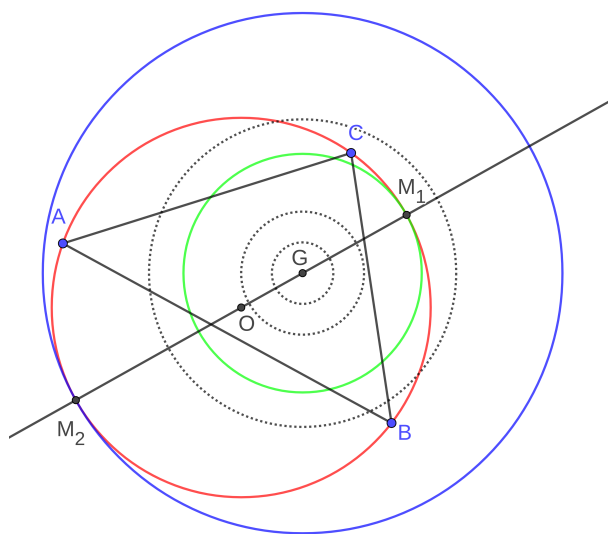
*Demonstração.* De fato, seja a função  $f$  definida no plano euclidiano. Suponhamos que  $f$  atinge seu valor máximo (mínimo) ao longo do conjunto de pontos  $L$  em algum ponto  $P \in L$  e que  $f(P) = c$ . Então, a curva  $L$  não terá pontos comuns com o conjunto  $\{M : f(M) > c\}$  e estará inteiramente contida no conjunto  $\{M : f(M) \leq c\}$ . Assim,  $L$  não pode cruzar a curva de nível  $L_c = \{M : f(M) = c\}$  em  $P$ , ou seja,  $L$  deve ser tangente a  $L_c$  em  $P$ .  $\square$

De posse desses resultados podemos tratar da solução do Problema 13.

*Solução.* Mostramos no Exemplo 4.7 que para qualquer  $\lambda > 0$  a curva de nível  $L_\lambda$  de  $f$  é um círculo com centro no centroide  $G$  do triângulo  $ABC$ . Seja  $O$  o circuncentro do triângulo  $ABC$ . Se o triângulo  $ABC$  não é equilátero, então  $O \neq G$ , e a reta  $OG$  está bem definida (é chamada reta de Euler para triângulo  $ABC$ . (Neto, 2013, p. 171)).

Sejam os pontos  $M_1$  e  $M_2$  a intersecção da reta definida por  $O$  e  $G$  com a circunferência circunscrita do triângulo  $ABC$ . Assim,  $M_1$  e  $M_2$  são os pontos onde uma de duas curvas de níveis de  $f(M)$  que são tangentes, internamente e externamente, a circunferência circunscrita do triângulo  $ABC$ . Ver Figura 4.8.

Figura 4.8: Construção da solução do Problema 13



Fonte: Elaborada pela autora.

Suponhamos que o ponto  $G$  esteja entre  $O$  e  $M_1$  (ver Figura 4.8). O princípio de tangência, afirma que  $f$  tem um mínimo em  $M = M_1$  e um máximo em  $M = M_2$ .

Se  $ABC$  é um triângulo equilátero, então  $G = O$  e o próprio círculo circunscrito é uma curva de nível de  $f$ , ou seja,  $f$  é constante nele.  $\blacklozenge$

No Problema 13, o máximo e o mínimo de  $f$  são facilmente determinados usando a Fórmula de Leibniz que demonstraremos a seguir.

**Teorema 4.9** (Fórmula de Leibniz). *Seja  $G$  o baricentro de um triângulo  $ABC$ . Então, para qualquer ponto  $M$  do plano temos*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \quad (4.7)$$

*Demonstração.* De fato, consideremos os vértices do triângulo  $ABC$  dados por  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  e  $C = (x_3, y_3)$ . Substituindo  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  nas expressões do Teorema 4.5 teremos

$$\lambda = 3, \quad (4.8)$$

$$\alpha = x_1 + x_2 + x_3, \quad (4.9)$$

$$\beta = y_1 + y_2 + y_3, \quad (4.10)$$

$$\gamma = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - \mu. \quad (4.11)$$

Substituindo a Equação (4.8) na Equação (4.6) obtemos

$$\left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{3}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 3\gamma}{9}. \quad (4.12)$$

Como  $G = \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$  segue que

$$MG^2 = \left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{3}\right)^2. \quad (4.13)$$

Além disso,

$$GA^2 = \left(x_1 - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{\beta}{3}\right)^2 = x_1^2 - \frac{2}{3}\alpha x_1 + \frac{\alpha^2}{9} + y_1^2 - \frac{2}{3}\beta y_1 + \frac{\beta^2}{9},$$

$$GB^2 = \left(x_2 - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{\beta}{3}\right)^2 = x_2^2 - \frac{2}{3}\alpha x_2 + \frac{\alpha^2}{9} + y_2^2 - \frac{2}{3}\beta y_2 + \frac{\beta^2}{9},$$

$$GC^2 = \left(x_3 - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{\beta}{3}\right)^2 = x_3^2 - \frac{2}{3}\alpha x_3 + \frac{\alpha^2}{9} + y_3^2 - \frac{2}{3}\beta y_3 + \frac{\beta^2}{9}.$$

Somando todas as equações obtemos

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{2}{3}\alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{\alpha^2}{3} - \frac{2}{3}\beta(y_1 + y_2 + y_3) + \frac{\beta^2}{3}$$

e substituindo as Equações (4.9), (4.10) e (4.11) segue que

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \gamma + \mu - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\beta^2}{3} = \mu - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 - 3\gamma). \quad (4.14)$$

Substituindo as expressões (4.13) e (4.14) em (4.12) obtemos

$$MG^2 = \frac{1}{3} (\mu - GA^2 - GB^2 - GC^2),$$

ou seja,

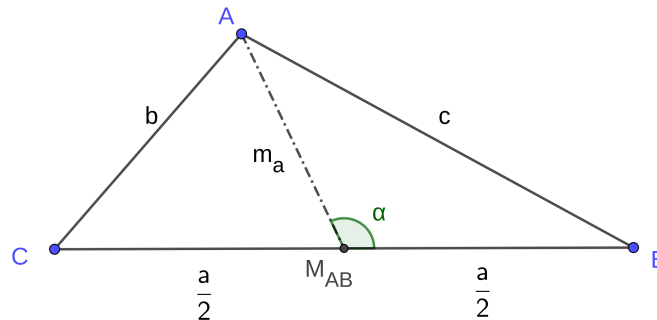
$$\mu = f(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \quad (4.15)$$

□

**Exemplo 4.10.** Determinar os valores para a função  $f$  do Problema 13 para os valores de máximo e mínimo.

Inicialmente, relembramos que o comprimento da mediana referente a um dos lados do triângulo é a distância de cada vértice ao ponto médio do respectivo lado oposto. Ver Figura 4.9.

Figura 4.9: Mediana em função dos lados de um triângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Aplicando a lei dos cossenos seguem as relações

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a \frac{a}{2} \cos \alpha = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - m_a a \cos \alpha$$

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a \frac{a}{2} \cos(180^\circ - \alpha) = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + m_a a \cos \alpha.$$

Somando as expressões temos

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Por outro lado, sabemos que  $GA = \frac{2}{3}m_a$ . Assim,

$$GA = \frac{1}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Analogamente, para os demais vértices temos

$$GB = \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

e

$$GC = \frac{1}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

E assim,

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Logo, substituindo na Equação (4.15) temos

$$f(M) = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Para determinarmos o valor da função  $f$  em seus pontos de máximo e mínimo lembremos que o quadrado da distância entre o baricentro e o circuncentro ao longo da reta de Euler é dado, em termos dos lados do triângulo e do raio circunscrito por (Altshiller-Court, 2007, p. 71)

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Assim, para o ponto  $M_1$  de mínimo temos que

$$f(M_1) = 3M_1G^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Como  $OM_1 = OG + GM_1 = R$  ( $G$  e  $O$  estão na reta  $M_1M_2$ ) segue que

$$f(M_1) = 3(R - OG)^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ou seja,

$$f(M_1) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \left[ R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}} \right]^2$$

Analogamente, para o ponto  $M_2$  de máximo temos que

$$f(M_2) = 3M_2G^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Como  $GM_2 = OG + OM_2 = OG + R$  segue que

$$f(M_2) = 3(OG + R)^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ou seja,

$$f(M_2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \left[ R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}} \right]^2$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  os comprimentos dos lados do triângulo  $ABC$  e  $R$  seu circunraio<sup>1</sup>. Observamos

<sup>1</sup>Circunraio ( $R$ ) de um triângulo é o raio da circunferência circunscrita, ou seja, a circunferência que passa pelos três vértices do triângulo.

que a raiz quadrada irá impor a condição  $a^2 + b^2 + c^2 < 9R^2$ .

Em projetos de telhados triangulares, rampas ou outras estruturas geométricas análogas, o princípio de minimização associado ao circuncentro permite otimizar a posição de suportes centrais, reduzindo o somatório dos quadrados das distâncias aos vértices e assegurando maior estabilidade e eficiência no uso de materiais. Na construção civil, essa abordagem também orienta o dimensionamento de elementos como janelas triangulares ou coberturas inclinadas, nos quais a distribuição equilibrada das forças se beneficia da simetria circular inerente à configuração.

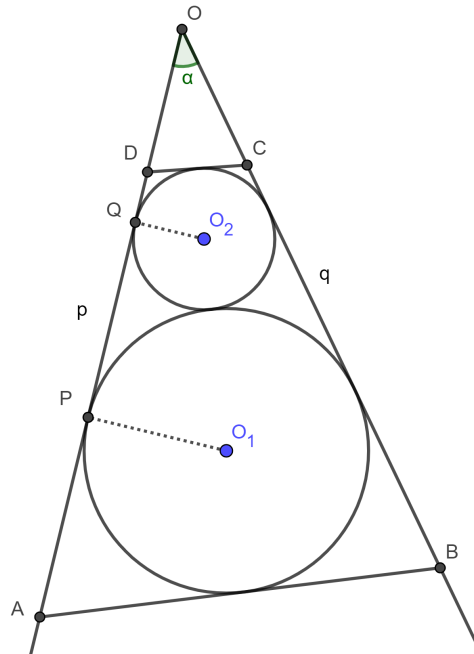
No âmbito do design e da navegação, conceitos análogos são empregados em pistas circulares, jardins triangulares e sistemas de organização urbana, nos quais a determinação de posições periféricas maximiza a cobertura e a visibilidade, como na sinalização viária e no planejamento espacial. Em tecnologias de navegação e GPS, algoritmos que buscam minimizar a soma dos quadrados das distâncias a pontos de referência aproximam-se do uso teórico do circuncentro, contribuindo para trajetórias mais eficientes e precisas.

## 4.2 Máximos e mínimos com uso do cálculo diferencial

Em determinados problemas de geometria, é frequentemente possível resolvê-los por meio da aplicação do cálculo diferencial, cujo conhecimento prévio é pressuposto. Nesta seção, serão apresentados dois problemas que ilustram esse procedimento.

**Problema 14.** *Dois círculos externamente tangentes estão inscritos em um determinado ângulo  $p\hat{O}q$ , conforme mostra a Figura 4.10.*

Figura 4.10: Construção da solução do Problema 14.



Fonte: Elaborada pela autora.

Determine os pontos  $A$  e  $D$  na semirreta  $p$  e  $B$  e  $C$  na semirreta  $q$ , tais que  $AB$  e  $CD$  sejam paralelos, o quadrilátero  $ABCD$  contenha os dois círculos e o segmento de reta  $AD$  tenha comprimento mínimo.

*Solução.* Sejam os círculos de centros  $O_1$  e  $O_2$  de raios  $R$  e  $r$ ,  $r < R$  números positivos, respectivamente, como mostra a Figura 4.10.

Podemos supor que  $AB$  é tangente ao círculo de raio  $R$  e  $DC$  tangente ao círculo de  $r$ . Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos tangentes dos dois círculos com  $AD$ , onde  $P$  está em  $A$  e  $Q$ . Denotaremos por  $x = DQ$ . Iremos agora determinar  $AD$  em função  $x$ . Como  $O_1O_2 = R + r$ , do trapézio retângulo  $PO_1O_2Q$  temos

$$(R + r)^2 = PQ^2 + (R - r)^2 \Leftrightarrow PQ^2 = (R^2 + 2Rr + r^2) - (R^2 - 2Rr + r^2).$$

Segue então que  $PQ = 2\sqrt{Rr}$ .

Por outro lado,  $P\hat{A}O_1 = \frac{1}{2}P\hat{A}B = \frac{1}{2}(180^\circ - Q\hat{D}C) = 90^\circ - Q\hat{D}O_2 = Q\hat{O}_2D$ . Então, o triângulo  $AO_1P$  é semelhante ao triângulo  $O_2DQ$ . Consequentemente,  $\frac{R}{PA} = \frac{x}{r}$ , ou seja,  $PA = \frac{Rr}{x}$ . Isso implica que  $AD = f(x) + 2\sqrt{Rr}$  com  $f(x) = x + \frac{Rr}{x}$ .

Vamos determinar o mínimo de  $f$  no intervalo  $0 < x < x_o = QO$ .

Observamos que os triângulos  $PO_1O$  e  $QO_2O$  são semelhantes. Isso implica que  $x_o = \frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr}$ . Temos  $f'(x) = 1 - \frac{Rr}{x^2}$  e, portanto,  $f(x)$  é estritamente decrescente para  $x \in (0, \sqrt{Rr})$  e estritamente crescente para  $x \in (\sqrt{Rr}, \infty)$ . Observamos também que

$x_o \leq \sqrt{Rr}$  é equivalente a  $3r \leq R$ , que por sua vez é equivalente a  $\alpha = m(\widehat{AOB}) \geq 60^\circ$ .

Seguem então os casos:

- (a)  $3r \leq R$  (ou seja,  $\alpha \geq 60^\circ$ ). Então,  $x_o \leq \sqrt{Rr}$  e  $f$  é estritamente decrescente em  $(0, x_o)$ , ou seja,  $f$  não tem mínimo no intervalo  $(0, x_o)$ . Em outras palavras, quando  $3r \leq R$  o problema não tem solução.
- (b)  $3r > R$  (ou seja,  $\alpha < 60^\circ$ ). Então,  $\sqrt{Rr} < x_o$  e claramente no intervalo  $(0, x_o)$ ,  $f$  tem um mínimo em  $x = \sqrt{Rr}$ . Portanto, o comprimento mínimo de  $AD$  é  $4\sqrt{Rr}$ . A construção do trapézio  $ABCD$  pode ser feita encontrando primeiro o ponto  $D$  em  $QO$  tal que  $QD = \sqrt{Rr}$ . Depois disso, a construção dos pontos  $A, B$  e  $C$  são mais simples.

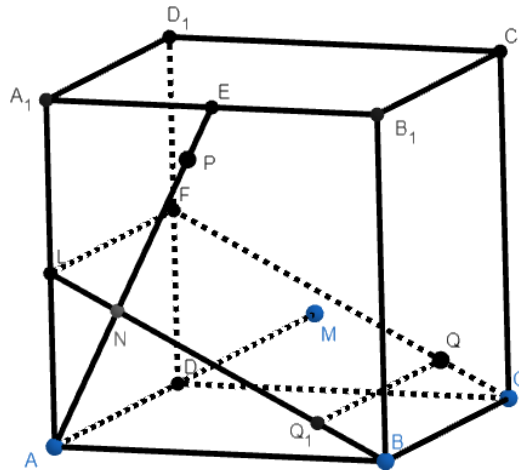


No contexto da otimização, pode-se observar que, em engrenagens ou mecanismos que apresentam cantos definidos, os círculos tangentes inscritos em um ângulo permitem determinar posições ideais para rolamentos e polias, contribuindo para a redução de atrito em configurações mecânicas de ângulo fixo, como em bicicletas e máquinas industriais. A definição precisa do raio garante a tangência adequada, sendo um princípio aplicado também na manutenção automotiva, na qual o alinhamento de componentes montados em suportes angulares exige ajuste geométrico rigoroso.

Na arquitetura e no design, a utilização de círculos tangentes em cantos orienta o dimensionamento de arcos, janelas e tetos angulares, favorecendo a distribuição uniforme de esforços e o emprego mais eficiente de materiais. Em ambientes de design gráfico e modelagem AutoCAD, essa geometria é empregada na simulação de sombras, curvas de transição e no desenvolvimento de protótipos de móveis com encaixes angulares, garantindo estética e funcionalidade.

**Problema 15.** *O comprimento da aresta de um cubo  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  é 1. Um ponto  $M$  é escolhido na extensão da aresta  $AD$  tal que  $D$  está entre  $A$  e  $M$  e  $AM = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$ . Seja  $E$  o ponto médio de  $A_1 B_1$  e  $F$  o ponto médio de  $DD_1$ , conforme mostra a Figura 4.11.*

Figura 4.11: Construção da solução do Problema 15.



Fonte: Elaborada pela autora.

Qual é o valor máximo possível da razão  $\frac{MP}{PQ}$  onde  $P$  é um ponto em  $AE$ , enquanto  $Q$  é um ponto em  $CF$ ?

*Solução.* Sejam  $L$  o ponto médio de  $AA_1$ , então  $BLFC$  é um retângulo (lembrando que, por hipótese  $F$  é ponto médio de  $DD_1$ ). Ver Figura 4.11.

Para o ponto de intersecção  $N$  de  $AE$  e  $BL$  temos que os triângulos  $ANL$  e  $AA_1E$  são semelhantes pelo caso  $AAA$ , o que garante

$$\frac{1}{AN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} AN = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AN = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Consideremos agora os pontos arbitrários  $P$  e  $Q$  nos segmentos de reta  $AE$  e  $CF$ , respectivamente. Seja  $Q_1$  o ponto em  $BL$  tal que  $QQ_1$  é paralelo a  $BC$ . Sejam  $x = AP - AN$  e  $y = NQ_1$ . Temos então

$$(PQ_1)^2 = x^2 + y^2 = (PQ_1)^2 + (QQ_1)^2 = 1 + x^2 + y^2$$

e

$$(MP)^2 = (AM)^2 + (AP)^2 = \left(2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + x\right)^2 = \frac{9}{5} + \frac{2x}{\sqrt{5}} + x^2.$$

Logo,

$$\frac{(MP)^2}{(PQ)^2} = \frac{\frac{9}{5} + \frac{2x}{\sqrt{5}} + x^2}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{\frac{9}{5} + \frac{2x}{\sqrt{5}} + x^2}{1 + x^2}$$

A igualdade é válida se, e somente se,  $y = 0$ , ou seja, quando  $QN$  for paralelo a  $BC$ .

Claramente este último determina a posição de  $Q$ . Como  $AN = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $AE = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , para  $x = AP - AN$  temos que  $x \in \Delta = \left[ \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}} \right]$ . Resta determinarmos o máximo de

$$f(x) = \frac{\frac{9}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x + x^2}{1 + x^2}.$$

quando  $x \in \Delta$ . Para a função  $f$  temos que a sua derivada é dada por:

$$f'(x) = \frac{\left( \frac{2}{\sqrt{5}} + 2x \right) (1 + x^2) - 2x \left( \frac{9}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x + x^2 \right)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5} - 4x - \sqrt{5}x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\sqrt{5}x^2 - 4x + \sqrt{5} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Assim, a derivada de  $f$  se anula nos pontos  $x = -\sqrt{5}$  e  $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Analisando o sinal da derivada de  $f$  temos que,  $f$  é estritamente crescente no intervalo  $\left( -\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$ , e estritamente decrescente em  $(-\infty, -\sqrt{5})$  e  $\left( \frac{\sqrt{5}}{5}, +\infty \right)$ . Deste modo,  $f$  tem um máximo no ponto  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  com  $f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 2$ . Portanto, o valor máximo de  $\frac{MP}{PQ}$  é  $\sqrt{2}$  e é alcançado quando  $NQ$  for paralelo a  $BC$  e  $AP = 2AN = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .  $\blacklozenge$

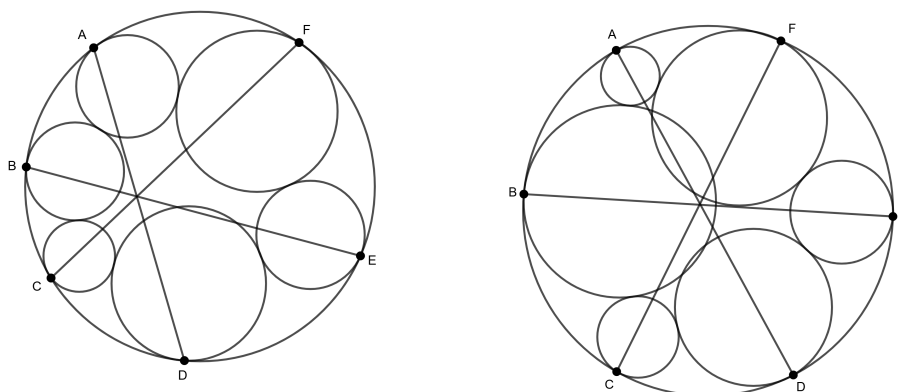
## 5 Teorema de seis círculos

Dado um triângulo arbitrário, questiona-se: quantos círculos inscritos podem ser determinados, considerando que cada círculo seja tangente a um dos lados do triângulo e ao círculo imediatamente anterior na sequência? Para a resolução deste problema, faz-se necessário, preliminarmente, compreender o conceito de cadeia de círculos e suas propriedades características.

### 5.1 Cadeia de círculos

Considere um círculo qualquer e trace seis círculos internamente ao primeiro círculo tais que, cada um dos seis círculos é internamente tangente ao círculo original e tangente entre si em pares. Sejam  $A, B, C, D, E$  e  $F$  os pontos consecutivos de tangência dos círculos pequenos com o círculo externo. O seguinte resultado é verdadeiro: dos sete círculos, não importando quais tamanhos escolhermos para os setes círculos (estando apenas sujeitos a certas restrições de ordem e tangência), os segmentos  $AD, BE$  e  $CF$  se interceptam em um ponto. Dois exemplos deste resultados são ilustrados na Figura 5.1.

Figura 5.1: Exemplos para o Teorema dos sete círculos.



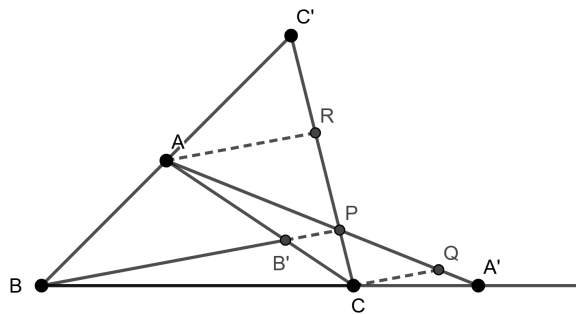
Fonte: Elaborada pela autora.

Para demonstrarmos que as três retas concorrentes se encontram em um único ponto, começamos relembando o que é conhecido sobre três retas concorrentes. Vários resultados

mostram que três retas concorrentes em um triângulo já eram conhecidos pelos geômetras, tais como Heron de Alexandria e Arquimedes. Eles sabiam que as medianas e as alturas de um triângulo são concorrentes. No entanto, foi somente em 1678 que Giovanni Ceva enunciou as condições sobre tais retas. Uma reta que liga um vértice de um triângulo até um ponto no lado oposto é chamada de ceviana.

**Teorema 5.1** (Ceva). *Dado um triângulo qualquer  $ABC$  e pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  localizados sobre as retas suportes dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Ver Figura 5.2.*

Figura 5.2: Teorema de Ceva (enunciado).



Fonte: Elaborada pela autora.

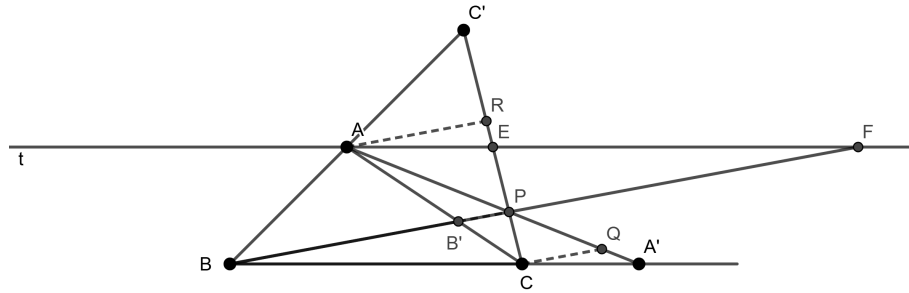
Então,

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \quad (5.1)$$

se, e somente se, as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  forem concorrentes.

*Demonstração.*  $[\Rightarrow]$  Suponhamos (conforme a Figura 5.2) que os pontos  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{BA}$  são tais que as  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  concorrem em um ponto  $P$ . Sejam os pontos  $Q \in \overleftrightarrow{AA'}$  e  $R \in \overleftrightarrow{CC'}$  tais que  $\overleftrightarrow{CQ}$ ,  $\overleftrightarrow{AR}$  são paralelos a  $\overleftrightarrow{BP}$ . Traçamos a reta  $t$  no ponto  $A$  paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  (conforme a Figura 5.3).

Figura 5.3: Teorema de Ceva (demonstração).



Fonte: Elaborada pela autora.

Sejam os pontos  $E$  e  $F$  da intersecção das retas  $t$  com  $\overleftrightarrow{CC'}$  e  $\overleftrightarrow{BP}$ , respectivamente. Verificamos que:

- (a) O triângulo  $AC'E$  é semelhante ao triângulo  $BCC'$  pelo caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo), pois  $m(\widehat{AC'E}) = m(\widehat{BCC'})$  e  $m(\widehat{C'CE}) = m(\widehat{EAC'})$ . Segue que

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AE}{BC}. \quad (5.2)$$

- (b) O triângulo  $BCB'$  é semelhante ao triângulo  $FAB'$  pelo caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo), pois  $m(\widehat{BFA}) = m(\widehat{CBB'})$  e  $m(\widehat{BB'C}) = m(\widehat{AB'F})$ . Logo,

$$\frac{CB'}{AB'} = \frac{BC}{AF}. \quad (5.3)$$

- (c) O triângulo  $BPA'$  é semelhante ao triângulo  $FPA$  pelo caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo), pois  $m(\widehat{BFA}) = m(\widehat{CBB'})$  e  $m(\widehat{FAP}) = m(\widehat{BA'P})$ . Assim,

$$\frac{BA'}{AF} = \frac{PA'}{PA}. \quad (5.4)$$

- (d) O triângulo  $CPA'$  é semelhante ao triângulo  $EPA$  pelo caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo), pois  $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{APE})$  e  $m(\widehat{CA'P}) = m(\widehat{PAE})$ . Então,

$$\frac{AE}{A'C} = \frac{AP}{PA'}. \quad (5.5)$$

Multiplicando ambos os lados das frações (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5), temos:

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{AF} \cdot \frac{AE}{A'C} = \frac{AE}{BC} \cdot \frac{BC}{AF} \cdot \frac{PA'}{PA} \cdot \frac{AP}{PA'}$$

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{AE}{AF} = \frac{AE}{AF} \quad (5.6)$$

Multiplicando a igualdade (5.6) por  $\frac{AF}{AE}$ , temos:

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{A'C} = 1. \quad (5.7)$$

[ $\Leftarrow$ ] Reciprocamente, suponhamos válida a relação (5.1) e consideremos  $B'' \in \overleftrightarrow{AC}$  tal que as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB''}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  sejam concorrentes. Segue da primeira parte anterior que

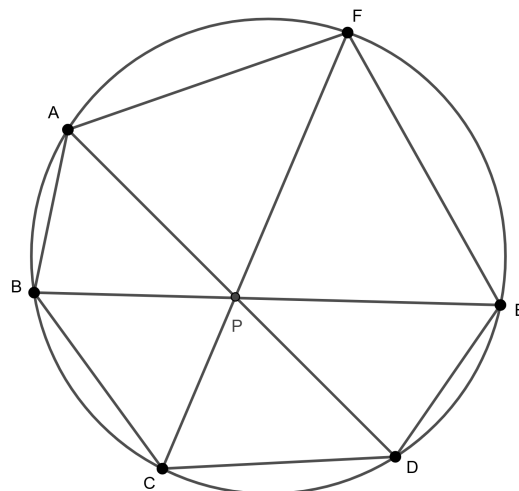
$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1. \quad (5.8)$$

Relacionando as expressões 5.1 com 5.8, temos que  $\frac{CB'}{B'A} = \frac{CB''}{B''A}$ . Concluimos que  $B' = B''$ . Logo,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes.  $\square$

Vamos agora enunciar um resultado sobre quando três cordas de um círculo concorrem. O matemático Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003) apresentou um critério, que chamaremos de Teorema de Ceva para cordas, cuja demonstração é análoga ao Teorema de Ceva.

**Teorema 5.2** (Teorema de Ceva para cordas). *Sejam  $A, B, C, D, E$  e  $F$  seis pontos consecutivos ao redor da circunferência de um círculo. Então, as cordas  $AD, BE, CF$  concorrem se, e somente se,  $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$ . Ver Figura 5.4.*

Figura 5.4: Teorema de Ceva para cordas.



Fonte: Elaborada pela autora.

*Demonstração.* (a) Suponhamos que  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  se encontram em um ponto  $P$  (ver Figura 5.4). Temos três pares de triângulos formados. São eles:

- (i) o triângulo  $ABP$  é semelhante ao triângulo  $DEP$  pelo caso  $AAA$  (ângulo-ângulo-ângulo) uma vez que,  $m(\widehat{ABP}) = m(\widehat{EDP})$  que são ângulos inscritos do arco  $\widehat{AE}$  e  $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{DEP})$  que são ângulos inscritos do arco  $\widehat{BD}$ . Obtemos as proporções:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{PA}{PE} = \frac{BP}{PD}.$$

- (ii) Analogamente, podemos concluir que os triângulos  $AFP$  e  $BCP$  são semelhantes. Assim,

$$\frac{EF}{BC} = \frac{PE}{PC} = \frac{PF}{PB}.$$

- (iii) Por fim, os triângulos  $AFP$  e  $CDP$  são semelhantes. Logo,

$$\frac{CD}{FA} = \frac{PC}{PA} = \frac{PD}{PF}.$$

Multiplicando as expressões obtemos:

$$\frac{AB}{DE} \cdot \frac{EF}{BC} \cdot \frac{CD}{FA} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{PE}{PC} \cdot \frac{PC}{PA}$$

O que implica em  $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$ .

- (b) Por outro lado, suponha

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA. \quad (5.9)$$

Dos três arcos,  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{CDE}$  e  $\widehat{EFA}$ , pelo menos um deve ser menor que um semicírculo. Sem perda de generalidade, supohamos que o arco  $\widehat{CDE}$  é menor que um semicírculo. Os segmentos  $BE$  e  $CF$  se interceptam no ponto  $P$  e o segmento  $AP$  intercepta o círculo novamente no ponto  $X$  (que deve estar no arco  $\widehat{CDE}$ ). Pela parte (i), temos

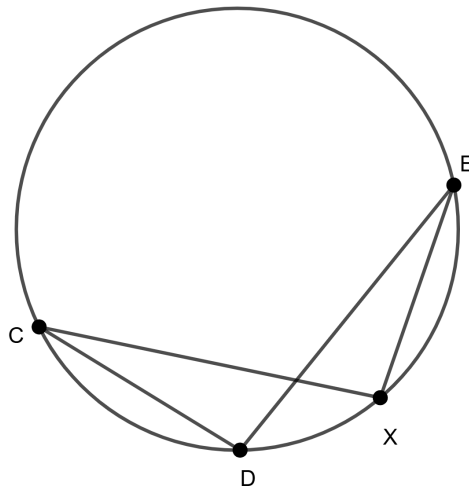
$$AB \cdot CX \cdot EF = BC \cdot XE \cdot FA. \quad (5.10)$$

Com as expressões (5.9) e (5.10) temos:

$$\frac{CD}{DE} = \frac{CX}{XE}.$$

Se  $X$  não coincide com  $D$ , então sem perda de generalidade, suponhamos que  $X$  está no arco  $\widehat{DE}$  (ver Figura 5.5).

Figura 5.5: Teorema de Ceva para 3 arcos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Então  $CD < CX$  e  $DE > XE$ . Consequentemente,  $\frac{CD}{DE} < \frac{CX}{XE}$ , o que é uma contradição. Assim,  $X$  deve coincidir com  $D$ .

□

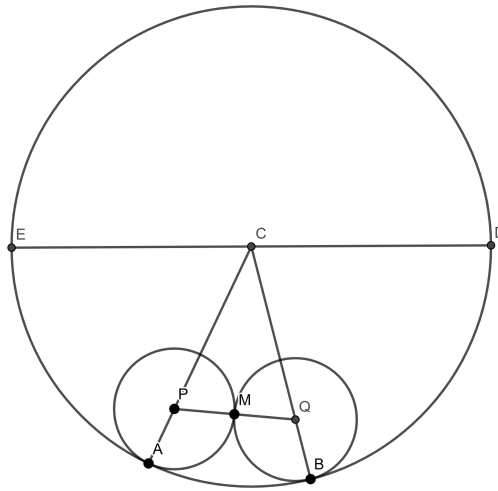
Precisaremos de um resultado preliminar para a demonstração do Teorema dos Setes Círculos.

**Lema 5.3.** *Sejam dois círculos externamente tangentes,  $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$ , de centros  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Além disso,  $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$  são internamente tangentes ao círculo  $\gamma_C$  de centro  $C$  e aos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Se os raios dos círculos  $\gamma_C$ ,  $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$  são  $R$ ,  $p$  e  $q$ , respectivamente, então*

$$\frac{AB^2}{4R^2} = \left(\frac{p}{R-q}\right) \cdot \left(\frac{q}{R-q}\right).$$

*Demonstração.* Sejam dois círculos  $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$  externamente tangentes no ponto  $M$ . Estendamos  $AM$  e  $BM$  para interceptar o círculo  $C$  novamente nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente, como mostra a Figura 5.6.

Figura 5.6: Ilustração para o Lema 5.3.



Fonte: Elaborada pela autora.

Traçamos os segmentos  $CD$  e  $CE$ . É imediato que o ponto  $M$  incide sobre o segmento. Segue então que,

- (a)  $CA = CD$  implica  $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CDA})$  (o triângulo  $ACD$  é isósceles).  
 (b)  $PA = PM$  implica  $m(\widehat{PAM}) = m(\widehat{PMA})$  (o triângulo  $PAM$  é isósceles).

Logo,  $m(\widehat{PMA}) = m(\widehat{CDA})$  e o segmento  $CD$  é paralelo à  $PM$ . Analogamente,  $CE$  é paralelo a  $QM$ . Por outro lado,  $P$ ,  $M$  e  $Q$  são colineares, então,  $D$ ,  $C$  e  $E$  também são. Observamos que  $m(\widehat{EBA}) = m(\widehat{EDA})$  (uma vez que ambos medem metade do arco  $\widehat{EA}$ ). Temos, portanto, três pares de triângulos semelhantes: o triângulo  $MDE$  com o triângulo  $MBA$ , o triângulo  $BMQ$  com o triângulo  $BEC$  e o triângulo  $AMP$  com o triângulo  $ADC$ . Então,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MD}.$$

Como  $DE = 2R$ , temos:

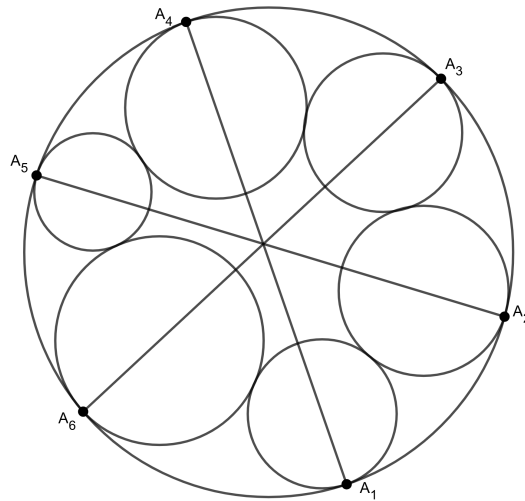
$$\frac{AB}{2R} \cdot \frac{AB}{2R} = \frac{MA}{ME} \cdot \frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{ME} = \frac{PA}{CP} \cdot \frac{QB}{CQ} = \frac{p}{R-p} \cdot \frac{q}{R-q}.$$

□

Vamos agora provar nosso resultado principal.

**Teorema 5.4.** *Sejam  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  seis pontos consecutivos no círculo de centro  $O$ . Suponha que círculos possam ser traçados internamente tangentes ao círculo de centro  $O$  nesses seis pontos, de modo que eles também sejam externamente tangentes entre si em pares (isto é, o círculo em  $A_i$  é tangente aos círculos em  $A_{i-1}$  e  $A_{i+1}$ , onde os subscritos são considerados módulo 6, isto é, correspondem ao resto da divisão inteira por 6. Ver Figura 5.7). Então, os segmentos  $A_0A_3, A_1A_4$  e  $A_2A_5$  são concorrentes.*

Figura 5.7: Ilustração para o Teorema 5.4.



Fonte: Elaborada pela autora.

*Demonstração.* Seja  $R$  o raio do círculo  $O$  e seja o raio  $r_i$  do círculo em  $A_i$ . Vamos expressar  $A_i A_{i+1}$  em termos de  $r_i$  e  $r_{i+1}$ . Pelo Lema 5.3 temos

$$A_i A_{i+1} = 2R f(r_i) f(r_{i+1})$$

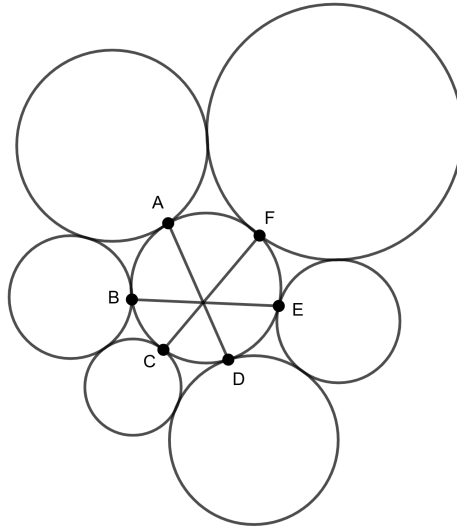
onde  $f(r_i) = \sqrt{\frac{r_i}{R - r_i}}$  e os subscritos são reduzidos módulo 6. Assim,

$$A_0 A_1 \cdot A_2 A_3 \cdot A_4 A_5 = 8R^3 f(r_0) f(r_1) f(r_2) f(r_3) f(r_4) f(r_5) = A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 \cdot A_5 A_0.$$

Portanto, pelo Teorema 5.2,  $A_0 A_3$ ,  $A_1 A_4$  e  $A_2 A_5$  devem ser concorrentes.  $\square$

O Teorema dos sete círculos é verdadeiro para configurações mais gerais do que a descrita anteriormente. Por exemplo, a Figura 5.8 mostra o caso em que os seis círculos são externamente tangente ao círculo original em vez de serem internamente tangentes.

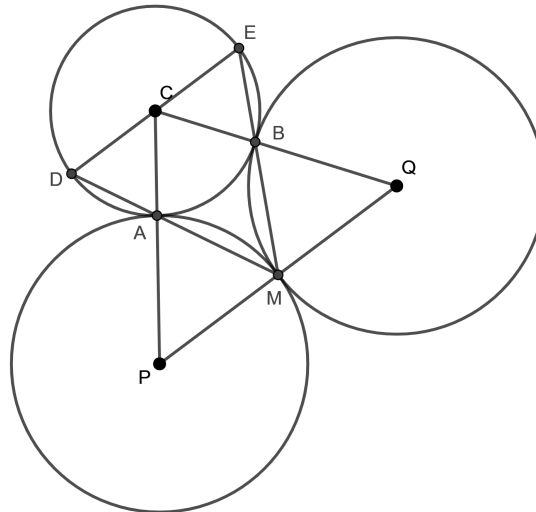
Figura 5.8: Teorema dos sete círculos - Tangência externa.



Fonte: Elaborada pela autora.

Este caso pode ser demonstrado de maneira análoga à demonstração anterior. Usando a Figura 5.9:

Figura 5.9: Três círculos tangentes entre si.



Fonte: Elaborada pela autora.

derivamos a expressão:

$$\frac{AB^2}{4R^2} = \left( \frac{p}{R+p} \right) \cdot \left( \frac{q}{R+q} \right)$$

cuja demonstração é análoga à demonstração do Lema 5.3. Os círculos  $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$  são

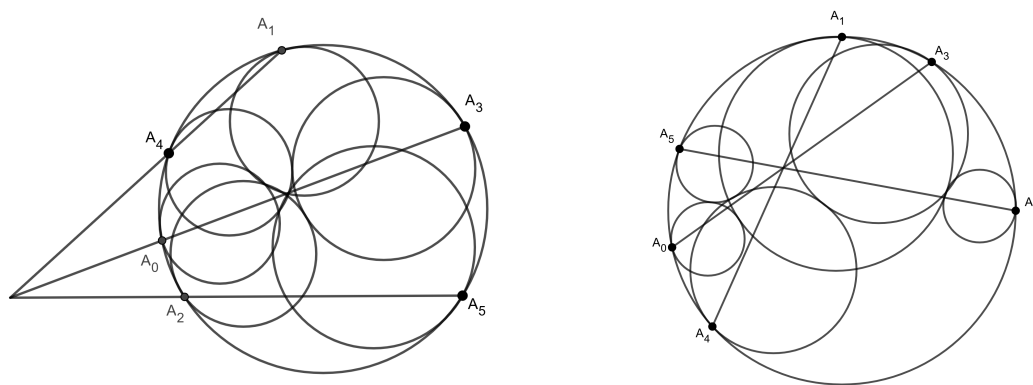
externamente tangentes ao círculo  $\gamma_C$ .  $R, p$  e  $q$  denotam os raios dos círculos  $\gamma_C, \gamma_P$  e  $\gamma_Q$  respectivamente. Então, segue que

$$A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 = 8R^3 g(r_0)g(r_1)g(r_2)g(r_3)g(r_4)g(r_5) = A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_0$$

com  $g(r) = \sqrt{\frac{r}{R+r}}$ .

Na verdade, o Teorema de Sete Círculos é ainda mais geral. Os seis pontos de tangência não precisam ocorrer sucessivamente ao longo da circunferência círculo original. Dois desses casos são mostrados na Figura 5.10.

Figura 5.10: Exemplos de sete Círculos com pontos de tangência não ocorrendo sucessivamente.

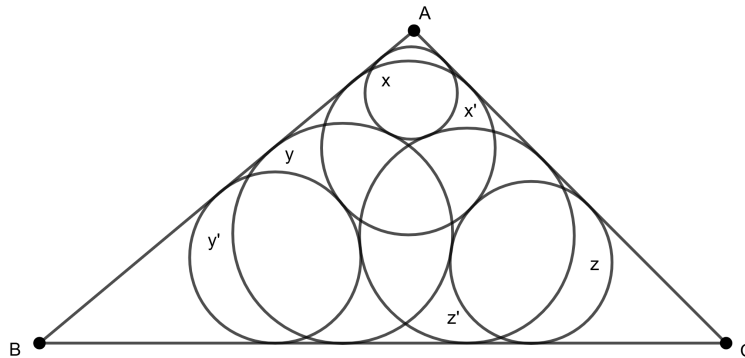


Fonte: Elaborada pela autora.

## 5.2 Um teorema sobre um triângulo e seis círculos

Nesta seção iremos demonstrar um teorema de cadeia de círculos associado a um triângulo qualquer (Ver Figura 5.11).

Figura 5.11: Cadeia triangular



Fonte: Elaborada pela autora.

Inicialmente, consideremos um círculo arbitrário  $x$  que toca os lados  $CA$  e  $AB$  do triângulo  $ABC$  dado, e então construímos o que chamamos de cadeia triangular como segue:

- (1)  $y$  é um círculo que tangencia  $AB$ ,  $BC$  e  $x$ .
- (2)  $z$  é um círculo que tangencia  $CA$ ,  $BC$  e  $y$ .
- (3)  $x'$  é um círculo que tangencia  $AB$ ,  $CA$  e  $z$ .
- (4)  $y'$  é um círculo que tangencia  $AB$ ,  $BC$  e  $x'$ .
- (5)  $z'$  é um círculo que tangencia  $CA$ ,  $BC$  e  $y'$ .
- (6)  $x''$  é um círculo que tangencia  $CA$ ,  $AB$  e  $z'$ .

Claramente, essa construção não determina os círculos  $y, z, \dots, x''$  de maneira única. É fácil observar que várias escolhas estão disponíveis em cada estágio. No entanto, como mostraremos, se a escolha for feita corretamente em cada estágio, então o último círculo  $x''$  irá coincidir com o primeiro círculo  $x$ . Assim, temos a cadeia triangular fechada (cíclica) de seis círculos.

Como podemos observar, este teorema pode ser relacionado ao problema clássico de Malfatti<sup>1</sup>. Enquanto o problema de Malfatti tem um número finito de soluções, a nossa cadeia de círculos se fecha para uma escolha arbitrária de  $x$ .

Para reduzirmos os números de escolhas disponíveis em cada estágio iremos restringir que os círculos da cadeia devem ficar dentro do triângulo  $ABC$ . Isso fará com que teremos

<sup>1</sup>Inscrever em um triângulo dado três círculos tais que cada círculo seja tangente externamente aos outros dois e tangente a dois lados do triângulo.

no máximo uma escolha para cada círculo sucessivo na cadeia. Além disso, teremos uma maneira mais natural de desenhar a figura para o teorema.

Iniciamos a demonstração do teorema para este caso. Posteriormente, consideraremos os outros casos possíveis.

**Teorema 5.5.** *Se  $x, y, z, x', y', z', x''$  é uma cadeia triangular de círculos inscritos nos ângulos de um triângulo  $ABC$ , e se todos os círculos da cadeia estão dentro do triângulo, então  $x''$  coincide com  $x$ .*

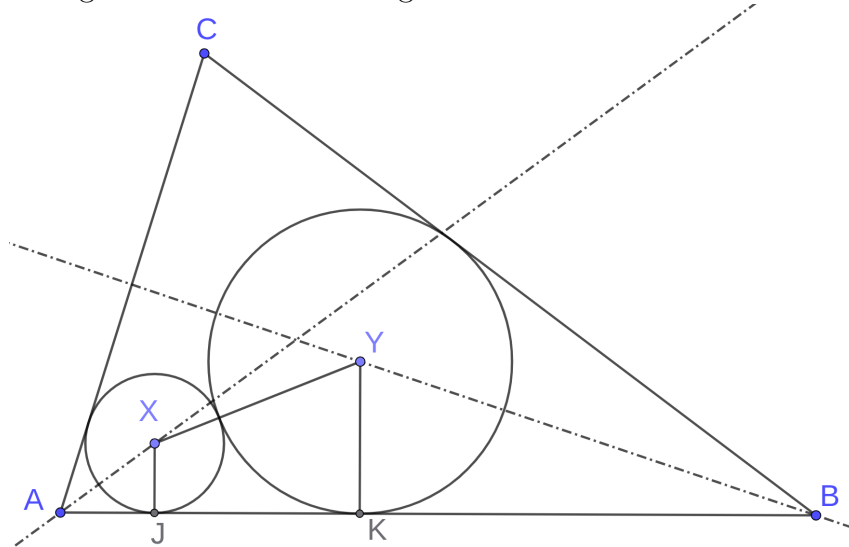
*Demonstração.* Observamos que não há garantia de que haja uma escolha qualquer para o triângulo dado. Assim, se o triângulo  $ABC$  for obtusângulo em  $B$  e se o primeiro círculo  $x$  for um círculo suficientemente pequeno inscrito no ângulo  $A$ , então há escolha para  $y$  está dentro do triângulo.

Começaremos observando duas consequências da suposição de que os círculos estão dentro do triângulo.

1. Os centros dos círculos da cadeia devem estar nas bissetrizes internas apropriadas do triângulo.
2. Todos os contatos entre círculos sucessivos da cadeia deve ser ter contatos externos.

Inicialmente consideremos os dois primeiros círculos conforme mostra a Figura 5.12 onde denotaremos por  $a, b$  e  $c$ , os comprimentos dos lados  $BC, CA$  e  $AB$  do triângulo. Sejam os pontos  $X$  e  $Y$  os centros dos círculos  $x$  e  $y$  obtidos a partir da construção imposta inicialmente. Denotamos por  $J$  e  $K$  os pontos de tangência no lado  $AB$  dos círculos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Figura 5.12: Cadeia triangular - Primeiros dois círculos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Denotemos por  $l = AJ$  e  $m = BK$ . Primeiramente, obtemos a relação entre os comprimentos  $l$  e  $m$ . Como  $X$  está na bissetriz interna do ângulo  $A$  e  $J$  sendo a interseção (ponto de tangência) do lado  $AB$  com a circunferência  $x$ , temos o triângulo  $AXJ$ . Assim, a relação trigonométrica do triângulo retângulo, com  $AX$  sendo a hipotenusa,  $AJ$  o cateto adjacente e  $XJ$  o cateto oposto ao ângulo  $X\hat{A}J$ , temos:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{XJ}{AJ} \Leftrightarrow XJ = l \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad (5.11)$$

sendo este o raio do círculo  $x$ .

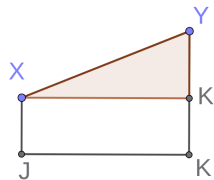
Analogamente, como  $Y$  está na bissetriz interna do ângulo  $B$  e  $K$  é a interseção da circunferência com o lado  $AB$ , temos o triângulo  $BYK$  e utilizando a relação trigonométrica do triângulo retângulo, com  $BY$  a hipotenusa,  $KY$  o cateto oposto e  $KB$  o cateto adjacente ao ângulo  $Y\hat{B}K$ , segue que:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{KY}{KB} \Leftrightarrow KY = m \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}. \quad (5.12)$$

sendo este o raio do círculo  $y$ .

Sabemos que os círculos  $x$  e  $y$  se tangenciam externamente. Assim, consideremos a Figura 5.13.

Figura 5.13: Relação entre os raios dos círculos  $x$  e  $y$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

No triângulo retângulo  $XYK'$  temos

$$XY^2 = JK^2 + K'Y^2 \Leftrightarrow (KY + XJ)^2 = JK^2 + (KY - XJ)^2.$$

ou seja,

$$JK = 2\sqrt{KY \cdot XJ}.$$

Substituindo as expressões dos raios, 5.11 e 5.12, obtemos

$$JK = 2\sqrt{l \cdot m \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}}.$$

Como  $AB = AJ + KB + KJ$ , concluímos que

$$c = l + m + 2\sqrt{l \cdot m \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}}. \quad (5.13)$$

Por um lado, sabemos que:

1.  $\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{cos}^2 \frac{A}{2} = 1$ . Então:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \frac{A}{2}} - 1 = \frac{1 - \operatorname{cos}^2 \frac{A}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{A}{2}} \quad (5.14)$$

2.  $\operatorname{cos} A = \operatorname{cos}^2 \frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 2 \operatorname{cos}^2 \frac{A}{2} - 1$ . Então:

$$\operatorname{cos}^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} A) \quad (5.15)$$

Substituindo (5.15) em (5.14), temos:

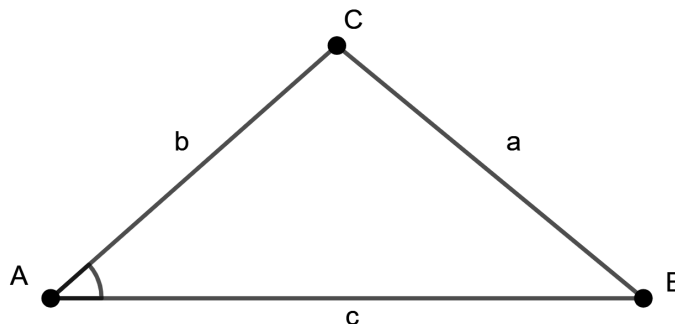
$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} A)}{\frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} A)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cos} A}{\frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} A)} = \frac{1 - \operatorname{cos} A}{1 + \operatorname{cos} A}.$$

Assim,

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} A}{1 + \operatorname{cos} A}}. \quad (5.16)$$

Por outro lado, aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $ABC$  (Figura 5.14) temos

Figura 5.14: Lei dos cossenos



Fonte: Elaborada pela autora.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} A \Leftrightarrow \operatorname{cos} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (5.17)$$

Substituindo a expressão (5.17) em (5.16), temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc + b^2 + c^2 - a^2}} = \pm \sqrt{\frac{-(b - c)^2 + a^2}{(b + c)^2 - a^2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(a - (b - c))(a + (b - c))}{((b + c) - a)((b + c) + a)}} = \pm \sqrt{\frac{(a + c - b)(a + b - c)}{(b + c - a)(b + c + a)}}. \end{aligned}$$

Substituindo  $2s = a + b + c$ , temos:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(2s - 2b)(2s - 2c)}{(2s - 2a)2s}} = \pm \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}.$$

Analogamente, mostramos que

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}} \cdot \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}} = \frac{s - c}{s}. \quad (5.18)$$

Substituindo a expressão (5.18) em (5.13) temos:

$$c = l + m + 2\sqrt{l \cdot m \cdot \frac{s - c}{s}} = l + m + 2\sqrt{l \cdot m} \cdot \sqrt{1 - \frac{c}{s}}. \quad (5.19)$$

A expressão 5.19 relaciona os comprimentos  $l$  e  $m$  em termos do lado  $c$  e o semiperímetro do triângulo  $ABC$ .

Para o procedimento de determinação da cadeia de círculos no triângulo  $ABC$  denotamos, partindo dos comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $l'$ ,  $m'$ ,  $n'$  e  $l''$  os comprimentos das tangentes dos círculos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  e  $x''$  para os ângulos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $A$ , respectivamente.

As relações correspondentes entre  $m$  e  $n, \dots, n'$  e  $l''$  podem ser obtidas, de maneira análoga, ao caso entre  $l$  e  $m$ , obtido anteriormente. Assim, teremos seis relações no total.

São elas:

$$\begin{aligned}
c &= l + m + 2\sqrt{l \cdot m} \cdot \sqrt{1 - \frac{c}{s}}, \\
a &= m + n + 2\sqrt{m \cdot n} \cdot \sqrt{1 - \frac{a}{s}}, \\
b &= n + l' + 2\sqrt{n \cdot l'} \cdot \sqrt{1 - \frac{b}{s}}, \\
c &= l' + m' + 2\sqrt{l' \cdot m'} \cdot \sqrt{1 - \frac{c}{s}}, \\
a &= m' + n' + 2\sqrt{m' \cdot n'} \cdot \sqrt{1 - \frac{a}{s}}, \\
b &= n' + l'' + 2\sqrt{n' \cdot l''} \cdot \sqrt{1 - \frac{b}{s}}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

A ideia para demonstrarmos o teorema será obter as relações ligando pares consecutivos dos comprimentos  $l, m, \dots, l''$  e assim, eliminarmos  $m, n, l', m'$  e  $n'$  para então, concluirmos que  $l = l''$ .

Nesse sentido, definimos os ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  (todos obtusos) por meio das relações:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{a}{s}}, \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \frac{b}{s}}, \quad \text{e} \quad \cos \gamma = -\sqrt{1 - \frac{c}{s}}. \tag{5.21}$$

Segue então que:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{a}{s}}, \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{b}{s}}, \quad \text{e} \quad \sin \gamma = \sqrt{\frac{c}{s}}. \tag{5.22}$$

Os cossenos dos ângulos definidos por (5.21) permitem reescrever as relações (5.20) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
c &= l + m - 2\sqrt{l \cdot m} \cos \gamma, \\
a &= m + n - 2\sqrt{m \cdot n} \cos \alpha, \\
b &= n + l' - 2\sqrt{n \cdot l'} \cos \beta, \\
c &= l' + m' - 2\sqrt{l' \cdot m'} \cos \gamma, \\
a &= m' + n' - 2\sqrt{m' \cdot n'} \cos \alpha, \\
b &= n' + l'' - 2\sqrt{n' \cdot l''} \cos \beta.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Todas as relações (5.23) podem ser vistas como lei de cossenos aplicadas a seis triângulos.

As relações (5.22) permitem também comprovar outro resultado interessante: todos os seis triângulos possuem o mesmo circunraio. Para verificarmos esse fato, basta lembrarmos que o diâmetro do circuncírculo de um triângulo é igual ao comprimento de qualquer lado dividido pelo seno do ângulo oposto, então, para o primeiro dos nossos seis triângulos, o diâmetro em questão será:

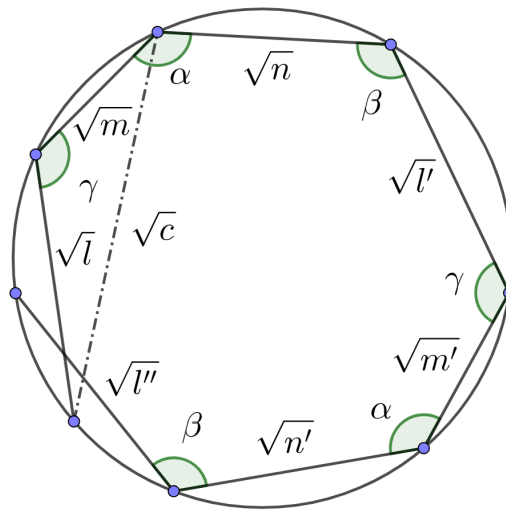
$$\text{Diâmetro} = \frac{\sqrt{a}}{\sin \alpha} = \sqrt{s}.$$

Esse mesmo valor é obtido para os outros cinco triângulos. De fato,

$$\text{Diâmetro} = \frac{\sqrt{b}}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{c}}{\sin \gamma} = \sqrt{s}.$$

Isso significa que podemos inscrever todos os seis triângulos em um mesmo círculo. Além disso, a partir de um primeiro triângulo, podemos localizar os demais sucessivamente, como mostra a Figura 5.15, na qual apenas todos os lados do triângulo da primeira relação são exibidos, sendo os demais omitidos por questão de clareza.

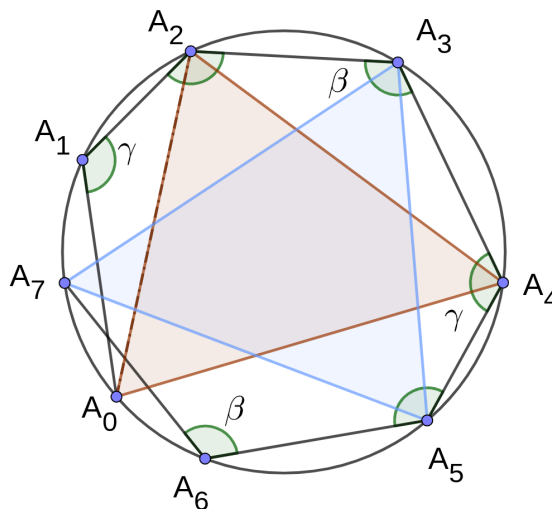
Figura 5.15: Relações em um círculo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma vez compreendida a disposição dos triângulos, vamos denotar os oito vértices por  $A_0, A_1, \dots, A_7$  e considerar os triângulos  $A_0A_2A_4$  e  $A_3A_5A_7$ , como mostra a Figura 5.16.

Figura 5.16: Heptágono.



Fonte: Elaborada pela autora.

Temos inicialmente um heptágono aberto  $A_0A_1 \dots A_7$  inscrito em um círculo, com ângulos  $\gamma$  em  $A_1$  e  $A_4$ , ângulo  $\alpha$  em  $A_2$  e  $A_5$ , e ângulo  $\beta$  em  $A_3$  e  $A_6$ . O objetivo é mostrar que  $A_0A_1$  e  $A_6A_7$ , possuem mesmo comprimento. Consideremos os triângulos  $A_0A_2A_4$  e  $A_3A_5A_7$ , como mostrados na Figura 5.16. Verificamos que:

$$(1) A_0A_2 = A_3A_5 = \sqrt{c}.$$

$$(2) A_2A_4 = A_5A_7 = \sqrt{b}.$$

$$(3) m(\widehat{A_2A_4A_0}) = 180 - m(\widehat{A_0A_1A_2}) = 180 - \gamma \text{ e } m(\widehat{A_3A_7A_5}) = 180 - m(\widehat{A_3A_4A_5}) = 180 - \gamma. \text{ Logo, } m(\widehat{A_2A_4A_0}) = m(\widehat{A_3A_7A_5}).$$

$$(4) m(\widehat{A_4A_0A_2}) = 180 - m(\widehat{A_2A_3A_4}) = 180 - \beta \text{ e } m(\widehat{A_5A_3A_7}) = 180 - m(\widehat{A_5A_6A_7}) = 180 - \beta. \text{ Logo, } m(\widehat{A_4A_0A_2}) = m(\widehat{A_5A_3A_7}).$$

Assim, pelos dois últimos itens, segue que os ângulos  $\widehat{A_0A_2A_4}$  e  $\widehat{A_3A_5A_7}$  são congruentes. Pela congruência LAL (lado-ângulo-lado) temos que os triângulos  $A_0A_2A_4$  e  $A_3A_5A_7$  são congruentes. Logo,  $A_0A_4$  e  $A_3A_7$  são congruentes.

Por fim, consideremos os ângulos  $\widehat{A_1A_2A_3}$  e  $\widehat{A_4A_5A_6}$ . Neste caso, sabemos que:

$$(1) m(\widehat{A_1A_2A_3}) = m(\widehat{A_4A_5A_6}) = \alpha.$$

$$(2) m(\widehat{A_1A_2A_3}) = m(\widehat{A_1A_2A_0}) + m(\widehat{A_0A_2A_4}) + m(\widehat{A_4A_2A_3}).$$

$$(3) m(\widehat{A_4A_5A_6}) = m(\widehat{A_4A_5A_3}) + m(\widehat{A_3A_5A_7}) + m(\widehat{A_7A_5A_6}).$$

Assim,

$$m(\widehat{A_1A_2A_0}) + m(\widehat{A_0A_2A_4}) + m(\widehat{A_4A_2A_3}) = m(\widehat{A_4A_5A_3}) + m(\widehat{A_3A_5A_7}) + m(\widehat{A_7A_5A_6}).$$

Como visto anteriormente,  $\widehat{A_0A_2A_4}$  e  $\widehat{A_3A_5A_7}$  são congruentes, segue que

$$m(\widehat{A_1A_2A_0}) + m(\widehat{A_4A_2A_3}) = m(\widehat{A_4A_5A_3}) + m(\widehat{A_7A_5A_6}).$$

Por outro lado, os ângulos  $\widehat{A_4A_2A_3}$  e  $\widehat{A_4A_5A_3}$ , são congruentes pois possuem a mesma corda  $A_3A_5$ . Logo,  $m(\widehat{A_1A_2A_0}) = m(\widehat{A_7A_5A_6})$ .

Isso mostra que  $A_0A_1$  e  $A_6A_7$  subtendem ângulos iguais no círculo e portanto, essas cordas são iguais em comprimento, isto é,  $\sqrt{l''} = \sqrt{l}$  e o teorema está demonstrado.  $\square$

Na otimização de estruturas triangulares, como treliças, pórticos ou pontes leves, esse princípio geométrico fundamenta algoritmos destinados ao posicionamento de suportes circulares ou nós tangentes, contribuindo para a obtenção de simetria, estabilidade e eficiência espacial em sistemas modulares. No design de reservatórios ou tanques com geometria triangular, a disposição de círculos internos é utilizada para modelar fluxos,

prever zonas de reforço periódico e aperfeiçoar simulações computacionais voltadas à distribuição uniforme de tensões mecânicas. No campo do design gráfico e industrial, a periodicidade gerada pela sequência de círculos tangentes orienta a criação de padrões decorativos para mosaicos, embalagens e superfícies triangulares, permitindo composições simétricas e organizadas em softwares de modelagem como AutoCAD. Em processos de prototipagem rápida, o conceito também é aplicado por engenheiros de produto para validar a consistência geométrica de componentes curvos inseridos em estruturas triangulares, como lentes, engrenagens ou peças de encaixe, promovendo soluções mais precisas e inovadoras na manufatura aditiva.

## 6 Considerações finais

Neste trabalho, abordamos o estudo de pontos de máximos e de mínimos na geometria, por meio de alguns problemas e de suas respectivas soluções, utilizando desigualdades, teoremas clássicos, o princípio da tangência e cadeia de círculos.

No ensino superior, esses problemas podem ser abordados sob diferentes perspectivas, desde a geometria euclidiana até cálculos mais avançados. Além disso, esse estudo pode ser abordado em disciplinas de otimização, física e modelagem matemática, tornando-se uma ponte entre a teoria e aplicações práticas, como, por exemplo, no planejamento urbano, na engenharia estrutural e na economia.

Em alguns problemas, o uso do software Geogebra mostrou um recurso valioso. Vê-se, assim, que o emprego dessa ferramenta em determinadas aplicações abre a possibilidade de tratarmos esse tema em minicursos, palestras e congressos para estudantes do ensino superior.

Seguiremos pesquisando maneiras diversificadas e mais simples de resolver problemas envolvendo máximos e mínimos na geometria.

# Referências

ALTSHILLER-COURT, N. **College Geometry**. [S. l.]: Dover Publications, 2007. Citado na p. 79.

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L. **Geometric Problems on Maxima and Minima**. Boston: Birkhäuser, 2007. ISBN 9780817644734. Citado nas pp. 15, 51.

ARAÚJO, P. V. **Curso de Geometria**. Lisboa: Gradiva, 1998. Citado nas pp. 15, 25, 27, 29, 33.

BARBOSA, J. L. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003. Citado nas pp. 15, 21.

FIGUEIREDO, D. G. de. Problemas de Máximos e Mínimos na Geometria. **Matemática Universitária**, n. 9/10, 2018. Disponível em: [https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n09\\_n10\\_Artigos02.pdf](https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n09_n10_Artigos02.pdf). Acesso em: 10 mar. 2025. Citado na p. 14.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, Vol.1**. [S. l.]: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2001. Citado na p. 21.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT). Citado nas pp. 32, 42, 44, 63, 76.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008. Citado nas pp. 15, 17, 19, 20, 62, 64, 68.

RUOFF, E. B. E. L. **Isometrias e Ornamentos no Plano Eclidiano**. [S. l.]: Atual, 1982. Citado nas pp. 15, 28.

TIKHOMIROV, V. M. **Stories About Maxima and Minima**. [S. l.]: American Mathematical Society, 1990. (Mathematical World: Volume 1). Citado nas pp. 15, 22.