

IFT

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

138

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/99

OK

**Explorando o Modelo  $\sigma$  Supersimétrico**

Breno Cesar de Oliveira Imbiriba.

Orientador

*Prof. Dr. Maria Cristina Batoni Abdalla.*

Co-orientador

*Prof. Dr. Nathan J. Berkovits.*



Junho de 1999

## Agradecimentos

Agradeço muito a todos meus colegas e amigos do IFT, especialmente a: Alfonso Zerwek, Brenno Vallilo, Cristiane Roldão, Érica Emilia Leite, Evelise Gausmann, Jorge Castiñeiras, Ricardo Bentín, Vanessa Andrade, Victo Filho, Dr. Maria Caballero Tijero, Dr. Paulo Sérgio e Dr. Marcelo Leite, com os quais tive discussões relevantes para o entendimento deste assunto. Também agradeço a Carlos Pires, Cristiano Santos, Daniel Vanzella, Daniel Nedel, Jose Acosta, Luis Crispino e Marcel Ferreira. Em especial agradeço ao Prof. George A. Matsas.

Agradeço enormemente a Alexandre Guimarães Rodrigues e Dr. José M. F. Basalo, pelo apoio acadêmico e pessoal ao longo de minha estadia em São Paulo.

Agradeço aos meus familiares por inestimável apoio durante os estudos deste mestrado, em especial a Dr. Nazaré Imbiriba Mitschein, que sem seu apoio nada poderia ser possível, Dr. Thomas Mitschein, Dr. Miguel Imbiriba, Miguel Imbiriba Jr, Tales e Lucas Imbiriba, Luisa Mitschein, à família Titan, Orlandina e Alirio Oliveira, e Octavio C. Dourado.

Agradeço também aos meus amigos que mesmo distantes não me deixaram desanimar, em especial a: Waleska Barros, André Siilva, Paulo Daniel, Ana Carina, Andrey Miralha, ao grande Kor, o Malígnio, a Garnedon, Warlock, Jaufre Rudel de Blaia, Yantl, Yorel de Daggerford, a Leugim, o açougueiro de Tempus, aos "Lordes da Escuridão" e ao Exercitus Tenebrarum.

Agradeço de todo o coração pelo apoio e ajuda nestes dois anos à Silvia Ataíde da Silva.

Agradeço muitíssimo à Prof. Maria Cristina B. Abdalla, pela orientação nas questões complicadas da Física e pela inestimável ajuda na feitura deste trabalho, e ao Prof. Nathan J. Berkovits, que além de orientar, magnificamente bem, se dispôs a tocar contra-baixo conosco.

Agradeço à FAPESP, sem a qual este trabalho seria enormemente dificultado.

## Resumo

Este trabalho visa apresentar o modelo sigma não linear de maneira simples e direta. Em sua primeira parte mostramos o modelo bosônico e o termo de Wess-Zumino-Witten sobre o qual tecemos comentários sobre seu caráter topológico e sua associação com a torção. Posteriormente mostramos que para cancelar a anomalia conforme quântica, o modelo passa a obedecer as Equações de Einstein. Introduzimos um curto capítulo sobre supersimetria a fim de auxiliar na exposição do modelo supersimétrico. No último capítulo apresentamos o modelo supersimétrico e suas equações de movimento. Finalmente apresentamos o caso com duas supersimetrias, introduzindo os campos quirais e quirais torcidos e explicitamos o modelo para o caso específico  $SU(2) \otimes U(1)$ .

**Palavras Chaves:** Modelo Sigma não Linear; Modelo Sigma Supersimétrico; Cordas; Variedades de Grupos.

**Áreas do conhecimento:** Teoria de Campos (1050300-5); Física Matemática (1010401-1)

# Índice

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                           | <b>2</b>  |
| <b>1 O Modelo <math>\sigma</math> N=0</b>                   | <b>5</b>  |
| 1.1 Introdução . . . . .                                    | 5         |
| 1.2 Considerações Gerais. . . . .                           | 6         |
| 1.2.1 Invariâncias da ação - Termo de WZW. . . . .          | 8         |
| 1.3 Topologia. . . . .                                      | 10        |
| 1.4 Modelo $\sigma$ em Variedades de Grupos . . . . .       | 13        |
| 1.4.1 Equivalência entre os modelos. . . . .                | 14        |
| 1.5 Tetrada e Torção . . . . .                              | 15        |
| 1.5.1 Invariância Conforme . . . . .                        | 18        |
| 1.6 Ação Efetiva. . . . .                                   | 20        |
| <b>2 Supersimetria</b>                                      | <b>26</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .                                    | 26        |
| 2.2 Supercampos . . . . .                                   | 28        |
| 2.3 Múltiplas supersimetrias . . . . .                      | 31        |
| 2.4 Duas Supersimetrias . . . . .                           | 33        |
| 2.4.1 Campo Quiral e Quiral Torcido. . . . .                | 34        |
| <b>3 Modelo Sigma Supersimétrico.</b>                       | <b>38</b> |
| 3.1 Uma Supersimetria. . . . .                              | 38        |
| 3.2 Variedades de Kähler . . . . .                          | 40        |
| 3.3 Modelo $\sigma$ no grupo $SU(2) \otimes U(1)$ . . . . . | 42        |
| 3.3.1 O termo de Wess-Zumino-Witten . . . . .               | 45        |
| <b>Conclusão e Perspectivas</b>                             | <b>47</b> |
| <b>Referências</b>                                          | <b>49</b> |

# Introdução

Nesta dissertação buscamos introduzir de maneira simples e direta o modelo sigma não linear e suas formulações mais conhecidas. Este trabalho divide-se basicamente em duas partes, uma inicial onde introduzimos o modelo sigma bosônico, e uma segunda parte na qual tratamos de aspectos supersimétricos do modelo e concluimos com um exemplo  $N=2$ . Há uma parte intermediária, curta, que tenta introduzir alguns fundamentos de supersimetria.

No primeiro capítulo, iniciamos com a abordagem geométrica do modelo sigma. Este é introduzido através de um mapeamento entre duas variedades (espaço alvo e espaço-tempo) e com o auxílio de um tensor do espaço alvo, simétrico, de posto 2 definido como a métrica deste espaço. Este tratamento evidencia o caráter geométrico do caso bi-dimensional, onde a ação da corda bosônica mostra-se como sendo a área do espaço-tempo (folha-mundo da corda) medida pelo espaço-alvo. Seguindo esta linha introduz-se o termo de Wess-Zumino-Witten (WZW) como um tensor antissimétrico de posto  $n$ . Através do teorema de Stokes, este termo pode ser estendido para um tensor antissimétrico de posto  $n + 1$ , permitindo que termo de WZW seja definido em uma extensão  $(n + 1)$ -dimensional do espaço-tempo. Sua existência requer algumas propriedades topológicas do espaço alvo, a saber, que este seja simplesmente conexo e compacto. Este termo revela uma quantização da constante de acoplamento que é conhecida em teoria de cordas como *winding number*.

Seguindo, introduzimos o modelo sigma sobre variedades de grupos. Esta abordagem talvez seja a mais usual e foi a que originou o modelo. Esta apresentação do modelo é mais restritiva e mais simétrica uma vez que variedades de grupos tem alta simetria, ou seja, uma quantidade grande de vetores de Killing. O termo de Wess-Zumino-Witten é introduzido e suas restrições topológicas são apresentadas. A equivalência entre as duas formulações do modelo é mostrada. Porém no caso de duas dimensões, para haver uma associação mais completa entre as formulações, uma análise da torção de variedades de grupo se faz necessária, uma vez que o tensor antissimétrico introduzido na formulação geométrica pode ser associado com a torção do espaço alvo.

Este capítulo, encerra-se com um cálculo quântico. No caso do espaço-tempo



ser bi-dimensional (cordas), a ação apresenta invariância conforme no nível clássico. Para que isto se mantenha quanticamente uma restrição deve ser observada; que o espaço alvo obedeça a equação de Einstein. Em cordas, o espaço alvo é o espaço-tempo físico, então a condição sobre a anomalia conforme implica que, no nível de árvore (folha mundo de genus zero), a Relatividade Geral é preservada.

No capítulo dois, introduzimos alguns conceitos de supersimetria. A álgebra de supersimetria é introduzida de maneira gradativa e apenas depois a sua formalização é feita. Os geradores de supersimetria são definidos em analogia com o gerador de translação, o momento. Após, as derivadas covariantes e os supercampos são introduzidos. Um exemplo de supersimetria no cone de luz em duas dimensões é apresentado uma vez que este será a representação que utilizaremos na parte final. Este capítulo termina com uma breve exposição de múltiplas supersimetrias já que parte deste assunto será explicado no momento oportuno.

O terceiro capítulo aplica as idéias dos dois primeiros para introduzir o modelo sigma não linear supersimétrico  $N=1$  em duas dimensões. Suas equações de movimento são apresentadas, tanto na forma manifestamente supersimétrica como em componentes. É importante observar neste ponto que a transição do modelo  $N=0$  para  $N=1$  não exige nenhuma restrição das variedades do espaço-tempo ou espaço-alvo.

O caso  $N=2$  apresenta mais sutilezas que o anterior. Inicialmente, por razões dimensionais, não podemos definir o modelo sigma com supersimetria  $N=2$  manifesta da mesma forma que nos casos  $N=0$  e  $N=1$ . Na verdade, a única maneira de se definir uma ação com duas supersimetrias manifestas, em duas dimensões, é através de uma lagrangeana escalar. Isto faz com que a única fonte de dinâmica do modelo se apresente por meios de vínculos que os supercampos venham a ter.

Apresentamos dois tipos de supercampos  $N=2$ , que contêm vínculos sobre suas componentes  $N=1$ , limitando seus “movimentos”. Estes são os campos complexos quiral e o quiral torcido. Os vínculos que suas componentes sofrem permitem que escrevamos cada um desses campos em termos de apenas uma de suas componentes. Desta forma podemos reduzir o modelo de  $N=2$  para  $N=1$ . Um fato importante a ressaltar é que neste ponto o espaço alvo já não pode ser mais arbitrário. Os campos complexos introduzidos, podem ser vistos como coordenadas de uma variedade complexa de Kähler.

A seção final apresenta o modelo sigma  $N=2$  sobre a variedade de grupo  $SU(2) \otimes U(1)$ , que é Kähler, uma vez que tem grupo de holonomia  $U(2)$ . Este grupo permite que escrevamos o modelo sigma de maneira supersimétrica através de campos quirais e quirais torcidos. Neste exemplo mostramos explicitamente como o potencial de

Kähler nos define a métrica do grupo, logo o modelo principal. O termo de WZW não pode ser introduzido como algo extra, ele está completamente contido no potencial e se caracterizará como a torção desta variedade. Calculando os termos antissimétricos da ação e comparando com a definição bosônica do termo de WZW, vemos que a torção deste modelo é proporcional àquela definida nos outros casos com menos supersimetrias.

Esperamos que esta monografia tenha cumprido com o seu papel de explorar um assunto não trivial e ao mesmo tempo interessante, que certamente contribuiu muito para o aprendizado do autor sobre o assunto e que possa futuramente servir para outros alunos do Instituto de Física Teórica.



# Capítulo 1

## O Modelo $\sigma$ $N=0$

### 1.1 Introdução

Modelos sigma não lineares têm sido amplamente estudados tanto no contexto de mecânica estatística como em teoria quântica de campos. Historicamente foram introduzidos por Schwinger [1] e usados em teoria de campos por Gell-Mann e Levy nos anos sessenta para descrever a fenomenologia dos píons [2]. Originalmente introduzido em quatro dimensões e utilizado para descrever a fenomenologia de PCAC (corrente axial parcialmente conservada), não tinha inicialmente caráter geométrico. No entanto, um dos percalços do modelo foi a previsão de uma partícula (a partícula  $\sigma$ ) que nunca foi observada. Uma maneira de retirar esta partícula da teoria seria implementar a simetria quiral  $SU(2)$  de forma não linear, impondo um vínculo. O modelo passa então a ser descrito pela geometria da variedade alvo onde é definido, ou seja a esfera  $S^3$ . Infelizmente o modelo em quatro dimensões não é renormalizável [3]. Junte-se a esse fato o grande sucesso das teorias de gauge não-Abelianas e fica claro porque o modelo sigma acabou sendo colocado em segundo plano.

Já em duas dimensões o modelo sigma não linear aparece como um laboratório promissor no estudo de diversos aspectos de teoria quântica de campos. Tais modelos, tendo origem geométrica, aproximam-se das teorias de gauge não-Abelianas. O sucesso do modelo com simetria  $O(N)$  que mostrou-se ser integrável, ter matriz  $S$  exata, existência de “gap” de massa, inspirou generalizações procurando preservar o fato do modelo ser definido em um espaço de base geométrica, ou seja sobre uma variedade diferencial.

A primeira generalização é proposta por Eichenherr [4] em 1978 onde o  $CP^{N-1}$  é proposto que é a generalização para o grupo  $SU(N)$ . No início da década de 80, demonstra-se que os modelos sigma em suas dimensões são renormalizáveis [6], e estes voltam ao cenário dentro do contexto de álgebras de correntes e bosonização não-Abeliana onde neste momento o termo de Wess-Zumino é agregado ao modelo sigma

por Witten [17, 18] em 1983. Em 84-85 o modelo de Wess-Zumino é supersimetrizado [5] e seus aspectos começam a ser estudados.

Um outro cenário para o modelo sigma é a teoria de cordas. Esta foi inicialmente introduzida por Nambu-Goto[7], porém, devido a não linearidade da ação, esta foi substituída pela ação de Polyakov[8], equivalente e bem mais tratável. Desde então, o modelo sigma passou a ser considerado como fundamental para a teoria de cordas e supercordas.

## 1.2 Considerações Gerais.

Antes de definir a ação do modelo  $\sigma$ , precisamos introduzir dois conceitos:

- Espaço-Alvo: Variedade  $m$ -dimensional  $\mathcal{M}$  munida de uma métrica  $g$ ,  $(\mathcal{M}, g)$ , parametrizada pelas coordenadas  $\phi^i, i = 0, \dots, m - 1$ .
- Espaço-Tempo: Variedade  $n$ -dimensional  $\mathcal{N}$  munida de uma métrica  $\gamma$ ,  $(\mathcal{N}, \gamma)$ , parametrizada pelas coordenadas  $x^\mu, \mu = 1, \dots, n$ .

Consideremos uma imersão<sup>1</sup> de  $\mathcal{N}$  em  $\mathcal{M}$  definida pelo mapa  $\phi^i = \phi^i(x)$ . Ou seja teremos que  $\mathcal{N}$  define um sub-espço em  $\mathcal{M}$  através de  $\phi$ .

O modelo  $\sigma$  não-linear principal é definido como<sup>2</sup>:

$$\mathcal{S} = \mu^l \int d^n x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j, \quad (1.1)$$

onde,  $\gamma = \gamma^{\mu\nu}(x)$ ,  $g = g_{ij}(\phi)$ . A constante  $\mu$  tem dimensão de massa.<sup>3</sup>

Pensando em uma imersão, podemos considerar  $\partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j g_{ij}$  como uma transformação de coordenadas de  $\mathcal{M}$  para  $\mathcal{N}$ . Definamos a métrica induzida sobre a variedade  $\mathcal{N}$  como sendo:

$$h_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j g_{ij}. \quad (1.2)$$

As equações de movimento podem ser extraídas via variação da ação pelos campos  $\phi$ , e são da forma:

$$\partial_\mu (\partial^\mu \phi^k) + \Gamma_{ij}^k (\partial_\mu \phi^i) (\partial^\mu \phi^j) = 0, \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Uma imersão define-se por ser localmente bijetora, ou seja, leva vizinhanças de um ponto  $x \in \mathcal{N}$  à vizinhanças de  $\phi(x) \in \mathcal{M}$  e sua inversa, restrita à vizinhança de  $\phi(x)$ , leva pontos  $\phi \in \mathcal{M}$  a pontos  $x \in \mathcal{N}$  contidos na vizinhança de  $x$  (mapa sobrejetor). E se todos os pontos de  $\mathcal{N}$  forem mapeados a pontos de  $\mathcal{M}$  (mapa injetor).

<sup>2</sup>Na teoria de cordas, onde  $n = 2$ , o espaço-tempo é a folha-mundo e o espaço-alvo é o espaço físico.

<sup>3</sup>Basta observar que se considerarmos os campos e a ação adimensionais, com  $\hbar = c = 1$ , teremos que  $\mu^l$  assume dimensão de  $[massa]^l$ , com  $l = n - 2$ .

onde  $\Gamma_{ij}^k$  é o símbolo de Christoffel da variedade  $\mathcal{M}$  definido como:  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kr}(g_{ir,j} + g_{jr,i} - g_{ij,r})$ . Para compreender melhor o significado desta ação, observemos que a equação de uma geodésica  $\lambda(t)$  de  $\mathcal{M}$  é:

$$d_t^2 \phi^a + \Gamma_{bc}^a d_t \phi^b d_t \phi^c = 0. \quad (1.4)$$

As equações de movimento do modelo  $\sigma$  são, na verdade, uma generalização do conceito de geodésicas, no sentido de que não temos mais uma curva  $\lambda(t)$  parametrizada por um parâmetro e sim um sub-espço de  $\mathcal{M}$ ,  $\phi(\mathcal{N})$ , que é parametrizado pelas variáveis  $x^{\mu 4}$ .

Outro ponto relevante é calcular as equações de movimento da métrica  $\gamma$ . Veremos que estas equações só terão soluções quando o espaço-tempo tiver duas dimensões.

Calculemos então a variação da ação com respeito à  $\gamma$ ,

$$\delta_\gamma \mathcal{S} = \int_{\mathcal{N}} d^m x \sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + h_{\mu\nu} \right) \delta \gamma^{\mu\nu} = 0. \quad (1.5)$$

Desta maneira teremos que

$$h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} (\gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}). \quad (1.6)$$

Dividindo pelo determinante de  $h_{\mu\nu}$ , teremos que:

$$\frac{h_{\mu\nu}}{\sqrt{h}} = \frac{\gamma_{\mu\nu}}{\sqrt{\gamma}}, \quad (1.7)$$

ou seja, de maneira geral,

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = f(x) h_{\mu\nu}(x). \quad (1.8)$$

Isto significa que métrica  $\gamma$  estará relacionada com a métrica induzida  $h$  via uma transformação conforme. Substituindo a Eq. (1.8) em (1.5), teremos ainda que:

$$\begin{aligned} 0 = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} (\gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) &= h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} f h_{\mu\nu} f^{-1} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \\ &= \left( \frac{n}{2} h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \right) h^{\mu\nu} = \frac{n-2}{2} n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Implicando que  $n = 2$ , ou seja, para a métrica  $\gamma$  ser um campo dinâmico e obedecer a Eq.(1.8), temos que estar em duas dimensões<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Por exemplo, se  $n = 2$  e  $\Gamma = 0$ , teremos  $\partial_\mu \partial^\mu \phi^I = 0$ . Não é difícil mostrar que a solução é uma superfície plana

<sup>5</sup>Podemos apresentar este resultado de uma outra maneira. Para os observadores em  $\mathcal{M}$ , a ação (1.1) descreve uma hipersuperfície  $n$ -dimensional,  $\mathcal{N}$ . O valor de  $\mathcal{S}$  pode não ter significado algum para estes observadores, porém, consideremos que  $\mathcal{S}$  seja um número associado à  $\mathcal{N}$ . Assim,  $\mathcal{S}$  deve ser equivalente a algo que dependa apenas de  $h$ , a métrica induzida. Para que o valor da ação não varie com mudanças da métrica  $\gamma$ , que é irreal para os habitantes de  $\mathcal{M}$ , teremo que fazer  $\delta_\gamma \mathcal{S} = 0$ , que é a Eq. (1.5).

Vejamos que através de (1.8), a ação assume a forma

$$\begin{aligned} \int d^n x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu} &= \int d^n x \sqrt{|f h_{\mu\nu}|} f^{-1}(x) \\ &= \int d^n x \sqrt{h} |f|^{\frac{n}{2}} f^{-1} = \int d^n x \sqrt{h} f^{\frac{n-2}{2}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

e quando  $n = 2$  teremos a ação de Nambu-Goto da corda bosônica<sup>6</sup>.

### 1.2.1 Invariâncias da ação - Termo de WZW.

Podemos enumerar as invariâncias da ação (1.1):

- é invariante por transformações gerais de coordenadas  $\phi^i$ , no espaço  $\mathcal{M}$ . Para constatar, basta fazer  $\phi^i \rightarrow \phi'^i$ , transformar  $g'_{ij}(\phi')$  usando as transformações tensoriais usuais e aplicar a regra da cadeia nos diferenciais, ou seja

$$g'_{ij} \partial_\mu \phi'^i \partial_\nu \phi'^j = g_{kl} \frac{\partial \phi^k}{\partial \phi'^i} \frac{\partial \phi^l}{\partial \phi'^j} \partial_\mu \phi'^i \partial_\nu \phi'^j = g_{kl} \partial_\mu \phi^k \partial_\nu \phi^l. \quad (1.11)$$

- é invariante por transformações gerais de coordenadas  $x^\mu$ , (difeomorfismo) do espaço  $\mathcal{N}$ . Esta invariância pode ser facilmente verificada uma vez que os campos  $\phi^i$  e  $g_{ij}$  são campos escalares em  $\mathcal{N}$ , e todos os tensores estão contraídos.

Estas propriedades são muito importantes por que estas garantem que podemos utilizar o modelo sobre variedades que necessitem de vários mapas, pois passamos de um para outro através de uma transformação de coordenadas.

- **Isometrias** Por isometrias tomamos os difeomorfismos que mantém as componentes da métrica invariantes. Ou seja, são transformações que definem as simetrias da variedade. Para obter as isometrias, consideremos um campo vetorial  $k = \frac{d}{dt}$ , sobre a variedade  $\mathcal{M}$ . Seja  $\phi_t$  um difeomorfismo a um parâmetro na direção de  $k$ . As transformações  $\phi_t$  serão isometrias se:

$$\phi_t^* g = g \implies \mathcal{L}_k g = 0, \quad (1.12)$$

onde  $\mathcal{L}_k$  é a derivada de Lie na direção do vetor  $k$ ,  $g$  é a métrica e  $\phi_t^*$  é o “pull back” da transformação. A equação acima pode ser escrita como (por exemplo, veja [9, pg. 442]):

$$\nabla_{(i} k_{j)}(\phi) = 0. \quad (1.13)$$

---

<sup>6</sup>Em Eq. (1.10), o termo  $d^n x \sqrt{h}$  é um infinitésimo de hiper-volume, que é mensurável a partir de  $\mathcal{M}$ . Por outro lado,  $f^{\frac{n-2}{2}}$  é arbitrário e apenas em  $n = 2$  ele não contrinuirá, e  $\mathcal{S}$  será exatamente a área da folha-mundo. Desta forma vemos que a ação original, de Polyakov, reduz-se à ação de Nambu-Goto da corda bosônica. Também podemos ver que a ação  $\mathcal{S}$  é invariante por transformações conformes de  $\gamma$  em duas dimensões.



Vetores que satisfazem esta equação são chamados de **vetores de Killing**, que formam um campo vetorial. O conjunto de todas as isometrias de uma variedade formam o **grupo de isometrias**  $\mathcal{G}$ . Assim, por exemplo, se  $\mathcal{M}$  tem  $m$  campos de Killing, então podemos ter:

$$\delta\phi^i = \Lambda^I k_I^i(\phi), \quad (1.14)$$

$\Lambda^I$  são parâmetros, e  $I = 1, \dots, m$ . Os vetores de Killing formam a álgebra  $\mathfrak{g}$  do grupo de isometrias através do comutador:

$$[k_i, k_j] = f_{ij}^l k_l, \quad (1.15)$$

onde,  $f_{ij}^l$  são as constantes de estrutura do grupo<sup>7</sup>.

### • Termos extras

É possível também introduzir alguns novos termos à ação (1.1) os quais não prejudicarão as invariâncias originais. Eles são: Um termo potencial  $V(\phi)$ , que é um escalar tanto em  $\mathcal{M}$  quanto em  $\mathcal{N}$ . O termo de Fradkin-Tseytlin:  $\Phi(\phi)R^{(\gamma)}(x)$ , onde  $\Phi$  é um escalar (como o  $V$ ), associado ao campo do DÍLATON, e  $R^{(\gamma)}$  é o escalar de curvatura do espaço-tempo  $\mathcal{N}$ .

A adição mais conhecida ao modelo  $\sigma$  é o termo de Wess-Zumino-Witten (WZW) [17, 18, 19], que, é um termo topológico, uma vez que não depende da métrica  $\gamma$ . Seguindo a mesma notação adotada até aqui podemos definir este termo como:

$$\mathcal{S}_{WZW} = \alpha \int d^n x \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} b_{i_1 i_2 \dots i_n}(\phi) \partial_{\mu_1} \phi^{i_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi^{i_n}, \quad (1.16)$$

onde  $\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  é o tensor de Levi-Civita para o espaço  $\mathcal{N}$ ,  $b_{i_1 i_2 \dots i_n}$  é um tensor antisimétrico em  $\mathcal{M}$  e  $\alpha$  é uma constante de acoplamento.

Observemos que se  $\dim \mathcal{N} > \dim \mathcal{M}$ , teremos índices repetidos em  $b$ , o que causaria uma simetria nas derivadas, anulando o produto como um todo. Então teremos que ter:  $\dim \mathcal{N} \leq \dim \mathcal{M}$ .

As equações de movimento podem ser achadas calculando:  $\frac{\delta \mathcal{S}_{WZW}}{\delta \phi^i} = 0$ , o que nos dá:

$$(n+1) \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} H_{i_1 \dots i_n} \partial_{\mu_1} \phi^{i_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi^{i_n} = 0, \quad (1.17)$$

onde

$$H_{i_1 \dots i_n} = \alpha b_{[i_1 \dots i_n, l]}. \quad (1.18)$$

<sup>7</sup>Por exemplo, se  $\mathcal{M} = S^3$ , a métrica é invariante por transformações de  $O(3)$ , ou seja, as constantes de estrutura do grupo de isometrias seriam as mesmas constantes do grupo  $O(3)$ .

Uma vez obtidas as equações de movimento do termo de WZW, podemos calcular as equações de movimento da ação total  $\mathcal{S} + \mathcal{S}_{WZ}$ , que é a soma da Eq. (1.3) com meia vez a Eq. (1.17). Este fator meio vem do termo simétrico  $\partial_\mu \partial^\mu g_{ij}$  que não está expresso na equação acima.

Em duas dimensões, podemos escrever a ação completa do modelo  $\sigma$  como sendo:

$$\mathcal{S} = \int d^2x (\sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} g_{ij} + \alpha \epsilon^{\mu\nu} b_{ij}) \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \quad (1.19)$$

e suas equações de movimento escrevem-se como:

$$\partial_\mu (\partial^\mu \phi^k) + (\Gamma_{ij}^k + \frac{3}{2} H_{ij}^k) (\partial_\mu \phi^i) (\partial^\mu \phi^j) = 0, \quad (1.20)$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  é o símbolo de Christoffel definido anteriormente.

Observe que a Eq.(1.17) é invariante pela transformação:

$$\delta b_{i_1 \dots i_n} = \partial_{[i_1} \lambda_{i_2 \dots i_n]}.$$

Assim teremos:

$$H'_{i_1 \dots i_n} = \partial_{[i_1} b_{i_2 \dots i_n]} + \partial_{[i_1} \partial_{i_2} \lambda_{i_3 \dots i_n]},$$

onde vemos que o segundo termo se anula, o que caracteriza uma liberdade de gauge que a ação e as equações de movimento apresentam.

### 1.3 Topologia.

Façamos aqui uma breve discussão sobre a constante de acoplamento do termo de WZW.

Definamos uma variedade  $B$  não-compacta tal que  $\mathcal{N}$  seja sua fronteira, ou seja,  $\partial B = \mathcal{N}$ . O termo de WZW, definido em (1.16) pode ser transformado, via o teorema de Stokes, em:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{WZW} &= \alpha \int_{\mathcal{N}=\partial B} d^n x \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} b_{i_1 i_2 \dots i_n}(\phi) \partial_{\mu_1} \phi^{i_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi^{i_n} = \\ &= \alpha \int_B d^{n+1} x \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n+1}} H_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}(\phi) \partial_{\mu_1} \phi^{i_1} \dots \partial_{\mu_{n+1}} \phi^{i_{n+1}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Observemos porém que os campos  $\phi$  estão mal definidos, uma vez que estes só existem em  $\mathcal{N}$  e não em  $B$ . Devemos então estender o mapa  $\phi$  para um  $\tilde{\phi}$  de forma a mapear  $B$  em  $\mathcal{M}$ . Para que possamos fazer isto para qualquer  $\phi$  e  $\tilde{\phi}$ , precisamos de que o  $n$ -ésimo grupo de homotopia de  $\mathcal{M}$  seja trivial<sup>8</sup>

$$\pi_n(\mathcal{M}) = 0. \quad (1.22)$$

---

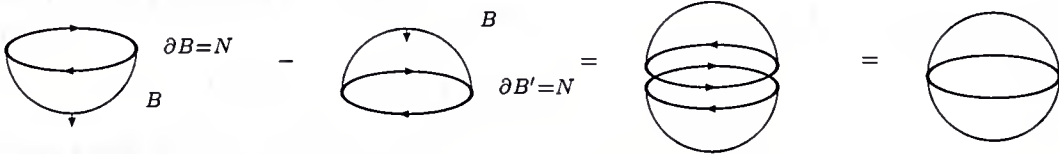
<sup>8</sup>O  $n$ -ésimo grupo de homotopia de  $\mathcal{M}$ ,  $(\pi_n(\mathcal{M}))$ , é definido como o conjunto dos mapeamentos, inequivalentes por qualquer tipo de deformação, de uma esfera  $S^n$  na variedade  $\mathcal{M}$ . A operação



Isto é importante pois caso  $\pi_n(\mathcal{M}) \neq 0$ , teríamos fronteiras em  $\mathcal{M}$  que poderiam impedir a extensão do  $\phi$ .

Assim, chamando  $x^{n+1} = t$ , teremos que  $\phi = \phi(x, t)$ <sup>9</sup>.

Fisicamente o valor do termo de WZW ( $S_{WZW}$ ) deve ser independente da escolha de  $B$ , então podemos escolher outra variedade  $B'$  que também tenha  $\mathcal{N}$  como sua fronteira,  $\partial B' = \mathcal{N}$ , e que satisfaça  $B - B' = S^{n+1}$ , ou seja, topologicamente,  $B$  e  $B'$  são metades de uma  $(n+1)$ -esfera.



Chamemos  $\alpha\Gamma_B$  o segundo membro da Eq.(1.21), e  $\alpha\Gamma_{B'}$  o mesmo para a variedade  $B'$ . Quanticamente, as grandezas físicas surgem a partir da integrais do tipo  $\int \mathcal{D}\phi e^{i\Gamma_S} \dots$ , onde inserimos os campos que desejarmos na integral. Para que a física do modelo não dependa da escolha da extensão de  $\mathcal{N}$ , teremos que ter

$$e^{i\alpha\Gamma_B} = e^{i\alpha\Gamma_{B'}}, \quad (1.23)$$

ou,

$$e^{i\alpha(\Gamma_B - \Gamma_{B'})} = e^{i\alpha\Gamma_S} = 1, \quad (1.24)$$

onde  $S$  é a esfera  $B - B'$ . Desta forma podemos concluir que,

$$\alpha\Gamma_{S^{n+1}} = 2\pi l, \quad (1.25)$$

onde  $l$  é um inteiro qualquer.

Observe agora que se

$$\pi_{n+1}(\mathcal{M}) = 0, \quad (1.26)$$

teremos que o mapa  $\tilde{\phi}$ , que determina  $S = \tilde{\phi}(B - B')$ , pode ser estendido ainda mais, para uma variedade  $(n+2)$ -dimensional,  $V$ . Utilizando novamente o teorema de Stokes, poderemos fazer

$$\int_{S=\partial V} H = \int_V dH = 0, \text{ pois } dH = ddb = 0. \quad (1.27)$$

deste grupo é a soma dos mapeamentos. Por exemplo, em uma variedade  $\mathbf{R}^n$ , todos os mapeamentos são homotopicamente iguais a um ponto. Se tivermos um buraco na variedade, porém, teremos que os mapeamentos que envolvem o buraco serão inequivalentes aos que não o envolvem e também o serão entre si, pois um mapeamento que envolva duas vezes o buraco é inequivalente a um mesmo que envolva apenas uma vez.

<sup>9</sup>Em situações onde  $dH \neq 0$  para algum ponto do espaço, é preferível definir o modelo de WZW através da Eq. (1.21) pois nestes pontos,  $b$  é mal definido.

Por outro lado, se

$$\pi_{n+1}(\mathcal{M}) \neq 0, \quad (1.28)$$

significa que em  $V$ , o interior de  $S$ , existem “buracos”  $(n+1)$ -dimensionais, ou seja,  $S$  não é a única fronteira de  $V$ , teremos que

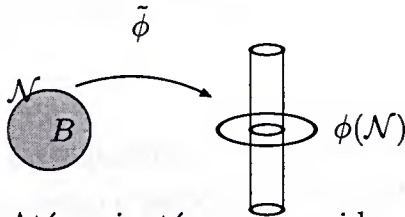
$$\partial V = B + R_m, \quad (1.29)$$

onde  $R_m$  é a fronteira do  $m$ -ésimo buraco. O teorema de Stokes fica então alterado para

$$\int_V dH = \int_S H + \int_{R_m} H = 0, \text{ ou, } \int_S H = - \int_{R_m} H, \quad (1.30)$$

que em geral não é zero. Definamos

$$\int_S H = \Gamma_S. \quad (1.31)$$



Até aqui estávamos considerando que  $S$  pertencesse a primeira classe de equivalência do grupo  $\pi_{n+1}(\mathcal{M})$  de homotopia, ou seja, que  $S$  envolvesse os buracos apenas uma vez. De maneira geral,  $S$  pode pertencer a outras classes de equivalência, ou seja,  $S$  pode envolver multiplamente os buracos. Representando por um índice  $q$  o número de voltas, podemos dizer que topologicamente

$$S_q = \underbrace{S_1 + \dots + S_1}_q \quad (1.32)$$

e assim teremos que

$$\int_{S_q} H = q \int_{S_1} H = q \Gamma_S. \quad (1.33)$$

Retornando a Eq. (1.25), teremos que  $\alpha q \Gamma_S = 2\pi l$ , como  $l$  representa um inteiro qualquer e  $q$  advém do mapa  $\tilde{\phi}$  que não é único, teremos então que ter  $\alpha$  igual a

$$\alpha = \frac{2\pi}{\Gamma_S} n, \quad (1.34)$$

com  $n$  inteiro, então a Eq. (1.21) fica corretamente escrita na forma:

$$S_{WZW} = \frac{2\pi}{\Gamma_S} n \Gamma_B. \quad (1.35)$$

## 1.4 Modelo $\sigma$ em Variedades de Grupos

Apresentemos agora uma outra definição do modelo sigma encontrada freqüentemente, [17, 18], que está relacionada diretamente com variedades de grupos.

Seja um grupo de Lie  $\mathfrak{G}$ , e sejam  $g$  seus elementos:  $g \in \mathfrak{G}$ . Definamos um mapa  $g = g(x)$  que relaciona  $\mathcal{N}$  com a variedade de grupo de  $\mathfrak{G}$ . Este mapa pode ser implementado via os vetores  $\phi$  da álgebra  $\mathfrak{g}$  através do mapa  $\phi = \phi(x)$ . Então, escrevamos

$$g = e^\phi = e^{\mathbf{T}_i \phi^i}, \quad (1.36)$$

onde  $\mathbf{T}_i$  são os geradores da álgebra. Dessa forma, a ação do modelo  $\sigma$  não-linear é definida como:

$$S = \int d^n x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \text{Tr} \left( g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g \right), \quad (1.37)$$

cujas equações de movimento são:

$$\gamma^{\mu\nu} g^{-1} \partial_\mu \left( \partial_\nu g g^{-1} \right) = 0. \quad (1.38)$$

Introduzamos o termo de WZW. Como dito na seção 1.2.1, este é um termo topológico e para defini-lo, façamos semelhantemente como na seção 1.3.

Sabemos que  $g(x)$  determina uma imersão de  $\mathcal{N}$  na variedade de grupo  $\mathfrak{G}$ . Façamos uma extensão de  $\mathcal{N}$  para uma variedade  $B$ , tal que  $\partial B = \mathcal{N}$ . Isto implicará em uma extensão  $\tilde{g}(B)$  se tivermos que

$$\pi_n(\mathfrak{G}) = 0. \quad (1.39)$$

Assim, por exemplo, se  $\mathcal{N} = S^n$ ,  $B$  será uma meia esfera  $S^{n+1}$ . Escolhendo  $t$  como a  $(n+1)$ -ésima coordenada, podemos definir  $\tilde{g}$  a satisfazer por exemplo

$$\tilde{g} = \tilde{g}(x, t), \quad \tilde{g}(0, x) = 1, \quad \tilde{g}(1, x) = g(x), \quad (1.40)$$

ou explicitamente,  $\tilde{g} = e^{\phi^i \mathbf{T}_i t}$ .

Tendo isto, definamos uma  $(n+1)$ -forma:

$$\mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} = \text{Tr} \left[ (\tilde{g}^{-1} \partial_{\mu_1} \tilde{g}) \dots (\tilde{g}^{-1} \partial_{\mu_{n+1}} \tilde{g}) \right], \quad (1.41)$$

definida em  $\tilde{g}(S^{n+1})$ . O termo de WZW é tido como o “fluxo” desta forma através de  $B$ , [17].

$$S_{WZW} = \int_B d^{n+1} x \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} \mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}, \quad (1.42)$$

Pelos argumentos dados na seção 1.3, se  $\pi_{n+1}(\mathfrak{G}) \neq 0$ , a constante de acoplamento de  $S_{WZW}$  deverá ser um múltiplo inteiro de  $\frac{2\pi}{m}$ , onde  $m$  é a integral (1.42) feita sobre a esfera  $S^{n+1}$ .

Assim, em  $n$  dimensões o modelo  $\sigma$  se escreve como:

$$\mathcal{S} = \int d^n x \text{Tr} \left( g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g \right) + \alpha \int d^n x dt \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} \mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}. \quad (1.43)$$

Em duas dimensões de espaço-tempo, teremos:

$$\mathcal{S} = \int d^2 x \text{Tr} \left( g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g \right) + \alpha \int d^2 x dt \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left( g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g \right). \quad (1.44)$$

#### 1.4.1 Equivalência entre os modelos.

Consideremos que a variedade alvo,  $\mathcal{M}$ , possua isometrias que definem um grupo  $\mathfrak{G}$ . Observe que este grupo terá  $\frac{n(n+1)}{2}$  parâmetros, uma vez que este é o número de isometrias do espaço  $\mathbf{R}^n$  euclidiano que juntamente com os espaços de De Sitter e Anti-De Sitter são os mais simétricos possíveis. Seja o grupo  $\mathfrak{G}$ , com elementos  $g$ , e parâmetros  $\phi^a$ . A métrica desta variedade é definida como [20]:

$$g_{ab} = \text{Tr}((g^{-1})_{,a} g_{,b}), \quad (1.45)$$

onde  $g_{,a} = \frac{\partial g}{\partial \phi^a}$ .

Esta definição claramente associa a Eq. (1.37) com a ação (1.1), pois:

$$\gamma^{\mu\nu} g_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b = \gamma^{\mu\nu} \text{Tr}(g_{,a}^{-1} g_{,b}) \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b = \text{Tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial_\nu g). \quad (1.46)$$

Quanto ao termo de WZW, podemos associar a definição para variedades de grupo, Eq. (1.42), e a definição geral, Eq. (1.21) se fizermos a identificação:

$$H_{a_1 \dots a_{n+1}} = \text{Tr} \left[ (g^{-1} g_{,a_1}) \dots (g^{-1} g_{,a_{n+1}}) \right], \quad (1.47)$$

pois assim,

$$H_{a_1 \dots a_{n+1}} \partial_{\mu_1} \phi^{i_1} \dots \partial_{\mu_{n+1}} = \text{Tr} \left[ (g^{-1} g_{,\mu_1}) \dots (g^{-1} g_{,\mu_{n+1}}) \right] = \mathcal{T}. \quad (1.48)$$

Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{WZW} &= q \int_B d^{n+1} x \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} H_{a_1 \dots a_{n+1}} \partial_{\mu_1} \phi^{a_1} \dots \partial_{\mu_{n+1}} \phi^{a_{n+1}} = \\ &= q \int_B d^{n+1} x \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} \mathcal{T}_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Uma associação mais clara e geométrica entre as definições do termo de WZW, que sera feita a seguir, é encontrada quando analisamos o caso bi-dimensional ( $n=2$ ), onde teremos uma relação entre  $b$ ,  $g$ , e a torção do espaço-tempo.

## 1.5 Tetrada e Torção

Para que possamos mostrar a relação entre as duas formulações do modelo  $\sigma$ , é preciso discutir alguns tópicos de geometria diferencial. Precisamos inicialmente definir uma métrica sobre  $\mathfrak{G}$  de forma que possamos calcular grandezas geométricas como curvatura.

Nesta seção usaremos a seguinte notação:

- Símbolos em negrito ou com índices em negrito: tensores. (p.ex.:  $\mathbf{T}_i$ )
- Símbolos com índices em itálico: componentes de tensores. (p.ex.:  $V_a$ )
- Métrica:  $g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = g_{ab}A^aB^b$ .
- Derivada de Lie entre dois vetores:  $\mathcal{L}_\mathbf{A}\mathbf{B}$ .
- Derivada Covariante:  $(D_\mathbf{A}\mathbf{B})^b = A^a\nabla_a B^b = A^a B^b{}_{;a}$ , onde o símbolo  $;$  indica a derivada covariante com respeito a  $a$ .
- A Conexão em uma base de vetores  $\mathbf{E}_a$  é definida como:  $D_{\mathbf{E}_b}\mathbf{E}_c = \Gamma_{bc}^a E_a$ .
- É importante lembrar que em geometria diferencial os vetores comportam-se como diferenciais.
- Índices de a-h são do espaço-tempo e índices i-z representam espaço tangente.

Observemos que, na álgebra  $\mathfrak{g}$ , os vetores da base,  $\mathbf{T}_i$ , satisfazem uma relação de comutação:

$$[\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j] = C_{ij}^k \mathbf{T}_k, \quad (1.50)$$

onde  $C_{ij}^k$  são as constantes de estrutura do grupo  $\mathfrak{G}$ . Como se sabe da geometria diferencial, uma base de vetores que não comutam não pode definir uma base coordenada, uma vez que vetores coordenados comutam. Ademais, como a álgebra é na realidade o espaço vetorial tangente à variedade, sua métrica é constante. Define-se a métrica de uma álgebra como, [10],

$$\eta_{ij} = \text{Tr}(\mathbf{T}_i \mathbf{T}_j). \quad (1.51)$$

Definamos a base tetrada  $T_a{}^i$  que encarrega-se de levar componentes do espaço curvo para componentes da base ortonormal tangente, a álgebra. Assim,

$$g^{-1}\partial_a g = \Lambda_a{}^i \mathbf{T}_i. \quad (1.52)$$

Dessa maneira:

$$g^{-1}\partial_\mu g = g^{-1}\partial_a g \partial_\mu \phi^a = \mathbf{T}_a \partial_\mu \phi^a, \quad (1.53)$$



onde  $\mathbf{T}_a = \Lambda_a^i \mathbf{T}_i$ , que é um vetor de uma base coordenada, não necessariamente ortonormal. Assim, a lagrangeana do modelo  $\sigma$  principal se escreverá como:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g) &= \text{Tr}(\mathbf{T}_a \mathbf{T}_b) \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b = \\ &= g_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b, \end{aligned} \quad (1.54)$$

onde podemos ver que  $g_{ab} = \Lambda_a^i \Lambda_b^j \eta_{ij}$ . Esta é a lagrangeana da ação (1.37).

Em resumo, o que temos é o seguinte. O espaço tangente da variedade do grupo  $\mathcal{G}$  é a álgebra  $\mathfrak{g}$ . Tomando seus geradores como os vetores da base, teremos que estes não comutam. Isto é equivalente a dizer que a derivada de Lie entre eles é não nula:  $\mathcal{L}_{\mathbf{T}_i} \mathbf{T}_j \neq 0$ , e como a métrica deste espaço é constante, podemos interpretar os vetores da base como formadores de uma base tetrada. Existe porém uma outra base vetorial cuja métrica é definida pela Eq. (1.45). Para fazer a transição entre estas bases, definimos a tetrada  $T_a^i$ , Eq (1.52).

Para discutirmos a interpretação do termo de WZW, precisamos discutir a questão da torção na definição das conexões. O Tensor de Torção é definido através de<sup>10</sup>:

$$\text{Tor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (1.55)$$

que é antissimétrico em  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ . Podemos obter suas componentes observando que em termos dos vetores da base  $\mathbf{E}_i$  pode ser escrito na forma:

$$\text{Tor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T_{jk}^i X^j Y^k \mathbf{E}_i \quad (1.56)$$

e teremos a antissimetria representada por:  $T_{jk}^i = T_{[kj]}^i$ .

Usualmente, a definição da derivada covariante, logo da conexão, exige que  $\text{Tor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})=0$  para qualquer vetor. Porém esta condição será relaxada pois existe uma estreita relação entre a torção e o termos de WZW em duas dimensões. A outra condição usual, que será mantida é a constância covariante da métrica, a saber:

$$D_{\mathbf{X}} g = 0. \quad (1.57)$$

Como estamos procurando as componentes da conexão, calculemos,  $g(\mathbf{Z}, D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})$ , que após fácil manipulação fica:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Z}, D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{X}[g(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] + \mathbf{Y}[g(\mathbf{X}, \mathbf{Z})] - \mathbf{Z}[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] + \\ &\quad + g(D_{\mathbf{Z}} \mathbf{X} - D_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) + g(D_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \mathbf{X}) + \\ &\quad + g(D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z}) \}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

<sup>10</sup>A notação aqui segue semelhante à [11]

Utilizando a torção, teremos:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Z}, D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}) = & \frac{1}{2} \{ \mathbf{X}[g(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] + \mathbf{Y}[g(\mathbf{X}, \mathbf{Z})] - \mathbf{Z}[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] + \\ & g([\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + \text{Tor}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}), \mathbf{Y}) + g([\mathbf{Z}, \mathbf{Y}] + \text{Tor}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}), \mathbf{X}) + \\ & g([\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \text{Tor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) \}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Para recobrar a relação usual sem torção, como em [11, p. 40], basta fazer  $\text{Tor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})=0$ .

Substituindo os vetores  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ , por vetores de uma base,  $\mathbf{E}_n$ , teremos:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{E}_a, D_{\mathbf{E}_b}\mathbf{E}_c) = & \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_b g(\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_c) + \mathbf{E}_c g(\mathbf{E}_b, \mathbf{E}_a) - \mathbf{E}_a g(\mathbf{E}_b, \mathbf{E}_c) + \\ & + C_{cab} + C_{bac} + C_{abc} + T_{cab} + T_{bac} + T_{abc} \} = \Gamma_{abc}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

onde aqui definimos,

$$g(\mathbf{E}_c, [\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b]) = C^d_{ab} g(\mathbf{E}_c, \mathbf{E}_d) = g_{cd} C^d_{ab} = C_{cba} \quad (1.61)$$

$$g(\text{Tor}(\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b), \mathbf{E}_c) = T^d_{ab} g(\mathbf{E}_d, \mathbf{E}_c) = g_{dc} T^d_{ab} = T_{cab}. \quad (1.62)$$

Em uma base tetrada, onde a métrica é ortogonal e constante,  $\mathbf{E}_i g(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k) = 0$ , então teremos:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \{ \eta_{kl} C^l_{ij} + \eta_{jl} C^l_{ik} + \eta_{il} C^l_{jk} + T_{kij} + T_{jik} + T_{ijk} \}. \quad (1.63)$$

Em uma base coordenada:

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2} \{ \partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc} + T_{abc} + T_{bac} + T_{cab} \}. \quad (1.64)$$

Tentemos agora encontrar as componentes da torção. Calculemos a derivada covariante da base tetrada:

$$D_{\mathbf{E}_b} \mathbf{T}_i = D_{\partial_b} (\Lambda_i^a \mathbf{E}_a) \quad (1.65)$$

e também temos que:

$$D_{\mathbf{E}_b} \mathbf{T}_i = D_{\Lambda_b^j \mathbf{T}_j} \mathbf{T}_i = \Lambda_b^j \Lambda_k^c \Gamma_{ji}^k \mathbf{E}_c. \quad (1.66)$$

Então:

$$D_{\mathbf{E}_b} (\Lambda_i^a \mathbf{E}_a) = \Lambda_b^j \Lambda_k^c \Gamma_{ji}^k \mathbf{E}_c. \quad (1.67)$$

É interessante para variedades de grupo estudar apenas o caso da torção completamente antissimétrica. Então, admitindo que

$$T_{ijk} = T_{[ijk]}, \quad (1.68)$$

poderemos escrever as componentes da derivada da base tetrada como sendo:

$$\Lambda_i^a{}_{;b} = \frac{1}{2} \left\{ \Lambda_b^j \Lambda_k^a C_{ji}^k + T_{ijk} \eta^{mj} \Lambda_b^k \Lambda_m^a \right\}. \quad (1.69)$$

Para chegarmos em nosso objetivo, que é relacionar a torção com o termo de WZW, exijamos que a tetrada seja uma constante covariante, ou seja,

$$\Lambda_i^a{}_{;b} = 0, \quad (1.70)$$

o que implicará em

$$T^a{}_{bc} = \Lambda_b^i \Lambda_c^j \Lambda_k^a C_{ij}^k. \quad (1.71)$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} Tr(g^{-1} g_{,[a} g^{-1} g_{,b} g^{-1} g_{,c]}) &= Tr(\mathbf{T}_{[a} \mathbf{T}_b \mathbf{T}_{c]}) = \Lambda_a^i \Lambda_b^j \Lambda_c^k Tr(\mathbf{T}_i \mathbf{T}_j \mathbf{T}_k) = \\ &= \frac{1}{6} \Lambda_a^i \Lambda_b^j \Lambda_c^k Tr(C_{ij}^l \mathbf{T}_l \mathbf{T}_k + C_{jk}^l \mathbf{T}_l \mathbf{T}_i + C_{ki}^l \mathbf{T}_l \mathbf{T}_j) = \\ &= \frac{1}{6} \Lambda_a^i \Lambda_b^j \Lambda_c^k (C_{kij} + C_{ijk} + C_{jki}) = \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_a^i \Lambda_b^j \Lambda_c^k C_{ijk}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Assim,

$$T_{abc} = 2Tr(g^{-1} g_{,[a} g^{-1} g_{,b} g^{-1} g_{,c]}). \quad (1.73)$$

Ou seja, em uma variedade de grupo, se impusermos a condição de “integrabilidade” da tetrada, Eq. (1.70), e exigirmos a antissimetria da torção, teremos a mesma definida pelas Eq. (1.71) ou Eq. (1.73).

Já sabemos, das equações de movimento, Eq. (1.20), que  $3H_{ij}^k$  cumpre o papel da torção. Em uma variedade de grupo, a torção é definida através da equação acima. Para que possamos interpretar o termo de WZW definido em Eq. (1.21) como sendo a torção do espaço-tempo, teremos que definir

$$H_{abc} = \frac{2}{3} \mathcal{T}_{abc}. \quad (1.74)$$

### 1.5.1 Invariância Conforme

Um dos aspectos mais importantes do modelo sigma é a análise de seus pontos críticos, em particular, sabe-se que modelos sigma em duas dimensões podem ser ajustados a fim de que estes sejam finitos, ou seja, com função beta nula. Uma análise deste assunto pode ser vista em [18]. Recapitulando esta questão, temos que o modelo sigma da forma geral

$$S = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x Tr \left( \partial_\mu g \partial^\mu g^{-1} \right) + \frac{n}{24\pi} \int d^3y \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr \left( g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g \right), \quad (1.75)$$

apresenta invariância conforme no ponto  $\lambda^2 = \frac{4\pi}{n}$ . Neste ponto, podemos escrever as equações de movimento de maneira mais simples. No cone de luz teremos

$$\partial_- (g^{-1} \partial_+ g) = 0, \text{ para } \lambda^2 > 0 \text{ e } \partial_+ (g^{-1} \partial_- g) = 0, \text{ para } \lambda^2 < 0. \quad (1.76)$$

Para chegar a estas equações, devemos calcular a variação da ação com respeito aos campos  $g$ . O termo principal é relativamente simples e lembrando que  $\delta g^{-1} = -g^{-1} \delta g g^{-1}$  teremos

$$\delta (\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}) = (\delta g \partial_\mu (g^{-1} \partial^\mu g) g^{-1}). \quad (1.77)$$

O termo de WZW é mais interessante pois é topológico e vive num espaço de três dimensões. Observe que após integração por partes, a sua variação assume a forma

$$\begin{aligned} \delta \Gamma &= 3 \int d^3 y \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \partial_\mu (g^{-1} \delta g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g) \\ &= 3 \int d^2 x \epsilon^{\mu\nu} \text{Tr} (g^{-1} \delta g g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g) = \\ &= -3 \int d^2 x \epsilon^{\mu\nu} \text{Tr} [g^{-1} \delta g \partial_\mu (g^{-1} \partial_\nu g)]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Desta maneira, podemos escrever as equações de movimento da ação (1.75) como

$$\frac{1}{2\lambda^2} \partial_\mu (g^{-1} \partial^\mu g) g^{-1} - \frac{n\epsilon^{\mu\nu}}{8\pi} \partial_\mu (g^{-1} \partial^\mu g) = 0. \quad (1.79)$$

Como no cone de luz  $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , teremos que no ponto crítico, as equações de movimento serão exatamente as descritas em (1.76).

Desejo aqui ressaltar dois detalhes. Primeiramente, no ponto crítico, a razão entre os coeficientes do termo principal e do termo de WZW é  $\frac{2}{3}$ , ou seja, esta é a razão para que tenhamos invariância conforme, considerando que esta não é alterada por um termo global na ação. Observemos agora que quando temos a torção, da Eq. (1.20), igual a torção da variedade de grupo, Eq. (1.73), as equações de movimento tornam-se

$$\partial_+ \partial_- \phi^a + (\Gamma^a_{bc} + \mathcal{T}^a_{bc}) \partial_+ \phi^b \partial_- \phi^c = 0. \quad (1.80)$$

Para que possamos relacionar estas equações com a Eq. (1.76), observemos que se  $g = g_0 e^{\phi^i \mathbf{T}_i}$ , onde  $\phi^i$  é infinitesimal e  $g$  está próximo de  $g_0$ , teremos

$$\partial_- (g^{-1} \partial_+ g) = (\partial_- \partial_+ \phi^k + C^k_{ij} \partial_+ \phi^i \partial_- \phi^j) \tilde{g}^{-1} \mathbf{T}_k \tilde{g} = 0. \quad (1.81)$$

Observe agora que se escrevermos a Eq (1.80) utilizando a base tetrada (ortonormal da álgebra) teremos que

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}C_{ijk}, \quad (1.82)$$

como  $\mathcal{T}_{ijk} = \frac{1}{2}C_{ijk}$ , a Eq. (1.80) se escreve como

$$\partial_+ \partial_- \phi^k + C_{ij}^k \partial_+ \phi^i \partial_- \phi^j = 0, \quad (1.83)$$

que é a mesma equação de (1.81), logo para termos invariância conforme,  $H = \frac{2}{3}\mathcal{T}$ .

## 1.6 Ação Efetiva.

A teoria de Cordas Bosônicas descreve uma folha mundo sobre o espaço-tempo. Observando sua ação, vê-se que não existe nenhuma restrição sobre o espaço-tempo físico, na forma de que não existe nenhuma restrição sobre a métrica  $g_{ij}$ . Isto ocorrendo no nível clássico. Como sabemos de várias teorias físicas, a quantização via de regra nos traz “surpresas” com relação às simetrias e leis de conservação, muitas vezes violando-as, dando origem às chamadas anomalias quânticas. Para buscarmos a influência quântica sobre a métrica, devemos ver que ela se comporta como uma “constante de acoplamento” da ação bi-dimensional, e desta forma seu comportamento quântico será dado pela função  $\beta$ , que define a variação da constante de acoplamento com o cut-off<sup>11</sup>:

$$\beta_{ab(x)}(E) = \frac{\partial g_{ab}(x)}{\partial \ln E}. \quad (1.84)$$

A ação de Polyakov da Corda Bosônica sobre uma variedade é <sup>12</sup>:

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (1.85)$$

Onde nesta ação,  $G_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo,  $g_{ab}$  é a métrica da folha-mundo da corda,  $X^\mu$  é o vetor posição no espaço-tempo e  $\alpha'$  é a “inclinação de Regge”. Aqui estamos considerando que  $\Phi = B_{\mu\nu} = V = 0$ , ou seja, estamos desprezando o dílaton, o tensor antissimétrico e o termo potencial.

Façamos uma expansão na métrica, da forma:

$$G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X), \quad (1.86)$$

onde  $h_{\mu\nu}$  é pequeno, poderemos escrever o funcional gerador como:

<sup>11</sup>Nesta seção usaremos os índices gregos para o espaço-tempo físico (o espaço-alvo) e latinas para a folha-mundo.

<sup>12</sup>[8], [12], cap. 1.2, [13], cap. 3.4,[19], cap. 15.



$$Z_g = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}h e^{-S_{P\eta}} \left( 1 - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} h_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + O(\alpha'^2) \right), \quad (1.87)$$

onde o índice  $\eta$  na ação indica que estamos usando a métrica de Minkowsky em vez da métrica geral  $G$ . O segundo termo que aparece entre parênteses, é o operador de vértice do gráviton da corda fechada<sup>13</sup>,  $V_{graviton}$  que representa a inserção de um gráviton<sup>14</sup>. Considerando os termos de ordem superior em  $\alpha$ , teremos a exponenciação do operador de vértice:  $e^{V_{graviton}}$ , que define um “estado coerente” de grávitons. Desta maneira, é natural pensar que ao se utilizar a ação definida em (1.85), teremos a descrição completa da interação gravitacional. Ou de outra maneira, a descrição da corda sobre um espaço-tempo curvo.

Para quantizar a ação de Polyakov, definamos o **funcional gerador**<sup>15</sup>:

$$Z_J = \int \mathcal{D}X e^{-S_P - X.J}, \quad (1.88)$$

onde  $X.J = \int d^2\sigma X^\mu J_\mu$ . Definamos o **funcional energia**:

$$e^{-W} = Z_J \rightarrow W = -\ln Z_J, \quad (1.89)$$

onde  $J$  é uma fonte acoplada ao campo  $X^\mu$ , que será levada a zero no cálculo dos valores esperados. Através deste funcional, podemos definir o campo médio:

$$\bar{X}^i(\sigma) = \frac{\delta W}{\delta J_i}, \quad (1.90)$$

pois  $\frac{\delta W}{\delta J_i} = \frac{-1}{Z_J} \frac{\delta Z_J}{\delta J_i} = \frac{-1}{Z_J} \int \mathcal{D}X e^{-(S+X.J)} (-X^i) = \langle X^i \rangle$ .

Definamos então a **ação efetiva**:

$$\Gamma(\bar{X}) = W(J) - \bar{X}.J(\bar{X}). \quad (1.91)$$

Este último funcional, escrito em termos da **flutuação quântica**:  $\Pi^i = X^i - \bar{X}^i$ , assume a forma:

$$e^{-\Gamma(\bar{X})} = \int \mathcal{D}\Pi e^{-S[\bar{X}+\Pi] + \Pi.J}. \quad (1.92)$$

É importante lembrar que a ação efetiva nos fornece os diagramas 1PI, ou seja

$$e^{-\Gamma} \int \mathcal{D}\Pi f(\Pi) e^{-S[\bar{X}+\Pi] + \Pi.J} = \langle f(\Pi) \rangle, \quad (1.93)$$

<sup>13</sup>Podemos fazer  $h_{\mu\nu} = -2\pi\alpha' e^{ik.X} D_{\mu\nu}$ ,  $h_{\mu\nu}$  assume a forma de um gráviton.

<sup>14</sup>cap:3.6-[12]

<sup>15</sup>Como em [15], cap:9

onde o valor esperado é calculado apenas com os diagramas irreduzíveis de uma partícula.

Expandindo a ação efetiva em série de Taylor e guardando apenas a primeira ordem em  $\Pi$ , poderemos escrever a ação como:

$$\Gamma[\Pi] = S[\bar{X}] + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left[ \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \partial_a \Pi^\mu \partial^a \Pi^\nu + A_{\mu\nu}^a \Pi^\mu \partial_a \Pi^\nu + \frac{1}{2} B_{\mu\nu} \Pi^\mu \Pi^\nu \right], \quad (1.94)$$

onde,

$$\begin{cases} A_{\mu\nu}^a &= G_{\mu\rho,\nu} \partial^a \bar{X}^\rho \\ B_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} G_{\rho\sigma,\mu\nu} \partial^a \bar{X}^\sigma \partial_a \bar{X}^\rho \end{cases}$$

Vale observar que estes campos definidos acima não são, na realidade, campos propagantes. Podem ser pensados como campos clássicos “de fundo”, que agem como fontes do campo quântico.

Inserindo um regulador infravermelho,  $\int d^2\sigma \frac{m^2}{2} \delta_{ij} \Pi^i \Pi^j$ , podemos obter as regras de Feynman. Diagramaticamente:

$$\begin{array}{c} \mu \longrightarrow \nu \end{array} = \frac{-G_{\mu\nu}}{p^2 + m^2}. \quad (1.95)$$

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{a} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \nu \\ \searrow \mu \end{array} P_a = A_{\mu\nu}^a P_a. \quad (1.96)$$

$$\begin{array}{c} \text{B} \\ \text{b} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \nu \\ \searrow \mu \end{array} = B_{\mu\nu}. \quad (1.97)$$

Nesta teoria a *constante de acoplamento* é a métrica  $G_{\mu\nu}$ . Para sabermos sua dinâmica, ou seja o grupo de renormalização, precisamos calcular os contra-termos e a função beta.

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{a} \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} = - \int A_{\mu\nu}^a P_a \frac{G_{\mu\nu}}{p^2 + m^2} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \quad (1.98)$$

$$\begin{array}{c} \text{B} \\ \text{b} \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} = - \int B_{\mu\nu} \frac{G^{\mu\nu}}{p^2 + m^2} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \quad (1.99)$$

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{a} \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{a} \end{array} = \int A_{\mu\nu}^a P_a \frac{G^{\mu\rho}}{p^2 + m^2} A_{\rho\sigma}^b (p - k)_b \times$$

$$\times \frac{G^{\sigma\mu}}{(p-k)^2 + m^2} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \quad (1.100)$$

Nesta aproximação, temos apenas correções quânticas para o vácuo. Observe que o primeiro diagrama é nulo e nesta teoria temos dois diagramas logaritmicamente divergentes.

Calculando as integrais, utilizando os parâmetros de Feynman e Regularização dimensional (que nos fornecerá o parâmetro de massa  $\mu^\epsilon$ ), podemos concluir que a parte divergente destes dois diagramas escreve-se como:

$$\begin{aligned} \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} &= \frac{\mu^\epsilon}{2} \left( -\frac{2}{\epsilon} + \ln \Delta + \text{finitos} \right) \\ &\quad \frac{1}{4\pi} \partial^a \bar{X}^\sigma \partial_a \bar{X}^\rho \times \left[ \frac{1}{2} G_{\rho\sigma, \mu\nu} G^{\mu\nu} - G_{\mu\rho, \nu} G_{\lambda\sigma, \xi} G^{\lambda\nu} G^{\mu\xi} \right], \end{aligned} \quad (1.101)$$

onde  $\Delta = m^2 + x(x+1)k^2$ , e temos implicitamente uma integral  $\int_0^1 dx$  sobre o logaritmo (onde  $x$  é o parâmetro de Feynman).

O termo acima nos dará o contra-termo da métrica. De acordo com [19], podemos reescrever a expressão acima de forma a obter:

$$\delta_{G_{\mu\nu}} = \frac{\mu^\epsilon}{4\pi\epsilon} (R_{\mu\nu} - \nabla_{(\mu} \Gamma_{\nu)}). \quad (1.102)$$

Onde  $\Gamma_\nu = g_{\nu\mu} g^{\rho\zeta} \Gamma_{\rho\zeta}^\mu$ . Dentro da ação efetiva, o termo da derivada, no segundo fator, pode ser integrado por partes, ou seja:

$$\nabla_{(\mu} \Gamma_{\nu)} \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu = \nabla_\mu (\Gamma_\nu \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu) - 2\Gamma_\nu \nabla_\mu (\partial^a X^\nu) \partial_a X^\mu. \quad (1.103)$$

O primeiro termo do segundo membro é uma diferencial total, e o segundo termo é proporcional às equações de movimento, Eq. (1.3), anulando-se na camada de massa. Logo o único termo relevante para o contratermo é o tensor de Ricci.

Podemos agora renormalizar a métrica  $G_{\mu\nu}$  definindo a métrica nua como sendo:

$$G_{\mu\nu} = \mu^\epsilon (G_{\mu\nu}^R + \frac{1}{4\pi\epsilon} R_{\mu\nu}). \quad (1.104)$$

A função  $\beta^G$  da métrica pode ser calculada, utilizando da equação acima:

$$\beta_{\mu\nu}^G = \mu \frac{\partial G_{\mu\nu}^R}{\partial \mu} = -\epsilon \mu^{-\epsilon} G_{\mu\nu} = \frac{-1}{4\pi} R_{\mu\nu}. \quad (1.105)$$

**A Invariância Conforme.**

A ação de Polyakov é classicamente invariante por transformações conformes. Esta simetria reduz em muito o número de variedades inequivalentes a serem somadas e é uma característica marcante da teoria de cordas<sup>16</sup>. No nível quântico, porém, é necessário verificar as circunstâncias nas quais a invariância conforme é mantida.

Seja a métrica  $g_{\mu\nu}$ , um escalar  $\Lambda$  e vetores  $k_\mu$  infinitesimais. Se para algum  $\Lambda$ :

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu + 2\Lambda g_{\mu\nu} = 0,$$

então  $k_\mu$  são os vetores de Killing conformes. (se  $\Lambda = 0$ , são apenas vetores de Killing). Abaixo temos como algumas grandezas geométricas transformam-se por transformação conforme:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\Lambda(x)} g_{\mu\nu}, \quad \sqrt{g} \rightarrow \sqrt{\|e^{2\Lambda} g_{\mu\nu}\|} = e^{n\Lambda(x)} \sqrt{g},$$

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \rightarrow e^{\epsilon\Lambda} \sqrt{g} g^{\mu\nu}.$$

A invariância por mudanças de escala (transformação conforme) está relacionada com os zeros (pontos críticos) da função beta, uma vez que nestes pontos a constante de acoplamento não varia com a escala de energia (que é inversamente proporcional à escala de distâncias). Para evidenciar esta relação, consideremos apenas as transformações conformes definamos um escalar que está ligado ao tensor momento-energia<sup>17</sup>:

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{g} \Lambda(x) T. \quad (1.106)$$

A partir desta definição, calculemos  $T$  explicitamente:

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \cdot \delta g_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \cdot 2\Lambda g_{\mu\nu} = \int d^n x 2\Lambda g_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.107)$$

implicando em

$$\sqrt{g} T = 2g_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (1.108)$$

Usando agora a ação (1.85), calculemos o termo acima explicitamente:

$$2g_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \rightarrow \epsilon L = T, \quad (1.109)$$

onde neste cálculo deve-se atentar para os fatos de que  $\delta \sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ , que  $\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$  e que  $n = 2 + \epsilon$ .

<sup>16</sup>Veja [13], cap. 3.4.3

<sup>17</sup>Como as transformações conformes não têm direções preferenciais, a grandeza conservada também não pode conter índices, deve ser um escalar.

Utilizando a ação efetiva teremos:

$$\begin{aligned}\delta\Gamma &= e^\Gamma \int \mathcal{D}\Pi(-\delta S)e^{-S+\Pi.J} \\ \delta\Gamma &= \left\langle \int d^2x \sqrt{g} \Lambda(x) T \right\rangle = \int d^2x \sqrt{g} \Lambda(x) \langle T \rangle\end{aligned}\quad (1.110)$$

Utilizando o resultado da Eq.(1.109), teremos que:

$$T = \epsilon \mathcal{L} \rightarrow \epsilon \langle \mathcal{L} \rangle. \quad (1.111)$$

Esta é a **anomalia conforme**. Observe que a priori  $\langle T \rangle$  deve ser zero, mas o valor esperado da Lagrangeana não é necessariamente zero. Integrando a anomalia, teremos:

$$\int d^2x \sqrt{g} \langle T \rangle = \epsilon \langle S \rangle. \quad (1.112)$$

A ação depende linearmente da métrica nua  $G_{\mu\nu}$ , então podemos escrever:

$$\epsilon S = \epsilon G_{\mu\nu} \cdot \frac{\delta S}{\delta G_{\mu\nu}}. \quad (1.113)$$

Fazendo uso da Eq. (1.104), que relaciona as métricas nua e renormalizada, podemos ver que:

$$\epsilon G = \mu \frac{\delta G}{\delta \mu} = \mu \frac{\delta G^R}{\delta \mu} \frac{\delta G}{\delta G^R} = \beta_G \frac{\delta G}{\delta G^R}. \quad (1.114)$$

Relacionando esta equação com a Eq. (1.113), e calculando o valor esperado através da ação efetiva, teremos:

$$\langle \epsilon S \rangle = \left\langle \beta_G \frac{\delta G}{\delta G^R} \frac{\delta S}{\delta G} \right\rangle = \beta_G \frac{\delta \Gamma}{\delta G^R}. \quad (1.115)$$

A anomalia integrada fica da forma:

$$\int d^2x \sqrt{g} \langle T \rangle = \beta_G \frac{\delta \Gamma}{\delta G^R}. \quad (1.116)$$

Para a teoria ser livre da anomalia conforme, devemos verificar o ponto em que a função beta da métrica se anula, ou seja:

$$\beta_G \frac{\delta \Gamma}{\delta G^R} = 0 \rightarrow \beta_G = 0. \quad (1.117)$$

Desta forma chegamos ao resultado de que, para a teoria de cordas manter a invariância conforme, o segundo fator da Eq. (1.102) deve anular-se. O termo da derivada de  $\Gamma$  anula-se, e a equação que deve ser obedecida é:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (1.118)$$

que é na verdade a *Equação de Einstein da gravitação* para o vácuo.



## Capítulo 2

### Supersimetria

#### 2.1 Introdução

Simetrias de uma ação são definidas como transformações nos campos da ação que deixam esta invariante. Os exemplos mais comuns são as invariâncias de Lorentz e gauge das teorias de Yang-Mills. Uma ação pode conter campos bosônicos, comutantes, e campos fermiônicos, anti-comutantes, ou grassmannianos.

É possível construir transformações que levam campos bosônicos para campos fermiônicos e vice-versa. Uma delas é a *Supersimetria*, que relaciona campos escalares, e campos espinoriais. Para definirmos esta simetria precisamos observar que em um espaço de  $D$  dimensões, os espinores de Weyl têm  $2^{D/2}$  componentes reais. Podemos então introduzir a supersimetria como:

Em uma dimensão:

$$\delta_\epsilon \phi = \epsilon \psi, \quad \delta \psi = -i\epsilon \partial \phi. \quad (2.1)$$

Em duas dimensões:

$$\delta_\epsilon \phi = \epsilon^\alpha \psi_\alpha, \quad \delta_\epsilon \psi_\beta = -i\epsilon^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m \phi, \quad (2.2)$$

onde  $\sigma_{\alpha\beta}^m$  são as matrizes de Pauli em duas dimensões e  $\epsilon$ , o parâmetro da transformação, é um espinor de Weyl<sup>1</sup>.

Utilizaremos as seguintes definições para contração e manipulação de índices:

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (2.3)$$

$$\psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta, \quad (2.4)$$

$$\phi \sigma^m \xi = \phi^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^m \xi^\beta, \quad (2.5)$$

onde  $\epsilon_{\alpha\beta}$  é o tensor completamente antissimétrico.

---

<sup>1</sup>Supersimetria em quatro dimensões pode ser encontrada em [16].

É usual definir, em duas dimensões, as matrizes  $\sigma$  de Pauli como sendo

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_{\alpha\beta}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{0\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\sigma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_{\alpha}^{1\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Neste trabalho utilizaremos as coordenadas de cone de luz, definidas como

$$x^+ = \frac{1}{2}(x^0 + x^1), \quad x^- = \frac{1}{2}(x^0 - x^1), \quad (2.7)$$

onde  $x^0$  e  $x^1$  são as coordenadas usuais de Minkovsky. Neste sistema de coordenadas, as transformações de supersimetria, Eq. (2.2), escrevem-se como:

$$\delta_{\epsilon}\phi = \epsilon^{\alpha}\psi_{\alpha}, \quad \delta_{\epsilon}\psi_{\pm} = -i\epsilon^{\pm}\partial_{\pm}\phi, \quad (2.8)$$

uma vez que  $\sigma_{\alpha\beta}^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}^0 \pm \sigma_{\alpha\beta}^1)$ .

Exemplifiquemos, com uma ação bem simples, a supersimetria. Consideremos a ação de um escalar real livre e de um espinor real, no cone de luz:

$$\mathcal{S} = \int d^2x (\phi\partial_+\partial_-\phi + i\psi_+\partial_-\psi_+ + i\psi_-\partial_+\psi_-). \quad (2.9)$$

Para constatar sua invariância sob transformações de supersimetria, calculemos a variação da ação.

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon}\mathcal{S} &= \int d^2x (2\delta_{\epsilon}\phi\partial_+\partial_-\phi + 2i\delta_{\epsilon}\psi_+\partial_-\psi_+ + 2i\delta_{\epsilon}\psi_-\partial_+\psi_-) = \\ &= \int d^2x (2\epsilon^{\alpha}\psi_{\alpha}\partial_+\partial_-\phi + 2\epsilon^+\partial_+\phi\partial_-\psi_+ + 2\epsilon^-\partial_-\phi\partial_+\psi_-) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Logo vemos que esta ação é de fato supersimétrica, onde utilizamos o fato de que  $\epsilon^{\alpha}$  é uma constante, e integramos por partes ao final.

Para sermos mais completos, precisamos definir a álgebra de supersimetria. Da mesma forma que rotações em um plano definem  $SO(2)$ , podemos escrever a supersimetria de forma que defina um grupo de Lie. Muito de um grupo de Lie é determinado pela sua álgebra, então, definamos a álgebra de supersimetria:

$$[\delta_{\epsilon}, \delta_{\zeta}] = -2\epsilon^{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}^m\zeta^{\beta}P_m, \quad (2.11)$$

onde  $\delta_{\epsilon}, \delta_{\zeta}$  são elementos da álgebra (transformações infinitesimais) e  $P_m$  é o momento,  $-i\partial_m$ . Esta álgebra deve ser satisfeita quando atuada sobre os campos de uma ação supersimétrica. Testemo-la sobre o campo bosônico  $\phi$ .

$$\begin{aligned}
[\delta_\epsilon, \delta_\zeta]\phi &= \delta_\epsilon(\zeta^\alpha \psi_\alpha) - \delta_\zeta(\epsilon^\alpha \psi_\alpha) = \\
&= 2i\epsilon^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^m \zeta^\beta \partial_m \phi.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Vemos então que para o campo  $\phi$  a álgebra é satisfeita. Por outro lado, encontraremos algo diferente ao aplicarmos a álgebra sobre os campos fermiônicos,  $\psi$ . Observe que

$$\begin{aligned}
[\delta_\epsilon, \delta_\zeta]\psi_\pm &= \delta_\epsilon(-i\zeta^\pm \partial_\pm \phi) - \delta_\zeta(-i\epsilon^\pm \partial_\pm \phi) = \\
&= -i\zeta^\pm \epsilon^\alpha \partial_\pm \psi_\alpha + i\epsilon^\pm \zeta^\alpha \partial_\pm \psi_\alpha,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

não é o segundo membro de (2.8), podemos, no entanto, fazer a álgebra cumprir-se caso utilizemos as equações de movimento do campo  $\psi$ , a saber,

$$\partial_\pm \psi_\mp = 0. \tag{2.14}$$

Aplicando estas equações no segundo membro de (2.13), teremos:

$$-i\zeta^\pm \epsilon^\alpha \partial_\pm \psi_\alpha + i\epsilon^\pm \zeta^\alpha \partial_\pm \psi_\alpha = -i\zeta^\pm \epsilon^\pm \partial_\pm \psi_\pm + i\epsilon^\pm \zeta^\pm \partial_\pm \psi_\pm = 2i\epsilon^\pm \zeta^\pm \partial_\pm \psi_\pm, \tag{2.15}$$

satisfazendo, então, a álgebra de supersimetria. Logo vemos o fato interessante de que a álgebra só se cumpre na camada de massa dos campos  $\psi$ . Para contornar este fato e termos a álgebra fechando fora da camada de massa, precisamos introduzir um campo auxiliar bosônico nas transformações de supersimetria. Estas ficam:

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon \phi &= \epsilon^\alpha \psi_\alpha \\
\delta_\epsilon \psi_\beta &= -i\epsilon^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m \phi - i\epsilon_\beta F \\
\delta_\epsilon F &= \epsilon^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m \psi^\beta.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Os campos  $\phi$ ,  $\psi^\alpha$  e  $F$  formam o *multiplete* supersimétrico escalar. As transformações acima satisfazem a álgebra de supersimetria, Eq. (2.11), sem necessidade de equações extras. Podemos incluir o campo  $F$  na ação como um campo auxiliar, que pode ser eliminado algebricamente da ação. Teremos então:

$$\mathcal{S} = \int d^2x (\phi \partial_+ \partial_- \phi + i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_- - FF). \tag{2.17}$$

## 2.2 Supercampos

Para evidenciar a supersimetria em uma teoria, consideremos que o espaço seja formado pelas  $D$  dimensões usuais,  $x^\mu$ , bosônicas, e por  $2^{D/2}$  dimensões extras

porém, mapeadas por coordenadas **grassmanianas**,  $\theta^\alpha$ , fermiônicas. As coordenadas férmions são espinores de Weyl, como acima. Desta forma podemos definir a “supercoordenada”:

$$\mathbb{X}^M = (x^m, \theta^\alpha). \quad (2.18)$$

O espaço mapeado pela supercoordenada chama-se **superespaço**.

Antes de continuarmos, relembremos o seguinte fato. O espaço euclidiano mapeado pelas coordenadas  $x^m$  pode ser visto como o espaço tangente, do grupo de translações gerado pelo momento  $P_m$ , ou seja, a álgebra. Desta forma, considerando um vetor  $x^m P_m$ , da álgebra, o correspondente elemento do grupo das translações é definido como:

$$\ell_x = e^{-ix^m P_m}. \quad (2.19)$$

Este grupo obedece à álgebra abeliana das translações:  $[P_m, P_n] = 0$ , o que implica em:

$$\ell_x \ell_y = e^{-ix^m P_m} e^{-iy^m P_m} = e^{-i(x+y)^m P_m}, \quad (2.20)$$

onde usamos (e usaremos a seguir) a relação  $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$ , se  $[A, [A, B]] = 0$ , que é o nosso caso.

Estas transformações entre elementos do grupo induzem uma transformação nos vetores da álgebra:

$$x^m \rightarrow (x + y)^m. \quad (2.21)$$

Desta forma,  $P_m$  pode ser escrito de maneira a gerar estas transformações no espaço tangente, a saber:  $P_m = -i\partial_m$ . Assim

$$e^{y^m \partial_m} f(x) = (1 + y^m \partial_m + \frac{1}{2} y^m y^n \partial_m \partial_n + \dots) f(x) = f(x + y), \quad (2.22)$$

pois esta é a expansão de Taylor de  $f(x + y)$  em torno de  $x$ . Retornando à supersimetria, definamos um gerador  $Q_\alpha$ , tal que  $\delta_\xi = \xi^\alpha Q_\alpha$ , e que satisfaça a álgebra de supersimetria Eq. (2.11). Devido ao fato de que  $Q_\alpha$  é grassmaniano, a álgebra a ser obedecida fica na forma:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^m P_m. \quad (2.23)$$

Podemos pensar agora o superespaço como sendo a álgebra do grupo de supersimetria, gerado por  $P_m$  e  $Q_\alpha$ . Analisando a parte fermiônica, podemos definir o elemento de “supertranslação” como sendo:

$$\ell_\theta = e^{\theta^\alpha Q_\alpha}, \quad (2.24)$$

e como sua álgebra não é abeliana, a composição assume a forma:

$$\ell_\theta \ell_\xi = e^{\theta^\alpha Q_\alpha} e^{\xi^\alpha Q_\alpha} = e^{(\theta+\xi)^\alpha Q_\alpha + \theta\sigma^m \xi P_m}, \quad (2.25)$$

ou seja, a composição de duas translações fermiônicas gera uma translação espacial bosônica:

$$\theta \sigma^m \xi P_m = -i \delta x^\mu P_m \rightarrow \delta x^m = i \theta \sigma^m \xi. \quad (2.26)$$

Definindo uma base coordenada  $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$  e  $\partial_m$ , podemos definir  $Q_\alpha$  como:

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i \theta^\beta \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m, \quad (2.27)$$

este operador induzirá a transformação no espaço tangente:

$$(1 + \xi^\alpha Q_\alpha) \mathbb{X} = (1 + \xi^\alpha Q_\alpha)(x^m + \theta^\beta) = (x^m - i \theta \sigma^m \xi) + (\theta + \xi)^\beta. \quad (2.28)$$

Define-se usualmente a derivada covariante supersimétrica como sendo:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i \theta^\beta \sigma_{\beta\alpha}^m \partial_m. \quad (2.29)$$

Este operador anticomuta com o gerador de supersimetria e satisfaz uma álgebra muito semelhante à (2.23), porém com o sinal trocado:

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = -2 \sigma_{\alpha\beta}^m P_m, \quad (2.30)$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0. \quad (2.31)$$

Observe que é de extrema importância que a derivada covariante anticomute com o gerador de supersimetrias, pois isso nos diz que  $D_\alpha$  é supersimétrica.

Podemos agora definir os supercampos. Supercampos são funções que dependem de  $\mathbb{X}$ :  $f(\mathbb{X}) = f(x, \theta)$ . Como as variáveis grassmanianas anticomutam, uma expansão em potências de  $\theta^\alpha$  só se desenvolverá até o termo  $\theta^{2D/2}$ . No caso bidimensional ( $n=2$ ), teremos que:

$$f(x, \theta) = f(x, \theta)|_{\theta=0} + \theta^\alpha \partial_\alpha f(\mathbb{X})|_{\theta=0} - \frac{1}{4} \theta^2 \partial^\alpha \partial_\alpha f(\mathbb{X})|_{\theta=0}. \quad (2.32)$$

É usual definir campos dependentes apenas de  $x^m$  para cada termo da expansão. Então, a maneira comum de se definir a expansão de um supercampo em termo dos seus campos componentes é:

$$f(x, \theta) = \phi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \frac{1}{2} \theta^2 F(x). \quad (2.33)$$

Assim evidenciamos os campos componentes do supercampo, a saber, um campo escalar, um campo espinorial e um último campo escalar.

É importante ver que uma lagrangeana definida a partir de supercampos, é supersimétrica.



$$\int Q_\alpha L(\mathbb{X}) d^2x d^2\theta = \int (\partial_\alpha + i\theta^\beta \sigma_{\beta\alpha}^m \partial_m) L(\mathbb{X}) d^2x d^2\theta = 0, \quad (2.34)$$

pois, o primeiro termo é uma derivada total, e o segundo pode ser integrado por partes.

Em duas dimensões e no cone de luz, podemos definir o gerados de supersimetria como:

$$Q_+ = \frac{\partial}{\partial\theta^+} - i\theta^+ \partial_+ \quad (2.35)$$

$$Q_- = \frac{\partial}{\partial\theta^-} - i\theta^- \partial_-, \quad (2.36)$$

que satisfaz a álgebra usual:

$$\{Q_+, Q_+\} = 2P_+ \quad (2.37)$$

e zero nos outros casos. Da mesma forma, as derivadas covariantes escrevem-se:

$$D_+ = \frac{\partial}{\partial\theta^+} + i\theta^+ \partial_+ \quad (2.38)$$

$$D_- = \frac{\partial}{\partial\theta^-} + i\theta^- \partial_- \quad (2.39)$$

Claramente podemos reescrever estas expressões utilizando das matrizes  $\sigma$ :  $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\theta^\beta \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m$ .

## 2.3 Múltiplas supersimetrias

Assim como definimos a transformação de Supersimetria entre um campo escalar e um conjunto de férmions, podemos definir mais simetrias semelhantes relacionando o mesmo campo bosônico com outros campos fermiônicos, ou seja, mais supersimetrias. Chamaremos o número de supersimetrias de  $N$ .  $N=2$ , duas supersimetrias,  $N=1$ , uma,  $N=0$  é o caso bosônico.

Para implementar estas novas simetrias no formalismo já exposto, consideremos vários geradores de supersimetrias:  $Q_\alpha^A$ , onde  $A$  indica qual gerador estamos nos referindo. A álgebra de Susi assume a forma:

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^m P_m M^{AB}. \quad (2.40)$$

Consideraremos  $M^{AB} = I^{AB}$  no nosso caso<sup>2</sup>. Seguindo, podemos associar a cada nova supersimetria um novo conjunto de variáveis fermiônicas  $\theta_\alpha^A$ , e definir supercampos com  $N$  supersimetrias. Como exemplo, façamos o caso  $N=2$  em duas dimensões:

$$f(x, \theta, \xi) = f(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha + \xi^\alpha \chi_\alpha + \theta^\alpha \xi^\beta \Xi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \theta^2 F + \frac{1}{2} \xi^2 G + \frac{1}{2} \theta^2 \xi^\alpha \Sigma_\alpha + \frac{1}{2} \xi^2 \theta^\alpha \Theta_\alpha + \frac{1}{4} \xi^2 \theta^2 A, \quad (2.41)$$

<sup>2</sup>Este  $M$  está relacionado com a carga central definida em [16]

onde os campos do multiplete acima vêm diretamente da expansão da Taylor de  $f(x, \theta, \xi)$  em torno dos pontos  $\theta$  e  $\xi$ .

Podemos definir ações com múltiplas supersimetrias da mesma forma como o caso  $N=1$ , assim teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^n x \prod^N d^{2^{D/2}} \theta^A L(x, \theta^A), \text{ ou no caso } N=2, \\ \mathcal{S} &= \int d^2 x d^2 \theta d^2 \xi L(x, \theta, \xi). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Este é o formalismo manifestamente supersimétrico.

Existem outras maneiras de termos supersimetrias extras que não apresentam-se de maneira manifesta. Uma delas pode ser definida da seguinte maneira. Seja uma ação com supersimetria  $N=1$  manifesta contendo vários supercampos escalares  $\phi^i$ , onde o índice indica qual campo estamos nos referindo. Outras supersimetrias podem ser introduzidas se considerarmos a seguinte transformação:

$$\delta_\epsilon \phi^i = \epsilon^\alpha J^i_j D_\alpha \phi^j. \quad (2.43)$$

Podemos considerar estas equações como sendo variações das Eqs. (2.2), mas para serem supersimetrias, a álgebra (2.11) deve ser satisfeita.

$$\begin{aligned} [\delta_\epsilon, \delta_\xi] \phi^i &= \delta_\epsilon (\xi^\alpha J^i_j D_\alpha \phi^j) - \delta_\xi (\epsilon^\alpha J^i_j D_\alpha \phi^j) = \\ &= \xi^\alpha J^i_{j,k} \delta_\epsilon \phi^k D_\alpha \phi^j + \xi^\alpha J^i_j D_\alpha (\delta_\epsilon \phi^j) - (\epsilon \leftrightarrow \xi) = \\ &= -\epsilon^\alpha \xi^\beta J^i_j J^j_l \{D_\alpha, D_\beta\} \phi^l + \xi^\alpha \epsilon^\beta (J^i_{j,k} J^k_l - J^i_{l,k} J^k_j - \\ &\quad - J^i_j J^j_{j,k} + J^i_j J^j_{k,l}) D_\beta \phi^l D_\alpha \phi^j. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para que tenhamos

$$[\delta_\epsilon, \delta_\xi] \phi^i = 2i\epsilon^\alpha \xi^\beta \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m \phi^i, \quad (2.45)$$

teremos que ter o termo dos anticomutadores multiplicado por  $-1$ , e o restante nulo. Isto implica nas condições [20, 21, 22]:

$$J^i_j J^j_k = -\delta^i_k, \text{ e } J^l_i J^k_{[j,l]} - J^l_j J^k_{[i,l]} = 0. \quad (2.46)$$

Estas condições coincidentemente são as condições suficientes para que  $J$  seja uma estrutura complexa, implicando que  $\phi^j$  sejam coordenadas de uma variedade de Kähler. Isto será melhor explicado na seção 3.2. De qualquer maneira é importante ressaltar que para termos mais supersimetrias com o mesmo conteúdo de campos, o espaço alvo tem que ser Kähler.

## 2.4 Duas Supersimetrias

Além das coordenadas bosônicas  $x^m$  e das duas direções fermiônicas  $\theta^\alpha (\equiv \theta_1^\alpha)$ , introduzamos mais duas direções,  $\theta_2^\alpha$ , com derivadas covariantes e geradores de supersimetria idênticos aos mesmos para as variáveis  $\theta_1^\alpha$ .

Assim teremos:

$$Q_{A\alpha} = \partial_{\theta_A^\alpha} - i\theta_A^\beta \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m, \quad D_{A\alpha} = \partial_{\theta_A^\alpha} + i\theta_A^\beta \sigma_{\alpha\beta}^m \partial_m, \quad (2.47)$$

onde  $\alpha, \beta = 1, 2$ , são os índices espinoriais e  $A, B = 1, 2$  são os índices de supersimetria. Estes operadores satisfazem a álgebra usual de supersimetria, Eq.(2.23).

Agora podemos redefinir as variáveis fermiônicas de uma forma mais conveniente:

$$\begin{aligned} \vartheta^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1^\alpha - i\theta_2^\alpha), & \bar{\vartheta}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1^\alpha + i\theta_2^\alpha). \\ \mathcal{D}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (D_1^\alpha + iD_2^\alpha), & \bar{\mathcal{D}}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (D_1^\alpha - iD_2^\alpha). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Que satisfaz a álgebra:

$$\{\mathcal{D}_\pm, \bar{\mathcal{D}}_\pm\} = 2P_\pm, \quad (2.49)$$

onde aqui não há soma sobre os índices  $\alpha$  e já fizemos a escolha da representação das matrizes sigma (coordenada de cone de luz, Eq. (2.7)).

Para construirmos uma ação manifestamente supersimétrica N=2, em duas dimensões, teremos que considerar inicialmente que a medida da integral da ação é  $d^2x d^2\theta_1 d^2\theta_2$  cuja dimensão de massa é nula, uma vez que  $[d^2x] = -2$ ,  $[d^2\theta] = -1$ . Isto implica que qualquer lagrangeana proposta deve ser adimensional. Em variedades de grupos, a lagrangeana é expressa em termos de campos e seus inversos, logo não contribuindo para a dimensão, desta forma a presença de derivadas não é permitida já que estas contribuem para a dimensão de massa.

Desta forma, ações manifestamente supersimétricas N=2 em duas dimensões têm que ser da forma:

$$\mathcal{S} = \int d^2x d^4\theta K(\vartheta_\alpha, \bar{\vartheta}_\alpha) = \int d^2x d^4\theta K(\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha}), \quad (2.50)$$

onde  $K$  é um campo escalar e  $d^4\theta = d^2\theta_1 d^2\theta_2$ .

Como na ação (2.50) não existem derivadas, toda a dinâmica da teoria é definida por possíveis vínculos a serem satisfeitos pelo campo escalar  $K$ . É demonstrado que uma grande classe de modelos  $\sigma$  podem ser compostos por campos quirais e quirais torcidos [21]. Desta forma, restringir-nos-emos a potenciais da forma:

$$K(\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha}) = K(\Phi, \bar{\Phi}, \Lambda, \bar{\Lambda}). \quad (2.51)$$

Definiremos a seguir estes dois tipos de campos:

### 2.4.1 Campo Quiral e Quiral Torcido.

Seja um supercampo  $N=2$ ,  $\Phi = \Phi(x, \theta_1, \theta_2)$ , e seu conjugado complexo. Considerando que as quatro derivadas covariantes  $\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_\alpha$  definem, cada uma, direções no superspaço, os campos quirais são definidos como aqueles que se propagam apenas na direção holomórfica, ou seja:

$$\bar{\mathcal{D}}_\alpha \Phi = 0, \quad \mathcal{D}_\alpha \bar{\Phi} = 0, \quad (2.52)$$

onde a segunda expressão vem do fato dos campos conjugados (anti-quirais) propagarem-se na direção anti-holomórfica. Pela definição de  $\mathcal{D}_\alpha$ , Eq. (2.48), estas condições implicam que:

$$D_{1\alpha} \Phi = i D_{2\alpha} \Phi, \quad D_{1\alpha} \bar{\Phi} = -i D_{2\alpha} \bar{\Phi}, \quad (2.53)$$

e também temos que:

$$D_2^2 \Phi = -D_1^2 \Phi, \quad D_2^2 \bar{\Phi} = -D_1^2 \bar{\Phi}. \quad (2.54)$$

De posse destas relações cinemáticas, podemos encontrar relações entre os componentes do multipletto  $\Phi$ . A expansão em potências de  $\theta_2$  nos fornece

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta_1) + \theta_2^\alpha \psi_\alpha(\theta_1) + \theta_2^2 F(\theta_1), \quad (2.55)$$

em que aqui cada campo componente é um supercampo  $N=1$ . Observe que por definição,

$$\psi_\alpha = -i D_{2\alpha} \Phi|_{\theta_2=0} = -i D_{1\alpha} \phi, \quad (2.56)$$

$$F = -\frac{1}{4} D_2^2 \Phi|_{\theta_2=0} = -\frac{1}{4} D_1^2 \phi, \quad (2.57)$$

onde usamos as Eq. (2.53) e Eq. (2.54). Concluímos que o campo quiral  $N=2$   $\Phi$  tem apenas um campo independente no seu multipletto, a saber o campo  $N=1$   $\phi$  que não satisfaz nenhum vínculo.

Repetindo os passos anteriores agora para o campo anti-quiral  $\bar{\Phi}$ , teremos que

$$\bar{\Phi}(\theta_1, \theta_2) = \bar{\phi}(\theta_1) + \theta_2^\alpha \bar{\psi}_\alpha(\theta_1) + \frac{1}{4} \theta_2^2 \bar{F}(\theta_1), \quad (2.58)$$

e a expansão em campos componentes

$$\bar{\psi}_\alpha = i D_{2\alpha} \bar{\Phi}|_{\theta_2=0} = -i D_{1\alpha} \bar{\phi}, \quad (2.59)$$

$$\bar{F} = -\frac{1}{4} D_2^2 \bar{\Phi}|_{\theta_2=0} = -\frac{1}{4} D_1^2 \bar{\phi}. \quad (2.60)$$

Introduzamos agora os campos quirais torcidos (do inglês *twisted chiral*),  $\Lambda(x, \theta_1, \theta_2)$ . Estes campos também obedecem relações cinemáticas porém diferentes das satisfeitas pelos campos quirais. Elas são

$$\bar{\mathcal{D}}_+\Lambda = \mathcal{D}_-\Lambda = 0; \quad \mathcal{D}_+\bar{\Lambda} = \bar{\mathcal{D}}_-\bar{\Lambda} = 0. \quad (2.61)$$

O título *torcido* pode ser sugerido se observarmos que estes são campos quirais usuais onde trocamos  $\bar{\mathcal{D}}_- \leftrightarrow \mathcal{D}_-$ .

Estas condições implicam que:

$$D_{+1}\Lambda = iD_{+2}\Lambda, \quad D_{-1}\Lambda = -iD_{-2}\Lambda. \quad (2.62)$$

$$D_{+1}\bar{\Lambda} = -iD_{+2}\bar{\Lambda}, \quad D_{-1}\bar{\Lambda} = iD_{-2}\bar{\Lambda}, \quad (2.63)$$

ou melhor:

$$D_{2\alpha}\Lambda = M_\alpha{}^\beta D_{1\beta}\Lambda, \quad D_{2\alpha}\bar{\Lambda} = \bar{M}_\alpha{}^\beta D_{1\beta}\bar{\Lambda}, \quad (2.64)$$

onde,

$$M_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = M^*. \quad (2.65)$$

Além disto:

$$D_2^2\Lambda = D_1^2\Lambda, \quad D_2^2\bar{\Lambda} = D_1^2\bar{\Lambda}. \quad (2.66)$$

Sob estas condições, a expansão de Taylor em torno de  $\theta_2$  assume a forma:

$$\Lambda(\theta_1, \theta_2) = \lambda(\theta_1) + \theta_2^\alpha \chi_\alpha(\theta_1) + \theta_2^2 F(\theta_1), \quad (2.67)$$

onde,

$$\chi_\alpha = D_{2\alpha}\Lambda|_{\theta_2} = \begin{cases} -iD_{+1}\lambda \\ iD_{-1}\lambda \end{cases}, \quad (2.68)$$

$$F = \frac{1}{4}D_2^2\Lambda|_{\theta_2=0} = \frac{1}{4}D_1^2\lambda. \quad (2.69)$$

Novamente vemos que o campo N=2 quiral torcido  $\Lambda$  depende apenas de sua primeira componente N=1,  $\lambda$ , que por sua vez não obedece nenhum vínculo.

Analogamente para o campo anti-quiral torcido (o conjugado complexo)

$$\bar{\Lambda}(\theta_1, \theta_2) = \bar{\lambda}(\theta_1) + \theta_2^\alpha \bar{\chi}_\alpha(\theta_1) + \theta_2^2 \bar{F}(\theta_1), \quad (2.70)$$

onde,

$$\bar{\chi}_\alpha = D_{2\alpha}\bar{\Lambda}|_{\theta_2} = \begin{cases} iD_{+1}\bar{\lambda} \\ -iD_{-1}\bar{\lambda} \end{cases}, \quad (2.71)$$

$$\bar{F} = \frac{1}{4}D_2^2\bar{\Lambda}|_{\theta_2=0} = \frac{1}{4}\bar{\lambda}. \quad (2.72)$$



O fato das componentes dos supercampos N=2 quiral e quiral torcido estarem relacionada via uma operação determinada, Eq. (2.59) para as componentes do supercampo quiral e Eq. (2.68), nos mostra que estas transformações formam uma outra representação da álgebra de supersimetria. Chamando  $\tilde{\mathcal{Q}}$  os novos geradores de superdimetria, podemos escreve-los explicitamente como

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha \phi = -i D_{\alpha 1} \phi, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha \bar{\phi} = i D_{\alpha 1} \bar{\phi}, \quad (2.73)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha \lambda = M_\alpha^\beta D_{\beta 1} \lambda, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha \bar{\lambda} = \bar{M}_\alpha^\beta D_{\beta 1} \bar{\lambda}. \quad (2.74)$$

Podemos escrever estas equações de uma forma muito mais útil para a seqüência do trabalho. Definamos um vetor  $\mathcal{V}^i$  como

$$\mathcal{V}^i = (\Phi, \bar{\Phi}, \Lambda, \bar{\Lambda}), \quad (2.75)$$

assim definamos duas matrizes  $J_+^i{}_j$  e  $J_-^i{}_j$  que satisfazem

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha \mathcal{V}^i = J_\alpha^i{}_j D_{1\alpha} \mathcal{V}^j, \quad (2.76)$$

observe que esta equação é exatamente a Eq. (2.43). Através da equações (2.73) e (2.74), podemos determinar as matrizes  $J$  e obteremos:

$$J_+ = \text{diag}(-i, i, -i, i), \text{ e, } J_- = \text{diag}(-i, i, i, -i). \quad (2.77)$$

Voltando para a ação N=2, Eq. (2.50), devemos utilizar os vínculos dos campos, apresentados acima, para que possamos integrar sobre as variáveis  $\theta_2^\alpha$ . Expandindo a ação (2.50), teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^2x d^4\theta K(\Phi, \bar{\Phi}, \Lambda, \bar{\Lambda}) = & \frac{1}{4} \int d^2x d^2\theta \left[ 4K_{\phi\bar{\phi}} D_1^\alpha \phi D_{1\alpha} \bar{\phi} - 4K_{\lambda\bar{\lambda}} D_1^\alpha \lambda D_{1\alpha} \bar{\lambda} + \right. \\ & - 2iK_{\phi\bar{\lambda}} D_1^\alpha \phi \bar{M}_\alpha^\beta D_{1\beta} \bar{\lambda} - 2iK_{\phi\lambda} D_1^\alpha \phi M_\alpha^\beta D_{1\beta} \lambda + \\ & \left. + 2iK_{\bar{\phi}\lambda} D_1^\alpha \bar{\phi} M_\alpha^\beta D_{1\beta} \lambda + 2iK_{\bar{\phi}\bar{\lambda}} D_1^\alpha \bar{\phi} \bar{M}_\alpha^\beta D_{1\beta} \bar{\lambda} \right], \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde os coeficientes significam, por exemplo:

$$K_{\Phi\Lambda} = \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi \partial \Lambda}. \quad (2.79)$$

O que então determinará a física do modelo será a forma do potencial  $K$ .

Esta expressão pode ser posta em uma forma bem mais conveniente e usual. Observemos que:

$$iM^{\alpha\beta} = i\epsilon^{\alpha\gamma} M_\gamma^\beta = i \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\delta}^{\alpha\beta}. \quad (2.80)$$

e desta forma, teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int d^2x d^2\theta \left[ K_{\phi\bar{\phi}} D_1^\alpha \phi D_{1\alpha} \bar{\phi} - K_{\lambda\bar{\lambda}} D_1^\alpha \lambda D_{1\alpha} \bar{\lambda} + \right. \\ & + \left( \frac{1}{2} K_{\phi\bar{\lambda}} D_{1\alpha} \phi D_{1\beta} \bar{\lambda} - \frac{1}{2} K_{\phi\lambda} D_{1\alpha} \phi D_{1\beta} \lambda + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} K_{\bar{\phi}\lambda} D_{1\alpha} \bar{\phi} D_{1\beta} \lambda - \frac{1}{2} K_{\bar{\phi}\bar{\lambda}} D_{1\alpha} \bar{\phi} D_{1\beta} \bar{\lambda} \right) \tilde{\delta}^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

A ação mais simples N=2 é a de campos quirais livres. Esta também pode ser chamada de modelo sigma linear, uma vez que os campos estão relacionados de uma forma linear. A ação é da forma:

$$S = \int d^2x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi = \int d^2x d^2\theta D_1^\alpha \phi D_{1\alpha} \bar{\phi}. \quad (2.82)$$

Esta ação reduz-se, após o supercampo N=1 ser expandido por meios de

$$\phi = A + \theta_1^\alpha B_\alpha + \frac{1}{2} \theta_1^2 C, \quad (2.83)$$

e ser integrado em  $\theta_1$ , à expressão:

$$S = \int d^2x \left( \bar{A} \partial_+ \partial_- A + i \bar{B}_+ \partial_- B_+ + i \bar{B}_- \partial_+ B_- - \frac{1}{2} \bar{C} C \right). \quad (2.84)$$

Onde temos um campo  $A$  escalar complexo e um campo de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $B$ , ambos livres. O campo auxiliar  $C$  pode ser retirado algebricamente através de suas equações de movimento  $C = \bar{C} = 0$ .

Poderíamos ter feito o mesmo para os campos quirais torcidos livres, porém, a ação seria a mesma, a menos de um sinal, que pode ser visto do segundo termo da Eq. (2.81).

## Capítulo 3

### Modelo Sigma Supersimétrico.

#### 3.1 Uma Supersimetria.

Como mencionado no capítulo 1, o modelo  $\sigma$  também serve como protótipo na construção da teoria de cordas, ou em outras palavras, a teoria de corda bosônica é um tipo de modelo  $\sigma$  em duas dimensões onde temos a presença do gráviton (termo principal), do campo antissimétrico (termo de WZW) e do dílaton (que não foi exposto neste trabalho). Uma motivação para se estudar uma generalização supersimétrica do modelo  $\sigma$  é entender a teoria de supercordas.

Existem duas formas de supersimetrizar a ação (1.37). Uma delas é impor leis de transformação semelhantes às equações (2.2) e, a partir do termo bosônico, encontrar a contraparte fermiônica. Este método é seguido em [20] mas a ação obtida é supersimétrica apenas na camada de massa, como a ação (2.9).

Um método mais fácil e direto é impor que os campos  $g$  e  $b$  não sejam funções do campo  $\phi(x)$  bosônico mas sim de um supercampo  $N=1$   $\Phi(x, \theta)$ . Então teremos:

$$S = \int d^2x d^2\theta \frac{1}{2} D_- \Phi^i D_+ \Phi^j (g_{ij} + b_{ij})(\Phi). \quad (3.1)$$

Utilizamos as derivadas covariantes pois estas são as derivadas naturais que atuando sobre supercampos, reduzem-se às derivadas usuais quando  $\theta = 0$ . Veja que a ação está dimensionalmente correta uma vez que  $[D] = \frac{-1}{2}$ ,  $[d\theta] = \frac{-1}{2}$  e  $[dx] = 1$ .

Podemos calcular as equações de movimento, que se escrevem como:

$$D_+ D_- \Phi^i + \Gamma_{+jk}^i D_+ \Phi^j D_- \Phi^k = 0, \quad (3.2)$$

onde

$$\Gamma_{\pm jk}^i = g^{il}(\{l, jk\} \pm T_{ljk}) \quad (3.3)$$

$$\{l, jk\} = \frac{1}{2}(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}) \quad (3.4)$$

$$T_{ljk} = b_{lj,k} + b_{kl,j} + b_{jk,l} = 3b_{[li,j]}. \quad (3.5)$$

Podemos escrever o supercampo  $\Phi$  em termos de seus campos componentes, semelhante a expansão (2.33), a saber:

$$\Phi^i(x, \theta) = \phi^i(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha^i(x) + \frac{1}{2} \theta^2 F^i(x). \quad (3.6)$$

Assim, a ação (3.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^2x \{ & -g_{jk}(i\psi_+^j \partial_- \psi_+^k - F^j F^k + \partial_+ \phi^j \partial_- \phi^k - i\partial_+ \psi_-^j \psi_-^k) - \\ & -g_{jk,l} F^l \psi_+^j \psi_-^k - \frac{1}{2} g_{jk,lm} \psi_-^{l\alpha} \psi_\alpha^m \psi_+^j \psi_-^k + i g_{jk,l} \psi_-^l \psi_-^k \partial_+ \phi^j - \\ & -g_{jk,l} \psi_-^l \psi_+^j F^k + i g_{jk,l} \psi_+^l \psi_+^j \partial_- \psi_-^k + g_{jk,l} \psi_+^l F^j \psi_-^k \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Observe que esta ação contém um campo auxiliar,  $F$ , não propagante. Este campo garante a supersimetria fora da camada de massa. Se desejarmos eliminá-lo, para obter a ação em termo apenas de campos físicos, devemos substituir as equações de movimento para  $F$  diretamente na ação, a saber:

$$F^i = -\Gamma_{+jk}^i \psi_+^j \psi_-^k, \quad (3.8)$$

então, após algum algebrismo, teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (g_{ij} \eta^{\mu\nu} + b_{ij} \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j + \right. \\ \left[ i g_{ij} \psi^i \not{\partial} \psi^j + i g_{ik} \Gamma_{+jl}^k \psi_-^l \psi_-^j \partial_+ \phi^i + \right. \\ \left. i g_{ik} \Gamma_{-jl}^k \psi_+^l \psi_+^j \partial_- \phi^i \right] + \frac{1}{4} R_{ijkl} \psi^{i\alpha} \psi_\alpha^k \psi^{j\beta} \psi_\beta^l \Big]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Definamos o modelo sigma supersimétrico em variedades de grupos. Inicialmente devemos ter como base o desenvolvimento apresentado na seção 1.4, onde o modelo é definido a partir de elementos  $g$  do grupo  $\mathfrak{G}$ . A maneira mais natural de supersimetrizar os elementos de grupo é supersimetrizar sua álgebra ou seja, ao invés de termos vetores do tipo  $\phi = \phi^i(x) \mathbf{T}_i$ , teremos  $\phi = \Phi^i \mathbf{T}_i$ , onde  $\Phi^i$  é um supercampo  $N=1$ , e  $\mathbf{T}_i$  são os geradores do grupo. Como já visto do caso bosônico, este supercampo é o mesmo que aparece na ação (3.1). Via mapeamento exponencial podemos definir os super-elementos  $N=1$  de grupo como sendo:

$$\mathbf{G}(x, \theta) = e^{\Phi^i \mathbf{T}_i} = g(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \frac{1}{2} \theta^2 F(x). \quad (3.10)$$

Observe que a primeira componente do multipletto é o elemento de grupo bosônico normalmente definido para grupos,  $g(x) = \mathbf{G}(x, \theta)|_{\theta=0}$ .

Utilizando as relações entre  $g$ ,  $b$  e  $g$  definidas pelas Eq. (1.54) e Eq. (1.74), na seção (1.5), onde agora quem descreve a teoria é um supercampo, teremos:

$$g_{ij} = \text{Tr}(\mathbf{G}_{,i}^{-1} \mathbf{G}_{,j}) = -\text{Tr}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,i} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,j}), \quad (3.11)$$

$$\partial_{[i} b_{jk]} = \frac{2}{3} \text{Tr}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,[i} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,j} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,k]}). \quad (3.12)$$

A ação fica na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^2x d^2\theta \frac{1}{2} D_- \Phi^i D_+ \Phi^j \text{Tr}(\mathbf{G}_{,i}^{-1} \mathbf{G}_{,j}) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \int d^2x d^2\theta dt \frac{1}{2} D_- \Phi^i D_+ \Phi^j \partial_t \Phi^k \text{Tr}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,[i} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,j} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{,k]}) = \\ \mathcal{S} &= \int d^2x d^2\theta \text{Tr}(D^\alpha \mathbf{G}^{-1} D_\alpha \mathbf{G}) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \int d^2x d^2\theta dt \delta^{\alpha\beta} \text{Tr}(\mathbf{G}^{-1} D_\alpha \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} D_\beta \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \partial_t \mathbf{G}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Consideremos  $b = 0$ , ou seja, apenas o modelo principal, e calculemos as equações de movimento. Expandindo o supercampo teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= g(x) + \theta^\alpha + \psi_\alpha + \frac{1}{2} \theta^2 F, \\ \mathbf{G}^{-1} &= g^{-1} + \theta^\alpha \tilde{\psi}_\alpha + \frac{1}{2} \theta^2 \tilde{F}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} = 1$ , teremos

$$g^{-1}g = 1, \quad \tilde{\psi}_\alpha = -g^{-1}\psi_\alpha g, \quad \tilde{F} = -g^{-1}Fg^{-1} - g^{-1}\psi\tilde{\psi}.$$

Integrando nas variáveis fermiônicas, teremos em componentes:

$$\int d^2x \left( -2g^{-1}\square g + i\tilde{\psi}_- \overset{\leftrightarrow}{\partial}_+ \psi_- + i\tilde{\psi}_+ \overset{\leftrightarrow}{\partial}_- \psi_+ + 2\tilde{F}F \right). \quad (3.15)$$

Variando a ação, obtemos as equações de movimento:

$$\partial_m(\partial^m g^{-1}g) = 0, \quad \not{\partial}\psi = 0, \quad \partial_m(g^{-1}\psi_\alpha g^{-1})\sigma^m = 0, \quad F = g^{-1}\psi^\alpha g^{-1}\psi_\alpha g^{-1} = 0. \quad (3.16)$$

### 3.2 Variedades de Kähler

Uma variedade complexa é aquela cujos abertos podem ser mapeados para  $\mathbf{C}^n$  (o que significa que podemos pôr sobre a variedade coordenadas holomórficas,  $(z^a)$ , e anti-holomórficas,  $\bar{z}^{\bar{a}}$ ) e cujas funções de transição entre os abertos sejam holomórficas



e anti-holomórficas. ( $z'^a = f^a(z)$ ,  $\bar{z}'^{\bar{a}} = \bar{f}^{\bar{a}}(\bar{z})$ .) Neste tipo de variedade existe uma transformação que age em vetores:

$$v'^a = J_b^a v^b = i v^a, \quad \bar{v}'^{\bar{a}} = \bar{J}_b^{\bar{a}} \bar{v}^b = -i \bar{v}^{\bar{a}}. \quad (3.17)$$

Esta transformação é natural em variedades complexas.  $J$  é chamado de estrutura complexa e é uma constante na variedade, uma vez que transformações holomórficas de coordenadas entre abertos não alteram sua forma, pois

$$J_b'^a = \frac{\partial z'^a}{\partial z^c} \frac{\partial z^d}{\partial z'^b} J_d^c = \frac{\partial z'^a}{\partial z^c} \frac{\partial z^d}{\partial z'^b} i \delta_d^c = i \delta_b^a. \quad (3.18)$$

O mesmo vale para as transformações anti-holomórficas.

Definamos então as variedades de Kähler que são aquelas que admitem métricas invariantes pelo grupo  $U(N)$  de holonomia. Estas métricas são chamadas de métricas de Kähler [14]. A holonomia  $U(N)$  garante a possibilidade de se construir uma estrutura complexa pois  $J$  é invariante por transformações de  $U(N)$  que são por definição holomórficas.

Várias variedades reais também podem ser variedades complexas. De maneira geral, uma variedade real  $2N$ -dimensional terá como grupo de holonomia algum subgrupo do grupo  $SO(2N)$ . Se tivermos que o grupo de holonomia seja o grupo  $U(N)$ , então a variedade será complexa. Não é difícil observar que grupo  $SO(2N)$  contém subgrupos  $U(N)$ , pois aquele divide-se em uma representação holomórfica e uma representação inequivalente anti-holomórfica. Para isso vejamos que vetores de  $SO(2N)$  têm  $2N$  componentes reais. Combinando suas componentes, duas a duas, podemos montar um vetor complexo de  $N$  componentes. Então podemos analisar como uma transformação de  $SO(2N)$  age nestes vetores complexos. Comparando com uma transformação geral de  $U(N)$ , veremos que estas podem ser escritas como um caso particular daquelas. Fazendo a mesma coisa com vetores conjugados complexos dos primeiros, teremos outra representação de  $U(N)$  que leva a um subgrupo de  $SO(2N)$  diferente do primeiro.

Assim, em variedades reais com grupo de holonomia  $U(N)$  podemos fazer uma transformação de coordenadas para coordenadas complexas e representar os vetores reais por dois vetores complexos,  $A_i \rightarrow A_a, \bar{A}_{\bar{a}}$ .

As métricas de Kähler satisfazem, em coordenadas complexas:

$$g_{a\bar{a}} = g_{\bar{a}a}, \quad g_{aa} = g_{\bar{a}\bar{a}} = 0. \quad (3.19)$$

Isto pode ser visto uma vez que as transformações  $U(N)$  deixam invariantes bilineares da forma  $ds^2 = g_{a\bar{a}} dz^a d\bar{z}^{\bar{a}}$ , onde  $g_{a\bar{a}} = A \delta_{a\bar{a}}$ .

A forma de Kähler é um objeto definido a partir da estrutura complexa:

$$\mathcal{K}_{ij} = g_{ik} J^k_j. \quad (3.20)$$

Em coordenadas holomórficas, onde  $J = \pm i$ , teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{a\bar{b}} &= g_{a\bar{c}} J^{\bar{c}}_{\bar{b}} = -i g_{a\bar{b}}, \\ \mathcal{K}_{\bar{a}b} &= g_{\bar{a}c} J^c_b = i g_{\bar{a}b}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observe que por construção,  $\mathcal{K}$  é um tensor covariante, antissimétrico e invariante por  $U(N)$ , pois é proporcional à métrica.

Como  $\mathcal{K}$  é por construção uma constante, satisfaz:

$$\partial_{[a} \mathcal{K}_{b]\bar{c}} = \partial_{[\bar{a}} \mathcal{K}_{|b|\bar{c}]} = 0. \quad (3.22)$$

Para satisfazer esta relação,  $K$  deve ser da forma:

$$\mathcal{K}_{a\bar{a}} = -i \partial_a \partial_{\bar{a}} K, \quad (3.23)$$

onde  $K$  é o chamado potencial de Kähler. Desta maneira podemos relacionar a métrica com  $K$ , a saber:

$$g_{a\bar{b}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^a \partial \bar{z}^b}. \quad (3.24)$$

Este fato será de extrema importância para o caso do modelo sigma  $N=2$ , uma vez que a lagrangeana deste modelo é completamente determinada por um campo escalar.

### 3.3 Modelo $\sigma$ no grupo $SU(2) \otimes U(1)$ .

Partamos agora para o exemplo final deste trabalho, onde usaremos os conceitos até aqui desenvolvidos. Já sabemos que para termos mais de uma supersimetria precisamos de uma variedade complexa pois nela teremos as estruturas complexas. Para tanto, usaremos o grupo  $SU(2) \otimes U(1)$  que na verdade é isomórfico ao grupo  $U(2)$ .

Podemos construir elementos deste grupo através de duas variáveis complexas,  $a$ ,  $b$  e seus conjugados complexos,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ , da maneira:

$$g = \frac{e^{i\vartheta}}{d} \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad d = \sqrt{a\bar{a} + b\bar{b}}, \quad \vartheta = -\frac{1}{2} \ln(d). \quad (3.25)$$

Observe que sem o termo exponencial, uma fase, teríamos  $g$  como elemento de  $SU(2)$ , porém com um grau de liberdade a mais. Esta fase faz a diferença entre o grupo  $SU(2)$  e  $U(2)$ .

Podemos construir uma representação  $N=2$  deste grupo, apresentada em [23], que utiliza-se de campos quirais  $(\Phi)$  e quirais torcidos  $(\Lambda)$ , a saber:

$$g = e^{i\vartheta}(\Phi\bar{\Phi} + \Lambda\bar{\Lambda})^{-1/2} \begin{pmatrix} \Lambda & \bar{\Phi} \\ -\Phi & \bar{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

onde  $\vartheta = -\frac{1}{2}\ln(\Phi\bar{\Phi} + \Lambda\bar{\Lambda})$ . Os campos  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$ ,  $\Lambda$  e  $\bar{\Lambda}$  representam as coordenadas complexas da variedade de  $SU(2)\otimes U(1)$ . Desta forma, a estrutura complexa escreve-se diretamente como  $\pm i$ , fato este que pode ser visto da Eq. (2.77). Assim, ao utilizarmos estes campos já garantimos a presença da estrutura complexa.

A métrica da variedade de grupo é definida como:

$$g_{ij} = \text{Tr}(g_i^{-1}g_j) = -\text{Tr}(g^{-1}g_{,i}g^{-1}g_{,j}) \quad (3.27)$$

onde  $i$  e  $j$  representam  $\Phi, \bar{\Phi}, \Lambda, \bar{\Lambda}$ .

Calculando explicitamente as componentes da métrica, obteremos que:

$$\begin{cases} g_{\Phi\bar{\Phi}} = g_{\Lambda\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Phi\bar{\Phi} + \Lambda\bar{\Lambda}} \\ g_{ij} = 0, \text{ nos demais casos} \end{cases} \quad (3.28)$$

onde para realizar os cálculos é bem mais fácil escrever  $g$  da forma

$$g = (\det M)^{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} M, \text{ onde, } M = \begin{pmatrix} \Lambda & \bar{\Phi} \\ -\Phi & \bar{\Lambda} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Podemos definir um “elemento de linha” neste espaço como:

$$ds^2 = \frac{1}{\Phi\bar{\Phi} + \Lambda\bar{\Lambda}} (d\Phi d\bar{\Phi} + d\Lambda d\bar{\Lambda}). \quad (3.30)$$

É importante observar que esta métrica é invariante por transformações  $U(2)$ . Para constatar, escrevamos  $z^a = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Lambda \end{pmatrix}$  e  $\bar{z}^{\bar{a}} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{\Lambda} \end{pmatrix}$ . Assim, uma transformação de  $U(2)$  é implementada via:

$$z'^a = U^a_b z^b; \quad \bar{z}'^{\bar{a}} = \bar{U}^{\bar{a}}_{\bar{b}} \bar{z}^{\bar{b}}, \quad (3.31)$$

onde  $\bar{U} = U^\dagger = U^{-1}$ . Podemos reescrever o termo  $\Phi\bar{\Phi} + \Lambda\bar{\Lambda}$  como sendo  $z^a \bar{z}^{\bar{a}} \delta_{a\bar{a}}$ , onde o símbolo delta é definido através de  $\delta_{\Phi\bar{\Phi}} = \delta_{\Lambda\bar{\Lambda}} = 1$  e 0 nos outros casos. Assim, fica claro que

$$z'^a \bar{z}'^{\bar{a}} \delta_{a\bar{a}} = U^a_b \bar{U}^{\bar{a}}_{\bar{b}} \delta_{a\bar{a}} z^b \bar{z}^{\bar{b}} = z^b \bar{z}^{\bar{b}} \delta_{b\bar{b}}. \quad (3.32)$$

Logo, a métrica será invariante por estas transformações

$$g'_{a\bar{a}} = \frac{1}{\Phi\bar{\Phi} + \Lambda\bar{\Lambda}} U^a_b \bar{U}^{\bar{a}}_{\bar{b}} \delta_{b\bar{b}} = \frac{1}{\Phi\bar{\Phi} + \Lambda\bar{\Lambda}} \delta_{a\bar{a}}. \quad (3.33)$$

Isto já seria de se esperar pois estamos lidando com a variedade de  $SU(2)$ .

Desta forma podemos classificar  $g$  como sendo do tipo Kähler, e assim pode ser escrita em termos de um potencial, como em (3.24). Como definido em [23], o potencial de Kähler desta métrica, em termos do conteúdo de campo apresentado, escreve-se como:

$$K = - \int \frac{dx}{x} \ln(1+x) \Big|_{\frac{\Lambda\bar{\Lambda}}{\Phi\bar{\Phi}}} + \ln \Phi \ln \bar{\Phi}. \quad (3.34)$$

Este termo é chamado de “potencial de Kähler torcido”, como em [22]. Esta nomenclatura advém do fato de que este potencial não determina a métrica da variedade segundo as Eq. (3.24). Calculando-se as derivadas segundas com relação aos campos da ação, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi \partial \bar{\Phi}} &= \frac{1}{(\Phi \bar{\Phi} + \Lambda \bar{\Lambda})}, & \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi \partial \Lambda} &= \frac{1}{(\Phi \bar{\Phi} + \Lambda \bar{\Lambda})} \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{\Phi}}, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi \partial \bar{\Lambda}} &= \frac{1}{(\Phi \bar{\Phi} + \Lambda \bar{\Lambda})} \frac{\Lambda}{\bar{\Phi}}, & \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{\Phi} \partial \Lambda} &= \frac{1}{(\Phi \bar{\Phi} + \Lambda \bar{\Lambda})} \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{\Phi}}, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{\Phi} \partial \bar{\Lambda}} &= \frac{1}{(\Phi \bar{\Phi} + \Lambda \bar{\Lambda})} \frac{\Lambda}{\bar{\Phi}}, & \frac{\partial^2 K}{\partial \Lambda \partial \bar{\Lambda}} &= -\frac{1}{(\Phi \bar{\Phi} + \Lambda \bar{\Lambda})}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Observe que o primeiro e o último termos fazem parte da métrica (3.30), porém há uma troca do sinal do termo  $K_{\Lambda\bar{\Lambda}}$ . No entanto, devido à propriedades dos campos quirais torcidos, este sinal trocado se compensara na ação e obteremos a métrica correta. Os demais termos comporão a torção. Substituindo os valores acima na ação (2.81), onde integraremos em  $\theta_2$ , teremos a formulação N=1 no modelo sigma N=2:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^2x d^2\theta_1 \frac{1}{d} \Bigg[ & D_1^\alpha \phi D_{1\alpha} \bar{\phi} + D_1^\alpha \lambda D_{1\alpha} \bar{\lambda} + \left( -\frac{\bar{\lambda}}{2\phi} D_{1\alpha} \phi D_{1\beta} \lambda \right. \\ & \left. + \frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\phi}} D_{1\alpha} \bar{\phi} D_{1\beta} \lambda - \frac{\lambda}{2\phi} D_{1\alpha} \phi D_{1\beta} \bar{\lambda} - \frac{\lambda}{2\bar{\phi}} D_{1\alpha} \bar{\phi} D_{1\beta} \bar{\lambda} \right) \tilde{\delta}^{\alpha\beta} \Bigg]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para que esta ação fique semelhante à ação (3.1), agrupemos os campos  $\phi$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  em um vetor

$$\mathcal{V}^i = (\phi, \bar{\phi}, \lambda, \bar{\lambda}) \quad (3.37)$$

e agrupando os coeficientes simétricos e antissimétricos, podemos então reescrever

$$\mathcal{S} = \int d^2x d^2\theta_1 \left[ g_{ij} \epsilon^{\alpha\beta} + b_{ij} \tilde{\delta}^{\alpha\beta} \right] D_{1\beta} \mathcal{V}^i D_{1\alpha} \mathcal{V}^j, \quad (3.38)$$

onde

$$g_{ij} = \begin{cases} g_{\phi\bar{\phi}} = g_{\lambda\bar{\lambda}} = \frac{1}{2d} \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (3.39)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} b_{\phi\lambda} = \frac{-\bar{\lambda}}{4d\phi}, & b_{\bar{\phi}\lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{4d\bar{\phi}} \\ b_{\phi\bar{\lambda}} = \frac{\lambda}{4d\phi}, & b_{\bar{\phi}\bar{\lambda}} = \frac{-\lambda}{4d\bar{\phi}} \\ b_{ij} = -b_{ji} \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (3.40)$$

Se considerarmos que  $\mathcal{V}^i$  seja o vetor posição de uma variedade complexa,  $g$  e  $b$  farão o papel da métrica e da torção, nesta variedade.

### 3.3.1 O termo de Wess-Zumino-Witten

Sabemos que o termo de WZW está associado com a torção da variedade de grupo através da Eq. (1.74). Então podemos nos perguntar qual a relação entre o campo antissimétrico,  $b$ , da ação (3.36) e a torção da variedade de grupo deste modelo. Como visto na seção 1.5, a torção de uma variedade de grupo é bem definida através da Eq.(1.73), então, teremos o tensor de Torção definido como:

$$T_{ijk} = 2Tr \left( g^{-1} \partial_{[i} g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_{k]} g \delta^{\alpha\beta} \right). \quad (3.41)$$

Podemos expressar a torção em termos de campos  $N=2$ , calculando explicitamente suas componentes através da definição do elemento de grupo, Eq. (3.26):

$$\begin{cases} T_{\Phi\bar{\Phi}\Lambda} = \frac{-1}{d^2} \bar{\Lambda} \\ T_{\Phi\bar{\Phi}\bar{\Lambda}} = \frac{1}{d^2} \Lambda \\ T_{\Phi\Lambda\bar{\Lambda}} = \frac{-1}{d^2} \bar{\Phi} \\ T_{\bar{\Phi}\Lambda\bar{\Lambda}} = \frac{1}{d^2} \Phi \end{cases} \quad (3.42)$$

Vejamos que podemos relacionar as componentes de  $T$  com as componentes de  $b$ , definidas em (3.40), através de:

$$\partial_{[\bar{\phi}} b_{\phi\lambda]} = \frac{\bar{\lambda}}{6d^2} \quad (3.43)$$

$$\partial_{[\bar{\lambda}} b_{\phi\lambda]} = -\frac{\bar{\phi}}{6d^2} \quad (3.44)$$

$$\partial_{[\bar{\phi}} b_{\phi\bar{\lambda}]} = -\frac{\lambda}{6d^2} \quad (3.45)$$

$$\partial_{[\bar{\lambda}} b_{\phi\bar{\lambda}]} = \frac{\phi}{6d^2} \quad (3.46)$$



Então vemos que o termo de WZW deste modelo é proporcional a torção da variedade de grupo de  $SU(2) \otimes U(1)$ .

Analisando a questão topológica apresentada na seção 1.3, veremos que aqui também teremos a presença do *winding number*. Para isso, basta observar<sup>1</sup> que

$$\pi_2(U(2)) = 0, \text{ e } \pi_3(U(2)) = \mathbb{Z}. \quad (3.47)$$

Recapitulando, tínhamos uma representação N=2 do grupo  $SU(2) \otimes U(1)$  cuja métrica pode ser escrita em termos de um potencial  $K$ . Utilizando o fato de  $K$  ser composto por campos quirais e quirais torcidos N=2, pudemos reescrever o modelo em termos de campos N=1. Nesta forma, pudemos compará-lo com a forma geral do modelo  $\sigma$  N=1. A partir daí relacionamos o termo antissimétrico com a torção da variedade de grupo.

Cálculos da função beta deste tipo de modelo podem ser encontradas em [22], onde apenas para cálculos de quatro loops teremos a função beta diferente do tensor de Ricci.

---

<sup>1</sup>Podemos ver que isto é verdade lembrando que  $U(2) = S^3 \otimes S^1$ , que  $\pi_2(S^3) = \pi_2(S^1) = 0$ , e que  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$  como explicado em [24].

## Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho apresentamos alguns aspectos importantes do modelo sigma não linear e do termo de WZW. Analisando o modelo em duas dimensões, observamos que o termo de WZW relaciona-se com a torção da variedade de grupo, permitindo assim uma descrição sucinta das equações de movimento quando utilizamos a conexão de Christoffel acrescida da torção. Outro ponto relevante é a questão topológica do termo de WZW, pois este não depende da métrica. A relação com variedades de grupo fica evidenciada quando descrevemos o modelo via elementos de um grupo  $\mathcal{G}$ .

Em duas dimensões, vimos também que o modelo  $N=1$  não impõe nenhuma condição sobre a variedade alvo, podendo esta ser exatamente igual à mesma do caso bosônico. O caso  $N=2$  se mostra mais interessante a começar pelo fato de sua dinâmica depender da estrutura cinemática dos campos da ação. Este modelo impõe restrições sobre a variedade alvo, onde esta deve ser twisted Kähler. Apesar de não ter ficado explícito, a presença dos campos quirais modificam a estrutura da variedade Kähler que obteríamos se apenas tivéssemos o modelo sigma principal. Deve-se aqui comentar que, em quatro dimensões, já no caso  $N=1$  teremos a variedade alvo como sendo Kähler, e em seis dimensões, este terá de ser hiper-Kähler. Modelos sigma supersimétricos em mais dimensões não são possíveis.

Um ponto que ficou de lado neste trabalho foi a questão da invariância conforme do modelo sigma. Apresentamos alguns argumentos que reforçam a idéia de que para termos invariância conforme, devemos ter que o termo de WZW seja exatamente a torção da variedade de grupo. Para o caso sem torção, ficou claro que a variedade alvo tem que obedecer as equações de Einstein. Pode-se ver na referências (ex. [22]) que o mesmo se repete para o modelo completo, porém utilizando a torção.

As perspectivas de continuação deste estudo são bastante variadas. Entre os assunto que infelizmente não foram abordados por falta de tempo, poderíamos citar a relação entre as supersimetrias e o fato de a função beta ser nula, propriedade esta que ocorre no caso  $N=4$ , mas que não é clara para modelos  $N=2$ . Neste tópico ainda temos o estudo pormenorizado dos modelos com  $N=4$ , onde temos uma estrutura quaterniônica. Outro ponto é o estudo da relação entre o termo principal, o termo de WZW e a variedade de grupo, esta que depende da representação dos supercampos,

onde no nosso caso vimos que os campos quirais e quirais torcidos implicam em variedade Kähler torcida.

Poderíamos também analisar a dualidade entre os modelos sigma compostos por representações diferentes do mesmo grupo (p.e. uma com campos quirais e outro com campos semi-quirais), estudar as propriedades fora da camada de massa dos modelos. Seria importante estudar mais a quantização destes modelos e sua relação com teoria de cordas.

## Referências

- [1] J. Schwinger, *Ann. Phys.* 2 (1958) 407.
- [2] M. Gell-Mann e M. Levy, *Il Nuovo Cimento*. Vol. XVI, (1960) 705.
- [3] J. Honerkamp, *Nucl. Phys.* B36(1972) 130.
- [4] H. Eichenherr, *Nucl. Phys.* B146 (1978) 215.
- [5] P. Di Vecchia, et al. *A Supersymmetric Wess-Zumino Lagrangian in two dimensions*. *Nucl. Phys.* B253 (1985) 701-726.  
M.C.B. Abdalla e E. Abdalla. *Nucl. Phys.* B255 (1985) 392-400.
- [6] D. Friedan. *Nonlinear models in two epsilon dimensions*. *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 1057.
- [7] Y. Nambu. *Proc. Intl. Conf. on Symetries and Quark Models*. 1969, Wayne State University.
- [8] A.M. Polyakov. *Quantum geometry of bosonic strings*, *Phys. Lett.* 103B, 207 (1981).
- [9] R. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press. (1984).
- [10] D.H. Sattinger e O.L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*. Applied Mathematical Science, 61. Springer (1991).
- [11] S.W. Hawking e G.F.R. Ellis *The Large Structure os Space Time*. Cambridge (1973).
- [12] J. Polchinski. *String Theory : An Introduction to the Bosonic String* Cambridge Monographs Mathematical Physics. Vol 1. (1998).
- [13] M. Green, J. Schwarz, E. Witten. *Superstring theory - vol. 1*. Cambridge monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK. (1987).

- [14] M. Green, J. Schwarz, E. Witten. *Superstring theory - vol. 2*. Cambridge monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK. (1987).
- [15] M. Peskin e D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Fields Theory*. Addison-Wesley. (1994).
- [16] J. Bagger e J. Wess, *Supersymmetry And Supergravity*. 2nd. Ed. Revised and Expanded. Princeton Series in Physics (1992).
- [17] E. Witten. *Global Aspects of Current Algebra*. Nucl. Phys B**223** (1983) 422.
- [18] E. Witten. *Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions*. Commun. Math. Phys. **92** (1984) 455.
- [19] C.M. Hull. *Lectures in Non-Linear Sigma Model and Strings*. Cambridge. A partir de seminários proferidos no Workshop "Super Field Theories", Vancouver, Canada, em agosto de 1986.
- [20] Ph. Spindel, A. Sevrin, W. Troots, A. Van Proeyen. *Extended Supersymmetric  $\sigma$  -models on Group Manifolds*. Nucl. Phys. B. **308** (1988) 662-698.
- [21] A. Sevrin e J. Troots. *The Geometry of Supersymmetric  $\sigma$  -models*. hep-th/9610103.
- [22] I. Jack. *The twisted  $N=2$  supersymmetric sigma model: A four-loop calculation of the beta function*. Nucl. Phys. B**371** (1992) 482-506.
- [23] M. Roček, K. Schoutens, A. Sevrin. *Off-shell WZW models in extended superspace*. Phys. Lett. B. **265** (1991) 303-306.
- [24] A. Actor, *Classical Solutions of  $SU(2)$  Yang-Mills Theories*. Rev. Mod. Phys., Vol. 51, No. 3, July 1979.



