



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Aplicações da Transformada de Fourier em Soluções Numéricas de Sistemas Periódicos em Mecânica

Eligio Carlos Eduardo

**Rio Claro
2018**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Aplicações da Transformada de Fourier em Soluções Numéricas de Sistemas Periódicos em Mecânica

Eligio Carlos Eduardo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior

2018

517.355 Eduardo, Eligio Carlos
E24a Aplicações da Transformada de Fourier em soluções
numéricas de sistemas periódicos em mecânica / Eligio Carlos
Eduardo. - Rio Claro, 2018
164 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Nelson Callegari Júnior

1. Fourier, Transformações de. 2. Equações diferenciais
ordinárias. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Métodos matemáticos. 5.
Mecânica clássica. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Eligio Carlos Eduardo

APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DE FOURIER EM SOLUÇÕES
NUMÉRICAS DE SISTEMAS PERIÓDICOS EM MECÂNICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior
Orientador

Prof. Dr. Adrian Rodriguez Colucci
Observatório do Valongo - UFRJ

Prof. Dr. Macos Tadeu dos Santos
IGCE - UNESP

Rio Claro, 27 de Abril de 2018

*Este trabalho é dedicado
à memória de minha mãe
Jonadir e de meu pai Jorge,
razões da minha existência.*

Agradecimentos

A Deus, o arquiteto do universo.

Agradeço especialmente a minha mãe, Jonadir (*in memoriam*), e meu pai, Jorge (*in memoriam*) as razões da minha existência e por terem construído meu caráter. Aos meus irmãos que me apoiaram e acreditaram em mim.

Ao professor Dr. Nelson Callegari Júnior, por acreditar em mim e pela paciência, compromisso e dedicação na orientação deste trabalho, e pelo aprendizado que me proporcionou.

Aos meus amigos e companheiros Marcos Afonso e Thalita, pelo apoio irrestrito e pelas risadas que tornaram os momentos difíceis mais agradáveis.

Agradeço a minha esposa, Flávia, pelo apoio, companheirismo e constante incentivo que tornou possível a realização deste sonho.

À minha pequena Sophie, minha filha amada, que com um sorriso me fazia ter forças para continuar.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp Rio Claro por todos os ensinamentos, compromisso e profissionalismo.

De um modo geral agradeço a todos que colaboraram de algum modo para que este trabalho fosse possível.

Em algum lugar, alguma coisa incrível está esperando para ser descoberta.

Carl Sagan.

Resumo

Este trabalho aborda os aspectos teóricos e numérico da Transformada de Fourier, bem como aplicações em sistemas mecânicos periódicos. O estudo iniciou-se com uma revisão bibliográfica que abordou inicialmente aspectos básicos de equações diferenciais ordinárias, métodos numéricos e implementação computacional, o desenvolvimento teórico da Transformada de Fourier, bem como sua implementação. Realizou-se estudos baseados em simulações numéricas de três modelos físicos: o oscilador harmônico, o pêndulo e o pião simétrico.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, Fourier, Transformada, Sistemas Dinâmicos, Métodos Matemáticos, Mecânica Clássica.

Abstract

This work deals with the theoretical and numerical aspects of the Fourier Transform, as well as applications in periodic mechanical systems. It begins with a bibliographical study about a basic review of ordinary differential equations and its numerical solution methods. We also revisit the theoretical of the Fourier Transform as well as its computational implementation. We applied this theory studied in three physical models: the harmonic oscillator, the pendulum and the symmetrical top.

Keywords: Ordinary Differential Equations, Fourier, Transform, Dynamical Systems, Mathematical Methods, Classical Mechanics.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico dos valores da Tabela 3.1, com $h = 0.1$	49
3.2	Gráfico dos valores da Tabela 3.2, com $h = 0.05$	50
3.3	Gráfico dos valores da Tabela 3.3, com $h = 0.1$	52
3.4	Gráfico dos valores da Tabela 3.4, com $h = 0.05$	53
3.5	Gráfico dos valores das Tabelas 3.5 - a), e 3.6 - b).	58
3.6	Solução numérica do PVI do exemplo 3.4: $y \times t$ (vermelho); $y' \times t$ (azul); $a = 0.1$ e $q = 1$	61
3.7	Solução numérica do PVI do exemplo 3.4: $y \times t$ (vermelho); $y' \times t$ (azul), com $a = 1$ e $q = 1$	62
3.8	Variação do ângulo θ em função do tempo para o problema do exemplo 3.5, resolvido numericamente pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem.	63
3.9	Posição \times velocidade. A) Espaço de fase para o sistema dado no exemplo 3.5. As amplitudes são regulares visto que não há nenhuma dissipação, portanto, uma condição do espaço de fase tende a oscilar regularmente no entorno de zero; B) Espaço de fase para o sistema dado no exemplo 3.4 em que $a = 0.1$ e $q = 1$. As orbitas são espirais assintoticamente estáveis com um ponto de equilíbrio na origem. Toda trajetória "espi- rala" tendendo ao ponto zero.	65
4.1	Exemplo de função periódica constituída de uma combinação linear de duas funções periódicas: $f(x) = 2 \text{sen}(2\pi x) - 3 \text{cos}(\pi x)$	68
4.2	Representação de uma onda quadrada e seu respectivo espectro. Ob- serve que a componente $4 \text{sen}(x)$ tem o mesmo período ($T = 2\pi$) do sinal. Portanto é chamada de oscilação fundamental. As demais parce- las correspondem às oscilações harmônicas do sinal.	81
4.3	$f(x) = 120 \text{cos}(\frac{\pi}{2}x) + 80 \text{sen}(\pi x)$	82
4.4	Transformada de Fourier das funções $f(t) = \text{cos}(t)$; $f(t) = \text{cos}(2t)$; $f(t) = \text{cos}(t) + \text{cos}(2t)$ e seus respectivos espectros.	83
5.1	Oscilador harmônico simples dado pelo sistema (5.31), com $\omega^2 = 1$	91
5.2	Oscilador harmônico com dados da Tabela 5.1	92
5.3	Espectro dado em período para o sistema proposto na Tabela 5.1: a) caso A, b) caso B e c) caso C.	93

5.4	Espaço de fase (posição x \times velocidade v) para os dados da Tabela 5.1.	93
5.5	Energia total (cinética + potencial) é constante para o oscilador harmônico livre, conforme (5.27). Dados: $x(0) = 0$, $v(0) = 2$ e $k = m = 1$.	94
5.6	Solução temporal típica para os três casos do oscilador amortecido com as condições iniciais $x(0) = 1$ m e $v(0) = 0$ m/s. Para as três situações a frequência natural foi mantida em $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ rad. Para o caso crítico usamos $\beta = \pi/4$. Já o super-crítico, o parâmetro de amortecimento foi $\beta = 3\pi$. Para o amortecimento sub-crítico, temos um movimento inicialmente oscilatório que vai perdendo amplitude à medida que a energia é dissipada devido ao amortecimento.	95
5.7	Espectro para o caso sub-crítico, com dados da figura (5.6). É mostrado a frequência $\omega_1 = 2\pi$ (≈ 6.28) - à esquerda; e o período $T = 1$ s - à direita.	96
5.8	Espaço de fase (posição x \times velocidade v) para um oscilador amortecido. Para o amortecimento sub-crítico as frequências foram: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ e $\beta = \pi/4$; para o amortecimento crítico: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$; para o amortecimento super-crítico: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ e $\beta = 3\pi$. As condições iniciais em todos os casos foram: $x(0) = 1$ e $v(0) = 0$.	97
5.9	Espectro dado em frequência para um oscilador com $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ e $\beta = \sqrt{65}\pi/64$ (a), $\beta = \sqrt{65}\pi/32$ (b), $\beta = \sqrt{65}\pi/16$ (c), $\beta = \sqrt{65}\pi/8$ (d), $\beta = \omega = \sqrt{65}\pi/4$ (e), $\beta = 2\pi$ (f). As condições iniciais foram as mesmas para todos os casos: $x(0) = 1$ e $v(0) = 0$.	98
5.10	Energia mecânica (energia cinética + potencial) por unidade de massa, E/m , energia cinética por unidade de massa, T/m , e energia potencial por unidade de massa, V/m , para um oscilador com amortecimento subcrítico. Dados: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$, $\beta = \pi/4$. As condições iniciais foram $x(0) = 1$, $v(0) = 0$; o tamanho do passo da integração numérica foi $h = 0.01$.	99
5.11	Oscilador harmônico com amortecimento subcrítico. Uma das curvas (vermelha) existe o efeito de ressonância. Para o caso sem ressonância usamos $\omega_3 = \pi$. Para ambos os casos $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$ e $\gamma = 1$. As condições iniciais foram as mesmas nos dois casos: $x(0) = 1$ m, $v(0) = 0$ m/s e o tamanho do passo na integração numérica foi $h = 0.05$.	100
5.12	Espectro para o oscilador harmônico amortecido e forçado, sem ressonância. Os parâmetros são: $\beta = \pi/10$, $\omega = 2\pi$, $\omega_3 = \pi$ e $\gamma = 1$. Novamente com as condições iniciais: $x(0) = 1$ m, $v(0) = 0$ m/s.	101
5.13	Efeito de batimento para um oscilador forçado sem amortecimento (a) e com amortecimento (b), onde $\beta = 0.1$. Em ambos os casos $\omega = 2\pi$ e $\omega_3 = 1.6\pi$ e condições iniciais: $x(0) = 0$ m, $v(0) = 0$ m/s.	102
5.14	Espectro de potência para os dados da figura 5.13. Efeito de batimento sem dissipação (à esquerda) e com dissipação (à direita).	103

5.15	Efeito de ressonância para um oscilador harmônico sem amortecimento ($\beta = 0$). Usados: $\omega = 2\pi$, $\gamma = 1$ e as condições iniciais foram: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$	103
5.16	Espectro (escala logarítmica) para um oscilador harmônico forçado com amortecimento. Foram usados $\beta = \pi/10$, $\gamma = 1$, $\omega = 2\pi$ e $\omega_3 = \pi$ (a), $\omega_3 = 1.4\pi$ (b), $\omega_3 = 1.6\pi$ (c), $\omega_3 = 1.8\pi$ (d), $\omega_3 = 1.95\pi$ (e), $\omega_3 = \omega$ (f).	104
5.17	Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) de um oscilador forçado com amortecimento sub-crítico, sem fenômeno de ressonância.	105
5.18	Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) de um oscilador forçado com amortecimento sub-crítico, com fenômeno de ressonância. As frequências usadas foram: $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$, $\omega_3 = 2\pi$. Com as condições iniciais: $x(0) = 1$, $v(0) = 0$	106
5.19	Energias por unidade de massa (J/kg): mecânica, E/m , cinética, T/m e potencial, V/m , para um oscilador forçado com amortecimento sub-crítico e sem efeito de ressonância, com $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$, $\omega_3 = \pi$ e $\gamma = 1$	107
5.20	Energias por unidade de massa (J/kg): mecânica, E/m , cinética, T/m e potencial, V/m , para um oscilador forçado com amortecimento sub-crítico, com efeito de ressonância, com $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$, $\gamma = 1$	107
5.21	Ilustração de um pêndulo simples.	108
5.22	Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$; $\nu_0 = 0.1$ (vermelho), $\nu_0 = 0.2$ (preto), $\nu_0 = 0.3$ (verde), $\nu_0 = 0.4$ (azul), $\nu_0 = 0.5$ (roxo).	110
5.23	Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) para os dados da figura 5.22	110
5.24	Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.4$ (vermelho), 1.5 (azul), 1.6 (roxo).	112
5.25	Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.8$ (vermelho), 1.9 (azul), 1.981 (preto).	112
5.26	Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.9962$ (vermelho), 1.9991 (azul), 1.9999 (roxo).	113
5.27	Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.99999$ (vermelho), 1.999995 (azul), 1.999999 (roxo), 1.9999999 (verde).	113
5.28	Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é alterado como um parâmetro: $\nu_0 = 2.02$ (vermelho), 2.03 (azul), 2.04 (roxo), 2.05 (verde), 2.07 (magenta), 2.08 (azul).	114
5.29	Espaço de fase ($\theta \times \dot{\theta}$) para $\varepsilon = 1$: $\nu_0 = 0.5$ (azul), $\nu_0 = 1.6$, $\nu_0 = 1.9$, $\nu_0 = 2$ (vermelho). A trajetória em vermelho é chamada separatriz, e corresponde a movimentos em que a energia é igual à energia crítica. No interior desta trajetória ocorrem as oscilações do pêndulo e fora desta as rotações.	115

5.30	Espectro obtido com a FFT de θ vs t , via cálculo numérico usando RK4. O eixo x é a frequência angular ω (em radianos) e o eixo y é o quadrado do valor absoluto da amplitude complexa. O harmônico fundamental é observado em $\omega = 1$	116
5.31	Espectro FFT para $\nu_0 = 1.6$	117
5.32	Espectro FFT para $\nu_0 = 1.9$	117
5.33	Espectro FFT para $\nu_0 = 1.981$	118
5.34	Espectro FFT para $\nu_0 = 1.9962$	118
5.35	Espectro FFT para $\nu_0 = 1.999995$	119
5.36	Espectro FFT para $\nu_0 = 1.9999999$	119
5.37	Espectro FFT para $\nu_0 = 2.001$	120
5.38	Período em função da velocidade inicial ν_0 . O gráfico foi obtido analiticamente baseado na teoria de funções elípticas. Note que nas proximidades de $\nu_0 = 2.0$ o período torna-se infinito.(Imagem retirada de [1])	121
5.39	Deslocamento temporal de θ para o pêndulo amortecido e forçado, com pequena amplitude da força externa $\gamma = 0.2$. As curvas correspondem a condições iniciais distintas: $\theta(0) = 0$ (azul) e $\theta(0) = -\pi/2$ (vermelho). Para ambos os casos: $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$	122
5.40	Deslocamento temporal de θ para o pêndulo amortecido e forçado, com amplitude da força externa intermediária, $\gamma = 0.9$. As curvas correspondem a condições iniciais distintas: $\theta(0) = 0$ (azul) e $\theta(0) = -\pi/2$ (vermelho). Para ambos os casos: $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$	123
5.41	Trajетórias no espaço de fase ($\theta \times \dot{\theta}$) para os movimentos representados nas figuras 5.39 e 5.39. Para estes casos, independente das condições iniciais as trajetórias exibem um único atrator. Isto nem sempre ocorre, como veremos.	123
5.42	Movimento do pêndulo amortecido e forçado para uma amplitude da força externa igual a 1.06 e duas condições iniciais distintas. Depois do regime transitório se alcança soluções distintas. As curvas correspondem às condições iniciais: $\theta(0) = 0$ (azul) e $\theta(0) = -\pi/2$ (vermelho). Para ambos os casos: $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$	124
5.43	Trajетória no espaço de fase ($\theta \times \dot{\theta}$) para uma amplitude $\gamma = 1.06$ e dados da figura 5.42. Observe que neste caso as condições iniciais definem duas soluções distintas no espaço de fase.	124
5.44	Deslocamento temporal de θ (esquerda) para o pêndulo amortecido e forçado, com amplitude da força externa $\gamma = 1.06$ e seu espectro de frequência (direita). Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Observe o surgimento de uma frequência duas vezes maior que a frequência da força externa (≈ 12.56).	125

5.45	Efeito cascata de duplicação do período visto no espectro de frequência. Observe que aumentando a amplitude da força externa surgem novas frequências com duas, três vezes a frequência da força externa. Na imagem superior, $\gamma = 0.9$, observamos um pico característico com a mesma frequência da força externa, 2π (≈ 6.28). Aumentando para $\gamma = 1.06$ a amplitude, observamos outro pico característico com o dobro da frequência de forçamento (centro). Quando aumentamos γ para 1.078 o espectro mostra picos com três e quatro vezes a frequência da força externa e vários subarmônicos. Condições iniciais em todos os casos: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e γ variando conforme indicado.	126
5.46	Transformada de Fourier no regime caótico. O sinal abrange muitos valores de frequências, o que caracteriza o regime caótico. Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e γ variando conforme indicado.	127
5.47	Evolução temporal do ângulo θ no regime caótico, mostrando a sensibilidade a condições iniciais. Para $\gamma = 1.500$ o movimento é caótico e não periódico, para $\gamma = 1.503$ o movimento é periódico, ainda que ilimitado. O espectro de $\gamma = 1.500$ é característico do movimento caótico, enquanto que para $\gamma = 1.503$ é característico de movimentos rotacionais. Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e γ variando conforme indicado.	128
5.48	Deslocamento temporal de θ no regime caótico. Os painéis mostram o deslocamento de θ no intervalo de 60 a 500 segundos. Observe o comportamento errático para amplitude $\gamma = 1.500$ que nunca se converte em um movimento periódico, independente do tempo transcorrido. Já para amplitude $\gamma = 1.503$ o comportamento periódico permanece inalterado. Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\gamma = 1.500$ (esquerda) e $\gamma = 1.503$ (direita).	129
5.49	Ilustração para um pião simétrico com um ponto fixo.	130
5.50	Sequência de rotações convencionada por Euler para obtenção dos ângulos de Euler, que leva um sistema de eixos em outro sistema orientado arbitrariamente. Esquerda: Rotação em torno do eixo $\hat{z} = \hat{z}'$ pelo ângulo ϕ . Centro: Rotação em torno do eixo \hat{x}' pelo ângulo θ . Direita: Rotação em torno do eixo \hat{z} pelo ângulo ψ	131
5.51	Ângulos de Euler com dados da Tabela 5.2. a) $\theta \times t$; b) $\phi \times t$; c) $\psi \times t$. Os movimentos dos ângulos ϕ e ψ são cíclicos e estão representados de zero a 2π (≈ 6.28) no tempo.	139
5.52	Ângulos de Euler com parâmetros da Tabela 5.3. a) $\theta \times t$; b) $\phi \times t$; c) $\psi \times t$	140
5.53	$\dot{\theta} \times t$ (esquerda); espectro de $\dot{\theta}$ mostrando o período (direita).	141

5.54	$\dot{\phi} \times t$ (esquerda); espectro de $\dot{\phi}$ mostrando o período (direita).	141
5.55	$\dot{\psi} \times t$ (esquerda); espectro de $\dot{\psi}$ mostrando o período (direita).	142
5.56	Gráfico da Energia com base na Tabela 5.2.	142
5.57	Gráfico da Energia com base na Tabela 5.3.	143
5.58	Ângulo de nutação θ como função do tempo (esquerda) e o espectro da sua transformada de Fourier, à esquerda, mostra o período de nutação. A rotação própria inicial, neste caso, foi $\dot{\psi}_0 = 1\text{rad/s}$	144
5.59	Ângulo de nutação θ como função do tempo (esquerda) e o espectro da transformada de Fourier, à esquerda, mostra o período de nutação. A rotação própria inicial, neste caso, foi $\dot{\psi}_0 = 1.5\text{ rad/s}$	144
5.60	Ângulo de nutação θ como função do tempo (superior à esquerda) e o espectro da transformada de Fourier, à esquerda, mostra o período de nutação para $J = 2\text{ rad/s}$; inferior à esquerda mostra θ como função do tempo acompanhado de sua transformada de Fourier para $J = 2.5\text{ rad/s}$. 145	
5.61	Ângulo de nutação θ como função do tempo e o respectivo espectro mostrando o período de nutação para: $J = 2/3\text{ rad/s}$ (superior); $J = 1/2\text{ rad/s}$ (centro) e $J = 2/5\text{ rad/s}$	146

Lista de Tabelas

3.1	Método de Euler Simples, com $h = 0.1$	49
3.2	Método de Euler com $h = 0.05$	50
3.3	Euler Melhorado com $h = 0.1$	52
3.4	Euler Melhorado com $h = 0.05$	53
3.5	Runge-Kutta de 4ª ordem - $h = 0.1$	58
3.6	Runge-Kutta de 4ª ordem - $h = 0.05$	58
3.7	Parâmetros considerados para solução do Exemplo 3.5.	63
3.8	Comparação de métodos numéricos com $h = 0.1$	63
3.9	Comparação de métodos numéricos com $h = 0.05$	64
4.1	Custo computacional <i>DFT</i> vs <i>FFT</i>	80
5.1	Conjuntos de condições iniciais A, B e C utilizados na figura 5.2	92
5.2	Piã Simétrico - Ângulos de Euler	139
5.3	Piã Simétrico - Extremos de Nutação	140
5.4	Tabela de parâmetros para testar a relação entre o período de nutação e a velocidade de rotação própria. O número "J" referente a rotação própria inicial será alterado como um parâmetro.	143

Sumário

1	Introdução	25
2	Equações Diferenciais Ordinárias	27
2.1	Introdução	27
2.2	Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	27
2.2.1	Problema de valor inicial (Problema de Cauchy)	29
2.3	Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem	31
2.3.1	Equações Lineares de Segunda Ordem	31
2.4	Obtenção de Soluções	32
2.4.1	Método de Variação dos Parâmetros	32
2.4.2	Equações lineares homogêneas de 2ª ordem com coeficientes constantes	33
2.4.3	Método dos coeficientes a determinar	35
2.5	Atratores	42
3	Métodos Numéricos	45
3.1	Introdução	45
3.2	Série de Taylor	45
3.3	O Método de Euler	47
3.4	Método de Euler Melhorado ou método de Heun	51
3.5	O Método de Runge-Kutta	54
3.5.1	Runge-Kutta de primeira ordem	54
3.5.2	Runge-Kutta de segunda ordem	55
3.5.3	Runge-Kutta de quarta ordem	56
3.6	Equações e Sistemas de Ordem Superior	59
3.6.1	Problema de Valor Inicial de Segunda Ordem	59
3.7	Comparação entre os métodos numéricos	63
3.8	Representação no Espaço de Fase	64
4	Transformada de Fourier e Inversa	67
4.1	Série de Fourier	67
4.1.1	Integral de Fourier	69

4.1.2	Forma complexa da Série de Fourier	70
4.1.3	Identidade de Parseval	70
4.2	Transformada de Fourier	71
4.2.1	Teorema de Plancherel-Parseval	71
4.3	Propriedades da Transformada de Fourier	72
4.3.1	Linearidade	72
4.3.2	Translação	72
4.3.3	Transformada de Fourier da Derivada	72
4.3.4	Produto e Transformada de Convolução	73
4.4	Transformada Discreta de Fourier	74
4.4.1	Teorema da amostragem	74
4.4.2	A DFT	75
4.4.3	Transformada Rápida de Fourier	78
4.4.4	Exemplos	81
5	Aplicações	85
5.1	A Equação de Euler-Lagrange	85
5.1.1	Coordenadas Generalizadas	85
5.1.2	Lagrangiana de um sistema de partículas	85
5.1.3	Princípio da ação mínima	86
5.1.4	Equação de Euler-Lagrange	86
5.2	Oscilador Harmônico Simples	86
5.2.1	Oscilador harmônico amortecido	88
5.2.2	Oscilador harmônico forçado	89
5.2.3	Energia no oscilador harmônico	90
5.2.4	Resultados numéricos	90
5.3	O Pêndulo Simples	108
5.3.1	Resultados Numéricos	109
5.3.2	Dependência temporal ($\theta \times t$)	111
5.3.3	Análise do movimento com a Transformada de Fourier (FFT)	115
5.3.4	O pêndulo amortecido e forçado	121
5.4	O Pião Simétrico	130
5.4.1	Ângulos de Euler e Equações de Euler	130
5.4.2	Lagrangiana e equações de movimento	132
5.4.3	Precessão	135
5.4.4	Nutação	136
5.4.5	Solução numérica	138
5.4.6	Resultados	139
6	Conclusão	147

Referências	151
A Complementos do Capítulo 2	155
A.1 Existência e Unicidade de Soluções	155
A.2 Sistemas e equações diferenciais de ordem superior	158
A.3 Equações Lineares de Segunda Ordem	161

1 Introdução

Um das ferramentas matemáticas mais utilizadas nas ciências de um modo geral é a Transformada de Fourier. Suas aplicações são amplas e vão desde engenharia, física, biologia, astronomia entre outros [13, 20]. Em relação aos sistemas mecânicos periódicos, existem muitos modelos em que é fundamental aplicá-la. O objetivo principal deste trabalho é mostrar a importância da Transformada de Fourier em problemas de mecânica. Estará presente, também, a utilização de ferramentas computacionais que serão imprescindíveis para obtenção de nossos resultados. Escolhemos desenvolver nossa implementação em linguagem Fortran, e todos os programas utilizados neste trabalho foram desenvolvidos pelo autor ou fornecidos pelo orientador, exceto o algoritmo original da FFT que foi extraído de [22]. Sobre esse algoritmo, uma abordagem complementar e detalhada pode ser encontrada em [18].

No capítulo 2 faremos uma breve exposição sobre equações diferenciais ordinárias, cuja preocupação dominante, desde sua origem até meados do século XIX, era a obtenção de sua forma explícita [9]. Entretanto, logo se verificou que o número de equações que podiam ser resolvidas em termos de funções elementares era muito pequeno, até mesmo com a introdução de novas funções como as elípticas e outras representadas por integrais. No decorrer desse capítulo iremos abordar conceitos fundamentais, tais como o problema de valor inicial e a existência e unicidade de soluções. Nesse contexto, abordaremos alguns métodos de solução analítica de equações diferenciais ordinárias. É nesse momento que apresentaremos a solução analítica do nosso primeiro modelo mecânico estudado, o oscilador harmônico. Ainda no capítulo 2, daremos uma breve passagem na teoria dos sistemas lineares para definir um atrator linear, um conceito importante estudado em sistemas dinâmicos.

Como enfatizamos acima, a solução de muitos sistemas mecânicos, como o pêlo e o pêndulo, não pode ser obtida buscando as expressões de forma explícita em termos de funções elementares, mas sim pelo uso de métodos de aproximação. A estes sistemas, em que as soluções são exclusivamente numéricas, dedicamos o Capítulo 3. Começaremos com uma breve introdução da série de Taylor e polinômio de Taylor. Em seguida apresentamos os métodos numéricos propriamente ditos, a saber: Métodos de Euler e de Runge-Kutta. Veremos que este último, por sua melhor precisão, será o escolhido para implementação computacional, mais precisamente o método de Runge-Kutta de

4ª ordem.

O capítulo 4 é dedicado à teoria da Transformada de Fourier. Começaremos o estudo abordando os conceitos básicos da Série de Fourier e definindo com precisão a Transformada de Fourier e também a Transformada Discreta de Fourier, que é um caso particular da transformada contínua de Fourier. Exibimos a Transformada Rápida de Fourier (FFT), que é o algoritmo mais eficiente disponível na literatura e foi o que implementamos computacionalmente. Em seguida, apresentaremos alguns exemplos ilustrativos antes de entrarmos no capítulo de aplicações.

O estudo dos modelos mecânicos nos quais aplicaremos a Transformada de Fourier está exposto no capítulo 5. Neste capítulo iremos explorar o espaço de fases desses três sistemas a partir de suas soluções numéricas. O primeiro modelo a ser estudado é o oscilador harmônico, cujas soluções analíticas foram obtidas no capítulo 2, onde faremos um estudo do ponto de vista numérico. O segundo modelo estudado, o pêndulo, possui equação diferencial não linear, onde será possível estabelecer uma comparação com o modelo do oscilador harmônico, além de estudarmos o pêndulo amortecido e forçado, o qual exibe comportamento caótico. O último modelo que estudaremos é o pião simétrico com um ponto fixo. A modelagem desse sistema é um pouco mais complexa do ponto de vista matemático e exibiremos via transformada de Fourier o seu caráter periódico. Uma análise do comportamento da energia desse sistema é feita de modo sucinto.

Portanto, além da solução no espaço de configurações, aplicaremos a técnica da transformada de Fourier (Brigham 1974, [3]) para analisar as soluções numéricas obtidas no espaço das frequências para os modelos descritos acima.

2 Equações Diferenciais Ordinárias

2.1 Introdução

Todo sistema mecânico pode ser aproximado por meio de equações diferenciais, cujo objetivo é encontrar a variação temporal das grandezas físicas que o caracterizam. Resolvendo a equação diferencial (ou sistema de equações) podemos extrair informações importantes sobre o sistema e, possivelmente, prever seu comportamento. A modelagem de um sistema ou fenômeno por equações diferenciais fornece uma solução aproximada, porém ainda assim é uma ferramenta matemática poderosa. Desse modo, justificamos a importância deste capítulo no trabalho.

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos fundamentais sobre equações diferenciais ordinárias. Nas seções que seguem discutiremos, de modo introdutório, o problema de valor inicial e a existência de soluções. Também apresentaremos o Teorema de Picard que garante a existência e unicidade de soluções. Em seguida, obteremos algumas soluções analíticas de alguns modelos clássicos.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Nesta seção, introduziremos os conceitos fundamentais de equações diferenciais ordinárias de maneira precisa. Assim, daremos, a seguir, a definição de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$y' = f(t, y)$$

e do que vem a ser a solução desta equação. Na sequência, formulamos o problema de Cauchy (problema de valor inicial), que é a questão central estudada neste capítulo. Nesta e na próxima seção, seguiremos as definições e provas tais como apresentadas em [25].

Seja Ω um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, onde \mathbb{R} é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ um espaço euclidiano n -dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por (t, y) , $t \in \mathbb{R}$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{E} ; salvo menção em contrário, adotaremos em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ a norma:

$|(t, y)| = \max\{|t|, |y|\}$, onde $|y|$ denota uma norma em \mathbb{E} . Isso significa que, por exemplo, $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$ ou $|y| = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$.

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não degenerado na reta, isto é, um subconjunto conexo de \mathbb{R} não reduzido a um ponto. O intervalo I pode ser fechado, aberto, semiaberto, limitado ou não.

Definição 2.1.

Uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$ chama-se *solução* da equação

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

no intervalo I se:

- (i) o gráfico de φ em I , isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e.
- (ii) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva (direita ou esquerda).

A equação (2.1) chama-se *equação diferencial ordinária de primeira ordem* e é denotada abreviadamente por

$$y' = f(t, y).$$

Estendendo a definição (2.1) para sistemas, temos:

Sejam $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ as componentes de f ; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, com $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de (2.1) se, e somente se, cada φ_i é diferenciável em I , $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \frac{d\varphi_2}{dt}(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{array} \right. \quad (2.1a)$$

para todo $t \in I$.

Por esta razão dizemos que a equação diferencial vetorial (2.1) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1b)$$

2.2.1 Problema de valor inicial (Problema de Cauchy)

Neste trabalho vamos estudar soluções numéricas do problema

$$\begin{cases} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

conhecido como *Problema de Valor Inicial* (PVI) ou *Problema de Cauchy* [25].

Na equação (2.2) y é função real da variável real t e $y' \equiv dy/dt$.

OBSERVAÇÃO:

A equação (2.2) é equivalente à equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (2.3)$$

Em geral, mesmo se $f(., .)$ for uma função contínua, não há garantia de que o problema de valor inicial (2.2) possui uma solução única, como ilustramos no exemplo 2.1:

Exemplo 2.1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Podemos resolver por separação de variáveis (ver Exemplo 2.2 da Seção A.1): $y'/\sqrt{y} = 1$, com $y' = dy/dt$. Assim, integrando ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int_0^t dt \\ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= 2[\sqrt{y(t)} - \sqrt{0}] = t \\ 2\sqrt{y(t)} &= t. \end{aligned}$$

Assim, $2\sqrt{y(t)} = t$ ou $y(t) = t^2/4$. Portanto, este problema tem duas soluções

$$y_1(t) = \frac{t^2}{4}, \quad t \geq 0$$

e

$$y_2(t) = 0.$$

Na mecânica clássica sistemas mecânicos não caóticos devem ser determinísticos, portanto devem apresentar solução única dado uma condição inicial. Sob hipóteses bem gerais sobre f , por exemplo se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em Ω , o que ocorreu no exemplo anterior não acontece. O próximo teorema garante a existência e unicidade de (2.2).

Teorema 2.1. (Teorema de Picard)

Seja f uma função contínua e Lipschitziana com relação a segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{y; |y - y_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω , então existe uma única solução de

$$\begin{cases} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Demonstração. Veja apêndice A, seção A.1. □

Voltando ao Exemplo 2.1, em que resolvemos a equação diferencial $y' = \sqrt{y}$, encontramos duas soluções pois $f(t, y) = \sqrt{y}$ não é Lipschitziana¹ em nenhum intervalo em torno de $y_0 = 0$, contrariando a hipótese do Teorema (2.1).

O número de EDO's do tipo do teorema 2.1 que podem ser resolvidas de maneira direta é bastante reduzido e se limita a certos tipos especiais para $f(t, y)$, como exemplificamos a seguir.

Exemplo 2.2. (Equação com separação de variáveis)

Consideramos uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem *separável* ou de *variáveis separáveis* quando pudermos escreve-la na forma

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x) \tag{2.4}$$

onde g e h são contínuas em intervalos abertos I e J , respectivamente, e h não se anula em J . Desse modo a Eq. (2.4) é equivalente:

$$p(x) \frac{dx}{dt} = g(t),$$

onde $p(x) = \frac{1}{h(x)}$ para $x \in J$. Assim, se $x = x(t)$ é solução da equação (2.4) ainda temos a seguinte equivalência:

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = g(t), \tag{2.5}$$

onde $F(x) = \int p(x)dx$. Com efeito, basta notar que

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = g(t) \Leftrightarrow F'(x) \frac{dx}{dt} = g(t).$$

Assim, $F'(x) = p(x)$ e, portanto, $F(x) = \int p(x)dx$. Integrando (2.5) com respeito a t , temos:

$$F(x(t)) = G(t) + c, \tag{2.6}$$

¹basta observar que o quociente $\frac{|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}|}{|y_2 - y_1|} = \frac{1}{\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}}$ não é limitado para valores muito pequenos de y_1 e y_2

onde $G(t) = \int g(t)dt$ e c é uma constante de integração. A solução $x = x(t)$ desta equação é dada por

$$x(t) = F^{-1}(G(t) + c)$$

onde F^{-1} é a inversa de F .

É importante notar que a existência de F^{-1} é garantida pelo Teorema da Função Inversa, uma vez que $F' = p$, $p \neq 0$ e p é contínua em J .

Observe que a solução obtida é dada implicitamente, para constantes de integração apropriadas, pela relação

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt$$

entre as integrais indefinidas.

Outro tipo especial de EDO de primeira ordem pode ser visto no exemplo A.1 do apêndice A. O leitor pode verificar em [2], [32] e [25] que existem outros tipos especiais de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem cujas soluções podem ser obtidas analiticamente, como por exemplo Equações Homogêneas, Equações Exatas, Equações de Bernoulli, Equações de Clairaut. No entanto, para o estudo dos métodos numéricos que propomos neste trabalho, não será relevante apresentá-los aqui.

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

O desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias, em particular as equações de segunda ordem, se deu junto com a Mecânica. O objetivo desta seção é aproximar o leitor da formulação dos nossos problemas de aplicação, em especial o caso do oscilador harmônico, que será tratado no **capítulo 5**. Seguiremos as referências [9] e [5].

2.3.1 Equações Lineares de Segunda Ordem

Sejam $p, q, f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo aberto (a, b) , o qual pode ser a semireta $t > 0$ ou toda a reta $-\infty < t < \infty$. Uma equação linear de 2ª ordem é do tipo

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (2.7)$$

ou de modo mais compacto

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f. \quad (2.8)$$

Questões relativas à solução geral de (2.7) e à solução do problema de valor inicial para (2.7):

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \quad (2.9)$$

onde $t_0 \in (a, b)$ e x_0, v_0 são dados, será tratado na seção A.3 do apêndice A.

2.4 Obtenção de Soluções

Aqui traremos alguns exemplos de EDO's de 2ª ordem que podem ser resolvidas analiticamente.

2.4.1 Método de Variação dos Parâmetros

Suponha que se conheça um par de soluções *l.i.*, ψ_1 e ψ_2 da equação homogênea (A.22) do Apêndice A. O método consiste em buscar soluções $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ tais que a função

$$x(t) = \alpha_1(t)\psi_1(t) + \alpha_2(t)\psi_2(t) \quad (2.10)$$

seja solução de (2.7). Derivando (2.10) obtemos

$$\dot{x} = \alpha_1\dot{\psi}_1 + \alpha_2\dot{\psi}_2 + \dot{\alpha}_1\psi_1 + \dot{\alpha}_2\psi_2 \quad (2.11)$$

onde omitimos a explícita dependência em t para simplificar a notação. Note que estamos com dois graus de liberdade em nossa busca. Então, podemos descartar um sem perda de generalidade, impondo a condição

$$\dot{\alpha}_1\psi_1 + \dot{\alpha}_2\psi_2 = 0 \quad (2.12)$$

logo, (2.11) se torna

$$\dot{x} = \alpha_1\dot{\psi}_1 + \alpha_2\dot{\psi}_2 \quad (2.13)$$

cuja derivada nos fornece

$$\ddot{x} = \alpha_1\ddot{\psi}_1 + \alpha_2\ddot{\psi}_2 + \dot{\alpha}_1\dot{\psi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\psi}_2 \quad (2.14)$$

Como queremos que $x(t)$ seja solução de (2.7), devemos levar (2.10), (2.13) e (2.14) à equação (2.7) e usamos o fato de que ψ_1 e ψ_2 são soluções de (A.22) obtemos

$$\dot{\alpha}_1\dot{\psi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\psi}_2 = f. \quad (2.15)$$

Agora resolvemos o sistema (2.12), (2.15) para obter $\dot{\alpha}_1$ e $\dot{\alpha}_2$

$$\dot{\alpha}_1 = -f\psi_2/W \quad e \quad \dot{\alpha}_2 = f\psi_1/W \quad (2.16)$$

onde W designa o Wronskiano de ψ_1 e ψ_2 . De (2.16) obtemos α_1 e α_2 .

2.4.2 Equações lineares homogêneas de 2ª ordem com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \quad p, q = \text{constantes.} \quad (2.17)$$

Do Teorema A.2 segue que as soluções de (2.17) são funções definidas em toda reta. O método de resolução consiste em buscar soluções de (2.17) na forma

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (2.18)$$

onde λ é um parâmetro a determinar. Se quisermos que $x(t)$, dada por (2.18), seja solução de (2.17), devemos levá-la à equação (2.17), assim:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0$$

ou seja

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (2.19)$$

que é conhecida como a *equação característica* ou *equação auxiliar* de (2.17).

Portanto, se escolhermos λ igual as soluções de (2.19), as funções $e^{\lambda t}$ correspondentes são soluções de (2.17).

Devemos considerar três casos, dependendo do sinal do discriminante: $p^2 - 4q$.

Caso I: $p^2 - 4q > 0$. Aqui, (2.19) tem duas raízes reais e distintas:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

e conseqüentemente

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad e \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \quad (2.20)$$

são soluções de (2.17). Calculando o Wronskiano, obtemos $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$, o qual é diferente de zero. Portanto as soluções dadas em (2.20) são *l.i.*

Caso II: $p^2 - 4q = 0$. Neste caso, (2.19) nos fornece apenas um valor de λ :

$$\lambda = -\frac{p}{2}$$

e assim obtemos apenas uma solução

$$x_1(t) = e^{-pt/2} \quad (2.21)$$

através desse processo. Agora, devemos determinar outra solução $x_2(t)$, de modo que o par x_1, x_2 sejam *l.i.*, o que é feito a partir do seguinte princípio: conhecida uma solução $x_1(t)$ de (2.17), busca-se outra na forma

$$x(t) = u(t)x_1(t).$$

Substituindo esse x na equação (2.17) obtemos

$$u[\ddot{x}_1 + p\dot{x}_1 + qx_1] + \ddot{u}x_1 + \dot{u}(px_1 + 2\dot{x}_1) = 0$$

de onde se segue, fazendo $\dot{u} = v$, que

$$\dot{v} + \left(p + 2\frac{\dot{x}_1}{x_1} \right) v = 0.$$

Podemos observar que, para a solução x_1 dada em (2.21), o termo entre parêntesis é zero. Logo,

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow v = c \Rightarrow u = ct + c'.$$

Portanto, qualquer função da forma $(ct + c')x_1(t)$, onde c e c' são constantes, é solução de (2.17). Tomando-se $c = 1$, $c' = 0$, obtemos uma segunda solução para (2.17).

$$x_2(t) = te^{-pt/2}. \quad (2.22)$$

No que podemos verificar facilmente que o Wronskiano das soluções x_1 e x_2 , dadas em (2.21) e (2.22) respectivamente, é igual a e^{-pt} , e conseqüentemente essas soluções são *l.i.*.

Caso III: $p^2 - 4q < 0$. Neste caso, (2.19) tem duas raízes complexas conjugadas:

$$\lambda_1 = -\mu + i\nu \quad \lambda_2 = -\mu - i\nu \quad \text{onde} \quad \mu = p/2, \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}. \quad (2.23)$$

Assim, temos

$$x_1(t) = e^{-\mu t} e^{i\nu t} \quad e \quad x_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\nu t}$$

que são soluções *l.i.* de (2.17), pois o Wronskiano é igual a $2i\nu e^{-2\mu t} \neq 0$.

Pela linearidade de (2.17), temos que

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = e^{-\mu t} \cos \nu t \quad (2.24)$$

e

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2i}[x_1(t) - x_2(t)] = e^{-\mu t} \operatorname{sen} \nu t \quad (2.25)$$

são também soluções da equação (2.17). Fizemos uso da formula de Euler para escrever os últimos termos das expressões (2.24) e (2.25):

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

O Wronskiano das duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 dadas em (2.24) e (2.25), respectivamente, é igual a $\nu e^{-2\mu t} \neq 0$, o que implica em ϕ_1 e ϕ_2 *l.i.*.

2.4.3 Método dos coeficientes a determinar

Em 2.4.1 estudamos o método de variação dos parâmetros, que pode ser utilizada para determinar uma solução particular das equações lineares na sua forma geral (2.7). Agora, iremos apresentar um outro processo que se aplica somente para equações lineares com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t) \quad p, q = \text{const.} \quad (2.26)$$

e para certos tipos de funções $f(t)$. A vantagem desse método é não envolver integrações e, portanto, de fácil utilização. O método consiste em determinar a solução particular $x_p(t)$ de (2.26), a partir do tipo da função $f(t)$, com coeficientes b_j a serem determinados, conforme veremos abaixo.

$$f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$$

$$x_p(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n \quad (*)$$

$$f(t) = e^{\alpha t}$$

$$x_p(t) = be^{\alpha t} \quad (*)$$

$$f(t) = \cos \beta t \quad \text{ou} \quad \text{sen } \beta t$$

$$x_p(t) = b_1 \cos \beta t + b_2 \text{sen } \beta t \quad (*)$$

$$f(t) = (a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n)e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{ou}$$

$$f(t) = (a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n)e^{\alpha t} \text{sen } \beta t$$

$$x_p(t) = (b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n)e^{\alpha t} \cos \beta t +$$

$$(c_0 + c_1t + \dots + c_nt^n)e^{\alpha t} \text{sen } \beta t \quad (*)$$

Se algum termo dessa expressão de x_p for solução da equação homogênea associada a (2.26), propõe-se $tx_p(t)$ para solução particular de (2.26). Se por ventura algum termo de $tx_p(t)$ seja solução da equação homogênea associada a (2.26), então a solução particular buscada é $t^2x_p(t)$.

Observação: Os tipos de funções $f(t)$ aos quais o método se aplica pode ser aumentado como consequência do seguinte fato: "se x_p e \tilde{x}_p " são soluções particulares, respectivamente, das equações

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f_1(t) \quad e \quad \ddot{\tilde{x}} + p\dot{\tilde{x}} + q\tilde{x} = f_2(t)$$

então c_1x_p e $c_2\tilde{x}_p$ é solução particular de

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = c_1f_1(t) + c_2f_2(t). \quad (2.27)$$

A aplicação do método consiste em levar a expressão em (*) na equação (2.26), identificar os coeficientes das respectivas potências, exponenciais, senos ou cossenos, obtendo sistemas algébricos de onde se determinam os coeficientes b 's e c 's, o que justifica o nome do método.

Exemplo 2.3. (Oscilador harmônico) Iremos tratar da solução analítica do oscilador harmônico. Uma análise mais aprofundada do ponto de vista físico será feita no capítulo 5, onde faremos uso de métodos numéricos e computacionais. Nossas considerações seguem a referência [9].

O oscilador harmônico é o modelo matemático para oscilações ou vibrações em torno de um ponto de equilíbrio. Em particular, na vizinhança de um equilíbrio estável, o sistema está sujeito a uma força restauradora que pode ser aproximada como um múltiplo k de sua posição em relação ao equilíbrio, como o caso da massa mola por exemplo.

Oscilador Harmônico Simples

Fisicamente consideramos uma massa m acoplada a uma mola de constante elástica k , a 2ª Lei de Newton nos dá $m\ddot{x} = -kx$, ou seja:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.28)$$

onde $\omega^2 = k/m$.

A importância do oscilador harmônico é que possui aplicação geral em problemas de física, como em casos que o potencial possui pontos de mínimo.

A solução geral da equação (2.28) é dada por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (2.29)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias que podem ser determinadas sabendo-se a posição inicial da massa, $x(0) = x_0$, e sua velocidade inicial, $\dot{x}(0) = v_0$. Assim de (2.29) temos $c_1 = x_0$. Derivando (2.29) e fazendo $t = 0$ obtemos $c_2\omega = v_0$. Logo (2.29) pode ser escrito como

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (2.30)$$

Agora definimos as constantes A e ϕ pelas expressões

$$A = +\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \cos \phi = \frac{x_0}{A} \quad e \quad \sin \phi = \frac{v_0}{A\omega} \quad (2.31)$$

com a restrição $0 \leq \phi < 2\pi$. Usando (2.31) em (2.30) obtemos

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (2.32)$$

Portanto temos um movimento oscilatório em torno da posição de equilíbrio $x = 0$. O afastamento máximo da posição central, A , chama-se *amplitude*. O período da

função cosseno em (2.32), $T = 2\pi/\omega$, é o *período do movimento*. A *frequência* é dada por $f = \omega/2\pi$. O ângulo ϕ é chamado de *ângulo de fase*.

Designando por $v(t)$ a velocidade $\dot{x}(t)$, derivando (2.32) obtemos

$$v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t - \phi). \quad (2.33)$$

Podemos observar que a velocidade é zero quando a massa estiver nas posições mais distantes de $x = 0$. E ela é máxima (em valor absoluto) quando a massa passa pela posição central. Outra observação é que a amplitude A pode ser superior a $|x_0|$, se dermos uma velocidade inicial à massa.

Oscilador Harmônico Amortecido

Se no oscilador houver uma força resistiva proporcional a velocidade, a 2ª lei de Newton nos dá $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$, onde b é uma constante positiva, ou seja

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (2.34)$$

que podemos escrever na forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.35)$$

onde $2\beta = b/m$ e $\omega^2 = k/m$. Como vimos na seção 2.4.2, as soluções de (2.35) representam comportamentos diversos dependendo das raízes da equação característica $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$, ou seja, do sinal do discriminante

$$4\beta^2 - 4\omega^2.$$

i. Amortecimento super-crítico: $\beta > \omega$. Neste caso a solução geral de (2.35), conforme seção 2.4.2, é:

$$x(t) = e^{-\beta t} [c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{-\omega_1 t}], \quad \omega_1 = +\sqrt{\beta^2 - \omega^2}, \quad (2.36)$$

onde as constantes c_1 e c_2 podem ser determinadas em termos da velocidade inicial e da posição inicial. Como $\beta > \omega$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

A velocidade em um instante t é dada por $v(t) = \dot{x}(t)$ assim

$$v(t) = e^{-\beta t} [c_1(\omega_1 - \beta)e^{\omega_1 t} - c_2(\omega_1 + \beta)e^{-\omega_1 t}],$$

mostrando que ela se anula, no máximo, em um único valor de t , o qual é dado pela solução de

$$e^{2\omega_1 t} = \frac{c_2(\omega_1 + \beta)}{c_1(\omega_1 - \beta)}.$$

Isso implica que $\dot{x}(t)$ se anula, no máximo, em um valor de t . Esse movimento de chama *aperiódico* e será melhor visualizado no capítulo 5.

ii. Amortecimento crítico: $\beta = \omega$. Neste caso a solução geral de (2.35) é

$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 + c_2 t). \quad (2.37)$$

Aqui $c_1 = x_0$ e $c_2 = v_0 + \beta x_0$. Aqui também podemos ver que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. A expressão (2.37) nos diz que x pode se anular para, no máximo, um valor de t . A velocidade num instante t é dada por

$$v(t) = e^{-\beta t}[(c_2 - \beta c_1) - c_2 \beta t],$$

e como no caso anterior ela pode se anular em, no máximo, um ponto.

iii. Amortecimento sub-crítico: $\beta < \omega$. Neste caso, a solução geral de (2.35) é

$$x(t) = e^{-\beta t}[c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t], \quad \omega_1 = +\sqrt{\omega^2 - \beta^2}. \quad (2.38)$$

Definimos as constantes A e ϕ como no caso do oscilador harmônico simples

$$A = +\sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \cos \phi = \frac{c_1}{A}, \quad \sin \phi = \frac{c_2}{A}.$$

Obtemos,

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi). \quad (2.39)$$

As constantes A e ϕ podem ser determinadas em termos da posição inicial x_0 e velocidade inicial v_0 . Também temos que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, no entanto o movimento é oscilatório, mas a amplitude ($Ae^{-\beta t}$) decresce exponencialmente. Podemos ver que $x(t)$ se anula nos pontos t_k tais que $\omega_1 t_k - \phi = (2k-1)\pi/2$. Se calcularmos a velocidade $v(t)$ veremos que ela não se anula precisamente em pontos t_k múltiplos (defasados de ϕ/ω_1) de π , ao contrário do que ocorre no movimento harmônico simples.

Oscilador Forçado

No oscilador forçado existe uma força externa atuando no sistema. Vamos tratar apenas o caso em que a força externa é periódica. Considerações adicionais, inclusive do ponto de vista físico serão tratados no Capítulo 5, por hora nos interessa a solução analítica. A equação (2.35) se torna

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_3 t \quad (2.40)$$

onde $2\beta = b/m$, $\omega^2 = k/m$, $\omega_3 > 0$ e $F_0 > 0$ são constantes dadas. Para escrevermos a solução geral de (2.40) necessitamos de uma solução particular dessa equação. Vamos considerar os casos a seguir.

Caso I: ($\beta \neq 0$ e $\omega \neq \omega_3$). Usando o método dos coeficientes a determinar, conforme seção 2.4.3, obtemos uma solução particular de (2.35) na forma

$$\begin{aligned} x_p(t) &= C \cos \omega_3 t + S \sen \omega_3 t, \\ C &= (\omega^2 - \omega_3^2) F_0 D^{-1}, \\ S &= -2\beta \omega_3 F_0 D^{-1}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde

$$D = (\omega^2 - \omega_3^2)^2 + 4\beta^2 \omega_3^2. \quad (2.42)$$

Como fizemos na passagem da expressão (2.30) para (2.32), a solução particular (2.41) pode ser escrita como

$$x_p(t) = A_1 \cos(\omega_3 t - \phi_1) \quad (2.43)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= +\sqrt{C^2 + S^2} = D^{-1/2} F_0, \\ \cos \phi_1 &= C/A_1 \quad e \\ \sen \phi_1 &= S/A_1. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Logo, a solução geral de (2.40) é

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.45)$$

onde x_p é a expressão dada em (2.43) e x_h é a solução da equação homogênea, isto é, uma das expressões dadas em (2.36), (2.37) ou (2.38), dependendo dos valores de β e ω . Desse modo o movimento da massa no oscilador forçado é a superposição de um movimento periódico de período $2\pi/\omega_3$ e de um movimento periódico dado por (2.36), (2.37) ou (2.38). Podemos ver, de (2.45), que $t \rightarrow +\infty$, $x(t) \sim x_p(t)$, isto é, a parte periódica $x_h(t)$ se torna desprezível em comparação com $x_p(t)$, e o movimento é essencialmente periódico e descrito pela expressão (2.43). Por esse motivo a parte x_h é chamada de *transiente*.

Caso II ($\beta = 0$ e $\omega \neq \omega_3$). Neste caso a equação (2.40) se torna

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_3 t. \quad (2.46)$$

Procedendo como no Caso I, obtemos uma solução particular de (2.46):

$$x_p(t) = A_1 \cos(\omega_3 t - \phi_1)$$

onde

$$A_1 = \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_3^2|}$$

Consequentemente, fazendo uso das relações trigonométricas temos

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t.$$

Como $\cos \omega t$ é solução da equação homogênea associada a (2.46), podemos escolher a seguinte solução particular de (2.46):

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_3^2} (\cos \omega_3 t - \cos \omega t). \quad (2.47)$$

Logo a solução geral de (2.46) é obtida usando-se (2.32) e (2.47)

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_3^2} (\cos \omega_3 t - \cos \omega t). \quad (2.48)$$

Portanto, neste caso, o movimento é a superposição de dois movimentos: (i) *Movimento livre*: $A \cos(\omega t - \phi)$, que corresponde ao caso em que não há força externa $F_0 = 0$, ou seja, um movimento harmônico simples, periódico com frequência ω . A frequência ω é chamada *frequência natural*. (ii) *Movimento forçado*: $F_0(\cos \omega_3 t - \cos \omega)/(\omega^2 - \omega_3^2)$, o que corresponde ao oscilador harmônico

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x &= F_0 \cos \omega_3 t \\ x(0) &= \dot{x} = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Como já adiantamos anteriormente, faremos uma análise mais completa do ponto de vista numérico na seção 5.2 do capítulo 5. Porém, faremos a seguir algumas considerações do movimento forçado:

1) Se ω/ω_3 for um número racional então a função $\gamma(t) = \cos \omega_3 t - \cos \omega t$ é periódica. De fato, seja p/q a fração irredutível, que é igual ω/ω_3 . O período fundamental de $\cos \omega_3$ é $2\pi/\omega_3$, e daí $2\pi q/\omega_3$ também é um período. Do mesmo modo, $2\pi p/\omega$ é um período de $\cos \omega t$. Desse modo, $2\pi q/\omega_3 = 2\pi p/\omega$ é um período fundamental de $\gamma(t)$.

2) Se ω/ω_3 não for racional, então $\gamma(t)$ não é periódica, mas é quase periódica.

3) Usando a fórmula trigonométrica de transformação da soma em produto e levando em consideração que a função sen é uma função ímpar, reescrevemos $x_p(t)$ como:

$$x_p(t) = \frac{2F_0}{\omega^2 - \omega_3^2} \text{sen} \frac{(\omega - \omega_3)t}{2} \text{sen} \frac{(\omega + \omega_3)t}{2}. \quad (2.50)$$

Se $\omega \cong \omega_3$ temos que a frequência do primeiro seno em (2.50) é muito menor que a do segundo seno. Seja

$$A(t) = \frac{2F_0}{\omega^2 - \omega_3^2} \text{sen} \frac{(\omega - \omega_3)t}{2}$$

a amplitude (variável) do movimento descrito por (2.49). Essa amplitude tem um longo período quando comparado com o período do segundo seno. Por esse motivo ela se chama *amplitude de lenta variação* e a função

$$\text{sen} \frac{(\omega + \omega_3)t}{2}$$

dizemos que é *modulada* por essa amplitude. O fenômeno descrito por (2.49) com $\omega \sim \omega_3$ (isto é, ω perto de ω_3) é chamado de *batimento*.

Caso III. ($\beta = 0$, $\omega = \omega_3$). Neste caso $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ são soluções da equação homogênea associada a

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega t. \quad (2.51)$$

Desse modo, devemos determinar uma solução particular na forma

$$x_p(t) = t(C \cos \omega t + S \sin \omega t).$$

Substituindo esse resultado em (2.51) obtemos

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (2.52)$$

Desse modo, de (2.32) e (2.52) obtemos a solução geral de (2.51):

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi) + \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (2.53)$$

Portanto, o movimento é a superposição de um movimento harmônico simples e de um movimento oscilatório de amplitude crescente ($F_0 t / 2\omega$) tendendo para o infinito, fenômeno este conhecido como *ressonância*.

Ao invés de adicionarmos um *Caso IV* que seria a análise do oscilador amortecido e forçado considerando de modo geral (2.40) e fazendo, por exemplo, $\beta \neq 0$ e $\omega = \omega_3$ faremos uma breve análise com relação à ressonância.

Frequência de Ressonância. Consideremos agora o oscilador forçado (2.40) com forças variáveis $F_0 \cos \omega_3 t$. As amplitudes das soluções $x_p(t)$ são dadas por

$$A(\omega_3) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_3^2)^2 + 4\beta^2 \omega_3^2}}.$$

De acordo com esse resultado podemos ver que o máximo de $A(\omega_3)$ ocorre quando $\omega_3 = \omega_r$ dada por

$$\omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$$

quando $0 < \beta \leq \frac{\omega}{\sqrt{2}}$. Neste caso ω_r é chamada a *frequência de ressonância* e para ela a amplitude

$$A(\omega_r) = \frac{F_0}{2\beta \sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \quad (2.54)$$

é máxima. Observe que quanto menor β maior será $A(\omega_r)$. No limite ($\beta = 0$) teremos $A(\omega_r) = \infty$, que é o caso de ressonância pura estudada acima.

2.5 Atratores

A equivalência entre uma equação de segunda ordem e um sistema de duas equações de primeira ordem, já foi adiantada na seção A.2 do Apêndice A deste trabalho e pode ser encontrada em [5]. Com esta forma de tratar o problema, podemos traçar algumas considerações adicionais, como segue.

Em vez de olharmos o problema do oscilador harmônico na forma de uma equação de segunda ordem na reta, podemos, em virtude de termos duas condições iniciais, considerá-lo como uma equação diferencial de primeira ordem no plano. Para isso, introduzimos a variável bidimensional (x, y) , onde o escalar x denota a posição e o escalar $y = x'$ a velocidade e assim podemos acompanhar, através de $(x(t), y(t))$, não só a posição do sistema em torno do equilíbrio, mas também, simultaneamente, a velocidade.

Nesse contexto, a equação diferencial de segunda ordem

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

corresponde ao sistema linear

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\omega^2 x(t), \end{cases}$$

que é equivalente à equação vetorial

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

De acordo com [5], a solução $t \mapsto (x(t), y(t))$ do sistema linear (2.55) define uma **trajetória** do campo linear bidimensional

$$A(x, y) = (y, -\omega^2 x)$$

definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

do sistema. Cada **trajetória** desse campo linear descreve uma **órbita** elíptica no plano das coordenadas (x, y) . A figura 5.4 do capítulo 5 ilustra algumas órbitas, obtidas a partir de condições iniciais distintas, com o que se obtém uma representação do **retrato de fase** do oscilador harmônico sem amortecimento.

Para o caso do oscilador harmônico com amortecimento, dado pela equação diferencial de segunda ordem

$$x'' + 2\beta x' + \omega^2 x = 0 \quad (2.56)$$

é equivalente a equação vetorial $(x, y)' = A(x, y)$ definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\beta \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

do sistema. Neste caso, como vimos no exemplo 2.3 acima, o termo -2β é responsável pelo amortecimento do movimento e faz com que a massa perca velocidade e diminua a amplitude. Na realidade, a partir da solução apresentada no exemplo 2.3, a amplitude diminui exponencialmente, tendendo a zero, e a massa oscila ao ponto de equilíbrio na origem. O retrato de fase desse sistema é exibido na figura 5.8 também do capítulo 5. Uma estrutura como essa chama-se **atrator linear**, com um ponto de equilíbrio assintoticamente estável [5].

Ainda seguindo a referência [5], colocamos a seguir o seguinte corolário:

Corolário 2.1. *Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que*

- *sendo reais são negativos, ou*
- *sendo complexos têm parte real negativa,*

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a $0 \in \mathbb{R}^n$, com $t \rightarrow +\infty$.

No corolário acima, " $0 \in \mathbb{R}^n$ " denota a origem do campo linear dado por A , o qual é sempre uma singularidade.

A matriz A do nosso sistema tal como dada acima define um atrator. Para ilustrar considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.4. Considere a equação diferencial do oscilador harmônico com amortecimento cuja matriz A é dada por (2.57). Sejam os parâmetros $\omega^2 = 5$ e $2\beta = 6$

$$x' = Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} x \quad (2.58)$$

é um atrator, pois os autovalores dessa matriz são -1 e -5 .

No próximo capítulo iremos de modo preliminar discutir o estudo dos métodos numéricos, que intrinsecamente está relacionado à série de Taylor e ao polinômio de Taylor.

3 Métodos Numéricos

3.1 Introdução

A solução numérica de equações diferenciais ordinárias é uma das técnicas mais importantes em dinâmica. Como alguns de nossos sistemas mecânicos não possuem solução analítica em termos de funções elementares, resolvemos numericamente as equações que os descrevem. Muitos diferentes métodos podem ser usados para resolver com precisão equações diferenciais ordinárias de diferentes classes. Os algoritmos dos Métodos de Runge-Kutta são, sem dúvida, os mais conhecidos e bastante utilizados. Nas próximas seções iremos ilustrar alguns desses métodos numéricos. Antes, porém, introduzimos noções da série de Taylor e o polinômio de Taylor.

3.2 Série de Taylor

Definição 3.1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Se a é interior ao intervalo I e $a+h \in I$, então podemos escrever, para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot h^{n-1} + R_n(h),$$

$$\text{onde } R_n(h) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_n h)}{n!} \cdot h^n, \text{ com } 0 < \theta_n < 1.$$

A série,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n$$

chama-se série de Taylor da função f em torno do ponto a .

Definição 3.2. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo I e n vezes diferenciável no ponto $a \in I$. O polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é o polinômio $p(h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ (de grau $\leq n$) cujas derivadas de ordem $\leq n$ no ponto $h = 0$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a , isto é, $p^i(0) = f^i(a)$*

$i = 0, 1, \dots, n$. Nessas condições o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é determinado de modo único por

$$p(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}h^n$$

Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$. A reta que melhor aproxima o gráfico de uma função $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em uma vizinhança de um ponto t_0 é a *reta tangente* ao gráfico de y no ponto t_0 :

$$r(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)$$

Esta é a única reta que satisfaz $r(t_0) = y(t_0)$ e $r'(t_0) = y'(t_0)$ ou, de modo equivalente, é a única reta que satisfaz a condição:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - r(t)}{t - t_0} = 0,$$

onde $R(t)$ é o resto da aproximação de y por r . A equação da reta acima define o *Polinômio de Taylor de grau 1 no ponto t_0* :

$$p(t_0) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0). \quad (3.1)$$

A seguir apresentamos um resultado que nos diz que o Polinômio de Taylor de grau n de y no ponto t_0 aproxima y numa vizinhança do ponto t_0 , com erro infinitesimal.

Teorema 3.1. (Fórmula de Taylor Infinitesimal)

Seja $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes diferenciável no ponto $t_0 \in I$. Então, para todo h tal que $t_0 + h \in I$, tem-se:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{h^2}{2!}y''(t_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_0) + R_n(h),$$

com $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(h)}{h^n}$.

Além disso, $p(h) = \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(t_0)}{i!}h^i$ é o único polinômio de grau $\leq n$ tal que $y(t_0 + h) = p(h) + R_n(h)$.

com $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0$

Agora apresentaremos uma outra fórmula de Taylor, que fornece uma estimativa do valor da diferença $y(t_0 + h) - y(t_0)$ para um valor fixo de h , ou seja, sem supor que $h \rightarrow 0$, de modo análogo ao Teorema do Valor Médio, do qual esta fórmula é uma generalização para funções n vezes diferenciável.

Teorema 3.2. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

Seja $y[t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n-1} , n vezes diferenciável no intervalo aberto (t_0, b) . Então existe $c \in (t_0, b)$ tal que

$$y(b) = y(t_0) + y'(t_0)(b - t_0) + \dots + \frac{y^{n-1}(t_0)}{(n-1)!}(b - t_0)^{n-1} + \frac{y^n(c)}{n!}(b - t_0)^n. \quad (3.2)$$

Pondo $b = t_0 + h$, isto é equivalente a dizer que existe θ , com $0 < \theta < 1$ tal que

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \cdots + \frac{y^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{y^n(t_0 + \theta h)}{n!}h^n.$$

Demonstração. Veja em [17] □

A parcela $R_n(b) = \frac{y^{(n)}(c)}{n!}(b - t_0)^n$ que aparece em (3.2) é denominada Resto de Lagrange.

3.3 O Método de Euler

O método de Euler, também conhecido como método das tangentes, é uma das técnicas mais simples para aproximar soluções de equações diferenciais e neste método usaremos as ideias discutidas nas seções anteriores. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

e suponhamos que f seja de classe C^1 (dessa forma f é contínua e sua derivada primeira é contínua). Seja $y = \varphi(t)$ a solução exata deste problema num intervalo $[t_0, b]$. Esta solução existe e é única em virtude do corolário (A.2) e ainda a solução $y = \varphi(t)$ é de classe C^2 uma vez que f é de classe C^1 . Queremos encontrar a aproximação para a solução $y = \varphi(t)$ no intervalo $[t_0, b]$. Como $y : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , consideremos a aproximação de y pelo polinômio de Taylor de grau 1:

$$y(t + h) = y(t) + hy'(t) + R_2(t), \quad (3.4)$$

para $t \in [t_0, b)$, onde $h > 0$ é tal que $t + h \leq b$ e é denominado tamanho de passo.

Como $y'(t) = f(t, y(t))$ a relação (3.4) pode ser escrita como:

$$y(t + h) = y(t) + hf(t, y(t)) + R_2(t) \quad (3.5)$$

Seja $t = t_n$, com $t_n = t_0 + nh$, $n \in \mathbb{N}$ variando de 0 até N . N é o número de passos para se chegar ao fim da aproximação da solução desejada e deve ser um numero natural. Como $t_0 \leq t \leq b$, devemos tomar N o maior natural menor do que D , onde D é dado por:

$$D = \frac{b - t_0}{h}. \quad (3.6)$$

Reescrevendo (3.5) com $t = t_n$ e $n \in \{0, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$, temos:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + R_2(t_n).$$

Isso conclui o processo de iteração de um PVI a partir do dado inicial, $y(t_0) = y_0$ do problema. Temos, assim, que para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, $y(t_n)$ aproxima o valor da solução $\varphi(t)$ no ponto t_n . Esse processo é o denominado *método de Euler ou método da tangente*. Esta aproximação possui a vantagem de ser de fácil implementação, porém o erro vai se acumulando ao longo do processo. Para o método de Euler ser aplicado computacionalmente é preciso tomar um valor de passo h , saber o "tempo" final t para dar início às iterações utilizando a fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad (3.7)$$

sendo $y_n = y(t_n)$ e $t_n = t_0 + nh$.

A seguir indicamos um exemplo de algoritmo computacional para o método de Euler.

- Passo 1. Defina $f(t, y)$
- Passo 2. Insira os valores iniciais de t_0 e y_0
- Passo 3. Insira o tamanho do passo h e o número de passo n
- Passo 4. Escreva t_0 e y_0
- Passo 5. Para j de 1 até n Calcule
- Passo 6. $k1 = f(t, y)$
 $y = y + h * k1$
 $t = t + h$
 Escreva t e y
- Passo 7. Fim

Exemplo 3.1. Considere o Problema de Valor Inicial dado em [32]. Utilizando o método de Euler, obtenha uma aproximação do valor de $y(1.5)$ para a solução de

$$y' = 2ty, \quad y(1) = 1. \quad (3.8)$$

esta equação é do tipo variável separável, cuja solução analítica $y = e^{t^2-1}$ pode ser facilmente verificada.

Vamos resolver o problema (3.8) utilizando o Método de Euler proposto acima, inicialmente com valor de passo $h = 0.1$ e, em seguida, com $h = 0.05$ para efeito de comparação do resultados. Para encontrar a solução numérica, começamos as iterações utilizando a fórmula (3.7). Para $n = 0$, temos que $t_0 = 1$ e $y_0 = 1$. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (0.1)(2t_0y_0) \\ &= 1 + (0.1)[2(1)(1)] = 1.2 \end{aligned}$$

que é uma estimativa do valor de $y(1.1)$. Procedendo como anteriormente obtemos os seguintes resultados, que ilustramos na Tabela 3.1.

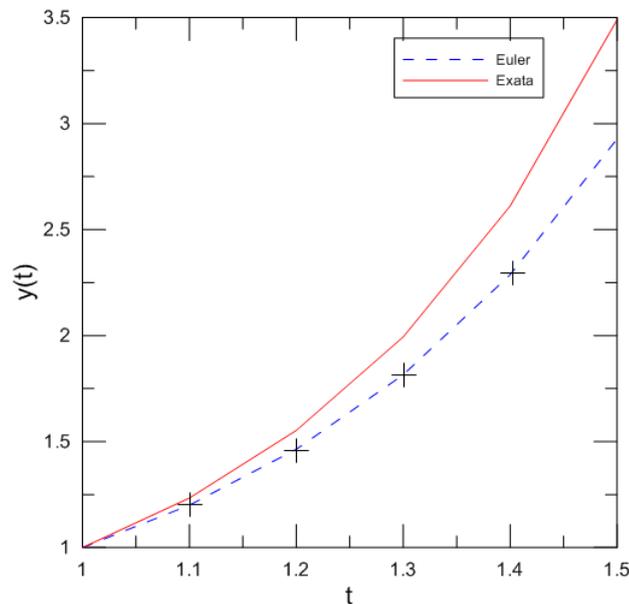
Tabela 3.1: Método de Euler Simples, com $h = 0.1$

t_n	y_n	Exata	Erro Absoluto
1.00	1.0000	1.0000	0.0000
1.10	1.2000	1.2337	0.0337
1.20	1.4640	1.5527	0.0887
1.30	1.8154	1.9937	0.1784
1.40	2.2874	2.6117	0.3244
1.50	2.9278	3.4904	0.5625

No caso deste exemplo, com passo $h = 0.1$, o erro relativo é de 16% no cálculo da aproximação de $y(1.5)$ e isso não é aceitável num tratamento numérico.

No exemplo 3.1, os valores exatos foram calculados a partir da solução conhecida $y = e^{x^2-1}$ e definimos o **erro absoluto** como $|valor\ verdadeiro - aproximado|$. Por outro lado, o **erro relativo percentual** é:

$$\frac{|valor\ verdadeiro - aproximado|}{|valor\ verdadeiro|} \times 100.$$

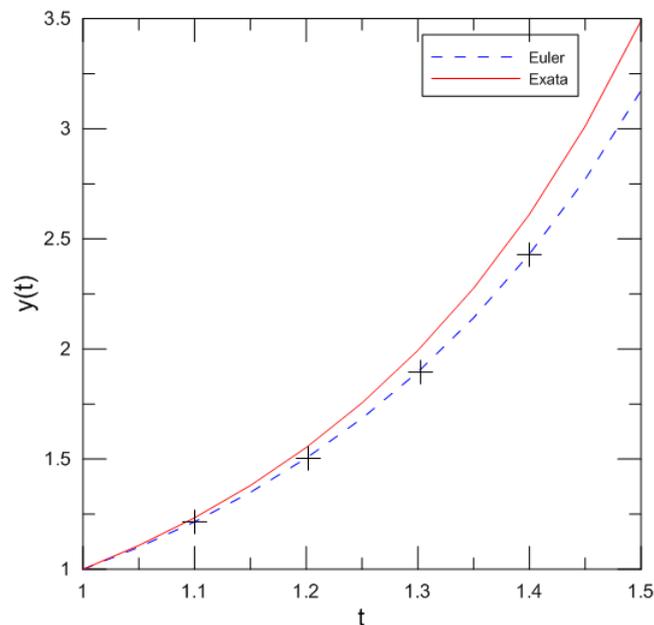
Figura 3.1: Gráfico dos valores da Tabela 3.1, com $h = 0.1$.

Observando a Figura 3.1, vemos que os pontos estão distantes da solução exata. Isso mostra que o processo nos forneceu uma aproximação com erro excessivo. Vamos aplicar o método para $h = 0.05$, onde ilustramos os resultados na Tabela 3.2 a seguir:

Tabela 3.2: Método de Euler com $h = 0.05$

t_n	y_n	Exata	Erro Absoluto
1.00	1.0000	1.0000	0.0000
1.05	1.1000	1.1079	0.0079
1.10	1.2155	1.2337	0.0182
1.15	1.3492	1.3806	0.0314
1.20	1.5044	1.5527	0.0483
1.25	1.6849	1.7551	0.0702
1.30	1.8955	1.9937	0.0982
1.35	2.1419	2.2762	0.1343
1.40	2.4311	2.6117	0.1806
1.45	2.7714	3.0117	0.2403
1.50	3.1733	3.4904	0.3171

Observamos na Tabela 3.2 que reduzindo-se o passo pela metade, isto é, $h = 0.05$, obtém-se uma ligeira melhora na aproximação de $y(1.5)$. Porém, à custa de dobrarmos o número de cálculos.

Figura 3.2: Gráfico dos valores da Tabela 3.2, com $h = 0.05$

Com base na Tabela 3.2 e a Figura 3.2, podemos ver que quanto menor o passo h , mais a solução numérica se aproxima da solução exata, uma vez que o erro diminui consideravelmente. No entanto, o esforço computacional aumentou.

3.4 Método de Euler Melhorado ou método de Heun

Como vimos, para muitos problemas o Método de Euler requer um tamanho de passo muito pequeno para se ter uma determinada precisão na aproximação. Podemos conseguir uma considerável melhoria utilizando a fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \quad (3.9)$$

$$\text{onde } y_{n+1}^* = y_n + hf(t_n, y_n)$$

A Equação 3.9 é conhecida como fórmula de Euler melhorada, ou fórmula de Heun. Neste caso, os valores $f(t_n, y_n)$ e $f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)$ são aproximações do coeficiente angular da curva $(t_n, y(t_n))$ e $(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ e, desse modo, o quociente

$$\frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2}$$

pode ser interpretado como um coeficiente angular médio no intervalo entre t_n e t_{n+1} . No lugar de avançarmos ao longo da reta tangente ao ponto (t_0, y_0) de coeficiente angular dada por $f(t_0, y_0)$ até o ponto (t_1, y_1) obtido pelo método de Euler, avançamos ao longo da reta por (t_0, y_0) com coeficiente angular médio, dado pela média entre $f(t_0, y_0)$ e $f(t_1, y_1)$ até atingirmos t_1 . Isso torna o método de Euler melhorado mais preciso que o método de Euler. Podemos dizer [32], também, que o valor de

$$y_1^* = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

prediz um valor de $y(t_1)$, enquanto que

$$y_1 = y_0 + h \frac{f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^*)}{2}$$

corrige essa estimativa.

Exemplo 3.2. Vamos aplicar o método de Euler melhorado para obter o valor aproximado de $y(1.5)$ do PVI do Exemplo 3.1, assim podemos comparar ambos os métodos. Para que possamos comparar os resultados, tomamos $h = 0.1$ e $h = 0.05$.

Calculamos inicialmente

$$y_1^* = y_0 + (0.1)(2t_0y_0) = 1.2.$$

E então, usando (3.9), temos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (0.1) \frac{2t_0y_0 + 2t_1y_1^*}{2} \\ &= 1 + (0.1) \frac{2(1)(1) + 2(1.1)(1.2)}{2} = 1.232. \end{aligned}$$

Prosseguindo dessa forma, construímos as Tabelas 3.3 e 3.4, que dão os valores comparativos dos cálculos para $h = 0.1$ e $h = 0.05$, respectivamente.

Tabela 3.3: Euler Melhorado com $h = 0.1$

t_n	y_n	Exata	Erro Absoluto
1.0	1.0000	1.0000	0.0000
1.1	1.2320	1.2337	0.0017
1.2	1.5479	1.5527	0.0048
1.3	1.9832	1.9937	0.0106
1.4	2.5908	2.6117	0.0209
1.5	3.4509	3.4904	0.0394

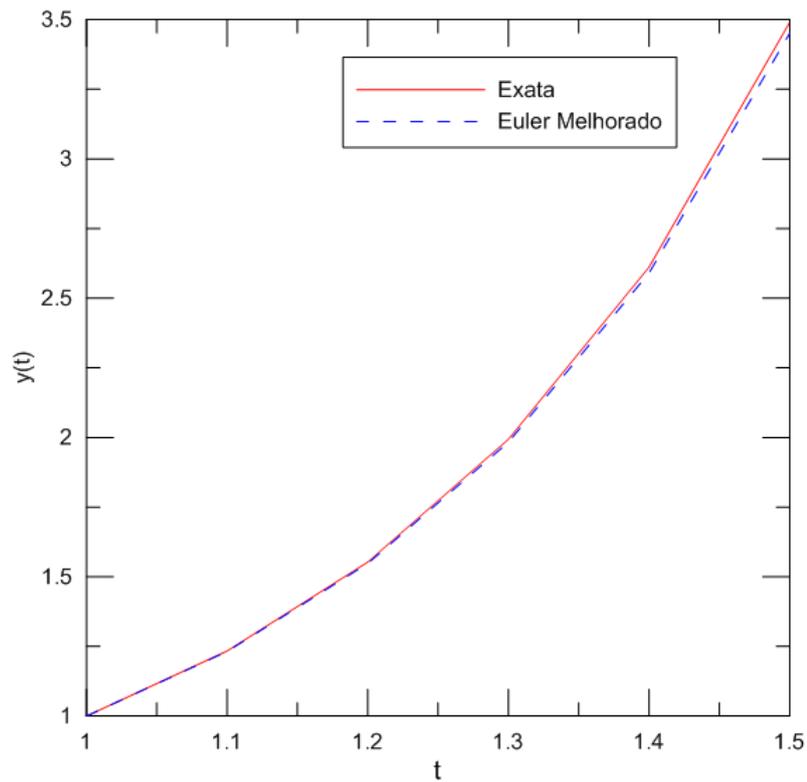
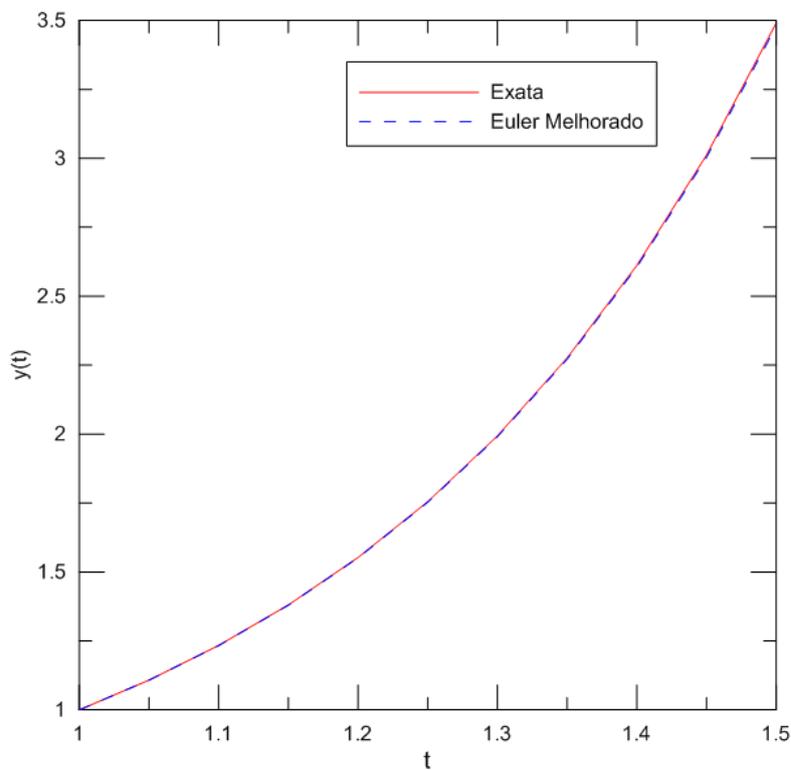
Figura 3.3: Gráfico dos valores da Tabela 3.3, com $h = 0.1$.

Tabela 3.4: Euler Melhorado com $h = 0.05$

t_n	y_n	Exata	Erro Absoluto
1.00	1.0000	1.0000	0.0000
1.05	1.1077	1.1079	0.0002
1.10	1.2332	1.2337	0.0004
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1.40	2.6060	2.6117	0.0057
1.45	3.0038	3.0117	0.0079
1.50	3.4795	3.4904	0.0108

Figura 3.4: Gráfico dos valores da Tabela 3.4, com $h = 0.05$.

Como podemos ver nas Figuras 3.3 e 3.4 os resultados obtidos estão bem mais próximos da solução real, se compararmos com o Método de Euler simples. Nos exemplos da Figura 3.3 e 3.4, a diminuição do passo não nos forneceu melhorias muito relevantes neste exemplo.

O algoritmo computacional neste caso pode ser facilmente modificado para implementação do Método de Euler Melhorado, do seguinte modo:

- Passo 1. Defina $f(t, y)$
 Passo 2. Insira os valores iniciais de t_0 e y_0
 Passo 3. Insira o tamanho do passo h e o número de passo n
 Passo 4. Escreva t_0 e y_0
 Passo 5. Para j de 1 até n Calcule
 Passo 6. $k1 = f(t, y)$
 $k2 = f(t + h, y + h * k1)$
 $y = y + (h/2) * (k1 + k2)$
 $t = t + h$
 Escreva t e y
 Passo 7. Fim

O próximo método que veremos é o mais interessante com relação à precisão, o chamado Método de Runge-Kutta.

3.5 O Método de Runge-Kutta

Nesta seção iremos tratar do método de *Runge – Kutta* que é o mais famoso e também um dos mais precisos para obter soluções aproximadas de equações diferenciais. Os métodos de Runge-Kutta nascem do método de Euler, porém não é único, existem vários dependendo da ordem de aproximação, onde o mais popular é o Runge-Kutta de quarta ordem.

Cada método de Runge-Kutta consiste em comparar com um polinômio de Taylor conveniente. Assim, quando comparamos com um polinômio de grau 1, teremos o Runge-Kutta de primeiro grau. Nesse processo obtém-se a precisão do Método de Taylor sem ter de calcular suas derivadas de ordem superior.

Pelo Teorema 3.2, sendo y uma função de classe C^k , $(k + 1)$ -vezes diferenciável num intervalo que contenha t_0 e t , então existe $\xi \in (t_0, t)$ tal que

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \dots + \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k + 1)!}(t - t_0)^{k+1}. \quad (3.10)$$

Usaremos (3.10) para descrever os métodos de Runge-Kutta a seguir.

3.5.1 Runge-Kutta de primeira ordem

Substituindo t_0 por t_n e t por $t_{n+1} = t_n + h$, a fórmula (3.10) fica:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)h + \dots + \frac{y^{(k)}(t_n)}{k!}h^k + \frac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k + 1)!}h^{k+1}. \quad (3.11)$$

em que ξ é um número entre t_n e t_{n+1} .

Se tivermos $k = 1$ na equação (3.11) e se o resto $\frac{y''(\xi)}{2}h^2$ for pequeno, teremos a fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)h = y_n + hf(t_n, y_n). \quad (3.12)$$

Desse modo, podemos concluir que o procedimento de Runge-Kutta de primeira ordem é equivalente ao método básico de Euler.

3.5.2 Runge-Kutta de segunda ordem

Agora, fazendo $k = 2$ na equação (3.11), temos:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)h + \frac{y''(t_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!}h^3, \quad (3.13)$$

Com $\xi \in (t_n, t_{n+1})$.

A ideia é buscar uma função aproximada φ de forma que a equação (3.13) possa ser escrita na forma:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\varphi(t_n, y_n) \quad (3.14)$$

onde $\varphi = ak_1 + bk_2$. Assim, devemos encontrar constantes a, b, k_1 e k_2 de modo que $y(t_n) + h\varphi(t_n, y_n)$ seja igual ao polinômio de Taylor de y de grau 2, isto é:

$$y(t_n) + y'(t_n)h + \frac{y''(t_n)}{2!}h^2 = y(t_n) + h\varphi(t_n, y_n)$$

$$h \left[y'(t_n) + \frac{y''(t_n)}{2!}h \right] = h(ak_1 + bk_2) \quad (3.15)$$

$$\left[y'(t_n) + \frac{y''(t_n)}{2!}h \right] = \alpha k_1 + \beta k_2.$$

Seja $k_1 = y'(t_n) = f(t_n, y_n)$ e $k_2 = f(t_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1)$. Vamos expandir k_2 num polinômio de Taylor de grau 1 centrado em (t_n, y_n) , isto é, com $h = 0$:

$$k_2 = f(t_n, y_n) + \alpha h \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \beta h f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} + R_2(t_n).$$

Sendo, como vimos anteriormente, $R_2(t_n)$ o resto de Lagrange para o polinômio de grau 1. Assim, desprezando $R_2(t_n)$ uma vez que queremos que seja suficientemente pequeno para que possa ser desconsiderado, calculemos $ak_1 + bk_2$:

$$ak_1 + bk_2 = a(f(t_n, y_n)) + b \left[f(t_n, y_n) + \alpha h \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \beta h f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} \right]$$

$$= (a + b)f(t_n, y_n) + b\alpha h \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + b\beta h f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y}.$$

Pela última igualdade de (3.15) e pelo que vimos até aqui, verificamos que

$$y'(t_n) + \frac{h}{2}y''(t_n) = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} \right] \quad (3.16)$$

só ocorre sempre que as constantes verificam

$$a + b = 1, \quad b\alpha = \frac{1}{2}, \quad b\beta = \frac{1}{2}.$$

Isto é, (3.14) concorda com um desenvolvimento de Taylor até o terceiro termo, ou seja, uma comparação com um polinômio de grau 2, pelo que vimos.

Zill e Cullen [32] observam que, quando $a = 1/2$, $b = 1/2$, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, então (3.14) se reduz ao método de Euler melhorado. De onde se conclui que a fórmula de Taylor com três termos é equivalente a fórmula de Euler melhorado.

Os métodos de Runge-Kutta de ordem mais elevada são obtidos de modo semelhante, o que permite afirmar que um Runge-Kutta de terceira ordem é uma comparação com o polinômio de Taylor de grau três, ou seja, até o quarto termo. Esse método tem pouca ou nenhuma diferença do método de Euler melhorado. Assim, apresentaremos na próxima seção o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

3.5.3 Runge-Kutta de quarta ordem

O método de Runge-Kutta de quarta ordem consiste em determinar constantes apropriadas tais que uma fórmula como

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (3.17)$$

concorde com um desenvolvimento de Taylor até o quinto termo, isto é, uma comparação com um polinômio de grau 4.

Se fizermos $k = 4$ na equação (3.11), temos:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)h + \frac{y''(t_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(t_n)}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(t_n)}{4!}h^4 + \frac{y^{(5)}(\xi)}{5!}h^5 \quad (3.18)$$

onde $\xi \in (t_n, t_{n+1})$.

Sendo as constantes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 de (3.17) dadas por:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 h k_2) \\ k_4 &= f(t_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_4 k_2 + \beta_5 h k_3). \end{aligned}$$

Como anteriormente, temos um sistema possível e indeterminado. Mais uma vez a solução fica à critério da escolha das constantes α e β do sistema. A solução mais conhecida enunciada em [32] é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Exemplo 3.3. Vamos aplicar o método de Runge-Kutta de quarta ordem ao Exemplo (3.1). Isto é, queremos uma aproximação de $y(1.5)$ para a solução de

$$y' = 2ty, \quad y(1) = 1.$$

Usaremos, inicialmente $h = 0.1$. De (3.19), obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= (0.1)f(t_0, y_0) = (0.1)(2t_0y_0) = 0.2 \\ k_2 &= (0.1)f(t_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.2)) \\ &= (0.1)2(t_0 + \frac{1}{2}(0.1))(y_0 + \frac{1}{2}(0.2)) = 0.231 \\ k_3 &= (0.1)f(t_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.231)) \\ &= (0.1)2(t_0 + \frac{1}{2}(0.1))(y_0 + \frac{1}{2}(0.231)) = 0.234255 \\ k_4 &= (0.1)f(t_0 + 0.1, y_0 + 0.234255) \\ &= (0.1)2(t_0 + 0.1)(y_0 + 0.234255) = 0.2715361 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= \frac{1}{6}(0.2 + 2(0.231) + 2(0.234255) + 0.2715361) = 1.23367435. \end{aligned}$$

A seguir apresentamos as tabelas com os demais valores para $h = 0.1$ e $h = 0.05$, respectivamente. Como nos casos anteriores, cada elemento é arredondado para quatro decimais.

Tabela 3.5: Runge-Kutta de 4ª ordem - $h = 0.1$

t_n	y_n	Exata	Erro Absoluto
1.0	1.0000	1.0000	0.0000
1.1	1.2337	1.2337	0.0000
1.2	1.5527	1.5527	0.0000
1.3	1.9937	1.9937	0.0000
1.4	2.6116	2.6117	0.0001
1.5	3.4902	3.4904	0.0001

Tabela 3.6: Runge-Kutta de 4ª ordem - $h = 0.05$

t_n	y_n	Exata	Erro Absoluto
1.00	1.0000	1.0000	0.0000
1.05	1.1079	1.1079	0.0000
1.10	1.2337	1.2337	0.0000
⋮	⋮	⋮	⋮
1.45	3.0117	3.0117	0.0000
1.50	3.4903	3.4904	0.0001

Observando as Tabelas (3.5) e (3.6), se considerarmos um erro absoluto a partir da quarta casa decimal, não há necessidade de utilizar tamanhos menores de passo. Isso mostra a grande vantagem e precisão do método de Runge-Kutta. A figura 3.5 ilustra esses resultados.

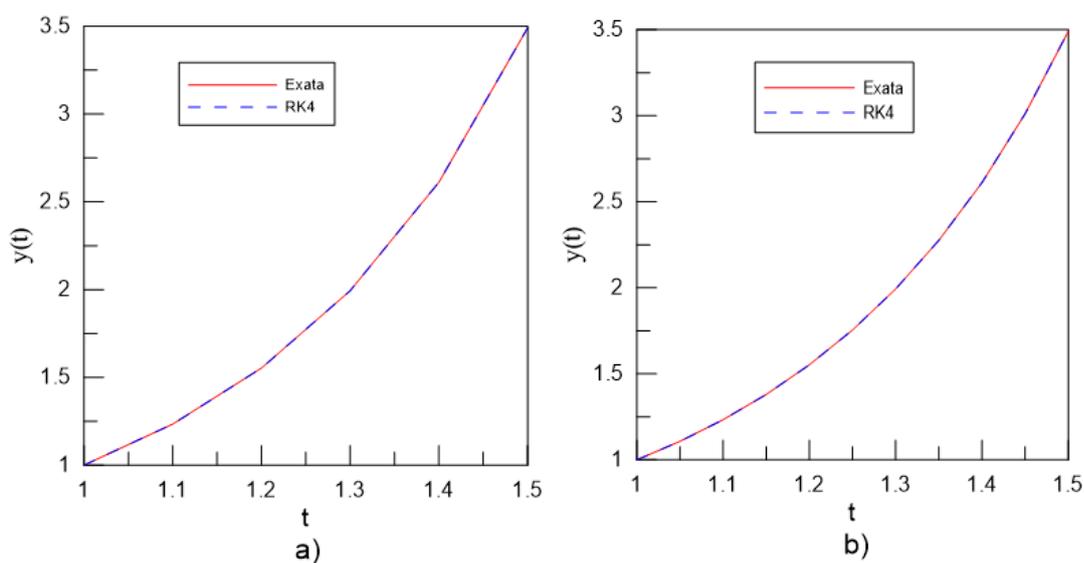


Figura 3.5: Gráfico dos valores das Tabelas 3.5 - a), e 3.6 - b).

Um algoritmo para o método de Runge-Kutta de quarta ordem pode ser dado por:

- Passo 1. Defina $f(t, y)$
 Passo 2. Insira os valores iniciais de t_0 e y_0
 Passo 3. Insira o tamanho do passo h e o número de passos n
 Passo 4. Escreva t_0 e y_0
 Passo 5. Para j de 1 até n Calcule
 Passo 6. $k_1 = f(t, y)$
 $k_2 = f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k_1)$
 $k_3 = f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k_2)$
 $k_4 = f(t + h, y + h * k_3)$
 $y = y + (h/6) * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)$
 $t = t + h$
 Escreva t e y
 Passo 7. Fim

É comum escrever o "Passo 6" acima, como:

- Passo 6. $k_1 = f(t, y)$
 $k_2 = h * f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * k_1)$
 $k_3 = h * f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * k_2)$
 $k_4 = h * f(t + h, y + k_3)$
 $y = y + (1/6) * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)$
 $t = t + h$

3.6 Equações e Sistemas de Ordem Superior

Muitos sistemas dinâmicos são descritos por equações diferenciais de segunda ordem, como é o caso da 2ª lei de Newton por exemplo. Outros sistemas que envolvem equações de segunda ordem são a equação de onda, a do calor e muitas outras. Os sistemas mecânicos que veremos neste trabalho envolvem equações diferenciais de segunda ordem.

3.6.1 Problema de Valor Inicial de Segunda Ordem

Os procedimentos numéricos que vimos anteriormente aplicam-se a uma equação diferencial de primeira ordem $dy/dx = f(x, y)$ sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$. Tal como pode ser visto na Seção A.2 do Apêndice A, resolver uma equação diferencial de ordem m é equivalente a resolver um sistema de m equações diferenciais de primeira ordem.

Desta forma, um problema de valor inicial de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (3.20)$$

pode ser reduzido a um sistema de primeira ordem. Fazendo $y' = z$, a equação (3.20) se torna

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \quad (3.21)$$

A solução numérica de (3.21) pode ser feita pela aplicação de um método particular, como o método de Euler por exemplo, a cada uma das equações do sistema resultante. Assim, temos:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + hf(x_n, y_n, z_n) \end{cases} \quad (3.22)$$

Como exemplo ilustrativo, tomamos a seguinte equação diferencial e condições iniciais:

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

vamos utilizar o método de Euler para obter a aproximação de $y(0, 2)$, se $y(x)$ é a solução deste problema de valor inicial. Fazendo a substituição $y' = z$, a equação é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -xz - y \end{cases}$$

Desse modo, por (3.22), temos

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hz_n \\ z_{n+1} &= z_n + h[-x_n z_n - y_n]. \end{aligned}$$

Tomando o valor do passo $h = 0.1$ e sendo $y_0 = 1$, $z_0 = 2$, temos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (0.1)z_0 = 1 + (0.1)2 = 1.2 \\ z_1 &= z_0 + (0.1)[-x_0 z_0 - y_0] = 2 + (0.1)[-(0)(2) - 1] = 1.9 \\ y_2 &= y_1 + (0.1)z_1 = 1.2 + (0.1)(1.9) = 1.39 \\ z_2 &= z_1 + (0.1)[-x_1 z_1 - y_1] = 1.9 + (0.1)[-(0.1)(1.9) - 1.2] = 1.761. \end{aligned}$$

Isto é, $y(0, 2) \approx 1, 39$ e $y'(0, 2) \approx 1, 761$.

De maneira geral, um problema de valor inicial para um sistema de segunda ordem é:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Do mesmo modo como fizemos em (3.22), para aproximar uma solução desse problema, aplicamos um método numérico a cada equação em (3.23). Para o **Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem** temos a seguinte forma geral:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\end{aligned}\tag{3.24}$$

onde

$$\begin{aligned}m_1 &= hf(t_n, x_n, y_n) \\k_1 &= hg(t_n, x_n, y_n) \\m_2 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_1, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\k_2 &= hg(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_1, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\m_3 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_2, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\k_3 &= hg(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_2, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\m_4 &= hf(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3) \\k_4 &= hg(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3)\end{aligned}\tag{3.25}$$

Exemplo 3.4. Considere a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$x'' + 2ax' + q^2x = 0$$

com as condições iniciais

$$x(0) = 1; \quad x'(0) = 0.$$

Nas figuras 3.6 e 3.7, a seguir, mostramos os resultados para $h = 0.2$, com $n = 150$ iterações. São considerados diferentes valores para os parâmetros a e q , como segue.

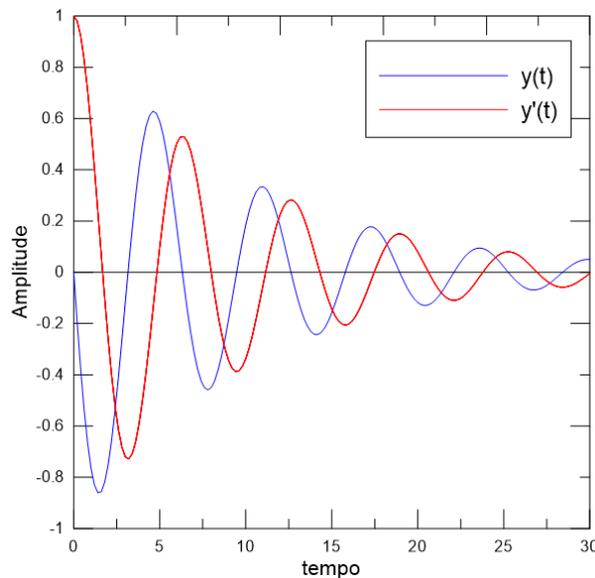


Figura 3.6: Solução numérica do PVI do exemplo 3.4: $y \times t$ (vermelho); $y' \times t$ (azul); $a = 0.1$ e $q = 1$.

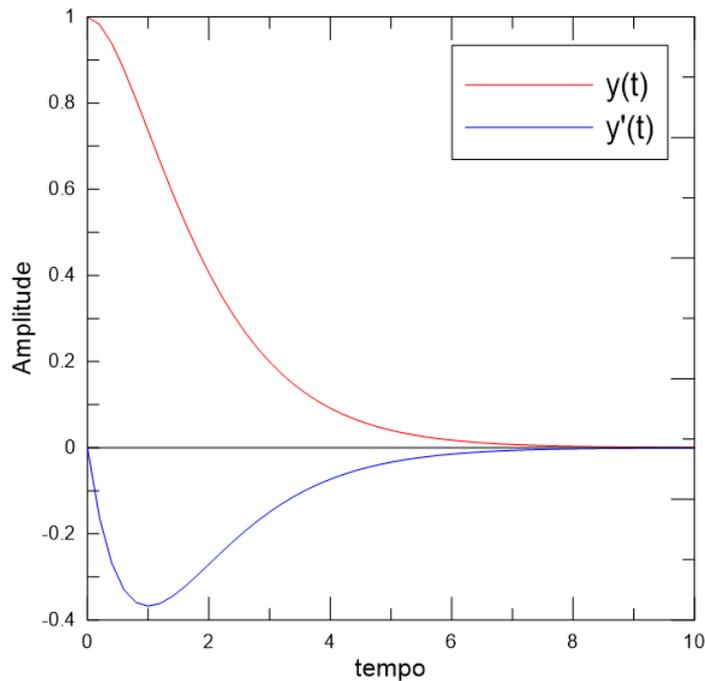


Figura 3.7: Solução numérica do PVI do exemplo 3.4: $y \times t$ (vermelho); $y' \times t$ (azul), com $a = 1$ e $q = 1$.

Exemplo 3.5. Agora considere a seguinte equação diferencial¹:

$$m\theta'' + \frac{mg}{l} \text{sen } \theta = 0$$

Para aplicar o método de Runge-Kutta pomos $y_1 = \theta$ e $y_2 = \theta'$ e, então, fazemos a seguinte substituição:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{g}{l} \text{sen } \theta \end{cases}$$

sujeito a condição inicial:

$$\begin{cases} y_1(0) &= \theta_0 = \pi/6 \\ y_2(0) &= \theta'_0 = 0 \end{cases}$$

Para resolver numericamente este exemplo, utilizamos os dados e condições gerais resumidos na tabela 3.7 a seguir.

¹As equações diferenciais dos exemplos (3.4) e (3.5) são as equações do Oscilador Harmônico e do Pêndulo Simples, respectivamente, e serão estudadas detalhadamente no capítulo 5. Por essa razão não nos preocupamos em dar o devido sentido físico aos parâmetros mencionados, mas tão somente resolver a equação diferencial numericamente.

Tabela 3.7: Parâmetros considerados para solução do Exemplo 3.5.

t_0	θ_0	θ'_0	n	h	g	l
0	$\pi/6$	0	2000	0.01	9.81	10

A figura 3.8, a seguir, mostra o gráfico de $\theta \times t$, com as condições da tabela 3.7.

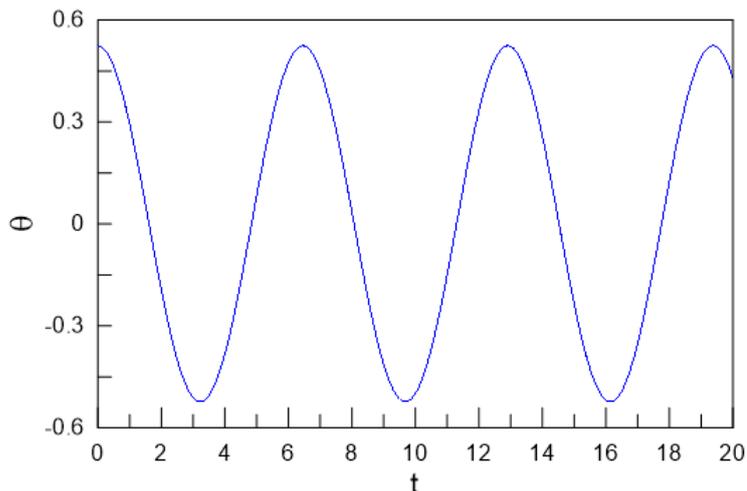


Figura 3.8: Variação do ângulo θ em função do tempo para o problema do exemplo 3.5, resolvido numericamente pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

3.7 Comparação entre os métodos numéricos

Os valores das tabelas 3.8 e 3.9 contém, para efeito de melhor comparação, os resultados já apresentados anteriormente, que são os resultados dos diferentes métodos aplicados ao PVI:

$$y' = 2ty, \quad y(1) = 1.$$

Tabela 3.8: Comparação de métodos numéricos com $h = 0.1$

t_n	Euler	Euler Melhorado	Runge-Kutta de 4ª ordem	Valor Exato
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.2000	1.2320	1.2337	1.2337
1.20	1.4640	1.5479	1.5527	1.5527
1.30	1.8154	1.9832	1.9937	1.9937
1.40	2.2874	2.5908	2.6116	2.6117
1.50	2.9278	3.4509	3.4902	3.4904

Tabela 3.9: Comparação de métodos numéricos com $h = 0.05$

t_n	Euler	Euler Melhorado	Runge-Kutta de 4ª ordem	Valor Exato
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.05	1.1000	1.1077	1.1079	1.1079
1.10	1.2155	1.2332	1.2337	1.2337
1.15	1.3492	1.3798	1.3806	1.3806
1.20	1.5044	1.5514	1.5527	1.5527
1.25	1.6849	1.7531	1.7551	1.7551
1.30	1.8955	1.9909	1.9937	1.9937
1.35	2.1419	2.2721	1.9937	1.9937
1.40	2.4311	2.6060	2.6117	2.6117
1.45	2.7714	3.0038	3.0117	3.0117
1.50	3.1733	3.4795	3.4903	3.4904

Observando as Tabelas 3.8 e 3.9 podemos notar que, para o exemplo tomado, a precisão do método de Runge-Kutta de 4ª ordem é da ordem de 10^{-4} , enquanto que o método de Euler melhorado é 10^{-2} e Euler simples é 10^{-1} . Este é um exemplo ilustrativo que exemplifica o fato do método de Runge-Kutta de 4ª ordem ser o mais preciso dentre os métodos estudados. É bem conhecido na literatura que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem fornece resultados bastante confiáveis, o que justifica sua escolha nas implementações deste trabalho.

3.8 Representação no Espaço de Fase

Como havíamos adiantado no capítulo anterior, espaço de fase é uma ferramenta muito útil na compreensão do comportamento de sistemas dinâmicos e consiste na representação das variáveis relevantes de um sistema no plano. Uma **trajetória** no espaço de fase representa a evolução temporal do sistema, através da evolução de suas variáveis relevantes.

Quando o sistema é não-integrável, isto é, não admite solução algébrica, podemos simular sua evolução temporal por meio de integração numérica, representando essa evolução no espaço de fase. Cada ponto nesse espaço, portanto, representa um estado do sistema, e sua evolução temporal pode ser visualizada por uma trajetória nesse espaço. O **retrato de fase** é a visualização de várias trajetórias, partindo de condições iniciais diferentes, e serve para se ter um panorama completo da dinâmica de um determinado sistema.

Para ilustrar, vamos considerar o caso dos exemplos (3.4) e (3.5), onde o sistema consiste de um corpo que está oscilando, e seus estados podem ser caracterizados pelos valores posição e velocidade.

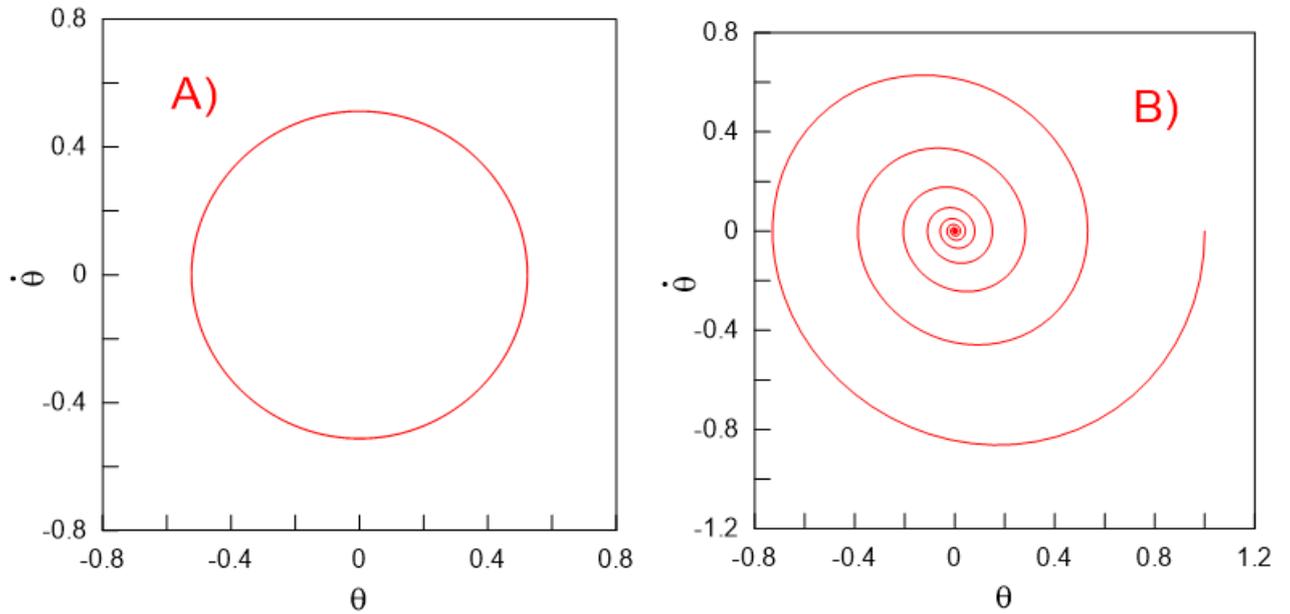


Figura 3.9: Posição \times velocidade. A) Espaço de fase para o sistema dado no exemplo 3.5. As amplitudes são regulares visto que não há nenhuma dissipação, portanto, uma condição do espaço de fase tende a oscilar regularmente no entorno de zero; B) Espaço de fase para o sistema dado no exemplo 3.4 em que $a = 0.1$ e $q = 1$. As orbitas são espirais assintoticamente estáveis com um ponto de equilíbrio na origem. Toda trajetória "espirala" tendendo ao ponto zero.

4 Transformada de Fourier e Inversa

Neste capítulo iremos introduzir a definição da Transformada de Fourier e veremos algumas de suas propriedades, bem como um estudo do ponto de vista numérico que é o nosso objetivo inicial. Seguiremos neste capítulo as referências [3], [8], [20] e [29].

Antes de dar uma definição rigorosa da Transformada de Fourier, vamos motivar esta definição a partir da série de Fourier.

4.1 Série de Fourier

A ideia básica por trás da série de Fourier é que toda função periódica pode ser expressa em termos de funções harmônicas simples (senoidais e cossenoidais).

Definição 4.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período L se $f(x + L) = f(x)$ para todo x .*

Consequentemente, se f é periódica de período L então para qualquer k inteiro positivo ou negativo, temos que $f(x) = f(x + kL)$. O menor período positivo é chamado de *período fundamental*. No entanto é comum usar apenas a expressão período. Assim, por exemplo, quando dizemos que 2π é o período da função $\sin x$, estamos nos referindo ao período fundamental. É claro que 4π , -4π , 6π são também períodos de $\sin x$.

Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são periódicas de período L , então sua combinação linear $h(x) = af(x) + bg(x)$, onde a e b são constantes, também é periódica de período L . A Figura 4.1, abaixo, mostra o exemplo de uma combinação linear de duas funções periódicas.

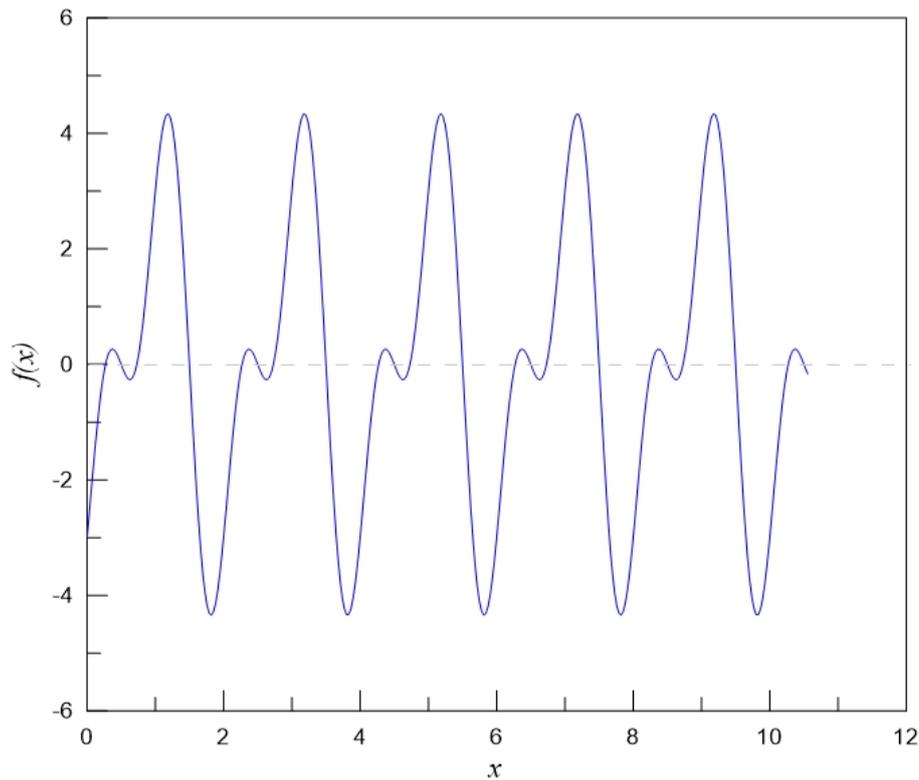


Figura 4.1: Exemplo de função periódica constituída de uma combinação linear de duas funções periódicas: $f(x) = 2 \operatorname{sen}(2\pi x) - 3 \operatorname{cos}(\pi x)$.

Definição 4.2. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre um intervalo real $[a, b]$ se f e $|f|$ forem integráveis:

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty \quad (4.1)$$

Definição 4.3. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre a reta real se f e $|f|$ forem integráveis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad (4.2)$$

Definição 4.4. (Série de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável. A série de Fourier de f é a série trigonométrica:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.3)$$

onde a_n, b_n são os **coeficientes de Fourier** de f definidos por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0; \quad (4.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1, \quad (4.5)$$

As definições 4.2 e 4.3 garantem que os coeficientes de Fourier estejam bem definidos [8]. A introdução do $1/2$ antes do a_0 em (4.3) é arbitrária e apenas garante que tenhamos uma única fórmula para todos os a_n .

O sinal " \sim " na equação (4.3) pode ser substituída por " $=$ " apenas se tivermos certeza que a série converge e que sua soma é igual a $f(x)$.

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será *seccionalmente contínua* se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie ou tipo salto, isto é, onde a função possui, no ponto considerado, limites à direita e à esquerda porém distintos) em qualquer intervalo limitado. Isto é, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x). \quad (4.6)$$

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será *seccionalmente diferenciável* se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

Agora enunciamos um resultado que fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f .

Teorema 4.1. (TEOREMA DE FOURIER). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , dada em (4.3), converge, em cada ponto x , para*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.7)$$

Demonstração. Veja [8]. □

4.1.1 Integral de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável no intervalo finito $[-L, L]$ e absolutamente integrável nesse intervalo. Isto é, $f(x)$ pode ser expandida como uma série de Fourier. O teorema da integral de Fourier estabelece que:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du. \quad (4.8)$$

A equação (4.8) é válida se não houver pontos de descontinuidade; caso contrário, substitui-se $f(x)$ por $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Destacamos que estas condições são suficientes, porém não necessárias.

O interior da integral em (4.8) é chamado de *Integral de Fourier*, e a fórmula inteira é chamada de *Teorema da Integral de Fourier* [29].

Usando a fórmula para o cosseno da diferença, podemos escrever (4.8) como:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda \quad (4.9)$$

onde

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \operatorname{sen} \lambda u du. \quad (4.10)$$

Ou seja, podemos entender a integral de Fourier como um caso limite da série de Fourier.

4.1.2 Forma complexa da Série de Fourier

Usando a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

e suas consequências,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

é possível mostrar que, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então a série de Fourier de f poderá ser escrita na forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/L}, \quad (4.11)$$

onde o coeficiente C_n é dado por,

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

4.1.3 Identidade de Parseval

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, onde f , $|f|$ e $|f|^2$ são integráveis, pelo que vimos, pode-se calcular seus coeficientes de Fourier.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (4.13)$$

A relação em (4.13) é conhecida como *identidade de Parseval*.

4.2 Transformada de Fourier

A teoria das séries de Fourier lida com funções periódicas na reta. De forma correspondente, analisamos uma função definida na reta e não periódica com a Transformada de Fourier desta função. Esta transformada, distintamente da série de Fourier, tem um conjunto contínuo de frequências (a reta real).

Antes de definirmos formalmente a Transformada de Fourier, vamos estabelecer o conjunto de funções para o qual ela está definida.

Denotamos por L^1 o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a valores complexos, tais que as integrais impróprias de f e $|f|$ existam. Isto requer que f e $|f|$ sejam (Riemann) integráveis em cada intervalo $[-M, N]$ e que os limites

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x) dx \quad e \quad \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(x)| dx \quad (4.14)$$

existam. A integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ é a norma $\|f\|_1$ de f em L^1 .

Definição 4.5. (Transformada de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função L^1 . Sua transformada de Fourier $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada pela expressão:*

$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (4.15)$$

onde o fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ em (4.15) é uma convenção.

É possível mostrar que \mathcal{F} é injetiva e sobrejetiva. Logo, podemos definir a transformada inversa de Fourier.

Definição 4.6. (Transformada Inversa de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função L^1 , e seja $F(\xi)$ sua transformada de Fourier; então,*

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f](\xi) \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (4.16)$$

A expressão em (4.16) permite determinar a função que deu origem à Transformada de Fourier.

4.2.1 Teorema de Plancherel-Parseval

Uma propriedade muito importante da transformada de Fourier é a identidade ou teorema de Plancherel-Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f]|^2 d\xi. \quad (4.17)$$

Uma justificativa heurística desta fórmula advém da identidade de Parseval para série de Fourier dado pela relação (4.13). A prova deste teorema pode ser visto em [8].

Este teorema é muito importante em análise no domínio da frequência, pois permite afirmar que a energia total de um sinal pode ser expressa em termos da transformada de Fourier pela relação (4.17). Em outras palavras, sendo $f(x)$ um sinal no domínio do tempo, sua energia pode ser obtida de $|\mathcal{F}[f]|^2$ se assim conveniente for.

4.3 Propriedades da Transformada de Fourier

4.3.1 Linearidade

A integração é um operador linear. De modo que a Transformada de Fourier também o é. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções de L^1 e seja α e β arbitrários em \mathbb{C} . Então:

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g] \quad (4.18)$$

De fato,

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \quad (4.19)$$

$$= \left[\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \right] + \left[\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx \right] \quad (4.20)$$

$$= \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g] \quad (4.21)$$

4.3.2 Translação

Suponha que desejamos encontrar a transformada de Fourier de $f(t - a)$, $a \in \mathbb{R}$. Então, fazendo $u = t - a$, temos

$$\mathcal{F}[f(t - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du, \quad (4.22)$$

$$\mathcal{F}[f(t - a)] = e^{-i\omega a} F(\omega). \quad (4.23)$$

Dizemos que (4.22) é uma translação com respeito ao tempo, e (4.23) é uma translação com relação a frequência.

4.3.3 Transformada de Fourier da Derivada

Suponha que $f(x)$ seja integrável, derivável e a derivada integrável. A Transformada de Fourier de f' é dada por:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx \quad (4.24)$$

integrando por partes a integral do segundo membro da equação (4.24):

$$\mathcal{F}[f'(x)] = f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (4.25)$$

como f' é integrável, $f(x)$ tem um limite finito para $x \rightarrow \pm\infty$. Este limite não pode ser diferente de zero, caso contrário f não seria integrável. De modo que o termo integrado de (4.25) é nulo. O que resulta:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\xi \mathcal{F}[f(x)] = i\xi F(\xi) \quad (4.26)$$

A Transformada da derivada de $f(x)$ com relação a x corresponde a multiplicação de $F(\xi)$ por $i\xi$.

Genericamente, para derivada de ordem m , temos:

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(t)] = (i\xi)^m F(\xi). \quad (4.27)$$

4.3.4 Produto e Transformada de Convolução

Definição 4.7. (Produto de convolução). *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos o produto de convolução da função $f(x)$ pela função $g(y)$ pela expressão:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (4.28)$$

No caso de f e g forem funções de L^1 , então a integral da definição 4.7 converge uniformemente, pois:

$$|(f * g)(x)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|dy < \infty, \quad (4.29)$$

onde $M = \max|f(x)|$, e que

$$f * g = g * f. \quad (4.30)$$

Teorema 4.2. (Teorema da Convolução). *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções de L^1 . Então:*

$$\mathcal{F}[f * g] = (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]. \quad (4.31)$$

Demonstração. Usando o resultado da seção 4.3.2 e mudando a ordem de integração temos:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dydx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} g(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-y)} f(x-y)dx, \end{aligned} \quad (4.32)$$

pois,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)|dydx < \infty \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)|dxdy < \infty$$

onde

$$h(x, y) = e^{-i\xi x} f(x-y)g(y).$$

E (4.32) implica imediatamente (4.31). □

4.4 Transformada Discreta de Fourier

Para uma representação no domínio da frequência conforme utilizaremos neste trabalho, obtém-se por meio de um sinal amostrado e calculado em um computador tal frequência. Porém, como vimos ξ é uma variável contínua e desse modo não é conveniente para computação. Nesse sentido desenvolve-se uma representação alternativa para a transformada de Fourier, a Transformada Discreta de Fourier (DFT - *Discrete Fourier Transform*), que veremos a seguir. Utilizamos nesta seção as referências [3], [18] e [20].

Antes, porém, vamos definir alguns termos importantes quando se estuda funções no domínio da frequência.

Harmônicos. Vimos que qualquer função f seccionalmente diferenciável e periódica de período L pode ser representada por uma soma (infinita) de funções na forma (forma complexa da série de Fourier):

$$e^{in\omega_0 x}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Neste contexto denominamos as funções $e^{in\omega_0 x}$ de harmônicos, ou seja, os constituintes fundamentais de uma onda qualquer. Dizemos que $e^{i\omega_0 x}$ é o primeiro harmônico (ou harmônico fundamental, pois possui a mesma frequência da função f); $e^{i2\omega_0 x}$ é o segundo harmônico (sua frequência é o dobro da frequência de f); $e^{i3\omega_0 x}$ é o terceiro harmônico (sua frequência é o triplo da frequência de f) e assim por diante.

Sinal. Sinal é, matematicamente, uma função que apresenta informações sobre o comportamento ou atributos de um fenômeno. Em física, qualquer quantidade exibindo variação ao longo do tempo (e.g., som) ou variação no espaço (e.g., imagem). Algumas vezes vamos nos referir às funções f simplesmente sinal.

Espectro de Potência (*power spectrum*). Uma quantidade muito útil em ciências quando se trabalha no domínio da frequência é conhecido como espectro de potência ou densidade espectral de potência $\overline{\mathcal{F}}[f]\mathcal{F}[f] = |\mathcal{F}[f]|^2$. O teorema de Plancherel-Parseval, dado pela equação (4.17), mostra que a integral do espectro de potência é igual à integral do módulo quadrado da função. Em outras palavras, o espectro de potência fornece a energia do sinal em cada frequência. Mais geralmente, isso significa que a energia do sinal é preservada na transformação.

4.4.1 Teorema da amostragem

Para que uma DFT represente uma função com precisão, a função original deve ser amostrada a uma taxa suficientemente alta. A taxa apropriada para uma série

temporal uniformemente amostrada é determinada pelo teorema de Nyquist-Shannon ou Teorema da amostragem.

Não haveria uma perda importante de informação se o período de amostragem fosse suficientemente pequeno comparado a velocidade de variação do fenômeno considerado. Isto implicaria, no entanto, num custo computacional elevado. Tem-se, então, que quanto maior a frequência de amostragem, maior será a degradação da informação, mas com custo baixo. O critério que estabelece o compromisso entre qualidade da informação e custo de cálculo é, pois, o Critério de Nyquist:

Definindo $\Omega_a = 2\pi/T_a$, em que Ω é a frequência da função de tempo contínuo, como a frequência angular de amostragem e T_a como período de amostragem, temos:

$$\Omega_a \geq 2\Omega_0 \quad (4.33)$$

A condição (4.33) é conhecida como taxa da amostragem de Nyquist, ou teorema da amostragem, e indica que, se um sinal $x_c(t)$ é limitado em frequência, então ele é unicamente determinado por suas amostras, podendo ser reconstruído sem distorção se a frequência de amostragem for o dobro da maior frequência do sinal (Ω_a). A frequência

$$\Omega_a = 2\Omega_0 \quad (4.34)$$

é conhecida como frequência de Nyquist, diz que um sinal amostrado nessa frequência é criticamente amostrado.

4.4.2 A DFT

Definição 4.8. (*Delta de Dirac*) A função impulso unitário ou função δ de Dirac, é definida como tendo as seguintes propriedades:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } t \neq 0, \\ +\infty & , \text{ se } t = 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.36)$$

Considere a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Na maioria das vezes a função h será amostrada em um eventual intervalo em seu domínio [3]. Seja $T \in \mathbb{R}$ a diferença entre amostras consecutivas. Então, calculamos pontualmente a amostra fazendo:

$$h_k = h(kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.37)$$

onde T também é chamado de *taxa de amostragem*; se a taxa de amostragem é medida em segundos, por exemplos, então Tk será o número de amostras tiradas a cada segundo.

Para se calcular uma aproximação discreta da função h como um todo por (4.37) usa-se a notação de impulsos equidistantes. Em particular, para o mesmo intervalo T em (4.37), podemos escrever a função $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.38)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac dada pela definição (4.8).

Uma aproximação discreta para h , contendo suas amostras, pode ser escrita como:

$$h(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT), \quad (4.39)$$

Agora vamos considerar uma função apropriada para se exibir a Transformada Discreta de Fourier. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e sua transformada de Fourier que aqui denotamos por H . Uma amostra da função h , obtida levando em consideração a função impulso definida em (4.38) a uma taxa T é dada por:

$$\tilde{h}(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT - rT_0) \right]. \quad (4.40)$$

onde T_0 é a "duração" da função de truncamento [18]. A notação $\tilde{h}(t)$ foi usada para indicar que (4.40) é uma aproximação de h em T_0 .

Para toda taxa de amostragem T , vamos redefinir, sem perda de generalidade, a frequência crítica de Nyquist como:

$$\xi_c = \frac{1}{2T}. \quad (4.41)$$

Dizemos que a Transformada de Fourier de uma função periódica h é uma sequência de impulsos equidistantes:

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\xi - n\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{1}{T_0}, \quad (4.42)$$

Onde,

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \tilde{h}(t) e^{-i2\pi n t / T_0} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.43)$$

Substituindo (4.40) em (4.43) temos:

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \left[T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT - rT_0) \right) \right] e^{-i2\pi n t / T_0} dt, \quad (4.44)$$

de modo que:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \delta(t - kT) e^{-2\pi n t / T_0} dt = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi k n T / T_0}. \quad (4.45)$$

Se $T_0 = NT$, então (4.45) pode ser reescrita como

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi k n / N} \quad (4.46)$$

e a Transformada de Fourier para a função amostrada da equação (4.40) é

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi k n / N}. \quad (4.47)$$

Observando rapidamente a expressão em (4.47) não fica claro que a transformada $\tilde{H}(n/NT)$ possui somente N valores complexos distintos computáveis. É possível esclarecer esse fato fazendo $n = r$, onde $r \in \mathbb{Z}$ é arbitrário, e substituindo em (4.47):

$$\tilde{H}\left(\frac{r}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi k r / N}. \quad (4.48)$$

Agora fazemos $n = r + N$; note que:

$$e^{-i2\pi k(r+N)/N} = e^{-i2\pi k r / N} e^{-i2\pi k} = e^{-i2\pi k r / N} \quad (4.49)$$

Uma vez que $e^{-i2\pi k} = \cos(2\pi k) - i \sin(2\pi k) = 1$ para k inteiro, temos:

$$\tilde{H}\left(\frac{r+N}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi k(r+N)/N} = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi k r / N} = \tilde{H}\left(\frac{r}{NT}\right) \quad (4.50)$$

Portanto há apenas N valores distintos para o qual a expressão (4.47) pode ser calculada. $\tilde{H}(n/NT)$ é periódica com N amostras. De modo equivalente podemos expressar a Transformada de Fourier em (4.47) como:

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi k n / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.51)$$

A equação (4.51) é a expressão geral para Transformada de Fourier Discreta. Esta expressão relaciona N amostras de tempo e N amostras de frequência através da transformada contínua. Desse modo, vemos a transformada discreta como um caso especial da transformada contínua.

A notação $\tilde{H}(n/NT)$ é usada para indicar que a transformada discreta de Fourier é uma aproximação para a transformada contínua de Fourier. A equação (4.51) normalmente é escrita como

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT)e^{-i2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.52)$$

De acordo com Brigham (Brigham, pg 98 [3]) a Inversa da Transformada de Fourier Discreta é dada por

$$g(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right) e^{i2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.53)$$

4.4.3 Transformada Rápida de Fourier

A Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform - FFT - do inglês) é o nome do conjunto de algoritmos que realizam a computação da Transformada Discreta de Fourier de forma rápida e eficiente.

A equação da FFT é essencialmente igual a da DFT, definida anteriormente. Considere a transformada discreta de Fourier (4.52).

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-i2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.54)$$

Observe que trocamos kT por k e n/NT por n convenientemente. Observemos que cada $X(n)$ requer um numero de operações proporcional a N . Por exemplo se $N = 4$ e se fizermos

$$W = e^{-i2\pi/N} \quad (4.55)$$

então (4.54) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\ X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\ X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\ X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9 \end{aligned} \quad (4.56)$$

A equação (4.56) pode ser representada mais facilmente na forma matricial

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Podemos representar (4.57) na forma matricial compacta como

$$X(n) = W^{nk}x_0(k) \quad (4.58)$$

Assim, qualquer algoritmo que execute essa operação requer na ordem de N^2 e dizemos que teria complexidade $O(N^2)$ [3]. O princípio fundamental do algoritmo FFT é reduzir o número de adições e multiplicações complexas e, portanto, sua ordem. Nesse sentido, computacionalmente falando, o custo computacional para calcular DFT usando a FFT é reduzido da ordem $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$ [19].

É possível desenvolver várias abordagens matemáticas para elaboração de algoritmos FFT. Entre os mais estudados estão aqueles que possuem a menor complexidade algorítmica, como por exemplo os algoritmos de Danielson-Lanczos, Cooley-Tukey, Sande-Tukey, entre outros.

A Tabela 4.1 a seguir ilustra o custo computacional associado com os algoritmo DFT e a FFT em termos dos números valores reais de multiplicação real e adição real para diferentes valores de N .

Tabela 4.1: Custo computacional *DFT* vs *FFT*

	DFT (mult. real)	DFT (adição real)	FFT (mult. real)	FFT (adição real)
N	$4N^2$	$2N(2N-1)$	$2N \log_2 N$	$3N \log_2 N$
2	16	12	4	6
4	64	56	16	24
8	256	240	48	72
16	1.024	992	128	192
32	4.096	4.032	320	480
64	16.384	16.256	768	1.152
128	65.536	65280	1.792	2.688
256	262.144	261.632	4.096	6.144
512	1.048.576	1.047.552	9.216	13.824
1.024	4.194.304	4.192.256	20.480	30.720

Fonte:(NECHYBA, 2003).

A seguir veremos alguns exemplos de funções e suas respectivas transformadas de Fourier.

Neste trabalho, para implementação da transformada rápida de Fourier (FFT) utilizamos o algoritmo de Danielson-Lanczos, tal como visto em [22].

4.4.4 Exemplos

Antes de passarmos ao capítulo de aplicações, daremos alguns exemplos ilustrativos.

Exemplo 4.1. Representação de uma onda quadrada.

$$f(x) = 5 + 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{4}{3} \operatorname{sen}(3x) + \frac{4}{5} \operatorname{sen}(5x) + \frac{4}{7} \operatorname{sen}(7x) + \dots$$

com apenas 5 componentes já é possível uma boa aproximação. A figura 4.2 mostra os resultados obtidos para $f(x)$.

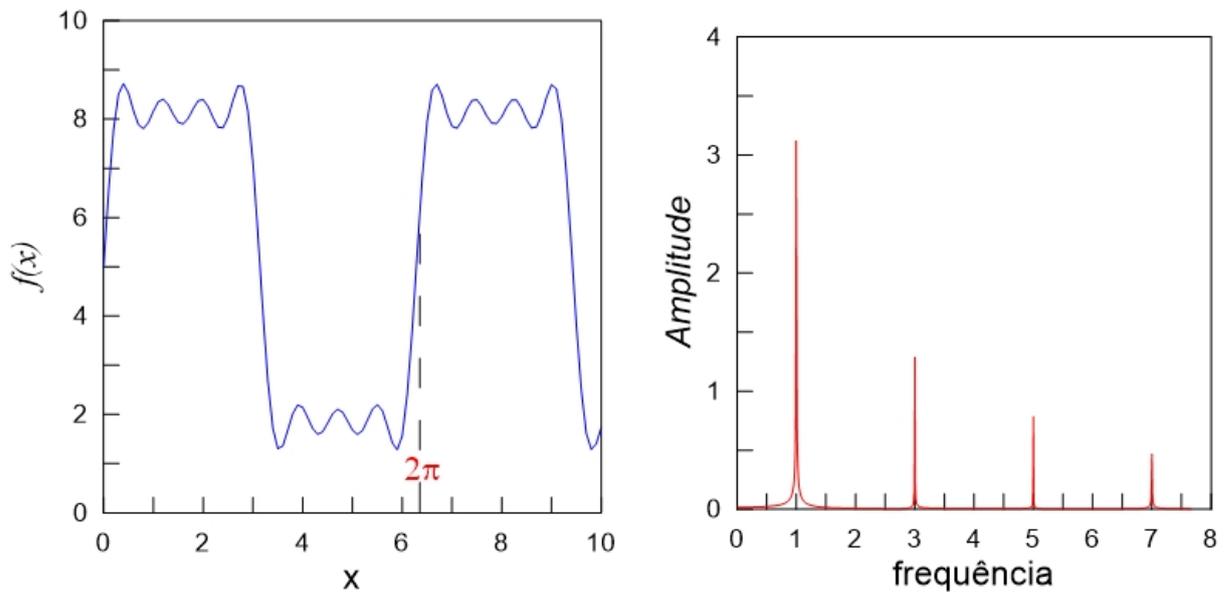


Figura 4.2: Representação de uma onda quadrada e seu respectivo espectro. Observe que a componente $4\operatorname{sen}(x)$ tem o mesmo período ($T = 2\pi$) do sinal. Portanto é chamada de oscilação fundamental. As demais parcelas correspondem às oscilações harmônicas do sinal.

- A primeira componente da série de Fourier é $a_0 = 5$.
- A segunda componente tem o mesmo período ($T = 2\pi$) do sinal. Portanto, é a oscilação fundamental e as demais parcelas correspondem às oscilações harmônicas.
- O espectro mostra a frequência fundamental $f_0 = 1$ e os harmônicos 3, 5 e 7 da função $f(x)$.

Exemplo 4.2. Considere a função $f(x) = 120 \cos(\frac{\pi}{2}x) + 80 \sin(\pi x)$ que é composta por duas senoides, $\cos(\frac{\pi}{2}x)$ e $\sin(\pi x)$.

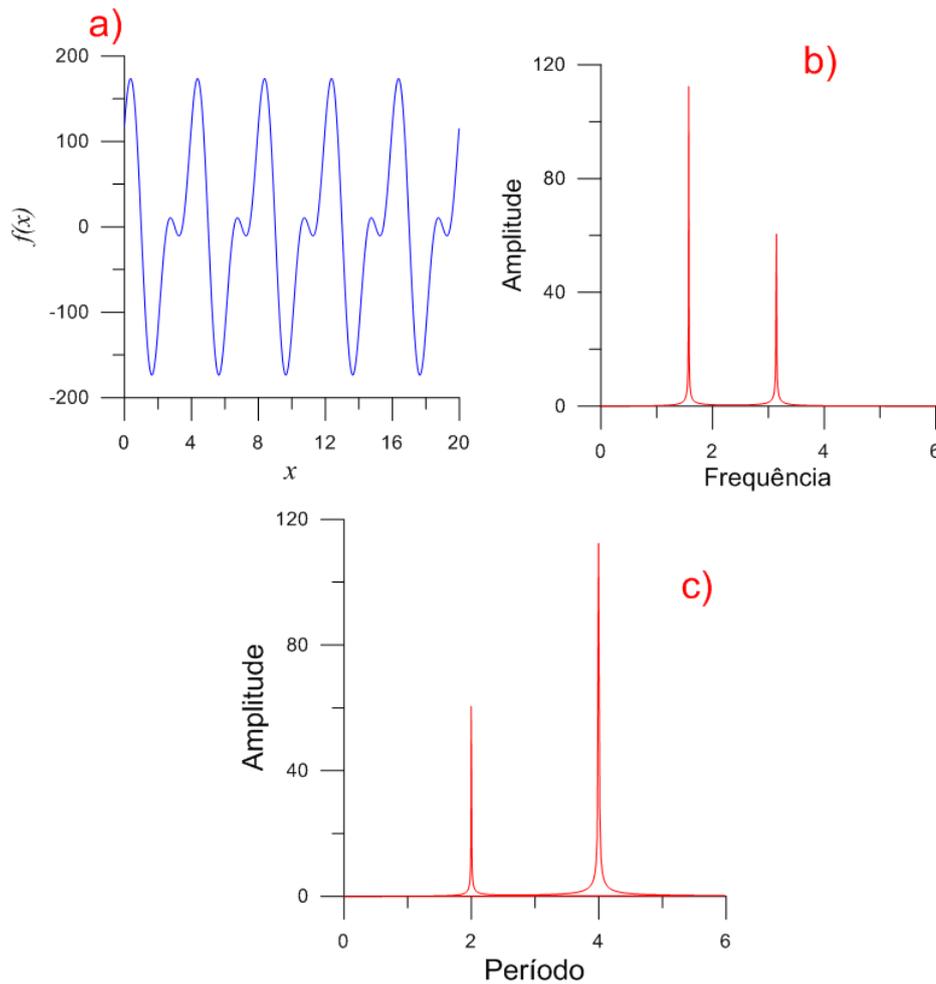


Figura 4.3: $f(x) = 120 \cos(\frac{\pi}{2}x) + 80 \sin(\pi x)$.

A figura 4.3 mostra o exemplo de uma função $f(x)$ e seu respectivo espectro no domínio da Frequência. São observados dois picos com amplitudes diferentes (gráfico "b" da figura 4.3) dando imediatamente a informação sobre as frequências que compõem o sinal. O de maior amplitude associado à função cosseno, com frequência $\pi/2$, e o de menor amplitude associado à função seno, com frequência π . Do mesmo modo, no gráfico "c" da figura 4.3, o espectro fornece o período. Podemos observar dois picos centrados em 2 e 4. Neste caso, o período 2 está associado à função seno e o período 4 à função cosseno.

Exemplo 4.3. Considere as funções $\cos(t)$, $\cos(2t)$, $\cos(t) + \cos(2t)$. A figura 4.4 mostra essas funções e seus respectivos espectros.

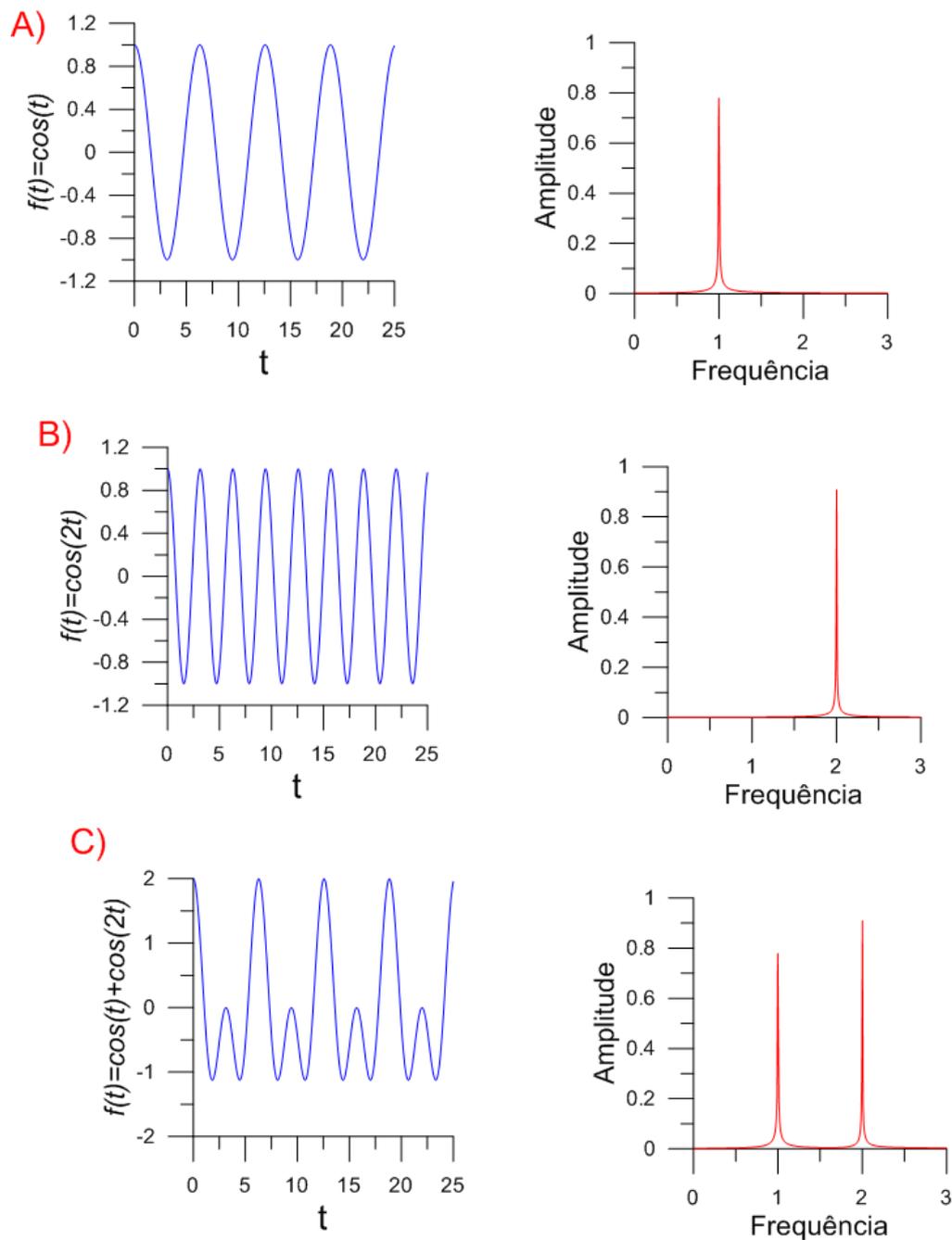


Figura 4.4: Transformada de Fourier das funções $f(t) = \cos(t)$; $f(t) = \cos(2t)$; $f(t) = \cos(t) + \cos(2t)$ e seus respectivos espectros.

A figura 4.4 mostra a Transformada de Fourier de sinais periódicos simples. As funções $\cos(t)$, $\cos(2t)$ e sua soma. Podemos observar que a Transformada da função $\cos(t)$ tem um pico centrado em 1, e a $\cos(2t)$ um pico centrado em 2. A Transformada da soma $\cos(t) + \cos(2t)$ (função superposição) aparecem dois picos bem separados centrados em 1 e 2, dando informações diretamente sobre as frequências que compõem o sinal. Neste caso simples podemos encontrar esta informação estudando o sinal diretamente, mas no caso de sinais mais complicados o uso da Transformada torna-se essencial.

5 Aplicações

5.1 A Equação de Euler-Lagrange

O formalismo da mecânica lagrangiana permite obter as equações de movimento de um sistema de modo sistemático e elegante. Diferente das leis de Newton, este formalismo não exige a identificação das forças envolvidas, o que torna a análise mais abstrata. Contudo, é possível simplificar o tratamento de sistemas de maior complexidade, especialmente quando não é relevante a determinação das forças associadas às restrições ao movimento das suas partículas. Para esta breve introdução, seguimos as referências [14] e [30].

5.1.1 Coordenadas Generalizadas

Em um sistema de partículas em movimento, sujeito a possíveis restrições (ou vínculos) é possível introduzir um certo número n de variáveis independentes, denotadas genericamente por q_1, \dots, q_n e denominadas *coordenadas generalizadas*, que é o número mínimo de coordenadas independentes necessárias para especificar o movimento. Por exemplo uma partícula livre num espaço tridimensional pode ter seu movimento descrito por um sistema cartesiano e as suas coordenadas generalizadas são x, y, z . Já um sistema que consiste em um corpo rígido, como um pião que veremos mais adiante, suas coordenadas generalizadas são seus ângulos de Euler. Chamamos de **número de graus de liberdade** a quantidade de variáveis independentes que é necessário especificar para conhecer completamente a posição de um dado sistema. Portanto, as coordenadas generalizadas de um sistema com n graus de liberdade podem ser distâncias, ângulos ou valores relacionados a eles, dependendo do sistema de coordenadas escolhido para descrevê-lo.

5.1.2 Lagrangiana de um sistema de partículas

Na formulação analítica da mecânica, verifica-se que, cada sistema é caracterizado por uma determinada função. No caso geral, esta função depende das coordenadas generalizadas (q), das suas derivadas temporais (\dot{q}) e possivelmente do tempo (t).

Esta função designa-se **Lagrangiana** do sistema, sendo representada normalmente por $L(q, \dot{q}, t)$, cuja forma é:

$$L = T - V \quad (5.1)$$

onde T é energia cinética total do sistema e V é a energia potencial, onde se incluem todos os efeitos de todas as forças conservativas.

5.1.3 Princípio da ação mínima

De acordo com o princípio da ação mínima, também conhecido como princípio de Hamilton, a evolução do sistema, ou seja $q(t)$, entre dois instantes t_1 e t_2 , desde uma posição $q(t_1)$ até $q(t_2)$ é tal que, a ação, definida por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (5.2)$$

toma o mínimo valor possível. Por tomar o "mínimo valor" possível queremos dizer que a variação de S entre t_1 e t_2 é nula, ou seja $\delta S = 0$.

5.1.4 Equação de Euler-Lagrange

Calculando $\delta S = 0$ tomando a definição de L em (5.1) é possível mostrar que um extremo da ação conduz a um conjunto de equações diferenciais conhecidas por equações de Euler-Lagrange que, para um sistema com n graus de liberdade, ou seja, para as coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n , é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

Este é um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, denominado habitualmente por **equações diferenciais de movimento**, cuja resolução permite determinar $q(t)$, ou seja, as equações da trajetória do sistema.

5.2 Oscilador Harmônico Simples

Um sistema oscilante muito conhecido e amplamente estudado é o Oscilador Harmônico Simples (OHS). A importância deste modelo matemático é que qualquer sistema na proximidade de uma condição de equilíbrio estável pode ser aproximado por um OHS. Fisicamente pode ser idealizado como um corpo de massa m preso a uma mola de massa desprezível e constante elástica k . A mola exerce uma força restauradora proporcional e oposta ao deslocamento $x(t)$ do corpo, $F = -kx$. A partícula sujeita à força restauradora linear apresenta movimento oscilante e harmônico no tempo, sendo

por isso denominada de *oscilador harmônico simples*. O movimento ocorre pela oposição de duas influências que se revezam: a força restauradora e a inércia da partícula.

A modelagem de um OHS unidimensional se dá do seguinte modo: como o sistema possui um grau de liberdade, inicialmente escrevemos a expressão usual para energia cinética T do oscilador:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (5.4)$$

A energia potencial V de um oscilador harmônico simples é dada por:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.5)$$

A Lagrangiana neste caso é, então, de acordo com a definição (5.1):

$$L = L(x, \dot{x}) = T - V \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.7)$$

e escrevemos as equações de Euler-Lagrange unidimensional como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (5.8)$$

substituindo por L da Eq. 5.7, temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right) = 0 \quad (5.9)$$

Avaliando as derivadas parciais, encontramos:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0 \quad (5.10)$$

O que resulta,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5.11)$$

dividindo toda equação por m e fazendo $\omega = \sqrt{k/m}$, obtemos:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5.12)$$

que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e pode ser resolvida para $x(t)$. A solução analítica desta equação, conhecida como equação do movimento harmônico simples, foi desenvolvida no exemplo 2.3 do Capítulo 2. Note que o primeiro termo do lado esquerdo desta equação é $ma = F$, então esta equação é equivalente a $F = -kx$. A solução da equação (5.12), conforme já havíamos apresentado, é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad A^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2, \quad \text{tg } \delta = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}. \quad (5.13)$$

onde A é a amplitude do movimento do oscilador, $\omega = \sqrt{k/m}$ é a frequência angular do oscilador, também chamada de frequência natural, e δ é a constante de fase que depende da posição inicial do oscilador.

É comum escrever a solução geral do OHS como combinação linear de duas outras soluções. Suponha que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são ambas soluções do OHS, então, pelo princípio da superposição a combinação linear $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ também é solução. Neste caso a solução geral que satisfaz a equação diferencial (5.12) é expressa em termos de funções harmônicas com a mesma frequência ω :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (5.14)$$

que é a equação (2.28) dada no exemplo 2.3. Embora esta solução seja absolutamente geral, a forma mais tradicional, mais sintética e adequada de ser manuseada é (5.13).

De (5.13), verificamos que a partícula executa um movimento repetitivo no tempo, isto é, periódico, uma vez que existe um intervalo de tempo T para o qual $x(t + T) = x(t)$. Essa identidade fornece:

$$x(t + T) = x(t) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.15)$$

Isto quer dizer que $\omega = 2\pi f$, onde $f = 1/T$ é a frequência. Por esse motivo, devemos chamar ω de frequência angular (expressa em radianos por segundo).

Por fim, podemos esboçar o espaço de fase do oscilador harmônico que estamos considerando aqui, como sendo uma curva parametrizada pelo tempo, onde a ordenada é a velocidade \dot{x} (ou mais precisamente o momento linear $m\dot{x} = p$) e a abscissa é a posição x . Para o oscilador harmônico livre, pode-se ver que essa curva no espaço de fase é uma elipse, resultado que decorre da expressão para energia mecânica:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (5.16)$$

Dividindo (5.16) pela massa m e fazendo alguns rearranjos, temos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\omega A)^2} = 1. \quad (5.17)$$

que é uma elipse com seu semi-eixo horizontal $a = A$ (amplitude) e o semi-eixo vertical $b = \omega A$.

5.2.1 Oscilador harmônico amortecido

Se o sistema é submetido a uma força de amortecimento linear proporcional a velocidade na direção oposta ao movimento, tal como pode ser produzido por um fluido

viscoso, então as equações de Euler-Lagrange podem ser modificadas para incluir essa força do seguinte modo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \quad (5.18)$$

Isto é,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (5.19)$$

Para um oscilador unidimensional com amortecimento linear, temos $F = \frac{b}{2}\dot{x}^2$, então a equação diferencial de segunda ordem para o oscilador harmônico fica

$$m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (5.20)$$

onde β ($\beta = b/2m$), que tem as dimensões de uma frequência, é o parâmetro que indica a intensidade do amortecimento do movimento. O fator dois foi introduzido por comodidade, o qual simplifica a expressão na solução algébrica, tal como vimos no exemplo 2.3. A solução geral de (5.20) em sua forma mais simples é

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad (5.21)$$

Conforme vimos no exemplo 2.3, devido à forma de β em (5.21) existem três tipos distintos de movimento, portanto devemos considerar três casos separadamente: (I) $\beta < \omega$ (amortecimento sub-crítico), (II) $\beta = \omega$ (amortecimento crítico) e (III) $\beta > \omega$ (amortecimento super-crítico).

5.2.2 Oscilador harmônico forçado

Além da força de amortecimento o oscilador harmônico pode estar submetido a uma força externa. Fenômenos interessantes ocorrem quando a intensidade desta força externa varia no tempo. Vamos estudar o efeito de uma força externa de intensidade $F_0 \cos \omega_3 t$ variando harmonicamente no tempo com uma frequência ω_3 . Neste caso, a equação diferencial do oscilador harmônico amortecido fica

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = \gamma \cos \omega_3 t, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{b}{2m}, \quad \gamma = \frac{F_0}{m}. \quad (5.22)$$

A solução geral $x(t)$ da equação (5.22), conforme resolvemos no exemplo 2.3 é dada por:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (5.23)$$

onde $x_h(t)$ é a solução homogênea associada e x_p a solução particular.

Uma solução geral da forma (5.23) para a equação (5.22) pode ser encontrada em [28] como:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(A_1 e^{\sqrt{\beta^2 + \omega^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 + \omega^2} t} \right) + D \cos(\omega_3 t - \delta) \quad (5.24)$$

onde

$$D = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_3^2)^2 + 4\omega_3^2 \beta^2}} \quad (5.25)$$

5.2.3 Energia no oscilador harmônico

Suponhamos, inicialmente, o caso do oscilador harmônico simples. A expressão para a energia mecânica total do oscilador (isto é, cinética mais potencial) é:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2. \quad (5.26)$$

Calculando a derivada de E com relação ao tempo obtemos

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = (m \ddot{x} + k x) \dot{x} \quad (5.27)$$

que é igual a zero uma vez que o termo entre parênteses em (5.27) é a equação do oscilador harmônico simples, a qual é igual a zero. Portanto a energia total é constante, consequentemente o sistema é conservativo.

Suponhamos agora que o movimento seja amortecido, cuja equação é:

$$m \ddot{x} + kx = -b \dot{x} \quad (5.28)$$

Então, de (5.27) e (5.28) obtemos

$$\frac{dE}{dt} = -b \dot{x}^2, \quad (5.29)$$

o que significa que a energia do oscilador harmônico decresce, sendo consumida para vencer a força resistiva. Por exemplo, se a força resistiva corresponde a uma força de atrito, a energia do oscilador aos poucos é transformada em calor.

No caso em que temos um oscilador forçado, a expressão (5.27) se torna

$$\frac{dE}{dt} = -b \dot{x}^2 + F(t) \dot{x}. \quad (5.30)$$

Nesta situação a variação da energia depende também da força externa, e ela é igual ao trabalho da força $-b\dot{x} - F(t)$. Assim, se $F(t) > b\dot{x}$, a energia do oscilador aumenta e dizemos que a força externa está transferindo energia para o oscilador.

5.2.4 Resultados numéricos

Inicialmente estudamos o oscilador harmônico simples sem amortecimento e veremos em prática a teoria descrita na seção anterior e também no exemplo 2.3 do Capítulo 2, resolvendo numericamente a equação diferencial (5.12), com o método de Runge-kutta de 4ª ordem. Para esse teste consideramos um oscilador com as seguintes

características: massa $m = 1\text{kg}$ presa à uma mola de constante elástica $k = 1\text{N/m}$, sujeito às condições iniciais $x(0) = 0$, $v(0) = 1\text{m/s}$. O tamanho de passo escolhido foi $h = 0.1$.

Como vimos na Seção 3.6, para resolver a equação diferencial de segunda ordem (5.12) montamos um sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} \quad (5.31)$$

com $\omega^2 = k/m = 1$. O resultado para $x(t)$ é mostrado na figura (5.1).

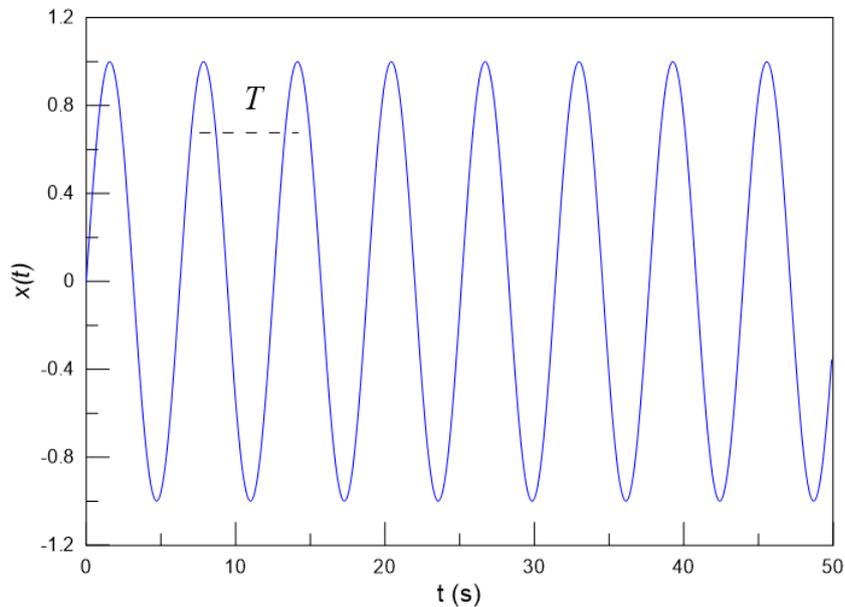


Figura 5.1: Oscilador harmônico simples dado pelo sistema (5.31), com $\omega^2 = 1$.

A figura 5.1 mostra a solução temporal $x(t)$ do oscilador harmônico simples, conforme (5.31). Note que o sistema oscila com período e amplitude bem definidos, de acordo com a solução analítica que encontramos anteriormente.

Uma importante característica do oscilador harmônico é que o período das oscilações não depende da amplitude, isto é, o período depende das características físicas do oscilador, ou seja as constantes k e a massa m . Para investigar esta questão criamos mais dois casos para o mesmo oscilador (com os mesmos k e m) e condições iniciais que gerem amplitudes diferentes. Em seguida aplicamos a transformada de Fourier para verificar os períodos e as frequências.

Tabela 5.1: Conjuntos de condições iniciais A, B e C utilizados na figura 5.2 .

	Caso A	Caso B	Caso C
k	1.0 N/m	1.0 N/m	1.0 N/m
m	1.0 kg	1.0 kg	1.0 kg
$v(0)$	1.0 m/s	2.0 m/s	3.0 m/s
$x(0)$	0.0 m	0.0 m	0.0 m

O gráfico da figura 5.2 mostra os resultados para os valores apresentados na Tabela 5.1, onde fizemos variar a velocidade como um parâmetro. Em seguida aplicamos a transformada de Fourier (FFT) que nos fornece os espectros característicos de cada caso, e o resultado é mostrado na figura 5.3.

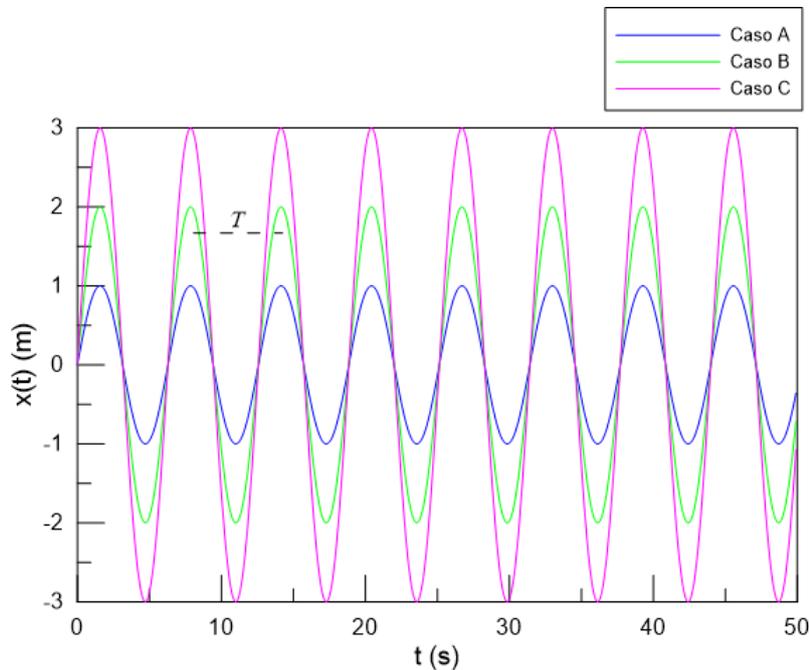


Figura 5.2: Oscilador harmônico com dados da Tabela 5.1

A figura 5.2 mostra a solução temporal do oscilador harmônico simples para os três casos estudados. Isto é, com as velocidades $v = 1 \text{ m/s}$ (caso A), $v = 2 \text{ m/s}$ (caso B) e $v = 3 \text{ m/s}$ (caso C). Isso proporciona, neste caso, três amplitudes características distintas.

A figura 5.3 mostra um resultado fundamental do oscilador harmônico: o período não depende da amplitude do movimento. Podemos observar claramente na Figura 5.3 que as amplitudes mudam bastante, no entanto o período permanece o mesmo.

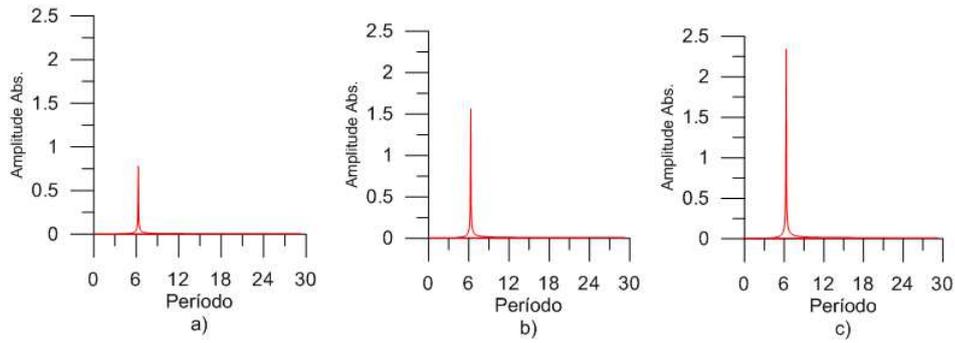


Figura 5.3: Espectro dado em período para o sistema proposto na Tabela 5.1: a) caso A, b) caso B e c) caso C.

A mudança na posição do pico só ocorreria se fosse feito uma mudança em k ou m . O período característico para o oscilador harmônico do nosso exemplo é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} \approx 6.28 \text{ s} \quad (5.32)$$

analisando a Figura 5.3, onde o espectro da transformada de Fourier fornece o período, podemos verificar este valor em cada caso.

A seguir ilustramos o movimento do oscilador no espaço de fase, para cada conjunto de parâmetros da Tabela 5.1.

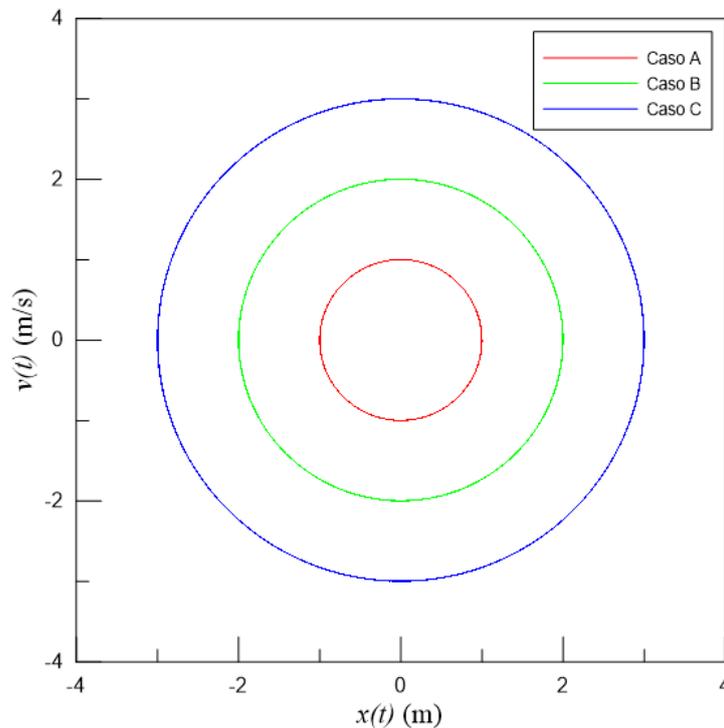


Figura 5.4: Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) para os dados da Tabela 5.1.

A figura 5.4 mostra o espaço de fase para as três condições iniciais distintas: cada órbita é elíptica como havíamos provado na Eq. (5.17) e verifica-se um único ponto

de equilíbrio. A primeira observação que podemos fazer é com relação a unicidade da equação horária (5.13) para determinada condição inicial, o que pode ser evidenciado pelo não cruzamento das curvas mostrada na figura 5.4. Observe que essas curvas são circunferências e estão de acordo com (5.17). Neste caso, como escolhemos $\omega = \sqrt{k/m} = 1$ e, portanto, o termo $\omega A = A$ pela relação dada em (5.17) temos elipses, cuja excentricidade é nula, isto é, circunferências. Outra observação é que as curvas são fechadas, o que é uma característica de um sistema conservativo e um movimento periódico o qual está confinado em uma região fechada.

O gráfico da Figura 5.5 mostra que energia mecânica total para o oscilador livre é constante, conforme havíamos deduzido em (5.27). Aqui, para ilustrar, plotamos apenas os resultados numéricos relativos ao "Caso B" da Tabela 5.1. Ou seja, com as condições iniciais $x(0) = 0$, $v(0) = 2$ e $k = m = 1$.

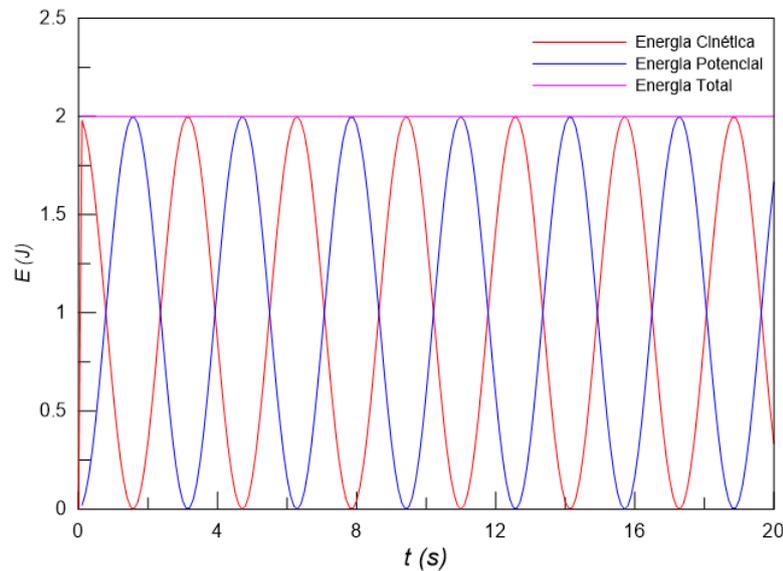


Figura 5.5: Energia total (cinética + potencial) é constante para o oscilador harmônico livre, conforme (5.27). Dados: $x(0) = 0$, $v(0) = 2$ e $k = m = 1$.

Oscilador harmônico amortecido

Consideramos agora o caso do oscilador com amortecimento. Vamos analisar numericamente os três casos clássicos deste oscilador. Desse modo, resolvemos a equação diferencial (5.20) aplicando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Análogo à situação anterior, a equação diferencial é separada em duas partes:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\beta y - \omega^2 x \end{cases} \quad (5.33)$$

A figura 5.6 mostra os resultados numéricos obtidos para cada caso: crítico, sub-crítico e super-crítico. Em todas as situações tomamos $\omega = \sqrt{65}\pi/4$. Portanto não estamos usando nenhum valor específico de massa m e constante de mola k . Para o amortecimento sub-crítico ($\beta < \omega$) escolhemos $\beta = \pi/4$. A escolha desses valores faz com que a frequência ω_1 dada em (5.21) seja exatamente 2π e, portanto, um período de 1s. O espectro da transformada de Fourier da figura 5.7 mostra esses valores para o amortecimento sub-crítico. Para o caso do amortecimento crítico, mantivemos $\omega = \beta = \sqrt{65}\pi/4$ e para o super-crítico $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ e $\beta = 3\pi$. As condições iniciais foram as mesmas para os três casos: $x(0) = 1$; $v(0) = 0$ e o tamanho do passo $h = 0.1$.

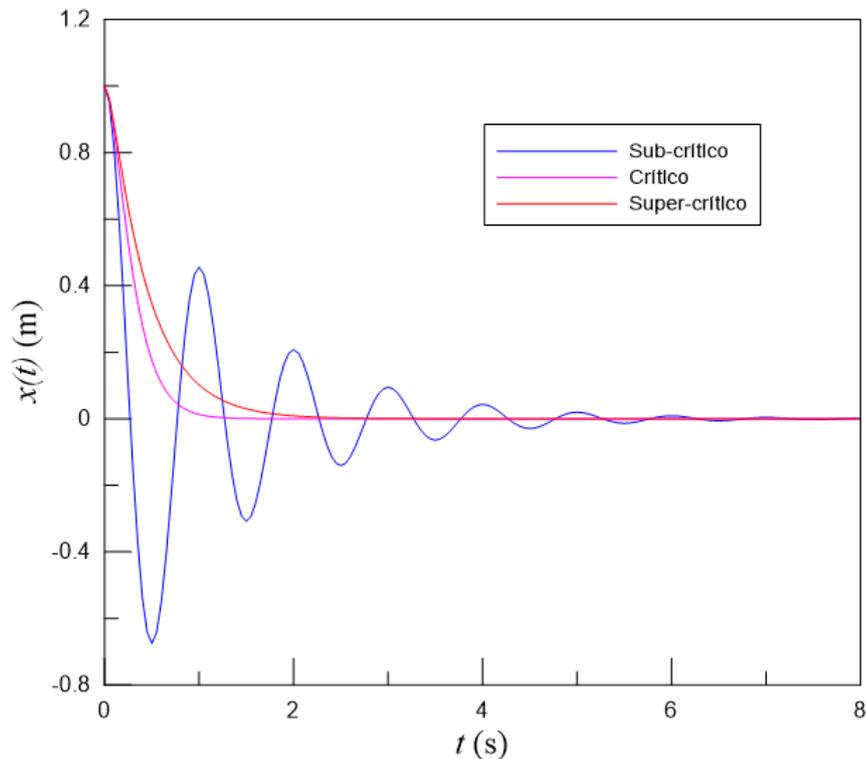


Figura 5.6: Solução temporal típica para os três casos do oscilador amortecido com as condições iniciais $x(0) = 1$ m e $v(0) = 0$ m/s. Para as três situações a frequência natural foi mantida em $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ rad. Para o caso crítico usamos $\beta = \pi/4$. Já o super-crítico, o parâmetro de amortecimento foi $\beta = 3\pi$. Para o amortecimento sub-crítico, temos um movimento inicialmente oscilatório que vai perdendo amplitude à medida que a energia é dissipada devido ao amortecimento.

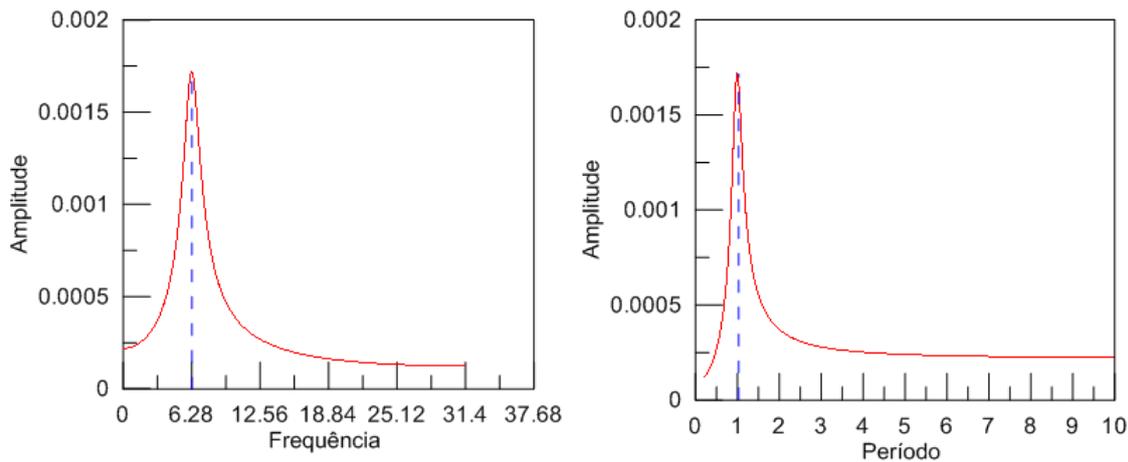


Figura 5.7: Espectro para o caso sub-crítico, com dados da figura (5.6). É mostrado a frequência $\omega_1 = 2\pi$ (≈ 6.28) - à esquerda; e o período $T = 1s$ - à direita.

Podemos observar na Figura 5.6 e 5.7 que, para o caso subcrítico, o movimento da massa se dá de modo amortecido e inicialmente oscilatório, e tende a ocupar sua posição de equilíbrio à medida que o tempo passa. Isto é exatamente o que descreve a equação (5.21): um movimento oscilatório, mas a amplitude ($Ae^{-\beta t}$) de suas oscilações decresce exponencialmente à medida que o oscilador perde energia devido ao amortecimento. Esse aspecto se acentua quando elevamos o parâmetro de amortecimento. A representação no espaço de fase, figura 5.8, fornece mais clareza com relação a esse aspecto.

A figura 5.8 mostra o espaço de fase para os três tipos de amortecimento. Podemos observar que o ponto de equilíbrio é um foco estável, característico do atrator apresentado na Seção 2.5 do Capítulo 2 e, como era de se esperar, ao aumentar o parâmetro de amortecimento a massa ocupará sua posição de equilíbrio em um tempo menor. Outra observação que podemos fazer é que, ao contrário do oscilador livre (figura 5.4), a presença de uma força dissipativa faz com que as trajetórias no espaço de fase sejam abertas tendendo, necessariamente ao repouso. Podemos observar a diferença entre o caso sub-crítico, que tem representação espiralada, e os outros casos, crítico e super-crítico.

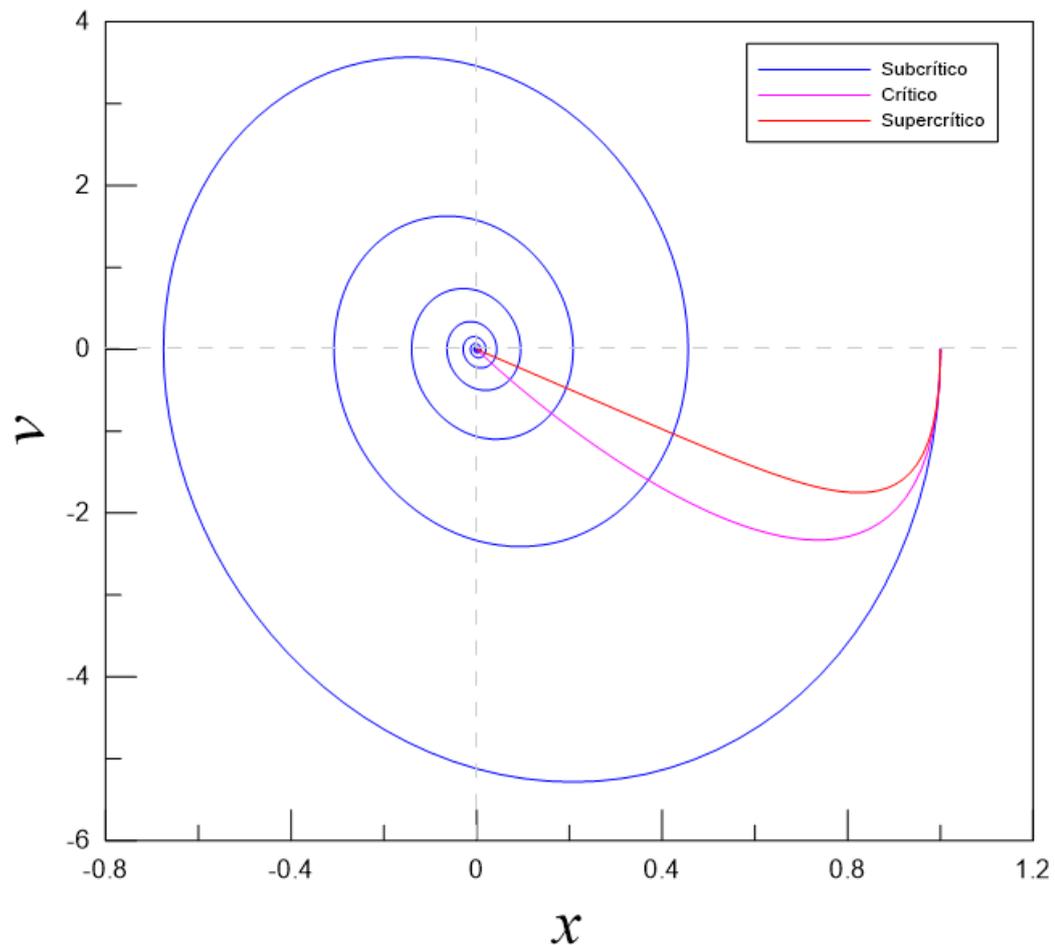


Figura 5.8: Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) para um oscilador amortecido. Para o amortecimento sub-crítico as frequências foram: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ e $\beta = \pi/4$; para o amortecimento crítico: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$; para o amortecimento super-crítico: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ e $\beta = 3\pi$. As condições iniciais em todos os casos foram: $x(0) = 1$ e $v(0) = 0$.

A medida que aumentamos o parâmetro de amortecimento o sistema passa de oscilatório para não oscilatório. Isto é, para amortecimento muito forte o sistema deixa de ser periódico. A figura 5.9 mostra o espectro da transformada de Fourier, onde variamos o valor de β na equação (5.33) desde $\sqrt{65}\pi/64 \ll \omega$ até valores próximos de ω , conforme indicado.

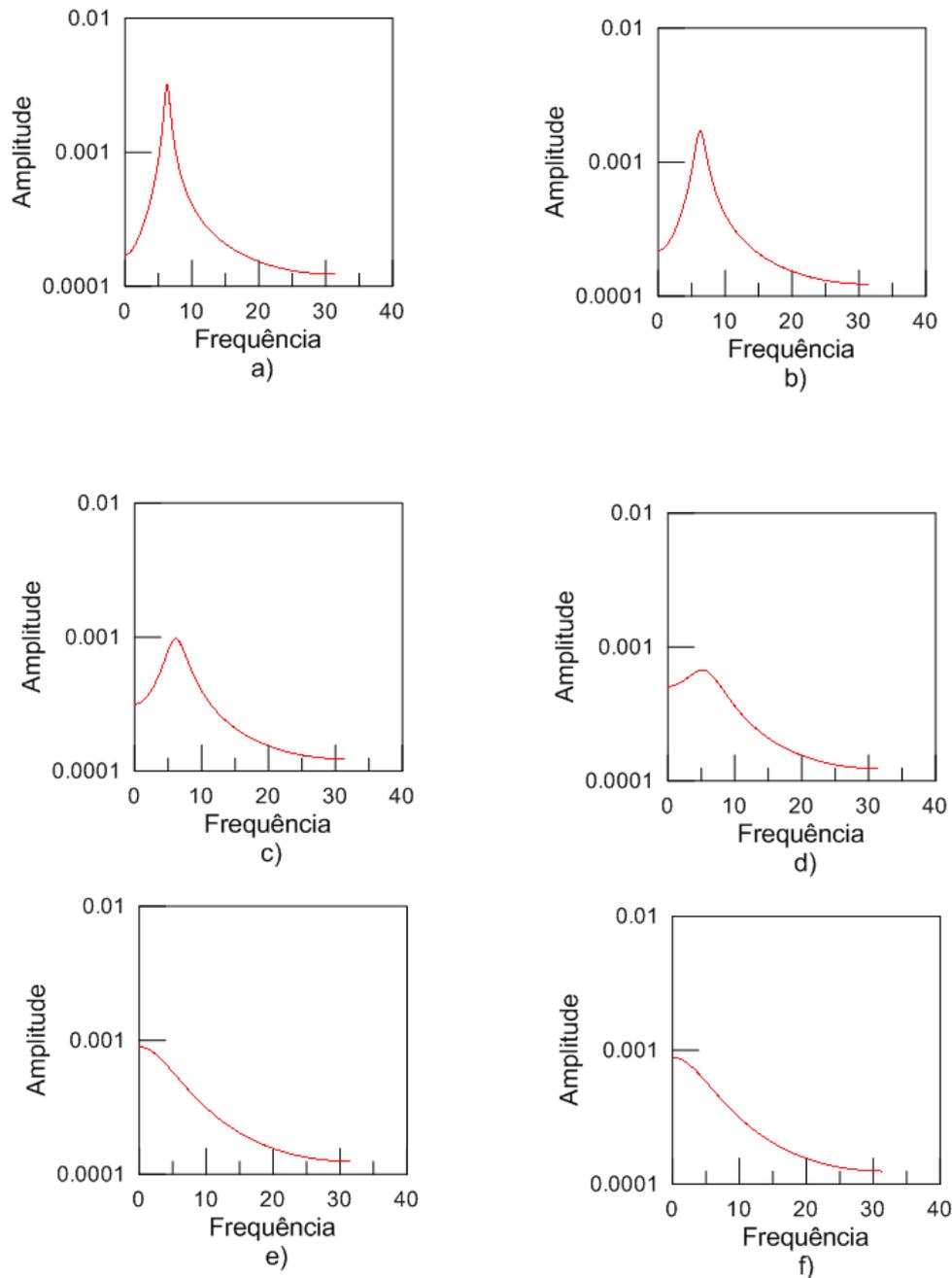


Figura 5.9: Espectro dado em frequência para um oscilador com $\omega = \sqrt{65}\pi/4$ e $\beta = \sqrt{65}\pi/64$ (a), $\beta = \sqrt{65}\pi/32$ (b), $\beta = \sqrt{65}\pi/16$ (c), $\beta = \sqrt{65}\pi/8$ (d), $\beta = \omega = \sqrt{65}\pi/4$ (e), $\beta = 2\pi$ (f). As condições iniciais foram as mesmas para todos os casos: $x(0) = 1$ e $v(0) = 0$.

Na Figura 5.9 a) e b), podemos notar que, para valores de $\beta \ll \omega$, o espectro da transformada de Fourier fornece o pico característico. A medida que vamos aproximando os valores de β de ω o gráfico vai se deformando, mudando completamente sua característica tanto mais próximo de ω , de modo que o pico característico desaparece que é o que vemos na figura 5.9 f.

No caso do oscilador harmônico amortecido, a energia acumulada neste sistema decresce e o movimento terminará depois de um rápido intervalo de tempo, conforme vemos na Figura 5.10.

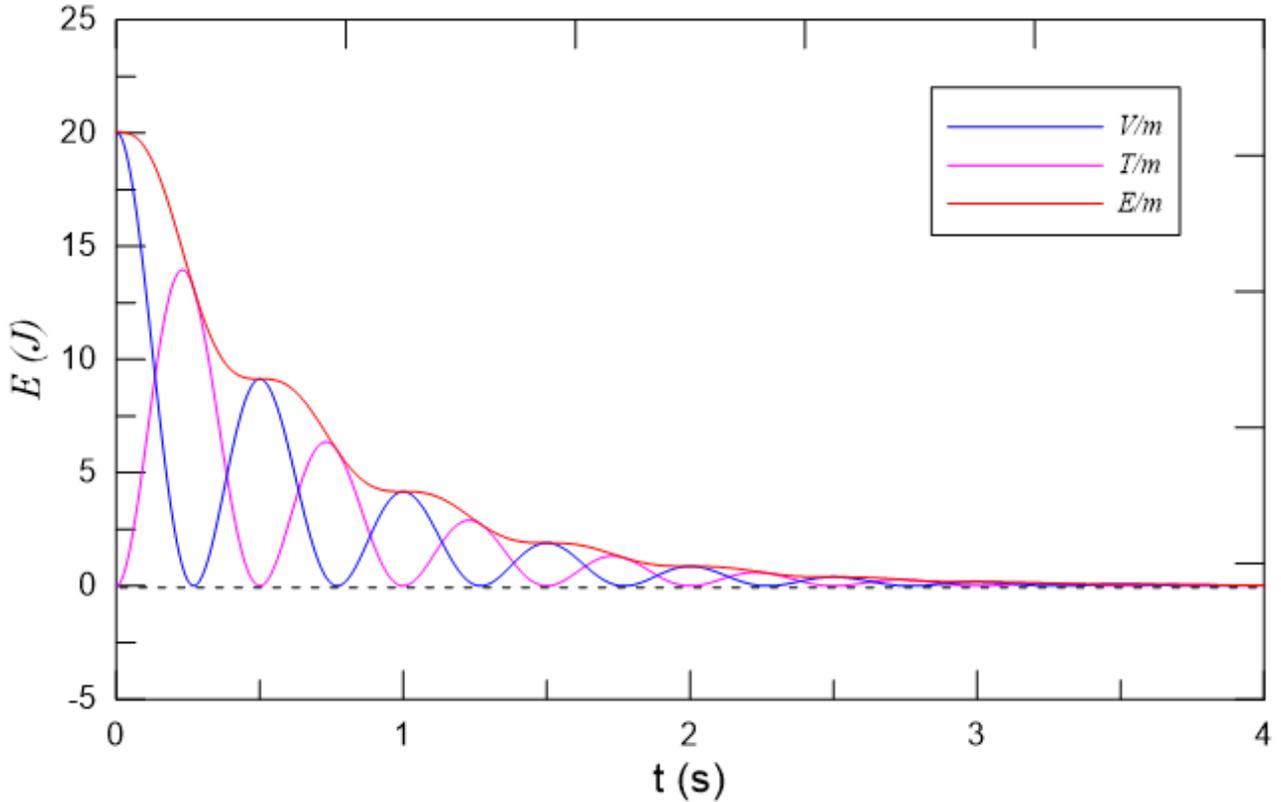


Figura 5.10: Energia mecânica (energia cinética + potencial) por unidade de massa, E/m , energia cinética por unidade de massa, T/m , e energia potencial por unidade de massa, V/m , para um oscilador com amortecimento subcrítico. Dados: $\omega = \sqrt{65}\pi/4$, $\beta = \pi/4$. As condições iniciais foram $x(0) = 1$, $v(0) = 0$; o tamanho do passo da integração numérica foi $h = 0.01$.

A Figura 5.10 mostra a energia mecânica, a energia cinética e a energia potencial, todas por unidade de massa. Essa perda de energia do oscilador, que é consumida para vencer a força resistiva devido ao amortecimento, está de acordo com (5.29).

Oscilador harmônico forçado

Estudaremos o oscilador no qual existe uma força externa atuando, que pode ter vários tipos de dependência com o tempo [7]. Supomos uma força oscilante de intensidade $F_0 \cos \omega_3 t$ variando harmonicamente no tempo, com frequência ω_3 . Portanto, resolvemos numericamente a equação diferencial (5.22) montando o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\beta y - \omega^2 x + \gamma \cos \omega_3 t \end{cases} \quad (5.34)$$

onde $\gamma = F_0/m$ e ω_3 a frequência de oscilação da força externa.

A presença desta força externa variando harmonicamente no tempo produz efeitos muito importantes em física. O efeito de ressonância, que ocorre quando $\omega_3 \simeq \omega$, talvez seja o de maior destaque. Para o amortecimento sub-crítico, temos na figura 5.11 dois casos típicos de um oscilador forçado com amortecimento.

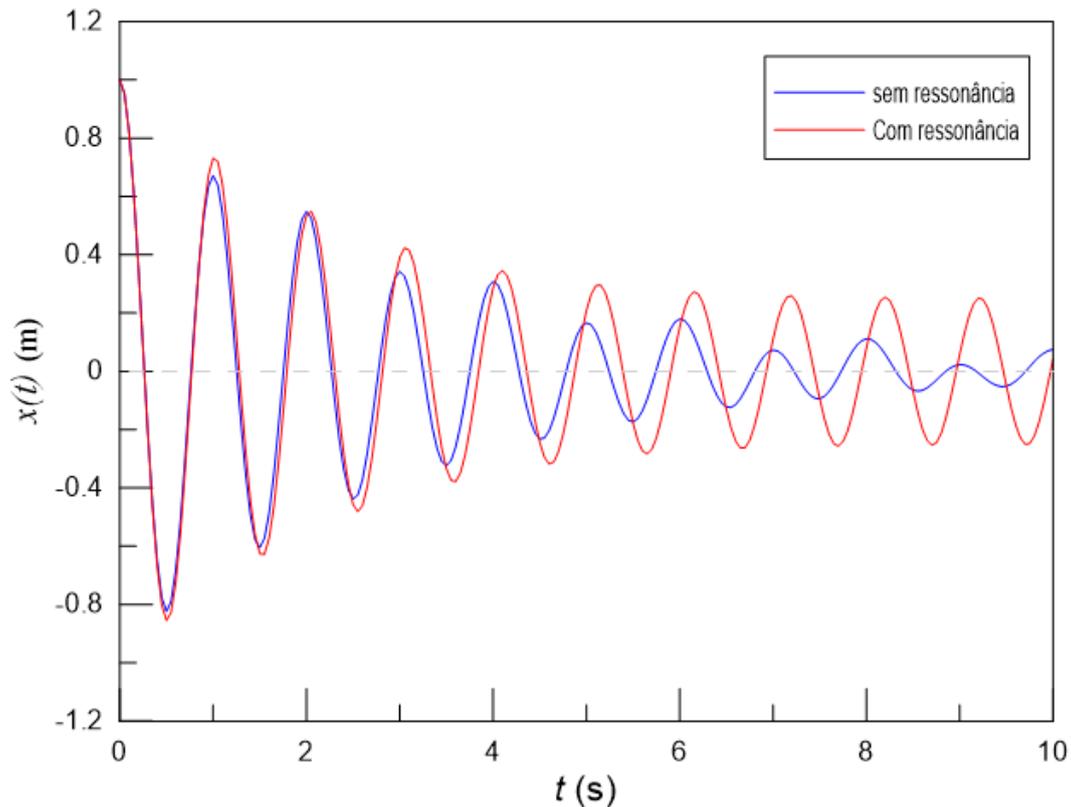


Figura 5.11: Oscilador harmônico com amortecimento subcrítico. Uma das curvas (vermelha) existe o efeito de ressonância. Para o caso sem ressonância usamos $\omega_3 = \pi$. Para ambos os casos $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$ e $\gamma = 1$. As condições iniciais foram as mesmas nos dois casos: $x(0) = 1$ m, $v(0) = 0$ m/s e o tamanho do passo na integração numérica foi $h = 0.05$.

Na figura 5.11 temos a solução temporal sem efeito de ressonância, com $\omega_3 = \pi$, e uma com efeito de ressonância $\omega_3 = 2\pi$. É possível notar a presença da força oscilante externa observando o reforço na amplitude. No caso sem ressonância o sinal é composto por duas frequências, como pode ser evidenciado na figura 5.12, que mostra o espectro da transformada de Fourier para o caso anterior sem ressonância. Na figura 5.12 aparecem dois picos de frequências espaçados um do outro. Um com centro em π (≈ 3.14) e outra com centro em 2π (≈ 6.28) que são as frequências do sistema.

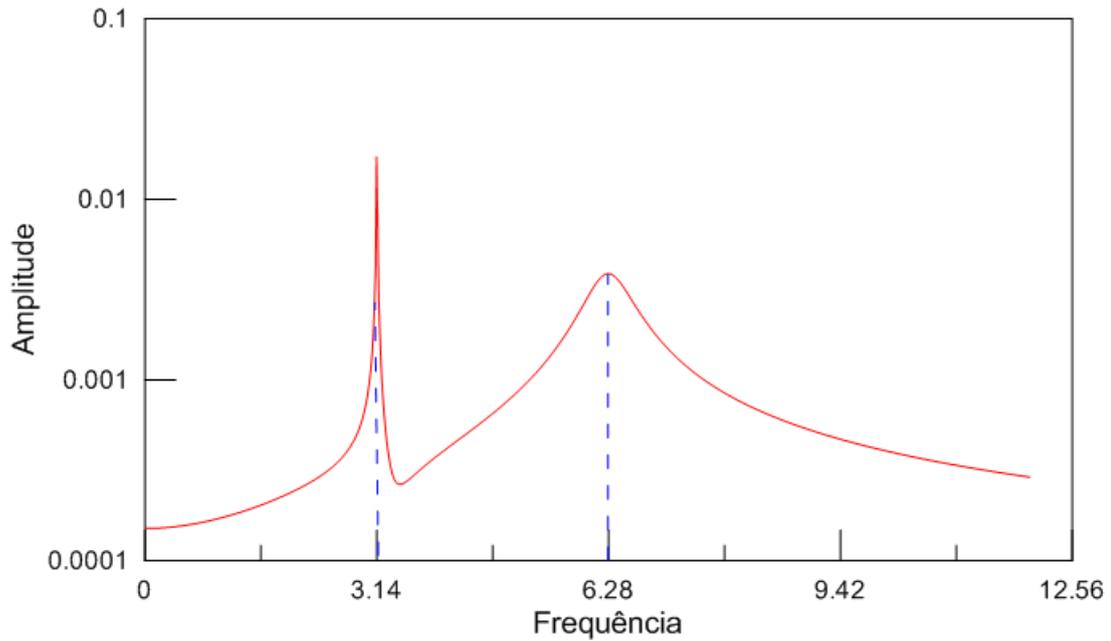


Figura 5.12: Espectro para o oscilador harmônico amortecido e forçado, sem ressonância. Os parâmetros são: $\beta = \pi/10$, $\omega = 2\pi$, $\omega_3 = \pi$ e $\gamma = 1$. Novamente com as condições iniciais: $x(0) = 1$ m, $v(0) = 0$ m/s.

A medida que aproximamos a frequência da força externa da frequência natural do oscilador ocorre fenômenos interessantes, como o efeito de batimento. Ilustramos na Figura 5.13 este efeito em duas situações: uma sem a presença de amortecimento ($\beta = 0$) e outra com amortecimento ($\beta \neq 0$). Note que sem a presença de dissipação o efeito de batimento se mantém inalterado no tempo, como podemos ver na figura 5.13(a). Mas, uma vez que existe amortecimento, ainda que pequena como no nosso exemplo, o efeito de batimento desaparece após algum tempo, como podemos verificar observando a figura 5.13(b). Para este teste nós simplificamos as condições iniciais, deixando o oscilador em repouso no instante inicial: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$. Nessas condições resolvemos numericamente a equação diferencial como anteriormente. A figura 5.14 mostram as frequências presentes no sistema massa-mola para os dois casos.

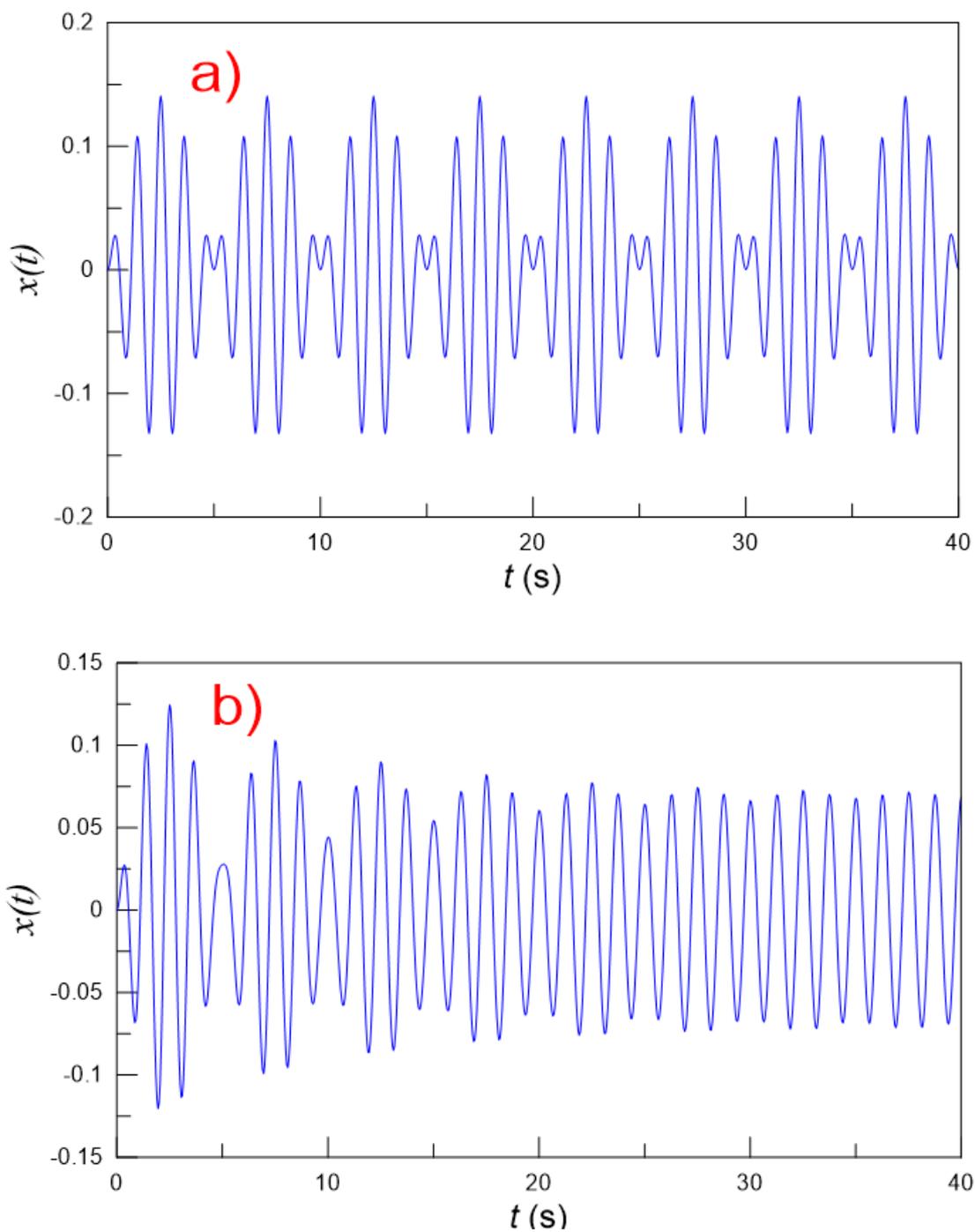


Figura 5.13: Efeito de batimento para um oscilador forçado sem amortecimento (a) e com amortecimento (b), onde $\beta = 0.1$. Em ambos os casos $\omega = 2\pi$ e $\omega_3 = 1.6\pi$ e condições iniciais: $x(0) = 0$ m, $v(0) = 0$ m/s.

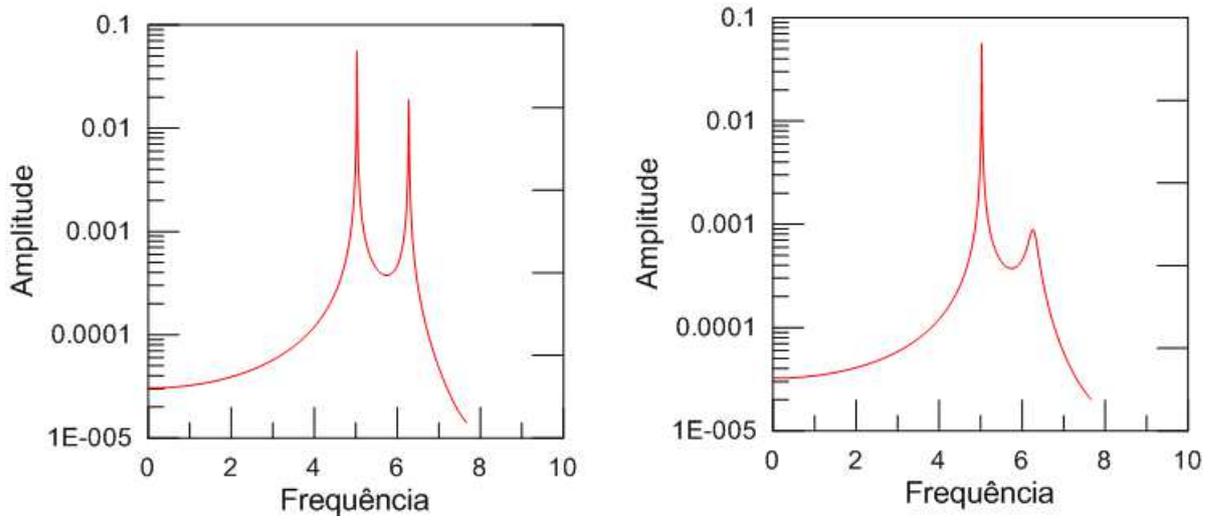


Figura 5.14: Espectro de potência para os dados da figura 5.13. Efeito de batimento sem dissipação (à esquerda) e com dissipação (à direita).

Como mencionamos anteriormente, outro fenômeno que aparece na região em torno de $\omega_3 = \omega$ de grande importância é a ressonância. A figura 5.15 ilustra o caso ainda não mencionado, que é o oscilador forçado sem amortecimento, cuja amplitude $A(\omega_r) = F_0/(2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2})$, tal como apresentamos na equação (2.54), não é limitada e assume valores infinitos. Isto é, $A(\omega_r) \rightarrow \infty$ sempre que $\beta \rightarrow 0$.

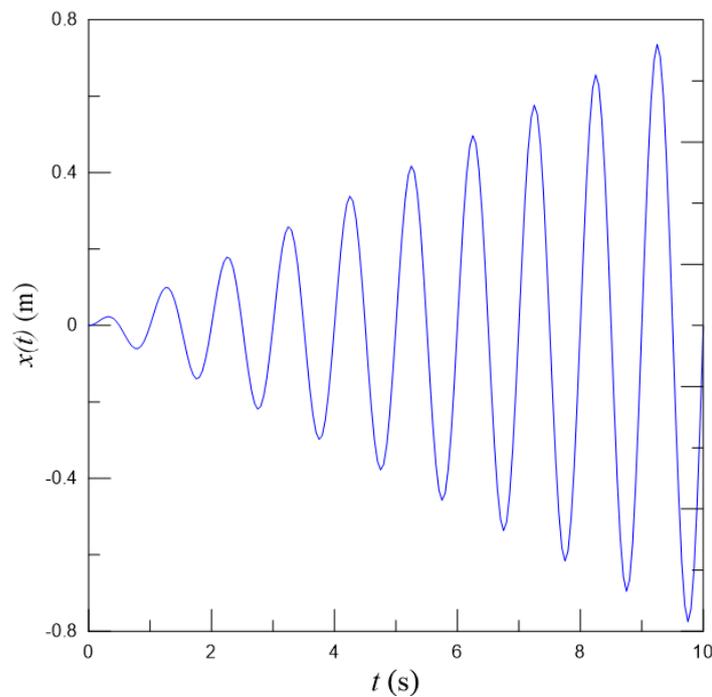


Figura 5.15: Efeito de ressonância para um oscilador harmônico sem amortecimento ($\beta = 0$). Usados: $\omega = 2\pi$, $\gamma = 1$ e as condições iniciais foram: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$.

A figura 5.15 mostra o caso de ressonância para um oscilador harmônico forçado sem amortecimento. Como no caso ilustrado anteriormente, usamos $\omega = 2\pi$ e as condições iniciais foram $x(0) = 0$ e $v(0) = 0$ (repouso). Note que a amplitude cresce indefinidamente a partir do repouso. No próximo caso, vamos ilustrar o efeito de ressonância de um oscilador com amortecimento, fazendo a frequência da força externa se aproximar da frequência natural, mantendo fixo os demais parâmetros. A figura 5.16 mostra o espectro da transformada de Fourier para alguns valores de ω_3 , conforme indicado.

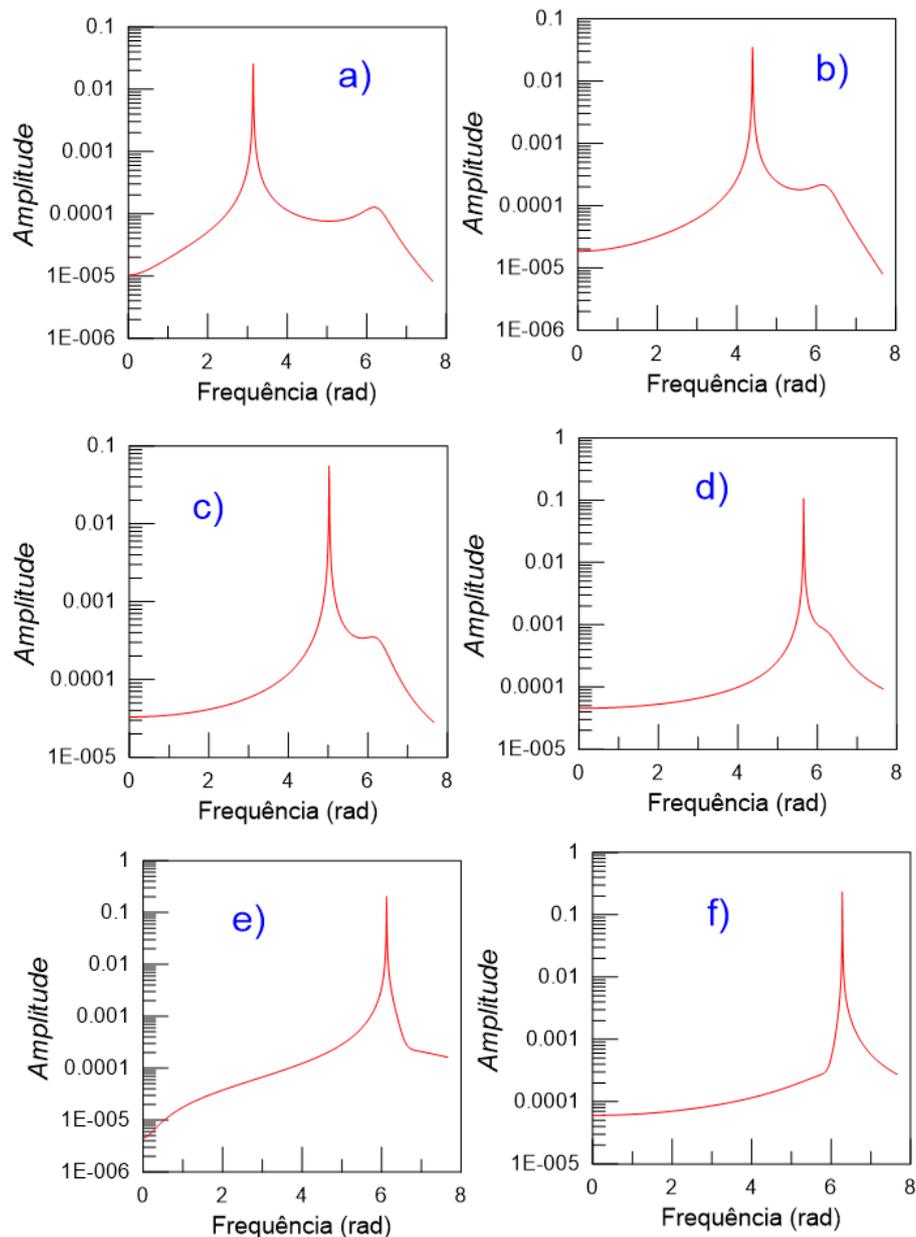


Figura 5.16: Espectro (escala logarítmica) para um oscilador harmônico forçado com amortecimento. Foram usados $\beta = \pi/10$, $\gamma = 1$, $\omega = 2\pi$ e $\omega_3 = \pi$ (a), $\omega_3 = 1.4\pi$ (b), $\omega_3 = 1.6\pi$ (c), $\omega_3 = 1.8\pi$ (d), $\omega_3 = 1.95\pi$ (e), $\omega_3 = \omega$ (f).

A figura 5.16 ilustra a variação das frequências de um oscilador harmônico com amortecimento e força externa, cuja frequência varia de $\omega_3 = \pi$ (figura 5.16a) até $\omega_3 = \omega$ (figura 5.16f). Note que inicialmente tínhamos dois picos característicos, indicando as duas frequências do sistema. No caso em que ocorre a ressonância temos apenas uma frequência que domina o sistema. Em todos os casos usamos como parâmetro de amortecimento $\beta = \pi/10$ e as condições iniciais foram as mesmas em todos os casos: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$. É importante ressaltar que nem sempre ocorre ressonância, mesmo que $\omega_3 = \omega$, conforme destacamos no Exemplo 2.3 do Capítulo 2.

A figura 5.17 mostra o espaço de fase correspondente ao caso sem ressonância. Para esse teste usamos as frequências $\beta = \pi/10$, $\omega = 2\pi$, $\omega_3 = \pi$ e $\gamma = 1$. As condições iniciais foram $x(0) = 1$ e $v(0) = 0$.

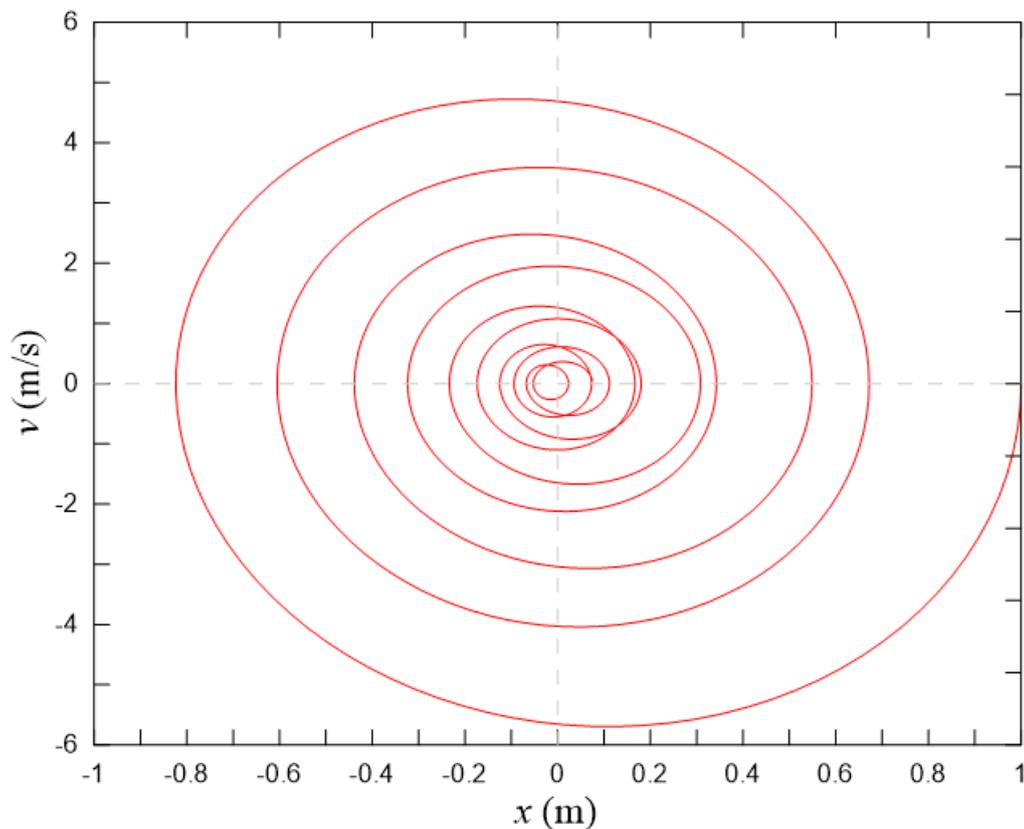


Figura 5.17: Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) de um oscilador forçado com amortecimento sub-crítico, sem fenômeno de ressonância.

Podemos observar na figura 5.17 que inicialmente temos uma trajetória aberta na forma de espiral, característico de movimento com dissipação de energia. Outro detalhe é que mais internamente, depois de um certo tempo pode-se observar uma trajetória que tende a ser fechada.

A figura 5.18 exibe o espaço de fase para o caso com ressonância. Os dados foram os mesmos do caso anterior, agora com $\omega_3 = \omega = 2\pi$.

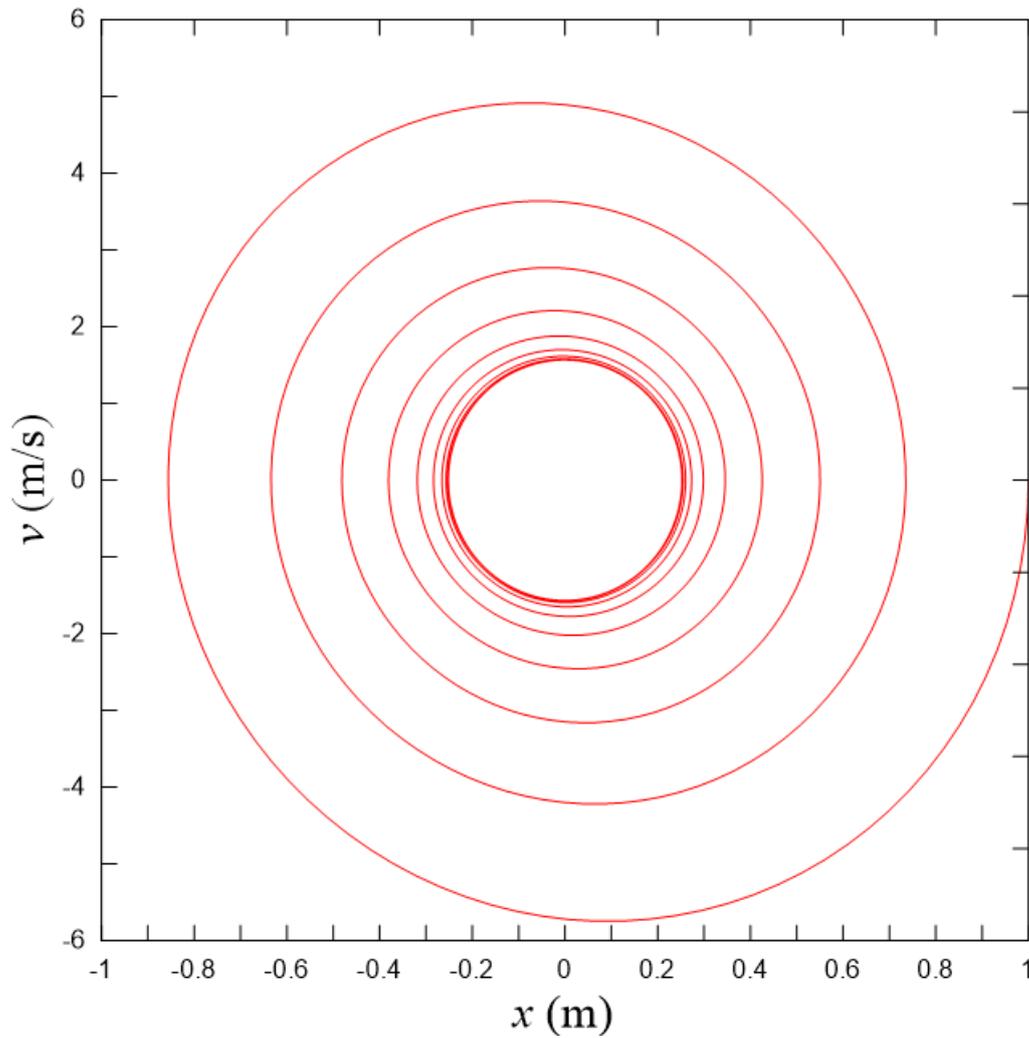


Figura 5.18: Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) de um oscilador forçado com amortecimento sub-crítico, com fenômeno de ressonância. As frequências usadas foram: $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$, $\omega_3 = 2\pi$. Com as condições iniciais: $x(0) = 1$, $v(0) = 0$

Podemos ver na figura 5.18 que a trajetória exibida é a soma de um movimento oscilatório amortecido, que pode ser percebido pela parte espiralada, da mesma forma que na figura 5.8, e um movimento oscilatório do tipo harmônico, evidenciado pela parte elipsoidal (fechada) em torno da origem, semelhante ao da figura 5.4. Aparentemente, na ressonância, as trajetórias são mais simples que nos demais casos.

A figura 5.19 mostra a energia mecânica, energia cinética e energia potencial, todas por unidade de massa, de um oscilador harmônico amortecido e forçado sem efeito de ressonância. Já a figura 5.20 mostra o mesmo oscilador, porém com efeito de ressonância. Os dados foram: $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$ e, para o caso sem ressonância, $\omega_3 = \pi$.

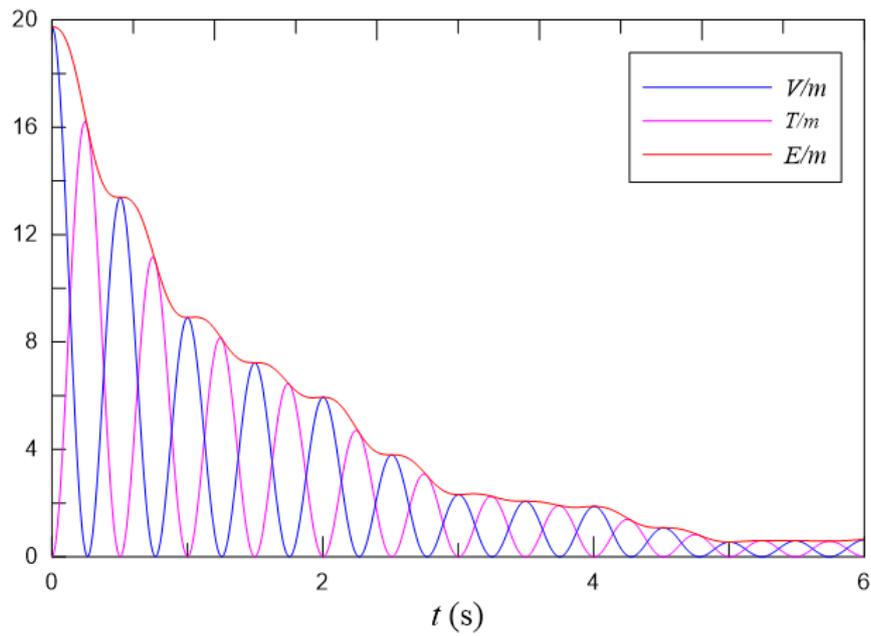


Figura 5.19: Energias por unidade de massa (J/kg): mecânica, E/m , cinética, T/m e potencial, V/m , para um oscilador forçado com amortecimento subcrítico e sem efeito de ressonância, com $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$, $\omega_3 = \pi$ e $\gamma = 1$.

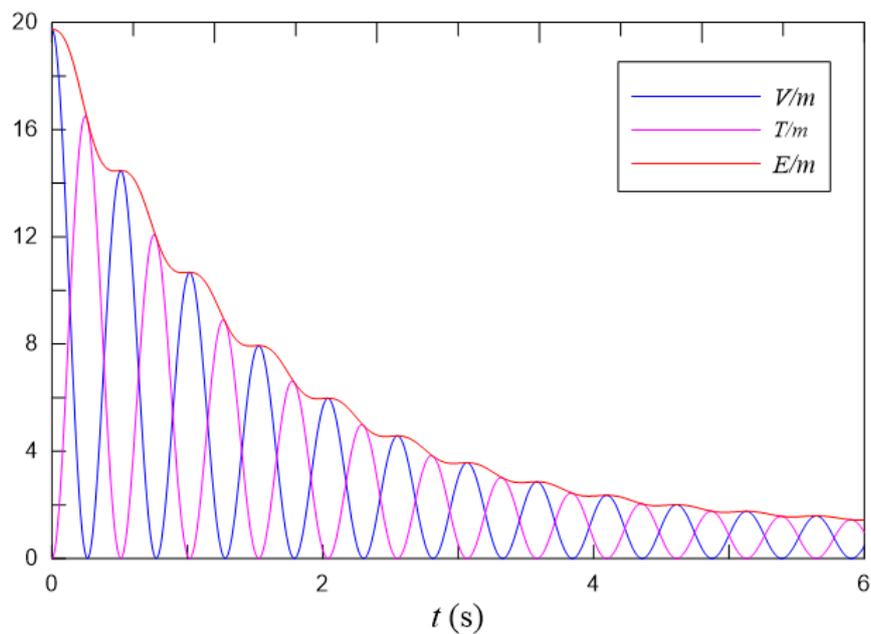


Figura 5.20: Energias por unidade de massa (J/kg): mecânica, E/m , cinética, T/m e potencial, V/m , para um oscilador forçado com amortecimento subcrítico, com efeito de ressonância, com $\omega = 2\pi$, $\beta = \pi/10$, $\gamma = 1$.

5.3 O Pêndulo Simples

Consideramos um pêndulo consistindo de uma massa m suspensa por um fio de massa desprezível e comprimento l . O fio é fixo na outra extremidade num ponto de articulação sem atrito.

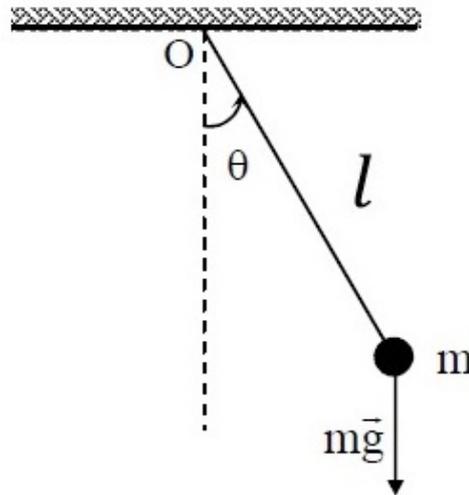


Figura 5.21: Ilustração de um pêndulo simples.

De acordo com a ilustração da figura 5.21, θ é o ângulo entre o pêndulo e a vertical. É conveniente expressarmos a altura que a massa ocupa em termos do ângulo θ e do comprimento l do pêndulo: $h = l(1 - \cos \theta)$. Usando θ como coordenada generalizada, temos que a energia cinética é escrita como:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2, \quad (5.35)$$

e a energia potencial do pêndulo é

$$V = mgh = mgl(1 - \cos \theta). \quad (5.36)$$

Neste caso, a lagrangiana é dada por

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (5.37)$$

e escrevemos a equação de Euler-Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (5.38)$$

substituindo (5.37) em (5.38), resulta

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) - (-mgl \sin \theta) = 0 \quad (5.39)$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl \operatorname{sen} \theta = 0$$

que pode ser escrito como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (5.40)$$

ou ainda,

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (5.41)$$

onde $\omega = \sqrt{g/l}$ é a frequência natural do pêndulo. A equação (5.41) é uma equação diferencial não-linear, cuja função $\operatorname{sen} \theta$ produz a não-linearidade. Esta equação não possui solução simples em termos de funções elementares.

Desenvolvendo o $\operatorname{sen} \theta$ da equação (5.41) em série de Taylor, temos:

$$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

Quando o pêndulo oscila em pequenas amplitudes, temos que $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$. Desse modo, o pêndulo descreverá oscilações harmônicas descritas pela equação diferencial

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad (5.42)$$

que é a equação diferencial do oscilador harmônico estudada anteriormente. A solução geral de (5.42) é dada por: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$, com frequência $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Com essa linearização, a solução do problema fica restrito à pequenas oscilações do pêndulo. Nas próximas seções usaremos métodos numéricos para aproximar soluções para qualquer amplitude do ângulo θ .

5.3.1 Resultados Numéricos

Para resolvermos numericamente a equação (5.41) utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem como no caso do oscilador harmônico. Como de costume, a equação diferencial é separada em duas partes formando um sistema de primeira ordem com a seguinte equação vetorial:

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \nu \\ \dot{\nu} &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad (5.43)$$

Testamos inicialmente para pequenas oscilações do ângulo θ . Para isso variamos a velocidade inicial ν_0 como um parâmetro, conforme figura 5.22.

No gráfico da figura 5.22 ilustramos a dependência temporal de θ como uma função do tempo, produzindo diferentes amplitudes. O objetivo é comparar os resultados numéricos para o pêndulo simples em pequenas oscilações com o oscilador harmônico simples. As condições iniciais foram: $\theta_0 = 0$, ν_0 conforme indicado na figura 5.22, $g/l = \varepsilon = 1$ e o tamanho do passo da integração numérica $h = 0.1$.

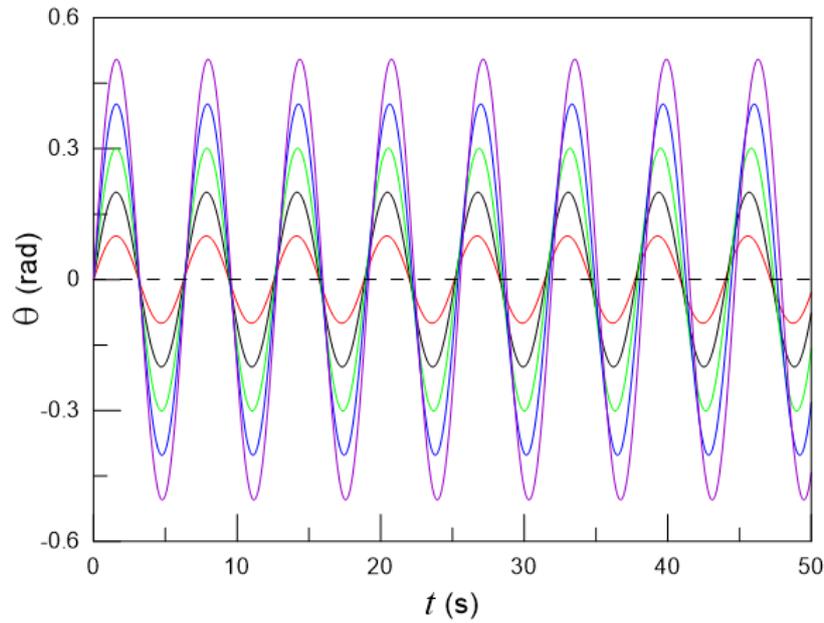


Figura 5.22: Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$; $\nu_0 = 0.1$ (vermelho), $\nu_0 = 0.2$ (preto), $\nu_0 = 0.3$ (verde), $\nu_0 = 0.4$ (azul), $\nu_0 = 0.5$ (roxo).

A figura 5.22 mostra o deslocamento de θ como função do tempo para diferentes valores de ν_0 . Para essas velocidades o período permanece praticamente constante e com diferentes amplitudes, como no caso do oscilador harmônico simples. A seguir ilustramos as trajetórias no espaço de fase para estas condições.

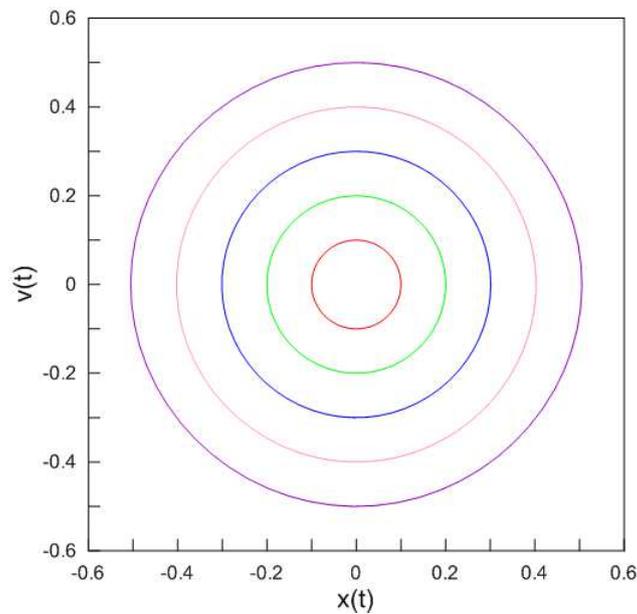


Figura 5.23: Espaço de fase (posição $x \times$ velocidade v) para os dados da figura 5.22 .

A figura 5.23 mostra o espaço de fase com base nos resultados da figura 5.22. Novamente podemos estabelecer uma comparação com o oscilador harmônico simples. Compare a semelhança com a figura 5.4, ambas são elipses, pontos de equilíbrio na origem e período constante, como era de se esperar.

Agora considere a seguinte questão. Imprime-se uma velocidade inicial ν_0 à massa e, caso a velocidade inicial ν_0 seja pequena, o movimento subsequente é oscilatório, uma vez que o sistema não tem energia suficiente para atingir a posição vertical, oposta ao seu ponto de equilíbrio. Ao contrário, se ν_0 for grande, a massa consegue atingir o ponto mais alto da trajetória circular ainda com velocidade, passando por ele, e continua girando sempre no mesmo sentido. Nos dois casos o movimento é periódico, ocorrendo no primeiro caso inversão de velocidade o que não ocorre no segundo caso. Portanto, temos um valor crítico, ν_c , que separa os dois movimentos.

O valor crítico da energia E é o valor da energia potencial no topo, isto é, $\theta = \pm\pi$:

$$E_{crit} = 2mgl. \quad (5.44)$$

Para simplificar, consideramos o caso em que $\theta_0 = 0$. Então, pela lei da conservação da energia, temos:

$$E = T + V = \frac{1}{2}ml^2\nu^2 + mg(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}ml^2\nu^2 \quad (5.45)$$

onde $\nu = \dot{\theta}$. Quando a energia é igual a energia crítica, isto é, $E = E_{crit}$, podemos calcular o valor crítico ν_c que separa os dois regimes possíveis de movimento. De (5.44) e (5.45), temos

$$E = E_{crit} \Rightarrow \frac{1}{2}ml^2\nu_c^2 = 2mgl$$

que fornece,

$$\nu_c = 2\sqrt{\varepsilon} \quad (5.46)$$

onde $\varepsilon = g/l$. Então, quando a velocidade inicial $\nu_0 < \nu_c$, o valor de θ está limitado entre $-\pi$ e π . Quando $\nu_0 > \nu_c$, o valor de θ é ilimitado.

Inicialmente resolvemos (5.41) analisando a dependência temporal de θ e, em seguida, analisamos o comportamento do sistema no domínio da frequência com a Transformada de Fourier (FFT) e então plotamos os gráficos com os espectros para diferentes valores de ν_0 , mantendo os demais fixos.

5.3.2 Dependência temporal ($\theta \times t$)

A seguir mostramos a dependência temporal de θ como função do tempo, com ν_0 sendo alterado como parâmetro. Escolhemos $\varepsilon = 1$, $\theta_0 = 0$ e ν_0 conforme indicado nas figuras. O tamanho do passo da integração numérica foi $h = 0.1$, e com isso construímos os gráficos das figuras 5.24 à 5.28.

a) $\nu_0 = 1.4, 1.5, 1.6$.

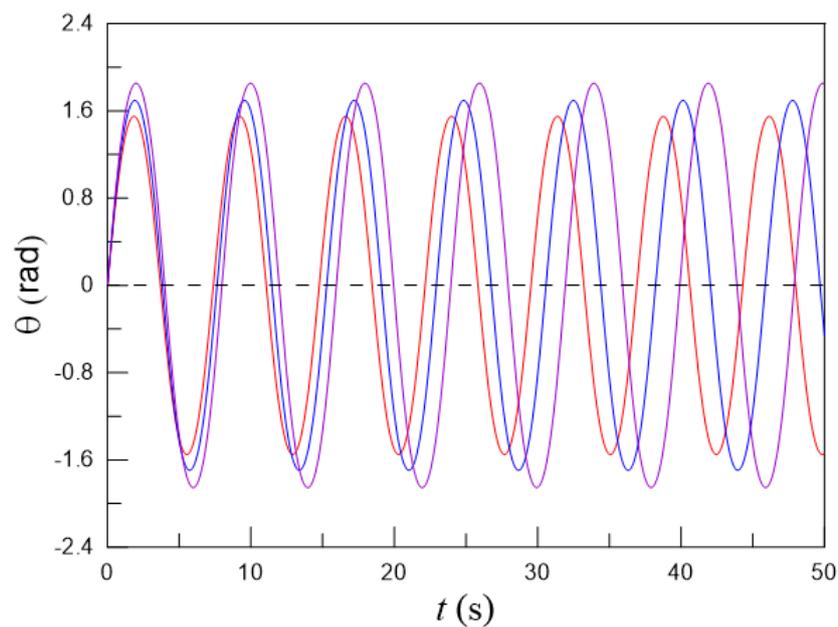


Figura 5.24: Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.4$ (vermelho), 1.5 (azul), 1.6 (roxo).

b) $\nu_0 = 1.8, 1.9, 1.981$.

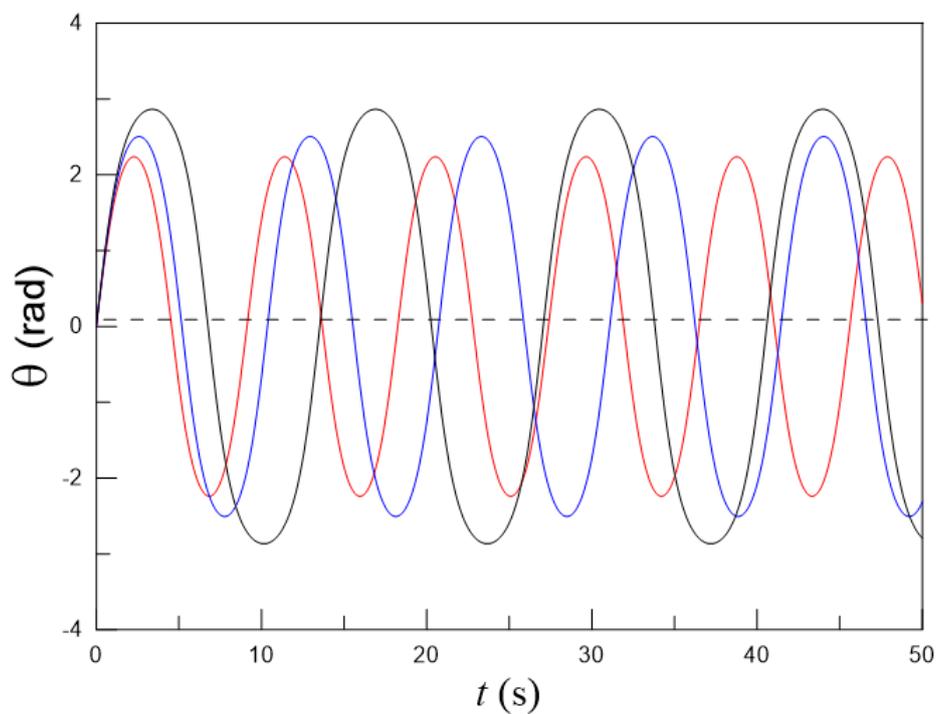


Figura 5.25: Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.8$ (vermelho), 1.9 (azul), 1.981 (preto).

c) $\nu_0 = 1.9962, 1.9991, 1.9999$

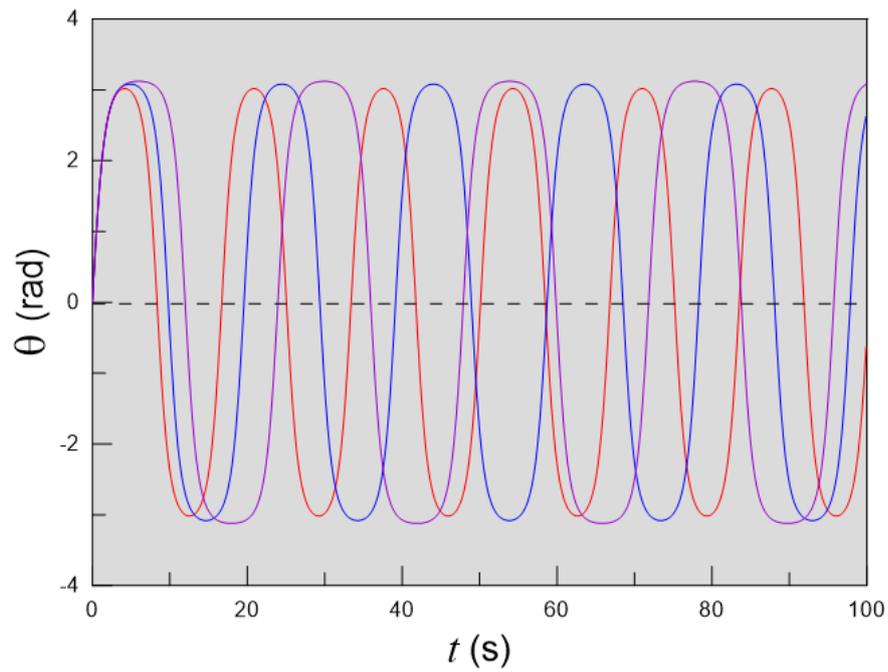


Figura 5.26: Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.9962$ (vermelho), 1.9991 (azul), 1.9999 (roxo).

d) $\nu_0 = 1.99999, 1.999995, 1.999999, 1.9999999$

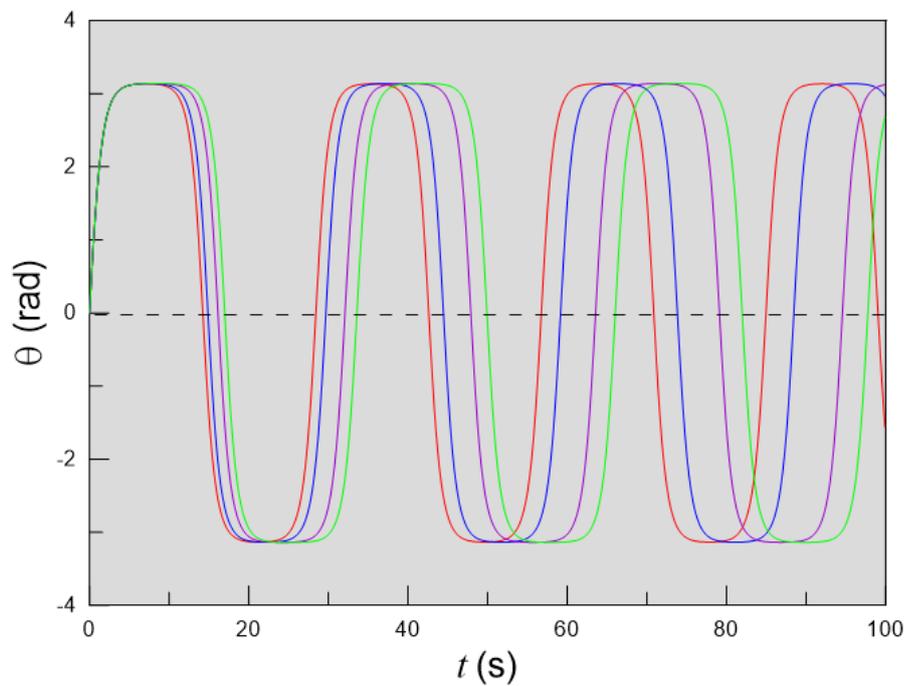


Figura 5.27: Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é mudado como um parâmetro: $\nu_0 = 1.99999$ (vermelho), 1.999995 (azul), 1.999999 (roxo), 1.9999999 (verde).

A escolha de $\varepsilon = 1$ implica em $\nu_c = 2.0$, de acordo com (5.46). Das figuras 5.24 à 5.27, podemos observar que à medida que ν_0 se aproxima do valor crítico $\nu_c = 2.0$ a forma da curva $\theta \times t$ se aproxima de uma onda quadrada, o que significa que o efeito da não-linearidade é realçado. Para velocidades iniciais muito próximas ao valor crítico ν_c , a massa passa muito tempo próxima do ponto mais alto da trajetória circular, com velocidades muito baixas, o que pode ser visualizado pelo achatamento da curva na figura 5.27. Note, ainda, que o período aumenta consideravelmente porque a massa passa muito tempo nessa condição, e quanto mais próximo a velocidade inicial for do valor crítico, maior será o período.

Para $\nu_0 > 2$, o valor de θ aumenta com o aumento de t , isto é, o pêndulo gira em torno do seu eixo de rotação. A figura 5.28 mostra o gráfico de θ em função de t para alguns valores de ν_0 acima do valor crítico, conforme indicado. Observe a característica cíclica do gráfico, como era de se esperar para um movimento rotacional.

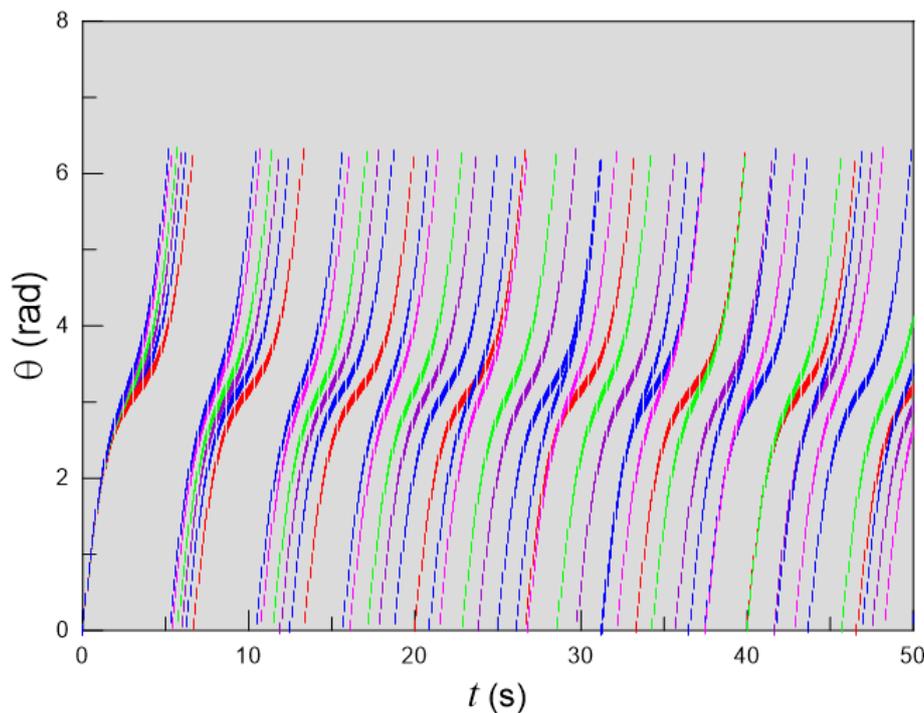


Figura 5.28: Dependência temporal de θ . $\varepsilon = 1$. ν_0 é alterado como um parâmetro: $\nu_0 = 2.02$ (vermelho), 2.03 (azul), 2.04 (roxo), 2.05 (verde), 2.07 (magenta), 2.08 (azul).

A figura 5.29 a seguir ilustra a representação no espaço de fase para alguns valores de ν_0 conforme indicado, no intervalo $-10 < \theta < 10$. Aparecem três centros (-2π , 0 e 2π) e quatro pontos de sela (-3π , $-\pi$, π e 3π). As trajetórias em vermelho correspondem às chamadas órbitas heteroclínicas. Essa trajetória também é chamada de separatriz, porque delimitam regiões onde existem movimentos de caráter diferentes: movimento oscilatório e movimento circular. Dentro das órbitas heteroclínicas as trajetórias correspondem a oscilações do pêndulo, enquanto que fora desta correspondem

a rotações.

A trajetória separatriz do pêndulo define o caso limite em que a energia mecânica é exatamente igual à energia crítica.

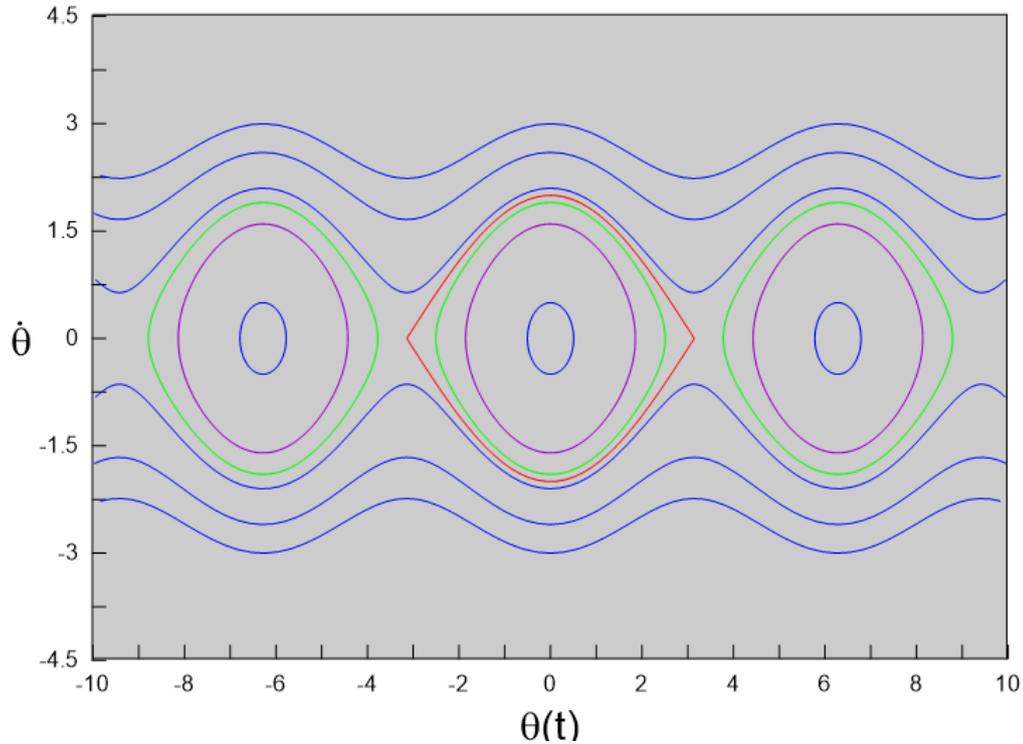


Figura 5.29: Espaço de fase ($\theta \times \dot{\theta}$) para $\varepsilon = 1$: $\nu_0 = 0.5$ (azul), $\nu_0 = 1.6$, $\nu_0 = 1.9$, $\nu_0 = 2$ (vermelho). A trajetória em vermelho é chamada separatriz, e corresponde a movimentos em que a energia é igual à energia crítica. No interior desta trajetória ocorrem as oscilações do pêndulo e fora desta as rotações.

Na seção seguinte faremos algumas considerações analisando o comportamento do pêndulo no domínio da frequência.

5.3.3 Análise do movimento com a Transformada de Fourier (FFT)

O problema do pêndulo tem uma natureza periódica incorporada. A dependência temporal do ângulo θ pode ser analisado usando o algoritmo FFT. Pelo que vimos, o espectro de Fourier fornece o quadrado da amplitude absoluta como uma função da frequência angular ω . No limite em que $\nu_0 = 0$,

$$\omega = \sqrt{\varepsilon} \quad (5.47)$$

No presente caso, testamos comparativamente os dados visto em [26], $\omega = 1$ uma vez que $\varepsilon = \frac{g}{l} = 1$.

Análogo à seção anterior, ν_0 é alterado como um parâmetro. A medida em que ν_0 se aproxima de ν_c ($2\sqrt{\varepsilon} = 2$), a dependência temporal de θ muda de uma onda senoidal

para uma onda quadrada, como vimos, indicando o aumento da não linearidade do sistema. O pêndulo descreve oscilações onde aparecem as componentes 3ω , 5ω , 7ω . A frequência fundamental ω também modifica-se e decresce rapidamente.

(a) $\nu_0 = 0.5$.

Aqui, $\omega(\approx 1)$ é a componente mais observada.

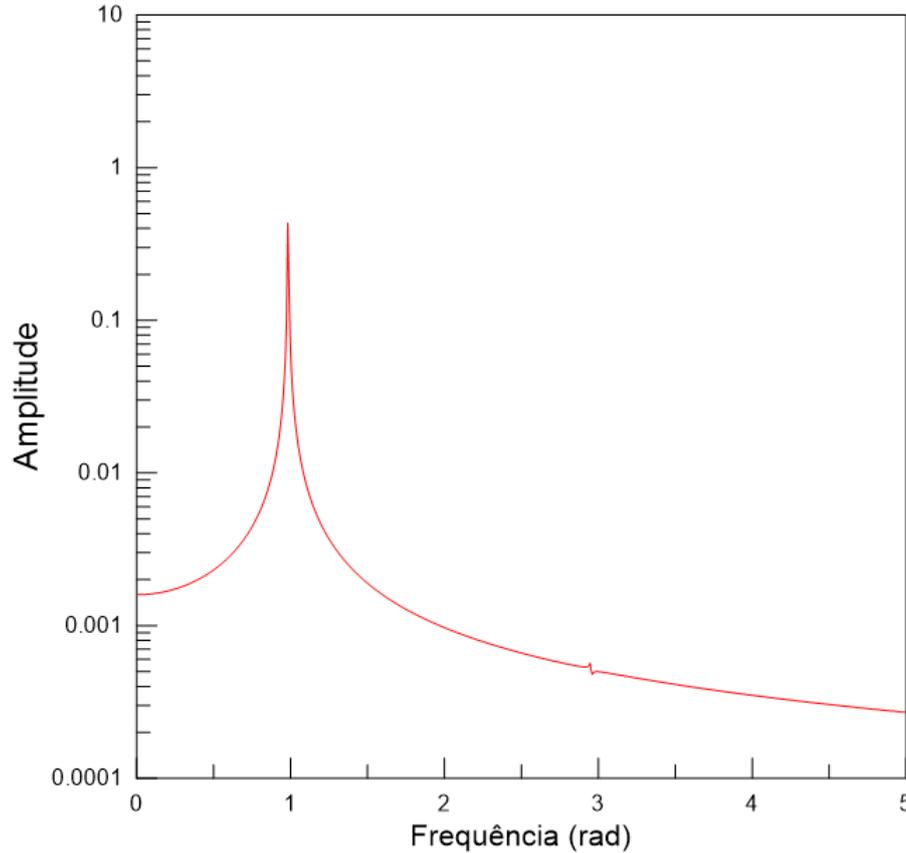


Figura 5.30: Espectro obtido com a FFT de θ vs t , via cálculo numérico usando RK4. O eixo x é a frequência angular ω (em radianos) e o eixo y é o quadrado do valor absoluto da amplitude complexa. O harmônico fundamental é observado em $\omega = 1$.

(b) $\nu_0 = 1.6$.

$\omega(< 1)$ e 3ω são as componentes mais observadas.

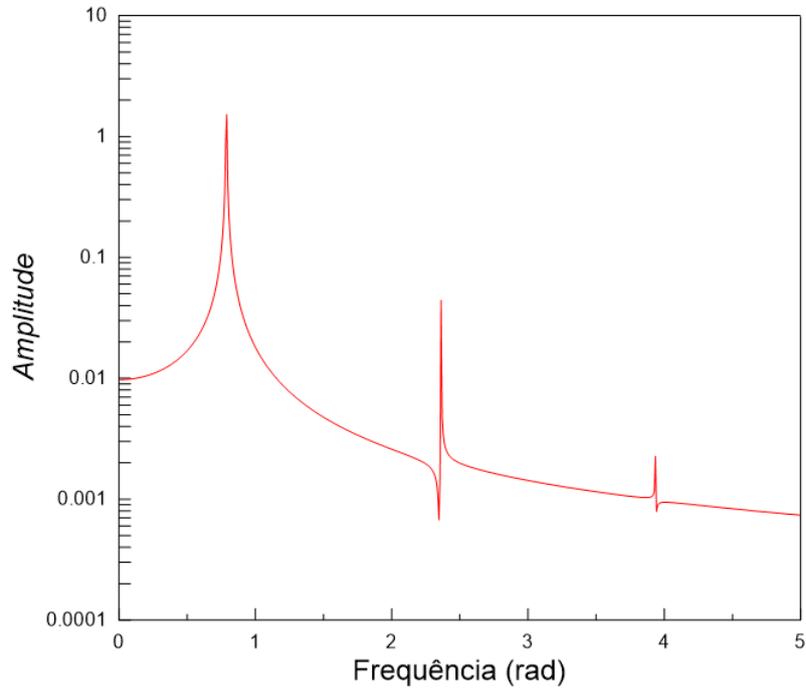


Figura 5.31: Espectro FFT para $\nu_0 = 1.6$.

(c) $\nu_0 = 1.9$: ω , 3ω e 5ω são as componentes mais observadas.

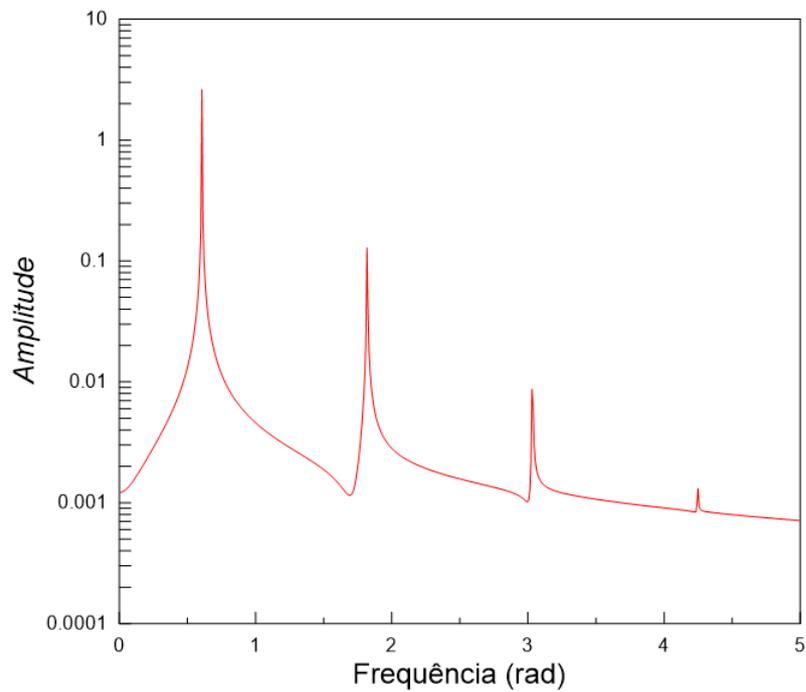


Figura 5.32: Espectro FFT para $\nu_0 = 1.9$.

(d) $\nu_0 = 1.981$: ω , 3ω , 5ω e 7ω são as componentes mais observadas.

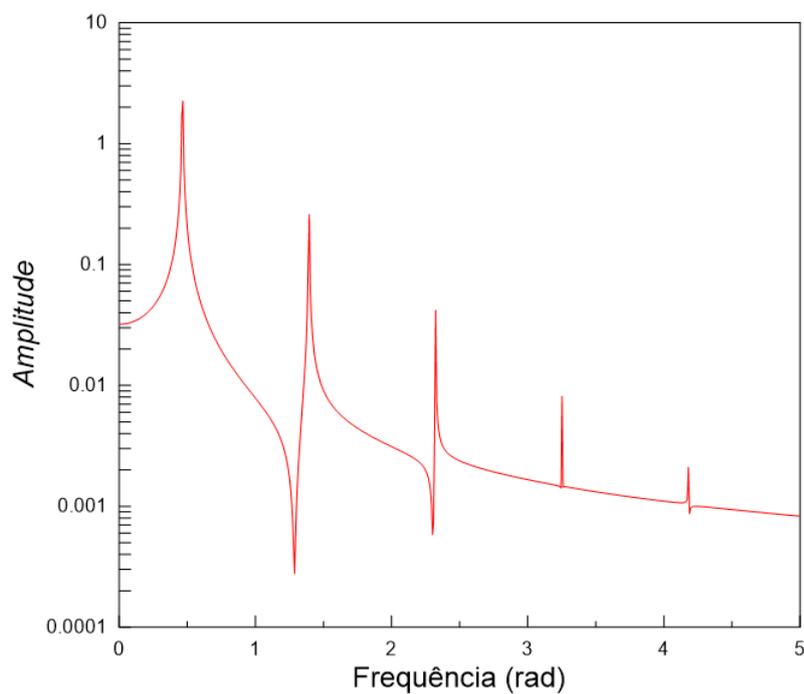


Figura 5.33: Espectro FFT para $\nu_0 = 1.981$

(e) $\nu_0 = 1.9962$: ω , 3ω , 5ω , 7ω e 9ω são as componentes mais observadas.

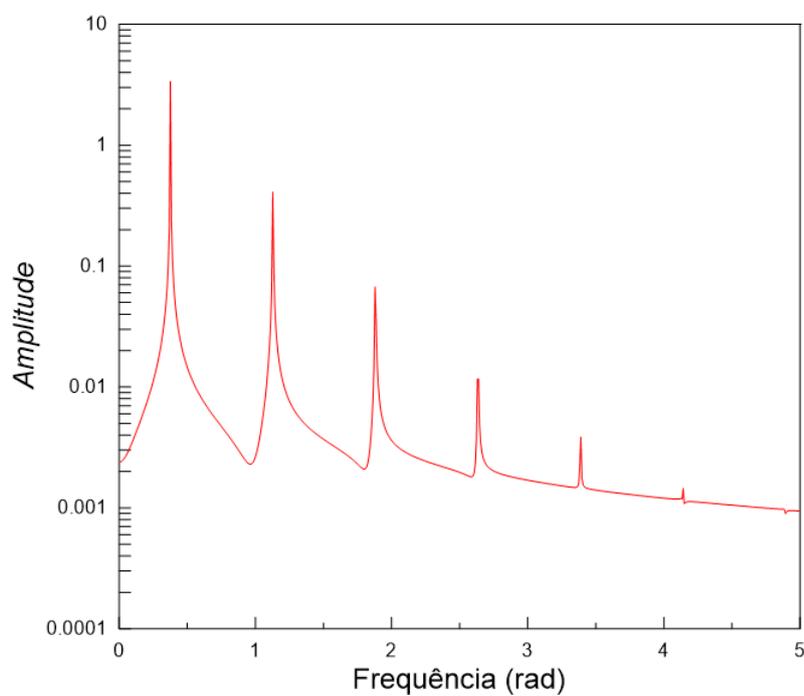


Figura 5.34: Espectro FFT para $\nu_0 = 1.9962$.

(f) $\nu_0 = 1.999995$: $\nu_0 = 1.9962$: ω , 3ω , 5ω , 7ω , 9ω , 11ω , 13ω , 15ω e 17ω são as componentes mais observadas.

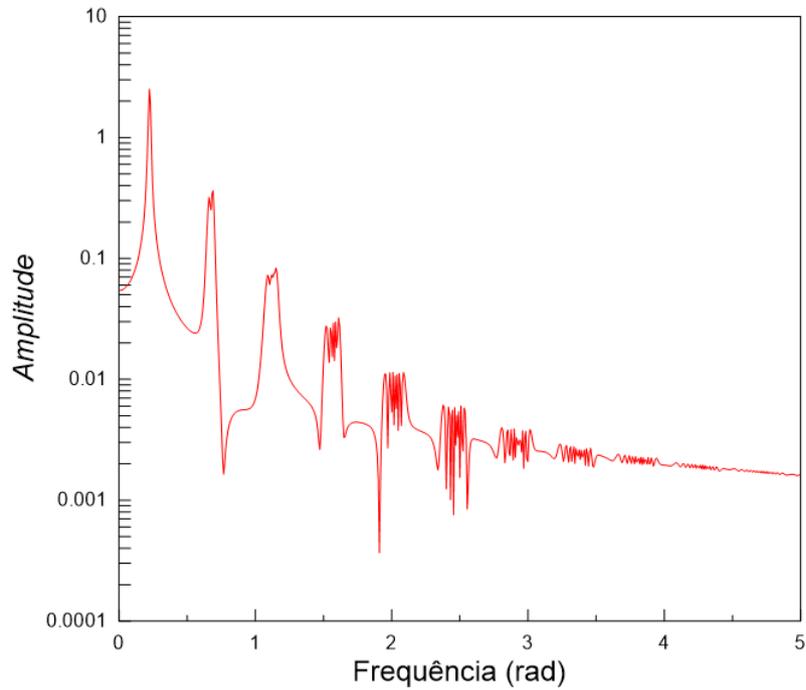


Figura 5.35: Espectro FFT para $\nu_0 = 1.999995$.

(g) $\nu_0 = 1.9999999$

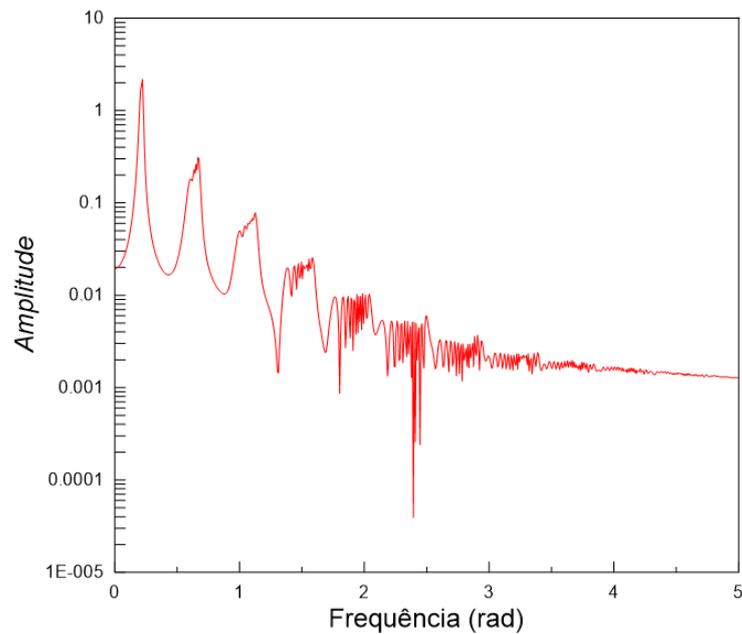
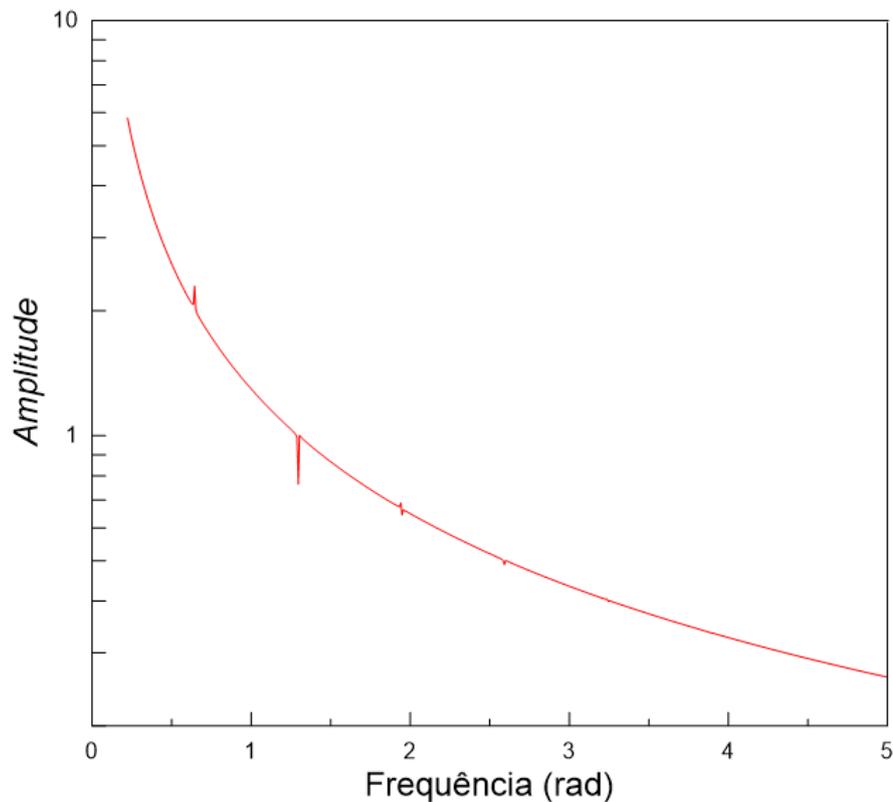


Figura 5.36: Espectro FFT para $\nu_0 = 1.9999999$.

(h) $\nu_0 = 2.001$ Figura 5.37: Espectro FFT para $\nu_0 = 2.001$

Podemos notar que o espectro de Fourier muda drasticamente em $\nu_0 \approx 2$. O espectro tem um comportamento irregular nas proximidades de $\nu_0 = 2.0$, onde ocorre a transição do movimento oscilatório para o não oscilatório. Para energias $E > 2mgl$, o movimento é ilimitado, ou seja, $|\theta|$ cresce indefinidamente. Assim, o movimento é oscilatório para $\nu_0 < 2$ e circular sempre no mesmo sentido para $\nu_0 > 2$. Ambos os movimentos são periódicos.

No caso limite em que a energia total é $E = 2mgl$, a velocidade angular do pêndulo é zero, e este se encontra em um estado de equilíbrio instável, na chamada posição invertida. O pêndulo passa muito tempo na proximidade da posição invertida e, se realmente pudéssemos igualar $\nu_0 = 2$ ($E = 2mgl$) num tempo finito, o período seria infinito neste ponto. Um resultado analítico baseado na teoria de funções elípticas pode ser encontrado em [1]. A figura 5.38 mostra o comportamento do período do pêndulo em função da velocidade inicial ν_0 .

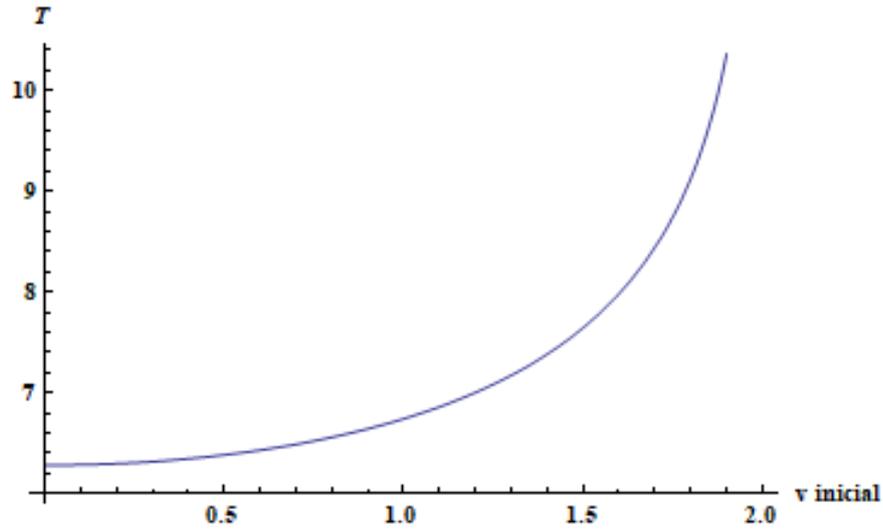


Figura 5.38: Período em função da velocidade inicial ν_0 . O gráfico foi obtido analiticamente baseado na teoria de funções elípticas. Note que nas proximidades de $\nu_0 = 2.0$ o período torna-se infinito. (Imagem retirada de [1])

5.3.4 O pêndulo amortecido e forçado

Sistemas mecânicos muito simples podem exibir comportamento caótico, como é o caso do pêndulo amortecido e forçado. Iremos considerar um pêndulo com uma força externa periódica, como no caso do oscilador harmônico. Diferentemente do pêndulo simples que vimos na seção anterior, o qual tem comportamento regular, este modelo dá origem à dois novos termos na equação de movimento (a amplitude de forçamento e a frequência da força externa) que admite um grande número de órbitas desde periódicas às caóticas, passando por várias características, como o efeito de duplicação do período, como veremos. Seguiremos as referências [27], [28] e [31].

Análogo ao que fizemos no caso do oscilador harmônico, podemos ajustar a equação de movimento do pêndulo simples de modo a produzir a equação do pêndulo amortecido e forçado:

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = F_o \cos(\omega t). \quad (5.48)$$

onde $2\beta = b/m$ é o parâmetro de amortecimento, $\omega_0^2 = g/l$ é a frequência natural do pêndulo e F_0 é a amplitude da força externa.

Para mostrar os efeitos produzidos pelo movimento do pêndulo amortecido e forçado, adotaremos a notação e os parâmetros vistos em [27]. Taylor (2005, [27]) considera uma amplitude para força externa proporcional a $\gamma\omega_0^2$, com γ variando. Desse modo, podemos escrever a equação (5.48) como:

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \gamma\omega_0^2 \cos(\omega t). \quad (5.49)$$

Os parâmetros de Taylor em *Classical Mechanics* são definidos como $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega = 3\pi$ e $\beta = \omega_0/4$ e γ variando. Com esses parâmetros é possível mostrar uma clara aproximação do caos, o que é conhecido na literatura como *rota do caos* [27]. No nosso caso, introduzimos o diferencial de analisar o movimento com a Transformada de Fourier. Inicialmente testamos para pequenos valores da amplitude da força externa. A figura 5.39 mostra os resultados para $\gamma = 0.2$.

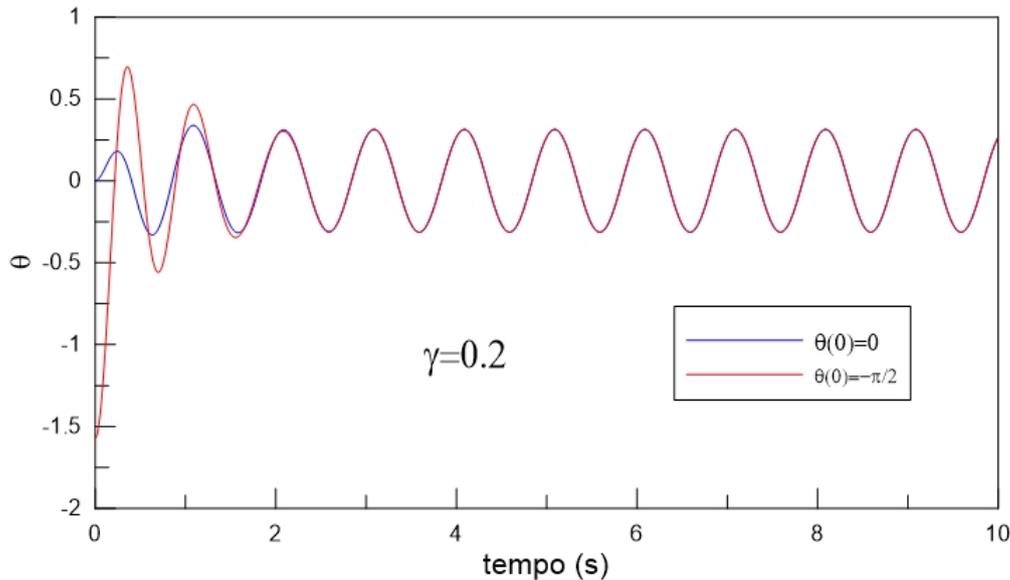


Figura 5.39: Deslocamento temporal de θ para o pêndulo amortecido e forçado, com pequena amplitude da força externa $\gamma = 0.2$. As curvas correspondem a condições iniciais distintas: $\theta(0) = 0$ (azul) e $\theta(0) = -\pi/2$ (vermelho). Para ambos os casos: $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

Podemos observar na figura 5.39 que logo após o período transitório as duas condições alcançam uma solução periódica que oscila com a mesma período da força externa. Característica semelhante é observada quando aumentamos um pouco mais a amplitude para um valor intermediário, $\gamma = 0.9$. Para este valor, os resultados são mostrados na figura 5.40.

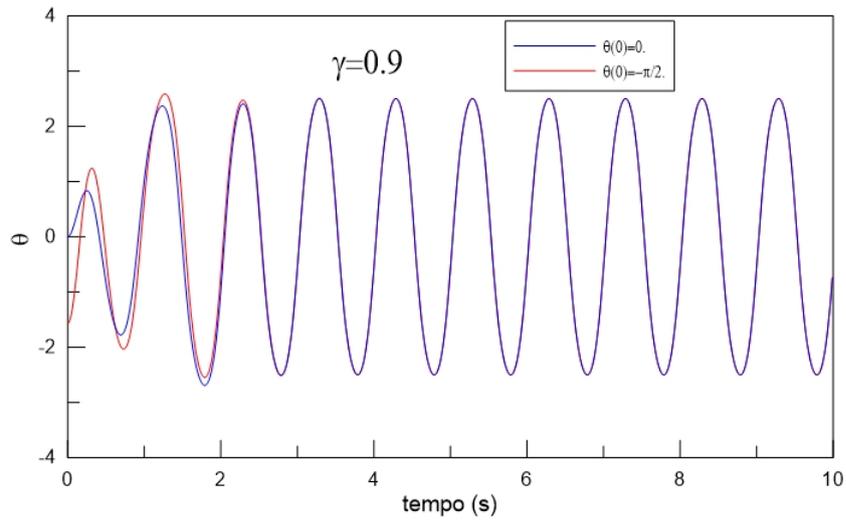


Figura 5.40: Deslocamento temporal de θ para o pêndulo amortecido e forçado, com amplitude da força externa intermediária, $\gamma = 0.9$. As curvas correspondem a condições iniciais distintas: $\theta(0) = 0$ (azul) e $\theta(0) = -\pi/2$ (vermelho). Para ambos os casos: $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

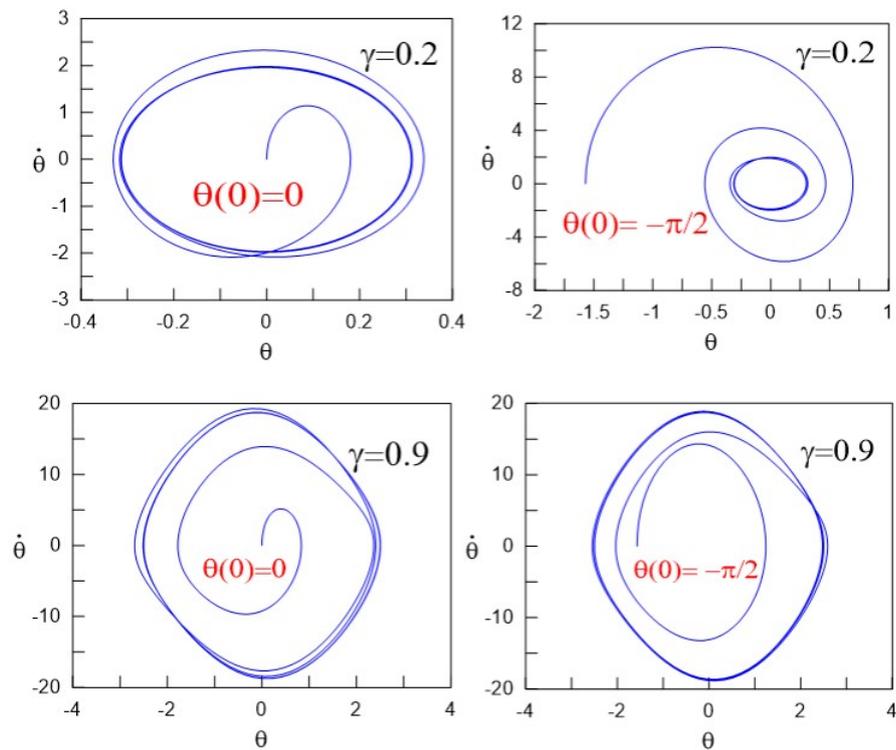


Figura 5.41: Trajetórias no espaço de fase ($\theta \times \dot{\theta}$) para os movimentos representados nas figuras 5.39 e 5.39. Para estes casos, independente das condições iniciais as trajetórias exibem um único atrator. Isto nem sempre ocorre, como veremos.

Aumentando um pouco mais a amplitude, $\gamma = 1.06$, obtemos um comportamento errático até que se alcança uma solução periódica que oscila com a mesma frequência da força externa. Contrariamente ao pêndulo simples da seção anterior, o pêndulo amortecido e forçado pode exibir mais de um atrator. Neste caso, duas condições iniciais distintas podem convergir, depois do período transitório, para soluções distintas como mostram as trajetórias da figura 5.43. A figura 5.42 mostra os resultados para $\gamma = 1.06$ e condições iniciais distintas, conforme indicado.

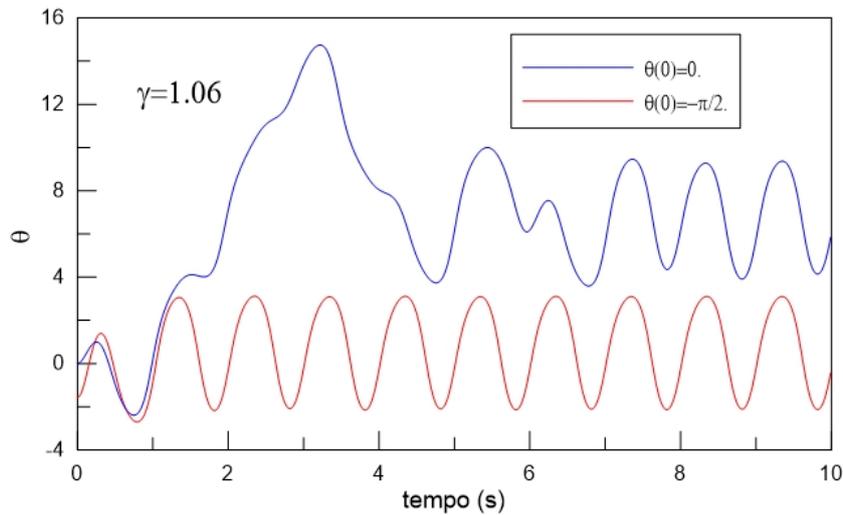


Figura 5.42: Movimento do pêndulo amortecido e forçado para uma amplitude da força externa igual a 1.06 e duas condições iniciais distintas. Depois do regime transitório se alcança soluções distintas. As curvas correspondem às condições iniciais: $\theta(0) = 0$ (azul) e $\theta(0) = -\pi/2$ (vermelho). Para ambos os casos: $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$

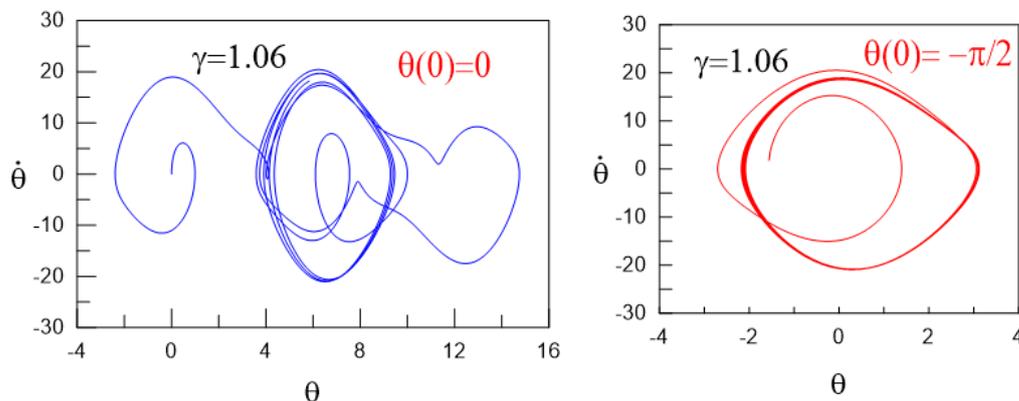


Figura 5.43: Trajetória no espaço de fase ($\theta \times \dot{\theta}$) para uma amplitude $\gamma = 1.06$ e dados da figura 5.42. Observe que neste caso as condições iniciais definem duas soluções distintas no espaço de fase.

No estudo do pêndulo caótico, encontramos entre o regime linear e o surgimento do caos o chamado fenômeno de duplicação de período. Uma característica marcante deste fenômeno é o surgimento de subarmônicos. A figura 5.44 mostra os resultados obtidos para uma amplitude $\gamma = 1.06$ e o espectro para condição inicial $\theta(0) = -\pi/2$.

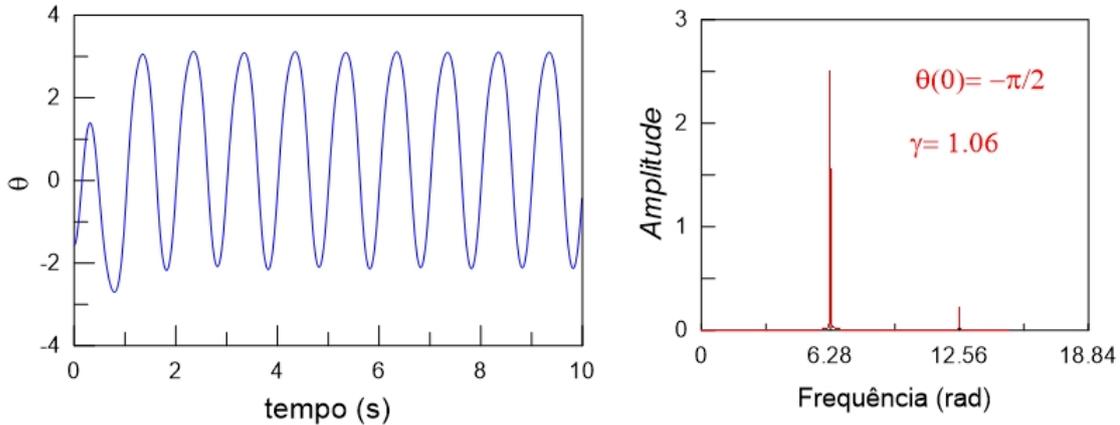


Figura 5.44: Deslocamento temporal de θ (esquerda) para o pêndulo amortecido e forçado, com amplitude da força externa $\gamma = 1.06$ e seu espectro de frequência (direita). Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Observe o surgimento de uma frequência duas vezes maior que a frequência da força externa (≈ 12.56).

Na figura 5.44 podemos notar um pico principal do espectro em 6.28 ($\approx 2\pi$) que é a frequência de oscilação da força externa. Mas também podemos notar um pico secundário em 12.56 ($\approx 4\pi$) o que mostra a duplicação do período. Podem existir picos secundários triplicando ou quadruplicando a frequência fundamental.

Aumentando gradualmente a amplitude da força externa pode-se observar o que é conhecido na literatura como cascata de duplicação do período. Podemos ter uma boa noção desse efeito usando a transformada de Fourier e observando o comportamento no domínio da frequência.

A figura 5.45 mostra os resultados obtidos para as amplitudes $\gamma = 0.9$, $\gamma = 1.06$ e $\gamma = 1.078$. Para $\gamma = 0.9$ gráfico mostra um só pico, isto é, se tem uma única frequência de grande intensidade. Nos gráficos seguintes aparecem alguns picos com um espaçamento de frequência cada vez menor entre eles. Um olhar atento, entretanto, podemos ver que este espaçamento se divide cada vez em 2, o que equivale a dizer que o período se duplica sucessivamente. A figura 5.46 complementa este caso, onde o gráfico mostra um espectro de banda larga, evidenciando o tanto que o sistema se torna caótico.

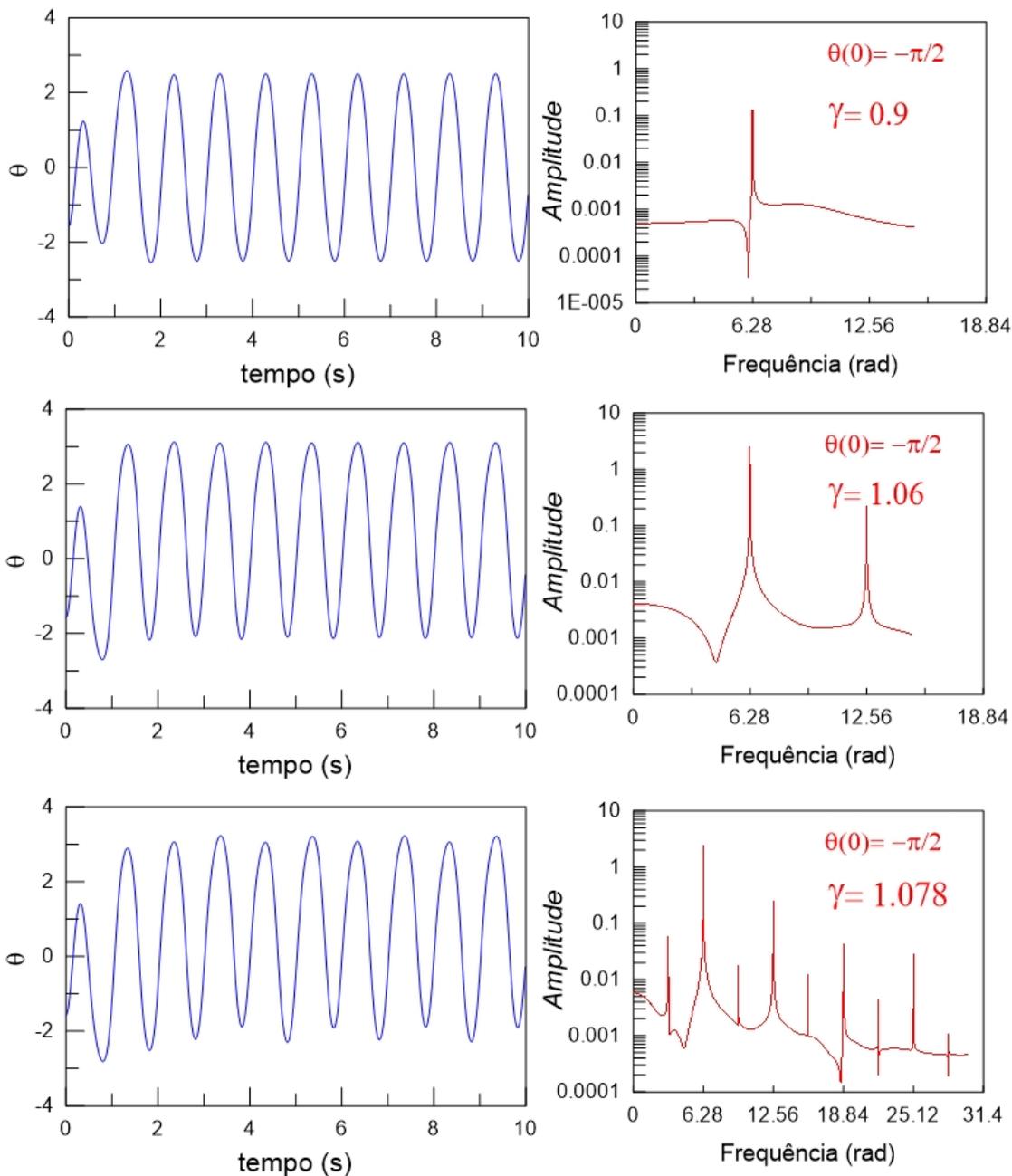


Figura 5.45: Efeito cascata de duplicação do período visto no espectro de frequência. Observe que aumentando a amplitude da força externa surgem novas frequências com duas, três, vezes a frequência da força externa. Na imagem superior, $\gamma = 0.9$, observamos um pico característico com a mesma frequência da força externa, 2π (≈ 6.28). Aumentando para $\gamma = 1.06$ a amplitude, observamos outro pico característico com o dobro da frequência de forçamento (centro). Quando aumentamos γ para 1.078 o espectro mostra picos com três e quatro vezes a frequência da força externa e vários subarmônicos. Condições iniciais em todos os casos: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e γ variando conforme indicado.

Quando aumentamos um pouco mais a amplitude, o movimento do pêndulo torna-se errático se afastando cada vez mais de um movimento periódico, indicando o surgimento do caos. A figura 5.46 ilustra esse comportamento para alguns valores de γ conforme indicado.

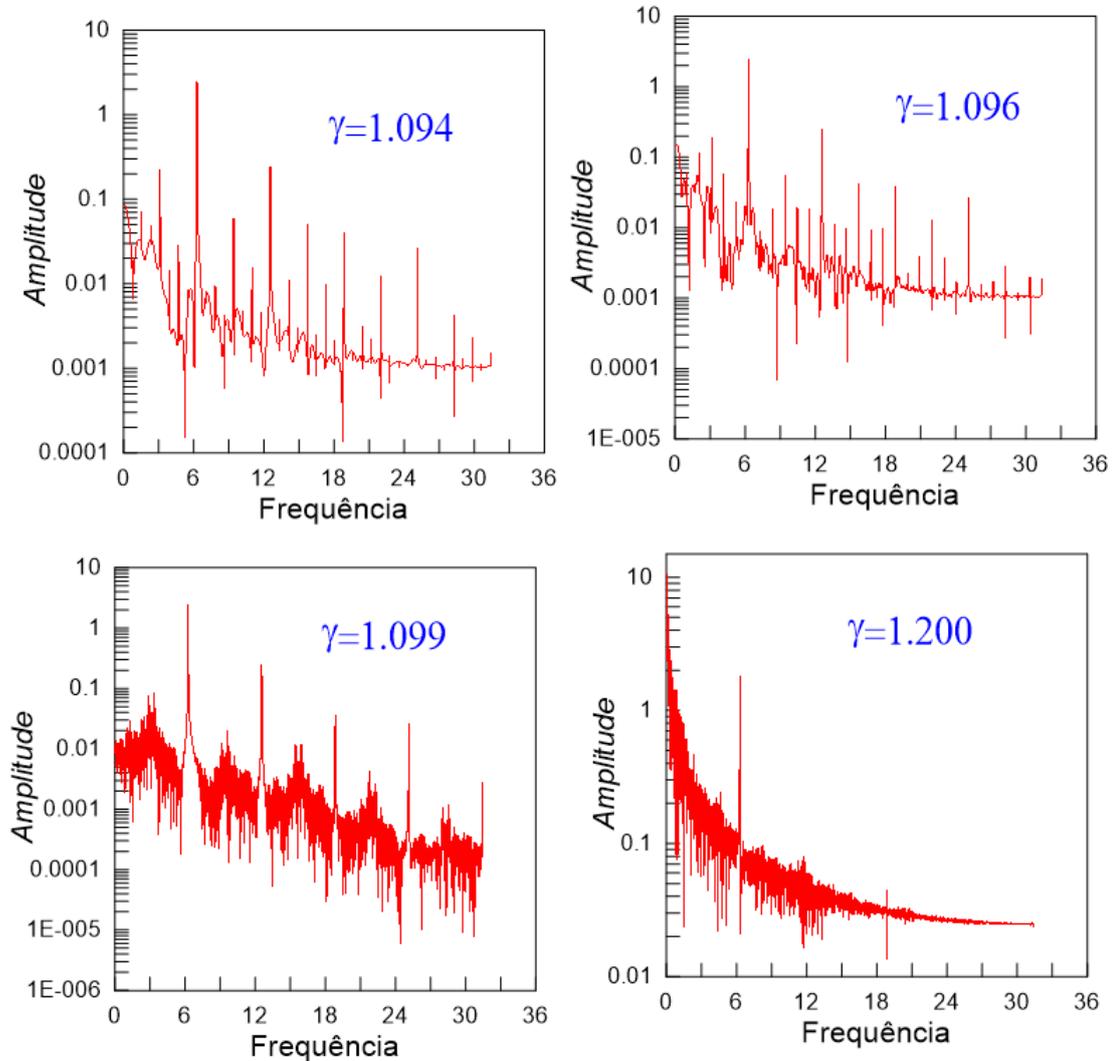


Figura 5.46: Transformada de Fourier no regime caótico. O sinal abrange muitos valores de frequências, o que caracteriza o regime caótico. Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e γ variando conforme indicado.

A figura 5.46 mostra o espectro de frequência para alguns valores da amplitude γ , conforme indicado. Observe que para estes valores de γ não existem frequências bem definidas para as oscilações, pois estas abrangem muitos valores do espectro o que caracteriza o comportamento caótico.

O movimento caótico está sempre associado a extrema sensibilidade às condições iniciais. Ilustramos essa característica com a simulação vista na figura 5.47.

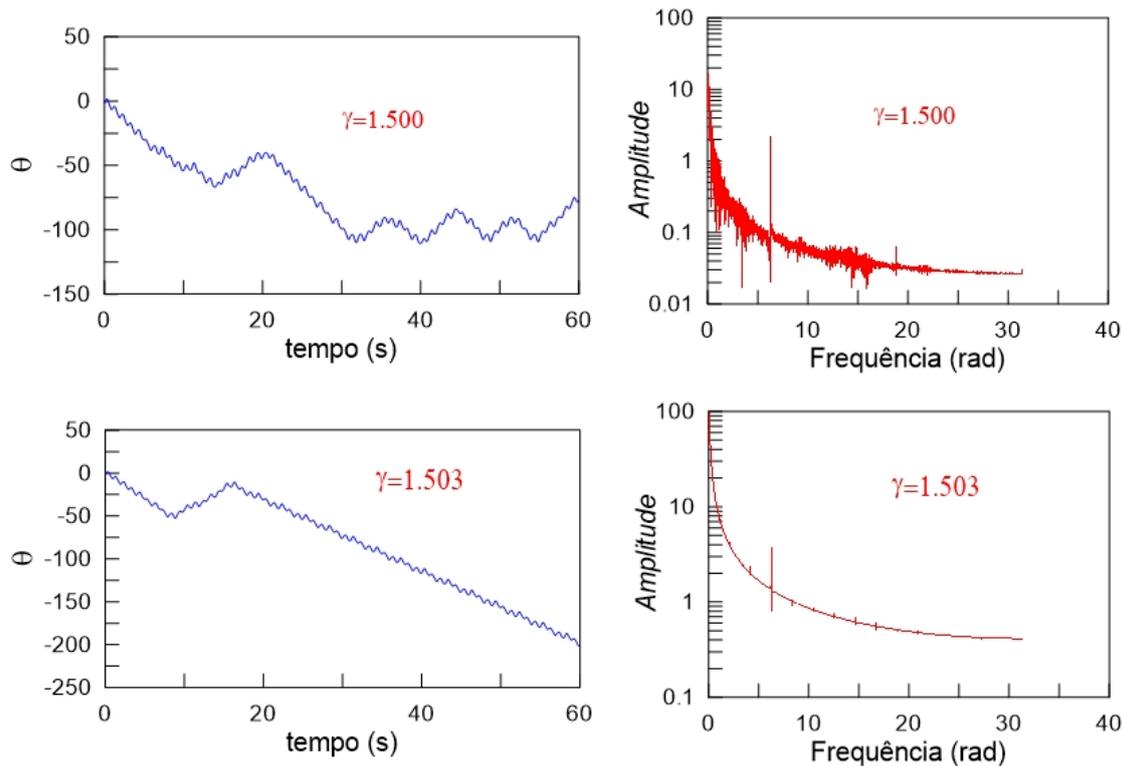


Figura 5.47: Evolução temporal do ângulo θ no regime caótico, mostrando a sensibilidade a condições iniciais. Para $\gamma = 1.500$ o movimento é caótico e não periódico, para $\gamma = 1.503$ o movimento é periódico, ainda que ilimitado. O espectro de $\gamma = 1.500$ é característico do movimento caótico, enquanto que para $\gamma = 1.503$ é característico de movimentos rotacionais. Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e γ variando conforme indicado.

A figura 5.47 ilustra a sensibilidade às condições iniciais, onde o movimento periódico e caótico ocorre em intervalos estreitos de γ . Para $\gamma = 1.500$ o movimento é caótico, o que pode ser evidenciado pelo deslocamento temporal de θ e pelo espectro da transformada de Fourier. Já para $\gamma = 1.503$, isto é, uma variação pequena da amplitude, o movimento é periódico não limitado. O espectro para $\gamma = 1.503$ pode ser comparado com a figura 5.37, que mostra o movimento periódico e ilimitado do pêndulo simples. Este efeito que acabamos de verificar é conhecido na literatura como *efeito borboleta* (Butterfly Effect), por razões históricas [31].

Cabe ressaltar que na figura 5.47 mostramos apenas uma parte do registro obtido na integração numérica. Na realidade integramos as equações por um período de tempo bem maior e não encontramos qualquer alteração no comportamento, que continua caótico ou periódico até o final da integração. A figura 5.48 mostra o deslocamento temporal de θ no intervalo 60 a 500 segundos.

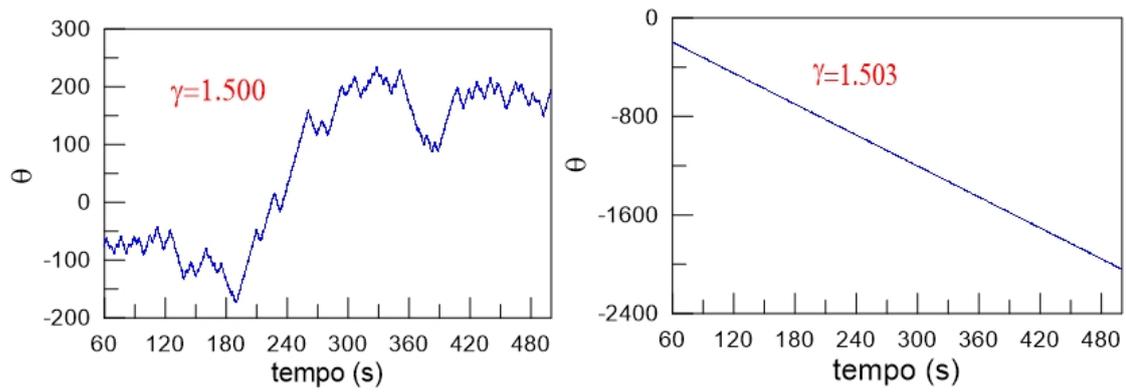


Figura 5.48: Deslocamento temporal de θ no regime caótico. Os painéis mostram o deslocamento de θ no intervalo de 60 a 500 segundos. Observe o comportamento errático para amplitude $\gamma = 1.500$ que nunca se converte em um movimento periódico, independente do tempo transcorrido. Já para amplitude $\gamma = 1.503$ o comportamento periódico permanece inalterado. Condições iniciais: $\theta(0) = -\pi/2$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 1.5\omega$, $\beta = \omega_0/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\gamma = 1.500$ (esquerda) e $\gamma = 1.503$ (direita).

5.4 O Pião Simétrico

Um pião simétrico consiste de um corpo rígido que tem os seus momentos de inércia principais da forma $I_1 = I_2$, mas $I_1 \neq I_3$. Onde I_1, I_2, I_3 são os momentos principais de inércia com relação aos eixos principais de inércia. Quando $I_1 = I_2$, por exemplo, dizemos que o corpo é simétrico. Suponha que o corpo seja capaz de girar em torno de um ponto fixo O do eixo de simetria, localizado a uma distância h do centro de massa, num campo gravitacional constante. Utilizamos as referências [14], [30] e [28].

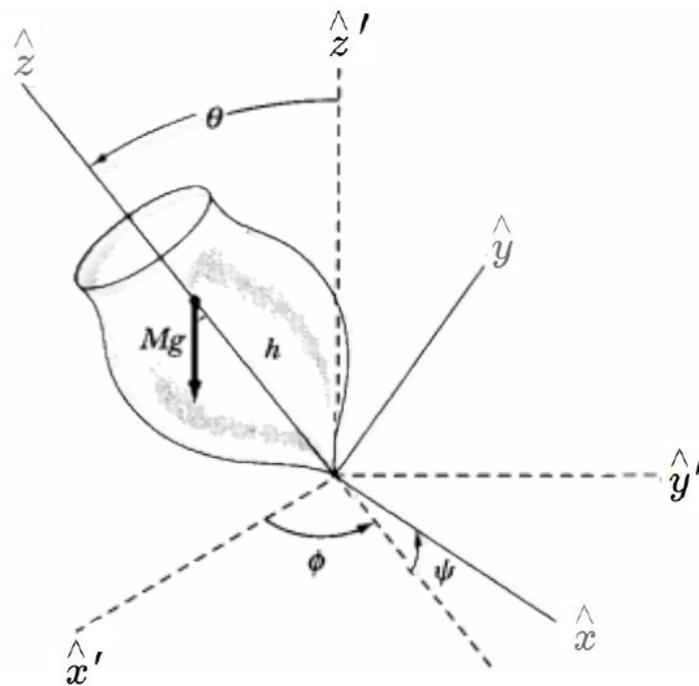


Figura 5.49: Ilustração para um pião simétrico com um ponto fixo.

5.4.1 Ângulos de Euler e Equações de Euler

Usaremos o formalismo lagrangiano para modelagem do pião, tendo como coordenadas generalizadas os ângulos de Euler, ϕ, θ, ψ . A convenção de Euler consiste em realizar três rotações sucessivas, cada uma delas servindo para definir um dos ângulos de Euler, conforme ilustrado na figura 5.50. Consideramos dois sistemas de eixos com mesma origem, um deles representa o sistema de referência fixo $O\hat{x}'\hat{y}'\hat{z}'$, denotado por apóstrofos, e outro fixo ao corpo rígido, no nosso caso o pião, com eixos $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$. Supomos que os seis eixos se encontrem inicialmente paralelos e, então, determina-se a forma de rotacionar o sistema de eixos do corpo rígido para que o mesmo assumam qualquer orientação possível no espaço.

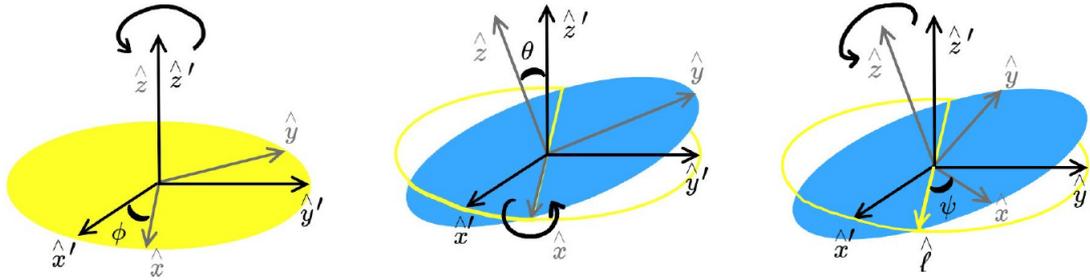


Figura 5.50: Sequência de rotações convencionalizada por Euler para obtenção dos ângulos de Euler, que leva um sistema de eixos em outro sistema orientado arbitrariamente. Esquerda: Rotação em torno do eixo $\hat{z} = \hat{z}'$ pela ângulo ϕ . Centro: Rotação em torno do eixo \hat{x}' pelo ângulo θ . Direita: Rotação em torno do eixo \hat{z} pelo ângulo ψ .

A associação dos eixos do corpo rígido com relação aos eixos fixos é feita da seguinte maneira. Definimos no referencial fixo a direção vertical como sendo \hat{z}' , e o plano horizontal como $O\hat{x}'\hat{y}'$. Escolhemos então um dos eixos principais do corpo rígido como \hat{z} para definir seu ângulo θ com relação à vertical. Os outros dois eixos principais do corpo definem o plano $O\hat{x}\hat{y}$. Note que θ também é o ângulo de inclinação entre esse plano e a horizontal.

A linha de interseção entre o plano $O\hat{x}\hat{y}$ do corpo rígido e o plano horizontal recebe o nome de linha dos nodos, com direção representada pelo versor $\hat{\ell}$ na figura 5.50 (direita). No sistema de eixos fixo, o ângulo entre a linha dos nodos e \hat{x}' vale ϕ . No sistema de eixos principais do corpo rígido, o ângulo entre a linha de nodos e \hat{x} é ψ . Isso define as coordenadas de orientação do corpo rígido.

O eixo de rotação do corpo rígido em torno de si mesmo é o eixo \hat{z} , que recebe o nome de rotação própria (*spin*). A coordenada angular é dada pelo ângulo ψ e sua velocidade angular é $\dot{\psi}$, geralmente a maior de todas.

O ângulo θ , que fornece a inclinação entre o eixo de rotação própria do corpo e a direção vertical, tem como eixo de rotação a linha de nodos. A variação dessa inclinação recebe o nome de *nutação*. A nutação ocorre a uma velocidade $\dot{\theta}$ bem menor do que a velocidade de rotação própria.

A rotação da linha de nodos no plano horizontal, descrita pelo ângulo ϕ , está associada ao movimento de *precessão* do corpo rígido em torno da direção vertical, sendo sua velocidade $\dot{\phi}$ geralmente a mais lenta de todas.

Dada uma orientação instantânea (ϕ, θ, ψ) , então determina-se a *rotação instantânea* $\omega(t)$ responsável pela variação das coordenadas no tempo. Os vetores velocidade angular associados aos ângulos de Euler, denotados como $\omega_\phi, \omega_\theta$ e ω_ψ , apontam, respectivamente, os seguintes eixos de rotação: a vertical (\hat{z}'), a linha dos nodos (denotada por $\hat{\ell}$) e o eixo de rotação própria (\hat{z}) do corpo rígido, ou seja:

$$\omega_\phi = \dot{\phi}\hat{z}', \quad \omega_\theta = \dot{\theta}\hat{\ell}, \quad \omega_\psi = \dot{\psi}\hat{z}. \quad (5.50)$$

De acordo com [14], as componentes da velocidade angular nos eixos principais do corpo rígido relacionam-se aos ângulos de Euler através das relações:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Na equação (5.51), para as componentes de ω foram tomados os eixos do corpo (xyz) em relação ao ponto de origem O , com momentos principais de inércia (I_1, I_2, I_3) na mesma ordem. Assim, as equações de Euler para o corpo rígido são escritas como:

$$I_1\dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z = \tau_1 \quad (5.52)$$

$$I_2\dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_z\omega_x = \tau_2 \quad (5.53)$$

$$I_3\dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\omega_x\omega_y = \tau_3 \quad (5.54)$$

Por hipótese consideramos o caso em que o pião gira livremente, sem sofrer influências externas, ou seja, $\tau_i = 0$. Como o torque é nulo em relação ao centro de massa exercido pelo peso do pião e levando em consideração, ainda, o fato do pião ser simétrico ($I_1 = I_2$), as equações de Euler tornam-se:

$$I_1\dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z = 0 \quad (5.55)$$

$$I_2\dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_z\omega_x = 0 \quad (5.56)$$

$$I_3\dot{\omega}_z = 0 \quad (5.57)$$

5.4.2 Lagrangiana e equações de movimento

Podemos analisar o movimento do pião usando as equações de Lagrange e os ângulos de Euler como coordenadas generalizadas. Assumimos que o pião possui um ponto fixo na origem. A energia cinética sobre o ponto fixo é puramente rotacional. Para um pião simétrico, podemos escrevê-la em termos de rotação sobre seus eixos principais de inércia:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_z^2$$

pois $I_1 = I_2$.

Precisamos escrever o vetor velocidade angular em termo de suas componentes pelos ângulos de Euler. Por (5.51) a expressão para energia cinética fica,

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (5.58)$$

Assumimos que o centro de massa do pião está a uma distância h do ponto fixo. Assim, a energia potencial é

$$V = mgh \cos \theta \quad (5.59)$$

Agora podemos escrever a Lagrangiana:

$$L = T - V = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgh \cos \theta. \quad (5.60)$$

onde os ângulos de Euler θ , ϕ e ψ são nossas coordenadas generalizadas, q_i . A primeira observação é que os ângulos ϕ e ψ não participam da Lagrangiana, de modo que pela equação (5.3), temos

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

para ambos $q_i = \phi$ e $q_i = \psi$. Isto é, as variáveis ϕ e ψ são cíclicas, logo os momentos conjugados correspondentes são as constantes de movimento p_ϕ e p_ψ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3\omega_z = p_\psi = \text{const.} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = p_\phi = \text{const.} \quad (5.62)$$

Resolvendo esta última equação para $\dot{\phi}$, temos:

$$\dot{\phi} = \frac{(p_\phi - I_3\omega_z \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (5.63)$$

Agora, resolvendo (5.61) para $\dot{\psi}$ e usando (5.63), temos:

$$\dot{\psi} = \omega_z - \left[\frac{(p_\phi - I_3\omega_z \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \right] \cos \theta \quad (5.64)$$

Vamos usar novamente a equação de Euler-Lagrange tendo como coordenada generalizada o ângulo θ . De (5.3) sabemos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (5.65)$$

onde,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_1\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) \right] + mgh \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_1\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta - I_3\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgh \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = [I_1 - I_3]\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta + mgh \sin \theta$$

E a derivada parcial de L com respeito a $\dot{\theta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_1 \ddot{\theta}$$

Assim a equação (5.65) torna-se:

$$I_1 \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta [I_1 - I_3] + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta - mgh \sin \theta = 0$$

rearranjando para $\ddot{\theta}$ e usando (5.62), temos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left[\frac{(p_\phi - I_3 \omega_z \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \right]^2 \sin \theta \cos \theta \\ & - \left(\frac{I_3 \omega_z}{I_1} \right) \left[\frac{(p_\phi - I_3 \omega_z \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \right] \sin \theta + \frac{mgh}{I_1} \sin \theta \end{aligned} \quad (5.66)$$

Se conhecemos θ como uma função do tempo, então podemos integrar (5.63) e (5.64) para obter ϕ e ψ no tempo. Por sua vez, resolvendo a equação diferencial de segunda ordem (5.66) obtemos θ como função do tempo.

A outra constante de movimento fundamental é a energia:

$$\begin{aligned} E = T + V = & \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgh \cos \theta \\ = & \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2 + mgh \cos \theta = \text{const.} \end{aligned}$$

mas o termo,

$$I_3 \omega_z^2 = I_3 \left(\frac{p_\psi}{I_3} \right)^2 = \frac{p_\psi^2}{I_3} = \text{const.}$$

Assim, a quantidade:

$$\begin{aligned} E' = & \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + mgh \cos \theta \\ = & \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + mgh \cos \theta \end{aligned}$$

também é constante.

Podemos escrever esta quantidade como:

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta) \quad (5.67)$$

onde,

$$V_{ef}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + mgh \cos \theta \quad (5.68)$$

é chamado de potencial efetivo.

5.4.3 Precessão

Precessão é movimento através do ângulo azimutal ϕ . Por enquanto vamos ignorar a nutação, $\dot{\theta} = 0$, e focar no ângulo de inclinação θ , assumido constante, e a taxa de precessão $\dot{\phi}$. Para obter a taxa de precessão, vamos usar o Método da Energia que implica encontrar um ponto em que a energia total do sistema é estacionária em relação ao ângulo θ , isto é:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad (5.69)$$

Podemos fazer isso porque E é uma quantidade conservada definida pelas condições iniciais. A energia deve ser um valor estacionário ou extremo igual a energia total do sistema. Qualquer desvio em θ do valor correto representa um erro na solução que afasta o valor estacionário. Isso fornece uma relação matemática útil para encontrar propriedades físicas importantes do sistema.

Uma vez que ignoramos a nutação (apenas consideramos a precessão), eliminamos as variáveis $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ em E e colocamos E em termos das invariantes, p_ψ e p_ϕ , usando (5.61) e (5.62):

$$E = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgh \cos \theta. \quad (5.70)$$

Tomando a derivada de E em relação ao ângulo de elevação θ , produz:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)p_\psi \sin^3 \theta - \sin \theta \cos \theta (p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^4 \theta} - mgh \sin \theta \quad (5.71)$$

A relação em (5.71) pode ser reorganizada agrupando os termos em $p_\phi - p_\psi \cos \theta$, para obtermos:

$$\frac{\cos \theta}{p_\psi \sin^2 \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2 - (p_\phi - p_\psi \cos \theta) + \frac{mgh I_1 \sin^2 \theta}{p_\psi} = 0. \quad (5.72)$$

Usando a fórmula quadrática para resolver as raízes desta equação, temos

$$p_\phi - p_\psi \cos \theta = \frac{p_\psi \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgh I_1 \cos \theta}{p_\psi^2}} \right). \quad (5.73)$$

Se usarmos (5.63) em (5.73), podemos produzir uma expressão explícita para a taxa de precessão em termos das invariantes e do ângulo θ :

$$\dot{\phi} = \frac{p_\psi}{2I_1 \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgh I_1 \cos \theta}{p_\psi^2}} \right). \quad (5.74)$$

Observe que, se $|p_\psi| < \sqrt{4mgh I_1 \cos \theta}$, a precessão não está definida.

A equação quadrática produz duas soluções: a assim chamada solução de precessão rápida e a precessão lenta. Se a velocidade de rotação for grande (isto é, $p_\psi \gg \sqrt{4mghI_1 \cos \theta}$) a taxa de precessão rápida é:

$$\dot{\phi}_{fast} \approx \frac{p_\psi}{I_1 \cos \theta} = \frac{I_3 \omega_z}{I_1 \cos \theta}$$

A taxa de precessão lenta é encontrada usando um argumento de aproximação para $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Desse modo, encontramos

$$\dot{\phi}_{slow} \approx \frac{mgh}{p_\psi} = \frac{mgh}{I_3 \omega_z} \quad (5.75)$$

Observe que a taxa de precessão lenta não depende do ângulo de inclinação θ . O pião irá precessar a uma taxa exclusivamente com base na velocidade angular, ω_z , no comprimento h do centro de massa ao ponto fixo e da atração gravitacional no centro de massa do pião.

5.4.4 Nutação

A inclinação do eixo do pião em relação a vertical é medida pelo ângulo θ . Nutação é o caso em que a inclinação do ângulo varia no tempo ($\dot{\theta} \neq 0$). Usando a expressão para energia total, equação (5.70):

$$E = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \equiv c_3$$

e o potencial efetivo, equação (5.68), que tem o papel de função "energia potencial" que fornece uma "força de restauração":

$$V_{ef}(\theta) = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta.$$

os valores extremos de θ podem ser encontrados resolvendo as raízes de $E - V_{ef}(\theta)$ em θ . Estes são os pontos em θ onde $\dot{\theta}$ desaparece ($\dot{\theta} = 0$: "ângulo de giro"), isto é, os extremos do ângulo de nutação:

$$E - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - \frac{p_\psi^2}{2I_3} - mgl \cos \theta = 0 \quad (5.76)$$

fazendo a substituição $u = \cos \theta$, os extremos de θ podem ser encontrados resolvendo o seguinte polinômio cúbico:

$$\begin{aligned} & \left\{ 2I_1 \left(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} \right) - p_\phi^2 \right\} + (2p_\phi p_\psi - 2I_1 mgl)u \\ & - \left\{ 2I_1 \left(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} \right) + p_\phi^2 \right\} u^2 + 2I_1 mglu^3 = 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

ou ainda, usando as invariantes do momento angular ($p_\phi = c_1, p_\psi = I_3 \omega_3$) visto anteriormente e $E = c_3$, temos:

$$f(u) = au^3 + bu^2 + cu + d = 0 \quad (5.78)$$

com

$$\begin{aligned} a &= 2I_1 mgl \\ b &= -\omega_3^2(I_3^2 - I_1 I_3) - 2I_1 c_2 \\ c &= 2(c_1 I_3 \omega_3 - I_1 mgl) \\ d &= 2I_1 \left(c_2 - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \right) - c_1^2 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Dividindo (5.78) por a , temos:

$$u^3 + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u + \alpha_3 = 0 \quad (5.80)$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{b}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{c}{a}, \quad \alpha_3 = \frac{d}{a}. \quad (5.81)$$

A equação (5.80) pode ser resolvida introduzindo as variáveis auxiliares:

$$Q = \frac{3\alpha_2 - \alpha_1^2}{9}, \quad R = \frac{9\alpha_1 \alpha_2 - 27\alpha_3 - 2\alpha_1^3}{54} \quad (5.82)$$

A solução é determinada pelo sinal do discriminante:

$$D = Q^3 + R^2. \quad (5.83)$$

Se $D < 0$, as raízes são dadas por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) - \frac{1}{3}\alpha_1 \\ u_2 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{3}\alpha_1 \\ u_3 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\beta + \frac{4}{3}\pi\right) - \frac{1}{3}\alpha_1 \end{aligned} \quad (5.84)$$

com

$$\cos \beta = \frac{-R}{\sqrt{-Q^3}} \quad (5.85)$$

De acordo com [21], como $f(u)$ é um polinômio cúbico em u , para que os três invariantes correspondam a um problema físico real, deve-se ter $f(u) > 0$. Ou seja,

duas raízes reais no intervalo $[-1, 1]$ deverão existir, tal que $f(u) > 0$ no intervalo. Assim, $-1 < u < 1$ e portanto, $u_1 = \cos \theta_1$ e $u_2 = \cos \theta_2$, definem os limites de latitude, entre os quais o pião oscilará. Obviamente quando as raízes u_1, u_2 são coincidentes, não existe nutação.

De acordo com [23] podemos aproximar os extremos de nutação pela seguinte fórmula:

$$u_1 - u_2 \approx \frac{I_1 2mgh}{I_3 I_3 \omega_z^2} \sin^2 \theta_0. \quad (5.86)$$

onde θ_0 é a condição inicial. Assim, quanto maior a velocidade angular ω_z , menor será a nutação.

5.4.5 Solução numérica

Para implementação da solução numérica do pião utilizamos o método de Runge Kutta de quarta ordem como nos casos anteriores. Resolvemos numericamente as equações (5.63), (5.64) e (5.66):

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{(c_1 - I_3 \omega_z \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} &= \omega_z - \left[\frac{(c_1 - I_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \right] \cos \theta \\ \ddot{\theta} &= \left[\frac{(c_1 - I_3 \omega_z \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \right]^2 \sin \theta \cos \theta \\ &\quad - \left(\frac{I_3 \omega_z}{I_1} \right) \left[\frac{(c_1 - I_3 \omega_z \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta} \right] \sin \theta + \frac{mgl}{I_1} \sin \theta \end{aligned}$$

Observe que a equação (5.66) inclui apenas o ângulo de Euler θ , portanto, é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear que pode ser integrada separadamente. Posteriormente, integramos $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$, que podem ser integradas separadamente.

OBSERVAÇÕES

1) A equação (5.57) implica que $\dot{\omega}_z = 0$, o que significa que a componente ω_z é uma constante. De modo que essa constante pode ser determinada pelas três condições iniciais $(\dot{\phi}_0, \theta_0, \dot{\psi}_0)$:

$$\omega_z = \dot{\phi}_0 \cos \theta_0 + \dot{\psi}_0 = \text{const.}$$

2) As constantes p_ϕ e c_3 anteriores também podem ser completamente determinadas pelas condições iniciais:

$$\begin{aligned} p_\phi &= I_1 \dot{\phi}_0 \sin^2 \theta_0 + I_3 (\dot{\phi}_0 \cos \theta_0 + \dot{\psi}_0) \cos \theta_0 \\ c_3 &= E = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \end{aligned}$$

5.4.6 Resultados

No primeiro teste, para efeito de comparação, seguimos os dados apresentados em [12]. O objetivo principal desse primeiro teste foi destacar os ângulos de Euler calculados numericamente. As condições iniciais e constantes são apresentados na Tabela (5.2).

Tabela 5.2: Pião Simétrico - Ângulos de Euler

Tabela de parâmetros para obtenção dos ângulos de Euler							
I_1	1.0 kg.m ²	m	1.0 kg	θ_0	0.95 rad	$\dot{\theta}_0$	0.0
I_3	1.5 kg.m ²	h	0.1 m	ϕ_0	0.0	$\dot{\phi}_0$	0.0
ω_3	2.5 rad/s	g	9.8 m/s ²	ψ_0	0.0	$\dot{\psi}_0$	2.5 rad/s

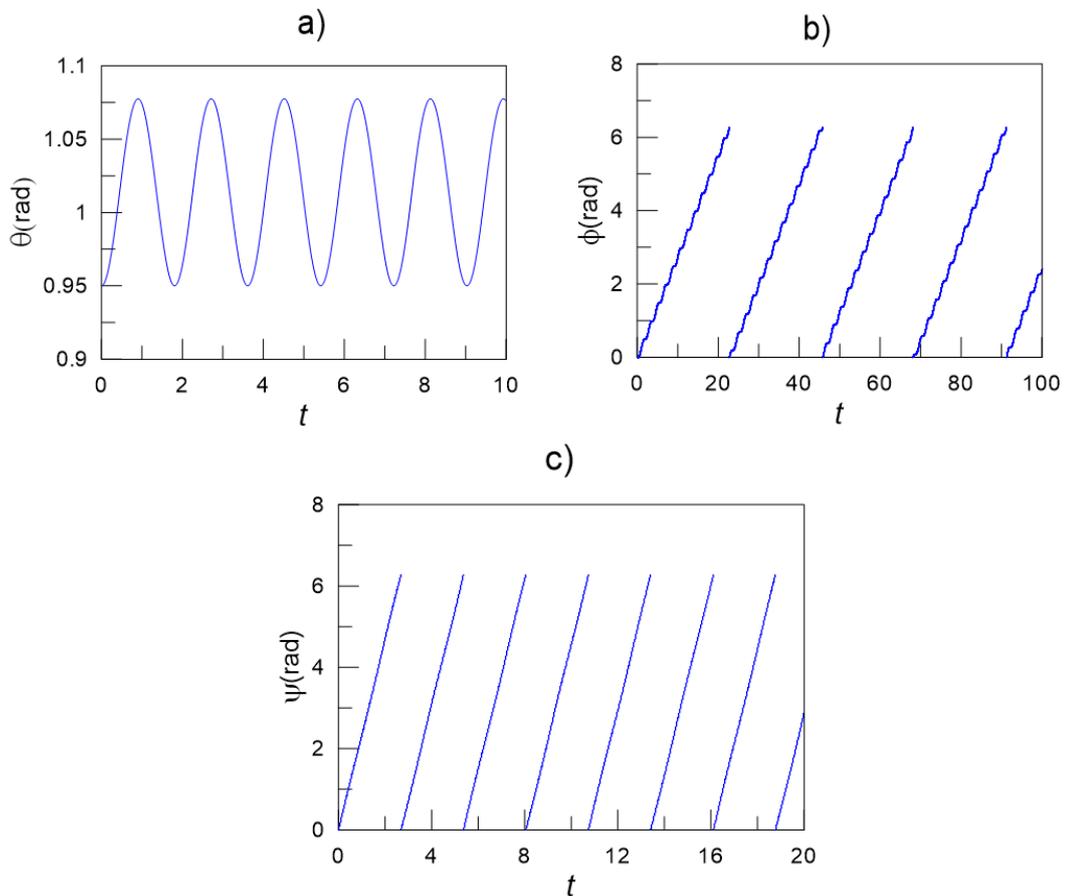


Figura 5.51: Ângulos de Euler com dados da Tabela 5.2. a) $\theta \times t$; b) $\phi \times t$; c) $\psi \times t$. Os movimentos dos ângulos ϕ e ψ são cíclicos e estão representados de zero a 2π (≈ 6.28) no tempo.

A primeira observação é que a principal condição inicial $\theta_0 = 0.95$ rad, $\dot{\theta}_0 = 0$ está de acordo com um ponto de retorno de nutação do corpo ($u_1 = 0.95$). O próximo ponto

de retorno é calculado com precisão pela equação (5.84). A solução fornece $\theta_1 = 0.952$ rad e $\theta_2 = 1.08$ rad. Portanto, prevê-se que o pião irá executar natação no intervalo $\theta \in [0.952, 1.08]$ em radianos. A Fig. (5.51) a) está de acordo com esses dados teóricos.

No próximo teste vamos considerar um exemplo para termos uma ideia da ordem de magnitude do movimento do pião. A Tabela (5.3) apresenta o estado inicial do pião, assim como os parâmetros fixos, e a figura 5.52 apresenta os resultados numéricos.

Tabela 5.3: Pião Simétrico - Extremos de Natação

Tabela de parâmetros para verificação do extremos dos ângulo de natação							
I_1	0.00233 kg.m ²	m	0.1 kg	θ_0	$\pi/4$ rad	$\dot{\theta}_0$	0.0 rad/s
I_3	0.125 kg.m ²	h	0.15 m	ϕ_0	0.0 rad	$\dot{\phi}_0$	0.0 rad/s
ω_3	0.3136 rad/s	g	9.81	ψ_0	0.0 rad	$\dot{\psi}_0$	0.3136 rad/s
c_1	0.0273	p_ψ	0.0392 kg-m ² s ⁻¹	θ_1	0.785	θ_2	1.28

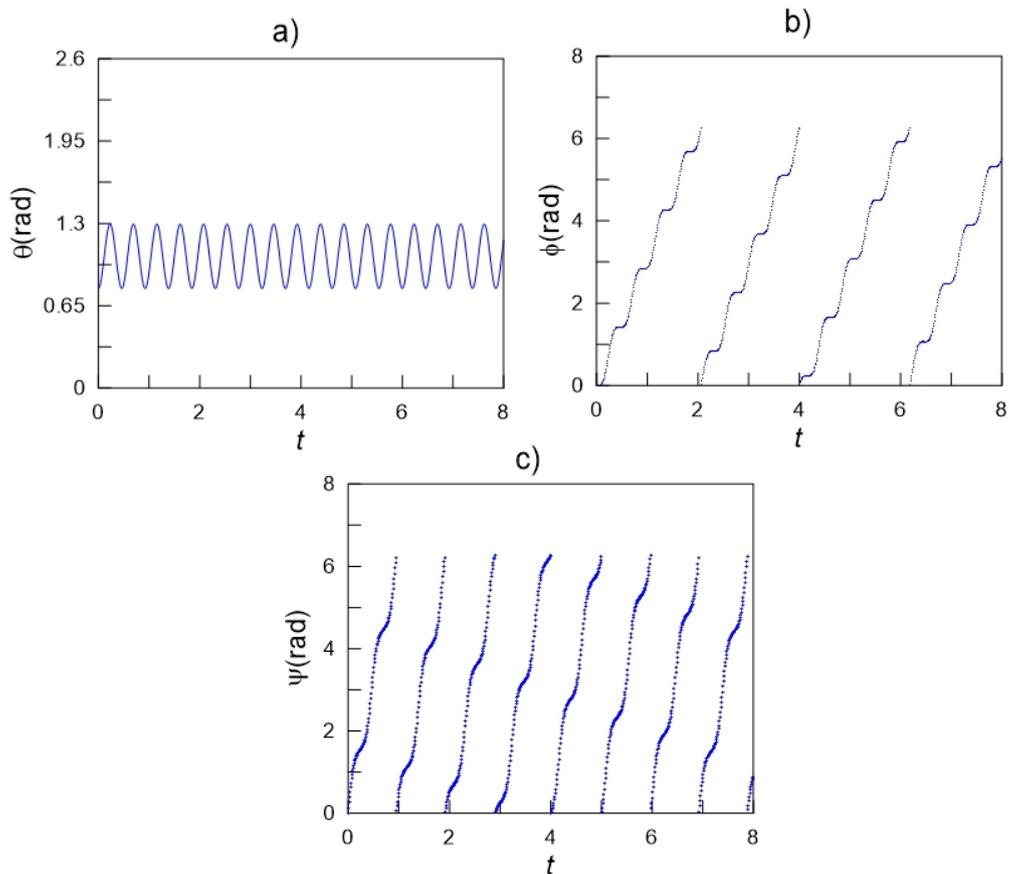


Figura 5.52: Ângulos de Euler com parâmetros da Tabela 5.3. a) $\theta \times t$; b) $\phi \times t$; c) $\psi \times t$.

Para encontrar os extremos do ângulo θ visitados pelo movimento de nutação encontramos as raízes de (5.78). De acordo com nosso conjunto de condições iniciais, encontramos duas raízes físicas que dão os ângulos 0.785 e 1.28 radianos. O que indica que o pião oscila entre o ângulo de inclinação de origem (partida) de $\pi/4 = 0.78$ e 1.3. A figura 5.52 a) está de acordo com esses valores.

Pesce (Pesce, C.P. 2004 pg 132) apresenta as soluções dos ângulos de Euler em termos de integrais elípticas e conclui que, como funções elípticas são periódicas $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ também serão periódicas no tempo. Verificamos esse fato fazendo uso da Transformada de Fourier. Os dados foram baseados na Tabela 5.2 e os resultados são mostrados nas Figuras 5.53, 5.54 e 5.55.

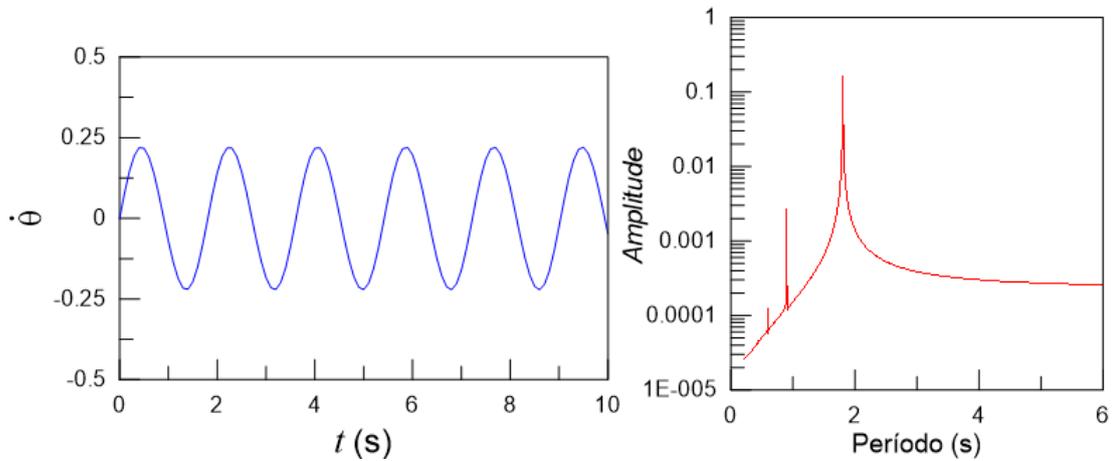


Figura 5.53: $\dot{\theta} \times t$ (esquerda); espectro de $\dot{\theta}$ mostrando o período (direita).

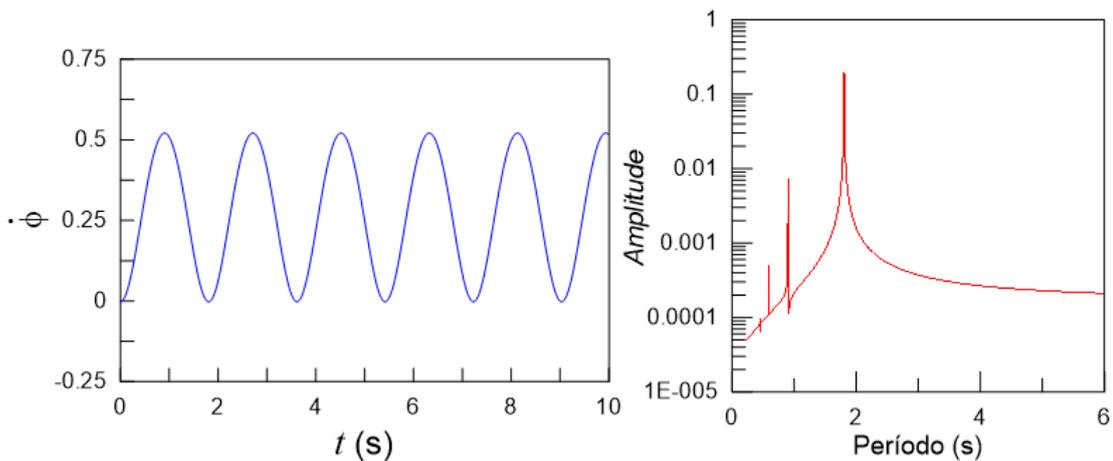


Figura 5.54: $\dot{\phi} \times t$ (esquerda); espectro de $\dot{\phi}$ mostrando o período (direita).

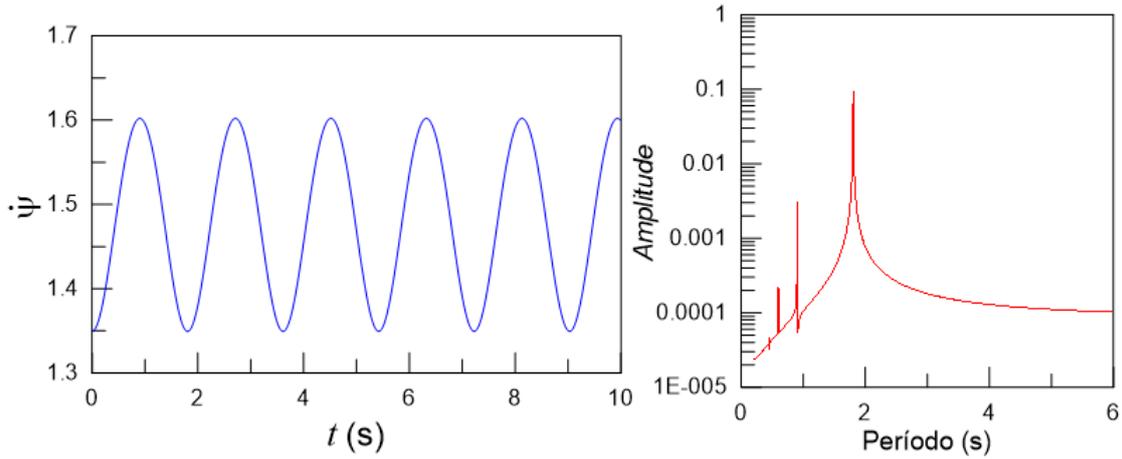


Figura 5.55: $\dot{\psi} \times t$ (esquerda); espectro de $\dot{\psi}$ mostrando o período (direita).

As Figuras 5.53, 5.54 e 5.55 mostram a característica periódica de $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$ com seus respectivos espectros.

Através da equação (5.70) verificamos que a energia ($E = T + V$) é conservada, além de testar a precisão da nossa integração numérica. Os resultados com base nos dados da Tabela 5.2 são mostrados na figura 5.56.

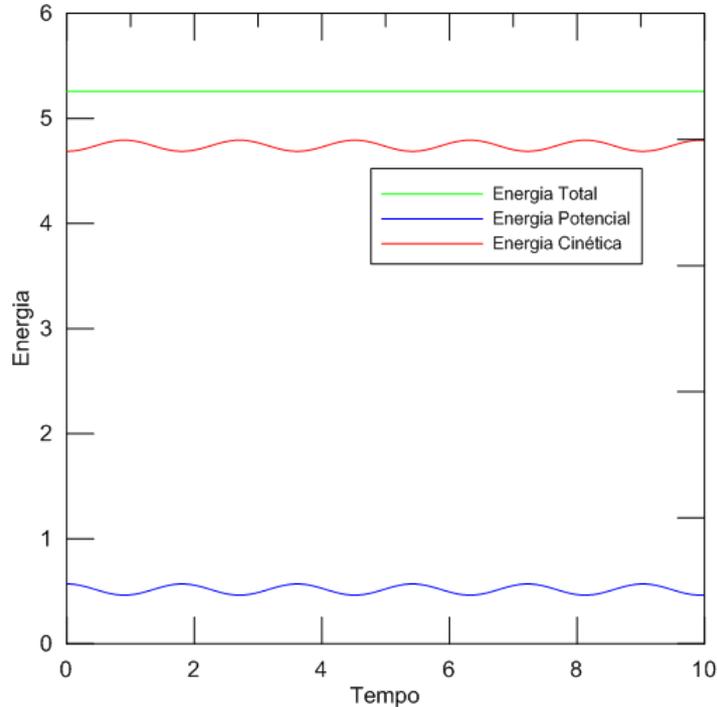


Figura 5.56: Gráfico da Energia com base na Tabela 5.2.

A seguir, mostramos na figura 5.57 o gráfico da Energia Total com base na Tabela 5.3.

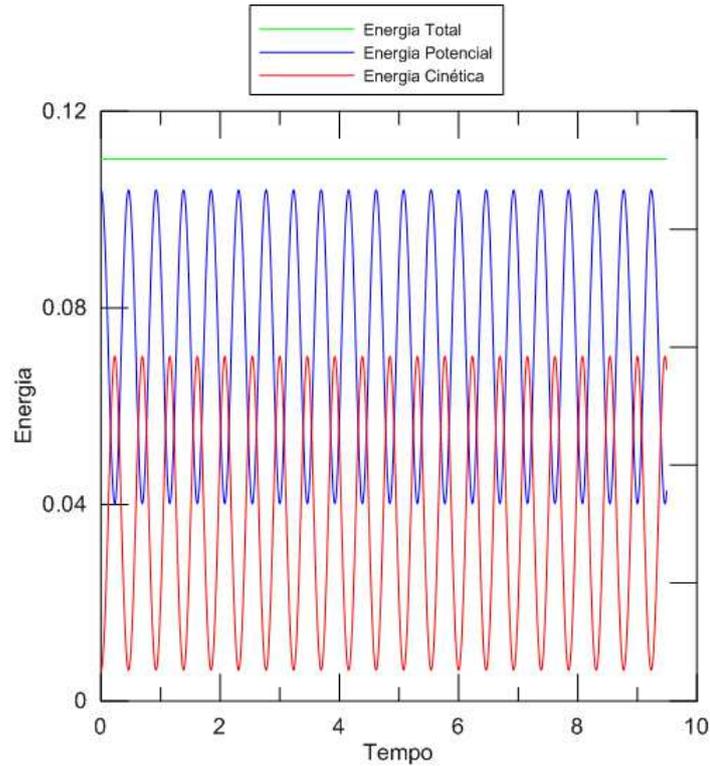


Figura 5.57: Gráfico da Energia com base na Tabela 5.3.

O próximo teste tem como objetivo avaliar o comportamento do período de nutação com relação a velocidade de rotação própria. Mais precisamente, vamos verificar o que acontece se aumentarmos ou diminuirmos a rotação própria inicial. Teremos como base a tabela 5.4 a seguir.

Tabela 5.4: Tabela de parâmetros para testar a relação entre o período de nutação e a velocidade de rotação própria. O número "J" referente a rotação própria inicial será alterado como um parâmetro.

I_1	$1.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	θ_0	$\pi/6$	$\dot{\theta}_0$	0.0 rad
I_3	$2I_1$	$\dot{\psi}_0$	J	$\dot{\phi}_0$	0.0 rad
mgh	0.2 Nm	ψ_0	0.0 rad		

A figura 5.58 mostra os resultados obtido para uma rotação própria inicial $\dot{\psi}_0 = 1.0 \text{ rad/s}$ ($J = 1.0 \text{ rad/s}$ na Tabela 5.4). Podemos observar um período de aproximadamente 3.5 s. A seguir rodamos o programa para $J = 1.5 \text{ rad/s}$ e mostramos os resultados na figura 5.59.

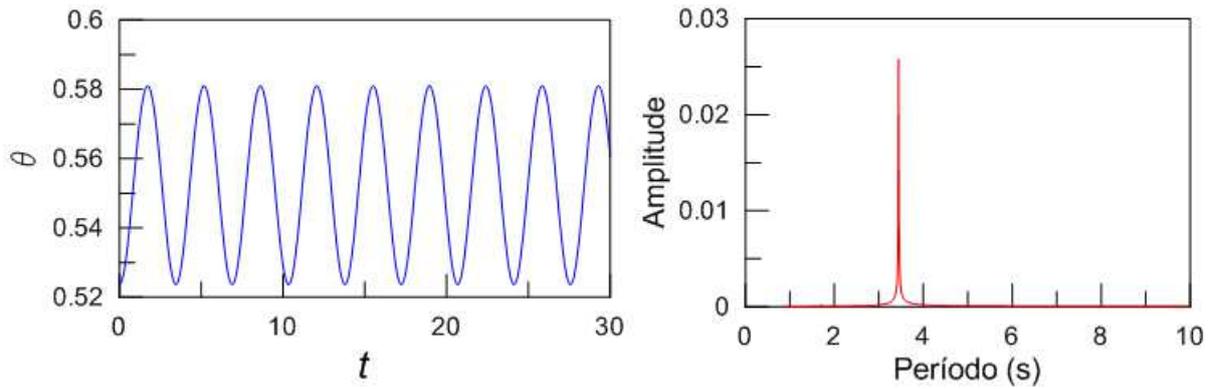


Figura 5.58: Ângulo de nutação θ como função do tempo (esquerda) e o espectro da sua transformada de Fourier, à esquerda, mostra o período de nutação. A rotação própria inicial, neste caso, foi $\dot{\psi}_0 = 1\text{rad/s}$.

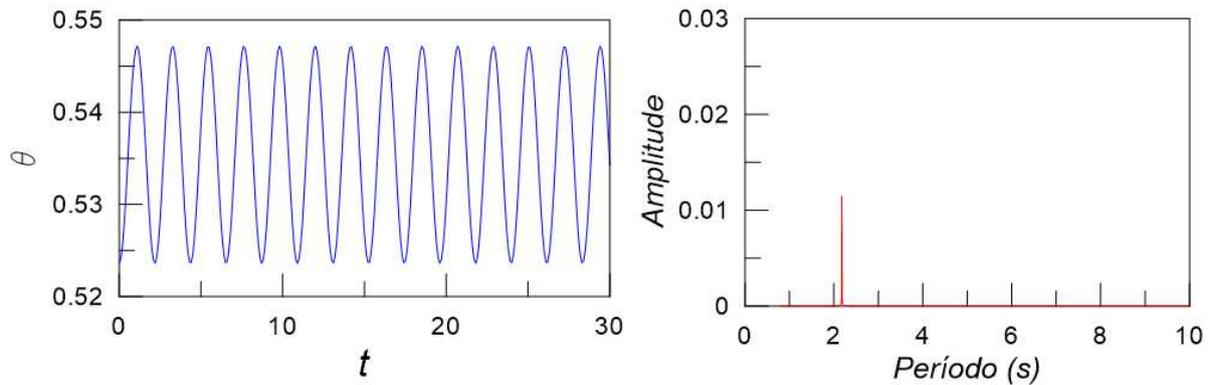


Figura 5.59: Ângulo de nutação θ como função do tempo (esquerda) e o espectro da transformada de Fourier, à esquerda, mostra o período de nutação. A rotação própria inicial, neste caso, foi $\dot{\psi}_0 = 1.5\text{ rad/s}$.

O espectro da figura 5.59 mostra que o período foi reduzido para aproximadamente 2.2 segundos quando aumentamos a rotação própria inicial para $\dot{\psi}_0 = 1.5\text{ rad/s}$. Rodamos os programas novamente aumentando J para 2 rad/s e 2.5 rad/s. Os resultados são mostrados na figura 5.60.

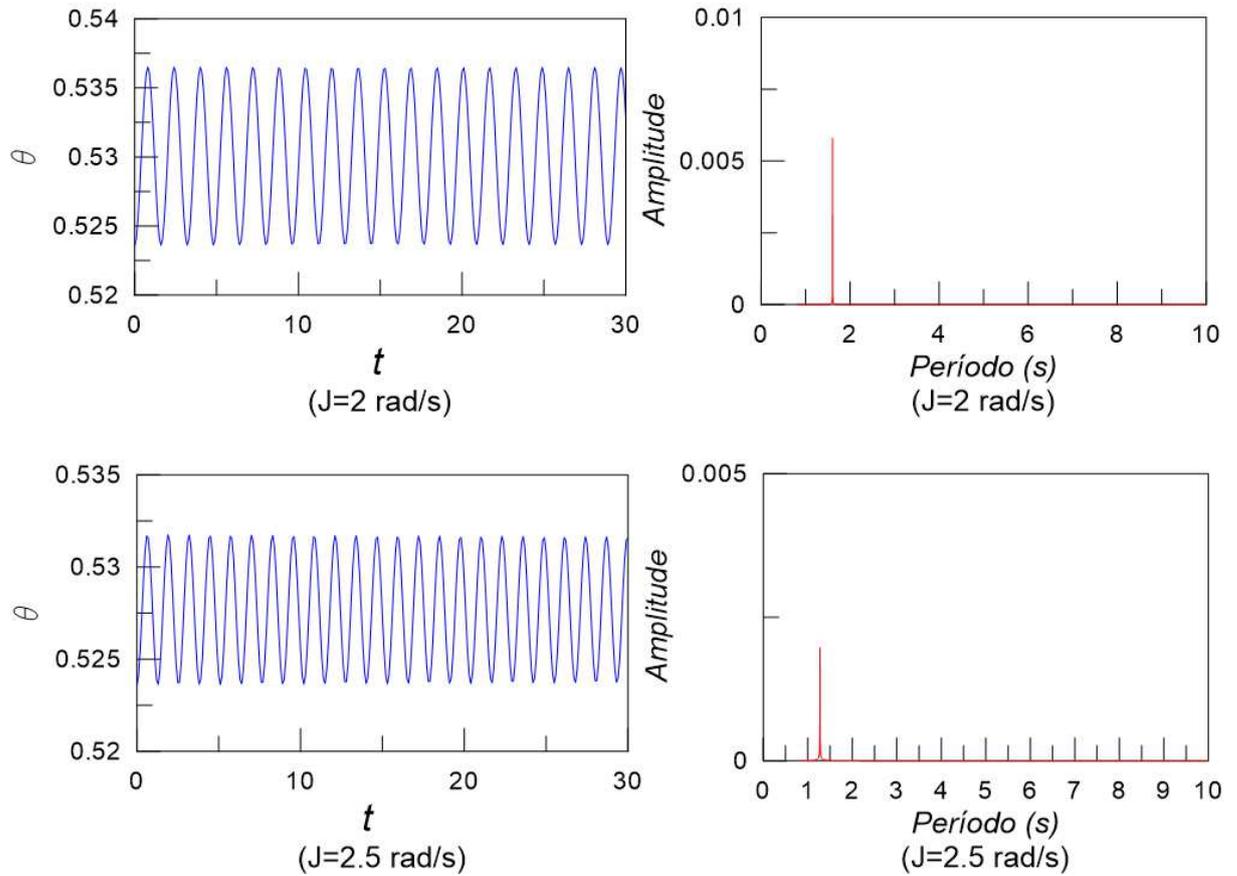


Figura 5.60: Ângulo de nutação θ como função do tempo (superior à esquerda) e o espectro da transformada de Fourier, à esquerda, mostra o período de nutação para $J = 2$ rad/s; inferior à esquerda mostra θ como função do tempo acompanhado de sua transformada de Fourier para $J = 2.5$ rad/s.

Podemos observar na figura 5.60 que, aumentando a rotação própria para 2 rad/s e 2.5 rad/s, o período diminui para aproximadamente 1.55s e 1.25s, respectivamente.

Em seguida calculamos para valores de J menores que no caso inicial, isto, diminuímos a rotação própria inicial tendo como referência o primeiro teste. Em outras palavras, testamos para os valores $J = 2/3$, $1/2$ e $2/5$ rad/s. Os resultados são mostrados na figura 5.61.

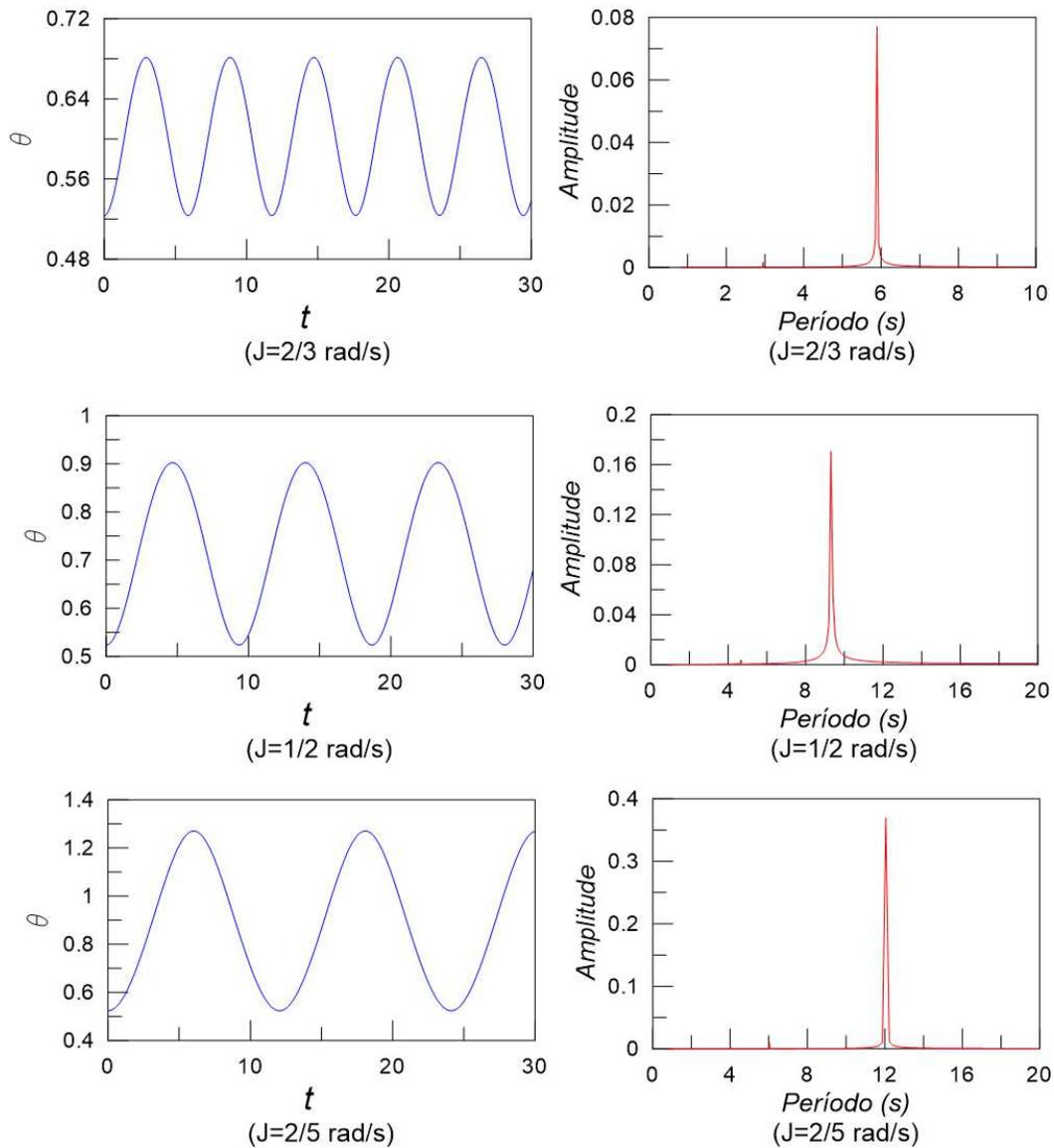


Figura 5.61: Ângulo de nutação θ como função do tempo e o respectivo espectro mostrando o período de nutação para: $J = 2/3$ rad/s (superior); $J = 1/2$ rad/s (centro) e $J = 2/5$ rad/s.

O resultado da figura 5.61 indica que diminuindo a rotação própria o período de nutação aumenta. Da figura 5.58 à figura 5.61 podemos, então, concluir: se a rotação própria for aumentada o período de nutação diminui; ao passo que se a rotação própria for diminuída, o período de nutação aumenta. Este fato ocorre devido a "rigidez giroscópica" do pião que é proporcional a rotação própria [21].

6 Conclusão

Neste trabalho foi apresentado aspectos teóricos e computacionais da Transformada de Fourier, aplicada a sistemas periódicos em mecânica. O objetivo inicial deste trabalho foi aplicar a Transformada de Fourier na solução numérica de três problemas clássicos da mecânica: o oscilador harmônico, o pêndulo e o pião simétrico.

Para a solução numérica, utilizamos o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, pois, como vimos no capítulo 3, é o mais preciso e eficiente dentre aqueles que nos dispomos a estudar neste trabalho. Em seguida, analisamos os resultados no domínio da frequência com a *FFT*.

No caso do oscilador harmônico, que resolvemos analiticamente no Capítulo 2 para efeito de comparação, a solução numérica das equações diferenciais foram apresentadas para os casos clássicos: oscilador livre, com amortecimento e amortecido com forçamento externo periódico. Para o oscilador simples, sem amortecimento, fizemos variar a amplitude em três testes para comprovar o caso clássico de que o período das oscilações não depende da amplitude. Essa constatação, embora trivial no contexto do estudo físico em questão, apresenta precisão e simplicidade quando aplicamos a transformada de Fourier nos resultados. Para o oscilador com amortecimento, resolvemos as equações para os casos crítico, subcrítico e supercrítico. Neste caso, ainda utilizando o amortecimento, quando variamos o parâmetro β desde valores $\ll \omega$ até valores próximos de ω , pudemos constatar ao aplicar a transformada de Fourier que o espectro fornece inicialmente o pico característico, que vai se deformando a medida que aumentamos o parâmetro de amortecimento. Essa relação, portanto, indica que analisar movimentos oscilatórios na presença de amortecimentos por meio da Transformada de Fourier pode ser uma opção alternativa, quando o intuito é estudar este tipo de parâmetro físico. Já o caso do oscilador amortecido e forçado, verificamos que a presença da força externa periódica produz efeitos importantes em física, como é o caso da ressonância. A superposição das duas funções pode ser verificada facilmente por meio do espectro FFT. Além disso, ao aplicarmos a transformada de Fourier nos resultados, onde variamos a frequência da força externa desde $\omega_3 = \pi$ até $\omega_3 = \omega$, isto é igual a frequência natural do oscilador, constatamos claramente duas frequências inicialmente, que vão se

sobrepondo até que, no caso onde ocorre ressonância ($\omega_3 = \omega$), tenhamos apenas uma frequência que domina o sistema. Desse modo, a Transformada de Fourier mostra-se mais uma vez uma ferramenta muito importante no estudo de sistemas onde ocorre ressonância.

Para o exemplo do pêndulo, que é modelado por uma equação diferencial não-linear, estudamos o caso do pêndulo simples e o pêndulo amortecido e forçado periodicamente. Neste caso a aplicação de métodos numéricos na solução das equações diferenciais é essencial, uma vez que suas equações não-lineares não possuem solução em termos de funções elementares. Temos, então, duas oportunidades: a primeira é estudar o comportamento das soluções no domínio da frequência por meio da transformada de Fourier. E, oportunamente, pode-se comparar os resultados numéricos com os fornecidos por meio da teoria das funções elípticas, de acordo com [1].

No estudo do pêndulo simples, isto é, sem amortecimento e forçamento externo, testamos inicialmente as soluções numéricas para pequenas amplitudes. Isso nos permitiu comparar com o caso do oscilador harmônico simples, onde a representação no espaço de fase mostrou-se comparativamente idêntica, de acordo com a teoria. Quando aumentamos a velocidade inicial e, conseqüentemente, a amplitude verificamos a mudança do comportamento periódico oscilatório para o não oscilatório. Neste caso, variamos a velocidade inicial como um parâmetro e mantemos fixo os demais. Observamos que nas proximidades de $2\sqrt{\epsilon}$, que é o valor crítico em questão, o espectro muda completamente. Isto é, a variação da velocidade inicial faz com que o espectro apresente vários harmônicos que aumentam drasticamente nas proximidades do valor crítico até que no limite apresente um espectro caótico.

Para o pêndulo amortecido e forçado, mostramos que sua equação diferencial não-linear pode apresentar limite caótico. A transformada de Fourier se mostrou uma ferramenta poderosa no estudo desse modelo, como é o caso do efeito clássico, embora não trivial, de duplicação de período onde pudemos identificar com precisão este efeito. Além disso, a FFT no regime caótico apresenta um espectro clássico de banda larga, o que torna a identificação de movimentos caóticos extremamente precisa quando se estudo sinais por meio da FFT.

O modelo do pião simétrico, possui formalismo matemático um pouco mais complexo, resolvemos numericamente as equações diferenciais não lineares como nos casos anteriores e verificamos através da transformada de Fourier o caráter periódico do sistema. Aqui, novamente os resultados podem ser comparados com os obtidos por meio da teoria de funções elípticas. No estudo deste modelo, podemos destacar a relação da velocidade de rotação própria e o período de nutação. Testamos resultados para um conjunto de parâmetros, onde variamos apenas a velocidade de rotação própria. Em seguida aplicamos a FFT nos resultados numéricos de modo que pudemos concluir

que: se aumentarmos a rotação própria o período de nutação diminui; ao passo que se diminuirmos a rotação própria, o período de nutação aumenta. E novamente a transformada de Fourier se mostrou uma ferramenta poderosa na investigação de sistemas dinâmicos periódicos como este.

Obviamente a aplicabilidade da transformada de Fourier como estudamos nestes modelos é meramente ilustrativo, não se limitando suas possibilidades à essas aplicações, mesmo no contexto desses modelos. Deixamos a cargo do leitor explorar novos modelos, como por exemplo outras variações do pião com possibilidades de aplicações em mecânica celeste.

De modo geral essa pesquisa foi importante não apenas para estudos relacionados à transformada de Fourier e suas aplicações, mas também alcançou conhecimentos de outras áreas da ciência, como física e computação, de modo a enriquecer ainda mais a relevância do tema.

Referências

- [1] BERGAMO, J.V.Z. *Teoria de Funções Elípticas e Aplicações em Soluções de Sistemas Periódicos em Mecânica*. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 2018.
- [2] BOYCE, W. E.; DiPrima, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 7ª edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2000.
- [3] BRIGHAM, E. O. *The Fast Fourier Transform*. USA: Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974. 230p.
- [4] CALLEGARI, N.; YOKOYAMA, T. Numerical exploration of resonant dynamics in the system of saturnian major satellites. *Planetary and Space Science*, 58:1906–1921, 2010.
- [5] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Col. matemática universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [6] BASSANEZI, R.C.; Ferreira Jr., W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. Editora Harbra Ltda, São Paulo, 1988.
- [7] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R.B.; SANDS, M. *Lições de física de Feynman*. Vol. I, 2ª edição - Tradução: Adriana Válio Roque da Silva, Bookman, Porto Alegre, 2008.
- [8] FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações diferenciais parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [9] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Col. matemática universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [10] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. - Vol. 3. 5ª edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2002.
- [11] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. Vol. 4. 5ª edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2002.

- [12] HASBUN, J. E. Computation in classical mechanics. Disponível em <http://www.opensourcephysics.org/CPC/posters/hasbun_poster.pdf>. Acessado em 26/12/2016.
- [13] HAYKIN, S.; VEEN, B.V. . *Sinais e Sistemas*. Bookman, 2001.
- [14] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2ª edição, Livraria da Física, São Paulo, 2007.
- [15] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 4ª edição, IMPA, Col. Proj. Euclides, Rio de Janeiro, 2011.
- [16] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma Variável*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, 11 edition, 2012.
- [17] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, volume 1. 14ª edição, IMPA, Col. Proj. Euclides, Rio de Janeiro, 2012.
- [18] LOURENÇO, E.J. *Transformada de Fourier: Teoria como base para Aplicações em Mecânica Celeste*. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 2014.
- [19] NECHYBA, M. C. The DFT and the Fast Fourier Transform (FFT). Disponível em <https://mil.ufl.edu/nechyba/www/_ee13135.s2003/lectures.html>. 2003. Acessado em 1 fev. 2017.
- [20] OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. *Sinais e Sistemas*. Bookman, 2001.
- [21] PESCE, C. P. *Dinâmica dos Corpos Rígidos - Monografia (texto didático)*. Departamento de Engenharia Mecânica - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- [22] PRESS, W. H., et al. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, USA, 1996.
- [23] PROVATIDIS, C. G. Revisiting the spinning top. *Int. J. Material and Mechanical Engineering*, 1:71–88, 2012.
- [24] SANTOS, R.J. *Introdução Às Equações Diferenciais Ordinárias*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2011.
- [25] SOTOMAYOR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*, volume 4. Editora Livraria da Física, Col. Textos Universitários do IME - USP, São Paulo, 2011.
- [26] SUZUKI, M.; SUZUKI, I. S. Physics of Simple Pendulum: a case study of nonlinear dynamics. Binghamton University, 2009. Disponível em <<http://www.binghamton.edu/physics/docs/physics-of-simple-pendulum-9-15-08.pdf>>. Acessado em 08/12/2016.

-
- [27] TAYLOR, JOHN R. *Classical Mechanics*. 2nd, Univ Science Books, Herndon, USA, 2005.
- [28] THORNTON, S.T.; MARION, J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5ª edição, Thomson Learn - ing Inc. - Brooks/Cole, Pacific Grove CA, 2004.
- [29] TOLSTOV, G. P. *Fourier Series*. USA: Dover Publications, Inc., New York, 1976.
- [30] VILLAR, Alessandro S. Notas de Aula de Mecânica Clássica. Disponível em <<http://fep.if.usp.br/~villar/2015mecanica1/mecclassica.pdf>>. Acessado em 8/12/2016.
- [31] YDRI, B. *Computational Physics: An Introduction to Monte Carlo Simulations of Matrix Field Theory*. World Scientific, London, UK, 2016.
- [32] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. . *Equações Diferenciais - Vol. 2*. Pearson Makron Books, São Paulo, 2001.

A Complementos do Capítulo 2

A.1 Existência e Unicidade de Soluções

Definição A.1. (*Condição de Lipschitz*) Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável ou, simplesmente, Lipschitziana, se existe uma constante k tal que

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq k|y - x|$$

para todo $(t, y), (t, x) \in \Omega$. A constante k é chamada de constante de Lipschitz de f .

Lema A.1. (*Lema da Contração*) Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$, $0 \leq k < 1$. Existem um único ponto fixo p , para F , isto é, $F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F , isto é, $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ é definido por $F(F^{n-1}(x))$.

Demonstração. Veja [25] □

Corolário A.1.

Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \rightarrow X$ é contínua e, para algum m , F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo para F . Mais ainda, p é um atrator de F .

Demonstração. Seja p um ponto fixo atrator de F^m dado pelo Lema da Contração (lema A.1). Seja $n = mk + l$ com $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, como p é atrator de F^m , temos (uma vez que $\{F^l(x)\}, 0 \leq l < m$, é finito) $[F^m]^k(F^l(x)) \rightarrow p$, quando $k \rightarrow \infty$. Da relação $F^n(x) = [F^m]^k(F^l(x))$ e do fato que quando $n \rightarrow \infty$ tem-se $k \rightarrow \infty$, segue-se que $F^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é, p é um atrator de F . Provemos que $F(p) = p$. Com efeito,

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p).$$

□

Teorema A.1. (Teorema de Picard)

Seja f uma função contínua e Lipschitziana com relação a segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{y; |y - y_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω , então existe uma única solução de

$$\begin{cases} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Demonstração. Seja $X = \mathcal{C}(I_a, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_a \rightarrow B_b$, com a métrica

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_a} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_a \rightarrow \mathbb{E}$ definida por

$$F(\varphi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I_a.$$

Assim a correspondência $\varphi \rightarrow F(\varphi)$ define uma F com as seguintes propriedades:

- (1) $F(X) \subset X$;
- (2) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Ou seja, $F : X \rightarrow X$ é uma função tal que F^n é uma contração.

De fato, para todo $t \in I_a$,

$$|F(\varphi)(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M\alpha \leq b.$$

Isto prova (1). Quanto a (2), para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$,

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_a \quad (*)$$

Onde K é a constante de Lipschitz de f . Podemos verificar essa desigualdade por indução em n . Para $n = 0$ ela é óbvia. Suponhamos que é válida para k . Então,

$$\begin{aligned} |F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K |F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)| ds \right| \\ &= K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^k (s - t_0)^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

Portanto, $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$ e, para n grande, $K^n \alpha^n / n! < 1$, pois este é o termo geral da série cuja soma é $e^{K\alpha}$, donde F^n é uma contração em X . Pelo corolário do Lema da Contração, existe uma única $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. De fato, o ponto fixo φ é de classe C^1 e isto completa a prova do Teorema de Picard. \square

Corolário A.2.

Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ e seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ contínua com D_2f também contínua. Para todo ponto (t_0, y_0) em Ω existe uma vizinhança $V = I(t_0) \times B(y_0)$ tal que $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, tem uma única solução em $I(t_0)$. Além disso, o gráfico dessa solução está contido em V .

Demonstração. Veja [25] □

Proposição A.1.

Seja f contínua e Lipschitziana em $\Omega = [a, b] \times \mathbb{E}$. Então, para todo $(t_0, y_0) \in \Omega$ existe uma única solução de (2.2) em $I = [a, b]$

Demonstração. :

Vamos considerar $X = \mathcal{C}(I, \mathbb{E})$ e $F : X \rightarrow X$ definida como na demonstração do Teorema A.1

$$F(\varphi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

F tem um único ponto fixo pois, para n grande, F^n é uma contração. Basta observar que a desigualdade (*) da demonstração do Teorema A.1 é verificada. □

Exemplo A.1. (Equações lineares de primeira Ordem)

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ funções contínuas em um intervalo real I . A equação da forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t) \tag{A.1}$$

é dita linear. O nome *linear* decorre do fato das operações efetuadas em $y(t)$,

$$\left[\frac{d}{dt} + a(t) \right] y(t)$$

serem lineares:

$$\left[\frac{d}{dt} + a(t) \right] (\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \left[\frac{d}{dt} + a(t) \right] y_1 + \beta \left[\frac{d}{dt} + a(t) \right] y_2,$$

com α e β números reais.

Uma vez definida a equação diferencial linear, doravante definiremos uma função auxiliar não nula, $\mu(t)$, contínua em um intervalo real de modo que ao multiplicarmos a equação (A.1) por essa função nos forneça:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) \tag{A.2}$$

Uma função com essa propriedade é chamada de **fator integrante da equação linear** [24] e será utilizado como recurso para a solução analítica da equação diferencial.

Seja

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$$

vamos mostrar que $e^{\int a(t)dt}$ é um fator integrante da equação linear (A.1)

Observe inicialmente que

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int a(t)dt} \frac{d}{dt} \left(\int a(t)dt \right) = e^{\int a(t)dt} a(t) = \mu(t)a(t) \quad (\text{A.3})$$

Desse modo, multiplicando-se (A.1) por $\mu(t)$, obtemos

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t) \quad (\text{A.4})$$

mas como por (A.3), $\mu(t)a(t) = \frac{d\mu}{dt}$, então (A.4) pode ser escrito como

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)b(t). \quad (\text{A.5})$$

mas o lado esquerdo dessa equação é a derivada de um produto o que faz com que ela possa ser escrita como

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)b(t) \quad (\text{A.6})$$

A equação (A.6) pode ser resolvida integrando ambos os lados em t . Assim, a solução geral de (A.6) é dada por

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)b(t)dt + c.$$

Como $\mu(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, dividindo a equação anterior por $\mu(t)$ obtemos a solução geral de (A.1), dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)b(t)dt + c \right) \quad (\text{A.7})$$

onde c , novamente, é uma constante que depende das condições iniciais.

A.2 Sistemas e equações diferenciais de ordem superior

Sejam $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_m$ espaços euclidianos em Ω um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, onde $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_m$. Sejam $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{E}_i$, $i = 1, \dots, m$, funções contínuas. Uma família $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, onde cada $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{E}_i$, $i = 1, \dots, m$, é uma função diferenciável de um intervalo I em \mathbb{E}_i , chama-se *solução do sistema de equações diferenciais ordinárias*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

no intervalo I , se:

(i) para todo $t \in I$, $(t, \varphi(t)) = (t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) \in \Omega$;

(ii) para todo $i = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{d\varphi_i}{dt}(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)),$$

para todo $t \in I$.

O sistema (A.8), que podemos denotar abreviadamente por

$$y'_i = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{A.8}')$$

em notação vetorial é equivalente à equação diferencial ordinária

$$y' = f(t, y), \quad (\text{A.9})$$

onde $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \dots \times \mathbb{E}_m$. Ou seja, uma família $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ de funções é solução de (A.8) em I se, e somente se, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m : I \rightarrow \mathbb{E})$ é solução de (A.9) em I .

O Problema de Cauchy para sistemas de equações da forma (A.8) se dá do seguinte modo: sejam $t_0, y_{1,0}, \dots, y_{m,0}$ tais que $(t_0, y_{1,0}, \dots, y_{m,0})$ estejam em Ω , devemos encontrar uma solução $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ de (A.8) num intervalo I que contém t_0 tal que $\varphi_i(t_0) = y_{i,0}$ para todo i .

Podemos escrever abreviadamente como

$$y'_i = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad y_i(t_0) = y_{i,0} \quad (\text{A.10})$$

que é equivalente ao problema de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (\text{A.11})$$

Para a equação (A.9), onde $y_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{m,0})$ e levando em consideração que a função f em (A.9) é, respectivamente, contínua, Lipschitziana com constante de Lipschitz K , diferenciável em relação a segunda variável, etc, se, somente se, cada f_i de (A.8) também é do mesmo tipo, temos que todos os teoremas de existência, unicidade anteriores são válidos para solução da equação (A.8).

Definição A.2. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^m$, onde \mathbb{E} é um espaço euclidiano e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ uma função contínua. Uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$, de classe C^m , definida num intervalo, chama-se solução da equação diferencial ordinária de ordem m*

$$\frac{d^m y}{dt^m} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \quad (\text{A.12})$$

em I , se:

- (i) para todo $t \in I$, $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(m-1)}(t)) \in \Omega$
- (ii) para todo $t \in I$,

$$\frac{d^m(\varphi)}{dt^m}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(m-1)}(t)).$$

A equação (A.12) também é denotada por

$$y^{(m)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \quad (\text{A.12}')$$

e é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} y'_r = y_{r+1}, & r = 1, 2, \dots, m-1 \\ y'_m = f(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y_i(t_0) = y_0^{i+1} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Ou seja, se uma função φ é solução de (A.12), então $\{\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(m-1)}\}$ é uma solução de (A.13); e se $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ é uma solução de (A.13), então $\varphi = \varphi_1$ é solução de (A.12), isto é, φ é de classe C^m e satisfaz (i) e (ii) acima.

O *Problema de Cauchy para a equação* (A.12) formula-se do seguinte modo: seja um ponto $(t_0, y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{m-1}) \in \Omega$, encontrar uma solução φ de (A.12) definida num intervalo I que contém o ponto t_0 e satisfaz a condição

$$\varphi(t_0) = y_0^0, \quad \varphi'(t_0) = y_0^1, \dots, \varphi^{(m-1)}(t_0) = y_0^{m-1}.$$

que podemos escrever abreviadamente

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad y^{(i)}(t_0) = y_0^i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (\text{A.14})$$

Este problema é equivalente ao seguinte problema de Cauchy para sistemas de equação

$$\begin{cases} y'_r = y_{r+1}, & y_i(t_0) = y_0^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ y'_m = f(t, y_1, \dots, y_m), & r = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Desse modo, as questões relativas à existência, unicidade e soluções de (A.12) se reduzem a questões similares para sistemas como (A.13) e, assim, equações do tipo (2.1). Em particular, todos os resultados relativos a estas questões vistos anteriormente são válidos para equações de ordem m qualquer.

O que vimos acima nos permite afirmar que resolver uma Equação Diferencial Ordinária de ordem m , equivale a resolver um sistema de m Equações Diferencial Ordinária de primeira ordem.

A.3 Equações Lineares de Segunda Ordem

Sejam $p, q, f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo aberto (a, b) , o qual pode ser a semireta $t > 0$ ou toda a reta $-\infty < t < \infty$. Considere a equação linear de 2ª ordem

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (\text{A.16})$$

ou de modo mais compacto

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f. \quad (\text{A.17})$$

A seguir iremos estudar as questões relativas à solução geral de (A.16) e à solução do problema de valor inicial para (A.16)

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \quad (\text{A.18})$$

onde $t_0 \in (a, b)$ e x_0, v_0 são dados.

Para este P.V.I. temos o seguinte resultado de existência e unicidade

Teorema A.2. *Se p, q e f são funções contínuas em (a, b) , então o problema de valor inicial (A.18) tem uma, e somente uma, solução definida em todo o intervalo (a, b) .*

Demonstração. A estratégia é transformar a equação num sistema da seguinte forma

$$x_1(t) = x(t) \quad x_2(t) = \dot{x}(t). \quad (\text{A.19})$$

Desse modo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -qx_1 - px_2 + f \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

com a condição inicial

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = v_0. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

A conclusão segue dos resultados das seções A.1 e A.2 □

Considere, agora, a equação homogênea

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \quad (\text{A.22})$$

Pelo teorema acima os problemas de valor inicial para (A.22) com cada um dos conjuntos de dados iniciais abaixo têm uma única solução:

$$x(t_0) = 1 \quad \dot{x}(t_0) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$x(t_0) = 0 \quad \dot{x}(t_0) = 1 \quad (\text{A.24})$$

onde $t_0 \in (a, b)$. Seja $\Phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a solução do P.V.I. (A.23) para equação (A.22) e seja $\Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a solução do P.V.I. (A.24) para equação (A.22). Nessas condições, temos:

a) qualquer função da forma

$$\Phi(t) = \alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t) \quad (\text{A.25})$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias, é solução da equação diferencial (A.22).

Isso é precisamente a linearidade da equação (A.22) implicando que qualquer combinação linear de suas soluções é também uma solução. Essa propriedade no contexto dos livros aplicados é conhecida como *princípio da superposição*.

A recíproca da afirmação a) acima é também válida:

b) qualquer solução de (A.22) é da forma (A.25) para α_1 e α_2 escolhidos convenientemente.

Prova. Seja Φ uma solução de (A.22), e tome $\alpha_1 = \Phi(t_0)$ e $\alpha_2 = \dot{\Phi}(t_0)$. Então podemos verificar que a função $\psi = \Phi - \alpha_1 \Phi_1 - \alpha_2 \Phi_2$ é solução de (A.22) e $\psi(t_0) = 0$ e $\dot{\psi}(t_0) = 0$. Logo, pelo Teorema A.2 acima $\psi(t) \equiv 0$, o que demonstra a assertiva acima.

Concluimos que (A.25) é uma solução geral de (A.22). No entanto podem existir soluções de outra forma. Vamos introduzir a seguir a noção de independência linear.

Definição A.3.

(i) Duas funções $\Phi_1, \Phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são *linearmente dependentes (l.d.)* se existe uma constante k tal que $\Phi_2 = k\Phi_1$, para todo $t \in (a, b)$. (ii) Duas funções (Φ_1 e Φ_2) são *linearmente independente (l.i.)* se a condição

$$\alpha_1 \Phi_1(t) + \alpha_2 \Phi_2(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in (a, b), \quad (\text{A.26})$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. É claro que se as funções Φ_1 e Φ_2 são *l.i.* se elas não forem *l.d.* Enunciamos a condição (ii) pois ela se estende naturalmente para o caso de mais de duas funções.

Essa noção de dependência (ou independência) para funções diferenciáveis pode ser ligada com o determinante Wronskiano.

Definição A.4. Dadas duas funções diferenciáveis $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, o determinante

$$W[\phi_1, \phi_2](t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{vmatrix} \quad (\text{A.27})$$

é chamado o *Wronskiano* das funções ϕ_1 e ϕ_2 .

Proposição A.2. : Sejam $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis cujo Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in (a, b)$. Então, ϕ_1 e ϕ_2 são *l.i.*

Demonstração. : Suponha por contradição que ϕ_1 e ϕ_2 sejam *l.d.*. Então, existe constantes α_1, α_2 pelo menos uma delas diferente de zero, tais que

$$\alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) = 0, \quad \forall t \in (a, b). \quad (\text{A.28})$$

Daí, derivando obtemos

$$\alpha_1\dot{\phi}_1(t) + \alpha_2\dot{\phi}_2(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b). \quad (\text{A.29})$$

Em particular, para $t = t_0$ temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) = 0 \\ \alpha_1\dot{\phi}_1(t) + \alpha_2\dot{\phi}_2(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

cujo determinante é exatamente $W[\phi_1, \phi_2](t_0)$, o qual é diferente de zero por hipótese. Consequentemente $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o que é uma contradição. \square

A recíproca da Proposição A.2, no entanto, é falsa como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo A.2. As funções $\phi_1 = t^3$ e $\phi_2 = |t|^3$ são *l.i.*; é imediato que seu Wronskiano é zero.

Entretanto podemos garantir que a recíproca seja verdadeira se nós restringirmos à classe das soluções da equação (A.22). Consideremos o seguinte resultado.

Teorema A.3. *Sejam ϕ_1 e ϕ_2 soluções de (A.22). Então, elas são l.i. se e somente seu Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in (a, b)$. Além disso, se o Wronskiano for diferente de zero em um ponto t_0 , então ele é diferente de zero em todos os demais pontos de (a, b) .*

Demonstração. Veja [9]. \square

Teorema A.4. *Sejam ϕ_1 e $\phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas soluções de (A.22). Então*

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \quad (\text{A.31})$$

onde $t_0 \in (a, b)$, e estamos usando a notação $W(t) = W[\phi_1, \phi_2]$.

Demonstração. Derivando a expressão:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{vmatrix} \quad (\text{A.32})$$

obtemos

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \ddot{\phi}_1(t) & \ddot{\phi}_2(t) \end{vmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Usando as propriedades de determinantes e o fato que ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem a equação (A.22), obtemos

$$\dot{W}(t) = -p(t)W(t), \quad (\text{A.34})$$

que é uma equação linear de primeira ordem, visto anteriormente. A solução de (A.34) é dada pela expressão (A.31), onde t_0 é um ponto qualquer em (a, b) . \square

Vejam agora um importante resultado que mostra o que a independência linear pode fazer pela questão de solução geral.

Teorema A.5. *Sejam $\psi_1, \psi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas soluções l.i. de (A.22). Então, qualquer solução ϕ de (A.22) é da forma*

$$\phi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \quad (\text{A.35})$$

com α_1 e α_2 constantes escolhidas convenientemente.

Demonstração. : Escolha $t_0 \in (a, b)$ fixo e considere o sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1\psi_1(t_0) + \alpha_2\psi_2(t_0) &= \phi(t_0) \\ \alpha_1\dot{\psi}_1(t_0) + \alpha_2\dot{\psi}_2(t_0) &= \dot{\phi}(t_0). \end{aligned}$$

Como o determinante desse sistema é o Wronskiano de ψ_1 e ψ_2 em t_0 , o qual é diferente de zero, (pois ψ_1 e ψ_2 são l.i.) concluímos que α_1 e α_2 estão determinados de modo único. Agora considere a função

$$\sigma(t) = \alpha_1\psi_1(t) + \alpha_2\psi_2(t), \quad (\text{A.36})$$

a qual é solução de (A.22) e como $\sigma(t_0) = \phi(t_0)$ e $\dot{\sigma}(t_0) = \dot{\phi}(t_0)$, o teorema de existência e unicidade [Teorema A.2] nos diz que $\sigma = \phi$. \square

Em virtude desse resultado, vemos que se determinamos um par qualquer ψ_1 e ψ_2 , de soluções l.i. de (A.22) então a solução geral de (A.22) está obtida e é dada por (A.35).