



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Dinâmica de mapas *nontwist* dissipativos

Rodrigo Simile Baroni

Rio Claro - SP
2024



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Dinâmica de mapas *nontwist* dissipativos

Rodrigo Simile Baroni

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador
Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Rio Claro - SP
2024

B266d Baroni, Rodrigo Simile
Dinâmica de mapas nontwist dissipativos / Rodrigo Simile Baroni.
-- Rio Claro, 2024
150 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Ricardo Egydio de Carvalho

1. Caos determinístico. 2. Sistemas não lineares. 3. Sistemas
hamiltonianos. 4. Sistemas dinâmicos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade
Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Rodrigo Simile Baroni

Dinâmica de mapas *nontwist* dissipativos

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior

Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos

Conceito: Aprovado

Rio Claro, SP, 13 de junho de 2024

Dedico a todos
Que apoiaram e creram
Nesta jornada.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e através do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (PDSE), processo número 88881.622881/2021-01.

Numerical experiments are just what their name implies: experiments. In describing and evaluating them, one should enter the state of mind of the experimental physicist, rather than that of the mathematician. Numerical experiments cannot be used to prove theorems; but, from the physicist's point of view, they do often provide convincing evidence for the existence of a phenomenon. We will therefore follow an informal, descriptive and non-rigorous approach. Briefly stated, our aim will be to understand the fundamental properties of dynamical systems rather than to prove them.

Michel Hénon, "Numerical Exploration of Hamiltonian Systems", em
Chaotic Behavior of Deterministic Systems.

Resumo

Sistemas Hamiltonianos que violam a condição de não degenerescência de frequências (ou condição *twist*, para mapas) são chamados de *nontwist*. Além das características genéricas de sistemas Hamiltonianos, como o espaço de fases misto, sistemas *nontwist* apresentam fenômenos como ressonâncias isócronas, pontos extremos no perfil do número de rotação e a presença da curva *shearless*, que é uma barreira de transporte robusta. O modelo mais simples que viola a condição *twist* é o mapa padrão *nontwist*, um mapa bidimensional com dois parâmetros de controle. O objetivo desta tese é analisar os efeitos da dissipação adicionada a esse mapa. Diferentemente de sistemas conservativos, sistemas dissipativos apresentam atratores no espaço de fases. Em particular, o mapa padrão *nontwist* dissipativo apresenta o chamado atrator *shearless*, e analisamos uma rota de destruição e ressurgimento desse atrator através de uma modificação no mapa que permite manipular a posição dos pontos fixos. Posteriormente, estudamos as selas caóticas do mapa padrão *nontwist* dissipativo, que são conjuntos caóticos não atrativos responsáveis por transientes caóticos e fronteiras fractais. Ilustramos a coexistência de duas selas caóticas qualitativamente distintas e os seus efeitos nos tempos de transiente, assim como a relação com crises. Por fim, analisamos o limite de dissipação forte, que reduz o mapa a apenas uma dimensão. Analisamos as rotas para o caos, a organização das estruturas periódicas no espaço de parâmetros através da teoria de órbitas extremas e superestáveis e observamos multiestabilidade e crises.

Palavras-chave: Sistemas Hamiltonianos, Sistemas Dissipativos, Caos, Dinâmica Não-Linear, Dinâmica *Nontwist*.

Abstract

Hamiltonian systems that violate the non-degeneracy of frequencies condition (or twist condition, for maps) are called nontwist systems. In addition to the generic characteristics of Hamiltonian systems, such as mixed phase space, nontwist systems exhibit phenomena like isochronous resonances, extremal points in the rotation number profile, and the presence of the shearless curve, which acts as a robust transport barrier. The simplest model that violates the twist condition is the nontwist standard map, a two-dimensional map with two control parameters. The aim of this thesis is to analyze the effects of added dissipation to this map. Unlike conservative systems, dissipative systems exhibit attractors in phase space. Specifically, the dissipative nontwist standard map presents the so-called shearless attractor, and we analyze a route of destruction and resurgence of this attractor through a modification in the map that allows manipulation of the fixed points' positions. Subsequently, we study the chaotic saddles of the dissipative nontwist standard map, which are non-attractive chaotic sets responsible for chaotic transients and fractal boundaries. We illustrate the coexistence of two qualitatively distinct chaotic saddles and their effects on transient times, as well as their relationship with crises. Finally, we analyze the strong dissipation limit, which reduces the map to just one dimension. We examine the routes to chaos, the organization of periodic structures in parameter space through the theory of extremal and superstable orbits, and observe multistability and crises.

Key-words: Hamiltonian Systems, Dissipative Systems, Chaos, Nonlinear Dynamics, Nontwist Dynamics.

Sumário

1	Introdução	9
2	Dinâmica conservativa e o mapa padrão <i>nontwist</i>	13
2.1	Sistemas Hamiltonianos	13
2.1.1	Equações de Hamilton	14
2.1.2	Preservação do volume e da área simplética	16
2.1.3	Colchete de Poisson, constantes do movimento e integrabilidade	18
2.1.4	Sistemas quase-integráveis	20
2.2	Mapas simpléticos e a condição <i>twist</i>	21
2.3	Mapa padrão <i>nontwist</i>	25
2.3.1	Curva <i>shearless</i>	26
2.3.2	Análise de simetrias	29
2.3.3	Colisão de órbitas periódicas e reconexões	33
3	Mapa padrão <i>nontwist</i> dissipativo	38
3.1	Notas sobre dissipação	38
3.2	Mapa padrão <i>nontwist</i> dissipativo	39
3.2.1	Órbitas periódicas	40
3.2.2	Efeitos da dissipação	43
4	Destruição e criação do atrator <i>shearless</i> quase-periódico	47
4.1	Mapa modificado	47
4.2	Resultados	48
4.3	Conclusões parciais	54
5	Selas caóticas e crises interiores	55
5.1	Bifurcações dos pontos fixos	56
5.2	Criação das selas caóticas	62
5.3	Análise do transiente	67
5.4	Intermitência induzida por crise	72

5.5	Conclusões parciais	78
6	Limite de forte dissipação	80
6.1	Seções do espaço de parâmetros	80
6.2	Mapas do círculo	81
6.3	Dinâmica e rotas para o caos	83
6.4	Organização e distribuição de estruturas periódicas	90
6.5	Multiestabilidade e crises	95
6.6	Conclusões parciais	98
7	Conclusões	99
A	Demonstração da conservação da área simplética	107
B	Expoentes de Lyapunov para mapas	111
B.1	Mapas Unidimensionais	111
B.2	Mapas Bidimensionais	113
C	Métodos numéricos para aproximar selas caóticas	116
C.1	Medida natural e dimensão generalizada	116
C.2	Método <i>sprinkler</i>	117
C.3	Método triplo PIM	119
D	Descritores Lagrangianos	121
D.1	Definição para mapas	121
D.2	Mapas não perturbados	122
D.3	Mapa perturbado conservativo	126
D.4	Mapa perturbado dissipativo	133
E	Sistemas Hamiltonianos não-canônicos e dissipação metriplética	137
E.1	Sistemas Hamiltonianos não-canônicos	137
E.2	Exemplo: Corpo rígido em rotação livre	140
E.3	Dissipação metriplética	142
E.4	Exemplo: Corpo rígido com torque metriplético	144
F	Artigos publicados	147

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos são quaisquer sistemas que descrevem a evolução temporal de algum fenômeno natural ou artificial, com o intuito de entender melhor tal fenômeno ou fazer previsões. Tais modelos podem ser classificados de diferentes formas de acordo com as características das equações que os definem [1]. Em sistemas dinâmicos não-lineares as equações dependem de forma não-linear em suas variáveis, o que geralmente implica que os métodos analíticos tradicionais não podem ser empregados para obter soluções gerais do sistema para qualquer tempo e configuração inicial. Ao invés disso, recorrem-se a métodos numéricos para obter soluções aproximadas a partir de condições iniciais específicas [1].

Muitos sistemas não-lineares são intrinsecamente imprevisíveis a longo prazo, uma vez que pequenas variações nas condições iniciais levam a resultados drasticamente diferentes ao longo do tempo [1, 2]. Mesmo que as equações que descrevem o modelo sejam conhecidas, é impossível fazer previsões precisas após uma certa escala de tempo. Tal fenômeno é conhecido como sensibilidade às condições iniciais e é uma característica determinante do comportamento caótico [1, 2].

Os sistemas dinâmicos também podem ser classificados como conservativos ou dissipativos [1]. Em sistemas conservativos quaisquer termos que representam a dissipação de energia são desprezados. Sistemas descritos pelo formalismo Hamiltoniano [2, 3] se encaixam nessa classificação, e um exemplo clássico é o problema da interação gravitacional de três corpos celestes [1]. Ao analisar esse problema no século XIX, o matemático francês Henri Poincaré foi, possivelmente, o primeiro a entender a possibilidade do que posteriormente foi chamado de caos [1]. Poincaré também foi o precursor de abordagens qualitativas para a análise de sistemas dinâmicos não-lineares.

Em contraste aos sistemas conservativos, em sistemas dissipativos ocorre a perda gradual de energia, o que leva à convergência das soluções para estados assintóticos chamados de atratores [2]. Podem existir atratores em que o comportamento é regular ou caótico. Como exemplo de sistema dissipativo que pode apresentar caos, tem-se o sistema de Lorenz [1, 2, 4], um modelo simplificado de convecção atmosférica desenvolvido pelo meteorologista Edward Lorenz na segunda metade do século XX [4]. A partir de soluções numéricas, utilizando um computador, Lorenz observou a sensibilidade às condições iniciais, que passou a ser chamada popularmente de efeito borboleta [1, 4]. A invenção dos computadores permitiu a consolidação da Teoria do Caos como uma nova área da Ciência e foi um marco importante no estudo de sistemas dinâmicos [1].

Outra possível classificação de sistemas dinâmicos é quanto à variável temporal, que pode ser contínua ou discreta [1, 2]. Em um sistema de tempo discreto, o tempo t é um número inteiro e a evolução dos estados do sistema é dada por uma ou mais equações de diferenças, chamadas de *mapa*. Um mapa relaciona o valor das variáveis em um instante t com o valor no instante $t + 1$, de modo que, conhecido o estado inicial, os estados posteriores são determinados iterativamente. Já em um sistema de tempo contínuo, o tempo t é um número real e a evolução do sistema é descrita por uma ou mais equações diferenciais, que são escritas em termos das derivadas das variáveis de estado. Equações diferenciais não-lineares podem ser resolvidas a partir de uma condição inicial utilizando algum método numérico.

Sistemas Hamiltonianos não degenerados satisfazem globalmente a condição de não degenerescência de frequências, chamada de condição *twist* para mapas [5]. Mapas que violam a condição *twist* localmente são chamados de *nontwist* [6], e apresentam propriedades como ressonâncias isócronas [7], colisão e reconexão de separatrizes [8], pontos extremos no perfil do número de rotação e a presença da curva *shearless* [9], uma robusta barreira de transporte. Sistemas *nontwist* são frequentemente aplicados em estudos de fenômenos de física de plasmas e fluidos [6, 10]. O modelo mais simples que viola a condição *twist* é o mapa padrão *nontwist*, um mapa bidimensional com dois parâmetros de controle [9, 11].

Os efeitos da dissipação adicionada à um fluxo Hamiltoniano degenerado foram estudados em [12, 13], onde foram analisadas órbitas periódicas e reconexões de separatrizes. Em [14] essas questões foram consideradas em um mapa *nontwist*. O efeito da dissipação sobre a curva *shearless* foi inicialmente

considerado em [15] em uma modificação do mapa padrão *nontwist*, onde foi observado que a curva *shearless* se torna um atrator, chamado de atrator *shearless*. Em [16] o mesmo mapa foi considerado, onde foi observada a coexistência de múltiplos atratores *shearless*. Em [17] foi considerado o mapa padrão *nontwist* dissipativo, e foram caracterizadas duas rotas para o caos para o atrator *shearless*. O principal objetivo desta tese é avaliar os efeitos da dissipação adicionada ao mapa padrão *nontwist*.

Esta tese está estruturada da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta algumas definições e fundamentos a respeito dos sistemas dinâmicos Hamiltonianos, incluindo o mapa padrão *nontwist* e suas principais características. No Capítulo 3 é apresentado o mapa padrão *nontwist* dissipativo e são discutidos alguns efeitos gerais da adição da dissipação. No Capítulo 4 é introduzida uma modificação no mapa padrão *nontwist* dissipativo que permite a manipulação da posição dos pontos fixos, induzindo bifurcações no atrator *shearless* e identificamos uma rota de destruição e criação desse atrator. No Capítulo 5 é apresentada uma discussão sobre duas selas caóticas qualitativamente distintas que podem ocorrer nesse sistema, e as suas relação com mudanças abruptas no atrator caótico, conhecidas como crises, e seus efeitos sobre os tempos de transiente do sistema. No Capítulo 6, é analisado o limite de dissipação forte, que reduz o mapa a apenas uma dimensão. É feita uma análise das rotas para o caos e da organização das estruturas periódicas no espaço de parâmetros do sistema. Enquanto os Capítulos 2 e 3 apresentam a base para o desenvolvimento da tese, os Capítulos 4, 5 e 6 podem ser lidos de forma independente, seus resultados e discussões são auto-contidos e apresentam as próprias conclusões parciais. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões gerais. Os cálculos numéricos foram realizados com a linguagem de programação Fortran e os resultados analíticos com auxílio do sistema algébrico computacional *Wolfram Mathematica*.

Ao final do texto são apresentados os apêndices. No Apêndice A é desenvolvido a demonstração da conservação da área simplética, uma propriedade importante de sistemas Hamiltonianos. No Apêndice B são descritas formas de calcular o expoente de Lyapunov para mapas, que é uma quantia utilizada para caracterizar a dinâmica caótica. No Apêndice C são discutidos métodos numéricos para a aproximação de selas caóticas. No Apêndice C são apresentados os descritores Lagrangianos, que são uma ferramenta para a visualização de estruturas no espaço de fases. Também são apresentados resultados da aplicação dessa ferramenta no mapa padrão *nontwist*, conservativo e dissipativo. No Apêndice E é feita uma introdução à sistemas Hamiltonianos não-canônicos e um tipo de dissipação chamada de me-

triplética. Esses tópicos, apesar de não serem diretamente relacionados com os resultados principais da tese, foram estudados durante o período de doutorado sanduíche realizado na *The University of Texas at Austin*. Por fim, no Apêndice F são apresentados os artigos publicados ao longo do período de doutoramento.

Capítulo 2

Dinâmica conservativa e o mapa padrão *nontwist*

Neste capítulo são apresentados alguns fundamentos da teoria de sistemas dinâmicos Hamiltonianos, incluindo a forma como tais sistemas podem ser descritos por equações de tempo discreto, chamados de mapas. Especificamente são discutidas as principais propriedades do mapa padrão *nontwist*, um sistema bidimensional conservativo que viola localmente a condição *twist*. Tal violação resulta em fenômenos como o aparecimento de soluções degeneradas, que possuem o mesmo número de rotação, e de uma barreira de transporte particularmente resistente a perturbações, chamada de curva ou toro *shearless*.

2.1 Sistemas Hamiltonianos

Sistemas dinâmicos são modelos matemáticos que descrevem a evolução temporal de algum fenômeno natural ou artificial. Todo sistema dinâmico determinístico pode ser definido por três partes [18]: 1. um conjunto de variáveis de estado que identificam de forma única cada estado possível do sistema; 2. uma regra de evolução temporal, de modo que, se um estado inicial do sistema é conhecido, é possível determinar de forma única os estados futuros; 3. uma variável temporal que parametriza a evolução. O espaço de fases é o espaço abstrato que contém as soluções do sistema, chamadas de órbitas ou trajetórias.

No caso em que a regra de evolução do sistema dinâmico é dada em termos de equações diferenciais de primeira ordem, o tempo é uma variável contínua,

e o sistema pode ser genericamente escrito como [3]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ são as variáveis de estado e o espaço N -dimensional definido por essas variáveis é o espaço de fases. O campo vetorial $\mathbf{V} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ pode ser não linear em suas variáveis, e tipicamente o sistema 2.1 precisa ser integrado numericamente. Se $\mathbf{f}$ não depende explicitamente do tempo o sistema é dito autônomo.

Dada uma condição inicial $\mathbf{x}(t = t_0)$ existe uma solução na forma $\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x}(t_0), t)$, onde ϕ_t é o fluxo que leva o estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ ao estado $\mathbf{x}(t)$. As soluções são curvas tangentes ao campo $\mathbf{V}$ em cada ponto do espaço de fases.

2.1.1 Equações de Hamilton

Uma classe especial de sistemas dinâmicos são os sistemas Hamiltonianos, que na Física descrevem, por exemplo, sistemas mecânicos, linhas de campo magnético, movimento de corpos celestes e advecção de partículas em fluidos incompressíveis [2, 6, 10]. Esse tipo de sistema é descrito pelas equações de Hamilton¹ [2, 3, 19]:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.2)$$

onde q_i e p_i , com $i = 1, \dots, N$, são as $2N$ variáveis dinâmicas do sistema. Os pares (q_i, p_i) definem posições e momenta canonicamente conjugados, e cada par confere ao sistema um grau de liberdade. A função escalar $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ é a função Hamiltoniana do sistema, que descreve o balanço energético.

Pela regra da cadeia, a derivada total de H com respeito ao tempo é:

¹Na obtenção das equações do movimento do formalismo Hamiltoniano a partir do formalismo Lagrangiano, mediante uma transformação de Legendre, uma terceira equação também é obtida: $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$, onde $\mathcal{L}$ é a função Lagrangiana. Esta equação, entretanto, não é uma equação do movimento, mas descreve a relação entre as dependências temporais de H e $\mathcal{L}$. Para mais informações sobre o formalismo Lagrangiano, ver, por exemplo, a referência [19].

$$\dot{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Quando a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo a Equação 2.3 resulta em $\dot{H} = 0$. Isso quer dizer que, dada uma condição inicial $\mathbf{q} = \mathbf{q}(0)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$, o valor da Hamiltoniana é preservado ao longo da trajetória obtida resolvendo-se o sistema 2.2; ou seja, $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = H(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) = E$, para todo t . Em sistemas mecânicos a função Hamiltoniana é identificada como a energia total do sistema, que é conservada no caso autônomo.

Escolhendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2N})$, onde $x_i = q_i$ para $i = 1, \dots, N$ e $x_i = p_i$ para $i = N + 1, \dots, 2N$, as equações 2.2 são escritas compactamente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_c \nabla H(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{J}_c$ é a matriz ortogonal anti-simétrica

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

chamada matriz de Poisson canônica. $\mathbf{0}_N$ e $\mathbf{I}_N$ são as matrizes nula e identidade, respectivamente, de ordem N . No apêndice E é apresentada uma generalização de sistemas Hamiltonianos cujas equações do movimento para um número finito de graus de liberdade são $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x})$, e a matriz de Poisson $\mathbf{J}$ pode depender das variáveis dinâmicas.

As equações de Hamilton podem ser obtidas através de um princípio variacional [5, 10, 19]. Considere uma trajetória no espaço de fases $\{\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t); t_0 < t < t_1\}$ que conecta os pontos $(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0))$ e $(\mathbf{q}(t_1), \mathbf{p}(t_1))$. A ação é um funcional sobre esse caminho, definido como [5]:

$$S[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt. \quad (2.8)$$

O Princípio de Hamilton [19] diz que o caminho que a solução descreve entre os instantes t_0 e t_1 , dentre todos caminhos possíveis no espaço de fases,

é aquele que minimiza a ação. A variação do funcional 2.8 com incrementos $\delta \mathbf{q}$ e $\delta \mathbf{p}$ é:

$$\begin{aligned}\delta S[\mathbf{q}, \mathbf{p}; \delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{p}] &:= \delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} \right) dt, \quad (2.9)\end{aligned}$$

e a ação é minimizada quando $\delta S[\mathbf{q}, \mathbf{p}; \delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{p}] = 0$. Como as variações $\delta \mathbf{q}$ e $\delta \mathbf{p}$ são independentes, seus coeficientes devem se anular no integrando da equação 2.9. A equação de Hamilton para $\dot{\mathbf{q}}$ é obtida imediatamente pelos coeficientes de $\delta \mathbf{p}$, enquanto a equação para $\dot{\mathbf{p}}$ é obtida integrando os termos restantes por partes, e considerando $\delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = 0$.

2.1.2 Preservação do volume e da área simplética

As equações de Hamilton 2.2 definem o campo vetorial Hamiltoniano $\mathbf{V}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$, tomando sua divergência encontramos:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Campos vetoriais com divergência zero conservam elementos de volume do espaço de fases quando evoluídos no tempo, esse resultado é o *Teorema de Liouville* [2, 19]. Note que este teorema é satisfeito mesmo se $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ [2].

De modo geral, sistemas dinâmicos que preservam o volume do espaço de fases são chamados de conservativos. Nesse tipo de sistema não existem *atratores*. O conceito de atrator será apresentado no próximo capítulo.

Sistemas Hamiltonianos também satisfazem uma condição mais genérica do que a preservação de volume, que é a preservação da *área simplética* [2, 3, 5]. Para ilustrar, considere uma trajetória de referência arbitrária $\mathbf{x}_r(t) = (\mathbf{q}_r(t), \mathbf{p}_r(t))$. Considere também duas soluções vizinhas, $\mathbf{x}_r(t) + \delta \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_r(t) + \delta \bar{\mathbf{x}}$, com $\delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{p})$ e $\delta \bar{\mathbf{x}} = (\delta \bar{\mathbf{q}}, \delta \bar{\mathbf{p}})$ sendo incrementos infinitesimais. A área simplética é definida como [2, 3, 5]:

$$\omega(\delta \mathbf{x}, \delta \bar{\mathbf{x}}) := \delta \mathbf{p} \cdot \delta \bar{\mathbf{q}} - \delta \mathbf{q} \cdot \delta \bar{\mathbf{p}}. \quad (2.11)$$

Se $N = 1$, a equação 2.11 resulta em:

$$\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = \delta p \delta \bar{q} - \delta q \delta \bar{p} = \delta\bar{\mathbf{x}} \times \delta\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

que é a área do paralelogramo definido pelos vetores $\delta\bar{\mathbf{x}}$ e $\delta\mathbf{x}$ no plano (q, p) . Logo, de modo genérico, a área simplética 2.11 é interpretada como a soma das áreas orientadas das projeções de $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\bar{\mathbf{x}}$ em cada um dos N planos (q_i, p_i) . Define-se a matriz simplética $\mathbf{S}$ [2, 3, 5] como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

de modo que a equação 2.11 pode ser reescrita compactamente como

$$\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{S} \delta\bar{\mathbf{x}}. \quad (2.14)$$

Conforme o apêndice A, pode-se mostrar que

$$\frac{d}{dt} \omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = 0, \quad (2.15)$$

isto é, a área simplética é conservada sob a evolução temporal [2, 3, 5].

A preservação da área simplética decorre do fato que a ação calculada sobre um caminho fechado do fluxo Hamiltoniano também é um invariante [2, 3, 5]. Considere um caminho fechado C no espaço de fases estendido $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Suponha que C possa ser parametrizado por λ , tal que $C = \{\mathbf{q}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda), t(\lambda); 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Então a ação sobre C é

$$S[C] = \int_0^1 \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \frac{dt}{d\lambda} \right) d\lambda = \oint_C (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt). \quad (2.16)$$

A equação 2.16 é conhecida como o invariante integral de Poincaré-Cartan [2, 3, 5]. Se H não depende do tempo, podemos escolher um caminho C sobre uma superfície de energia constante e a equação 2.16 fornece

$$S[C] = \oint_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}. \quad (2.17)$$

A integral 2.17 corresponde à soma das N áreas das projeções de C em cada plano (q_i, p_i) .

2.1.3 Colchete de Poisson, constantes do movimento e integrabilidade

O colchete de Poisson de duas funções arbitrárias das coordenadas do espaço de fases, $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, é definido como [3, 10, 19]

$$[f, g] := \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (2.18)$$

e a evolução temporal de uma função $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ é escrita da seguinte forma,

$$\dot{f} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Desse modo as equações do movimento 2.2 podem ser reescritas em termos do colchete de Poisson, resultando em

$$\dot{q}_i = [q_i, H]; \quad \dot{p}_i = [p_i, H]. \quad (2.20)$$

O colchete de Poisson satisfaz uma série de propriedades: bilinearidade, anti-simetria, identidade de Jacobi e regra de Leibniz [3, 10, 19]. Essas propriedades são expostas no apêndice E.

Uma constante do movimento é uma função $I(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ que satisfaz $\dot{I} = [I, H] = 0$, isto é, I comuta com a Hamiltoniana. Um sistema Hamiltoniano autônomo com N graus de liberdade é dito integrável quando possui N constantes do movimento independentes, isto é, existe um conjunto $\{I_1, I_2, \dots, I_N\}$ que satisfaz $[I_i, H] = 0$ e $[I_i, I_j] = 0$. Desse modo, todo sistema Hamiltoniano autônomo com um grau de liberdade é integrável, já que a própria função Hamiltoniana é uma constante do movimento. O comportamento de sistemas integráveis é sempre *regular* [20]: todas as soluções são periódicas ou quase-periódicas. A existência de N constantes do movimento independentes implica nas trajetórias serem confinadas em superfícies N dimensionais, apesar do espaço de fases possuir $2N$ dimensões.

Transformações canônicas são mudanças de coordenadas que preservam a forma das equações de Hamilton [2, 3, 20]. Geralmente buscam-se transformações canônicas que facilitem a solução das equações do movimento. Em particular, a transformação de um sistema integrável para coordenadas canônicas de ângulo-ação $(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{J})$ resulta em uma Hamiltoniana que depende apenas das coordenadas de ação, isto é, $H = H(\mathbf{J})$. Para um sistema

autônomo, a nova Hamiltoniana é simplesmente a Hamiltoniana original escrita em termos das novas variáveis. Com isso as equações de Hamilton se tornam:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} =: \omega_i(J_i); \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0, \quad (2.21)$$

cuja solução é $\theta_i(t) = \theta(0) + \omega_i(J_i)t$, $J_i(t) = J_i(0)$. Desse modo as ações são constantes e os ângulos variam linearmente no tempo com frequência ω_i . O vetor de frequências é definido como $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) = (\omega_1(J_1), \dots, \omega_N(J_N))$.

A interpretação geométrica desse resultado é que as soluções regulares são confinadas sobre superfícies toroidais definidas por $\mathbf{J}(0)$, e evoluem em cada direção de acordo com $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}(0))$. A trajetória é quase-periódica se não existir um vetor de números inteiros $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ tal que

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (2.22)$$

exceto pela solução trivial quando $\mathbf{m}$ é o vetor nulo. Isto é, nenhuma frequência pode ser escrita como uma combinação linear das outras em que os coeficientes são números racionais. Esse tipo de trajetória preenche densamente a superfície toroidal sem nunca fechar-se sobre si mesma.

Por outro lado, se a equação 2.22 é satisfeita para $\mathbf{m}$ não trivial, tem-se

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{m}\omega_0 \quad (2.23)$$

onde ω_0 é uma constante. Neste caso a trajetória se fecha sobre si mesma após m_1 voltas no ângulo θ_1 , m_2 voltas no ângulo θ_2 e assim por diante.

Para ilustrar, considere $N = 2$. Se a equação 2.23 for satisfeita, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \omega_0 \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

O número de rotação é definido como a razão entre as frequências angulares $\omega_1(J_1)$ e $\omega_2(J_2)$:

$$\omega(\mathbf{J}) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (2.25)$$

onde $\omega(\mathbf{J})$ é, genericamente, uma função das variáveis de ação. Quando $\omega(\mathbf{J})$ é um número racional, isto é, podemos escrever $\omega(\mathbf{J}) = \frac{m_1}{m_2}$, o número de rotação é comensurável. Uma trajetória completa m_1 revoluções sobre θ_1 ao

mesmo tempo que completa m_2 revoluções sobre θ_2 , voltando exatamente ao ponto inicial.

2.1.4 Sistemas quase-integráveis

Um problema fundamental em dinâmica Hamiltoniana é determinar o comportamento de um sistema integrável sujeito a uma perturbação não integrável. Essa situação pode ser formulada a partir da Hamiltoniana [2, 3, 20]

$$H(\Theta, \mathbf{J}) = H_0(\mathbf{J}) + \epsilon H_1(\Theta, \mathbf{J}), \quad (2.26)$$

onde H_0 é a Hamiltoniana não perturbada, H_1 representa a perturbação e ϵ é a intensidade da perturbação. Quando ϵH_1 é pequeno comparado com H_0 , diz-se que $H(\Theta, \mathbf{J})$ é um sistema *quase-integrável*.

O teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) diz respeito à persistência dos toros irracionais frente à perturbação [2, 3, 19, 20]. Para dois graus de liberdade, seja r/s qualquer aproximação racional de ω no sistema perturbado. Então, o número de rotação dos toros irracionais que não são destruídos pela perturbação satisfazem a condição:

$$\left| \omega - \frac{r}{s} \right| > c(\epsilon) s^{-5/2}, \quad (2.27)$$

onde $c(\epsilon)$ é uma função da perturbação que tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Sendo assim, são preservados os toros cujo número de rotação não são aproximados suficientemente bem pela razão de dois inteiros r e s . Os primeiros toros irracionais a serem destruídos são aqueles cujo ω pode ser aproximado suficientemente bem por um número racional, e o último a ser destruído é aquele cujo ω corresponde à média dourada.

O teorema KAM não fornece informações sobre os toros racionais, também chamados de toros ressonantes. Neste caso o cenário é descrito pelo teorema de Poincaré-Birkhoff [2, 3, 20]. Esse teorema estabelece que quando $\epsilon \neq 0$ algumas órbitas periódicas continuam a existir, isto é, sobre um toro ressonante com $\omega = r/s$ existem órbitas fechadas. Surge um número par de órbitas periódicas, sendo metade estáveis e metade instáveis. As órbitas periódicas estáveis são envolvidas por tubos toroidais que aparecem como ilhas na seção de Poincaré, que será introduzida na próxima seção. Na vizinhança das órbitas periódicas instáveis começa a surgir o comportamento caótico, devido ao cruzamento das variedades invariantes estáveis e instáveis, que geram emaranhados homoclínicos e heteroclínicos [2, 3, 20].

2.2 Mapas simpléticos e a condição *twist*

Seja um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade e $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Como a energia é conservada, a dinâmica ocorre em uma superfície que satisfaz $E = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Esse vínculo permite que uma das variáveis dinâmicas seja reescrita em termos das outras três, por exemplo, $p_2 = p_2(q_1, q_2, p_1; E)$, e o fluxo de trajetórias é limitado a três dimensões. A dinâmica pode ser analisada de modo simplificado através de uma seção de Poincaré com energia E fixada, utilizando o plano Σ definido por $q_2 = 0$, que é transversal ao fluxo, e marcando-se neste plano as intersecções das soluções.

Suponha que seja escolhida a condição inicial $\mathbf{x}_0 = (q_1(t = t_0), p_1(t = t_0))$, com $q_2 = 0$ e p_2 apropriado para uma certa superfície de energia. Então $\mathbf{x}_0$ é um ponto sobre a seção de Poincaré, e as equações 2.2 podem ser resolvidas numericamente até que ocorra outro cruzamento com Σ após um tempo $t = t_1$ de integração. Este cruzamento acontece em um ponto x_1 , e podemos dizer que $\mathbf{x}_0$ é mapeado em $\mathbf{x}_1$ por uma transformação $M : \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1$. Genericamente, dois pontos de cruzamentos consecutivos são relacionados por $\mathbf{x}_{n+1} = M(\mathbf{x}_n)$, onde n é a variável temporal discreta. Mapas construídos a partir de fluxos Hamiltonianos satisfazem a *condição simplética* [2, 5, 19, 20]

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \cdot \mathbf{S} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}\right) = \mathbf{S}, \quad (2.28)$$

onde o índice T significa transposição e denotamos por $\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}$ a matriz Jacobiana da transformação $M(q, p) = (M^{(1)}(q, p), M^{(2)}(q, p))$, isto é,

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial M^{(1)}/\partial q & \partial M^{(1)}/\partial p \\ \partial M^{(2)}/\partial q & \partial M^{(2)}/\partial p \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Como $\det(\mathbf{S}) = 1$ e sendo o determinante uma operação multiplicativa², a equação 2.28 implica em $\det(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{z}}) = \pm 1$, o que mostra que M preserva áreas. Além disso, pode-se mostrar especificamente que $\det(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{z}}) = +1$ [21], o que significa que M preserva também a orientação.

Normalmente é difícil de se obter, analiticamente, uma expressão para o mapa M dada uma Hamiltoniana arbitrária. Para a construção analítica de mapas explícitos que possuem as mesmas propriedades da dinâmica sobre a seção de Poincaré, pode-se usar o sistema perturbado de um grau e meio de liberdade [20, 22]

²Isto é, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$. Além disso, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

$$H(\theta, J, t) = H_0(J) + \epsilon H_1(\theta, J, t). \quad (2.30)$$

A equação 2.30 define um sistema quase-integrável de um grau e meio de liberdade, devido à perturbação dependente do tempo. Para entender a equivalência entre esse sistema e um sistema com dois graus de liberdade, absorvemos o tempo como uma coordenada $\phi := t$, e chamamos seu momentum canonicamente conjugado como I . No espaço de fases estendido as trajetórias são parametrizadas em termos de um tempo artificial σ . Definindo uma nova Hamiltoniana com dois graus de liberdade

$$\bar{H}(\theta, \phi, J, I) = H(\theta, J, \phi) + I, \quad (2.31)$$

as equações de Hamilton fornecem

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial J}, \quad (2.32)$$

$$\frac{dJ}{d\sigma} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta}, \quad (2.33)$$

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial I} = 1, \quad (2.34)$$

$$\frac{dI}{d\sigma} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.35)$$

A equação 2.34 implica que $\sigma = t$, e assim as equações 2.32 e 2.33 são as equações de Hamilton para o sistema original com Hamiltoniana 2.30. A última equação, 2.35, é equivalente a

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.36)$$

mostrando que o momento canonicamente conjugado ao tempo é $-H$.

A Hamiltoniana 2.31 por construção não depende explicitamente de σ , assim, ela é uma constante de movimento no espaço de fases estendido. A conclusão dessa discussão é que um sistema Hamiltoniano com um grau e meio de liberdade é equivalente a um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade autônomo estendido.

Voltando ao sistema com um grau e meio de liberdade, quando a dependência temporal é periódica, isto é, $H(\theta, J, t+T) = H(\theta, J, t)$, a dinâmica pode ser representada pelas coordenadas do espaço de fases tomadas a cada múltiplo do período T . Como, de modo geral, as equações de Hamilton preservam o volume do espaço de fases e a área simplética, o mapa obtido preserva área e orientação. Mapas são objetos matemáticos relativamente mais simples do que equações diferenciais, e podem ser utilizados para entender o comportamento de sistemas Hamiltonianos ao invés do fluxo gerado pelas equações de Hamilton.

Assumindo que a dependência temporal do sistema perturbado seja periódica e dada na forma de impulsos, podemos escrever a Hamiltoniana como

$$H(\theta, J, t) = H_0(J) + \epsilon H_1(\theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT), \quad (2.37)$$

e as equações de Hamilton fornecem

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \epsilon f(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.38)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \Omega(J). \quad (2.39)$$

onde a função Ω é o número de rotação não perturbado, $\Omega = \partial H_0 / \partial J$; e a perturbação é dada pela função $f(\theta) = \partial H_1 / \partial \theta$. Um mapa simplético pode ser construído para obter os valores de θ e J imediatamente antes da atuação da perturbação. Escolhendo $T = 1$ e ε um número pequeno e positivo, integramos $\dot{J}$ no intervalo $t_n - \varepsilon$ e $t_{n+1} - \varepsilon$, onde t_n e t_{n+1} são duas atuações consecutivas da perturbação,

$$\int_{t_n - \varepsilon}^{t_{n+1} - \varepsilon} \dot{J} dt = \int_{t_n - \varepsilon}^{t_{n+1} - \varepsilon} \epsilon f(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) dt, \\ J(t_{n+1} - \varepsilon) - J(t_n - \varepsilon) = \epsilon f(\theta(t_n)), \quad (2.40)$$

onde na integração do lado direito foi utilizada a propriedade de filtragem da função delta de Dirac³. Agora, integrando a equação de $\dot{\theta}$ no mesmo intervalo de tempo

³ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$.

$$\int_{t_n - \varepsilon}^{t_{n+1} - \varepsilon} \dot{\theta} dt = \int_{t_n - \varepsilon}^{t_{n+1} - \varepsilon} \Omega(J) dt, \quad (2.41)$$

$$\theta(t_{n+1} - \varepsilon) - \theta(t_n - \varepsilon) = \varepsilon \Omega(J(t_n - \varepsilon)) + (1 - \varepsilon) \Omega(J(t_{n+1} - \varepsilon)),$$

onde para a integração do lado direito foi utilizado o fato de que $\Omega(J)$ é constante entre as atuações da perturbação. Por fim, tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nas equações 2.41 e 2.40 obtém-se o mapa

$$M : \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \Omega(J_{n+1}) \\ J_{n+1} = J_n + \varepsilon f(\theta_n) \end{cases}, \quad (2.42)$$

onde o índice n corresponde ao tempo discreto em que a perturbação atua. Mapas simpléticos mais genéricos também podem ser obtidos a partir de funções geradoras [5, 23].

O mapa M é dito *twist* [6] caso o número de rotação não perturbado satisfaça a condição:

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} = \frac{\partial}{\partial J_n} \Omega(J_{n+1}) = \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \Big|_{J=J_{n+1}} \neq 0, \quad (2.43)$$

que para fluxos é chamada de condição de não degenerescência, pois se Ω varia de forma monotônica com a ação, não existem dois toros com o mesmo número de rotação.

As demonstrações dos teoremas KAM e Poincaré-Birkhoff assumem que a condição *twist* seja satisfeita [6, 22]. Quando essa condição é violada localmente, isto é

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} = 0 \quad (2.44)$$

para algum J_n , o sistema é dito *nontwist* [6]. A condição *twist* pode ser violada de diferentes formas. Por exemplo, modelos em que ela é violada globalmente são tratados na referência [22], mas esses sistemas são estruturalmente instáveis [9] apesar de apresentarem uma dinâmica rica. Quando a condição *twist* é violada localmente, ou seja, quando $\Omega(J)$ apresenta um máximo ou mínimo local, o sistema é estruturalmente estável [9].

Do ponto de vista físico, sistemas Hamiltonianos degenerados e mapas *nontwist* são interessantes pois surgem naturalmente em diversos problemas,

como em física de plasma [6], mecânica celeste [24] e mecânica dos fluidos [10].

2.3 Mapa padrão *nontwist*

A violação local da condição *twist* resulta em fenômenos como ressonâncias isócronas [7], a curva *shearless* [9], colisão de órbitas periódicas e reconexão de variedades [8], que serão ilustradas nesta seção.

O mapa padrão *nontwist* (MPN) pode ser considerado o mapa simplético mais simples que viola a condição *twist* localmente [9, 11]. Ele é escrito como:

$$M_{PN} : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad \text{mod}(1), \quad (2.45)$$

onde $x \in [0, 1]$ e $y \in \mathbb{R}$ são identificadas como as variáveis de ângulo e ação, respectivamente. O parâmetro $b \in \mathbb{R}$ é a intensidade da perturbação não-linear e $a \in [0, 1]$ está relacionado com número de rotação.

O mapa 2.45 pode ser obtido a partir da Hamiltoniana [11]:

$$H(x, y, t) = a \left(y - \frac{y^3}{3} \right) + b \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(x - 2\pi nt). \quad (2.46)$$

Originalmente a Hamiltoniana 2.46 foi apresentada como uma aproximação em um problema de transporte em mecânica dos fluidos [11]. A parte integrável representa um fluxo atmosférico zonal e a perturbação não integrável representa ondas de Rossby [11]. O objetivo era estudar o transporte caótico advectivo de partículas atmosféricas em jatos polares⁴. O segundo termo de 2.46 pode ser escrito em termos de uma soma de impulsos, deixando a Hamiltoniana na forma 2.37.

No sistema perturbado, o número de rotação de uma trajetória pode ser obtido com o incremento médio por iteração da variável angular:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n} \quad (2.47)$$

⁴O transporte advectivo na atmosfera se refere ao movimento de partículas como poeira, poluentes e aerossóis, causado pelo deslocamento do ar.

onde a variável x deve ser computada sem a operação $\text{mod}(1)$. Numericamente toma-se n finito porém grande. Esse limite converge desde que a trajetória seja regular.

2.3.1 Curva *shearless*

Escolhendo $b = 0$ em 2.45 o mapa é integrável: iterações sucessivas de qualquer condição inicial (x_0, y_0) caem sobre a reta $y = y_0$. Se ω for racional a trajetória volta ao ponto inicial e é periódica. Caso ω seja irracional, então a órbita preenche densamente a linha $y = y_0$, sem nunca voltar ao ponto inicial, e a trajetória é quase-periódica. A Figura 2.1(a) mostra uma linha preta de condições iniciais com $x_0 = 0.5$ e a sua imagem em vermelho após uma iteração do mapa integrável, e a Figura 2.1(b) o perfil do número de rotação obtido com $x_0 = 0.5$; o círculo aberto mostra o valor máximo de ω em $y_0 = 0$.

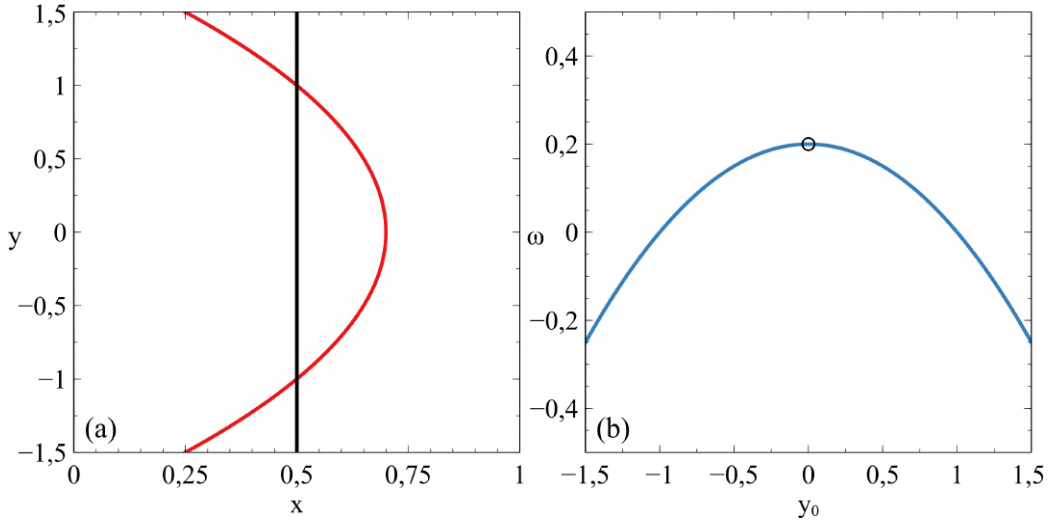


Figura 2.1: (a) linha de condições iniciais sobre $x_0 = 0,5$ em preto, e a sua imagem sob uma iteração do mapa nontwist integrável em vermelho; (b) perfil do número de rotação calculado sobre a reta $x_0 = 0,5$, com o seu valor máximo indicado pelo círculo aberto. Foi utilizado $a = 0,2$.

A curva $y = 0$ é chamada de curva *shearless* (sem cisalhamento), pois sobre essa curva o "shear" (cisalhamento), definido por $\partial x_{n+1}/\partial y_n$, é nulo. Desse modo, para todo toro definido por algum $y_r \neq 0$, o toro definido por

$-y_r$ terá o mesmo número de rotação. As órbitas com mesmo número de rotação são chamadas de *gêmeas* ou *isócronas* [7].

Quando $b \neq 0$ o sistema deixa de ser integrável e o espaço de fases é tipicamente misto, com comportamento regular e caótico. Essa situação é ilustrada no espaço de fases da Figura 2.2(a), onde foram utilizados os parâmetros $a = b = 0,35$. A curva *shearless*, em vermelho, foi encontrada a partir do perfil do número de rotação mostrado na Figura 2.2(b). O perfil do número de rotação foi calculado com condições iniciais sobre a linha $x_0 = 0,5$ e $y_0 \in [-0,5, 0,5]$. Desse modo, identificando o valor de y_0 com máximo número de rotação, tem-se as coordenadas de um ponto sobre a curva *shearless*.

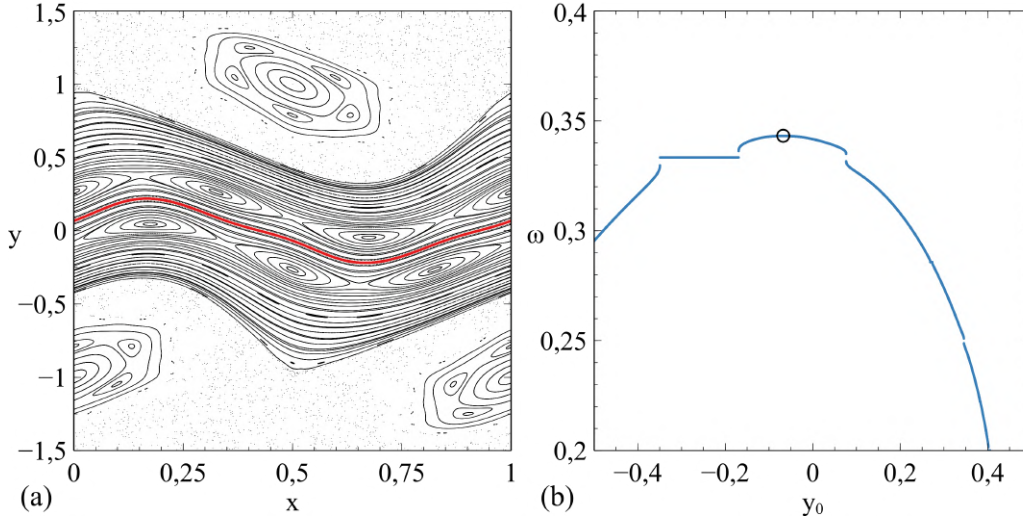


Figura 2.2: Em (a), espaço de fases do MPN com $a = b = 0,35$, com a curva *shearless* em vermelho; em (b) o perfil do número de rotação calculado sobre a reta $x_0 = 0,5$, com o seu valor máximo indicado pelo círculo aberto.

No espaço de fases da Figura 2.2 também encontramos cadeias de ilhas gêmeas de período 3 em lados opostos da curva *shearless*. Cada uma das cadeias é composta por três pontos elípticos (órbitas periódicas estáveis de período 3) e três pontos hiperbólicos (órbitas periódicas instáveis de período 3). Em torno dos pontos elípticos aparecem curvas elípticas, que correspondem à libração. É nomeada *separatriz* a curva que separa a região do espaço de fases ocupada por curvas de libração da região ocupada por curvas de rotação, também chamadas de curvas do tipo *spanning*, que atravessam o

espaço de fases. A separatriz conecta os pontos hiperbólicos da cadeia de ilhas.

Também vemos na Figura 2.2(a) ilhas gêmeas de período 1, que surgem na vizinhança dos pontos fixos estáveis do mapa. No perfil do número de rotação na Figura 2.2 identifica-se um platô em $\omega = 1/3$, correspondente à condições iniciais sobre uma das ilhas da cadeia superior de período 3.

A curva *shearless* é bastante robusta com respeito à perturbações, independente do seu número de rotação [25, 26]. Conforme aumenta-se a perturbação, o caos se espalha pelo espaço de fases destruindo curvas invariantes, no entanto a curva *shearless* é uma das últimas a ser destruída. A sua quebra está associada à transição do sistema para o caos global [9], permitindo que condições iniciais escolhidas na parcela inferior do espaço de fases visite a parcela superior, e vice-versa. Por esse motivo é interessante em diversas aplicações determinar quando a curva *shearless* existe ou não, devido ao seu papel como barreira de transporte no espaço de fases. A Figura 2.3 mostra a situação em que, ao variar um parâmetro, a curva *shearless* se rompe.

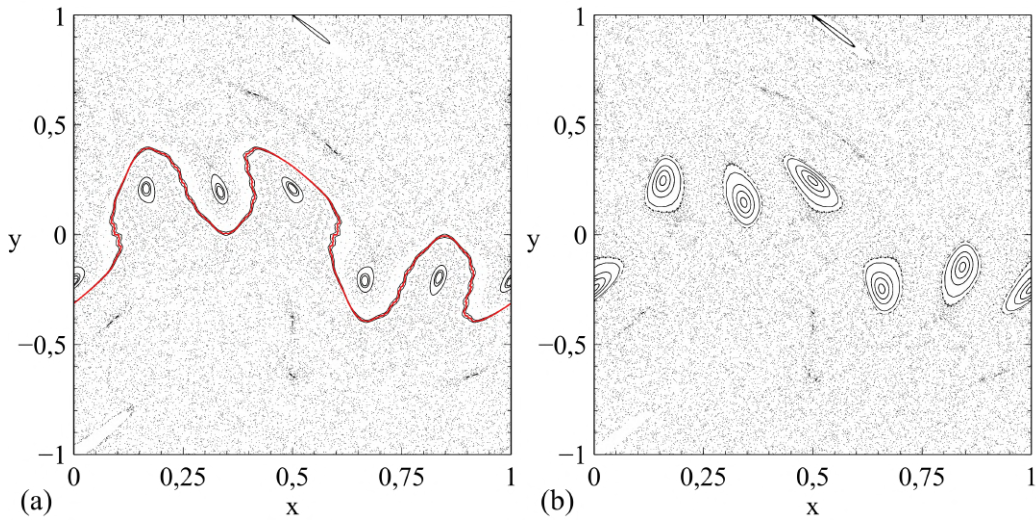


Figura 2.3: Ilustração da quebra da curva *shearless* e transição para caos global. Foi utilizado $b = 0,47$ e (a) $a = 0,696$, com a curva *shearless* em vermelho, e (b) $a = 0,7$.

Diversas técnicas já foram implementadas para a construção de diagramas de quebra da curva *shearless*, que é um gráfico do espaço de parâmetros (a, b)

que distingue as configurações em que essa barreira de transporte existe ou não [27, 28, 29]. Na figura 2.4, mostramos um diagrama de quebra obtido iterando um ponto indicador (que pertence à curva *shearless* caso ela exista, ver seção 2.3.2) e distinguindo se a trajetória é caótica ou regular a partir do maior expoente de Lyapunov λ . Para cada (a, b) em uma grade sobre o espaço de parâmetros é feito este cálculo, se $\lambda > 0$ a trajetória é caótica e conclui-se que a curva *shearless* já foi destruída. O algoritmo utilizado para o cálculo dos expoentes de Lyapunov é apresentado no apêndice B.

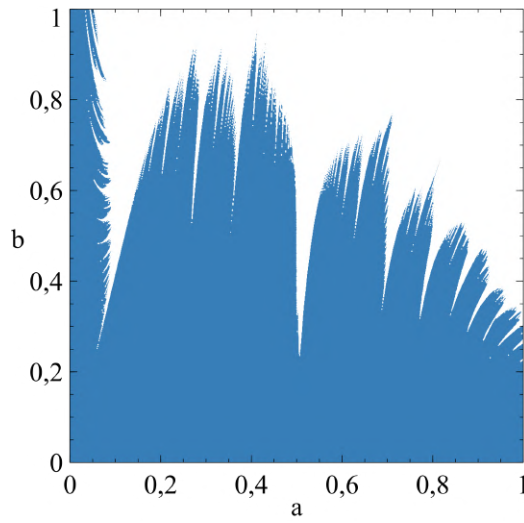


Figura 2.4: *Diagrama de quebra da curva shearless, a região em azul corresponde a parâmetros para os quais a curva shearless existe.*

Nota-se pelo diagrama de quebra que a curva *shearless* tende a ser destruída para valores grandes da perturbação b . A fronteira entre as duas regiões do diagrama de quebra possui partes contínuas e partes com propriedades fractais [30]. Os segmentos contínuos estão relacionados com a colisão de órbitas periódicas gêmeas [8, 30, 31], que será discutido posteriormente.

2.3.2 Análise de simetrias

A invariância de mapas sob simetrias discretas é de grande utilidade para estudos analíticos e numéricos [9, 32]. Antes de explorar as simetrias do mapa M_{PN} , são expostas a seguir algumas definições gerais.

Uma transformação T é uma simetria de um mapa M se

$$M = T^{-1} \circ M \circ T, \quad (2.48)$$

onde $\circ$ indica a composição e $^{-1}$ a transformação inversa.

Uma transformação I_0 é uma *involução* se

$$I_0 \circ I_0 = I_0^2 = \mathbb{I}, \quad (2.49)$$

onde $\mathbb{I}$ é a transformação de identidade.

Uma transformação I_0 é uma *simetria de reversão temporal* de M se

$$M^{-1} = I_0^{-1} \circ M \circ I_0. \quad (2.50)$$

Se a transformação I_0 for uma involução e uma simetria de reversão temporal de M , ela pode ser utilizada para construir outra simetria de reversão temporal: $I_1 := M \circ I_0$.

Para o mapa M_{PN} , uma transformação de simetria tal como a definida pela equação 2.48 é:

$$S : \begin{cases} x_{n+1} = x_n \pm \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -y_n \end{cases}, \quad (2.51)$$

onde agora usamos o índice $n + 1$ para indicar simplesmente as variáveis transformadas por S e não tem relação com o tempo discreto. Verificando:

$$\begin{aligned} M_{PN} \circ S &= \begin{cases} x_{n+1} = (x_n \pm \frac{1}{2}) + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = (-y_n) - b \sin(2\pi(x_n \pm \frac{1}{2})) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \pm \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -y_n - b \sin(2\pi x_n \pm \pi) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \pm \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -y_n + b \sin(2\pi x_n), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.52)$$

uma vez que $\sin(2\pi x \pm \pi) = -\sin(2\pi x)$. Sendo

$$S^{-1} : \begin{cases} x_{n+1} = x_n \mp \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -y_n \end{cases}, \quad (2.53)$$

temos

$$\begin{aligned} S^{-1} \circ M_{PN} \circ S &= \begin{cases} x_{n+1} = (x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \pm \frac{1}{2}) \mp \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -(-y_n + b \sin(2\pi x_n)) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{cases} = M_{PN}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

O mapa M_{PN} pode ser decomposto pela composição de duas involuções [9, 32], isto é, $M_{PN} = I_1 \circ I_0$, onde

$$I_0 : \begin{cases} x_{n+1} = -x_n \\ y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{cases}, \quad (2.55)$$

e

$$I_1 : \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}. \quad (2.56)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} I_1 \circ I_0 &= \begin{cases} x_{n+1} = -(-x_n) + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{cases} = M_{PN}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

As *linhas de simetria* de M_{PN} são os pontos fixos de cada uma das involuções [9, 32], isto é, os conjuntos de pontos (x, y) que permanecem inalterados quando transformados de acordo com as regras I_0 ou I_1 . Sendo assim, as linhas de simetria são as soluções das equações $I_{0,1} \circ \mathbf{z} = \mathbf{z}$ onde $\mathbf{z} = (x, y)$. Calculando os pontos fixos de I_0 :

$$\begin{cases} x = -x \\ y = y - b \sin(2\pi x) \end{cases}, \quad (2.58)$$

encontra-se $x = 0$ e $y = y$, uma vez que $\sin(0) = 0$. Conclui-se que a primeira linha de simetria é

$$s_1 = \{(x, y) | x = 0\}, \quad (2.59)$$

e uma segunda linha de simetria é obtida aplicando S sobre os pontos de s_1 , o que resulta em

$$s_2 = \{(x, y) | x = 1/2\}. \quad (2.60)$$

Calculando os pontos fixos de I_1 ,

$$\begin{cases} x = -x + a(1 - y^2) \\ y = y \end{cases}, \quad (2.61)$$

encontra-se $x = a(1 - y^2)/2$ e $y = y$. Assim, a terceira linha de simetria é

$$s_3 = \{(x, y) | x = a(1 - y^2)/2\}, \quad (2.62)$$

e aplicando S sobre os pontos de s_3 é obtida a quarta linha de simetria

$$s_4 = \{(x, y) | x = a(1 - y^2)/2 + 1/2\}. \quad (2.63)$$

As linhas de simetria são úteis na busca numérica de órbitas periódicas [9, 32]. Ao invés de varrer todo o espaço de fases bidimensional na procura de alguma órbita periódica, é suficiente buscar sobre alguma linha de simetria, que é um conjunto unidimensional. Todas órbitas periódicas do mapa M_{PN} aparecem em pares, em cada linha de simetria existem duas órbitas periódicas com o mesmo número de rotação. Nas Figuras 2.5(a) e 2.6(a) da próxima seção, as linhas de simetria estão desenhadas sobre o espaço de fases.

Uma forma analítica de encontrar a curva *shearless* é utilizando *pontos indicadores* [9, 32, 33]. Esses pontos sempre pertencem à curva *shearless* quando ela existe, e são pontos fixos das composições $S \circ I_0$ e $S \circ I_1$.

Calculando a composição $S \circ I_0$

$$\begin{aligned} S \circ I_0 &= \begin{cases} x_{n+1} = (-x_n) + \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -(y_n - b \sin(2\pi x_n)) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -y_n + b \sin(2\pi x_n), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.64)$$

e buscando os pontos fixos

$$\begin{cases} x = -x \pm \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{1}{4} \\ y = -y + b \sin(2\pi x) \rightarrow y = \frac{b}{2} \sin(\pm \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{b}{2} \end{cases}, \quad (2.65)$$

encontram-se os pontos indicadores

$$\mathbf{Z}_0^\pm = (\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{b}{2}). \quad (2.66)$$

Calculando a composição $S \circ I_1$

$$\begin{aligned} S \circ I_1 &= \begin{cases} x_{n+1} = (-x_n + a(1 - y_{n+1}^2)) \pm \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -y_n \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \pm \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = -y_n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.67)$$

e buscando os pontos fixos

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = -x + a(1 - y^2) \pm \frac{1}{2} \\ y = -y \rightarrow y = 0 \end{cases}, \\ &\begin{cases} x = -x + a \pm \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a}{2} \pm \frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

encontram-se os pontos indicadores

$$\mathbf{Z}_1^\pm = (\frac{a}{2} \pm \frac{1}{4}, 0). \quad (2.69)$$

2.3.3 Colisão de órbitas periódicas e reconexões

Como mostrado na seção anterior, em sistemas *nontwist* são observadas cadeias de ilhas gêmeas em torno de órbitas periódicas distintas que possuem o mesmo número de rotação. Com a variação dos parâmetros do mapa é possível que essas órbitas gêmeas se aproximem e eventualmente colidam, aniquilando-se mutuamente [8, 29, 31, 34, 35, 36].

Também ocorre o fenômeno de reconexão das separatrizes [8, 29, 31, 34, 35, 36], quando as separatrizes das cadeias gêmeas unem-se sem mudar a estabilidade das órbitas periódicas.

O processo de reconexão e colisão é diferente para órbitas de período ímpar ou par [8, 29, 31, 34, 35, 36]. Discutiremos primeiro o cenário ímpar. As órbitas periódicas de período ímpar em ilhas gêmeas que cruzam qualquer linha de simetria s_i possuem estabilidade alternada. Por exemplo, na Figura

2.5(a), temos cadeias gêmeas com $\omega = 1/3$; onde $a = 0,35$ e $b = 0,4$. Sobre a linha de simetria $s_2 = \{(x, y) | x = 1/2\}$, temos um ponto elíptico na cadeia superior e um ponto hiperbólico na cadeia inferior. A figura 2.5(b) mostra o perfil do número de rotação com o ponto de máximo correspondente à curva *shearless*.

Aumentar o valor do parâmetro b faz com que as cadeias gêmeas se aproximem. Eventualmente as separatrizes interagem e alteram a topologia do espaço de fases de um cenário *homoclínico* para *heteroclínico*. A Figura 2.5(c) mostra o espaço de fases para $b = 0,5$, após a reconexão. Na topologia homoclínica (Figura 2.5(a)) a separatriz da cadeia inferior envolve as ilhas da cadeia inferior, e vice-versa. Já na topologia heteroclínica (Figura 2.5(c)) a separatriz da cadeia inferior envolve as ilhas da cadeia superior, e vice-versa. Também vemos o surgimento dos *meandros*, que são toros retorcidos presentes apenas em sistemas *nontwist*. Os meandros não podem ser descritos como $y(x)$, uma vez que sobre um meandro existem valores de x correspondentes a mais de um valor de y . A Figura 2.5(d) é o perfil do número de rotação, com o ponto de mínimo correspondente à curva *shearless*. O aparente ruído próximo a $y_0 = 0$ é gerado por trajetória caóticas próximas ao ponto hiperbólico, para as quais o número de rotação não é definido.

A Figura 2.5(e) mostra o espaço de fases para $b = 0,6$, quando as órbitas periódicas já colidiram resultando na destruição das ilhas gêmeas. O correspondente perfil do número de rotação é mostrado na Figura 2.5(f), onde vemos algumas regiões com pontos dispersos correspondentes às órbitas caóticas.

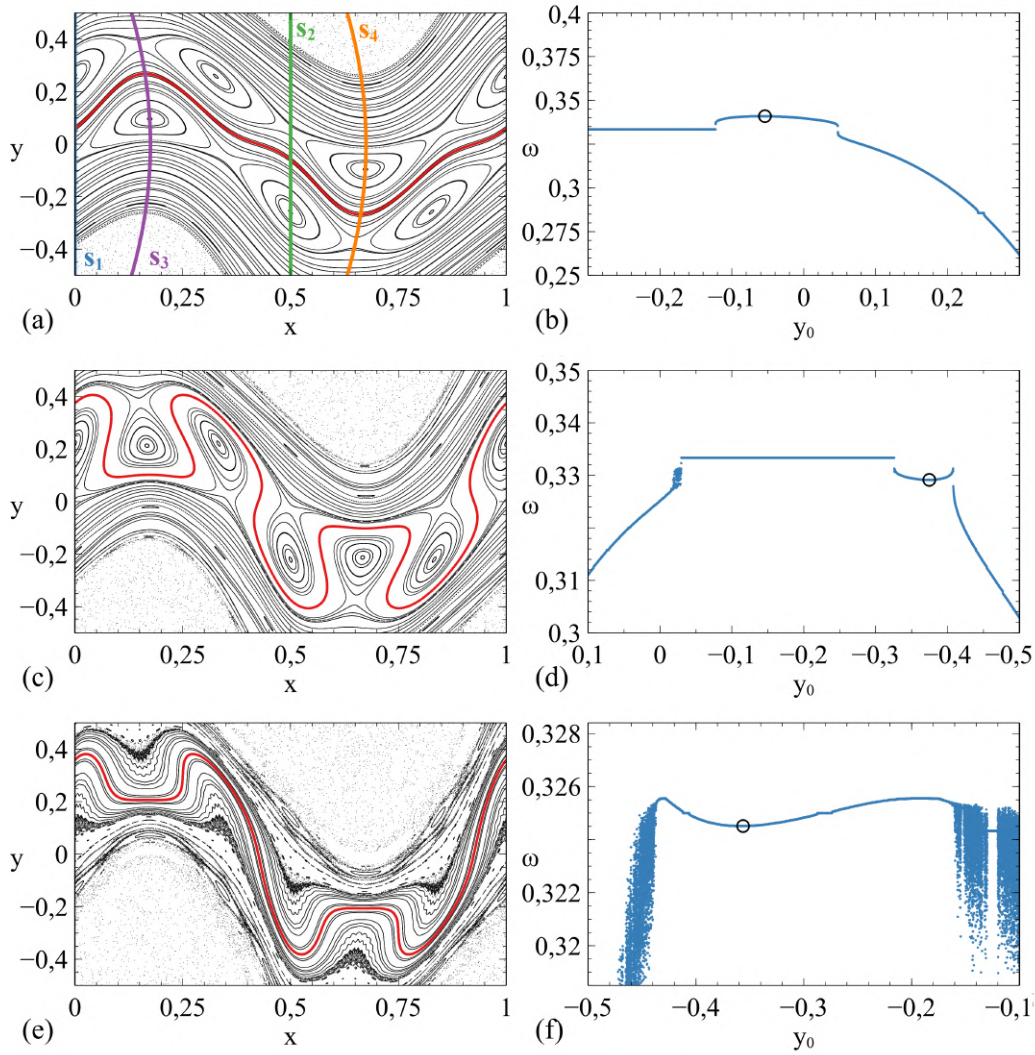


Figura 2.5: Gráficos de reconexão e colisão de órbitas gêmeas de período ímpar, das cadeias $\omega = 1/3$. Foram utilizados $a = 0,35$ e (a) $b = 0,4$, (c) $b = 0,5$, (e) $b = 0,4$. Os respectivos perfis de número de rotação estão nos painéis (b), (d) e (f).

O processo de reconexão e colisão de período par é ilustrado na figura 2.6. As órbitas periódicas de período par de ilhas gêmeas que cruzam qualquer linha de simetria s_i possuem mesma estabilidade. Por exemplo, na Figura 2.6(a), temos cadeias gêmeas com $\omega = 1/2$; onde $a = 0,55$ e $b = 0,2$. Sobre a linha de simetria $s_2 = \{(x, y) | x = 1/2\}$, temos um ponto elíptico na cadeia superior e outro ponto elíptico na cadeia inferior. O correspondente perfil

do número de rotação é mostrado na figura 2.6(b), onde identificamos dois platôs em $\omega = 1/2$, para condições iniciais dadas sobre as ilhas. O ponto de máximo mostra a existência da curva *shearless*.

Na Figura 2.6(c), com $a = 0,501$, as separatrizes interagem e é formada uma única estrutura de ilhas de período 2. O perfil do número de rotação correspondente, Figura 2.6(d), não possui nenhum máximo local, apenas o platô com $\omega = 1/2$. Essa configuração não apresenta a curva *shearless* e é conhecida como *dipolo topológico* [8].

Para $a = 0,499$, o espaço de fases na Figura 2.6(e) mostra que as órbitas periódicas já colidiram resultando na destruição das ilhas gêmeas. O correspondente perfil do número de rotação é mostrado na Figura 2.6(f), onde o ponto de máximo mostra o ressurgimento da curva *shearless*.

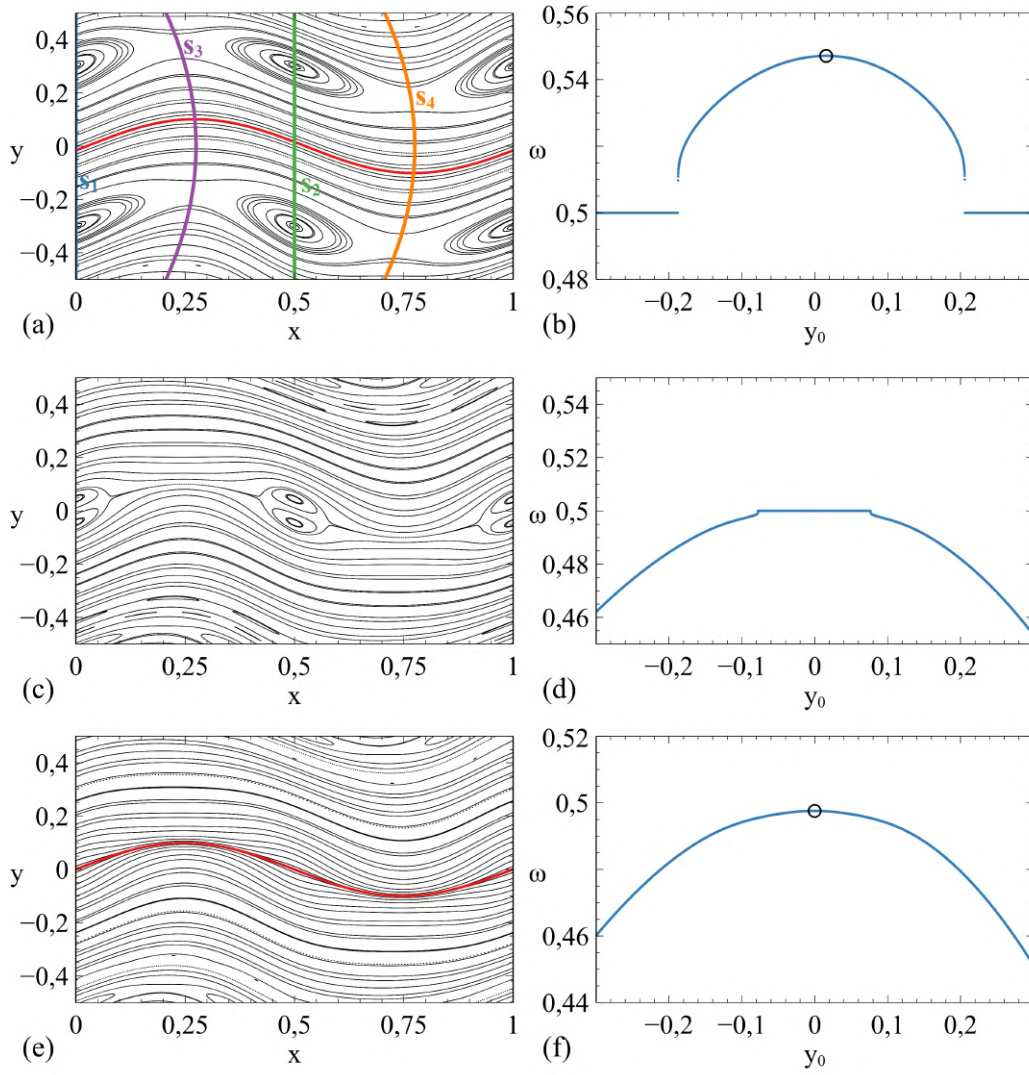


Figura 2.6: Gráficos de reconexão e colisão de órbitas gêmeas de período par, das cadeias $\omega = 1/2$. Foram utilizados $b = 0,2$ e (a) $a = 0,55$, (c) $b = 0,501$, (e) $b = 0,499$. Os respectivos perfis de número de rotação estão nos painéis (b), (d) e (f).

Capítulo 3

Mapa padrão *nontwist* dissipativo

Neste capítulo é introduzido o conceito de dissipação e algumas propriedades de sistemas dinâmicos dissipativos. Também é apresentado o mapa padrão *nontwist* dissipativo (MPND), que é o principal objeto de estudo desta tese.

3.1 Notas sobre dissipação

Existe uma diferença fundamental entre o espaço de fases de sistemas conservativos e dissipativos. Conforme o Teorema de Liouville o fluxo de soluções de sistemas Hamiltonianos preserva volumes no espaço de fases, uma vez que $\nabla \cdot V_H = 0$, onde V_H é o campo vetorial Hamiltoniano (Equação 2.10). Um sistema dinâmico é dito dissipativo quando o fluxo de soluções contrai volumes no espaço de fases, dando origem a atratores [2]. Um atrator é um subconjunto $\mathcal{A}$ do espaço de fases tal que um conjunto de condições iniciais do sistema convergem para $\mathcal{A}$ após um tempo transiente. Sendo assim, os atratores correspondem aos possíveis comportamentos assintóticos de um sistema dinâmico.

Para sistemas mecânicos o termo *dissipação* se refere à redução gradual da energia total de um sistema. Os mecanismos exatos que causam a dissipação são de natureza microscópica, e sua descrição detalhada foge do escopo da Mecânica Clássica ou dos sistemas dinâmicos com poucos graus de liberdade. Porém, existem diferentes formas de introduzir dissipação em um modelo [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43], isto é, modificá-lo de modo que $\nabla \cdot V < 0$, onde V é o campo vetorial definido pelas equações do movimento. Em sistemas

mecânicos a dissipação causada pelo atrito é usualmente modelada por forças de sentido oposto ao vetor velocidade.

O tipo de dissipação considerada nesta tese é análogo ao atrito linearmente proporcional à velocidade em sistemas mecânicos. Na literatura matemática, sistemas com esse tipo de dissipação são chamados de *simpléticos conformes* [43, 44, 45], devido à forma com que a área simplética é transformada pelo fluxo. Seja a Hamiltoniana $H = H(q, p)$, então o sistema Hamiltoniano conforme correspondente é dado pelas equações de Hamilton modificadas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \gamma p_i, \quad (3.1)$$

onde $0 < \gamma < 1$ é o coeficiente de dissipação, também chamada de fator conforme. Equivalentemente, para tempo discreto temos mapas da forma:

$$M_D : \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \Omega(J_{n+1}) \\ J_{n+1} = (1 - \gamma)J_n + \epsilon f(\theta_n) \end{cases}, \quad (3.2)$$

que satisfazem uma modificação da condição simplética (Equação 2.28) que é [43, 44, 45]

$$\left(\frac{\partial M_D}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \cdot \mathbf{S} \cdot \left(\frac{\partial M_D}{\partial \mathbf{z}} \right) = (1 - \gamma)\mathbf{S}, \quad (3.3)$$

e implica $\det\left(\frac{\partial M_D}{\partial \mathbf{z}}\right) = 1 - \gamma$ [43, 44, 45].

3.2 Mapa padrão *nontwist* dissipativo

De acordo com o formalismo apresentado na seção anterior, introduzimos o mapa padrão *nontwist* dissipativo (M_{PND}):

$$M_{PND} : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \mod(1) \\ y_{n+1} = (1 - \gamma)y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{cases}. \quad (3.4)$$

como uma modificação do M_{PN} . A transformação dada pela equação 2.51 também é uma simetria de M_{PND} , mas o mapa dissipativo não pode ser decomposto em termos das involuções 2.55 e 2.56.

3.2.1 Órbitas periódicas

A matriz Jacobiana de M_{PND} é:

$$\mathcal{J} := \frac{\partial M_{PND}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11} & \mathcal{J}_{12} \\ \mathcal{J}_{21} & \mathcal{J}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde:

$$\mathcal{J}_{11} := \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = 1 + 4\pi ab \cos(2\pi x_n) [(1 - \gamma)y_n - b \sin(2\pi x_n)], \quad (3.6)$$

$$\mathcal{J}_{12} := \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = -2a(1 - \gamma) [(1 - \gamma)y_n - b \sin(2\pi x_n)], \quad (3.7)$$

$$\mathcal{J}_{21} := \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} = -2\pi b \cos(2\pi x_n), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{J}_{22} := \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = 1 - \gamma. \quad (3.9)$$

Assim,

$$\det \mathcal{J} = \mathcal{J}_{11}\mathcal{J}_{22} - \mathcal{J}_{12}\mathcal{J}_{21} = 1 - \gamma, \quad (3.10)$$

e o mapa M_{PND} contrai áreas do espaço de fases para $0 < \gamma < 1$. Escolher $\gamma = 0$ recupera o MPN conservativo, discutido na Seção 2.3. Escolher $\gamma = 1$, que pode ser interpretado como o limite de dissipação máxima, resulta em um mapa unidimensional que será apresentado no Capítulo 6.

Os pontos fixos do mapa 3.4 são os pontos $P = (x^*, y^*)$ tais que $P = M_{PND}P$; isto é, $y_{n+1} = y_n = y^*$ e $x_{n+1} = x_n = x^* + m$, onde $m \in \mathbb{Z}$ aparece devido à variável x assumir valores entre 0 e 1. Aplicar essa condição na Equação 3.4 resulta em:

$$x^* = x^* + a(1 - y^{*2}) + m \mod(1), \quad (3.11)$$

$$y^* = (1 - \gamma)y^* - b \sin(2\pi x^*), \quad (3.12)$$

assim, para cada inteiro m são encontrados os pontos fixos

$$P_{\pm, m} = (x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \left(\pm \frac{\gamma}{b} \sqrt{1 - \frac{m}{a}} \right), \pm \sqrt{1 - \frac{m}{a}} \right). \quad (3.13)$$

Dois outros pontos fixos são encontrados para cada m aplicando a transformação S , dada pela Equação 2.51, nos pontos fixos da Equação 3.13:

$$SP_{\pm, m} = \left(-\frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \left(\pm \frac{\gamma}{b} \sqrt{1 - \frac{m}{a}} \right) + \frac{1}{2}, \mp \sqrt{1 - \frac{m}{a}} \right). \quad (3.14)$$

As Equações 3.13 e 3.14 definem uma família de quatro pontos fixos para cada inteiro m . Porém, apenas alguns valores de m resultam em pontos fixos com coordenadas reais para dada combinação de parâmetros de controle. Por exemplo, para $a = b = 0, 2$, será mostrado no Capítulo 5 que apenas os pontos fixos com $m = 0$ possuem coordenadas reais. Estes pontos fixos e os espaços de fases são exibidos nas Figuras 3.1(a) e (c), no cenário conservativo e dissipativo, respectivamente.

A estabilidade de um ponto fixo é determinada pelos autovalores da matriz $\mathcal{J}$ avaliada neste ponto. Genericamente os autovalores são:

$$\lambda_{\pm}(x, y; a, b, \gamma) = \frac{\text{tr}(\mathcal{J})}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{tr}(\mathcal{J})^2 - 4 \det(\mathcal{J})}, \quad (3.15)$$

onde $\text{tr}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}_{11} + \mathcal{J}_{22}$ é o traço.

Existem três possibilidades para a natureza de um ponto fixo no mapa dissipativo. A primeira ocorre quando os autovalores de $\mathcal{J}$ avaliados no ponto fixo são um par de números complexos conjugados, então o ponto fixo é um foco estável, que é um atrator de período 1 e trajetórias próximas espiralam em direção ao ponto fixo. A segunda possibilidade ocorre quando os autovalores são reais, com $\lambda_+ \leq 1 \leq \lambda_-$, o que dá origem a um ponto de sela, que é uma órbita instável de período 1. A terceira possibilidade ocorre quando os autovalores são reais e degenerados, $|\lambda_+| = |\lambda_-|$, o que resulta em um nodo estável que atrai trajetórias próximas sem o movimento de espiral do foco estável. Essas definições se estendem para órbitas de período arbitrário n , que são pontos fixos da n -ésima iterada do mapa; isto é, uma órbita periódica de período n satisfaz $P = M_{PD}^n P$.

Calculando $\lambda_{\pm,m}$ nos pontos fixos $P_{+,m}$ e $SP_{+,m}$ encontra-se:

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}(P_{+,m}; a, b, \gamma) &= \lambda_{\pm}(SP_{+,m}; a, b, \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 - \gamma + 4\pi b \sqrt{a(a-m) \left(1 + \frac{\gamma^2}{ab^2}(m-a) \right)} \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{4(\gamma-1) + \left(-2 + \gamma - 4\pi b \sqrt{a(a-m) \left(1 + \frac{\gamma^2}{ab^2}(m-a) \right)} \right)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

de modo que o par $P_{+,m}$ e $SP_{+,m}$, para uma dada combinação de parâmetros, sempre tem a mesma estabilidade. O mesmo é verdade para o par $P_{-,m}$ e $SP_{-,m}$, para o qual encontramos:

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}(P_{-,m}; a, b, \gamma) &= \lambda_{\pm}(SP_{-,m}; a, b, \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 - \gamma - 4\pi b \sqrt{a(a-m) \left(1 + \frac{\gamma^2}{ab^2}(m-a) \right)} \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{4(\gamma-1) + \left(-2 + \gamma + 4\pi b \sqrt{a(a-m) \left(1 + \frac{\gamma^2}{ab^2}(m-a) \right)} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

As expressões 3.16 e 3.17 foram obtidas com o auxílio de um sistema algébrico computacional.

Os pontos de equilíbrio são extremamente relevantes na análise de um sistema, pois eles determinam como soluções próximas a eles se comportam [2]. Especificamente, seja a órbita P de período n um ponto de sela com autovalores $|\lambda_s| < 1$ e $|\lambda_u| > 1$. Então λ_s é chamado de autovalor estável com o autovetor correspondente $\mathbf{v}_s$. Similarmente, λ_u é o autovalor instável e o autovetor correspondente é $\mathbf{v}_u$. Apesar de P ser um equilíbrio instável, nem todos os pontos se afastam dele sob iterações do mapa. O conjunto de pontos que se aproximam assintoticamente de P constituem a *variedade estável* de P :

$$W_s^n(P) = \{(x, y) | M^n P \rightarrow P, n \rightarrow \infty\}. \quad (3.18)$$

Por outro lado, a *variedade instável* de P é formada pelos pontos que se aproximam de P com iterações do mapa inverso:

$$W_u^n(P) = \{(x, y) | M^{-n}P \rightarrow P, n \rightarrow \infty\}. \quad (3.19)$$

Exatamente no ponto P , a variedade estável W_s^n tangencia o autovetor $\mathbf{v}_s$, e a variedade instável W_u^n tangencia o autovetor $\mathbf{v}_u$. Essas curvas influenciam de maneira fundamental a dinâmica do sistema. As variedades estáveis determinam a fronteira entre as bacias de atração de diferentes atratores, enquanto os atratores em si são contidos em um subconjunto das variedades instáveis [2, 46].

Em sistemas discretos não-lineares podem ocorrer cruzamentos entre variedades de diferentes tipos, por exemplo, cruzamentos entre uma variedade estável e uma variedade instável [2, 3, 20]. Quando as intersecções ocorrem a partir de variedades de um mesmo ponto hiperbólico, os pontos de intersecção são chamados de *pontos homoclínicos*. Quando os cruzamentos ocorrem com variedades de pontos hiperbólicos distintos, os pontos de intersecção são chamados de *pontos heteroclínicos*. Em ambos os casos os pontos de cruzamento formam um conjunto invariante: um ponto de cruzamento é sempre mapeado em outro ponto de cruzamento. As trajetórias próximas a esses pontos devem se comportar de maneira semelhante, dando origem à dinâmica caótica no sistema, em um mecanismo análogo ao da ferradura de Smale [2, 3, 20].

3.2.2 Efeitos da dissipação

Para $0 < \gamma < 1$ a contração de áreas causa o surgimento de atratores. Para ilustrar o efeito da dissipação, na Figura 3.1 comparamos o espaço de fases e o perfil do número de rotação do mapa conservativo ($\gamma = 0$) com os do mapa dissipativo com $\gamma = 0, 1$. Em ambos os casos foi utilizado $a = b = 0, 2$, e no caso dissipativo é representado apenas o comportamento assintótico, isto é, os atratores. A dinâmica transiente em si também é relevante, o que será explorado em detalhes no Capítulo 5.

Na Figura 3.1(a) temos as ilhas gêmeas de período 1 que surgem em torno dos pontos fixos estáveis do mapa sem dissipação. A curva *shearless* está desenhada em vermelho. No correspondente perfil do número de rotação na Figura 3.1(b), para $y_0 \approx 0, 5$ aparece um platô em $\omega = 0/1$, correspondente à ilha na metade inferior do espaço de fases; a notação $0/1$, ou, genericamente,

r/s , informa que a órbita de período s completa r voltas completas na variável angular antes de retornar ao ponto inicial. Na Figura 3.1(c) são mostrados os atratores do mapa quando a dissipação é considerada. Três atratores aparecem: dois atratores gêmeos de período 1 (que são os pontos fixos estáveis $SP_{-,0}$ e $P_{-,0}$) e um atrator quase-periódico. Analisando o perfil do número de rotação em 3.1(d), vemos dois platôs em $\omega = 0/1$ correspondente aos atratores gêmeos, e um platô em $\omega \approx 0,197$ correspondente ao atrator quase-periódico. O atrator quase periódico é a continuação da curva *shearless* quando a dissipação γ é introduzida suavemente, e portanto é chamado de *atrator shearless* (AS) [47, 17, 16, 48, 49]. Quando a dissipação é fraca o suficiente, o AS se assemelha em formato e número de rotação com a curva *shearless* do mapa conservativo com os mesmos parâmetros de controle.

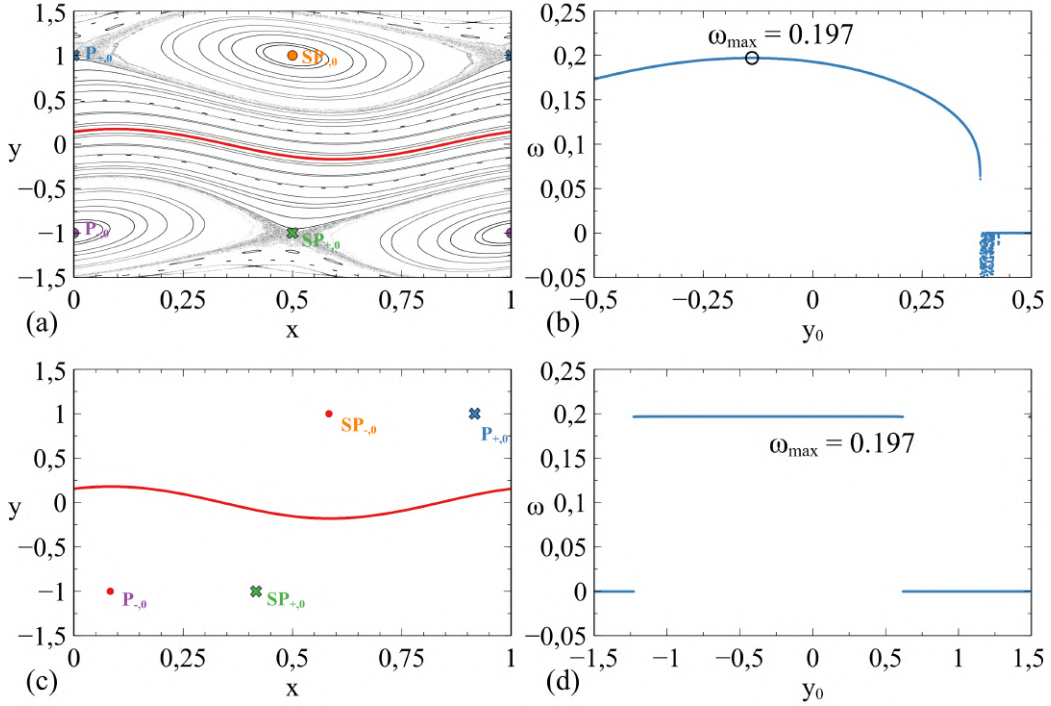


Figura 3.1: Em (a), espaço do MPN conservativo ($\gamma = 0$) com a curva *shearless* em vermelho, e em (b) o respectivo perfil do número de rotação calculado sobre $x_0 = 0,5$. Em (c) os atratores do mapa dissipativo com $\gamma = 0,1$. Em (a) e (c) também são exibidos os pontos fixos do mapa, sendo os estáveis representados por círculos e os instáveis por xis.

A Figura 3.2 mostra as bacias de atração dos atratores da Figura 3.1(c). Note que a variável x foi estendida para o intervalo $[0, 2]$. A região verde é a bacia de atração do atrator periódico $SP_{-,0}$, a região roxa é a bacia de atração do atrator periódico $P_{-,0}$, e a região cinza é a bacia de atração do AS.

Também são exibidas na Figura 3.2 as variedades estáveis e instáveis dos pontos de sela, e indicadas as posições dos quatro pontos fixos. Analisando o ponto de sela $P_{+,0}$, vemos que ele está sobre a fronteira de duas bacias de atração, a do atrator $SP_{-,0}$ e do AS. A fronteira em si é delimitada pela variedade estável, e um segmento da variedade instável converge para o atrator $SP_{-,0}$ enquanto o outro converge para o AS. A situação é análoga para o ponto de sela $SP_{+,0}$.

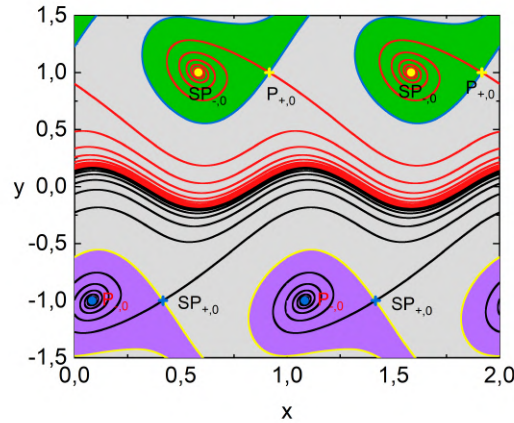


Figura 3.2: Pontos fixos, bacias de atração e variedades dos pontos de sela do MPND. $a = b = 0,2$ e $\gamma = 0,1$.

De maneira geral o efeito da dissipação é transformar alguns dos pontos elípticos em pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis (também chamados de *sinks*) que são órbitas periódicas, e caso a curva *shearless* exista na versão conservativa, ela dá origem ao AS. Genericamente, quanto menor for a dissipação, maior é o número de atratores periódicos pontuais.

A dinâmica observada na Figura 3.2 é razoavelmente simples. Coexistem três atratores, o que configura uma situação de *multiestabilidade*, mas todos

os atratores são regulares. As fronteiras entre as bacias de atração são suaves, o que é uma consequência de não acontecer cruzamentos entre variedades para estes parâmetros. Duas situações que apresentam dinâmica mais complexas são mostradas na Figura 3.3, com $\gamma = 0,1$ e diferentes valores de a e b . No painel (a), para $a = 0,55$ e $b = 0,45$, está presente o AS quase-periódico e atratores gêmeos de período 1, 2 e 3, bem como as respectivas bacias de atração. Agora a fronteira entre as bacias não é mais suave e apresenta uma estrutura fractal, o que é causado pelo cruzamento de variedades. Para esses parâmetros não existe comportamento caótico sustentado, isto é, causado por atratores caóticos, mas existe caos na dinâmica transiente. Outra consequência do cruzamento de variedades é a criação de uma *sela caótica*, um conjunto caótico não atrativo responsável por caos transiente. A sela caótica e seus efeitos serão explorados no Capítulo 5.

A figura 3.3(b) mostra outra configuração com fronteiras fractais de bacias de atração, com $a = 0,59$ e $b = 0,7$. Agora estão presentes dois atratores gêmeos de período 4 e um atrator caótico. Em uma situação como essa existe caos transiente e caos sustentado, cada um com características distintas.

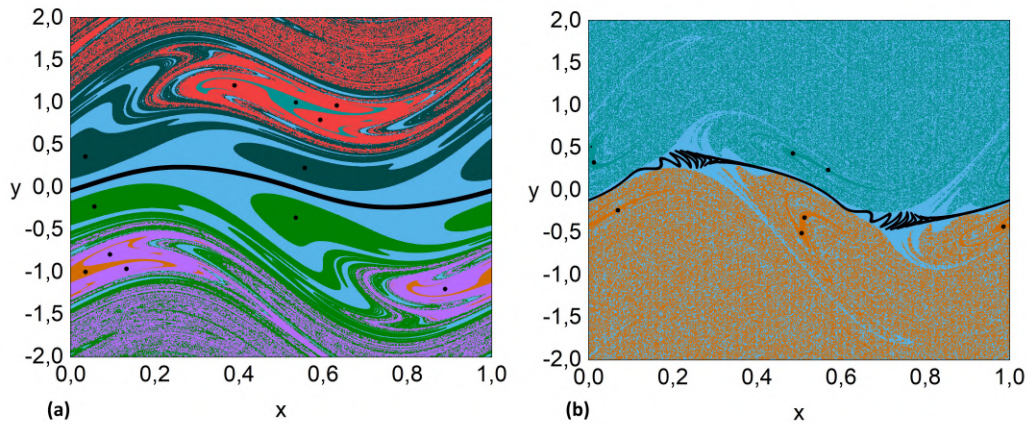


Figura 3.3: Atratores (preto) e bacias de atração correspondentes do MPND. $\gamma = 0,1$ e (a) $a = 0,55$, $b = 0,45$ e (b) $a = 0,59$, $b = 0,7$.

Capítulo 4

Destruição e criação do atrator *shearless* quase-periódico

Neste capítulo é apresentada uma rota de destruição e criação do AS quase-periódico. O ponto de partida é uma modificação do mapa M_{PND} que permite alterar a coordenada y^* dos pontos fixos gêmeos. Um novo parâmetro, r , é adicionado mas o mapa continua simétrico com respeito a S . Variar r causa mudanças no espaço de fases, que incluem a destruição e a criação do AS quase-periódico. Os resultados deste capítulo foram publicados na revista *Physical Review E*, com o título "*Destruction and resurgence of the quasiperiodic shearless attractor*" [47].

4.1 Mapa modificado

Seja a modificação do MPND:

$$M_{PNDr} : \begin{cases} x_{n+1} = x_n - a(y_{n+1} - r)(y_{n+1} + r) \\ y_{n+1} = (1 - \gamma)y_n - b \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad \text{mod}(1), \quad (4.1)$$

onde o novo parâmetro r altera as posições dos pontos fixos. Escolher $r = 1$ recupera o mapa M_{PND} . Pode-se verificar que a transformação S definida pela equação 2.51 é uma simetria de M_{PNDr} . Os pontos fixos do mapa, para $m = 0$, são:

$$P_{\pm} = (x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \left(\pm \frac{\gamma}{b} r \right), \pm r \right). \quad (4.2)$$

Aplicando a transformação S nos pontos fixos da Equação 4.2:

$$SP_{\pm} = (x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \left(\pm \frac{\gamma}{b} r \right) + \frac{1}{2}, \mp r \right). \quad (4.3)$$

A versão conservativa do mapa M_{PND_r} pode ser decompostas em termos de involuções, como foi mostrado para o M_{PN} na Seção 2.3.2. Neste caso são encontrados os pontos indicadores [47]:

$$\mathbf{Z}_0^{\pm} = \left(\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{b}{2} \right), \quad (4.4)$$

e

$$\mathbf{Z}_1^{\pm} = \left(\frac{ar^2}{2} \pm \frac{1}{4}, 0 \right). \quad (4.5)$$

Os pontos indicadores serão utilizados para aproximar a posição do AS quando a dissipação é introduzida. Assumindo que a curva *shearless* se torne o AS, então é razoável de se esperar que os pontos indicadores do mapa conservativo estejam, ao menos, na bacia de atração do AS.

4.2 Resultados

Para induzir mudanças qualitativas no espaço de fases o parâmetro r é variado. Partindo de $r = 1$, diminuir esse parâmetro faz com que os pontos fixos do mapa aproximem-se do atrator quase-periódico.

A análise do efeito dessa variação paramétrica sobre o AS pode ser feita a partir de um diagrama de bifurcação, construído da seguinte forma: fixamos os parâmetros $a = b = 0,2$ e $\gamma = 0,1$; inciamos o cálculo com $r = r_0 = 1$ iterando o mapa a partir do ponto indicador $\mathbf{Z}_0^+$ dado pela equação 4.4 (assumimos que este ponto pertence à bacia de atração do AS caso ele exista), são feitas 10^6 iterações e os últimos 2000 valores de y são armazenados com r_0 . Depois escolhemos $r = r_0 - 10^{-3}$ e repetimos o processo de iteração do ponto indicador. Isso é feito sucessivamente até que seja atingido $r = 0$.

O resultado dessa construção é mostrado na Figura 4.1(a). Podemos ver que de $r = 1$ até um valor crítico $r = 0,63564$ a condição inicial converge para um atrator que se espalha sobre um intervalo de valores de y . Para valores de r entre $0,63564$ e $0,31331$ a condição inicial converge para um ou outro atrator pontual; em uma pequena janela nesse intervalo ela converge para um atrator com coordenada y positiva, mas conforme r é diminuído, a condição

inicial converge para outro atrator pontual com coordenada y negativa. Para valores de r menores que 0,31331, a condição inicial novamente converge para um atrator que se espalha sobre um intervalo de valores de y .

A Figura 4.1(b) mostra o valor do maior expoente de Lyapunov, λ , da órbita correspondente mostrada no diagrama de bifurcação, para cada valor de r . O expoente de Lyapunov verifica se duas órbitas vizinhas divergem exponencialmente uma da outra no tempo. Se as órbitas divergem, $\lambda > 0$, e a dinâmica é caótica. Órbitas que ficam próximas umas das outras resultam em $\lambda = 0$ ou $\lambda < 0$, caracterizando órbitas quase-periódicas e periódicas, respectivamente. Os expoentes de Lyapunov foram calculados de acordo com o algoritmo de Eckmann-Ruelle [50], definidos como:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^{(n)}| \right), \quad j = 1, 2. \quad (4.6)$$

Na Equação 4.6 $\Lambda_j^{(n)}$ são os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n \mathcal{J}(x_i, y_i)$, ver Apêndice B para detalhes do cálculo.

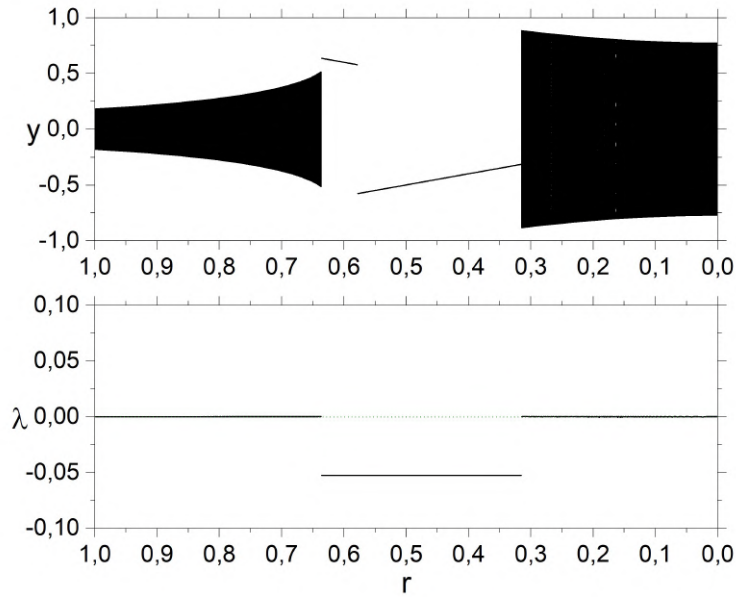


Figura 4.1: (a) diagrama de bifurcação para $a = b = 0,2$ e $\gamma = 0,1$, os pontos são as últimas 2000 iterações do ponto indicador, (b) maior expoente de Lyapunov calculado para a trajetória no diagrama.

Vemos na Figura 4.1(b) que a condição inicial escolhida apresenta comportamento quase-periódico, $\lambda = 0$, quando o atrator não é pontual. Esse atrator é o AS quase-periódico. Nas Figuras 4.2(a) e 4.2(d) o AS é a curva vermelha, para $r = 1, 0$ e $r = 0, 2$. Quando o AS desaparece, λ prontamente cai para um valor negativo, indicando que a condição inicial convergiu para um atrator periódico.

Na Figura 4.2 mostramos os atratores do sistema em vermelho: dois atratores periódicos gêmeos (P_- e SP_-), e o AS, quando ele existe. Também mostramos as respectivas bacias de atração para quatro valores de r . Para $r = 1$, exibido no painel (a), verificamos que o AS coexiste com os atratores periódicos. Os atratores periódicos não aparecem no diagrama de bifurcação pois a condição inicial escolhida, indicada pela estrela azul, está na bacia de atração do AS. Na Figura 4.2(b), para $r = 0, 6$, o AS não existe e a condição inicial converge para o atrator pontual de cima, como confirmado pela Figura 4.1(a). Na Figura 4.2(c) usamos $r = 0, 4$, a mudança no parâmetro causa uma alteração nas bacias de atração e a condição inicial agora converge para o atrator pontual de baixo. Finalmente, na Figura 4.2(d) vemos que o AS está novamente presente. Mesmo que a condição inicial não esteja sobre o AS, ela está na sua bacia de atração, então é possível ver o AS no diagrama de bifurcação.

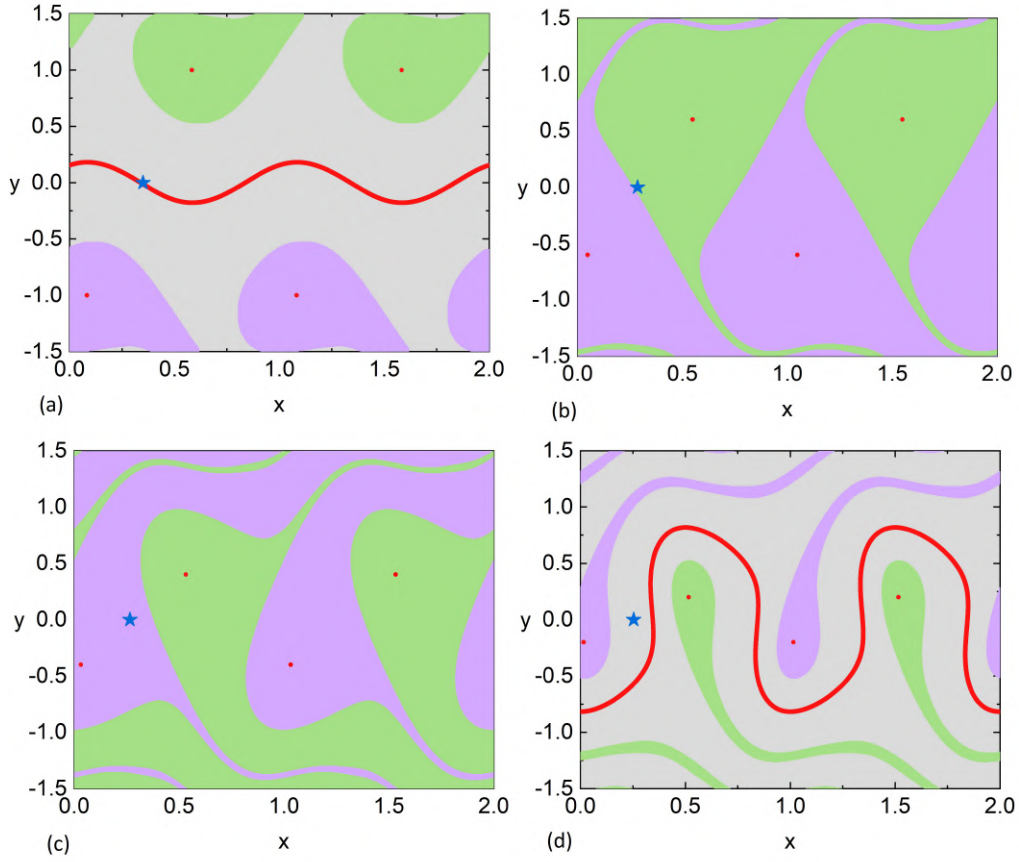


Figura 4.2: Atratores e bacias de atração do mapa $M_{PND r}$ para $a = b = 0,2$ e $\gamma = 0,1$. (a) $r = 1,0$, (b) $r = 0,6$, (c) $r = 0,4$ e (d) $r = 0,2$.

A Figura 4.3(a) mostra as bacias de atração e as variedades dos pontos de sela pouco antes da destruição do AS, para $r = 0,65$. Comparação com a Figura 3.2, em que foi utilizado $r = 1,0$, vemos que diminuir r faz com que as bacias de atração dos atratores periódicos cresçam, enquanto a bacia de atração do AS diminui. Também vemos que o atrator quase-periódico se deforma em direção aos pontos de sela na fronteira das bacias, e é destruído quando eles colidem.

Após a destruição do AS as bacias de atração de P_- e SP_- são modificadas devido ao rearranjo das variedades dos pontos de sela P_+ e SP_+ . Analisando, por exemplo, o ponto de sela P_+ , sua variedade estável é a curva azul na figura 4.3, e a variedade instável a curva vermelha; antes da destruição do AS a variedade estável de P_+ define a fronteira da bacia de atração de SP_- . A

situação é análoga para as órbitas gêmeas, e as bacias de atração dos atratores gêmeos são separadas pela bacia de atração do AS. Após a destruição do AS, as bacias de atração dos atratores gêmeos passam a fazer fronteira entre si, de acordo com ambas as variedades estáveis, e não estão mais limitadas a parte superior ou inferior do espaço de fases.

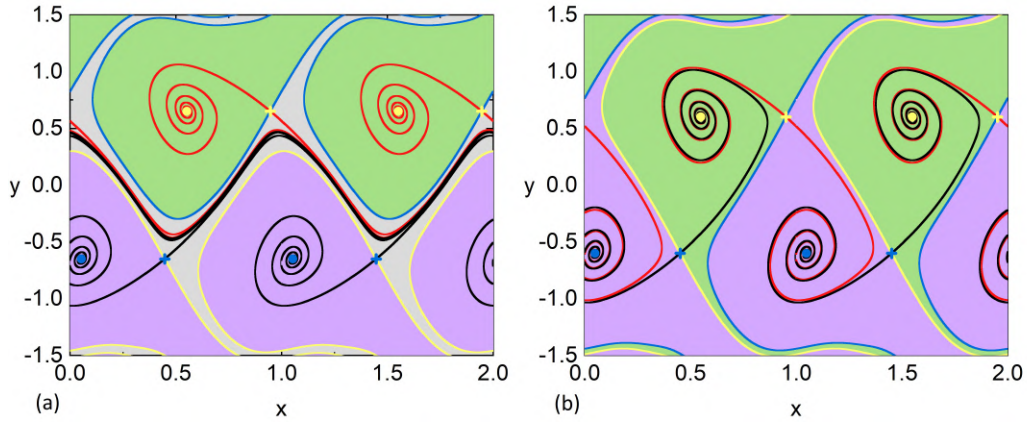


Figura 4.3: Pontos fixos, bacias de atração e variedades dos pontos de sela do mapa M_{PNDr} . $a = b = 0, 2$, $\gamma = 0, 1$ e (a) $r = 0, 65$ e (a) $r = 0, 6$.

Após o reaparecimento do AS verificamos que ocorre uma inversão na posição relativa das bacias de atração dos atratores gêmeos, pois agora a fronteira da bacia do atrator periódico superior é determinada pela variedade estável do ponto de sela inferior, e vice-versa.

Para um atrator caótico, a destruição do atrator após a sua colisão com uma órbita periódica instável na fronteira da bacia de atração é uma *crise de fronteira*. O processo descrito para a destruição do AS é análogo, porém o atrator destruído é quase-periódico. Uma diferença fundamental é que na crise de fronteira, após ser destruído, o atrator caótico dá origem a uma sela caótica, um conjunto caótico não atrativo que gera caos transiente. A destruição do atrator quase-periódico não dá origem a uma sela caótica. Crises e selas caóticas serão consideradas no Capítulo 5.

A Figura 4.4 mostra apenas as variedades instáveis dos pontos de sela para os mesmos parâmetros da Figura 4.2. Na Figura 4.4(a) o AS está presente, desenhado em azul. Um segmento da variedade instável de P_+ (SP_+) espirala em direção ao atrator SP_- (P_-), enquanto o outro segmento se aproxima do

AS. Na Figura 4.4(b) vemos que cada segmento das variedades instáveis de P_+ e SP_+ , após a destruição do AS, converge para um atrator pontual diferente. Na Figura 4.4(c), pouco antes do reaparecimento do AS, vemos que as variedades instáveis de cada ponto de sela se aproximam do ponto de sela oposto, e quando colidem o AS reaparece, e novamente as bacias de atração dos atratores gêmeos são separadas pela bacia de atração do AS. Após o reaparecimento do AS, como na Figura 4.4(d), o ramo da variedade instável de P_+ (SP_+) que no painel (a) convergia para o atrator SP_- (P_-) agora converge para o AS, e o ramo da variedade instável que convergia para o AS agora converge para P_- (SP_-).

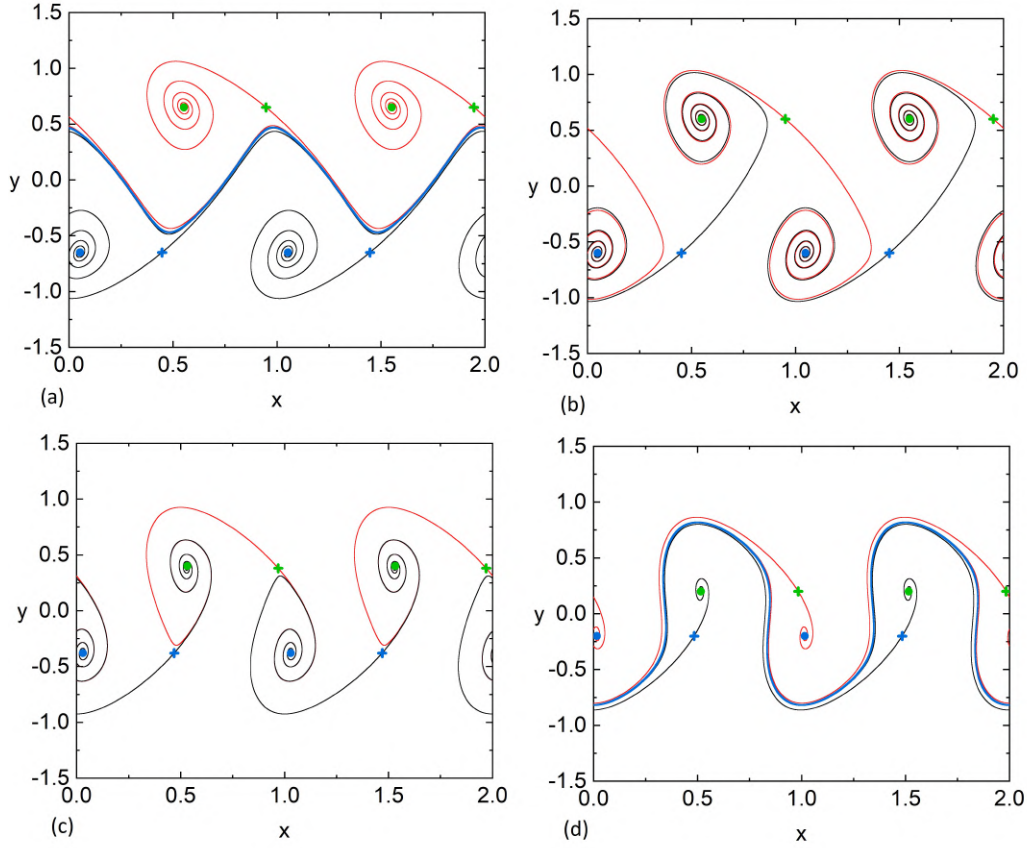


Figura 4.4: Variedades instáveis dos pontos fixos instáveis do mapa $M_{PND}r$ para $a = b = 0,2$, $\gamma = 0,1$ e (a) $r = 0,65$, (b) $r = 0,60$, (c) $r = 0,38$ e (d) $r = 0,20$.

4.3 Conclusões parciais

Neste capítulo descrevemos uma rota de destruição e criação do AS quase-periódico. Modificamos o MPND para controlar a posição vertical dos pontos fixos, sem violar a simetria espacial discreta do mapa. Os pontos fixos são: (i) um atrator periódico SP_2 e um ponto de sela P_1 , ambos com coordenada vertical $y = r$, e (ii) as correspondentes órbitas gêmeas, sendo P_2 o atrator periódico e SP_1 o ponto de sela, ambos com coordenada vertical $y = -r$. Começamos a análise com $r = 1$ e construímos um diagrama de bifurcação variando r até $r = 0$. A partir deste diagrama e da verificação do expoente de Lyapunov, observamos a destruição, e posteriormente ressurgimento, do AS. Após o ressurgimento do AS, as bacias de atração dos atratores periódicos estão orientadas de forma oposta se comparado com a configuração inicial. A análise das variedades dos pontos de sela explica a destruição do AS, quando ele colide com os pontos de sela, e a criação do AS a partir da colisão da variedade instável de cada ponto de sela com o ponto de sela oposto.

Capítulo 5

Selas caóticas e crises interiores

Atratores caóticos podem passar por mudanças qualitativas abruptas conforme um parâmetro de controle é variado. Essas mudanças são chamadas de *crises* [2, 20, 46, 51], e geralmente podem ser observadas em diagramas de bifurcação.

Na investigação numérica de atratores, geralmente descarta-se um longo transiente, isto é, uma sequência inicial de pontos, para que apenas as propriedades assintóticas sejam estudadas. Uma trajetória em um atrator caótico evolui de forma caótica para tempos arbitrariamente longos, esse tipo de comportamento pode ser classificado como *caos sustentado* [51]. Por outro lado, o comportamento caótico também pode ser não-atrativo. Neste caso uma trajetória apresenta comportamento caótico por um tempo finito antes de convergir para um atrator regular, ou mesmo para um atrator caótico com características diferentes do comportamento caótico inicial, chamado de *caos transiente* [2, 51]. Outra possibilidade é que após o transiente caótico a trajetória escape para o infinito, como nos mapas do padeiro e ferradura de Smale [2, 51], ou em sistemas Hamiltonianos abertos [2, 51]. O caos transiente é uma consequência da presença de um conjunto invariante caótico não atrativo no espaço de fases. Outra consequência são fronteiras fractais de bacias de atração [2, 51].

Em um diagrama de bifurcação uma coordenada do atrator é desenhada contra o parâmetro de controle. Tipicamente, para diversos valores do parâmetro de controle o atrator caótico cresce ou desaparece abruptamente. Os dois tipos mais comuns de crise são *crises interiores* e *crises de fronteira* [2, 20, 46, 51]. Esses dois tipos de crise estão relacionadas com conjuntos caóticos não atrativos chamados de *selas caóticas*.

Uma sela caótica é composta por um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis e os pontos homoclínicos e heteroclínicos provenientes das intersecções de suas variedades [51]. O nome *sela* é devido ao fato de que em cada ponto desse conjunto pode ser associado um subespaço instável e um subespaço estável, tal como para pontos hiperbólicos. A variedade estável (instável) de uma sela caótica é a união das variedades estáveis (instáveis) das órbitas periódicas instáveis nela contida.

Na crise de fronteira [15] o atrator caótico colide com uma órbita periódica instável (ou a sua variedade estável) na fronteira de sua bacia de atração e perde sua estabilidade. O conjunto de órbitas periódicas instáveis que compunham o atrator passa a ser uma sela caótica [51]. Na crise interior o atrator caótico colide com uma sela caótica (ou sua variedade estável) e ocorre um repentino aumento no tamanho do atrator. Isso ocorre pois as órbitas periódicas instáveis da sela passam a compor o atrator caótico, e novas órbitas periódicas instáveis também são criadas por cruzamentos heteroclínicos [51].

Neste capítulo serão discutidas dois mecanismos que causam o aparecimento de selas caóticas no MPND, seus efeitos na dinâmica do sistema e crises interiores.

Os resultados apresentados neste capítulo referem-se às selas caóticas no MPND, e foram publicados na revista *Physical Review E* no artigo intitulado "Chaotic saddles and interior crises in a dissipative nontwist system" [52].

5.1 Bifurcações dos pontos fixos

Quando ocorre uma mudança na estabilidade de um ponto fixo conforme um parâmetro do sistema é variado, ou quando pontos fixos aparecem ou desaparecem, é dito que ocorreu uma *bifurcação* [2, 46, 51]. Especificamente, uma bifurcação *sela-nó* ocorre quando um dos autovalores da matriz Jacobiana avaliada no ponto fixo cruza o círculo unitário complexo em $\lambda = 1$ e o outro autovalor tem módulo menor do que um; então um ponto fixo estável e um ponto instável são criados ou destruídos. Quando o autovalor cruza o círculo complexo unitário em $\lambda = -1$, com o segundo autovalor com módulo menor do que um, ocorre uma bifurcação de *duplicação de período*.

Nesta seção serão discutidas as bifurcações que ocorrem com os pontos fixos gêmeos $P_{\pm,m}$ e $SP_{\pm,m}$, dados pelas Equações 3.13 e 3.14, respectiva-

mente. Na Seção 3.2.1 foi mostrado que os autovalores de $P_{+,m}$ e $SP_{+,m}$ são iguais, e o mesmo é válido para os autovalores de $P_{-,m}$ e $SP_{-,m}$. Isso implica que os pontos fixos gêmeos passam por bifurcações para os mesmos valores dos parâmetros de controle.

Reescrevendo as equações dos autovalores:

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm}(P_{+,m}; a, b, \gamma) &= \lambda_{\pm}(SP_{+,m}; a, b, \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 - \gamma + f(a, b, \gamma) \pm \sqrt{4(\gamma - 1) + (-2 + \gamma - f(a, b, \gamma))^2} \right],\end{aligned}\quad (5.1)$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm}(P_{-,m}; a, b, \gamma) &= \lambda_{\pm}(SP_{-,m}; a, b, \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 - \gamma - f(a, b, \gamma) \pm \sqrt{4(\gamma - 1) + (-2 + \gamma + f(a, b, \gamma))^2} \right],\end{aligned}\quad (5.2)$$

onde

$$f(a, b, \gamma) := 4\pi b \sqrt{a(a - m) \left(1 + \frac{\gamma^2}{ab^2}(m - a) \right)}.\quad (5.3)$$

Para avaliar quando os pontos fixos são criados (ou destruídos) por uma bifurcação sela-nó toma-se $\lambda_{\pm}(P_{+,m}; a, b, \gamma) = +1$ e $\lambda_{\pm}(P_{-,m}; a, b, \gamma) = +1$. Resolvendo as equações resultantes utilizando um sistema algébrico computacional e isolando o parâmetro b , encontramos que $\lambda_{-}(P_{+,m}; a, b, \gamma) = +1$ e $\lambda_{-}(P_{-,m}; a, b, \gamma) = +1$ não possuem soluções reais, enquanto $\lambda_{+}(P_{+,m}; a, b, \gamma) = +1$ e $\lambda_{+}(P_{-,m}; a, b, \gamma) = +1$ fornecem as duas mesmas soluções

$$b_{SN,m}(a, \gamma) = \pm \gamma \sqrt{1 - \frac{m}{a}},\quad (5.4)$$

e o outro autovalor avaliado sobre o ponto fixo e os parâmetros dados por 5.4 resulta em $\lambda_{-}(P_{+,m}; b_{SN,m}(a, \gamma)) = \lambda_{-}(P_{-,m}; b_{SN,m}(a, \gamma)) = 1 - \gamma$, que possui módulo menor que um, implicando que todos os pontos fixos do mapa, para um dado inteiro m , passam pela bifurcação sela-nó para os mesmos valores de parâmetros.

Analogamente, tomando $\lambda_{\pm}(P_{+,m}; a, b, \gamma) = -1$ e $\lambda_{\pm}(P_{-,m}; a, b, \gamma) = -1$, encontra-se que $\lambda_{+}(P_{+,m}; a, b, \gamma) = -1$ e $\lambda_{+}(P_{-,m}; a, b, \gamma) = -1$ não possuem soluções reais, enquanto $\lambda_{-}(P_{+,m}; a, b, \gamma) = -1$ e $\lambda_{-}(P_{-,m}; a, b, \gamma) = -1$ fornecem as mesmas soluções

$$b_{PD,m}(a, \gamma) = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-4 + 4\gamma - \gamma^2(1 + 4a^2\pi^2 - 8am\pi^2 + 4m^2\pi^2)}{a(m-a)}}, \quad (5.5)$$

e o outro autovalor avaliado sobre o ponto fixo e os parâmetros dados por 5.5 resulta em $\lambda_+(P_{+,m}; b_{PD,m}(a, \gamma)) = \lambda_+(P_{-,m}; b_{PD,m}(a, \gamma)) = \gamma - 1$, que possui módulo menor que um, mostrando que os pontos fixos gêmeos para dado m também passam por duplicação de período para o mesmo valor dos parâmetros de controle. Fixando γ , para um dado valor de m , a Equação 5.4 define uma curva no plano (a, b) em que os pontos fixos são criados. De forma similar, a Equação 5.5 define a curva em que os pontos fixos passam por duplicação de período. Consideraremos apenas valores positivos de b , de modo que o sinal negativo nas Equações 5.4 e 5.5 são descartados.

A Figura 5.1 mostra algumas curvas de bifurcações sela-nó e de duplicação de período com $\gamma = 0.1$. As linhas cheias são curvas de bifurcação sela-nó e as linhas tracejadas são as curvas de bifurcação de duplicação de período.

As bifurcações dos pontos fixos com $m = 0$ são representadas em preto. Para esse valor de m , a curva de bifurcação sela-nó não depende de a e é uma linha reta em um valor constante de b , uma vez que $B_{SN,m=0}(a, \gamma) = \gamma$ escolhendo $m = 0$ na Equação 5.4. Também vemos na Figura 5.1 que a curva de bifurcação de duplicação de período aparece com dois segmentos simétricos com respeito a $a = 0$.

Para $m = 1$ a Equação 5.4 resulta em:

$$b_{SN,m=1}(a, \gamma) = \gamma \sqrt{1 - \frac{1}{a}}. \quad (5.6)$$

Para valores positivos de a , essa expressão assume valores reais para $a \geq 1$ e assintoticamente se aproxima de $b_{SN,m=1}(a, \gamma) = \gamma$ conforme $a \rightarrow \infty$. A Equação 5.6 também assume valores reais para todo $a < 0$, e se aproxima de $b_{SN,m=1}(a, \gamma) = \gamma$ conforme $a \rightarrow -\infty$, e $b_{SN,m=1}(a, \gamma) \rightarrow \infty$ conforme $a \rightarrow 0$. As curvas de bifurcação para $m = 1$ não são simétricas com respeito ao eixo $a = 0$, como foi o caso para $m = 0$. Entretanto, as curvas de bifurcação $m = -1$ são reflexões das curvas de bifurcação $m = 1$ com respeito ao eixo $a = 0$.

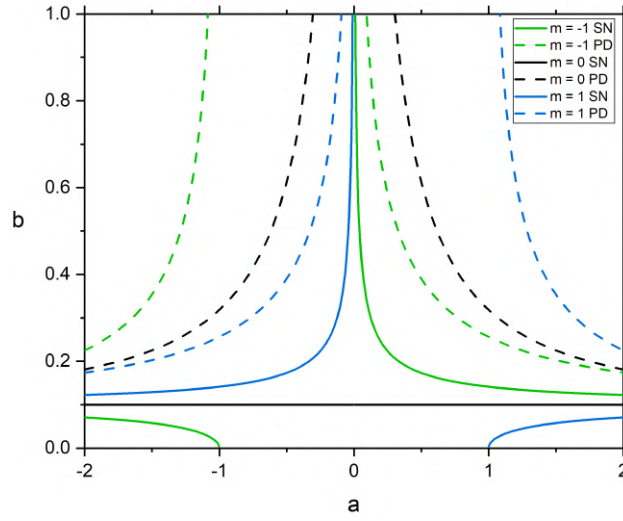


Figura 5.1: Curvas de bifurcações sela-nó e de duplicação de período para as famílias de pontos fixos com $m = -1, 0, 1$ do MPND, com $\gamma = 0, 1$

Restringiremos nossa análise para valores positivos de a e b . A Figura 5.2 mostra novamente curvas de bifurcação para algumas famílias de pontos fixos no quadrante $a, b \in (0, 1]$ do espaço de parâmetros.

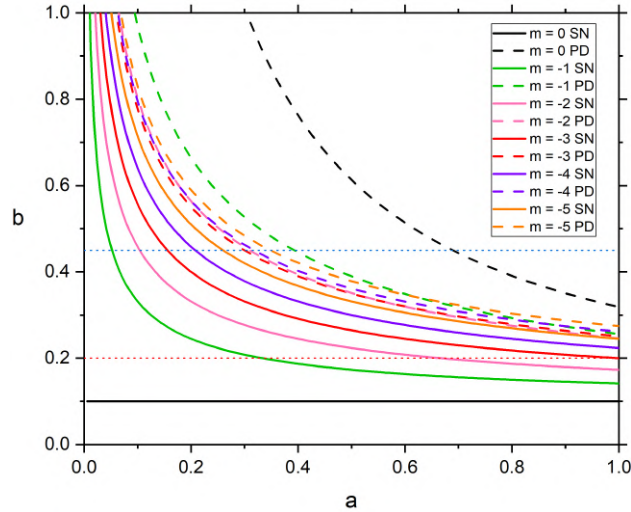


Figura 5.2: Curvas de bifurcações sela-nó e de duplicação de período para as famílias de pontos fixos com $m = -5$ a $m = 0$ do MPND, com $\gamma = 0.1$. As curvas pontilhadas vermelha e azul são $b = 0, 2$ e $b = 0, 45$, que serão explorados posteriormente.

Para visualizar os pontos fixos do mapa e suas mudanças de estabilidade conforme a é variado, desenhamos a coordenada y de cada um deles, desde que as coordenadas sejam reais. Distinguimos a estabilidade de acordo com os autovalores, quanto o ponto fixo é estável é representado em azul, e quando é instável é representado em vermelho. Os diagramas de estabilidade de $P_{\pm}$ e $SP_{\pm}$ são mostrados na Figura nos painéis (a) e (b), respectivamente, para $b = 0, 2$.

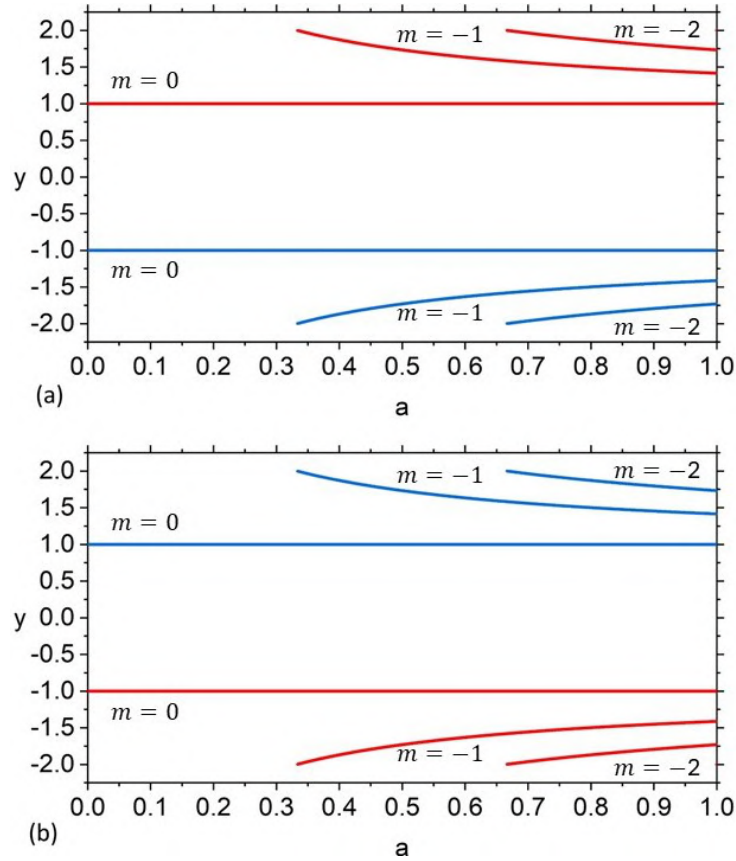


Figura 5.3: Diagrama de estabilidade dos pontos fixos para $\gamma = 0, 1$ e $b = 0, 2$. Azul representa estabilidade e vermelho instabilidade. (a) $P_{\pm}$, (b) $SP_{\pm}$.

Analisando a Figura 5.3 os pontos fixos com $m = 0$ aparecem como as retas de y constante. Os pontos fixos com $m = -1$ são criados aproximadamente em $a = 0,35$. Esse resultado está de acordo com a Figura 5.2, onde observamos a reta vermelha pontilhada em $b = 0,2$ cruzando a curva de

bifurcação sela-nó de $m = -1$, desenhada em verde, aproximadamente em $a = 0,35$. A criação dos pontos fixos com $m = -2$ é identificada na Figura 5.2 onde a reta vermelha pontilhada cruza a curva de bifurcação sela-nó correspondente, em torno de $a = 0,7$, o que está de acordo com a Figura 5.3. Nota-se também que $P_{+,m}$ e $SP_{+,m}$ são sempre instáveis para os parâmetros considerados, enquanto $P_{-,m}$ e $SP_{-,m}$ são sempre estáveis

A Figura 5.4 apresenta os diagramas de estabilidade para um valor maior de perturbação, $b = 0,45$. Agora vemos a criação de muitos outros pontos fixos, chegando a $m = -20$. Também vemos pontos estáveis se tornando instáveis, isso ocorre após a bifurcação de duplicação de período. Por exemplo, $P_{-,m=0}$ e $SP_{-,m=0}$ se tornam instáveis próximos de $a = 0,7$, o que está de acordo com o resultado da Figura 5.2, onde vemos a reta azul pontilhada em $b = 0,45$ cruzando a curva de bifurcação de duplicação de período para $m = 0$.

Quanto maior o valor de $|m|$, mais estreito é o intervalo de parâmetros para o qual os pontos fixos estáveis criados pela bifurcação sela-nó mantêm a sua estabilidade. Quanto maior o valor de b , mais famílias de pontos fixos são criadas conforme a é variado.

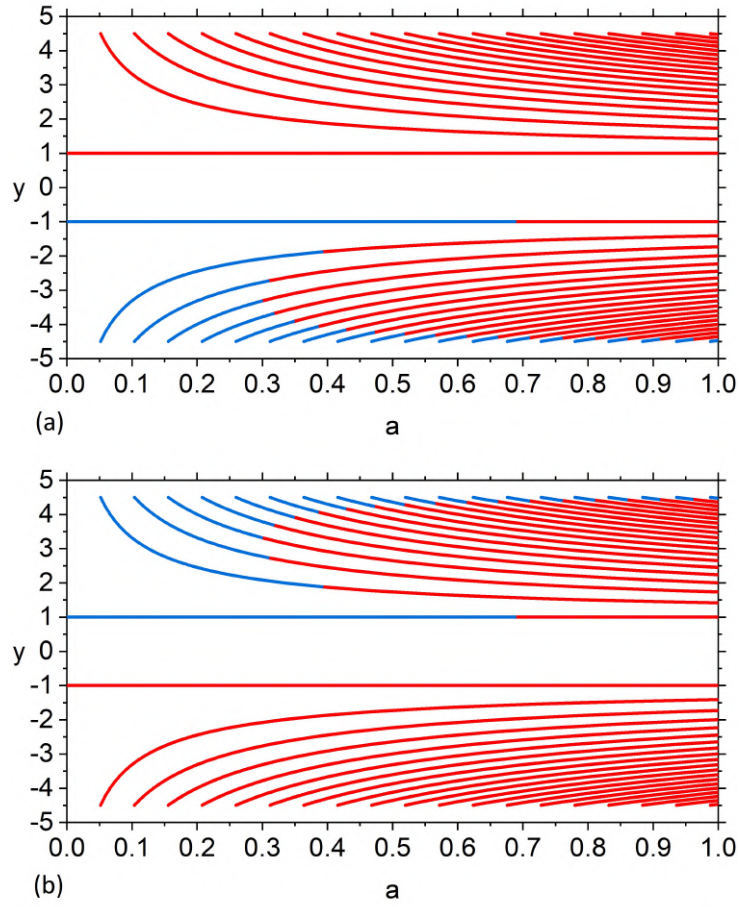


Figura 5.4: Diagrama de estabilidade dos pontos fixos para $\gamma = 0, 1$ e $b = 0, 45$. Azul representa estabilidade e vermelho instabilidade. (a) $P_{\pm}$, (b) $SP_{\pm}$.

Apesar de esta análise de bifurcações ter sido feita apenas para os pontos fixos do mapa, órbitas periódicas gêmeas de períodos mais altos também aparecem no sistema e exibem bifurcações semelhantes. Entretanto o tratamento analítico dessas órbitas não é viável devido a complexidade das equações do mapa.

5.2 Criação das selas caóticas

Dois tipos qualitativamente diferentes de selas caóticas são observadas

no MPND, as chamamos de *sela caótica global* (SCG) e *sela caótica local* (SCL). Nesta seção discutimos como esses conjuntos caóticos não atrativos são criados.

A SCG é uma sela caótica com duas partes que existe em um grande intervalo de parâmetros de controle, quando comparada com a SCL. Uma das suas partes ocupa a metade superior do espaço de fases, enquanto a outra ocupa a metade inferior e elas são separadas pelo AS. Esta sela está relacionada com as órbitas gêmeas instáveis, e é responsável pela crise interior discutida na Seção 5.4.

Para entender como a SCG é criada, fixamos $\gamma = 0,1$ e escolhemos um valor para o parâmetro b . Desejamos ver simultaneamente todos os atratores do sistema e suas bifurcações conforme a é variado de 0 a 1. Para fazer isso começamos com $a = 0$ e distribuimos 75 condições iniciais em uma reta que cruza o espaço de fases de $(x, y) = (0, -10)$ a $(x, y) = (1, 10)$. Iteramos cada condição inicial 10^4 vezes e guardamos as últimas 10 iterações da coordenada y . Então partimos para o próximo valor de a e as mesmas condições iniciais são iteradas novamente. O processo é repetido até que seja alcançado $a = 1$. O gráfico resultante das últimas iterações das coordenadas y contra a é um diagrama de bifurcações global, e é mostrado na Figura 5.5(a) para $b = 0,2$ e na Figura 5.5(b) para $b = 0,45$.

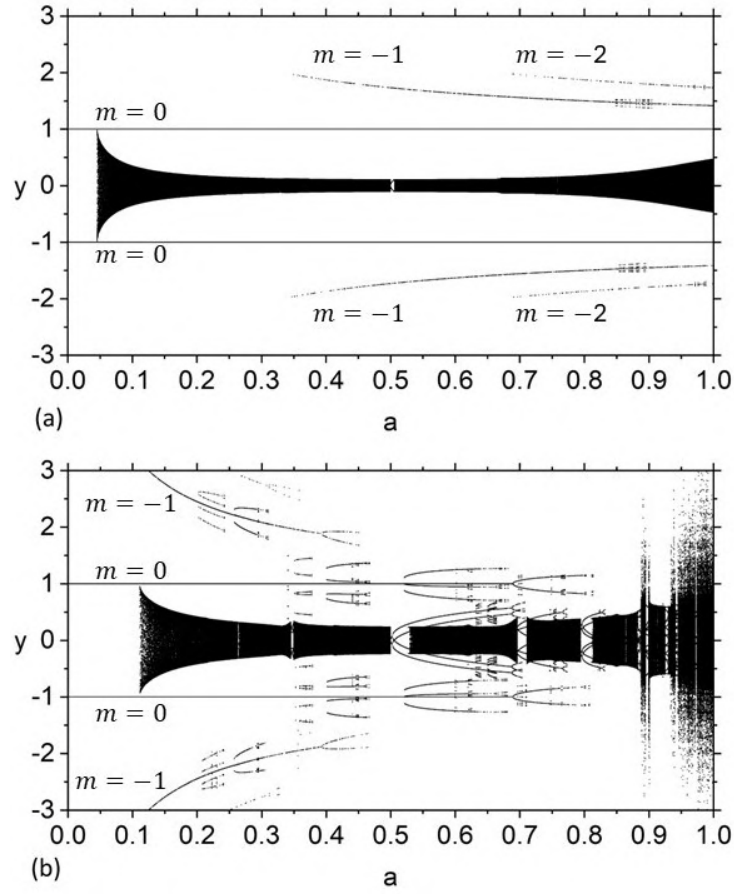


Figura 5.5: Diagrama de bifurcação global para $\gamma = 0, 1$ e (a) $b = 0, 2$, (b) $b = 0, 45$.

Analisando a Figura 5.5(a) podemos ver todos os pontos fixos estáveis apresentados na Figura 5.1. Adicionalmente o AS aparece na região $|y| < 1$. Também vemos alguns atratores de período mais alto aproximadamente em $a = 0, 85$ e próximos dos atratores pontuais com $m = -1$.

Na Figura 5.5(b), onde é considerado um valor maior da perturbação, $b = 0, 45$, vemos um número maior de atratores pontuais, de diversos períodos, surgindo via bifurcações sela-nó. Os pontos fixos estáveis com $m = 0$, $m = -1$ e $m = -2$ podem ser vistos, eles sofrem bifurcações de duplicação de período e se tornam instáveis, em acordo com os resultados das Figuras 5.2 e 5.4. Também vemos um aumento repentino no tamanho do AS em torno de $a = 0, 9$, causado por uma crise interior.

Nos diagramas de bifurcação global na Figura 5.5 alguns atratores pontuais aparecem como linhas pontilhadas, o que dá a impressão de que eles estão aparecendo e desaparecendo conforme a é variado. Entretanto, este comportamento ocorre pois as bacias de atração desses atratores são muito pequenas quando comparadas com as de outros atratores, então quando o diagrama é computado, pode acontecer que nenhuma condição inicial caia sobre alguma bacia de atração.

Com cada bifurcação sela-nó novas órbitas periódicas instáveis são criadas. Os cruzamentos homoclínicos e heteroclínicos das suas variedades estáveis e instáveis criam uma sela caótica, permitindo fenômenos como caos transiente e fronteiras fractais de bacias.

O segundo tipo de sela caótica observada no sistema existe apenas em pequenos intervalos de parâmetros, dentro de *janelas periódicas* [51], e por isso chamamos essas selas caóticas de locais. Uma janela periódica começa quando um atrator caótico perde sua estabilidade devido a uma bifurcação sela-nó que cria um par de órbitas periódicas, uma estável e uma instável. Então a variedade estável do ponto de sela criado na bifurcação colide com o atrator caótico, caracterizando uma crise de fronteira. O atrator caótico se torna a SCL, e o atrator periódico passa por uma cascata de duplicação de período conforme o parâmetro de controle é variado, se tornando um atrator caótico composto por diversos segmentos, chamados de bandas. A janela periódica acaba em uma crise interior, quando o atrator em bandas colide com a SCL e volta a ser um atrator caótico maior, com um único segmento.

O diagrama de bifurcação da Figura 5.6 mostra o surgimento de uma janela periódica.

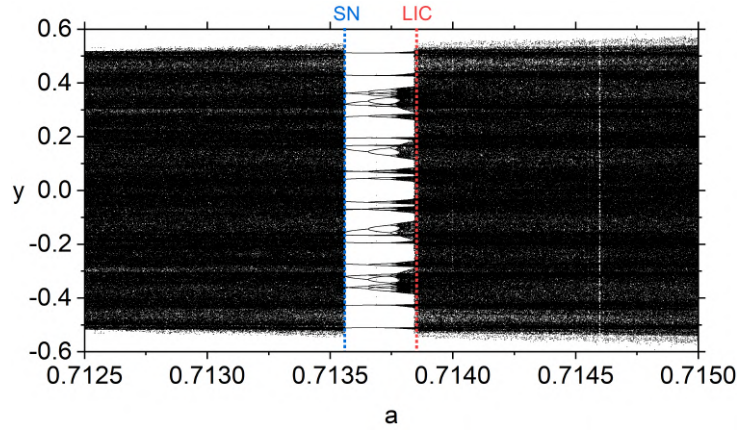


Figura 5.6: Diagrama de bifurcação global para $\gamma = 0,1$ e $b = 0,58$. A linha pontilhada azul indica o início da janela periódica de período 26, quando ocorre uma bifurcação sela-nó. A linha pontilhada vermelha indica o final da janela periódica, com uma crise interior local.

Para $a = 0,7135$, antes da bifurcação sela-nó, o sistema apresenta um atrator caótico e uma SCG, mostrados na Figura 5.7(a). Os detalhes dos métodos numéricos utilizados para aproximar selas caóticas são discutidos no Apêndice C. Na bifurcação sela-nó um atrator de período 26 é criado junto com uma órbita periódica instável de período 26. O atrator periódico passa por uma cascata de duplicação de período criando um atrator caótico com 26 bandas, que coexiste com duas selas caóticas. Uma delas é a SCG, que já existia antes da bifurcação sela-nó, e a outra é a SCL, criada na bifurcação sela-nó. Isso é mostrado na Figura 5.7(b), para $a = 0,7138$. O atrator caótico em bandas colide com a SCL, gerando um atrator caótico com apenas uma banda, mostrado na Figura 5.7(c) para $a = 0,71385$. O aumento no tamanho do atrator caótico é um sinal da crise interior, e como esta crise ocorreu a partir da colisão com a SCL, a chamamos de crise interior local. A Figura 5.7(d) mostra uma ampliação da região delimitada pelo retângulo na Figura 5.7(b).

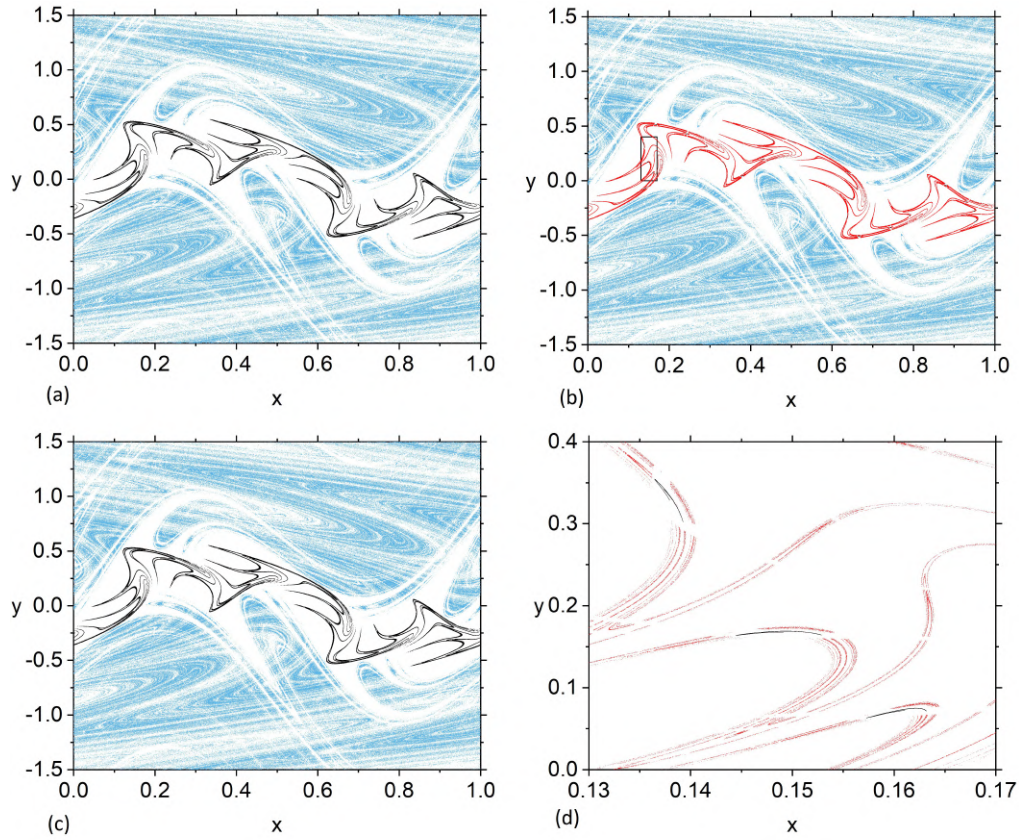


Figura 5.7: Atratores e selas caóticas para $\gamma = 0,1$, $b = 0,58$ e (a) $a = 0,7135$, (b) $a = 0,7138$, (c) $a = 0,71385$, (d) $a = 0,7138$ amplificado próximo a três bandas do atrator caótico. A SCG está em azul e a SCL em vermelho. Os atratores estão em preto.

5.3 Análise do transiente

Em sistemas dissipativos sem selas caóticas os transientes são tipicamente curtos e não apresentam características caóticas. Selas caóticas são responsáveis por transientes mais longos e caóticos [51]. Condições iniciais que são próximas da variedade estável da sela caótica, ou da sela em si, passam algum tempo na vizinhança da sela antes de se afastarem pela variedade instável. A *taxa de escape* é uma medida do quão rápido isso ocorre. Para estimar a taxa de escape de uma sela caótica, quando existe apenas uma delas no sistema, como na Figura 5.7(a) e na Figura 5.7(c), dis-

tribuímos $N_0 = 10^6$ condições iniciais na região do espaço de fases definida por $0 < x < 1$ e $|y| < 1.5$, excluindo quaisquer atratores contidos nessa região (ver o Apêndice C para detalhes). Então iteramos cada condição inicial, elas passam por uma vizinhança da sela caótica e depois convergem para o atrator. Seja $N(n)$ o número de condições iniciais que não escaparam para o atrator após n iterações do mapa. Conforme n aumenta, observamos um decaimento exponencial de $N(n)$,

$$N(n) \sim e^{-\kappa n}, \quad (5.7)$$

onde κ é a taxa de escape da sela. Por essa definição $N(n)$ decresce por um fator de $1/e$ após $1/\kappa$ iterações, o que quer dizer que a maioria das trajetórias converge para o atrator após $1/\kappa$ iterações. Assim, estimamos o tempo médio do transiente como

$$\tau = \frac{1}{\kappa}. \quad (5.8)$$

Começamos a análise com os tempos de transiente do sistema para parâmetros em que a janela periódica não existe. Nas Figuras 5.8(a) e 5.8(b) estimamos a taxa de escape da SCG antes da janela periódica (Figura 5.7(a)) e depois da janela periódica (Figura 5.7(c)). A estimativa foi feita a partir do ajuste dos dados numéricos por um decaimento exponencial. Ambas as taxas de escape são comparáveis, evidenciando a similaridade das SCGs. Também calculamos os tempos médios do transiente e vemos que, para ambos os parâmetros considerados, essas quantias são iguais.

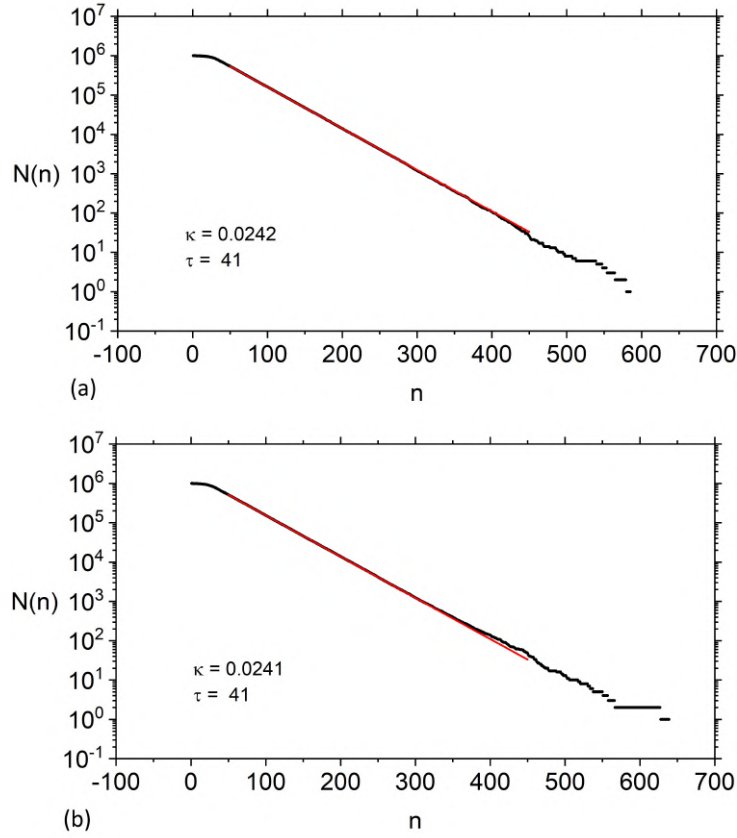


Figura 5.8: Estimativa da taxa de escape da SCG e tempo médio de transiente. $\gamma = 0,1$, $b = 0,58$ e (a) $a = 0,7135$, antes da janela periódica, e (b) $a = 0,71385$ depois da crise interior local. Em vermelho, o ajuste exponencial do decaimento.

Outra forma de visualizar os tempos de transiente é colorindo cada condição inicial de acordo com o número de iterações necessárias para atingir o atrator. Essa construção é mostrada na Figura 5.9(a) e na Figura 5.9(b), novamente para $a = 0,7135$, antes da janela periódica, e $a = 0,71385$, depois da crise interior local. A estrutura que se revela no espaço de fases a partir das condições iniciais com maior tempo de escape é semelhante à variedade estável da SCG, uma vez que condições iniciais próximas da variedade estável demoram mais para chegar ao atrator.

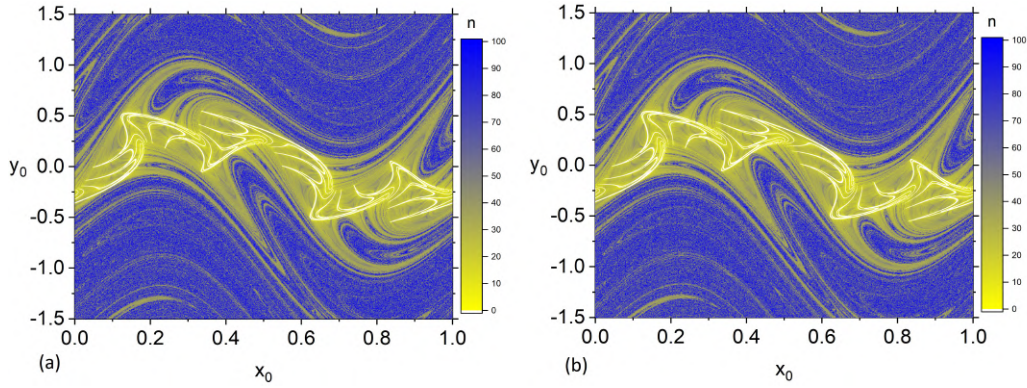


Figura 5.9: Condições iniciais coloridas de acordo com o número de iterações necessárias para atingir o atrator. $\gamma = 0,1$, $b = 0,58$ e (a) $a = 0,7135$, antes da janela periódica, e (b) $a = 0,71385$ depois da crise interior local.

Agora analisamos o comportamento transiente dentro da janela periódica, quando tanto a SCG quanto a SCL estão presentes, com $a = 0,7138$. Para calcular o tempo médio do transiente repetimos o procedimento para calcular a taxa de escape da SCG fora da janela de periodicidade. Entretanto, agora o sistema possui duas selas caóticas, e a quantidade τ obtida pelo ajuste exponencial não representa a taxa de escape de nenhuma delas, mas o seu inverso $1/\tau$ fornece uma estimativa do tempo médio do transiente. O resultado é mostrado na Figura 5.10(a), e vemos que a presença da SCL gera um transiente mais longo. Então repetimos o mesmo procedimento mas com uma condição de escape diferente. Na Figura 5.10(a) a condição de escape foi atingir o atrator, e na Figura 5.10(b) a condição de escape foi atingir a variedade instável da SCL, obtida pelo método *sprinkler* (ver Apêndice C). Vemos que a taxa de escape e o tempo médio de transiente obtidos com essa condição de escape (Figura 5.10(b)) são os mesmos obtidos para a SCG, conforme Figura 5.8. Assim o transiente caótico pode ser decomposto em duas fases: a fase rápida causada pela SCG, com tempo médio do transiente de 41 iterações, e a fase lenta causada pela SCL, com tempo médio do transiente de 304 iterações.

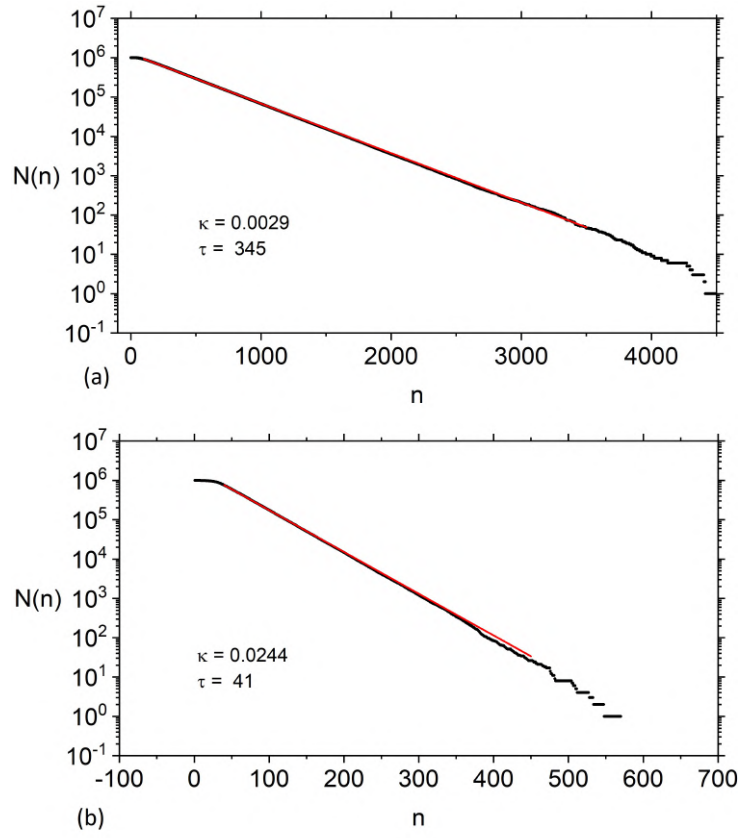


Figura 5.10: Estimativa das taxas de escape para $\gamma = 0,1$, $b = 0,58$ e $a = 0,7138$, dentro da janela periódica. (a) condição de escape é atingir o atrator, e (b) condição de escape é atingir a variedade instável da SCL. Em vermelho, o ajuste exponencial do decaimento.

Na Figura 5.11 colorimos as condições iniciais de acordo com o número de iterações para atingir o atrator no painel (a), e de acordo com o número de iterações para atingir a variedade instável da SCL no painel (b). Vemos que a Figura 5.11(b) é muito semelhante às Figuras 5.9(a) e 5.9(b)

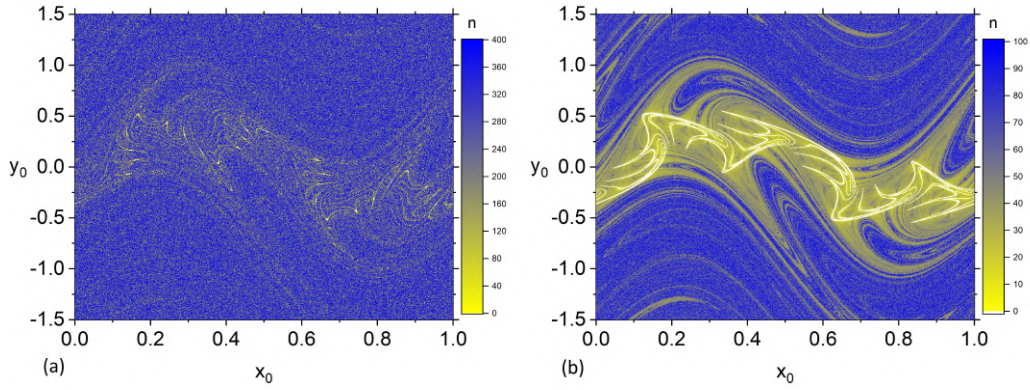


Figura 5.11: Condições iniciais coloridas de acordo com o número de iterações necessárias para atingir (a) o atrator e (b) a variedade instável da SCL. $\gamma = 0,1$, $b = 0,58$ e $a = 0,7138$.

5.4 Intermitência induzida por crise

Na seção anterior exploramos uma crise interior local, que ocorre quando o atrator caótico colide com a SCL e mostramos como o tempo de transiente é afetado pela presença das duas selas caóticas. Nesta seção apresentaremos uma crise interior global, causada pela colisão do atrator caótico com a SCG, para ilustrar o fenômeno de intermitência induzida por crise [51].

O diagrama de bifurcação na Figura 5.12 exibe uma crise interior global, com $b = 0,55$. Ele foi construído com uma única condição inicial iterada 10^4 vezes para cada valor de a ; a coordenada y das últimas 5000 iterações são mostradas. Vemos que conforme o parâmetro a é variado ocorre um aumento repentino do tamanho do atrator, o que é consequência da crise interior global.

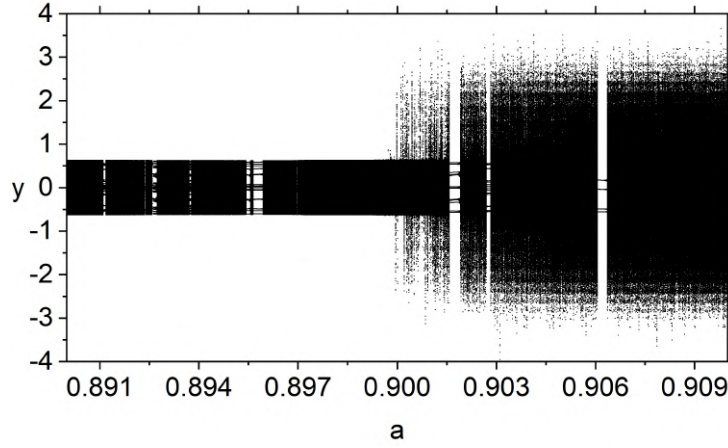


Figura 5.12: Diagrama de bifurcação para $b = 0,55$. O aumento repentino no tamanho do atrator é uma consequência da crise interior global.

Para estimar numericamente o valor de a para o qual a crise acontece, fazemos um grande número de iterações (10^7) de uma condição inicial para 1000 valores de a entre $a = 0,897$ e $a = 0,9$. Consideramos que a crise ocorreu quando a trajetória visita alguma região do espaço de fases com $|y| > 1$. Com esse procedimento determinamos o valor crítico de a como aproximadamente $a_c \approx 0,89954425$.

A Figura 5.13(a) mostra o atrator caótico e a SCG para $a = 0,899$, imediatamente antes da crise. As Figuras 5.13(b-d) mostram o atrator pós-crise para $a = 0,9$, $a = 0,901$ e $a = 0,903$, respectivamente. Para desenhar os atratores, 10^6 iterações do mapa foram consideradas. Vemos que nas situações pós-crise as trajetórias no atrator visitam regiões que anteriormente eram ocupadas pela SCG. Nos referimos a essas visitas como explosões (em inglês, *bursts*) e elas ocorrem de forma intermitente no tempo.

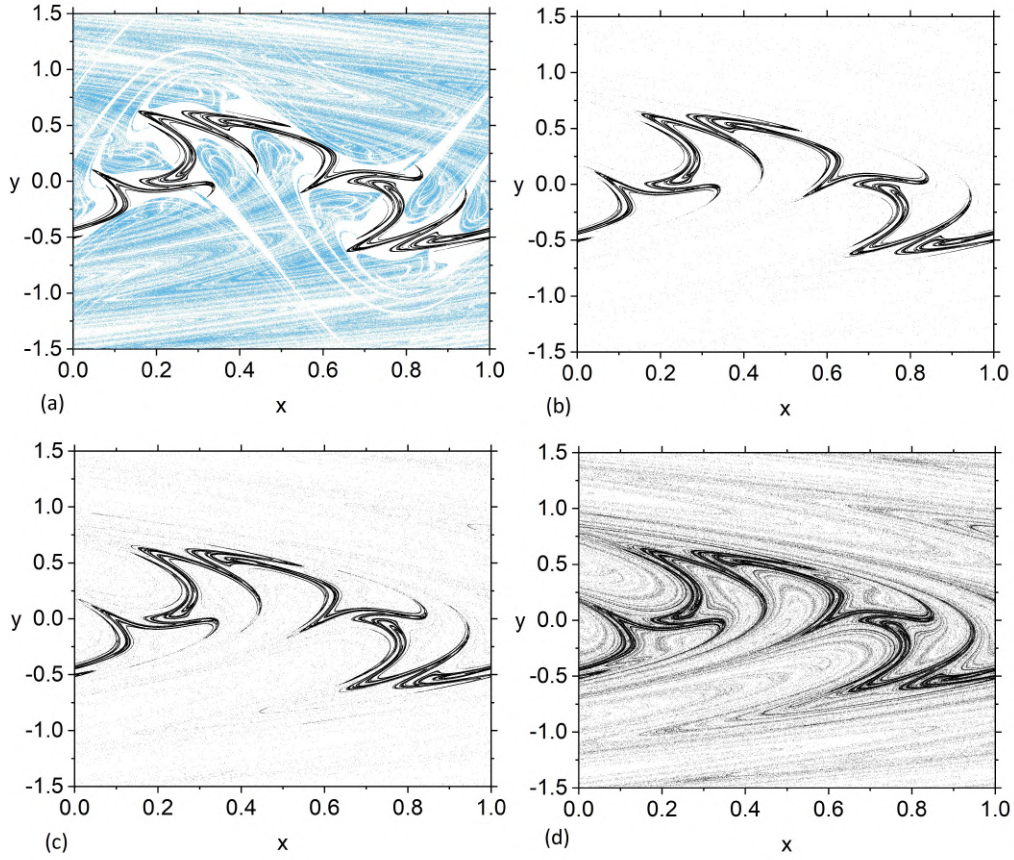


Figura 5.13: (a) atrator pré-crise (preto) e SCG (azul) para $a = 0,899$ e atrator pós-crise para (b) $a = 0,9$, (c) $a = 0,901$ e (d) $a = 0,903$.

Conforme a é aumentado além do valor crítico a_c as explosões se tornam mais frequentes. A alternância irregular entre visitar a região do atrator pré-crise e a região previamente ocupada pela GCS pode ser visualizada em séries temporais com 10^4 iterações da coordenada y , conforme é exibido na Figura 5.14. No painel (a) temos $a = 0,9$, que corresponde ao espaço de fases da Figura 5.13(b); uma única explosão é observada para $n \approx 7000$. No painel (b), temos $a = 0,901$, que corresponde ao espaço de fases da Figura 5.13(c); duas explosões são observadas, em $n \approx 4000$ e $n \approx 5000$. No painel (c), temos $a = 0,903$, que corresponde ao espaço de fases da Figura 5.13(d); diversas explosões são observadas ao longo da série temporal.

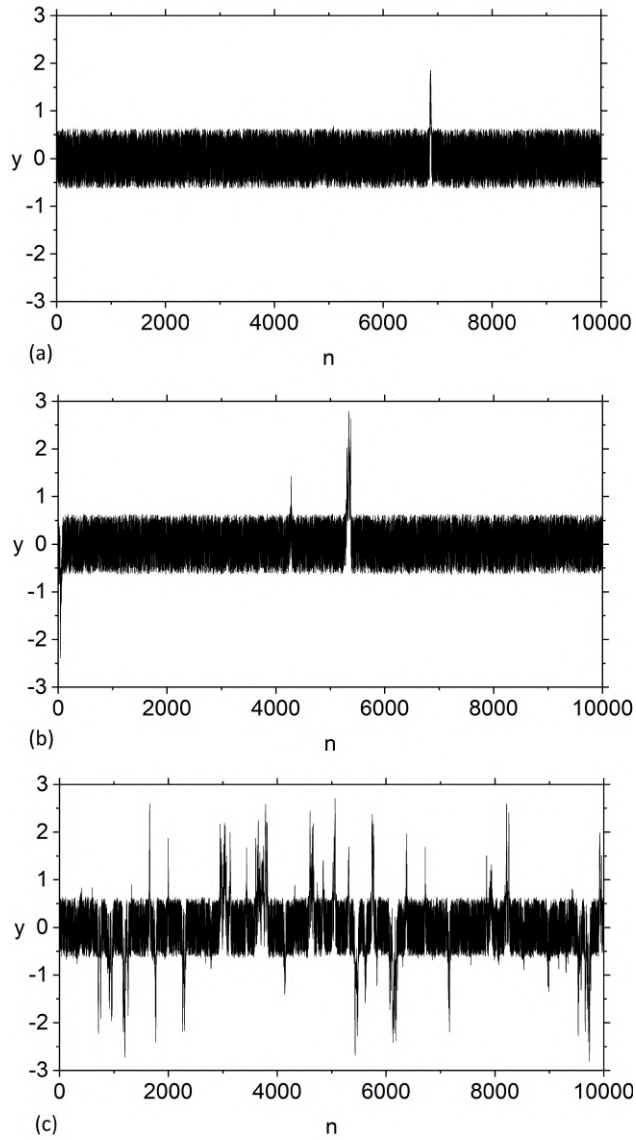


Figura 5.14: Série temporal da coordenada y de um trajetória sobre o atrator pós-crise para (a) $a = 0,9$, (b) $a = 0,901$ e (c) $a = 0,903$.

Para quantificar o tempo entre as explosões consideramos que uma explosão começa quando $|y| > 1$ e termina quando $|y| < 1$ para pelo menos 50 iterações do mapa após o seu início. O critério de 50 iterações é adotado pois durante uma explosão a trajetória pode visitar regiões com $|y| < 1$ que não correspondem ao atrator pré-crise, assim, considera-se que a explosão terminou quando a trajetória se mantém com $|y| < 1$ por tempo suficiente. Desde

que o tempo médio entre as explosões seja menor do que 50 iterações essa abordagem é capaz de capturar a grande maioria das explosões. A Figura 5.15 mostra histogramas do tempo entre explosões consecutivas, t , e o tempo médio entre explosões, $\langle t \rangle$. O tempo médio é calculado somando todos os valores de t observados e dividindo pelo número total de explosões. Para cada valor de a , a condição inicial foi iterada 10^8 vezes para calcular o histograma e $\langle t \rangle$. A Figura 5.15(a) corresponde aos mesmos parâmetros do espaço de fases da Figura 5.13(b) e da série temporal da Figura 5.14(a), para o qual foi obtido $\langle t \rangle = 17200$. A Figura 5.15(b) corresponde aos mesmos parâmetros do espaço de fases da Figura 5.13(c) e da série temporal da Figura 5.14(b), para o qual foi obtido $\langle t \rangle = 2782$. A Figura 5.15(c) corresponde aos mesmos parâmetros do espaço de fases da Figura 5.13(d) e da série temporal da Figura 5.14(c), para o qual foi obtido $\langle t \rangle = 559$. Para todos os casos os histogramas informam que a probabilidade de se observar o tempo consecutivo t entre duas explosões decai quanto maior for o valor de t .

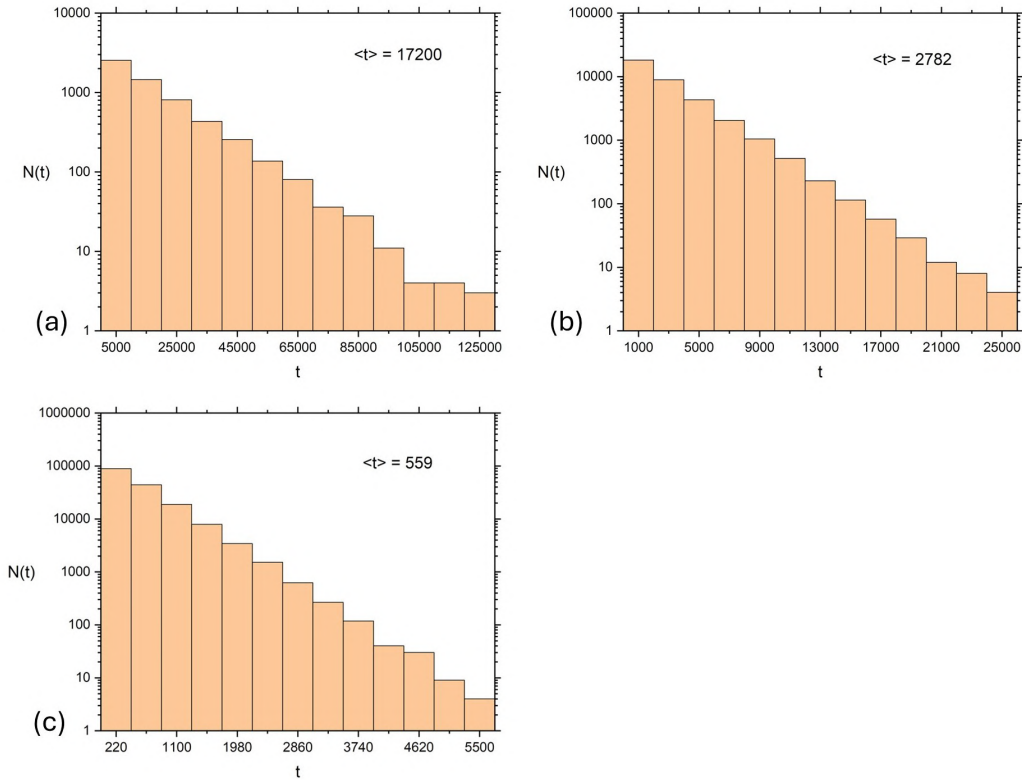


Figura 5.15: Histograma do tempo entre explosões consecutivas t , e tempo médio entre explosões $\langle t \rangle$. (a) $a = 0,9$, (b) $a = 0,901$ e (c) $a = 0,903$.

O tempo médio entre explosões consecutivas é uma quantidade facilmente acessível para caracterizar o comportamento intermitente. Exatamente na crise não ocorrem explosões e $\langle t \rangle$ é infinito, e após a crise as explosões se tornam mais e mais frequentes, de modo que $\langle t \rangle$ diminui conforme o parâmetro é incrementado. Tal comportamento é observado na Figura 5.16, que mostra $\langle t \rangle$ como função de a .

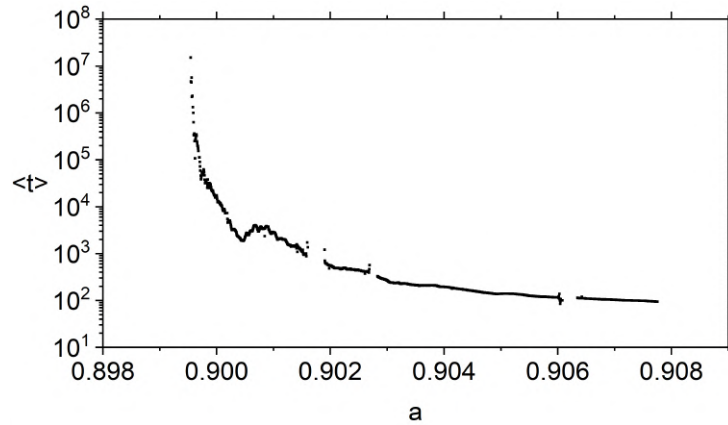


Figura 5.16: Tempo médio entre explosões consecutivas como função do parâmetro a .

Intermitência induzida por crise também é observada após a crise interior local, discutida na Seção 5.3, mas os dois comportamentos dinâmicos alternados, isto é, visitas sobre a região do atrator pré-crise e a região anteriormente ocupada pela sela caótica, não são facilmente distinguidos a partir de uma série temporal, como é o caso após a crise interior global. Entretanto, a medida natural, que é uma forma de expressar a probabilidade de que diferentes regiões de um atrator são visitadas (ver Apêndice C), pode ser utilizada para visualizar a frequência que diferentes partes do atrator após a crise interior local são visitadas. A medida natural do atrator nessa crise é mostrada na Figura 5.17, e nota-se que a região ocupada pelo atrator pré-crise é muito mais visitada.

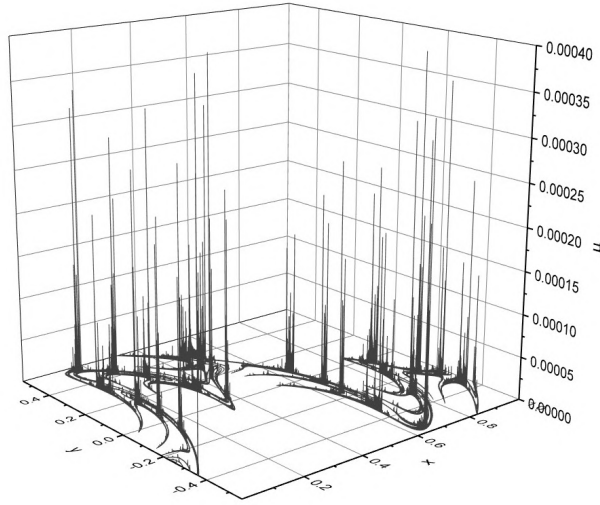


Figura 5.17: Medida natural μ do atrator caótico após a crise interior local para $b = 0,58$ e $a = 0,71385$. Os maiores picos representam as regiões do atrator que foram visitadas mais frequentemente, e correspondem às regiões ocupadas anteriormente pelo atrator pré-crise.

5.5 Conclusões parciais

Neste capítulo estudamos as famílias de pontos fixos do MPND. Avaliamos as suas estabilidades de acordo com os autovalores da matriz Jacobiana. A partir das expressões dos autovalores calculamos as curvas de bifurcação sela-nó e de bifurcação de duplicação de período. Observamos a criação de muitas órbitas periódicas instáveis de período 1, e conforme o parâmetro b foi aumentado, mais dessas órbitas surgiram no intervalo $a \in [0, 1]$. Calculamos numericamente diagramas de bifurcação globais, que corroboraram os resultados analíticos. Os diagramas também mostram órbitas periódicas de períodos mais altos, que são criadas e bifurcam de forma semelhante às de período 1. Argumentamos que o grande número de órbitas periódicas instáveis é responsável pelo surgimento da sela caótica global.

Nos diagramas de bifurcação observamos o AS, predominantemente caótico com algumas janelas de periodicidade. Analisamos uma janela periódica que começa quando o atrator caótico perde a estabilidade devido ao surgimento de um atrator de período 26, através de uma bifurcação sela-nó. Neste mo-

mento a sela caótica local é criada. Mostramos que a presença da segunda sela caótica aumenta os tempos de transiente. O atrator de período 26 passa por uma cascata de duplicações de período criando um atrator caótico pequeno e em bandas. O atrator em bandas colide com a sela caótica local, causando uma crise interior local e gerando um atrator caótico maior e com uma única banda.

Também observamos uma segunda crise interior, que acontece quando o AS caótico colide com a sela caótica global, resultando em um atrator que se espalha em um grande intervalo da coordenada y . Ambas as crises produzem explosões intermitentes, e estudamos o comportamento intermitente induzido pela crise interior global. Mostramos que o tempo médio entre explosões diminui rapidamente conforme o parâmetro de controle a é aumentado.

Capítulo 6

Limite de forte dissipação

Neste capítulo será explorada a organização das estruturas periódicas do MPND no espaço de parâmetros. Como foi constatado ao longo desta tese o sistema pode apresentar comportamento regular ou caótico a depender da escolha de parâmetros. Mapas dissipativos podem ser reduzidos a um mapa unidimensional no limite de forte dissipação [53, 54]. Para fazer uma análise detalhada da distribuição das estruturas periódicas escolhemos $\gamma = 1$ no mapa dado pela Equação 3.4, reduzindo-o a um mapa do círculo. Mesmo fora do limite unidimensional, para $0 < \gamma < 1$, observamos que a distribuição das estruturas periódicas se assemelham ao mapa unidimensional.

6.1 Seções do espaço de parâmetros

O MPND possui três parâmetros, a , b e γ , sendo γ o parâmetro responsável por controlar a intensidade da dissipação. Obtemos seções do espaço de parâmetros tridimensional fixando γ e avaliando alguma região do plano (a, b) . Começamos fixando um valor de a e escolhemos o ponto indicador $\mathbf{Z}_0^+$ como condição inicial. Então calculamos o expoente de Lyapunov para o primeiro valor de b , e o ponto (a, b) nesta seção do espaço de parâmetros é colorido de acordo com o expoente de Lyapunov. Para o próximo valor de b utilizamos como condição inicial a última iteração da trajetória considerada para a combinação anterior de parâmetros, e o expoente de Lyapunov é novamente computado. Repetimos esse procedimento até o valor máximo de b desejado, e então para o próximo valor de a reiniciamos a condição inicial com o ponto indicador. Isto é feito até que toda a região de interesse do espaço de parâmetros tenha sido varrida.

A Figura 6.1 mostra as seções do espaço de parâmetros obtidas para diferentes valores de γ . Comparando a Figura 6.1(a), para $\gamma = 0,1$, com o diagrama de quebra da curva *shearless* mostrado na Figura 2.4, notamos que a dissipação transforma a curva *shearless* em um atrator quase-periódico (região azul), surgem atratores periódicos entre os picos da região de quase-periodicidade e também imersos na região caótica. Conforme a dissipação aumenta as estruturas no espaço de parâmetros se deformam, como verificado nos painéis (b) e (c), com $\gamma = 0,5$ e $\gamma = 0,75$, respectivamente. Para $\gamma = 1$, mostrado na Figura 6.1(d), o MPND é reduzido a uma única equação, conforme será descrito na seção 6.3.

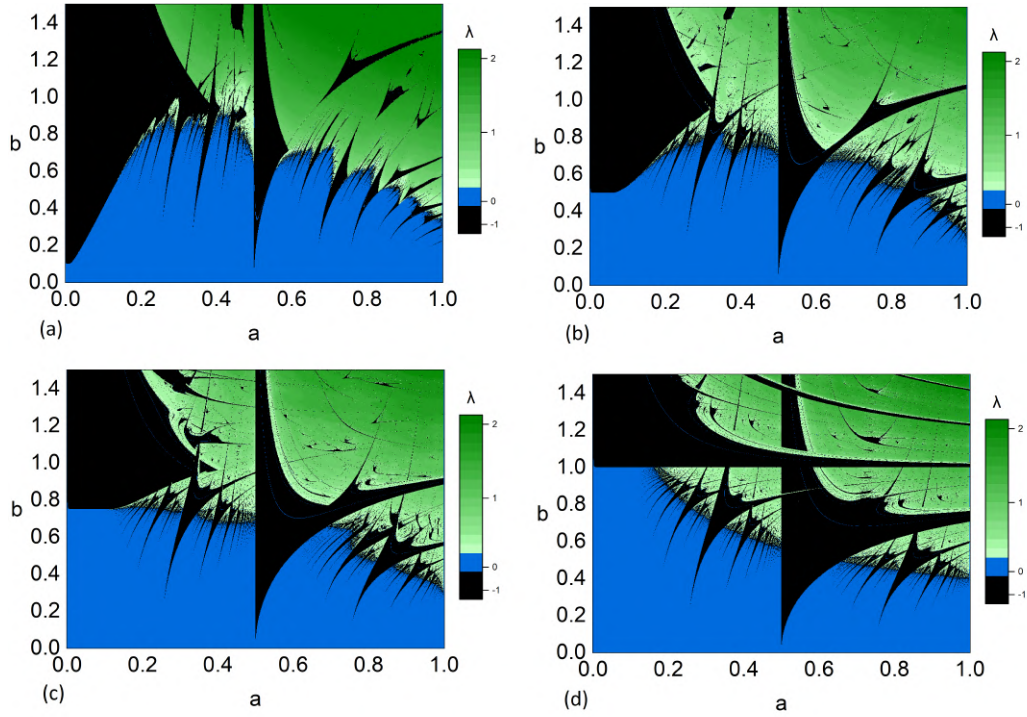


Figura 6.1: Projeção do maior expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros (a, b) para (a) $\gamma = 0,1$, (b) $\gamma = 0,5$, (c) $\gamma = 0,75$ e (d) $\gamma = 1,0$.

6.2 Mapas do círculo

Mapas do círculo são sistemas dinâmicos unidimensionais da forma:

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + \epsilon g(x_n) \mod(1), \quad (6.1)$$

onde Ω é a frequência não perturbada, ϵ é a intensidade da perturbação não-linear e $g(x_n)$ a função perturbadora. A relação $g(x_n + 1) = g(x_n)$ também precisa ser satisfeita devido a periodicidade da variável x .

Assim como em mapas bidimensionais, soluções caóticas, periódicas e quase-periódicas são encontradas em mapas unidimensionais, a depender dos parâmetros de controle. Soluções caóticas são possíveis apenas para combinações de parâmetros para as quais o mapa não seja inversível [20]. Em alguns casos é possível dividir o espaço de parâmetros por uma *curva crítica* de modo que em uma das regiões, chamada de subcrítica, o mapa é monotônico e portanto inversível, e assim apenas soluções regulares são possíveis. Na outra parte do espaço de parâmetros, chamada de supercrítica, soluções periódicas e caóticas são encontradas.

Na referência [55] foi descrito como as estruturas periódicas são organizadas na região subcrítica do mapa do círculo com $g(x_n) = \sin(2\pi x_n)$. Essas estruturas periódicas são conhecidas como línguas de Arnold, onde é observado o fenômeno de dinâmica racional (periódica) em resposta a uma perturbação irracional. As línguas emanam de valores racionais da frequência não perturbada e a sua ordem de ocorrência é determinada pelas frações de Farey [56]. Esse comportamento também é conhecido como travamento de frequência (em inglês, *mode locking*), e é observado em diversos fenômenos naturais. O cálculo do perfil do número de rotação sobre a curva crítica resulta em uma escadaria do diabo [20].

Na região supercrítica do espaço de parâmetros existem infinitas cascatas de estruturas periódicas complexas (EPC) imersas na região caótica. Na literatura essas estruturas recebem diferentes nomes, como *fishhook* e *shrimp* devido ao seu formato peculiar. Em mapas unidimensionais, a localização precisa das EPCs no espaço de parâmetros, seus períodos, e a suas distribuições locais e globais ao longo das cascatas são determinadas pelas *curvas extremas* [57], definidas pelos conjuntos de parâmetros para os quais pontos de máximo/mínimo do mapa são conectados após k iterações.

6.3 Dinâmica e rotas para o caos

O limite de forte dissipação do MPND é obtido tomando $\gamma = 1$ na Equação 3.4. Desse modo a equação para y_{n+1} se torna

$$y_{n+1} = -b \sin(2\pi x_n), \quad (6.2)$$

que depende apenas de x_n . Levando este resultado na equação de x_{n+1} obtemos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a(1 - b^2 \sin^2(2\pi x_n)) \mod(1), \\ x_{n+1} &= x_n + a - ab^2 \sin^2(2\pi x_n) \mod(1). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Identificamos a Equação 6.3 como um mapa do círculo com a frequência não perturbada dada por a , a intensidade da perturbação é ab^2 e a função perturbadora é $-\sin^2(2\pi x_n)$.

Seja $f(x) = x + a - ab^2 \sin^2(2\pi x)$. Então temos que

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 1 - 2\pi ab^2 \sin(4\pi x). \quad (6.4)$$

O mapa 6.3 é monotônico e inversível desde que $f'(x) > 0$ para todo x , isto é, se $2\pi ab^2 < 1$. Então, considerando $a > 0$ e $b > 0$, a curva crítica é dada quando $f'(x) = 0$, e então,

$$b_{crit}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}. \quad (6.5)$$

Na figura 6.2 são mostrados diagramas de teia e séries temporais com a condição inicial $x_0 = 0,4$ e três combinações de parâmetros. Em todos os casos a função $f(x)$ está desenhada em vermelho. Nos painéis (a) e (d) foi considerado $a = 0,2$ e $b = 0,5$, a órbita é quase-periódica com expoente de Lyapunov $\lambda = 2,60 \times 10^{-6}$. Essa configuração é subcrítica e portanto $f(x)$ não possui pontos extremos. Nos painéis (b) e (e) foi considerado $a = 0,4$ e $b = 1,1$, a órbita rapidamente converge para um atrator de período 2 com $\lambda = -0,644$. Nos painéis (c) e (f) foi considerado $a = 0,51$ e $b = 1,1$, a órbita é caótica e oscila de forma irregular, com $\lambda = 0,523$. Nas duas últimas combinações de parâmetros o mapa é supercrítico e portanto são

observados pontos extremos em $f(x)$. Nota-se também que $f(x)$ intercepta a linha pontilhada $x_{n+1} = x_n$, indicando a presença de pontos fixos nessas configurações.

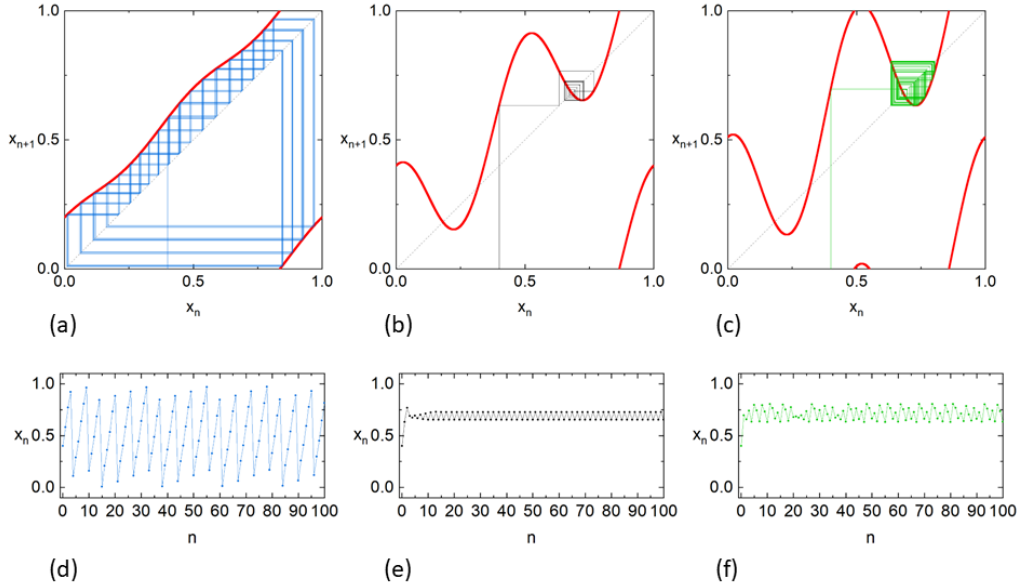


Figura 6.2: Diagramas de teia e séries temporais de órbitas ilustrando diferentes tipos de comportamento. Em (a) e (d), $a = 0,2$ e $b = 0,5$, e a dinâmica é quase-periódica. Em (b) e (e), $a = 0,4$ e $b = 1,1$, e a dinâmica é periódica. Em (c) e (f), $a = 0,51$ e $b = 1,1$, e a dinâmica é caótica.

A condição de pontos fixos $x_{n+1} = x_n = x$ resulta na igualdade

$$\sin(2\pi x) = \pm \frac{1}{b}, \quad (6.6)$$

e invertendo a função seno são encontradas as soluções

$$x_1 = \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1}{b} \right), \quad (6.7)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1}{b} \right). \quad (6.8)$$

Uma vez que $\sin(x + \pi) = -\sin x$, também são soluções da equação 6.6

$$x_3 = x_1 + \frac{1}{2}, \quad (6.9)$$

$$x_4 = x_2 + \frac{1}{2}, \quad (6.10)$$

Totalizando quatro pontos fixos para o mapa. Como o domínio da função $\sin^{-1} x$ é $x \in [-1, 1]$, os pontos fixos possuem valores reais apenas quando $b > 1$.

A condição de estabilidade para um ponto fixo x_α é

$$\left| \frac{df(x_n)}{dx_n}(x_\alpha) \right| = |f'(x_\alpha)| < 1, \quad (6.11)$$

e para x_2 e x_4 encontra-se

$$|f'(x_{2,4})| = \left| 1 + 2\pi ab \sin \left[2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{b} \right) \right] \right|, \quad (6.12)$$

e sendo $a > 0$ e $b > 0$, tem-se que $|f'(x_{2,4})| > 1$, de modo que x_2 e x_4 são sempre instáveis no intervalo de parâmetros de interesse. Para x_1 e x_3 , encontra-se

$$|f'(x_{1,3})| = \left| 1 - 2\pi ab \sin \left[2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{b} \right) \right] \right|, \quad (6.13)$$

e para que a condição de estabilidade seja satisfeita é necessário que

$$\begin{aligned} 2\pi ab \sin \left[2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{b} \right) \right] &< 2, \\ a &< \frac{1}{\pi b^2} \csc \left(2 \sin^{-1} \frac{1}{b} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para

$$a = a_{DP}(b) = \frac{1}{\pi b^2} \csc \left(2 \sin^{-1} \frac{1}{b} \right) \quad (6.15)$$

verifica-se que

$$f'(x_{1,3}; a_{DP}) = -1, \quad (6.16)$$

o que implica que os pontos fixos $x_{1,3}$ sofrem uma bifurcação de duplicação de período em a_{DP} [46]. A figura 6.3(a) mostra o diagrama de bifurcação obtido

a partir de uma condição inicial próxima à x_1 . O parâmetro a é variado com $b = 1,1$. É observada uma cascata de duplicação de período, dando origem a comportamento caótico. O expoente de Lyapunov correspondente é exibido na figura 6.3(b).

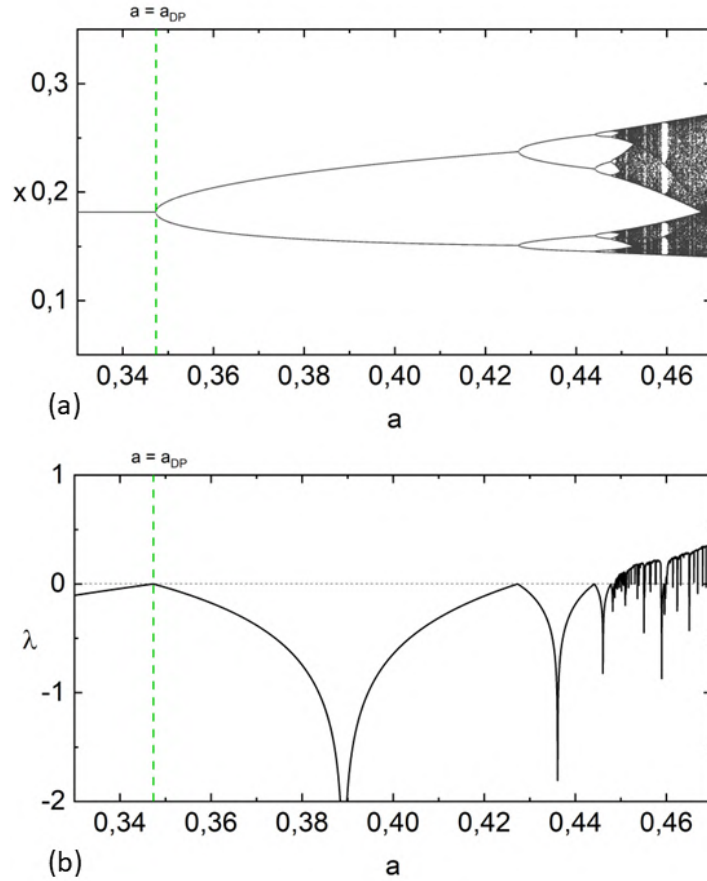


Figura 6.3: (a) Diagrama de bifurcação obtido a partir de uma condição inicial próxima à x_1 com $b = 1,1$ e variando a , com uma cascata de duplicação de período levando ao caos. (b) Expoente de Lyapunov correspondente.

Para determinar o valor de bifurcação de uma duplicação de período, por exemplo, de período 1 para período 2, o esquema numérico é iniciado com dois valores de a que definem um intervalo que contém o parâmetro de bifurcação. O período do ponto médio do intervalo é calculado verificando o número de iterações necessárias para voltar suficientemente próximo ao ponto inicial; se

for 1, é escolhido como ponto de início do intervalo de busca para a próxima iteração; caso contrário, é escolhido como ponto final. Após cada iteração do método, o intervalo é dividido ao meio, e iterações subsequentes se aproximam do valor de bifurcação. Os valores do parâmetro para as quatro primeiras duplicações de período foram aproximados numericamente com este método de busca binária e estão resumidos na tabela 6.1. A constante de Feigenbaum é dada pelo limite $\delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N-1} - a_{N-2}}{a_N - a_{N-1}}$, onde N é o índice da bifurcação de duplicação de período. Essa é uma constante universal para mapas caóticos unidimensionais que se aproximam do caos via duplicação de período.

Número da duplicação de período	a_N	Razão $\frac{a_{N-1} - a_{N-2}}{a_N - a_{N-1}}$
1	0,3472924346	-
2	0,4273559885	-
3	0,4442147133	4,749087215
4	0,4478192765	4,677050599

Tabela 6.1: Parâmetros correspondentes às quatro primeiras duplicações de período dos pontos fixos estáveis e aproximações da constante de Feigenbaum.

A rota quase-periódica para o caos também é possível. Ela é observada fixando a frequência de uma solução quase-periódica e seguindo-a no espaço de parâmetros até que a criticalidade seja atingida, isto é, até que a curva $b_{crit}(a)$ seja cruzada. A frequência de uma órbita regular pode ser calculada com o número de rotação, e órbitas quase-periódicas possuem número de rotação irracional. Qualquer número irracional W pode ser representado por uma fração continuada infinita como [2]

$$W = [A_0; A_1, A_2, \dots] = A_0 + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{A_2 + \dots}}, \quad (6.17)$$

e tomando um número finito de termos obtém-se uma aproximação racional de W , que converge para W no limite de infinitos termos. Os números nobres são números irracionais cujas representações em frações continuadas se tornam uma sequência infinita de uns após algum A_n , isto é, números irracionais que são representados por expansões do tipo $W = [A_0; A_1, A_2, \dots, A_n, 1, 1, 1, \dots]$. Em particular, tem-se a média dourada $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots]$ que o número "mais irracional" no sentido de que os truncamentos de sua expansão em fração continuada demora mais para convergir [2]. A tabela 6.2 mostra a representação em fração continuada da média dourada e seu truncamento

com os quatro primeiros termos. Nota-se que a sequência de Fibonacci no denominador e no numerador dos truncamentos sucessivos, o que é uma característica de números nobres.

n	A_n	Fração continuada	Truncamento
1	1	$[1]$	$1/1$
2	1	$[1; 1]$	$2/1$
3	1	$[1; 1, 1]$	$3/2$
4	1	$[1; 1, 1, 1]$	$5/3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 6.2: Representação da média dourada em fração continuada com os quatro primeiros truncamentos.

O teorema de Slater [58] relaciona os tempos de retorno de uma órbita quase-periódica a uma vizinhança do ponto inicial com os denominadores dos truncamentos da expansão em fração continuada da frequência correspondente. O teorema diz que para uma órbita quase-periódica, no máximo três tempos de retorno diferentes, Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 são observados, tais que $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_3$. Além disso, ao menos dois dos tempos de retorno são denominadores de dois truncamentos consecutivos da expansão em fração continuada. No caso de números nobres, pelo menos dois dos tempos de retorno são números de Fibonacci consecutivos.

Para analisar a rota quase-periódica para o caos escolhemos o atrator com frequência $W = [0; 1, 1, \dots] = 1 - \phi$. O esquema numérico implementado para encontrar as soluções com essa frequência fixada é descrito a seguir. Para $b = b_0 = 0$ a órbita desejada é obtida escolhendo $a = a_0 = W$. Então, para $b_1 = b_0 + \Delta$, busca-se pela órbita desejada no intervalo $a \in [a_0 - \Delta, a_0 + \Delta]$ calculando os tempos de retorno para cada a , definindo uma vizinhança de tamanho $\delta = 10^{-3}$ em torno do ponto inicial, e verificando as condições estabelecidas pelo teorema de Slater. A condição é satisfeita para o parâmetro a_1 em que dois tempos de retorno são números de Fibonacci consecutivos, e então para $b_2 = b_1 + \Delta$ o procedimento é repetido para o intervalo $a \in [a_1 - \Delta, a_1 + \Delta]$ para encontrar a_2 , e assim sucessivamente até que a criticalidade seja atingida. O caminho descrito no espaço de parâmetros pela órbita quase-periódica encontrada com o método descrito é mostrado na figura 6.4.

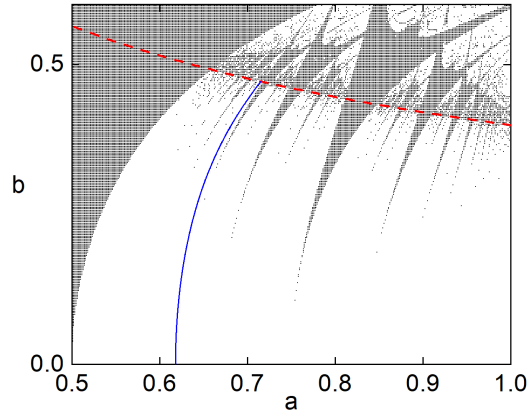


Figura 6.4: Em azul, caminho descrito no espaço de parâmetros pela órbita quase-periódica com $\omega = 1 - \phi$. A curva vermelha tracejada é a curva crítica e os pontos pretos representam estruturas periódicas identificadas pelo expoente de Lyapunov negativo.

A medida natural $\mu(x)$ (ver Apêndice C) descreve a probabilidade de que qualquer ponto x sobre um atrator seja visitado. A medida natural de atratores caóticos é tipicamente não-homogênea e com propriedades fractais. A figura 6.5 mostra a medida natural do atrator quase-periódico com $\omega = 1 - \phi$ e diferentes parâmetros. No painel (a) foi considerado $b = 0$ e observa-se que todos os pontos do atrator possuem a mesma probabilidade de serem visitados. No painel (b) a perturbação foi $b \approx 0,26476$ e diferentes regiões do atrator possuem diferentes probabilidades de serem visitadas, mas a medida natural varia suavemente ao longo do atrator. O painel (c) corresponde à configuração em que a criticalidade foi atingida, e é observado um aspecto fractal na medida natural do atrator quase-periódico, indicando a eminência da transição para o regime caótico.

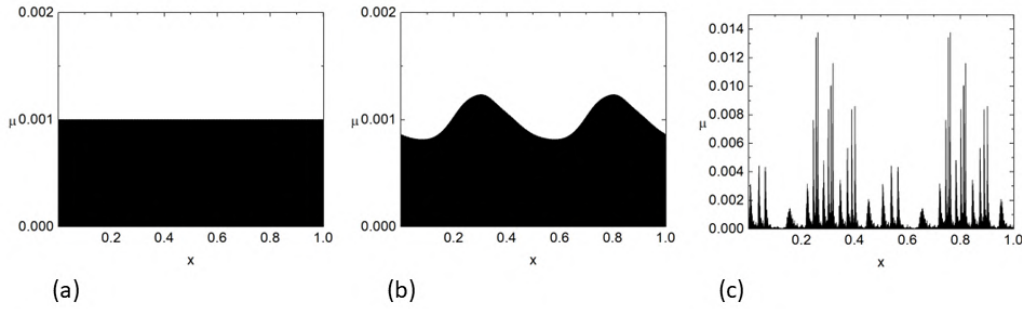


Figura 6.5: Medida natural do atrator quase-periódico com $\omega = 1 - \phi$. (a) $a = 1 - \phi \approx 0,618034$ e $b = 0$; (b) $a \approx 0,64223$ e $b \approx 0,26476$; (c) $a \approx 0,71512$ e $b \approx 0,47147$, na criticalidade.

6.4 Organização e distribuição de estruturas periódicas

Para visualizar a organização das estruturas periódicas no espaço de parâmetros, podem ser construídos diagramas colorindo as estruturas de acordo com os períodos, referidos como diagramas isoperiódicos. Tal diagrama é exibido na figura 6.6(a) para períodos até 16, períodos superiores são mostrados em cinza; a curva crítica, dada pela equação 6.5, é a curva vermelha tracejada, e a curva de duplicação de período dos pontos fixos, dada pela equação 6.15, é a curva vermelha cheia. Na região subcrítica do espaço de parâmetros, onde apenas comportamentos periódicos e quase-periódicos são possíveis, observam-se as chamadas línguas de Arnold ou regiões de travamento de frequência. Elas correspondem a estruturas periódicas que emanam de valores racionais da frequência não perturbada a e se alargam à medida que b é aumentado. Sua organização é bem compreendida em termos de teoria dos números de acordo com as frações de Farey: entre as línguas de frequências $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{2}$, existe uma língua de frequência $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$; entre as línguas de frequências $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, existe uma língua de frequência $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$, e assim por diante. A figura 6.6(b) mostra o número de rotação ω calculado sobre a curva crítica, onde uma escada do diabo é observada. Cada degrau de ω constante corresponde valor racional da frequência não perturbada a , de modo que existem infinitos degraus. Na região supercrítica, comportamento caótico é possível.

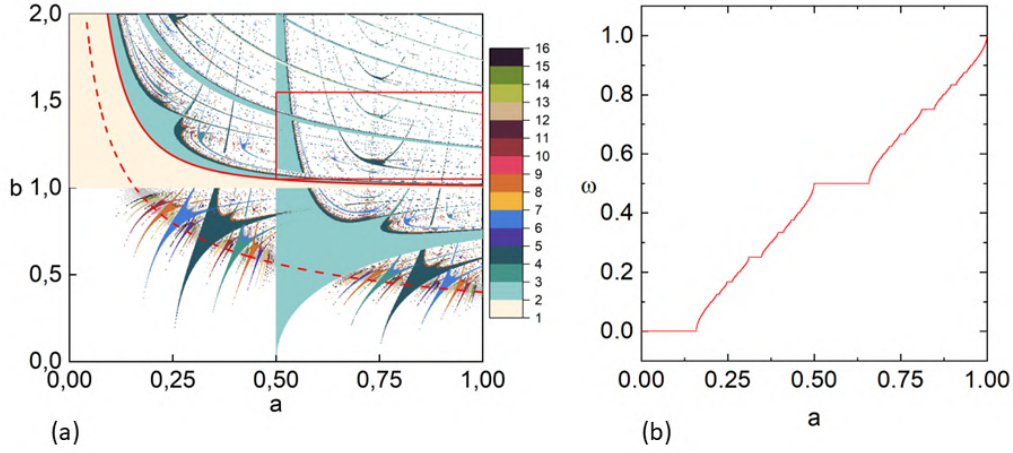


Figura 6.6: (a) Diagrama isoperiódico, as estruturas periódicas no espaço de parâmetros são coloridas de acordo com os períodos. A linha vermelha tracejada é a curva crítica, e a linha vermelha cheia é a curva de duplicação de período dos pontos fixos. (b) Perfil do número de rotação calculado sobre a curva crítica, mostrando o padrão da escadaria do diabo.

Na região supercrítica do espaço de parâmetros as línguas de Arnold passam por duplicações de período, e também são observadas estruturas periódicas imersas na região de caos, como as inclusas na caixa vermelha na figura 6.6(a). O surgimento e organização dessas estruturas pode ser explicado através de *órbitas superestáveis* e *órbitas extremas* [57]. Uma órbita de período k , $x_n = f^{(k)}(x_n)$, é superestável se:

$$\frac{d}{dx_n} f^{(k)}(x_n) = \prod_{t=0}^{k-1} f'(f^{(t)}(x_n)) = 0, \quad (6.18)$$

logo ela deve conter, ao menos uma das soluções de $f'(x) = 0$, que são pontos extremos de $f(x)$. Sendo o expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais calculado com a expressão (ver Apêndice B)

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}, \quad (6.19)$$

o expoente de Lyapunov das órbitas superestáveis tendem a menos infinito.

Dados dois pontos extremos do mapa, x_i^* e x_j^* , uma órbita k -extrema é uma solução que os conecta após k iterações:

$$x_i^* = f^k(x_j^*). \quad (6.20)$$

Se $i = j$, a órbita k -extrema também é uma órbita superestável de período k . Genericamente, órbitas extremas não são órbitas periódicas. Órbitas superestáveis podem ser criadas em parâmetros em que duas órbitas extremas conectam extremos diferentes [57]. Sejam $x_i^* = f^{(k_1)}(x_j^*)$ e $x_j^* = f^{(k_2)}(x_i^*)$. Então $x_i^* = f^{(k_1)}(f^{(k_2)}(x_i^*)) = f^{(k_1+k_2)}(x_i^*)$ e uma órbita $(k_1 + k_2)$ superestável é obtida.

Impondo $f'(x) = 0$, encontramos que os pontos extremos do mapa 6.3 satisfazem a equação

$$\sin(4\pi x) = \frac{1}{2\pi ab^2}. \quad (6.21)$$

Sendo $\sin(4\pi x - 2\pi m) = \sin(4\pi x)$, onde m é um inteiro, tem-se

$$\sin(4\pi x - 2\pi m) = \frac{1}{2\pi ab^2}, \quad (6.22)$$

e resolvendo para x encontra-se

$$x^* = \frac{1}{4\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\pi ab^2} \right) + \frac{m}{2}, \quad (6.23)$$

Devido a variável x ser modulada entre 0 e 1, apenas $m = 0$ e $m = 1$ na equação 6.23 fornecem soluções únicas. Considerando que $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, a equação 6.22 pode ser utilizada para construir a expressão

$$\sin(4\pi x - 2\pi m + \pi) = -\frac{1}{2\pi ab^2}, \quad (6.24)$$

que fornece outra solução para os pontos extremos:

$$x^* = -\frac{1}{4\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\pi ab^2} \right) + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}, \quad (6.25)$$

onde, novamente, $m = 0$ ou $m = 1$. As equações 6.23 e 6.25 podem ser escritas compactamente como

$$x_{nm}^* = \frac{(-1)^n}{4\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\pi ab^2} \right) + \frac{m}{2} + \frac{n}{4}, \quad (6.26)$$

onde $m = 0, 1$ e $n = 0, 1$.

Considerando órbitas 1-extremas, encontramos que

$$x_{nm}^* = f(x_{00}^*) \iff x_{n\bar{m}}^* = f(x_{01}^*), \quad (6.27)$$

$$x_{nm}^* = f(x_{10}^*) \iff x_{n\bar{m}}^* = f(x_{11}^*), \quad (6.28)$$

onde n , m e $\bar{m}$ são 0 ou 1, e $\bar{m}$ é o oposto de m na mesma equação. Por exemplo, na equação 6.27, supondo que os parâmetros tenham sido ajustados de modo que $x_{00}^* = f(x_{00}^*)$, então é verdade que para os mesmos parâmetros $x_{01}^* = f(x_{01}^*)$.

Uma curva extrema é o conjunto de parâmetros para os quais existe uma órbita extrema correspondente. As curvas 1-extremas são mostradas na figura 6.7. O painel (a) exibe as curvas 1-extremas obtidas a partir de x_{0m}^* sendo mapeado para qualquer um dos quatro extremos, e o painel (b) mostra as curvas obtidas a partir de x_{1m}^* sendo mapeado para qualquer extremo, ambos com uma iteração.

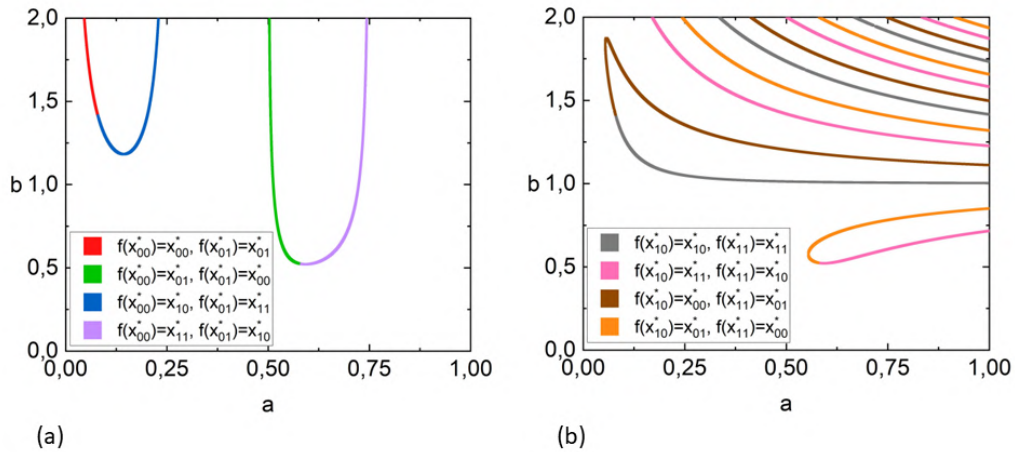


Figura 6.7: Curvas 1-extremas obtidas por uma iteração do extremo (a) x_{0m}^* e (b) x_{1m}^* .

Algumas das curvas da figura 6.7 também representam órbitas superestáveis. As curvas vermelha, no painel (a), e cinzas, no painel (b), correspondem à quatro órbitas 1-superestáveis, onde $x_{nm}^* = f(x_{nm}^*)$. As curvas

verde, no painel (a), e rosas, no painel (b), correspondem a duas órbitas 2-superestáveis, a primeira gerada por $x_{00}^* = f(x_{01}^*)$ e $x_{01}^* = f(x_{00}^*)$, e a segunda por $x_{10}^* = f(x_{11}^*)$ e $x_{11}^* = f(x_{10}^*)$.

Na figura 6.8, mostramos uma ampliação da região da caixa vermelha no diagrama isoperiódico da figura 6.6. As curvas 1-extremas também estão exibidas, e observamos estruturas periódicas envoltas pela região de caos alinhadas com a curva extrema $x_{11}^* = f(x_{00}^*)$ e $x_{10}^* = f(x_{01}^*)$ (roxa); $x_{00}^* = f(x_{10}^*)$ e $x_{01}^* = f(x_{11}^*)$ (marrom); e $x_{01}^* = f(x_{10}^*)$ e $x_{00}^* = f(x_{11}^*)$ (laranja).

Além disso, uma estrutura de período 2 aparece na interseção das curvas roxa e laranja; isso ocorre porque na interseção $x_{11}^* = f(x_{00}^*)$ e $x_{00}^* = f(x_{11}^*)$. Da mesma forma, $x_{10}^* = f(x_{01}^*)$ e $x_{01}^* = f(x_{10}^*)$, de modo que duas órbitas distintas superestáveis de período 2 são criadas. Uma estrutura de período 4 aparece na interseção das curvas roxa e marrom; na interseção $x_{11}^* = f(x_{00}^*)$, $x_{01}^* = f(x_{11}^*)$, $x_{10}^* = f(x_{01}^*)$ e $x_{00}^* = f(x_{10}^*)$, gerando uma órbita superestável de período 4 que conecta todos os pontos extremos.

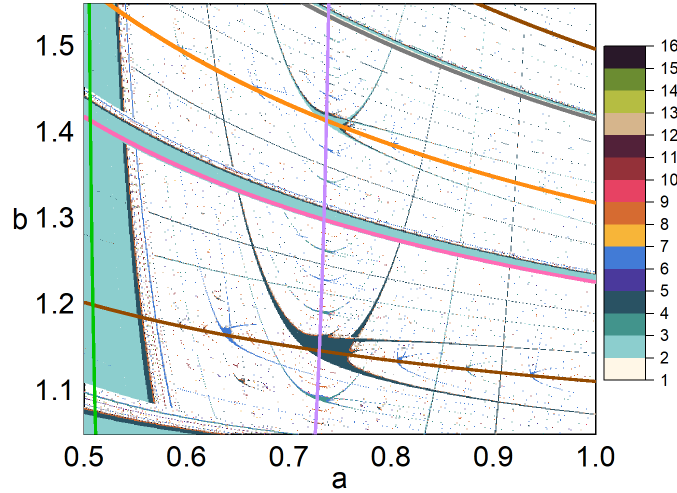


Figura 6.8: Ampliação do diagrama isoperiódico da figura 6.6 e curvas 1-extremas.

As duas órbitas superestáveis de período 2 criadas na interseção das curvas extremas roxa e laranja são mostradas no diagrama de teia da 6.9(a), e a órbita superestável de período 4 criada na interseção das curvas extremas roxa e marrom é mostrada no diagrama de teia da 6.9(b).

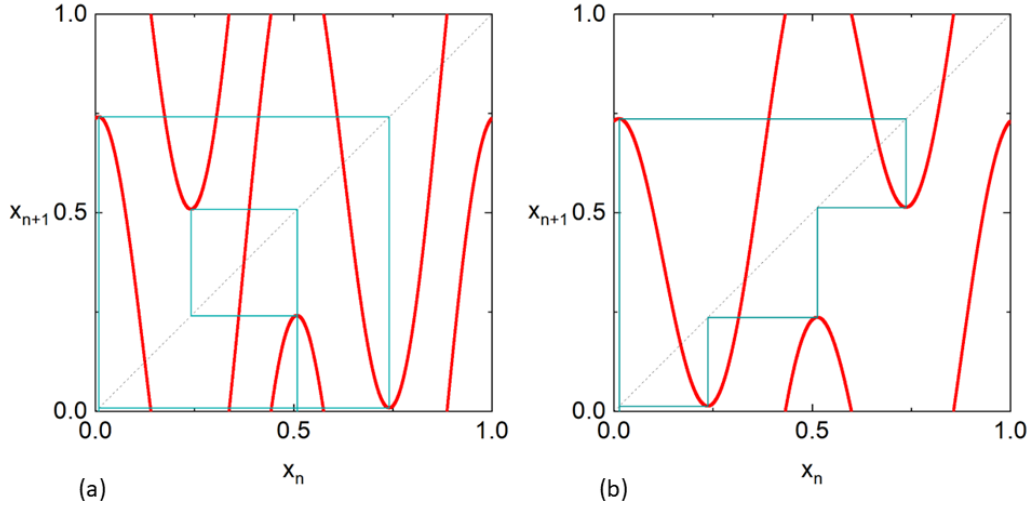


Figura 6.9: Diagrama de teia de das (a) duas órbitas 2-superestáveis, $a = 0,737101034$ e $b = 1,41421757$; e (b) uma órbita 4-superestável, $a = 0,730141591$, $b = 1,1468256$.

Os períodos e localizações precisas dos camarões menores vistos na figura 6.6 podem ser explicados por curvas extremas de ordem superior e suas intersecções.

6.5 Multiestabilidade e crises

Mais de um atrator pode existir numa dada configuração de parâmetros, estabelecendo um cenário de multiestabilidade. Por exemplo, os pontos fixos x_1 e x_3 , dados pelas equações 6.7 e 6.9, respectivamente, são dois atratores de período 1 quando estáveis.

Para explorar o cenário de multiestabilidade, escolhemos $b = 1,1$ e calculamos um diagrama de bifurcação com duas condições iniciais diferentes, conforme mostrado na figura 6.10. Os pontos pretos correspondem às bifurcações obtidas a partir de uma condição inicial nas proximidades de x_1 , enquanto os pontos azuis começam nas proximidades de x_3 . Os pontos fixos instáveis x_2 e x_4 são as linhas horizontais pontilhadas vermelhas. Inicialmente, tanto x_1 quanto x_3 são atratores de período 1, e eles passam simultaneamente por uma bifurcação de duplicação de período em $a = a_{PD}$, conforme esperado

(reta vertical tracejada verde). À medida que a aumenta, ocorrem cascatas de duplicação de período, criando dois atratores caóticos diferentes. Aumentando ainda mais o valor de a , os atratores caóticos colidem com os pontos fixos instáveis e são destruídos em uma crise de fronteira (BC) (reta vertical tracejada azul). Depois disso, ambas as condições iniciais convergem para um único atrator de período 2, que passa por uma bifurcação do tipo *pitch-fork* (PB) (reta vertical tracejada preta) criando dois atratores de período 2; ambos se tornam caóticos após uma cascata de duplicação de período. Aumentando o valor de a , os dois atratores caóticos se fundem em um em uma crise de fusão de atratores (AM, do inglês, *attractor merging*) (reta vertical tracejada rosa) e, em seguida, expandem repentinamente e ocupam todo o domínio x após uma crise interior (IC) (reta vertical tracejada vermelha).

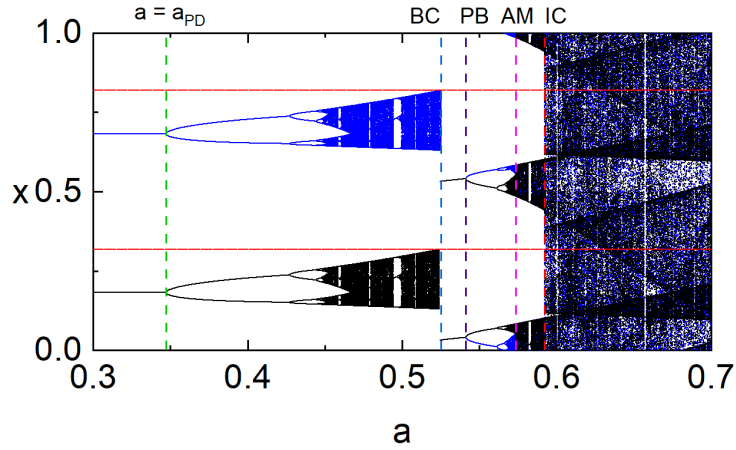


Figura 6.10: Diagrama de bifurcação calculado com condições iniciais próximas aos pontos fixos x_1 (preto) e x_3 (azul). Os pontos fixos instáveis x_2 e x_4 são representados pelas linhas vermelhas tracejadas. Foi utilizado $b = 1, 1$.

A figura 6.11 mostra os atratores caóticos do sistema para diferentes parâmetros. No painel (a) dois atratores caóticos coexistem antes da crise de fusão. No painel (b), após a crise de fusão e antes da crise interior, um único atrator caótico é observado. Esse atrator visita regiões limitadas do domínio de x , o que pode ser visualizado no diagrama de teia como as regiões onde $f(x)$ é tocada. No painel (c), após a crise interior, o atrator caótico se torna maior e visita todo o intervalo $x \in [0, 1]$.

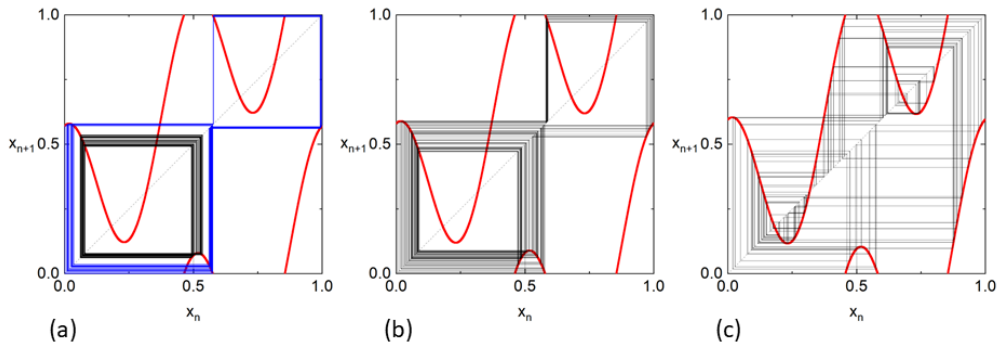


Figura 6.11: Diagramas de teia de aranha exibindo trajetórias caóticas, em todos os casos $b = 1, 1$. (a) $a = 0, 57$, coexistência de dois atratores caóticos, (b) $a = 0, 58$, um único atrator caótico após a crise de fusão, e (c) $a = 0, 595$, grande atrator caótico após a crise interior.

Para ilustrar ainda mais as possibilidades de multistabilidade, calculamos outro diagrama de bifurcação com 100 condições iniciais distribuídas entre $x = 0$ e $x = 1$, fazendo 10^4 iterações de cada condição inicial e armazenando as duas últimas. Ele é mostrado na figura 6.12, e alguns atratores que não são visíveis na Figura 6.10 são revelados. Também observamos o atrator de período 2 surgindo em $a = 0, 5$.

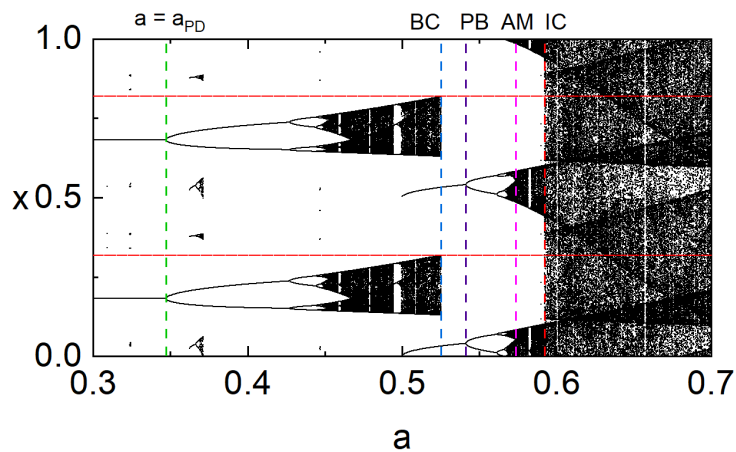


Figura 6.12: Diagrama de bifurcação calculado com 100 condições iniciais distribuídas uniformemente entre $x = 0$ e $x = 1$. Foi utilizado $b = 1, 1$.

6.6 Conclusões parciais

Neste capítulo foi mostrado como o MPND é reduzido a um mapa do círculo no limite de máxima dissipação. Apresentamos duas rotas para o caos, a de cascatas de duplicação de período e a quase-periódica. Foi feita uma análise da organização das estruturas periódicas no espaço de parâmetros. Foi obtida uma curva crítica que divide este espaço em duas regiões: a região supercrítica, que permite soluções caóticas, e região subcrítica que permite apenas soluções regulares. As órbitas periódicas na região subcrítica correspondem às línguas de Arnold e são ordenadas de acordo com as frações de Farey. Na região supercrítica explicamos o surgimento e organização das estruturas periódicas de períodos 2 e 4 em termos das curvas 1-extremas. A localização precisa e organização de estruturas periódicas de períodos superiores pode ser encontradas com a análise de curvas extremas de ordem superiores. Exploramos a possibilidade de multiestabilidade, onde diferentes atratores coexistem, e ilustramos os diferentes tipos de crises que os atratores caóticos podem sofrer.

Capítulo 7

Conclusões

O objetivo desta tese foi analisar a dinâmica do MPND e algumas de suas variações, majoritariamente através de métodos numéricos. Os Capítulos introdutórios, 1, 2 e 3, apresentaram uma base teórica para a compreensão e desenvolvimento do trabalho. Os resultados inéditos foram apresentados a partir do Capítulo 4, em que foi descrita uma rota de destruição e criação do AS quase-periódico utilizando uma modificação do MPND, em que um novo parâmetro, r , é adicionado. O valor desse parâmetro controla a posição vertical dos pontos fixos, sem violar a simetria espacial discreta do mapa, sendo que $r = 1$ recupera a forma usual do MPND. Diminuir o valor de r induz bifurcações no sistema, que foram analisadas a partir de um diagrama de bifurcação, cálculo do expoente de Lyapunov, análise das variedades dos pontos de sela e bacias de atração em parâmetros específicos. Observamos destruição do AS, quando ele colide com os pontos de sela, e a criação do AS a partir da colisão da variedade instável de cada ponto de sela com o ponto de sela oposto. Neste processo também ocorre a inversão da posição relativa das bacias de atração dos pontos fixos estáveis em relação ao AS.

No Capítulo 5 foram obtidas as famílias de pontos fixos do MPND, e suas estabilidades e bifurcações foram analisadas a partir dos autovalores da matriz Jacobiana avaliados nesses pontos. Identificamos e justificamos o surgimento de duas selas caóticas qualitativamente e quantitativamente distintas, chamadas de sela caótica local (SCL) e global (SCG). A SCG é composta por duas partes simétricas geradas pelas órbitas instáveis gêmeas, enquanto a SCL surge dentro de janelas periódicas que interrompem o atrator caótico ao variar um parâmetro do sistema. Mostramos que a SCL e a SCG são responsáveis pelos tempos característicos do transiente, sendo que estes tempos são maiores quando a SCL está presente. Com a coexistência das duas selas caóticas, mostramos que o transiente pode ser decomposto

em duas fases, uma fase rápida causada pela SCG e uma fase lenta causada pela SCL. As selas caóticas são destruídas ao colidirem com o atrator caótico, caracterizando crises interiores. Observamos também o fenômeno de intermitência induzida por crise.

No Capítulo 6 foi considerado o limite de dissipação forte no MPND, que reduz o sistema a um mapa unidimensional. Apresentamos rotas para o caos e um limite inferior no espaço de parâmetros para o comportamento caótico, definido por uma curva crítica. A organização das estruturas periódicas no espaço de parâmetros foi estudada. Na região subcrítica aparecem línguas de Arnold, que na região supercrítica se sobrepõem e passam por cascatas de duplicação de período. A teoria de órbitas superestáveis e extremas foi aplicada para analisar as órbitas periódicas na região supercrítica, justificando a posição em que essas estruturas surgem e os seus períodos. Foram observadas crises e coexistência de atratores.

Os resultados apresentados nesta tese levantam diversos pontos que podem ser explorados em estudos futuros. Por exemplo, o MPND modificado para controlar a posição dos pontos fixos pode ser ajustado para que eles fixos sejam movidos de forma independente, quebrando a simetria do mapa e abrindo a possibilidade de novos fenômenos. Também é possível que múltiplas selas caóticas locais sejam observadas simultaneamente, uma vez que janelas periódicas são observadas dentro de janelas periódicas de forma recorrente, alterando as propriedades do transiente. Por fim, as estruturas periódicas no espaço de parâmetros foram bem explicadas no mapa unidimensional obtido no limite de dissipação forte, mas a transição para duas dimensões requer análises mais aprofundadas.

Bibliografia

- [1] Luiz Henrique Alves Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. 2^a edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. ISBN: 858832508X.
- [2] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. 2^a edição. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521811965.
- [3] Alfredo M. Ozório de Almeida. *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*. Campinas: Editora da Unicamp, 1991. ISBN: 8526801856.
- [4] Edward N. Lorenz. “Deterministic Nonperiodic Flow”. Em: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20 (2 mar. de 1963), pp. 130–141.
- [5] J. D. Meiss. “Symplectic maps, variational principles, and transport”. Em: *Reviews of Modern Physics* 64.3 (1992), pp. 795–848.
- [6] P. J. Morrison. “Magnetic field lines, Hamiltonian dynamics, and nontwist systems”. Em: *Physics of Plasmas* 7.6 (2000), pp. 2279–2289.
- [7] R. Egydio de Carvalho e A. M. Ozorio de Almeida. “Integrable approximation to the overlap of resonances”. Em: *Physics Letters A* 162 (1992), pp. 457–463.
- [8] A. Wurm, A. Apte, K. Fuchss e P. J. Morrison. “Meanders and reconnection-collision sequences in the standard nontwist map”. Em: *Chaos* 15.2 (2005).
- [9] D Del-Castillo-Negrete, J M Greene e P. J. Morrison. “Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos”. Em: *Physica D* 91 (1996), pp. 1–23.
- [10] P. J. Morrison. “Hamiltonian description of the ideal fluid”. Em: *Reviews of Modern Physics* 70.2 (1998), pp. 467–521.
- [11] Diego Del-Castillo-Negrete e P. J. Morrison. “Chaotic transport by Rossby waves in shear flow”. Em: *Physics of Fluids A* 5.4 (1992), pp. 948–965.

- [12] D G Luchinsky, P V E McClintock, S M Soskin e R Mannella. “Zero-Dispersion Nonlinear Resonance in Dissipative Systems”. Em: *Physical Review Letters* 76 (1996).
- [13] A.D. Morozov. “On degenerate resonances in nearly Hamiltonian systems”. Em: *Regular and Chaotic Dynamics* 9 (3 2004), p. 337.
- [14] J P Van Der Weele e T P Valkering. “The birth process of periodic orbits in non-twist maps”. Em: *Physica A* 169 (1990), pp. 42–72.
- [15] C. Vieira Abud e R. Egydio de Carvalho. “Energy gain induced by boundary crisis”. Em: *Physical Review E* 84 (3 2011), p. 036204.
- [16] L. Kimi Kato e R. Egydio De Carvalho. “Transport barriers with shearless attractors”. Em: *Physical Review E* 99.3 (2019), pp. 4–7.
- [17] Michele Mugnaine, Antonio M Batista, Iberê L Caldas, José D Szezech, Ricardo Egydio De Carvalho e Ricardo L Viana. “Curry – Yorke route to shearless attractors and coexistence of attractors in dissipative nontwist systems”. Em: *Chaos* 023125 (2021).
- [18] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Vol. 112. Springer International Publishing, 2023. ISBN: 978-3-031-22006-7.
- [19] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko. *Classical Mechanics*. 3ª edição. Pearson, 2000. ISBN: 9780201657029.
- [20] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2ª edição. New York: Springer-Verlag, 1992. ISBN: 9780387977454.
- [21] F. Büniger e S.M. Rump. “Yet more elementary proofs that the determinant of a symplectic matrix is 1”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 515 (2017), pp. 87–95.
- [22] George M. Zaslavsky. *The physics of Chaos in Hamiltonian systems*. 2ª edição. Imperial College Press, 2007. ISBN: 9781860947957.
- [23] I. L. Caldas, R. L. Viana, J. D. Szezech, J. S.E. Portela, J. Fonseca, M. Roberto, C. G.L. Martins e E. J. da Silva. “Nontwist symplectic maps in tokamaks”. Em: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 17.5 (2012), pp. 2021–2030.
- [24] Alessandra Celletti, Fabrizio Paita e Giuseppe Pucacco. “Twist and non-twist regimes of the oblate planet problem”. Em: *Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni* 28.3 (2017), pp. 535–552.
- [25] C G L Martins, R Egydio de Carvalho, I. L. Caldas e M. Roberto. “Labyrinthic standard non-twist map”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44.4 (2011), p. 045102.

- [26] R. L. Viana, I. L. Caldas, J. D. Szezech, A. M. Batista, C. V. Abud, A. B. Schelin, M. Mugnaine, M. S. Santos, B. B. Leal, B. Bartoloni, A. C. Mathias, J. V. Gomes e P. J. Morrison. “Transport Barriers in Symplectic Maps”. Em: *Brazilian Journal of Physics* 51.3 (2021), pp. 899–909.
- [27] A. Apte, A. Wurm e P. J. Morrison. “Renormalization and destruction of $1/\gamma^2$ tori in the standard nontwist map”. Em: *Chaos* 13.2 (2003), pp. 421–433.
- [28] Moises S. Santos, Michele Mugnaine, José D. Szezech, Antonio M. Batista, Iberê L. Caldas, Murilo S. Baptista e Ricardo L. Viana. “Recurrence-based analysis of barrier breakup in the standard nontwist map”. Em: *Chaos* 28.8 (2018).
- [29] K. Fuchss, A. Wurm, A. Apte e P. J. Morrison. “Breakup of shearless meanders and ”outer” tori in the standard nontwist map”. Em: *Chaos* 16.3 (2006), pp. 1–11.
- [30] A C Mathias, M Mugnaine, M S Santos, J D Szezech, I L Caldas e R L Viana. “Fractal structures in the parameter space of nontwist area-preserving maps”. Em: *Physical Review E* 100 (2019), p. 52207.
- [31] A. Wurm, A. Apte e P. J. Morrison. “On reconnection phenomena in the standard nontwist map”. Em: *Brazilian Journal of Physics* 34.4 B (2004), pp. 1700–1706.
- [32] Emilia Petrisor. “Nontwist area preserving maps with reversing symmetry group”. Em: *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* 11.2 (2001), pp. 497–511.
- [33] Susumu Shinohara e Yoji Aizawa. “Indicators of Reconnection Processes and Transition to Global Chaos in Nontwist Maps”. Em: *Progress of Theoretical Physics* 100.2 (1998), pp. 219–233.
- [34] R. Egydio de Carvalho e G.M. Favaro. “The defocusing mechanism of isochronous resonances”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 350.2-4 (2005), pp. 173–182.
- [35] R. Egydio de Carvalho, Caroline G.L. Martins e G.M. Favaro. “Interference of robust tori on the resonance overlap”. Em: *Brazilian Journal of Physics* 39 (2009), pp. 606–614.
- [36] C G L Martins, R Egydio de Carvalho, I. L. Caldas e M. Roberto. “The non-twist standard map with robust tori”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43.17 (2010), p. 175501.

- [37] Alessandro Bravetti. “Contact Hamiltonian dynamics: The concept and its use”. Em: *Entropy* 19.10 (2017).
- [38] Philip J. Morrison. “A paradigm for joined Hamiltonian and dissipative systems”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 18.1-3 (1986), pp. 410–419.
- [39] Massimo Materassi e Philip J. Morrison. “Metriplectic torque for rotation control of a rigid body”. Em: *Cybernetics and Physics* 7.2 (2018), pp. 78–86.
- [40] Ana C.C. Horstmann, Holokx A. Albuquerque e Cesar Manchein. “The effect of temperature on generic stable periodic structures in the parameter space of dissipative relativistic standard map”. Em: *European Physical Journal B* 90.5 (2017).
- [41] P. J. Morrison. “Thoughts on brackets and dissipation: Old and new”. Em: *Journal of Physics: Conference Series* 169 (2009).
- [42] Diogo Ricardo da Costa. “A dissipative Fermi-Ulam model under two different kinds of dissipation”. Em: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 22.1-3 (2015), pp. 1263–1274.
- [43] Robert McLachlan e Matthew Perlmutter. “Conformal Hamiltonian systems”. Em: *Journal of Geometry and Physics* 39.4 (2001), pp. 276–300.
- [44] Renato C. Calleja, Alessandra Celletti e Rafael de la Llave. “A KAM theory for conformally symplectic systems: Efficient algorithms and their validation”. Em: *Journal of Differential Equations* 255.5 (2013), pp. 978–1049.
- [45] Renato Calleja, Marta Canadell e Alex Haro. “Non-twist invariant circles in conformally symplectic systems”. Em: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 96 (2021), p. 105695.
- [46] Kathleen T. Aligood, Tim D. Sauer e James A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. 1ª edição. Springer, 1996. ISBN: 0387946772.
- [47] R. Simile Baroni e R. Egydio de Carvalho. “Destruction and resurgence of the quasiperiodic shearless attractor”. Em: *Physical Review E* 104.1 (2021), p. 014207.
- [48] R. Egydio De Carvalho e C. Vieira Abud. “Robust attractor of non-twist systems”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 440.1515 (2015), pp. 42–48.

- [49] R. Simile Baroni e R. Egydio de Carvalho. “Lagrangian descriptors: The shearless curve and the shearless attractor”. Em: *Physical Review E* 109.2 (2024), p. 024202.
- [50] J. -P. Eckmann e David Ruelle. “Ergodic theory of chaos and strange attractors”. Em: *Reviews of Modern Physics* 57.3 (1985), pp. 617–656.
- [51] Tamás Tél e Ying-Cheng Lai. *Transient Chaos*. 1^a edição. New York: Springer, 2009. ISBN: 9781441969866.
- [52] R. Simile Baroni, R. Egydio de Carvalho, I. L. Caldas, R. L. Viana e P. J. Morrison. “Chaotic saddles and interior crises in a dissipative nontwist system”. Em: *Physical Review E* 107.2 (2023), p. 24216.
- [53] G. Schmidt e B. W. Wang. “Dissipative standard map”. Em: *Physical Review A* 32.5 (1985), pp. 2994–2999.
- [54] András Csordás, Géza Györgyi, Péter Szépfalussy e Tamás Tél. “Statistical properties of chaos demonstrated in a class of one-dimensional maps”. Em: *Chaos* 3.1 (1993), pp. 31–49.
- [55] V I Arnold. “Small denominators. I Mappings of the circumference onto itself”. Em: *AMS Transl.* 46.2 (1965), pp. 213–284.
- [56] R E Ecke, J D Farmer e D K Umberger. “Scaling of the Arnold tongues”. Em: *Nonlinearity* 2 (2 1989), pp. 175–196.
- [57] Diogo Ricardo Da Costa, Matheus Hansen, Gustavo Guarise, Rene O. Medrano-T e Edson D. Leonel. “The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps”. Em: *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 380.18-19 (2016), pp. 1610–1614.
- [58] N. B. Slater. “The distribution of the integers N for which $\theta_N < \phi$ ”. Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 46 (4 1950), pp. 525–534.
- [59] Nelson Fiedler-Ferrara e Carmem P. Cintra do Prado. *Caos: Uma Introdução*. 1^a edição. São Paulo: Blücher, 1994. ISBN: 8521200587.
- [60] Helena E. Nusse e James A. Yorke. “A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 36.1-2 (1989), pp. 137–156.
- [61] Ana M. Mancho, Stephen Wiggins, Jezabel Curbelo e Carolina Mendoza. “Lagrangian descriptors: A method for revealing phase space structures of general time dependent dynamical systems”. Em: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.12 (2013), pp. 3530–3557.

- [62] Jérôme Daquin, Rémi Pédenon-Orlanducci, Makrina Agaoglou, Guillermo García-Sánchez e Ana Maria Mancho. “Global dynamics visualisation from Lagrangian Descriptors. Applications to discrete and continuous systems”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 442 (2022), p. 133520.
- [63] M. D. Forlevesi, R. Egydio de Carvalho e Emanuel F. de Lima. “Lagrangian descriptor and escape time as tools to investigate the dynamics of laser-driven polar molecules”. Em: *Physical Review E* 107 (2 2023), p. 024209.
- [64] J. A. Jiménez Madrid e A. M. Mancho. “Distinguished trajectories in time dependent vector fields”. Em: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 19.1 (2009), pp. 1–66.
- [65] Carolina Mendoza e Ana M. Mancho. “Hidden Geometry of Ocean Flows”. Em: *Physical Review Letters* 105.3 (2010), p. 038501.
- [66] Carlos Lopesino, Francisco Balibrea, Stephen Wiggins e Ana M. Mancho. “Lagrangian descriptors for two dimensional, area preserving, autonomous and nonautonomous maps”. Em: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 27.1-3 (2015), pp. 40–51.
- [67] Andrej Junginger e Rigoberto Hernandez. “Lagrangian descriptors in dissipative systems”. Em: *Physical Chemistry Chemical Physics* 18.44 (2016), pp. 30282–30287.
- [68] M. Mugnaine, A. C. Mathias, M. S. Santos, A. M. Batista, J. D. Szezech e R. L. Viana. “Dynamical characterization of transport barriers in nontwist Hamiltonian systems”. Em: *Physical Review E* 97.1 (2018), pp. 1–9.
- [69] L.F. Bernardi de Souza, R. Egydio de Carvalho e I.L. Caldas. “Transport barriers for two modes drift wave map”. Em: *Physics Letters A* 444 (2022), p. 128237.
- [70] “Rattleback: A model of how geometric singularity induces dynamic chirality”. Em: *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 381 (34 2017), pp. 2772–2777.

Apêndice A

Demonstração da conservação da área simplética

Na seção 2.1.2 foi apresentado o conceito de área simplética. Neste apêndice será demonstrada a conservação da área simplética pelo fluxo Hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_H(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_c \nabla H(\mathbf{x}), \quad (\text{A.1})$$

onde $x_i = (q_i, p_i)$ e $i = 1, \dots, N$ e

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Considere uma trajetória de referência arbitrária $\mathbf{x}_r(t) = (\mathbf{q}_r(t), \mathbf{p}_r(t))$. Considere também duas soluções vizinhas, $\mathbf{x}_r(t) + \delta\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_r(t) + \delta\bar{\mathbf{x}}$, com $\delta\mathbf{x} = (\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p})$ e $\delta\bar{\mathbf{x}} = (\delta\bar{\mathbf{q}}, \delta\bar{\mathbf{p}})$ sendo incrementos infinitesimais. Retomando a equação , a área simplética pode ser escrita como

$$\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{S} \delta\bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.3})$$

onde a matriz simplética $\mathbf{S}$ [2, 3, 5] é dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Nota-se que $\mathbf{S}$ e $\mathbf{J}_c$ são matrizes ortogonais¹ com $\det(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{J}_c) = 1$. Além disso, têm-se que $\mathbf{S}\mathbf{S} = \mathbf{J}_c\mathbf{J}_c = -\mathbf{I}_N$, e $\mathbf{S} = \mathbf{J}_c^T$.

¹Uma matriz quadrada é dita ortogonal se sua matriz inversa coincide com a sua matriz transposta, isto é, $\mathbf{O}$ é ortogonal se $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T$. Além disso, $\det \mathbf{O} = \pm 1$.

A área simplética é interpretada como a soma das áreas orientadas dos paralelogramos definidos pelas projeções de $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\bar{\mathbf{x}}$ em cada um dos N planos (q_i, p_i) . Desejamos mostrar que essa quantia é preservada sob a evolução temporal, isto é, que $\frac{d}{dt}\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Utilizando a regra do produto para derivar a equação A.3 com respeito ao tempo, encontra-se

$$\frac{d}{dt}\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = \dot{\delta\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}\delta\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}\dot{\delta\bar{\mathbf{x}}}. \quad (\text{A.5})$$

Para calcular $\dot{\delta\mathbf{x}}$ e $\dot{\delta\bar{\mathbf{x}}}$, considera-se que $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\bar{\mathbf{x}}$ são pequenos. Então são válidas as expansões em torno do ponto de referência $\mathbf{x}_r$ [2]:

$$\dot{\mathbf{x}}_r + \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_H(\mathbf{x}_r) + D\mathbf{V}_H(\mathbf{x}_r)\delta\mathbf{x}, \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r + \delta\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{V}_H(\mathbf{x}_r) + D\mathbf{V}_H(\mathbf{x}_r)\delta\bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.7})$$

onde $\mathbf{V}_H(\mathbf{x}) = (V_H^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, V_H^{(2N)}(\mathbf{x}))$ é o campo vetorial Hamiltoniano e $D\mathbf{V}_H$ é a matriz Jacobiana [2] formada pelas derivadas parciais de $\mathbf{V}_H$:

$$D\mathbf{V}_H = \frac{\partial \mathbf{V}_H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial V_H^{(1)}/\partial x_1 & \dots & \partial V_H^{(1)}/\partial x_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial V_H^{(2N)}/\partial x_1 & \dots & \partial V_H^{(2N)}/\partial x_{2N} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Assim, podemos escrever

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{V}_H(\mathbf{x}_r)\delta\mathbf{x} = D\mathbf{J}_c \nabla H(\mathbf{x}_r)\delta\mathbf{x}, \quad (\text{A.9})$$

e

$$\delta\dot{\bar{\mathbf{x}}} = D\mathbf{V}_H(\mathbf{x}_r)\delta\bar{\mathbf{x}} = D\mathbf{J}_c \nabla H(\mathbf{x}_r)\delta\bar{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as expressões A.9 e A.10 na equação A.5 obtém-se

$$\frac{d}{dt}\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = D\mathbf{J}_c \nabla H \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}\delta\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}D\mathbf{J}_c \nabla H \delta\bar{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.11})$$

Pode-se mostrar que

$$D\mathbf{J}_c \nabla H = \mathbf{J}_c D\nabla H. \quad (\text{A.12})$$

Para exemplificar, se $N = 1$, tem-se

$$\mathbf{J}_c \nabla H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial H/\partial q \\ \partial H/\partial p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

e, logo,

$$D\mathbf{J}_c \nabla H = \begin{bmatrix} \partial^2 H / \partial p \partial q & \partial^2 H / \partial p \partial p \\ -\partial^2 H / \partial q \partial q & -\partial^2 H / \partial q \partial p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Por outro lado, tem-se

$$D\nabla H = \begin{bmatrix} \partial^2 H / \partial q \partial q & \partial^2 H / \partial q \partial p \\ \partial^2 H / \partial q \partial p & \partial^2 H / \partial p \partial p \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_c D\nabla H &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 H / \partial q \partial q & \partial^2 H / \partial q \partial p \\ \partial^2 H / \partial q \partial p & \partial^2 H / \partial p \partial p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial^2 H / \partial p \partial q & \partial^2 H / \partial p \partial p \\ -\partial^2 H / \partial q \partial q & -\partial^2 H / \partial q \partial p \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Pelas equações A.14 e A.16, $D\mathbf{J}_c \nabla H = \mathbf{J}_c D\nabla H$. Além disso, nota-se que $D\nabla H$ é uma matriz simétrica².

Reescrevendo o primeiro termo do lado direito da equação A.5,

$$\begin{aligned} D\mathbf{J}_c \nabla H \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{S} \delta \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}_c D\nabla H \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{S} \delta \bar{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{S}^T \mathbf{J}_c D\nabla H \delta \mathbf{x} \cdot \delta \bar{\mathbf{x}} \\ &= -D\nabla H \delta \mathbf{x} \cdot \delta \bar{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde foi utilizada a propriedade $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ e o resultado $\mathbf{S}^T \mathbf{J}_c = \mathbf{J}_c \mathbf{J}_c = -\mathbf{I}_N$. Reescrevendo o segundo termo do lado direito da equação A.5,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} D\mathbf{J}_c \nabla H \delta \bar{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} &= \mathbf{S} \mathbf{J}_c D\nabla H \delta \bar{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= D\nabla H \delta \bar{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= (D\nabla H)^T \delta \mathbf{x} \cdot \delta \bar{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde foi utilizada a propriedade do produto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$, o resultado $\mathbf{S} \mathbf{J}_c = \mathbf{I}_N$ e a propriedade $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, e substituir as equações A.17 e A.18 na equação A.11 resulta em

²A matriz $D\nabla H$, que contém as derivadas de segunda ordem de H , é a matriz Hessiana da função Hamiltoniana, que descreve a curvatura local de H .

$$\frac{d}{dt}\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = -D\nabla H\delta\mathbf{x} \cdot \delta\bar{\mathbf{x}} + (D\nabla H)^T\delta\mathbf{x} \cdot \delta\bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.19})$$

Sendo $D\nabla H$ uma matriz simétrica, $(D\nabla H)^T = D\nabla H$, e então

$$\frac{d}{dt}\omega(\delta\mathbf{x}, \delta\bar{\mathbf{x}}) = -D\nabla H\delta\mathbf{x} \cdot \delta\bar{\mathbf{x}} + D\nabla H\delta\mathbf{x} \cdot \delta\bar{\mathbf{x}} = 0, \quad (\text{A.20})$$

mostrando a conservação da área simplética.

Apêndice B

Expoentes de Lyapunov para mapas

Os expoentes de Lyapunov fornecem uma medida da dependência sensível às condições iniciais. Eles são calculados numericamente a partir de uma condição inicial, e quando ao menos um deles é positivo a trajetória é considerada caótica. Mapas possuem tantos expoentes de Lyapunov quanto dimensões, ou seja, mapas unidimensionais possuem um expoente de Lyapunov enquanto mapas bidimensionais possuem dois. Neste apêndice são apresentados métodos para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em mapas unidimensionais e bidimensionais.

B.1 Mapas Unidimensionais

Considere o mapa unidimensional $x_{n+1} = F(x_n)$ e duas condições iniciais próximas, x_0 e $\bar{x}_0$. A distância inicial entre esses pontos é dada por

$$\delta_0 = |\bar{x}_0 - x_0|, \quad (\text{B.1})$$

e após uma iteração das condições iniciais, a nova distância se torna

$$\delta_1 = |\bar{x}_1 - x_1|. \quad (\text{B.2})$$

Admitindo que a relação entre as distâncias seja

$$\delta_1 = e^L \delta_0, \quad (\text{B.3})$$

então L mede a taxa exponencial de expansão da distância entre as condições iniciais após uma iteração. A equação B.2 pode ser reescrita como

$$\delta_1 = |F(\bar{x}_0) - F(x_0)| = |F(x_0 + \delta) - F(x_0)|, \quad (\text{B.4})$$

e utilizando a equação B.3,

$$e^L \delta_0 = |F(x_0 + \delta) - F(x_0)|. \quad (\text{B.5})$$

Considerando n iterações do mapa a equação B.5 se torna

$$e^{nL} \delta_0 = |F^{(n)}(x_0 + \delta) - F^{(n)}(x_0)|, \quad (\text{B.6})$$

e isolando o expoente L obtém-se

$$L = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^{(n)}(x_0 + \delta) - F^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right|. \quad (\text{B.7})$$

O expoente de Lyapunov é definido tomando os limites $\delta_0 \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$ na equação B.7, que leva a

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^{(n)}(x_0 + \delta) - F^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^{(n)}}{dx}(x_0) \right|. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A derivada na equação B.8 pode ser reescrita usando a regra da cadeia como

$$\begin{aligned} \frac{dF^{(n)}}{dx}(x_0) &= \frac{dF}{dx}(x_{n-1}) \frac{dF}{dx}(x_{n-2}) \dots \frac{dF}{dx}(x_0) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{dF}{dx}(x_i), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e substituindo B.9 em B.8, considerando a regra do produto de logaritmos, obtém-se

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|. \quad (\text{B.10})$$

Numericamente, escolhe-se um valor grande para o número de iterações n e a soma na expressão B.10 é incrementada a cada iteração. Quando o comportamento é caótico encontra-se que $\lambda > 0$, enquanto $\lambda < 0$ para trajetórias periódicas e $\lambda = 0$ quando o comportamento é quase-periódico ou em pontos de bifurcação.

B.2 Mapas Bidimensionais

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em um mapa bidimensional $\mathbf{z}_{n+1} = M\mathbf{z}_n$, com $\mathbf{z}_n = (x_n, y_n)$, será descrito adiante o algoritmo de triangularização de Eckmann-Ruelle [50]. Os expoentes de Lyapunov para uma condição inicial $\mathbf{z}_0$ são definidos como

$$\lambda_i(\mathbf{z}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_i^n|, \quad (\text{B.11})$$

onde $i = 1, 2$ e Λ_i^n são os autovalores da matriz

$$\mathbf{M}^n := \prod_{i=1}^n \mathcal{J}(\mathbf{z}_i) = \prod_{i=1}^n \mathcal{J}_i = \mathcal{J}_n \mathcal{J}_{n-1} \dots \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_1, \quad (\text{B.12})$$

e $\mathcal{J}_i$ é a matriz Jacobiana do mapa avaliada na i -ésima iteração. O cálculo numérico a partir das equações B.11 e B.12 apresenta problemas, pois os elementos da matriz $\mathbf{M}^n$ tornam-se muito grandes mesmo com poucas iterações. O cálculo dessa matriz pode ser simplificado reescrevendo-a como um produto de matrizes triangulares, e como o produto de matrizes triangulares também é uma matriz triangular, e os autovalores são os elementos da diagonal, os Λ_i^n são obtidos diretamente.

Podemos decompor $\mathcal{J}$ como o produto de uma matriz ortogonal $\mathbf{O}$ e uma matriz triangular superior $\mathbf{T}$ ¹ [50]. Aplicando a decomposição $\mathcal{J}_1 = \mathbf{O}_1 \mathbf{T}_1$, o produtório da equação B.12 pode ser escrito como

$$\mathbf{M}^n = \mathcal{J}_n \mathcal{J}_{n-1} \dots \mathcal{J}_2 \mathbf{O}_1 \mathbf{T}_1. \quad (\text{B.13})$$

¹Uma matriz quadrada é dita triangular superior quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Definindo $\mathcal{J}'_2 = \mathcal{J}_2 \mathbf{O}_1$ e decompondo $\mathcal{J}'_2 = \mathbf{O}_2 \mathbf{T}_2$ tem-se,

$$\mathbf{M}^n = \mathcal{J}_n \mathcal{J}_{n-1} \dots \mathcal{J}_3 \mathbf{O}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1. \quad (\text{B.14})$$

Esse processo é repetido sucessivamente, obtendo-se

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{O}_n \mathbf{T}_n \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1. \quad (\text{B.15})$$

A matriz $\mathbf{O}_n$ não participa do cálculo [59, 50], de modo que $\mathbf{M}^n$ é triangular e seus autovalores são os elementos da sua diagonal. Numericamente é necessário explicitar as matrizes ortogonais e triangulares, e escolhemos matrizes ortogonais da forma

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

A cada iteração é necessário calcular a matriz triangular $\mathbf{T}_i$ e as grandezas $\cos \theta_i$ e $\sin \theta_i$ que compõe a matriz ortogonal $\mathbf{O}_i$. Para a primeira iteração tem-se $\mathbf{T}_1 = \mathbf{O}_1^T \mathcal{J}_1$, isto é,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_{11}^{(1)} & t_{12}^{(1)} \\ 0 & t_{22}^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 j_{11} + \sin \theta_1 j_{21} & \cos \theta_1 j_{12} + \sin \theta_1 j_{22} \\ -\sin \theta_1 j_{11} + \cos \theta_1 j_{21} & -\sin \theta_1 j_{12} + \cos \theta_1 j_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

O elemento da segunda linha e primeira coluna de $\mathbf{T}_1$ resulta em

$$0 = -\sin \theta_1 j_{11} + \cos \theta_1 j_{21}, \quad (\text{B.18})$$

ou ainda,

$$\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{j_{21}}{j_{11}} = \tan \theta_1. \quad (\text{B.19})$$

Em uma construção geométrica, a equação B.19 representa um triângulo retângulo com um ângulo agudo θ_1 , cateto adjacente de comprimento j_{11} , cateto oposto de comprimento j_{21} e consequentemente hipotenusa de comprimento $\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}$. Assim, podemos calcular

$$\sin \theta_1 = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} \quad (\text{B.20})$$

e

$$\cos \theta_1 = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (\text{B.21})$$

Desse modo, os elementos da diagonal principal de $\mathbf{T}_1$ podem ser avaliados através das expressões

$$t_{11}^{(1)} = \cos \theta_1 j_{11} + \sin \theta_1 j_{21}, \quad (\text{B.22})$$

e

$$t_{22}^{(1)} = -\sin \theta_1 j_{12} + \cos \theta_1 j_{22}, \quad (\text{B.23})$$

que foram obtidas da equação B.17. Um vez determinados os elementos de $\mathbf{O}_1$, na segunda iteração é calculada a matriz $\mathcal{J}'_2 = \mathcal{J}_2 \mathbf{O}_1$, e a partir de $\mathcal{J}'_2$ são realizados cálculos análogos aos descritos para a primeira iteração: considera-se $\mathbf{T}_2 = \mathbf{O}_2^T \mathcal{J}'_2$, o que resulta em uma equação análoga a B.17, de modo que $\sin \theta_2$ e $\cos \theta_2$, e $t_{11}^{(2)}$ e $t_{22}^{(2)}$, são obtidos por expressões análogas à B.20-B.23, onde agora j_{ik} é o elemento na linha i e coluna k da matriz $\mathcal{J}'_2$.

O procedimento descrito é repetido iterativamente, e após as n iterações, obtêm-se os autovalores

$$\Lambda_i^n = t_{ii}^{(n)} t_{ii}^{(n-1)} \dots t_{ii}^{(2)} t_{ii}^{(1)}, \quad (\text{B.24})$$

que permitem avaliar a expressão B.11.

Apêndice C

Métodos numéricos para aproximar selas caóticas

Neste apêndice apresentamos os algoritmos utilizados para aproximar as selas caóticas. Dois métodos populares são o método *sprinkler* [51] e o método triplo PIM (*proper interior maximum*) [51, 60]. Aqui apresentamos a formulação desses métodos para mapas bidimensionais, mas eles podem ser generalizados para fluxos e sistemas de maior dimensionalidade [51, 60]. Na implementação dos métodos é necessário identificar quando as trajetórias convergem para algum atrator. Iniciamos descrevendo como fazer essa identificação a partir da medida natural dos atratores.

C.1 Medida natural e dimensão generalizada

A medida natural μ quantifica a frequência com que diferentes partes de um atrator são visitadas por uma trajetória densa. Ela fornece a probabilidade de que um ponto movendo sobre o atrator por um longo tempo visitará diferentes regiões [2, 46, 51]. Essa medida é uma característica do próprio atrator e, portanto, não depende da condição inicial. Qualquer ponto na bacia de atração do atrator pode ser utilizado para calcular a medida natural desde que o transiente seja descartado.

Seja $\phi(x_0, y_0)$ uma trajetória do sistema com condição inicial (x_0, y_0) . Assuma que o ponto (x_0, y_0) pertence à bacia de atração do atrator que desejamos obter a medida natural. Cobrimos uma região do espaço de fases que contém o atrator com quadrados de lado $\epsilon = 10^{-4}$, e identificamos os N quadrados por B_i , com $i = 1, \dots, N$. Seja $\eta(B_i, \phi(x_0, y_0), T)$ o número total

de iterações que a solução esteve dentro do quadrado B_i , considerando T iterações do mapa.

Se η for o mesmo para quase toda condição inicial na bacia de atração do atrator quando T é suficientemente grande, então a medida natural de cada quadrado é definida como:

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(B_i, \phi(x_0, y_0), T)}{T} \quad (\text{C.1})$$

se o limite existe. Em nossas simulações consideramos $T = 10^8$. Uma vez que a medida natural é obtida é fácil verificar se uma trajetória atingiu o atrator. A convergência ocorre quando um quadrado B_i com $\mu_i \neq 0$ é visitado pela primeira vez. Em configurações de multiestabilidade, quando múltiplos atratores coexistem, é necessário obter a medida natural de cada um deles.

A dimensão do atrator através do método de contagem de caixas é definida como

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln 1/\epsilon}, \quad (\text{C.2})$$

onde $N(\epsilon)$ é o número de quadrados de lado ϵ necessários para cobrir o atrator. Essa definição é utilizada para calcular a dimensão fractal do atrator. No caso de um atrator caótico, D_0 não é um número inteiro.

A dimensão generalizada D_q leva em consideração a frequência com que os diferentes quadrados que cobrem o atrator são visitados. Ela é obtida levando em consideração a medida natural em cada caixa com um expoente q , e é definida como [2]

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln (\sum_{i=1}^N \mu_i^q)}{\ln 1/\epsilon}. \quad (\text{C.3})$$

Pela equação C.3, nota-se que quanto maior o valor de q , maior é o peso atribuído às caixas visitadas com maior frequência no cálculo da dimensão.

C.2 Método *sprinkler*

A ideia do método *sprinkler* [51] é seguir um conjunto de trajetórias e selecionar segmentos delas que permanecem em uma vizinhança da sela

caótica Λ . A variedade estável de Λ é o conjunto de pontos que converge para Λ com iterações do mapa, enquanto a variedade instável de Λ é o conjunto de pontos que convergem para Λ com iterações do mapa inverso. A sela caótica pode ser entendida como a intersecção entre a variedade estável e instável.

Considere uma região R do espaço de fases contendo ao menos uma parte da sela caótica e nenhum atrator; distribuimos $N_0 = 10^7$ condições iniciais nessa região e as iteramos de acordo com o mapa. Todos os pontos em R eventualmente convergem para um atrator, exceto aqueles que pertencem à variedade estável ou à sela caótica, que são conjuntos de medida zero, isto é, a probabilidade de que alguma condição inicial seja escolhida exatamente sobre esses conjuntos é nula. As condições iniciais próximas da variedade estável são atraídas para Λ e ficam em sua vizinhança por algum tempo, e então são repelidas pela variedade instável em direção ao atrator. O algoritmo *sprinkler* se baseia nestes fatos e pode aproximar a sela caótica Λ e suas variedades estável e instável.

Calculamos o número de iterações necessárias para cada condição inicial atingir o atrator e descartamos aquelas com tempo de escape menor do que um tempo de corte especificado n_c . As trajetórias com tempo de escape maiores que n_c aproximam-se de Λ durante a evolução dinâmica, implicando que as condições iniciais correspondentes aproximam a variedade estável de Λ . Por outro lado, as suas últimas iterações antes de atingir o atrator aproximam a variedade instável. A sela caótica é aproximada pelos pontos no meio dessas trajetórias, obtidos após $\xi = n_c/2$ iterações. Em resumo, os primeiros pontos aproximam a variedade estável, os pontos do meio aproximam a sela caótica, e os últimos pontos aproximam a variedade instável. O tempo n_c é escolhido por tentativa e erro mas deve ser maior do que o tempo médio de escape τ , definido pela Equação 5.8. O método *sprinkler* é utilizado amplamente devido a sua simplicidade de implementação, baixo custo computacional e habilidade de obter as variedades da sela caótica.

C.3 Método triplo PIM

Enquanto o método *sprinkler* aproxima a sela caótica a partir de fragmentos de diversas trajetórias diferentes, o método triplo PIM [51, 60] busca encontrar apenas uma trajetória que fica próxima de Λ por um tempo arbitrariamente longo. Assim como o método *sprinkler*, o método triplo PIM se baseia na observação de que trajetórias iniciadas próximas à variedade estável da sela ficam por um longo tempo na vizinhança da sela.

O algoritmo inicia com dois pontos a e b tais que o intervalo $[a, b]$ é um segmento de reta que cruza a variedade estável de λ^1 . Então existirá um ponto $c \in [a, b]$ que está mais próximo da variedade estável da sela do que a e b ; portanto, o tempo de escape de c é maior do que os tempos de escape de a e b . Um refinamento do segmento de reta inicial é feito da seguinte forma: distribuímos uniformemente 1000 pontos no intervalo $[a, b]$, medimos seus tempos de escape e identificamos o tripleto (a_1, c_1, b_1) de pontos consecutivos, tais que c_1 é o ponto com o maior tempo de escape no intervalo $[a, b]$.

O tripleto (a_1, b_1, c_1) é chamado de tripleto *interior máximo*, e novo e menor segmento de reta $[a_1, b_1]$ também cruza a variedade estável. O processo de refinamento é repetido gerando novos intervalos $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, e assim por diante, até que seja encontrado um segmento de reta $[a_n, b_n]$ com comprimento menor que $\delta = 10^{-10}$. Então o tripleto (a_n, c_n, b_n) é chamado de tripleto *interior máximo próprio* (em inglês, *Proper Interior Maximum (PIM)*).

Seja I_0 o intervalo $[a_n, b_n]$. Então o tripleto (a_n, c_n, b_n) é iterado de acordo com o mapa, obtendo um novo intervalo I_1 . Se o comprimento de I_1 for menor que δ , o tripleto continua a ser iterado até que o comprimento do intervalo se torne maior que δ , e neste caso o processo de refinamento é reiniciado para obter um novo intervalo $I < \delta$. O algoritmo continua a iterar I e fazendo o processo de refinamento todas as vezes que o comprimento do intervalo excede δ .

Com o procedimento descrito o método encontra um conjunto de triplos PIM com tamanho menor que δ , e o conjunto de pontos do meio aproximam uma trajetória típica sobre a sela caótica, que permanece a uma distância δ

¹Uma boa forma de identificar a localização de segmentos da variedade estável é construindo uma grade fina de condições iniciais em uma região do espaço de fases e projetar o tempo de escape para o atrator. As condições iniciais próximas à variedade estável possuem tempo de escape maior.

da sela caótica verdadeira. Apesar do método triplo PIM ser computacionalmente caro quando comparado com o método *sprinkler*, ele fornece uma aproximação mais precisa da sela caótica.

Apêndice D

Descritores Lagrangianos

Os Descritores Lagrangianos (LDs) são uma ferramenta utilizada para visualizar estruturas no espaço de fase de sistemas dinâmicos gerais [49, 61, 62, 63]. Inicialmente, foram propostos para fluxos e baseados no cálculo do comprimento de arco descrito por uma trajetória em um intervalo de tempo [64, 65]. A capacidade de revelar estruturas em projeções do espaço de fase resulta da observação de que trajetórias que começam e permanecem próximas possuem um comprimento de arco semelhante, enquanto são esperadas mudanças abruptas neste valor ao cruzar separatrizes e variedades [61, 65]. Posteriormente, a definição dos LDs foi estendida para mapas [62, 66].

Neste apêndice serão apresentados resultados obtidos para o mapa padrão *nontwist*, conservativo e dissipativo, obtidos a partir dos LDs. Para $b = 0$ são obtidas expressões analíticas para os LDs que são semelhantes ao número de rotação. Na presença de perturbação, os LDs são calculados numericamente para avaliar as estruturas do espaço de fase.

Os resultados deste apêndice foram publicados na revista *Physical Review E* no artigo intitulado ”*Lagrangian descriptors: The shearless curve and the shearless attractor*” [49].

D.1 Definição para mapas

Seja um mapa bidimensional inversível $\mathbf{z}_{n+1} = M\mathbf{z}_n$, com $\mathbf{z}_n = (x_n, y_n)$. Considerando uma trajetória $\mathbf{z}_{-N}, \mathbf{z}_{-N-1}, \dots, \mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_{N-1}, \mathbf{z}_N$, gerada a partir de N iterações de $\mathbf{z}_0$ pelo mapa M e pelo mapa inverso M^{-1} , o LD é definido como:

$$LD(\mathbf{z}_0, N) = LD^+(\mathbf{z}_0, N) + LD^-(\mathbf{z}_0, N), \quad (\text{D.1})$$

onde as componentes progressiva e regressiva, LD^+ e LD^- , são

$$LD^+(\mathbf{z}_0, N) = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{|x_{i+1} - x_i|^2 + |y_{i+1} - y_i|^2}, \quad (\text{D.2})$$

$$LD^-(\mathbf{z}_0, N) = \sum_{i=-N}^{-1} \sqrt{|x_{i+1} - x_i|^2 + |y_{i+1} - y_i|^2}. \quad (\text{D.3})$$

A decomposição em componentes nas duas direções temporais é feita para que características tanto da variedade instável quanto da variedade estável sejam capturadas por essa ferramenta. LD^+ carrega informação sobre a variedade estável, enquanto LD^- carrega informação sobre a variedade instável. A posição de segmentos das variedades não são reveladas por valores específicos dos LDs, mas sim pela variação abrupta desses valores em uma região do espaço de fase.

Para o cálculo de LD^- é necessário utilizar o mapa inverso

$$M_{PND}^{-1} : \begin{cases} x_n = x_{n+1} - a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_n = \frac{y_{n+1} + b \sin(2\pi x_n)}{(1-\gamma)} \end{cases} \quad \text{mod}(1) \quad (\text{D.4})$$

D.2 Mapas não perturbados

Escolhendo $b = 0$ no mapa M_{PND} , dado pela equação 3.4, obtemos o mapa não perturbado

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = (1 - \gamma)y_n \end{cases} \quad \text{mod}(1), \quad (\text{D.5})$$

que pode ser resolvido analiticamente a partir de uma condição inicial $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Sucessivas iterações de y_0 fornecem

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - \gamma)y_0, \\ y_2 &= (1 - \gamma)^2 y_0, \\ &\vdots \\ y_n &= (1 - \gamma)^n y_0, \\ y_{n+1} &= (1 - \gamma)^{n+1} y_0. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Substituindo D.6 em x_{n+1} da equação D.5 encontra-se

$$x_{n+1} = x_n + a(1 - [(1 - \gamma)^{n+1}y_0]^2), \quad (\text{D.7})$$

e realizando sucessivas iterações de x_0 ,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + a(1 - (1 - \gamma)^2 y_0^2), \\ x_2 &= x_0 + a(2 - (1 - \gamma)^2 y_0^2 - (1 - \gamma)^4 y_0^2), \\ &= x_0 + a \left(2 - y_0^2 \sum_{i=1}^2 (1 - \gamma)^{2i} \right), \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + a \left(n - y_0^2 \sum_{i=1}^n (1 - \gamma)^{2i} \right), \\ x_{n+1} &= x_0 + a \left(n + 1 - y_0^2 \sum_{i=1}^{n+1} (1 - \gamma)^{2i} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Assim, a solução analítica do mapa D.5 é dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0 + a \left(n + 1 - y_0^2 \sum_{i=1}^{n+1} (1 - \gamma)^{2i} \right) \mod(1) \\ y_{n+1} = (1 - \gamma)^{n+1} y_0 \end{cases}. \quad (\text{D.9})$$

Para o mapa conservativo, $\gamma = 0$ e $y = y_0$ para todas iterações. Quando a dissipação é introduzida, y decai a zero após um número suficiente de iterações. Para o cálculo dos LDs as quantidades necessárias são os valores absolutos do incremento das variáveis dinâmicas após cada iteração. A partir das equações D.8 e D.6 encontra-se

$$\begin{cases} \Delta x = |x_{n+1} - x_n| = a|1 - y_0^2(1 - \gamma)^{2(n+1)}| \\ \Delta y = |y_{n+1} - y_n| = ((1 - \gamma)^{n+1} - (1 - \gamma)^n)|y_0| \end{cases}, \quad (\text{D.10})$$

de modo que a componente progressiva do LD, de acordo com a equação D.2, fica

$$LD^+(\mathbf{z}_0, N) = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{(a|1 - y_0^2(1 - \gamma)^{2(i+1)}|)^2 + (|y_0|((1 - \gamma)^{i+1} - (1 - \gamma)^i))^2}. \quad (\text{D.11})$$

Para tratar as iterações para trás no tempo, fazemos a mudança de índice $n + 1 \leftrightarrow n$ e escolhemos $b = 0$ no mapa D.4, resultando em

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - a(1 - y_n^2) \quad \text{mod}(1) \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{(1-\gamma)} \end{cases}. \quad (\text{D.12})$$

que também pode ser resolvido analiticamente a partir de uma condição inicial $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Sucessivas iterações de y_0 fornecem

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{y_0}{1 - \gamma}, \\ y_2 &= \frac{y_0}{(1 - \gamma)^2}, \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{y_0}{(1 - \gamma)^n}, \\ y_{n+1} &= \frac{y_0}{(1 - \gamma)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Substituindo y_n da equação D.13 em x_{n+1} da equação D.12 encontra-se

$$x_{n+1} = x_n + a \left(1 - \frac{y_0^2}{(1 - \gamma)^{2n}} \right), \quad (\text{D.14})$$

e realizando sucessivas iterações de x_0 ,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - a(1 - y_0^2), \\ x_2 &= x_0 - a(1 - y_0^2) - a \left(1 - \frac{y_0^2}{(1 - \gamma)^2} \right), \\ &= x_0 + a \sum_{i=0}^1 \left(1 - \frac{y_0^2}{(1 - \gamma)^{2i}} \right), \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + a \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{y_0^2}{(1 - \gamma)^{2i}} \right), \\ x_{n+1} &= x_0 + a \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{y_0^2}{(1 - \gamma)^{2i}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Assim, a solução analítica do mapa D.12 é dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0 - a \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{y_0^2}{(1-\gamma)^{2i}}\right) \\ y_{n+1} = \frac{y_0}{(1-\gamma)^{n+1}} \end{cases}, \quad (\text{D.16})$$

e os incrementos das variáveis dinâmicas, obtidos a partir das equações D.15 e D.13 são

$$\begin{cases} \Delta x = |x_{n+1} - x_n| = a \left| \left(1 - \frac{y_0^2}{(1-\gamma)^{2(n+1)}}\right) \right| \\ \Delta y = |y_{n+1} - y_n| = \frac{|y_0|}{(1-\gamma)^n} \left(\frac{1}{1-\gamma} - 1 \right) \end{cases}, \quad (\text{D.17})$$

de modo que a componente regressiva do LD, de acordo com a equação D.3, fica

$$LD^-(\mathbf{z}_0, N) = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\left(a \left| 1 - \frac{y_0^2}{(1-\gamma)^{2(i+1)}} \right| \right)^2 + \left(\frac{|y_0|}{(1-\gamma)^i} \left(\frac{1}{(1-\gamma)} - 1 \right) \right)^2}, \quad (\text{D.18})$$

onde os índices da somatória foram apropriadamente ajustados. Nota-se que os LDs para $b = 0$ independem de x_0 . Quando a dissipação é considerada, dado que $0 < \gamma < 1$, os termos proporcionais a $1/(1-\gamma)^i$ na equação D.18 se aproximam de infinito conforme i aumenta. Assim, $LD^-(\mathbf{z}_0, N)$ diverge para N grande o suficiente. Esse efeito é esperado e ocorre em sistemas dissipativos [67].

Para o mapa conservativo ($\gamma = 0$) obtêm-se $\Delta y = 0$ tanto para a componente progressiva quanto para a regressiva, e $LD^+ = LD^-$. As somas nas equações D.11 e D.18 podem ser resolvidas explicitamente, resultando em

$$LD^+(\mathbf{z}_0, N) = LD^-(\mathbf{z}_0, N) = Na|(1 - y_0^2)|. \quad (\text{D.19})$$

Identificando $\omega(y_0) = a(1 - y_0^2)$ como a frequência não perturbada do mapa M_{PN} , dado pela equação 2.45, nota-se que ambas as componentes do LD para o mapa conservativo não perturbado são iguais e proporcionais ao número de rotação, sendo a constante de proporcionalidade igual ao número de iterações N .

A figura D.1 mostra o LD^+ calculado sobre a linha $x = 0,5$, com $a = 0,4$, $b = 0,0$ e $\gamma = 0,1$. O máximo em $y_0 = 0$ corresponde à curva *shearless*, e as

cúspides em $y_0 = \pm 1$ correspondem às linhas de pontos fixos parabólicos ¹.

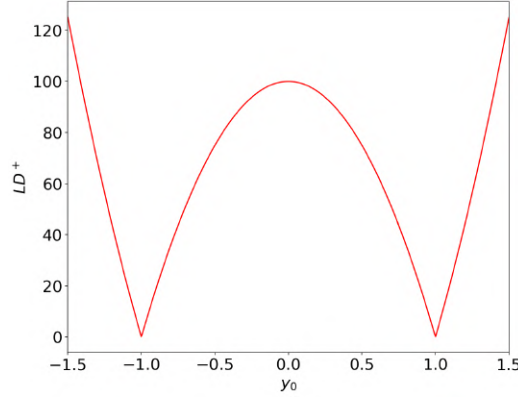


Figura D.1: Componente progressiva do LD para MNTD com $a = 0,4$, $b = 0,0$ e $\gamma = 0,1$. $N = 100$ iterações foram utilizadas no cálculo.

D.3 Mapa perturbado conservativo

Quando a perturbação é ligada, isto é, $b > 0$, os LDs precisam ser calculados numericamente. No caso conservativo, para valores grandes de N verifica-se que LD^+ e LD^- são bastante semelhantes, então serão exibidos apenas resultados da componente progressiva com $N = 10^4$. Os LDs calculados com tempos curtos serão considerados posteriormente.

Na figura D.2 foram considerados $a = 0,4$ e $b = 0,1$. O espaço de fase é mostrado no painel (a), a perturbação gera ressonâncias e a curva *shearless* é destacada em vermelho. No painel (b) é exibido o perfil do número de rotação calculado sobre a reta $x = 0,5$ e com $y \in [-1,5, 1,5]$. O valor extremo de ω , marcado com um ponto vermelho, pode ser utilizado para encontrar a coordenada y correspondente a um ponto sobre a curva *shearless*. No painel (c) é apresentado o LD^+ calculado sobre o espaço de fase, e comparando com o painel (a), vemos que essa medida distingue as ilhas de ressonância principais das curvas invariantes *spanning*. O painel (d) mostra os valores de LD^+ sobre a reta $x = 0,5$, que apresenta semelhanças com o número

¹No mapa conservativo e não perturbado as linhas $y_0 = \pm 1$ são linhas de pontos fixos não isolados. Ambos autovalores da matriz Jacobiana avaliada em pontos sobre essas linhas são iguais a 1.

de rotação no painel (b), exceto sobre as ilhas (aproximadamente em $y_0 = 1$); enquanto o número de rotação apresenta um platô nessa região, o LD^+ apresenta um ponto de cúspide sobre o ponto fixo estável e dois outros pontos de cúspide em seus lados, correspondendo à fina camada caótica. No perfil do número de rotação observamos pequenos platôs associados com pequenas ilhas de ressonância, enquanto no perfil do LD^+ essas ilhas aparecem como pequenas estruturas parabólicas. Também observamos oscilações irregulares próximas de $y_0 = -1$, onde está o ponto fixo instável e o comportamento caótico ocupa uma região maior do espaço de fases; essas oscilações também são observadas no perfil do número de rotação.

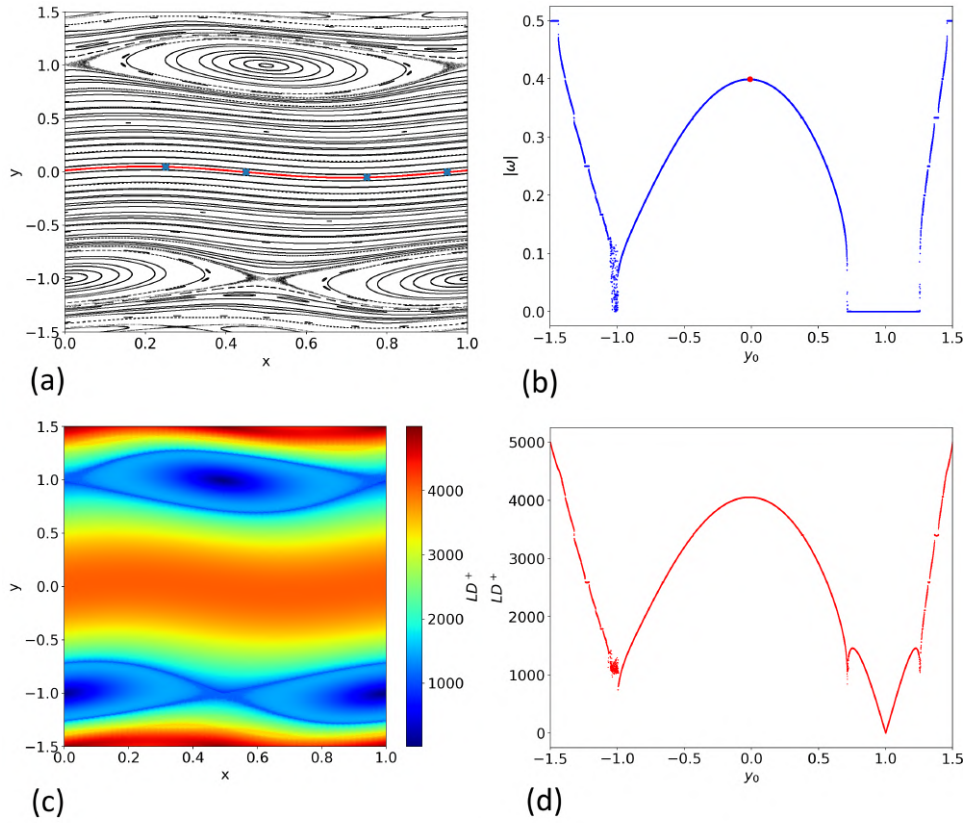


Figura D.2: (a) Espaço de fases do MNT com $a = 0,4$ e $b = 0,1$. (b) Correspondente perfil do número de rotação calculado com $N = 10^4$, $x_0 = 0,5$ e $y_0 \in [-1,5, 1,5]$. (c) Componente progressiva do LD calculada com $N = 10^4$ projetada sobre o espaço de fase. (d) Correspondente perfil do LD^+ sobre a reta $x = 0,5$.

É possível aprimorar a visualização das estruturas no espaço de fase calculando uma medida baseada no Laplaciano do LD , especificamente $\log(|\nabla^2 LD|)$ [62]. Como mostrado, o LD apresenta oscilações irregulares ao cruzar separatrizes ou regiões de caos. A medida baseada nas derivadas segundas é capaz de quantificar a regularidade do LD , de modo que o valor de $\nabla^2 LD$ é diversas ordens de grandeza maior sobre as separatrizes e mares de caos [62]. Por conta disso é conveniente tomar o logaritmo ao fazer uma representação gráfica como a da figura D.3, que revela as cadeias de ressonância e os mares de caos com uma resolução melhor quando comparada com a figura D.2(a).

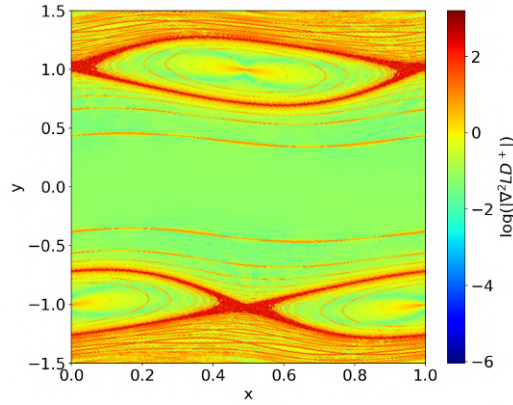


Figura D.3: $\log(|\nabla^2 LD^+|)$ calculado sobre o espaço de fase com $N = 10^4$ para $a = 0, 4$ e $b = 0, 1$.

Calcular os LDs com um número pequeno de iterações revela segmentos das variedades das órbitas periódicas instáveis. As componentes progressivas e regressivas da medida baseada no Laplaciano são mostradas na figura D.4, onde foram considerados $N = 10$ (painéis (a) e (b)) e $N = 100$ (painéis (c) e (d)) para ambas componentes, e $a = 0, 4$ e $b = 0, 5$. Segmentos da variedade instável e estável são revelados por $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ e $\log(|\nabla^2 LD^+|)$, respectivamente. Porém, conforme N aumenta, qualquer informação a respeito da geometria das variedades hiperbólicas é perdida completamente, e ambas as componentes são qualitativamente equivalentes.

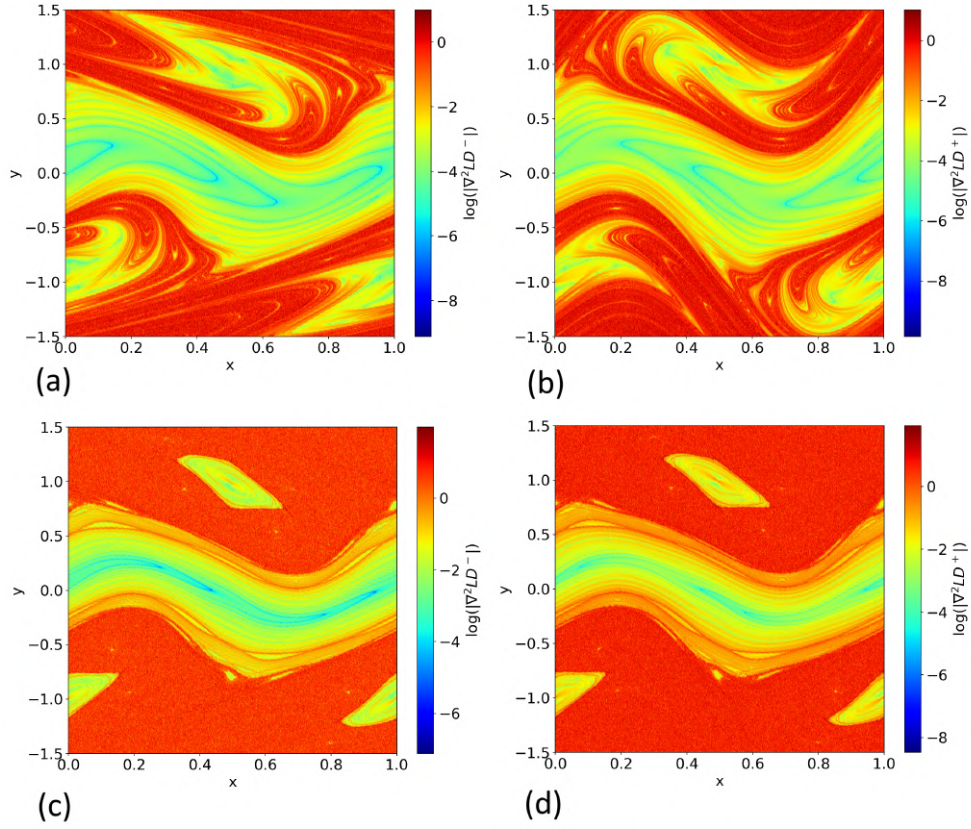


Figura D.4: $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ (esquerda) e $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ (direita) calculados sobre o espaço de fase para $a = 0,4$ e $b = 0,5$, com (a), (b) $N = 10$ e (c), (d), $N = 100$.

A seguir será explorada brevemente a questão de barreiras de transporte no MNT. A quebra da curva *shearless* caracteriza a transição para o caos global, uma vez que os mares de caos não são mais limitados por ela, que é uma barreira de transporte total [32]. Na figura D.5 é mostrado um diagrama de quebra obtido calculando $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ com um ponto indicador como condição inicial, em uma grade de 1000 x 1000 parâmetros. Valores mais altos, coloridos em vermelho, indicam comportamento caótico e a quebra da barreira *shearless*. Valores mais baixos, coloridos de azul a amarelo, indicam comportamento regular e a presença da curva *shearless*. Esse diagrama está de acordo com diagramas obtidos com outros métodos.

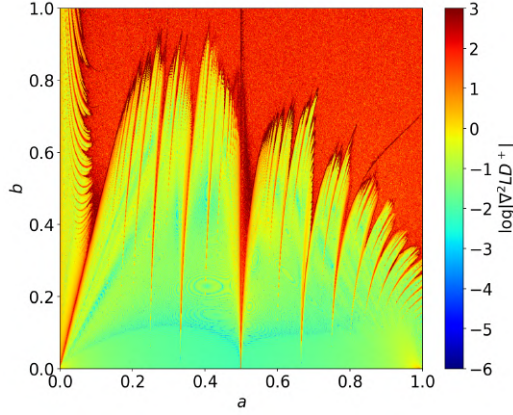


Figura D.5: Diagrama de quebra da curva *shearless* obtido a partir de $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ e $N = 10^4$. A condição inicial considerada foi um ponto indicador.

Mesmo após a quebra da curva *shearless* o transporte em sua antiga vizinhança pode ser reduzido, o que caracteriza a presença de uma barreira de transporte parcial [26, 68, 69]. Entretanto, pequenas mudanças nos parâmetros pode causar um aumento no transporte devido a cruzamentos heteroclínicos nas variedades das órbitas gêmeas e o mecanismo de *turnstile* [5, 68].

Para avaliar a capacidade dos LDs em distinguir casos de baixo e alto transporte após a quebra da curva *shearless*, selecionamos duas configurações representativas com $b = 0,619$. Os espaços de fase correspondentes são mostrados na figura D.6, com (a) $a = 0,642$ e (b) $a = 0,645$. Em ambos os casos existem cadeias gêmeas de período 5, e as órbitas periódicas instáveis correspondentes da cadeia superior (inferior) são representadas por círculos (cruzes) vermelhas. Amplificações das regiões destacadas pelos quadrados azuis são exibidas em (c) e (d) para ambos os casos.

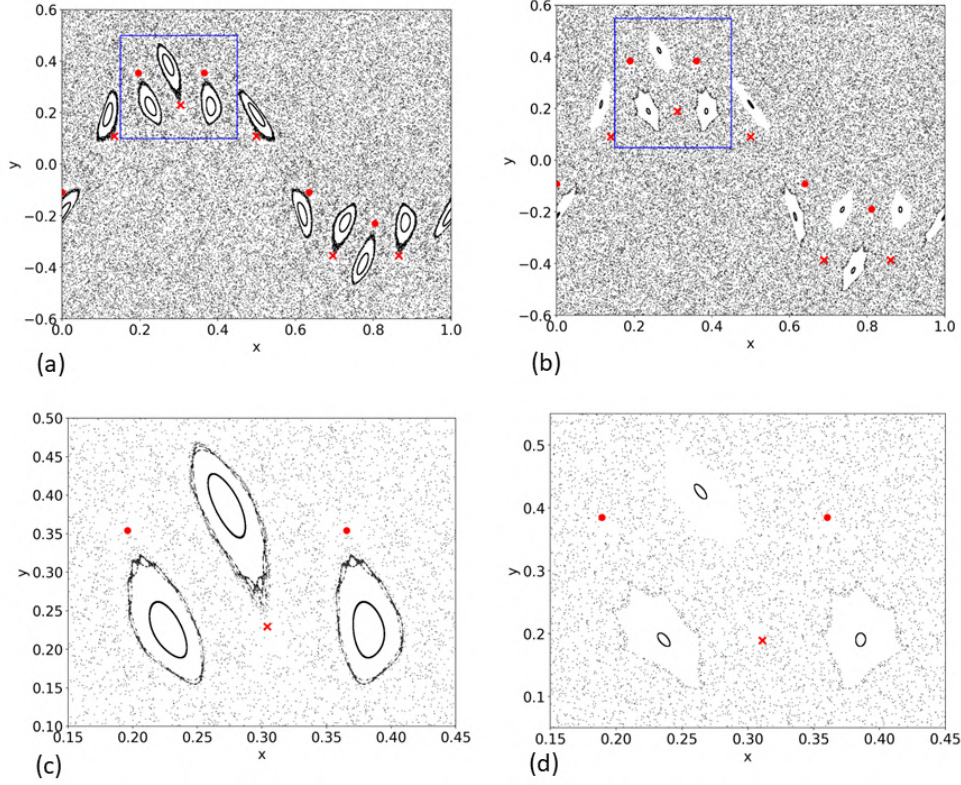


Figura D.6: Espaços de fase do MNT com $b = 0,619$. (a) $a = 0,642$ and (b) $a = 0,645$. Órbitas instáveis de período 5 são marcadas por círculos e cruzes. (c) e (d) são ampliações dos quadrados azuis em (a) e (b), respectivamente.

Para quantificar o transporte em ambos os casos, distribuimos $N_T = 10^3$ condições iniciais sobre $y = -0,9$ e as evoluímos por, no máximo, 5000 iterações. Então, a transmissividade $T(n)$ é definida como a fração do número de condições iniciais $N(n)$ que cruzaram a linha $y = 0,9$ após n iterações,

$$T(n) = \frac{N(n)}{N_T}, \quad (\text{D.20})$$

onde $N(n)$ representa o número de condições iniciais que cruzaram a linha especificada após n iterações. Na figura D.7 é exibida a transmissividade para ambas as configurações da figura D.6. Observa-se que cerca de 1% das condições iniciais para $a = 0,642$ cruza a linha $y = 0,9$ após 5000 iterações (curva preta), enquanto aproximadamente 16% das condições iniciais para

$a = 0,645$ atingem a mesma condição após o mesmo número de iterações (curva vermelha). Isso sugere a presença de uma barreira de transporte parcial na primeira configuração, que causa o efeito de aprisionamento temporário ou *stickiness*.

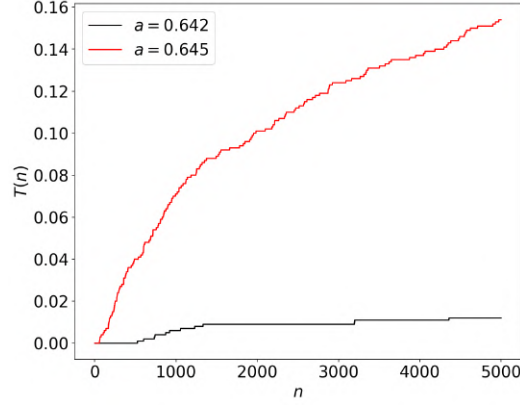


Figura D.7: Transmissividade como função do número de iterações para $b = 0,619$ e $a = 0,642$ (preto), e $a = 0,645$ (vermelho).

Na figura D.8, visualizamos a geometria das variedades das órbitas instáveis de período 5 projetando $\log(|\nabla^2 LD|)$ nos espaços de fase da figura D.6 (c) e (d). No painel (a), para o qual uma barreira de transporte parcial é esperada devido à baixa transmissividade, não aparecem cruzamento heteroclínicos entre as variedades das órbitas gêmeas instáveis. Em contraste, no painel (b), com transmissividade mais alta e sem barreira parcial, aparecem conexões heteroclínicas das variedades, justificando o maior transporte.

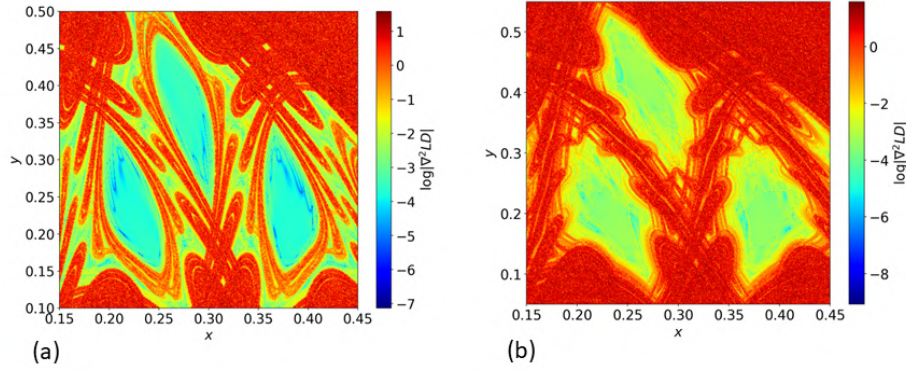


Figura D.8: Projeções de $\log(|\nabla^2 LD|)$ calculado com $N = 50$ para $b = 0,619$ e (a) $a = 0,642$, e (b) $a = 0,645$

D.4 Mapa perturbado dissipativo

Agora consideramos o mapa dissipativo, equação 3.4 com $\gamma = 0,1$ e duas configurações diferentes, com espaços de fase mostradas na figura D.9. Em (a) foi utilizado $a = 0,2$ e $b = 0,4$, e em (b), $a = 0,59$ e $b = 0,7$. O atrator *shearless* é exibido em preto e os atratores pontuais em azul. Algumas iterações do transiente são mostradas em vermelho.

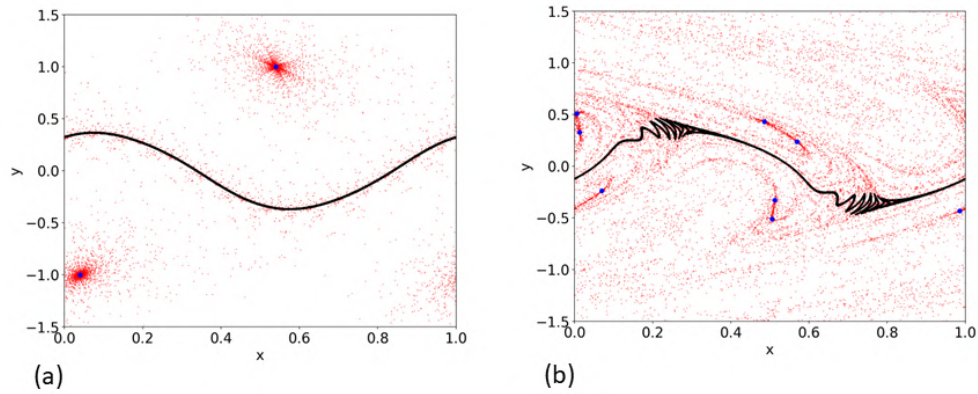


Figura D.9: Espaço de fase do MNTD com $\gamma = 0,1$. (a) $a = 0,2$ e $b = 0,4$. (b) $a = 0,59$ e $b = 0,7$.

O resultado do cálculo dos LDs com poucas iterações no cenário dissipativo é bastante semelhante ao cenário conservativo. Como é mostrado na figura D.10, considerando $N = 5$ iterações e os mesmos parâmetros da figura D.9(b), $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ mostra segmentos da variedade instável, enquanto $\log(|\nabla^2 LD^+|)$ mostra segmentos da variedade estável.

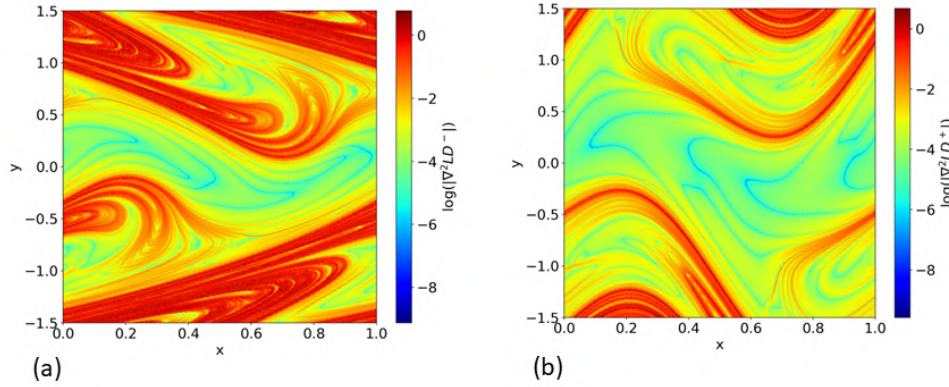


Figura D.10: (a) $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ (esquerda) e (b) $\log(|\nabla^2 LD^+|)$ calculados sobre o espaço de fase para $\gamma = 0, 1$, $a = 0, 59$ e $b = 0, 7$, com $N = 5$.

Na figura D.11 são exibidos os LDs e as medidas baseadas no Laplaciano, calculados com $N = 10^3$ para os mesmos parâmetros da figura D.9(b), que apresenta o atrator *shearless* caótico e um par de atratores gêmeos de período 4. No painel (a) é mostrado o LD^- ; podemos ver segmentos da variedade instável sendo destacados e os valores numéricos atingindo a ordem de 10^{93} , apresentando a divergência discutida na seção D.2 deste apêndice. No painel (b) observa-se que o LD^+ distingue as diferentes bacias de atração; a bacia de atração do atrator *shearless* caótico aparece em vermelho e as bacias dos atratores periódicos gêmeos em azul escuro. O painel (c) mostra $\log(|\nabla^2 LD^-|)$, e comparando com a figura D.9(b), percebe-se que os atratores aparecem nos valores mais baixos dessa métrica, enquanto os valores mais altos destacam a variedade instável. No painel (d), $\log(|\nabla^2 LD^+|)$ destaca nos valores mais altos a fronteira das bacias, altamente fractalizada. Assim, para a caracterização do sistema dissipativo, $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ pode ser útil para localizar os atratores, com uma resolução limitada, enquanto LD^+ destaca suas bacias de atração.

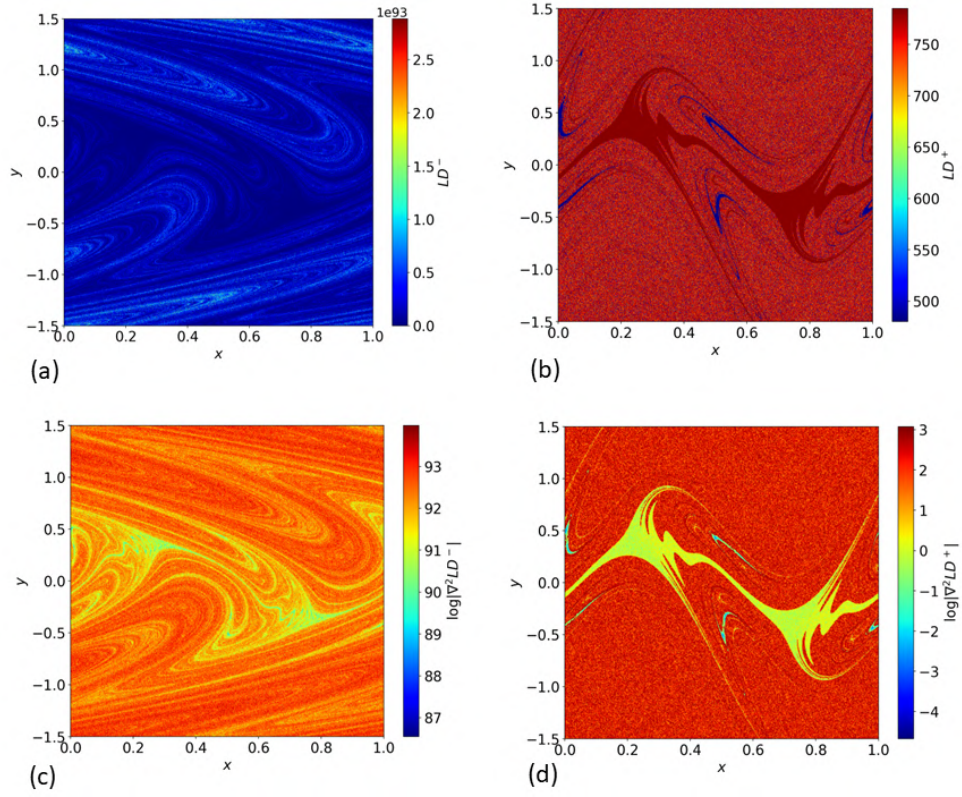


Figura D.11: (a) LD^- , (b) LD^+ , (c) $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ e (d) $\log(|\nabla^2 LD^+|)$, com $\gamma = 0,1$, $a = 0,59$ e $b = 0,7$ calculados com $N = 10^3$.

Considerando a configuração da figura D.9(a), com o atrator *shearless* quase-periódico e um par de atratores gêmeos de período 1, o $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ e LD^+ são apresentados na figura D.12. Vemos que os atratores e suas bacias de atração são relevados nos painéis (a) e (b), respectivamente.

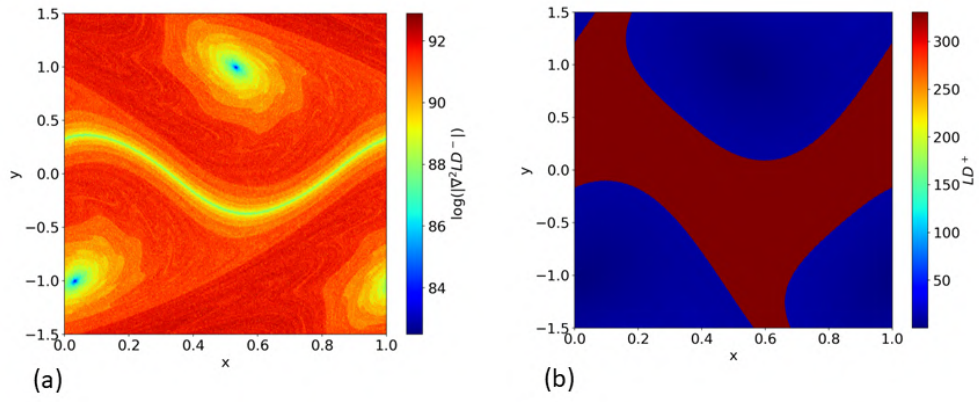


Figura D.12: (a) $\log(|\nabla^2 LD^-|)$ e (b) LD^+ , com $\gamma = 0, 1$, $a = 0, 2$ e $b = 0, 4$ calculados com $N = 10^3$.

Apêndice E

Sistemas Hamiltonianos não-canônicos e dissipação metriplética

Sistemas Hamiltonianos não-canônicos correspondem a uma generalização dos sistemas Hamiltonianos apresentados no capítulo 2. A diferença fundamental é que o espaço de fases é definido por variáveis arbitrárias, e não pares canônicos de posição e momentum generalizado, podendo, inclusive, ter dimensão ímpar.

Sistemas Hamiltonianos autônomos conservam a energia, o que pode ser visto como uma extensão dinâmica da primeira lei da termodinâmica [41]. A dissipação metriplética [38, 41] é uma forma de dissipação adicionada à estrutura Hamiltoniana não-canônica que conserve a energia porém produz uma quantia com características de entropia, gerando uma analogia com a segunda lei da termodinâmica. O efeito da dissipação metriplética é gerar a convergência para um ponto de equilíbrio do sistema Hamiltoniano, o que ocorre quando a entropia é maximizada.

Neste apêndice são apresentadas notas introdutórias sobre esses assuntos, ilustradas com as equações de Euler para a rotação de um corpo rígido.

E.1 Sistemas Hamiltonianos não-canônicos

Como discutido no capítulo 2, as $2N$ equações do movimento de um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}} \nabla H(\mathbf{x}), \quad (\text{E.1})$$

onde $\mathbf{J}_{\mathbf{c}}$ é a matriz de Poisson canônica

$$\mathbf{J}_{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\mathbf{N}} & \mathbf{I}_{\mathbf{N}} \\ -\mathbf{I}_{\mathbf{N}} & \mathbf{0}_{\mathbf{N}} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Fazendo uso de $\mathbf{J}_{\mathbf{c}}$, o parêntese de Poisson de duas funções $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ pode ser escrito compactamente como

$$[f, g] = (\nabla f)^T \mathbf{J}_{\mathbf{c}} \nabla g, \quad (\text{E.3})$$

e a evolução temporal de uma função $f(\mathbf{x})$ é dada pelo seu parêntese de Poisson com a Hamiltoniana, isto é,

$$\dot{f} = [f, H] = (\nabla f)^T \mathbf{J}_{\mathbf{c}} \nabla H. \quad (\text{E.4})$$

O parêntese de Poisson obedece às seguintes propriedades algébricas[19]:

1. Bilinearidade:

$$[af + bg, h] = a[f, g] + b[g, h]; \quad (\text{E.5})$$

2. Anti-simetria (ou anti-comutatividade):

$$[f, g] = -[g, h], \quad (\text{E.6})$$

de modo que

$$[f, f] = 0; \quad (\text{E.7})$$

3. Regra de Leibniz:

$$[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g; \quad (\text{E.8})$$

4. Identidade de Jacobi:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0; \quad (\text{E.9})$$

onde f, g, h são funções das variáveis do espaço de fases e $a, b \in \mathbb{R}$. A conservação da energia decorre de E.7, uma vez que $[H, H] = 0$.

Uma álgebra de Lie [10, 19] é um espaço vetorial munido de uma operação $[\cdot, \cdot]$ que satisfaz as propriedades dadas pelas equações E.5, E.6 e E.9. O espaço vetorial definido pelas funções do espaço de fases juntamente com o parêntese de Poisson formam uma álgebra de Lie¹ [10, 19].

¹Outros exemplos de álgebras de Lie são o produto vetorial de dois vetores e o comutador de duas matrizes.

Sistemas Hamiltonianos canônicos possuem um espaço de fases com dimensão par e um parêntese de Poisson definido pela matriz $\mathbf{J}_c$, que não depende das variáveis do espaço de fases. Um sistema pode ser Hamiltoniano em um sentido generalizado se as equações do movimento puderem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\nabla H(\mathbf{x}), \quad (\text{E.10})$$

onde o vetor $\mathbf{x}$ tem L elementos, que pode ser um número ímpar, $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ é uma matriz $L \times L$ e o parêntese de Poisson definido por

$$[f, g] = (\nabla f)^T \mathbf{J} \nabla g, \quad (\text{E.11})$$

obedece as propriedades dadas pelas equações E.5 a E.9. Se $\mathbf{J}$ não for da forma da equação 2.7, podendo inclusive depender das variáveis do espaço de fases, o parêntese é dito não-canônico, e o sistema dado por E.10 é um sistema Hamiltoniano não-canônico [10, 38].

Dois tipos de constantes do movimento são possíveis em sistemas Hamiltonianos não-canônicos. O primeiro tipo, denotado por $\mathcal{P} = \{P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \dots\}$ é dado por funções que comutam com uma dada função Hamiltoniana, tal como as constantes do movimento em sistemas canônicos; então, cada $P_i(\mathbf{x})$ satisfaz $[P_i, H] = 0$. O segundo tipo de invariantes são chamados de invariantes de Casimir, denotados por $\mathcal{C} = \{C_1(\mathbf{x}), C_2(\mathbf{x}), \dots\}$ e estão relacionados com o próprio parêntese de Poisson; eles satisfazem $[C_i, f] = 0$ para qualquer função $f(\mathbf{x})$ e são possíveis quando $\det(\mathbf{J}) = 0$.

Explicitamente, o parêntese de Poisson de um invariante de Casimir $C(\mathbf{x})$ e uma função qualquer $f(\mathbf{x})$ é

$$[C, f] = -[f, C] = -(\nabla f)^T \mathbf{J} \nabla C = 0, \quad (\text{E.12})$$

onde foi utilizada a propriedade de anti-simetria. Essa igualdade só é verdadeira para qualquer $f(\mathbf{x})$ se ∇C for um elemento do núcleo² de $\mathbf{J}$, de onde decorre a condição $\det(\mathbf{J}) = 0$ para a existência de invariantes de Casimir, uma vez que esta é uma condição para que o núcleo não seja vazio.

²O núcleo ou *kernel* de uma transformação linear $\mathbf{L}$ corresponde ao subconjunto do domínio de $\mathbf{L}$ que é mapeado no vetor nulo.

Os invariantes de Casimir são constantes do movimento associadas ao próprio espaço de fase, uma vez que para qualquer Hamiltoniana H , é verdade que

$$\dot{C} = [C, H] = 0. \quad (\text{E.13})$$

Portanto, as trajetórias são confinadas à superfícies de C constante, e diz-se que o espaço de fase é folheado por folhas de Casimir.

Também é possível encontrar uma formulação Hamiltoniana não-canônica para alguns sistemas que são descritos por equações diferenciais parciais [10], mas isso não será discutido nestas notas. O foco será dado a sistemas tridimensionais para os quais os elementos da matriz de Poisson são lineares nas variáveis dinâmicas $\mathbf{x}$, ou seja,

$$J_{i,k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 c_{i,k,j} x_j. \quad (\text{E.14})$$

Nesses casos, diz-se que o colchete é Lie-Poisson, e os números $c_{i,k,j}$ são constantes de estrutura de uma álgebra de Lie [10]. De acordo com a classificação de Bianchi [70], existem nove álgebras de Lie distintas em três dimensões. Cada uma delas pode ser usada para definir um colchete de Poisson e, com uma escolha apropriada de função Hamiltoniana, elas podem descrever algum sistema físico.

E.2 Exemplo: Corpo rígido em rotação livre

Usando um referencial em rotação com seus eixos fixos a um corpo rígido e paralelos aos eixos principais de inércia [19], as equações de Euler que descrevem a dinâmica de rotação na ausência de torques, e em termos das componentes do momento angular, são [38, 39]

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) x_2 x_3, \quad (\text{E.15})$$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) x_3 x_1, \quad (\text{E.16})$$

$$\dot{x}_3 = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) x_1 x_2, \quad (\text{E.17})$$

onde x_i , com $i = 1, 2, 3$ são as componentes do momento angular e I_i , com $i = 1, 2, 3$ são os momentos de inércia principais.

Esse sistema conserva duas quantidades [39], a energia cinética rotacional:

$$H = \frac{x_1^2}{2I_1} + \frac{x_2^2}{2I_2} + \frac{x_3^2}{2I_3}, \quad (\text{E.18})$$

e o quadrado da magnitude do momento angular:

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (\text{E.19})$$

O primeiro invariante, dado pela equação E.18, pode ser usado para reformular as equações E.15 a E.17 em forma Hamiltoniana em termos de um parêntese não-canônico. A matriz de Poisson neste caso é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.20})$$

que corresponde à álgebra de Lie tipo IX [70], e as equações E.15 a E.17 são equivalentes à equação E.10. Pode-se verificar que ∇x^2 é um vetor do núcleo da matriz E.20, então o segundo invariante, x^2 , é uma função de Casimir.

O Casimir dado pela equação E.19 define uma esfera no espaço de fase, enquanto a Hamiltoniana dada pela equação E.18 define um elipsoide com semieixos proporcionais aos momentos de inércia. Isso implica que qualquer solução do sistema deve estar na interseção dessas duas superfícies, como ilustrado na figura E.1.

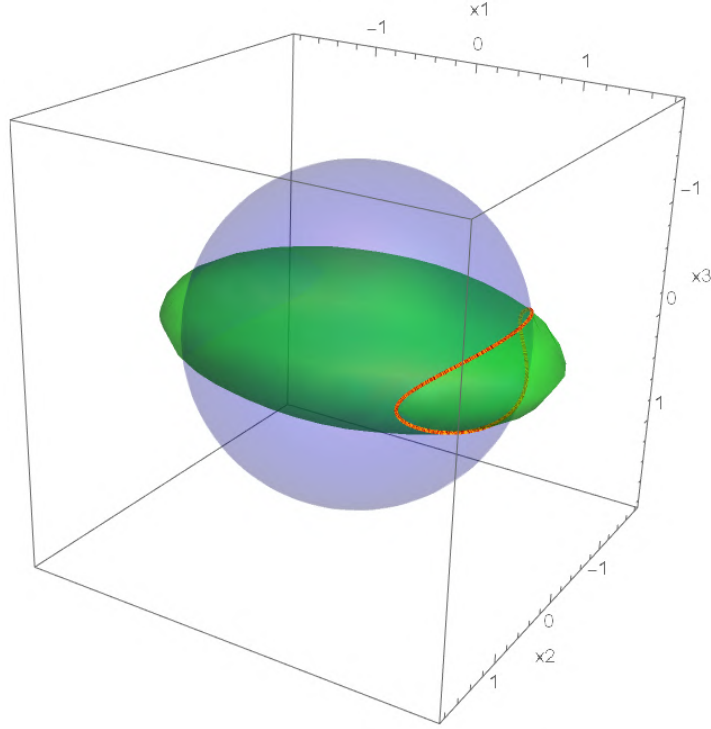


Figura E.1: Elipsoide de energia (verde), esfera de Casimir (azul) e uma solução do corpo rígido livre destacada em uma das interseções das superfícies. As condições iniciais consideradas foram $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ e $x_3(0) = 0.1$, e $I_1 = 10$, $I_2 = 5$, e $I_3 = 1$.

E.3 Dissipação metriplética

O formalismo metriplético é uma extensão do formalismo Hamiltoniano que inclui dissipação e convergência para um equilíbrio assintoticamente estável [38]. Ele combina o parêntese de Poisson, que é antissimétrico e consequentemente preserva a Hamiltoniana, com um parêntese simétrico projetado para conservar a Hamiltoniana enquanto aumenta uma função de entropia S . A entropia é construída a partir dos invariantes de Casimir $\mathcal{C}$, e a sua escolha define o ponto de equilíbrio que será atingido [38]. Essa é uma formulação dinâmica análoga à primeira e segunda leis da termodinâmica: a primeira lei é refletida pela conservação a energia, H , e a segunda lei é representada pelo aumento da entropia, S , até que o equilíbrio seja alcançado.

Seja S um elemento de $\mathcal{C}$. Então S é uma candidata a entropia para o sistema metriplético e determina o estado para o qual o sistema converge. O aumento da entropia é causado por um parêntese

$$(f, g) = (\nabla f)^T \mathbf{\Gamma} \nabla g, \quad (\text{E.21})$$

onde a matriz $\mathbf{\Gamma}$ é real e simétrica e portanto tem auto-valores maiores ou iguais a zero ou menores ou iguais a zero [38]. Especificamente será considerado que os autovalores de $\mathbf{\Gamma}$ são maiores ou iguais a zero, de modo que tal parêntese satisfaz

$$(f, g) = (g, f), \quad (\text{E.22})$$

e

$$(f, f) \geq 0, \quad (\text{E.23})$$

para quaisquer funções de espaço de fase $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$. A conservação de energia é garantida pela seguinte condição

$$(f, H) = (\nabla f)^T \mathbf{\Gamma} \nabla H = 0, \quad (\text{E.24})$$

para todo $f(\mathbf{x})$, que é satisfeita escolhendo $\mathbf{\Gamma}$ tal qual ∇H esteja em seu núcleo. O parêntese metriplético é então definido como

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle = [f, g] + (f, g), \quad (\text{E.25})$$

onde $[,]$ é um parêntese de Poisson. Ao definir a energia livre,

$$F = H + \alpha S, \quad (\text{E.26})$$

onde α é uma constante positiva, a evolução de uma função $f(\mathbf{x})$ pode ser escrita como:

$$\dot{f} = \langle\langle f, F \rangle\rangle = [f, H] + \alpha(f, S). \quad (\text{E.27})$$

A partir das propriedades apresentadas verifica-se que um sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}} = \langle\langle \mathbf{x}, F \rangle\rangle$ satisfaz:

$$\dot{H}(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{E.28})$$

uma vez que $[H, H] = 0$ e $(H, S) = 0$, e

$$\dot{S}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad (\text{E.29})$$

dado que $[S, H] = 0$ e $\alpha(S, S) \geq 0$.

As equações de movimento também podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\nabla H + \alpha\mathbf{\Gamma}\nabla S. \quad (\text{E.30})$$

E.4 Exemplo: Corpo rígido com torque metriplético

Para o corpo rígido livre apresentado na seção E.2, foi demonstrado que x^2 é um invariante de Casimir. Assim, pode-se escolher $S = x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ para ser a entropia de uma formulação metriplética desse sistema [38, 39]. O próximo passo é construir um parêntese simétrico,

$$(f, g) = (\nabla f)^T \mathbf{\Gamma} \nabla g, \quad (\text{E.31})$$

de modo que a energia seja conservada. Para isso, exigimos que

$$\mathbf{\Gamma} \nabla H = 0. \quad (\text{E.32})$$

A escolha mais simples possível para $\mathbf{\Gamma}$ é

$$\Gamma_{i,j} = \left(\delta_{i,j} \nabla H \cdot \nabla H - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right), \quad (\text{E.33})$$

que é proporcional ao projetor perpendicular a ∇H [38, 39].

As equações de movimento resultantes são:

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) x_2 x_3 + 2\alpha \left[-\frac{x_1 x_2^2}{I_1 I_2} - \frac{x_1 x_3^2}{I_1 I_3} + x_1 \left(\frac{x_2^2}{I_2^2} + \frac{x_3^2}{I_3^2} \right) \right], \quad (\text{E.34})$$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) x_3 x_1 + 2\alpha \left[-\frac{x_2 x_1^2}{I_1 I_2} - \frac{x_2 x_3^2}{I_2 I_3} + x_2 \left(\frac{x_1^2}{I_1^2} + \frac{x_3^2}{I_3^2} \right) \right], \quad (\text{E.35})$$

$$\dot{x}_3 = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) x_1 x_2 + 2\alpha \left[-\frac{x_3 x_1^2}{I_1 I_3} - \frac{x_3 x_2^2}{I_2 I_3} + x_3 \left(\frac{x_1^2}{I_1^2} + \frac{x_2^2}{I_2^2} \right) \right]. \quad (\text{E.36})$$

A figura E.2 mostra a convergência de uma solução para um ponto fixo e a superfície de energia.

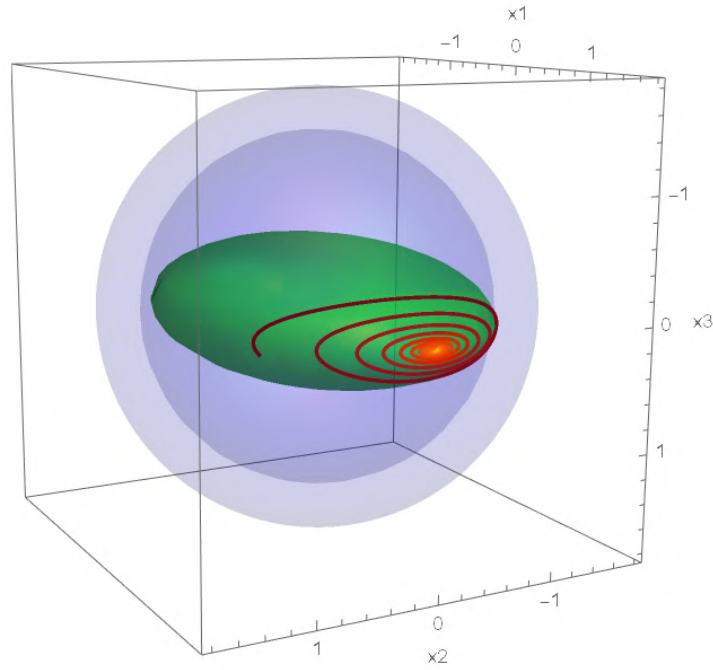


Figura E.2: Elipsoide de energia (verde), esferas de Casimir inicial e final (azul) e uma solução do corpo rígido metriplético. As condições iniciais consideradas foram $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ e $x_3(0) = 0.1$, e $\alpha = 0.1$, $I_1 = 10$, $I_2 = 5$, e $I_3 = 1$.

A evolução temporal de H e S , exibindo a conservação de energia e o crescimento da entropia, é mostrada na figura E.3.

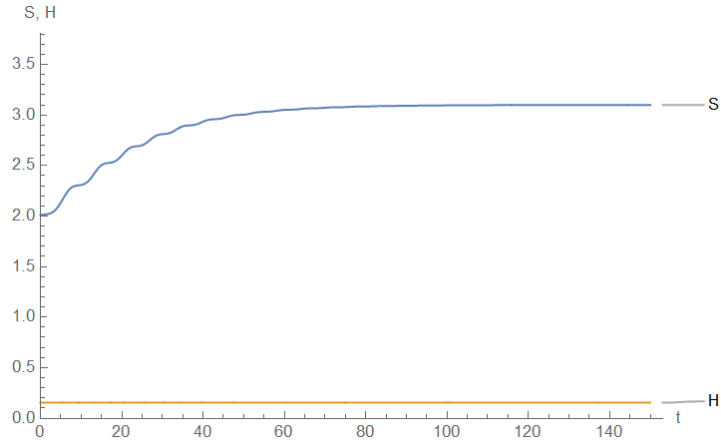


Figura E.3: Evolução temporal da função de Casimir S e da Hamiltoniana H .

O efeito do torque metriplético é fazer com que o corpo rígido alinhe a sua rotação com um eixo principal de inércia, enquanto conserva sua energia cinética. Para os parâmetros escolhidos, a convergência ocorre para x_1 , conforme mostrado na figura E.4.

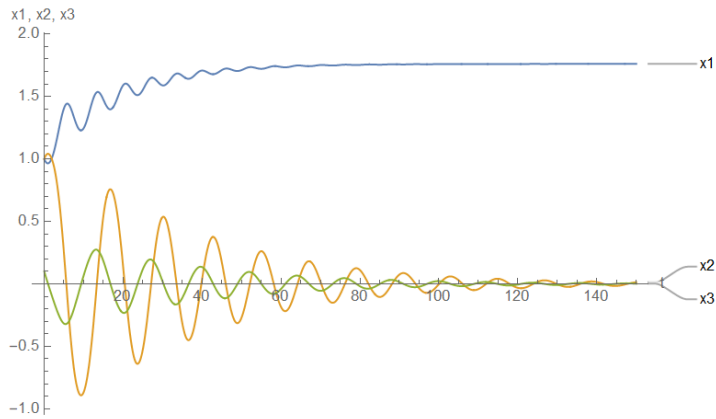


Figura E.4: Evolução temporal das componentes do momento angular.

Apêndice F

Artigos publicados

Os resultados apresentados no Capítulo 4 desta tese foram publicados na revista *Physical Review E*, com o título ”*Destruction and resurgence of the quasiperiodic shearless attractor*”.

PHYSICAL REVIEW E **104**, 014207 (2021)

Destruction and resurgence of the quasiperiodic shearless attractor

R. Simile Baroni^{*} and R. Egydio de Carvalho[†]

Universidade Estadual Paulista–UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas–IGCE, Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Ciências da Computação, Rio Claro-SP 13506-900, Brazil



(Received 21 April 2021; accepted 21 June 2021; published 12 July 2021)

We consider a dissipative version of the standard nontwist map. It is known that nontwist systems may present a robust transport barrier, called shearless curve, that gives rise to an attractor that retains some of its properties when dissipation is introduced. This attractor is known as shearless attractor, and it may be quasiperiodic or chaotic depending on the control parameters. We describe a route for the destruction and resurgence of the quasiperiodic shearless attractor by analyzing the manifolds of the unstable periodic orbits (UPOs) which are fixed points of the map. We show that the shearless attractor is destroyed by a collision with the UPOs and it resurges after the reconnection of the unstable manifolds of different UPOs.

DOI: [10.1103/PhysRevE.104.014207](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.014207)

Os resultados apresentados no Capítulo 5 foram publicados na revista *Physical Review E* no artigo intitulado ”*Chaotic saddles and interior crises in a dissipative nontwist system*”.

Chaotic saddles and interior crises in a dissipative nontwist system

R. Simile Baroni^{1,*}, R. Egydio de Carvalho¹, I. L. Caldas², R. L. Viana^{2,3} and P. J. Morrison⁴

¹*Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Ciências da Computação, Universidade Estadual Paulista–UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas–IGCE, 13506-900 Rio Claro-SP, Brazil*

²*Universidade de São Paulo-USP, Instituto de Física-IF, 05508-900 São Paulo-SP, Brazil*

³*Departamento de Física-DF, Universidade Federal do Paraná-UFPR, 80060-000 Curitiba, PR, Brazil*

⁴*Institute for Fusion Studies, Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, Texas 78712, USA*



(Received 13 November 2022; accepted 31 January 2023; published 24 February 2023)

We consider a dissipative version of the standard nontwist map. Nontwist systems present a robust transport barrier, called the shearless curve, that becomes the shearless attractor when dissipation is introduced. This attractor can be regular or chaotic depending on the control parameters. Chaotic attractors can undergo sudden and qualitative changes as a parameter is varied. These changes are called crises, and at an interior crisis the attractor suddenly expands. Chaotic saddles are nonattracting chaotic sets that play a fundamental role in the dynamics of nonlinear systems; they are responsible for chaotic transients, fractal basin boundaries, and chaotic scattering, and they mediate interior crises. In this work we discuss the creation of chaotic saddles in a dissipative nontwist system and the interior crises they generate. We show how the presence of two saddles increases the transient times and we analyze the phenomenon of crisis induced intermittency.

DOI: [10.1103/PhysRevE.107.024216](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.024216)

Por fim, os resultados apresentados no Apêndice D foram publicados foram publicados na revista *Physical Review E* no artigo intitulado “*Lagrangian descriptors: The shearless curve and the shearless attractor*”.

Lagrangian descriptors: The shearless curve and the shearless attractor

R. Simile Baroni^{*,†} and R. Egydio de Carvalho[†]

Universidade Estadual Paulista–UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas–IGCE, Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Ciências da Computação, 13506-900 Rio Claro, São Paulo, Brazil



(Received 5 October 2023; revised 14 December 2023; accepted 12 January 2024; published 7 February 2024)

Hamiltonian systems with a nonmonotonic frequency profile are called nontwist. One of the key properties of such systems, depending on adjustable parameters, is the presence of a robust transport barrier in the phase space called the shearless curve, which becomes the equally robust shearless attractor when dissipation is introduced. We consider the standard nontwist map with and without dissipation. We derive analytical expressions for the Lagrangian descriptor (LD) for the unperturbed map and show how they are related to the rotation number profile. We show how the LDs can reconstruct finite segments of the invariant manifolds for the perturbed map. In the conservative case, we demonstrate how the LDs distinguish the chaotic seas from regular structures. The LDs also provide a remarkable tool to identify when the shearless curve is destroyed: we present a fractal boundary, in the parameter space, for the existence or not of the shearless torus. In the dissipative case, we show how the LDs can be used to localize point attractors and the shearless attractor and distinguish their basins of attraction.

DOI: [10.1103/PhysRevE.109.024202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.024202)