

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estudo de Sistemas Lineares por Partes com Três Zonas e Aplicação na Análise de um Circuito Elétrico Envolvendo um Memristor

Marluce da Cruz Scarabello

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Presidente Prudente, Março de 2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estudo de Sistemas Lineares por Partes com Três Zonas e Aplicação na Análise de um Circuito Elétrico Envolvendo um Memristor

Marluce da Cruz Scarabello

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Março de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

S296e Scarabello, Marluce da Cruz.
Estudo de Sistemas Lineares por Partes com três Zonas e Aplicação na
Análise de um Circuito Elétrico Envolvendo um Memristor / Marluce da Cruz
Scarabello. - Presidente Prudente : [s.n], 2012
105 f. : il.

Orientador: Marcelo Messias
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Sistemas Lineares por Partes. 2. Memristor. I. Messias, Marcelo. II.
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III.
Título.

BANCA EXAMINADORA



PROF. DR. MARCELO MESSIAS –
ORIENTADOR



PROFA. DRA. CRISTIANE NESPOLI MORELATO FRANÇA
FCT/UNESP



PROF. DR. PAULO RICARDO DA SILVA
IBILCE/UNESP



MARLUCE DA CRUZ SCARABELLO

PRESIDENTE PRUDENTE (SP), 30 DE MARÇO DE 2012.

RESULTADO: APROVADA

*Aos meus pais,
Cida e Rubens.*

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer ao Professor Dr. Marcelo Messias pela orientação, paciência, dedicação e incentivo.

Aos meus pais e à minha irmã, por compreenderem os momentos de ausência e pela constante confiança de que eu conseguiria alcançar meu objetivo.

Ao Rafael, meu namorado e amigo, por todo companheirismo, compreensão, amor e incentivo.

As minhas amigas da república, Jéssica e Patrícia, pelos momentos de descontração.

Agradeço a todos os professores do DMEC e do PosMAC, especialmente ao Prof. Dr. Suetônio A. Meira, que foi minha primeira inspiração nesta vida acadêmica, e ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira, pela amizade construída e pelo exemplo de profissional dedicado.

A todos os alunos do PosMAC, especialmente aos amados que formaram comigo a primeira turma do mestrado: Cláudio, Danilo (in memorian), Diego, Marilaine, Marluci, Tamiris e Vanderléa. Obrigada por todo companheirismo e amizade.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação que foram sempre prestativos e pacientes.

A todos que direta ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Finalmente, e acima de tudo, a Deus pela minha vida.

Em um artigo publicado em maio de 2008 na revista *Nature* [18], um grupo de pesquisadores da Hewlett-Packard Company (HP) anunciou a fabricação de um componente eletrônico chamado *memristor*, uma contração para “memory resistor”. A existência teórica dos memristores havia sido prevista em 1971, pelo Engenheiro da Universidade da Califórnia em Berkeley, Leon Chua, com base em propriedades de simetria de certos circuitos elétricos, porém até 2008 sua existência física não havia sido comprovada. Tal componente é considerado o quarto componente eletrônico fundamental, ao lado do resistor, do capacitor e do indutor, pois possui propriedades que não podem ser duplicadas por nenhuma combinação desses três outros componentes. A construção física do memristor atraiu grande interesse no mundo todo, devido ao grande potencial de aplicações deste componente.

No presente trabalho fazemos um estudo das bifurcações que ocorrem em um sistema de equações diferenciais ordinárias, que serve como modelo matemático de um circuito elétrico formado pelos quatro elementos fundamentais: um memristor, um capacitor, um indutor e um resistor. O circuito estudado foi proposto por Itoh e Chua em [9] e foi construído tendo como base os conhecidos circuitos de Chua.

O modelo estudado é dado por um sistema linear por partes, descontínuo, definido em três zonas no $\mathbb{R}^3$, determinadas pelas seguintes inequações: $|z| < 1$ (aqui denominada zona central) e $|z| > 1$ (denominadas zonas externas). O sistema tem o eixo- z composto por pontos de equilíbrio. Estudamos a estabilidade local normal destes equilíbrios em cada zona. Mostramos que, devido à existência da linha de equilíbrios, o $\mathbb{R}^3$ fica folheado por planos invariantes, transversais ao eixo- z e paralelos entre si em cada zona. As soluções do sistema ficam contidas em uma combinação de três destes planos invariantes: um na zona central e dois nas zonas externas. Mostramos ainda que o sistema pode apresentar oscilações não-lineares devido à existência de órbitas periódicas, passando por duas das três zonas ou passando pelas três zonas. A análise desenvolvida aqui é composta de uma parte analítica e uma parte numérica, sendo que a parte analítica tem como base o estudo de sistemas lineares por partes com três zonas no plano, desenvolvido por Freire et al. [5]. Os resultados analíticos e numéricos obtidos completam o estudo desenvolvido para o mesmo sistema por Messias et al. em [12].

Palavras-chave: Sistemas Lineares por Partes; Memristor.

Abstract

Study of Piecewise Linear Systems with Three Zones and Application in the Analysis of an Electric Circuit with a Memristor

In the present work we make a bifurcation analysis of a system of ordinary differential equations, which serves as a mathematical model of an electric circuit formed by the four fundamental elements: one memristor, one capacitor, one inductor and one resistor. The studied circuit was proposed by Itoh and Chua in [9] and was constructed based on the well-known Chua's oscillators.

The studied model is given by a discontinuous piecewise-linear system, defined on three zones in $\mathbb{R}^3$, determined by the following inequalities: $|z| < 1$ (called central zone) and $|z| > 1$ (called external zones). The z -axis is composed by equilibrium points of the system. The local normal stability of these equilibria in each zone is analyzed. We show that, due to the existence of this line of equilibria, the phase space $\mathbb{R}^3$ is foliated by invariant planes transversal to the z -axis and parallel to each other, in each zone. The solutions of the system are contained in a combination of three of these invariant planes: one of them in the central zone and the other two in the external zones. We also show that the system may present nonlinear oscillations due to the existence of periodic orbits passing through two of the three zones or passing by three zones. The analysis developed here has analytical and numerical parts. The analytical part was developed based on the study of planar piecewise-linear systems with three zones presented by Freire et al. in [5]. The analytical and numerical results obtained complete the study of the same system developed by Messias et al. in [12].

Keywords: Piecewise Linear Systems; Memristor.

Lista de Figuras

1.1	Ilustração dos quatro elementos fundamentais de um circuito: resistor, capacitor, indutor e memristor. Fonte: referência [18].	14
1.2	Estrutura de um memristor, visualizada em uma imagem de microscópio. Fonte: referência [21].	14
1.3	Circuito elétrico envolvendo os quatro elementos fundamentais: um memristor, um capacitor, um indutor e um resistor.	16
2.1	Retratos de fase representando conjuntos invariantes de fluxos suaves: (a) Equilíbrio. (b) Órbita periódica. (c) Órbita homoclínica. (d) Órbita heteroclínica. .	18
2.2	Regiões de Costura.	19
2.3	Região de escape.	19
2.4	Região de deslize.	19
2.5	Campo de Filippov em p . Fonte: referência [11].	20
2.6	Π -dobra externa. Fonte: referência [11].	21
2.7	Π -dobra interna. Fonte: referência [11].	21
2.8	Politrajetória. Fonte: referência [11].	21
2.9	(a) Órbita homoclínica. (b) Dupla ligação heteroclínica.	22
2.10	Politrajetória do tipo I. Fonte: referência [11].	22
2.11	Politrajetória do tipo II. Fonte: referência [11].	23
2.12	Politrajetória do tipo III. Fonte: referência [11].	23
2.13	Politrajetória fechada. Fonte: referência [11].	23
3.1	Esboço dos retratos de fase: (a) A origem é um foco englobado por um ciclo limite estável, afirmação (a1) da Proposição 6. (b) A origem é um centro englobada por um <i>continuum</i> de órbitas periódicas na zona central, afirmação (a2) da Proposição 6.	36
3.2	Esboço dos retratos de fase : (a) A origem é um foco, não há curva invariante fechada, afirmação (a3) da Proposição 6. (b) A origem é um nó, não há curva invariante fechada, afirmação (a3) da Proposição 6. (c) A origem é uma sela, o sistema não tem curvas invariantes fechadas, afirmação (b) da Proposição 6. . .	36

3.3	Retrato de fase do sistema (3.10). (a) A origem é um foco instável, e o ciclo limite englobando a origem é estável. O tempo de integração é $[-8,16]$. (b) No tempo de integração $[11,14]$ observa-se a existência de uma órbita periódica estável. . .	38
3.4	Retrato de fase do sistema (3.10). Tempo de integração: $[-8,14]$	39
3.5	Retrato de fase do sistema (3.11). Tempo de integração: $[-20,20]$. A origem é um centro e existe um <i>continuum</i> de órbitas periódicas englobando a origem. . .	39
3.6	Retrato de fase do sistema (3.12). Tempo de integração: $[-10,5]$. A origem é uma foco globalmente repulsor.	40
3.7	Retrato de fase do sistema (3.13). Tempo de integração: $[-20,5]$. A origem é um ponto de sela.	40
3.8	Retrato de fase do sistema (3.14). A origem é um nó estável.	41
3.9	As transformações de retorno P_E , Q_C , $\tilde{P}_E$ e $\tilde{Q}_C$	42
3.10	A função $\varphi_\gamma(\tau)$ para $\gamma > 0$. Fonte: referência [5].	43
3.11	(a) A função $\psi_\gamma(\tau)$ para $\gamma > 1$. (b) A função $\psi_\gamma(\tau)$ para $0 < \gamma < 10$. Fonte: referência [5].	43
3.12	Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existem dois ciclos limites instáveis, mutuamente simétricos, afirmação (a1) do Teorema 2. (b) Existem duas órbitas homoclínicas, mutuamente simétricas, afirmação (a2) do Teorema 2. . . .	45
3.13	Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Não existem nem ciclos limites nem órbitas homoclínicas, afirmação (a3) do Teorema 2. (b) Existem um ciclo limite estável englobando a origem e dois ciclos limites instáveis que englobam cada ponto de equilíbrio na zona externa, afirmação (b1) do Teorema 2	45
3.14	Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existe um ciclo limite estável englobando a origem e os duas órbitas homoclínicas que englobam cada ponto de equilíbrio na zona externa, afirmação (b2) do Teorema 2. (b) Existe dois ciclos limites cercando os três pontos de equilíbrio, o externo é estável e o interno é instável, afirmação (b3) do Teorema 2.	45
3.15	Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existe um único ciclo limite semiestável, afirmação (b4) do Teorema 2. (b) Não existem ciclos limites nem órbitas homoclínicas, afirmação (b5) do Teorema 2.	46
3.16	Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = -1$, $\mu_C = 5$ e $\beta = \frac{1}{4}$ que representa o caso (b4) do Teorema 2.	52
3.17	Retrato de fase do sistema (3.8) com os parâmetros $\mu_E = -1$, $\mu_C = 3$ e $\beta = 0.9$. A origem é um ponto de sela e os pontos de equilíbrio nas zonas externas são focos estáveis.	52
3.18	Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_E = \frac{1}{2}$, $\mu_C = 3$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Cada ponto de equilíbrio na zona externa é englobado por um <i>continuum</i> de órbitas periódicas.	53

3.19	Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_E = 0.1$, $\mu_C = -2$ e $\beta = -0.8$, que representa o caso (d) do Teorema 2.	53
3.20	Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existe um ciclo limite instável englobando o ponto de equilíbrio na origem, afirmação (a1) da Proposição 10. (b) Existe um loop heteroclínico, afirmação (a2) da Proposição 10.	55
3.21	Esboço do retrato de fase do sistema (3.8), não existem ciclos limites e nem órbitas heteroclínicas, afirmação (a3) da Proposição 10.	56
3.22	Retrato de fase de antissela-sela-antissela (a) $\tilde{y} > y_-$ (b) $\tilde{y} < y_-$	56
3.23	Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_E = 3$, $\mu_C = -1$, e $\beta = \frac{1}{2}$, existe um ciclo limite instável englobando a origem e os pontos de equilíbrio nas zonas externas são pontos de sela.	62
3.24	Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 3$, $\mu_C = \frac{1}{2}$, e $\beta = \frac{1}{2}$. O ponto de equilíbrio na origem englobado por um <i>continuum</i> de órbitas periódicas que ficam na zona central.	62
3.25	Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 3$, $\mu_C = 1$, e $\beta = \frac{1}{2}$	63
3.26	Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = -4$, $\mu_C = 2$, e $\beta = \frac{1}{2}$. Tempo de integração: $[-5,15]$. Existe uma infinidade de órbitas heteroclínicas.	66
3.27	Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 2$, $\mu_C = 2$, e $\beta = \frac{1}{2}$. Tempo de integração: $[-5,12]$. Existe um ciclo limite estável englobando todos os pontos de equilíbrio.	66
3.28	Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 1$, $\mu_C = 2$, e $\beta = \frac{1}{2}$. Tempo de integração: $[-5,15]$. Não existem curvas invariantes fechadas.	67
3.29	Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_C = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ e $\mu_E = 1$	67
4.1	(a) Memristor de carga controlada. (b) Memristor de fluxo controlado. Fonte: referência [9].	70
4.2	Relação constitutiva de um memristor monotonamente crescente e linear por partes. (a) Memristor de carga controlada. (b) Memristor de fluxo controlado.	71
4.3	(a) Oscilador canônico de Chua. (b) Oscilador canônico com um memristor de fluxo controlado.	72
4.4	(a) Oscilador de terceira ordem com um memristor de fluxo controlado. (b) Oscilador de terceira ordem com um memristor de fluxo controlado. Fonte: referência [9].	73
4.5	Representação dos planos π_1 e π_2 . Os planos da zona central intersectam os planos das zonas externas sobre os planos Π_1 e Π_2 em retas paralelas.	78
4.6	Inclinação do plano quando o ângulo entre o vetor normal e $(0,0,1)$ é agudo.	79
4.7	Inclinação do plano quando o ângulo entre o vetor normal e $(0,0,1)$ é obtuso.	80

4.8	Combinação da inclinação dos planos. (a) O ângulo entre o vetor normal aos planos das zonas externas e o vetor $(0,0,1)$ é agudo. Entre o vetor normal da zona central e o vetor $(0,0,1)$ é obtuso. (b) O ângulo entre o vetor normal de todos os planos e o vetor $(0,0,1)$ é agudo.	80
4.9	Combinação da inclinação dos planos. (a) O ângulo entre o vetor normal aos planos das zonas externas e o vetor $(0,0,1)$ é obtuso. Entre o vetor normal, da zona central, e o vetor $(0,0,1)$ é agudo. (b) O ângulo entre o vetor normal de todos os planos e o vetor $(0,0,1)$ é obtuso.	81
4.10	Representação das possíveis posições relativas dos planos invariantes π_1 e π_2 . . .	82
4.11	Esboço da solução do caso (q). (a) A solução tende para infinito quando $t \rightarrow \infty$. (b) Quando ocorre uma órbita periódica.	86
4.12	Retrato de fase do sistema (4.6) (a) com $\alpha = 0.17$, $a = 1$, $b = 12$, $\xi = 50$ e $\beta = 2$ (b) e com $\alpha = 0.5$, $a = 1$, $b = 12$, $\xi = 50$ e $\beta = 2$, indicando a existência de uma órbita periódica estável englobando o eixo-z.	87
4.13	(a,b) Retrato de fase do sistema (4.6) com $\alpha = 0.5$, $a = 1$, $b = 12$, $\xi = 50$ e $\beta = 2$ indicando a existência de órbitas periódicas estáveis englobando o eixo-z, que corresponde aos equilíbrios $(0,0,z)$ com $ z < 1$	88
4.14	Esboço da solução do caso (w). (a) Considerando que não há nem órbita periódica e nem ciclo heteroclínico. (b) Considerando que a solução tende a um ciclo heteroclínico. (c) Considerando que existe um ciclo limite estável.	88
4.15	Solução numérica do caso (w) com os parâmetros (a) $\alpha = 0.32$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[-20, 180]$, onde supostamente não há nem órbita periódica e nem órbita heteroclínica (b) $\alpha = 0.35$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[-20, 180]$, onde a solução indica a existência de uma dupla órbita heteroclínica. (c) $\alpha = 0.38$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[-20, 180]$, onde há evidências numéricas de que existe um ciclo limite estável. . .	89
4.16	(a,b) Solução numérica do sistema (4.6) com os parâmetros $\alpha = 0.38$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[40, 80]$	90
4.17	Solução numérica do sistema (4.6) com os parâmetros $\alpha = 0.8$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[40, 80]$. Indicando a existência de órbitas periódicas associadas aos equilíbrios $(0,0,z)$ com $ z < 1$	90
4.18	Esboço da solução do caso (x). (a) Visão de como é o nó estável. (b) Esboço da solução com uma órbita periódica.	91
4.19	Solução numérica do caso (x) com os parâmetros $\alpha = 2.3$, $a = 1$, $b = 2$, $\beta = 3$ e $\xi = 6.1$. (a) Indica a existência de uma órbita periódica. (b) Indica a existência de órbitas periódicas associadas aos equilíbrios da zona central.	91
4.20	Esboço do caso (u). (a) Existem duas órbitas heteroclínicas e não há órbitas periódicas. (b) Existem duas órbitas homoclínicas, formando a “figura oito”. (c) Existem duas órbitas periódicas simétricas com relação à origem.	92

4.21	Solução numérica do caso (u) com os parâmetros (a) $\alpha = 1.8, a = 5, b = 2, \xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-20, 20]$. (b) $\alpha = 2.08, a = 5, b = 2, \xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[0, 30]$. (c) $\alpha = 3.1, a = 5, b = 2, \xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-10, 20]$	93
4.22	(a) Solução numérica do caso (u) com parâmetros $\alpha = 2, a = 5, b = 2, \xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-40, 30]$, que indica a existência de uma órbita periódica. (b) Gráfico $z(t) \times t$ da solução de (a).	94
4.23	Solução numérica do caso (u) com os parâmetros $\alpha = 2.2, a = 5, b = 2, \xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-20, 20]$ que indica a existência de dois ciclos limites simétricos com relação à origem e uma órbita periódica englobando os dois ciclos limites.	95
4.24	Solução numérica do caso (u). (a) No tempo $[-25, -20]$, que indica a existência da órbita periódica com partes nas três zonas. (b) No tempo $[20, 30]$ indicando a existência de dois ciclos limites simétricos com relação à origem.	95
4.25	Esboço da solução do caso (v). (a) Quando não existe órbita periódica. (b) Quando existe uma órbita periódica.	96
4.26	Solução numérica do caso (v) com os parâmetros (a) $\alpha = 2.9, a = 5, b = 2, \xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $[-8, 5]$. (b) $\alpha = 2, a = 5, b = 2, \xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $[-8, 4]$	97
4.27	Solução numérica do caso (v) com os parâmetros (a) $\alpha = 2, a = 5, b = 2, \xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $[-18, -16]$. (b) $\alpha = 2, a = 5, b = 2, \xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $t = -8.4$	97
A.1	Plano com trajetória Γ	103

Lista de Tabelas

4.1	Estabilidade normal local dos pontos de equilíbrio $(0,0,z)$	83
4.2	Estabilidade local dos pontos de equilíbrio $(0,0,z)$, complemento da Tabela 4.1. .	84

Sumário

1	Introdução	13
2	Definições e resultados preliminares	17
3	Sistema linear por partes no plano com três zonas	24
3.1	Formas canônicas	24
3.2	Soluções do sistema (3.8)	33
3.3	Sistema linear por partes no plano com três zonas e um ponto de equilíbrio	35
3.4	Sistema linear por partes no plano com três zonas e um ponto de equilíbrio em cada zona	41
3.5	Sistema linear por partes no plano com três zonas e um segmento de pontos de equilíbrio	63
4	Estudo de um circuito elétrico envolvendo um memristor	69
4.1	Circuito com memristor obtido do oscilador canônico de Chua	72
4.2	Convenções de Filippov aplicadas no estudo do sistema (4.6)	74
4.3	Posição relativa dos planos	79
4.4	Estudo local dos equilíbrios	81
4.5	Estudo numérico de casos que levam a oscilações periódicas	85
4.5.1	Foco Estável - Foco Instável - Foco Estável	85
4.5.2	Sela - Foco Instável - Sela	87
4.5.3	Nó Estável - Foco Instável - Nó Estável	90
4.5.4	Foco Instável - Sela - Foco Instável	92
4.5.5	Foco Instável - Nó Estável - Foco Instável	95
5	Considerações Finais	98
	Referências	99
A	Teorema de Liénard	102

Introdução

Por 150 anos, os conhecidos elementos fundamentais de um circuito elétrico foram o capacitor, o resistor e o indutor, descobertos em 1745, 1827 e 1831, respectivamente. Aparentemente, estes três elementos eram teoricamente suficientes. No entanto, em 1971, Leon Chua, professor da Universidade da Califórnia em Berkeley, previu a existência de um quarto elemento eletrônico fundamental.

Esta descoberta teórica aconteceu quando Leon Chua examinou as relações entre quatro variáveis fundamentais de um circuito: corrente i , voltagem v , carga q e fluxo magnético φ . Existem cinco relações entre estas variáveis que são amplamente conhecidas. Duas delas são dadas pela definição de corrente elétrica e pela Lei de Faraday, ou seja,

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad v(t) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

As outras três são equações básicas do circuito:

$$R = \frac{dv}{di}, \quad L = \frac{d\varphi}{di} \quad \text{e} \quad C = \frac{dq}{dv},$$

onde R , L e C são resistência, indutância e capacitância, respectivamente. Chua observou que havia uma relação que estava indefinida, a que existe entre φ e i . A partir de argumentos de simetria, Chua [3] postulou a existência de um quarto elemento fundamental do circuito (ver Figura 1.1), que chamou de memristor (abreviação de “memory resistor”) definido por

$$\frac{d\varphi}{dq} = M,$$

onde M denota a memristência (ou memresistência), propriedade do memristor, assim como a resistência é uma propriedade do resistor.

No caso de elementos lineares, em que M é uma constante, a memristência é idêntica a resistência. Entretanto, quando M é uma função de q , gerando um elemento não linear

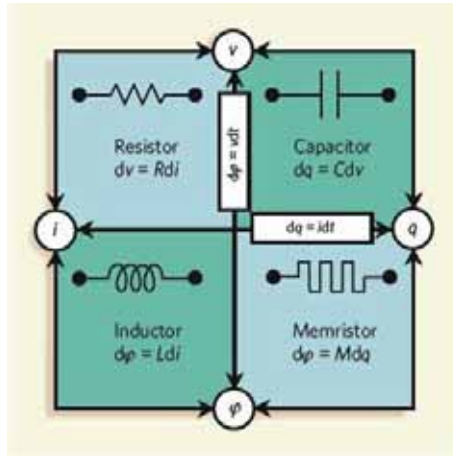


Figura 1.1: Ilustração dos quatro elementos fundamentais de um circuito: resistor, capacitor, indutor e memristor. Fonte: referência [18].

no circuito, então nenhuma combinação dos elementos do circuito - capacitor, indutor e resistor - pode duplicar as propriedades do memristor.

Quase 40 anos depois do artigo [3] ser publicado, um grupo de cientistas da Hewlett-Packard Company (HP), liderado por R. Stanley Williams, anunciou em um artigo publicado na revista *Nature* [18] a construção do novo componente eletrônico fundamental teorizado por Chua, ver Figura 1.2. Este grupo havia sido criado em 1995, com o propósito de trabalhar com eletrônica molecular.

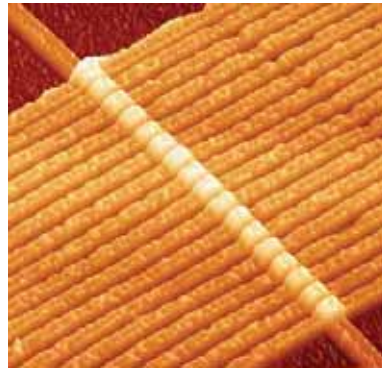


Figura 1.2: Estrutura de um memristor, visualizada em uma imagem de microscópio. Fonte: referência [21].

Durante a pesquisa, os cientistas observaram comportamentos inesperados apresentados pelos dispositivos nos quais estavam trabalhando, que não conseguiam explicar. Foi quando Greg Singer, um colaborador da equipe, trouxe o artigo em que Chua teorizava a existência do memristor. Nesta época, o artigo [3] já havia sido publicado há 30 anos e tinha poucas citações. A partir disto, foram vários anos lendo e relendo o artigo de Chua, até perceberem que os dispositivos moleculares em que eles trabalhavam eram realmente memristores.

O motivo do memristor ser tão diferente dos outros elementos fundamentais é que, ao contrário deles, o memristor “carrega a memória do seu passado”.

A analogia clássica para um resistor é um tubo por meio do qual a água (eletricidade) atravessa. O diâmetro do tubo é análogo à resistência do fluxo da corrente - quanto mais estreito o tubo, maior a resistência. Resistores normais têm um diâmetro fixo. Segundo R. Stanley Willians, o memristor é um tubo cujo diâmetro muda conforme a quantidade e direção da água que flui através dele. Se a água flui através deste tubo em uma direção, o mesmo se expande (tornando-se menos resistivo). Mas se a água flui na direção oposta, o tubo encolhe (tornando-se mais resistivo). Além disso, o memristor lembra o diâmetro da última vez que a água atravessou por ele. Ou seja, quando o fluxo é desligado, o diâmetro do tubo “congela” até que o fluxo seja ligado novamente.

Segundo Willians, esta propriedade de “congelamento” dos memristores se adapta brilhantemente, por exemplo, para a memória do notebook. A capacidade de armazenar indefinidamente valores de resistência significa que um memristor pode ser usado como uma memória não-volátil. Atualmente, ao retirar a bateria do notebook sem salvar nada, certamente tudo será perdido. Mas se o notebook for construído usando uma memória com base no memristor, quando coloca-se a bateria novamente, a tela retornará com tudo exatamente como foi deixado [21].

Mas o potencial do memristor vai além do “desligamento instantâneo” de notebooks, pode também ajudar em um dos grandes desafios da tecnologia: imitar as funções de um cérebro. Em [21] Williams afirma que os memristores podem permitir a reprodução, ao invés da simples simulação, de redes de neurônios e sinapses¹. Ao usar o memristor seremos capazes de construir circuitos eletrônicos analógicos que podem funcionar de acordo com os mesmos princípios físicos de um cérebro. Um circuito híbrido - contendo muitos memristores conectados e transistores - poderia levar máquinas a reconhecerem padrões que os seres humanos reconhecem, como por exemplo, escolher uma face particular em uma multidão, mesmo que tenha mudado significativamente desde a última recordação.

Os memristores podem ser considerados como componentes de um circuito elétrico, combinados com resistores, capacitores e indutores. Tais circuitos podem ser modelados matematicamente por sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares, cuja complexidade aumenta com o número e o tipo de componentes do circuito.

Propriedades dinâmicas destes circuitos podem ser estudadas analisando-se o retrato de fase destes sistemas, obtendo-se por exemplo estados de equilíbrio, oscilações não-lineares, e até mesmo comportamento caótico das soluções [9]. Vários modelos matemáticos de circuitos envolvendo memristores surgiram na literatura, desde o seu descobrimento [6, 7, 8, 10, 15, 16, 22].

Neste trabalho é apresentado o estudo de um circuito elétrico envolvendo os quatro elementos fundamentais: um memristor, um capacitor, um indutor e um resistor. Tal cir-

¹Pontos de contato entre duas células nervosas.

cuito foi proposto em [9], sendo que os componentes estão conectados conforme mostrado na Figura 1.3.

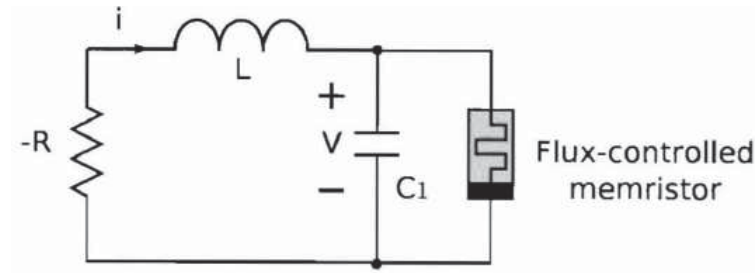


Figura 1.3: Circuito elétrico envolvendo os quatro elementos fundamentais: um memristor, um capacitor, um indutor e um resistor.

O memristor considerado na Figura 1.3 é caracterizado por uma função linear por partes. O circuito é modelado matematicamente pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias (conforme [9])

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - W(z)x), \\ \dot{y} &= -\xi x + \beta y, \\ \dot{z} &= x, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde x , y e z são as variáveis e α , β e ξ são os parâmetros, que serão considerados positivos e estão relacionados com características físicas do sistema (voltagem, corrente, capacitância, resistência e indutância). No sistema (1.1),

$$W(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| > 1, \end{cases}$$

é a função linear por partes que caracteriza o memristor envolvido (chamada de memutância). Observe que o sistema (1.1) é um sistema linear por partes, definido em três zonas do espaço $\mathbb{R}^3$, $|z| < 1$ e $|z| > 1$. O sistema não está definido nos planos $|z| = 1$.

Com o objetivo de apresentar um estudo do sistema (1.1), este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos as definições básicas sobre os sistemas suaves por partes, para um melhor entendimento do que será estudado nos capítulos seguintes. No Capítulo 3 apresentamos o estudo de sistemas lineares por partes no plano, com três zonas, desenvolvido em [4]. No Capítulo 4, combinando as técnicas apresentadas no Capítulo 3 com simulações numéricas, estudamos o circuito elétrico envolvendo um memristor, modelado pelo sistema (1.1). Tal modelo foi proposto em [9] e estudado analítica e numericamente em [12]. A análise aqui desenvolvida complementa os resultados de [12]. No Capítulo 5 apresentamos algumas conclusões e considerações finais.

Definições e resultados preliminares

Este capítulo traz algumas definições e resultados preliminares para auxiliar na leitura do restante do trabalho. Os resultados aqui apresentados têm como base os trabalhos [1, 11, 19].

Um campo vetorial suave de classe C^r , $r \geq 1$, definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$\dot{x} = X(x), \quad (2.1)$$

onde $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. As soluções desta equação são aplicações diferenciáveis $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ que satisfazem

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo $t \in I$, I é um intervalo aberto, e são chamadas de trajetórias do campo vetorial X , ou da equação (2.1). Um ponto $x^* \in U$ é dito ponto de equilíbrio de X se $X(x^*) = 0$ e ponto regular de X se $X(x^*) \neq 0$.

Um conjunto invariante de X é um subconjunto $\Lambda \subset X$ tal que $p \in \Lambda$ implica que $\varphi(p) \in \Lambda$, para todo $t \in I$.

A seguir exibiremos alguns tipos de conjuntos invariantes (ver Figura 2.1):

- a) **Equilíbrios.** A forma mais simples de um conjunto invariante de um campo vetorial é uma solução de equilíbrio x^* que satisfaz $X(x^*) = 0$. Também pode ser chamado de ponto estacionário do fluxo, pois $\varphi(x^*, t) = \varphi(x^*, 0)$ para todo t .
- b) **Órbitas periódicas.** Outro tipo de conjunto invariante são as órbitas periódicas, determinadas por uma condição inicial x_p e um período τ . Aqui τ é definido como o menor tempo $\tau > 0$ tal que $\varphi(x_p, \tau) = x_p$. Órbitas periódicas formam curvas fechadas no retrato de fase. Uma órbita periódica isolada é chamada de ciclo limite.

c) **Órbitas homoclínicas e heteroclínicas.** Outra importante classe de conjuntos invariantes são as órbitas conectadas, que são soluções que tendem para conjuntos invariantes quando o tempo tende para $+\infty$ e para $-\infty$. Uma órbita homoclínica é uma trajetória $x(t)$ que se conecta a um equilíbrio x^* , ou seja, $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. Uma órbita heteroclínica conecta dois diferentes equilíbrios x_1^* e x_2^* ; $x(t) \rightarrow x_1^*$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $x(t) \rightarrow x_2^*$ quando $t \rightarrow +\infty$.

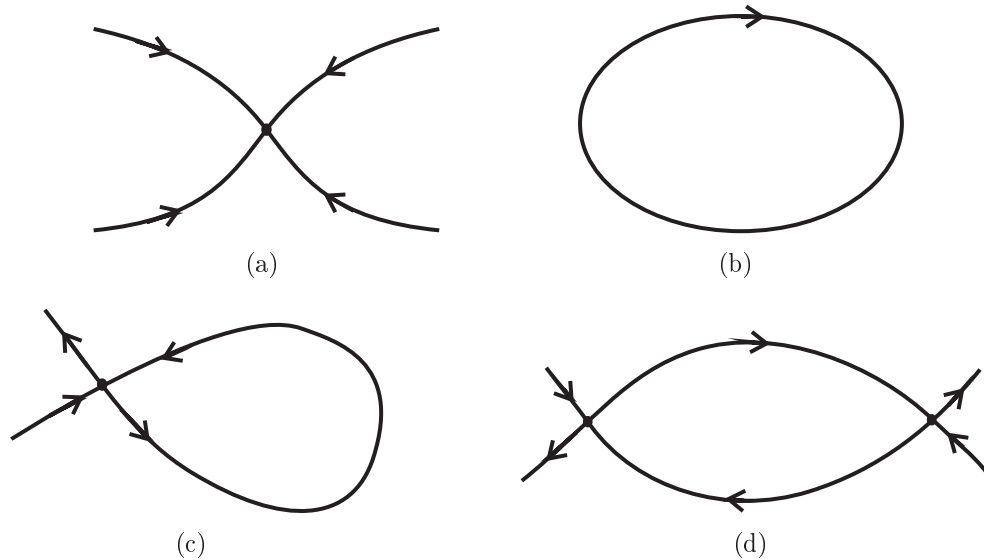


Figura 2.1: Retratos de fase representando conjuntos invariantes de fluxos suaves: (a) Equilíbrio. (b) Órbita periódica. (c) Órbita homoclínica. (d) Órbita heteroclínica.

Um campo vetorial suave por partes definido em um conjunto compacto e conexo M do plano é determinado por dois campos vetoriais e uma aplicação real suave que define M .

Definição 1 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^r$, onde $\mathfrak{X}^r$ é o conjunto dos campos vetoriais C^r sobre M , e $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação real suave tal que 0 é seu valor regular. Assumiremos que o conjunto $\Pi = F^{-1}(0)$ é compacto e conexo tal que $M \setminus \Pi$ tem duas componentes conexas que são denotadas por $S = F^{-1}(-\infty, 0]$ e $N = F^{-1}[0, \infty)$. Assim o campo vetorial suave por partes $Z = (X, Y)$ definido em M é dado por*

$$Z(q) = \begin{cases} X(q), & \text{se } F(q) \geq 0 \\ Y(q), & \text{se } F(q) \leq 0. \end{cases}$$

Denotamos por $\Omega^r(M)$ o conjunto dos campos vetoriais suave por partes definidos em M e o conjunto Π será chamado de conjunto de descontinuidade.

Sobre Π as soluções de $\dot{q} = Z(q)$ obdece à formulação de Filippov. Ele definiu três regras para a transição de órbitas de um campo vetorial suave por partes entre as duas regiões, cruzando ou atingindo o conjunto Π . Estas regras são denominadas de convenções de Filippov.

Como Maciel em [11], para definir as convenções de Filippov usaremos a seguinte notação: $XF(p)$ significa a derivada de F na direção X . Escrevendo localmente $X(p) = (a(p), b(p))$, para um ponto qualquer $p \in M$, temos que

$$XF(p) = \left\langle (a(p), b(p)), \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p) \right) \right\rangle = a(p) \frac{\partial F}{\partial x}(p) + b(p) \frac{\partial F}{\partial y}(p),$$

onde $\langle, \rangle$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^2$.

Definição 2 Considerando o campo vetorial $Z = (X, Y)$.

- a) A região de costura de Z é definida como o conjunto $\mathcal{C}_Z = \{q \in \Pi : XF(q) YF(q) > 0\}$.

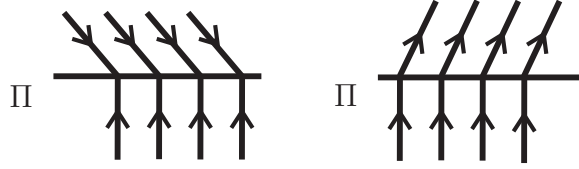


Figura 2.2: Regiões de Costura.

- b) A região de escape de Z é definida como o conjunto $\mathcal{E}_Z = \{q \in \Pi : XF(q) < 0, YF(q) > 0\}$.

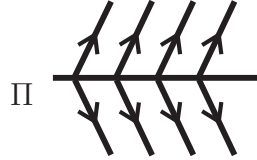


Figura 2.3: Região de escape.

- c) A região de deslize de Z é definida como o conjunto $\mathcal{D}_Z = \{q \in \Pi : XF(q) > 0, XF(q) < 0\}$.

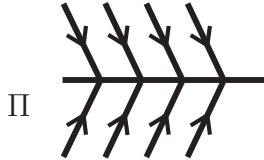


Figura 2.4: Região de deslize.

Para as regiões de deslize ou de escape é definido um campo vetorial auxiliar, o campo de Filippov.

Definição 3 Sejam $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M)$, Π o conjunto de descontinuidade e $p \in \Pi$ um ponto de escape ou de deslize. O campo de Filippov no ponto p , denotado por $F_Z(p)$, é o único vetor tangente a Π em p contido no cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$.

A Figura 2.5 apresenta um exemplo de campo de Filippov.

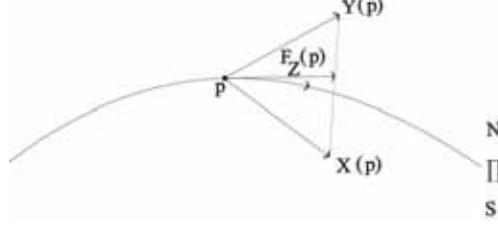


Figura 2.5: Campo de Filippov em p . Fonte: referência [11].

Para descrever um modo de calcularmos o campo de Filippov em um ponto, Maciel escreve localmente $X(p)$ por $(a(p), b(p))$ e $Y(p)$ por $(c(p), d(p))$. Então, o campo de Filippov no ponto p tem a expressão

$$F_Z(p) = \left(\frac{a(p)d(p) - b(p)c(p)}{d(p) - b(p)}, 0 \right). \quad (2.2)$$

Usando a notação (2.2) são definidos os equilíbrios do campo de Filippov.

Definição 4 Um ponto $p \in \Pi$ é um equilíbrio do campo de Filippov se for um ponto de escape ou de deslize e satisfizer a equação $a(p)d(p) - b(p)c(p) = 0$.

A seguir definiremos os casos em que p não é um equilíbrio do campo de Filippov.

Definição 5 Um ponto $p \in \Pi$ é dito Π -regular de Z se satisfaz uma das seguintes condições

- a) p é ponto de costura,
- b) p é um ponto de deslize ou de escape e não é uma singularidade do campo de Filippov, ou seja, $a(p)d(p) - b(p)c(p) \neq 0$.

Definição 6 Um ponto $p \in \Pi$ é dito uma Π -dobra de Z se for um ponto de tangência quadrática do campo X com Π , ou do campo Y com Π . Dizemos que uma Π -dobra de Z é

- a) externa se $YF(p) \neq 0$, $XF(p) = 0$ e $X^2F(p) < 0$, isto é, quando p é um ponto de tangência quadrática externa do campo X com Π . De forma similar é definida uma Π -dobra de Z externa que seja tangência do campo Y ao conjunto Π .

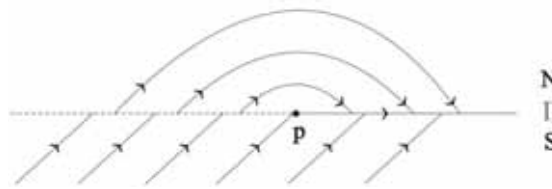


Figura 2.6: Π -dobra externa. Fonte: referência [11].

- b) *interna se se $YF(p) \neq 0$, $XF(p) = 0$ e $X^2F(p) > 0$, isto é, quando p é um ponto de tangência quadrática interna do campo X com Π . Uma Π -dobra de Z interna que seja tangência do campo Y ao conjunto Π é definida analogamente.*

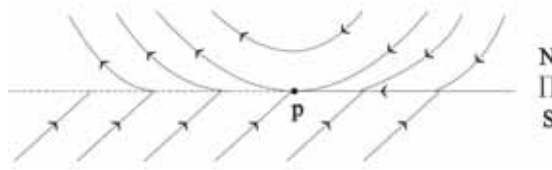


Figura 2.7: Π -dobra interna. Fonte: referência [11].

Definição 7 *Seja γ uma curva em M composta por arcos regulares de trajetórias de X em N , e/ou de trajetórias de Y em S , e/ou de trajetórias de F_Z em Π . Nestas condições, γ é uma politrajétoria de Z se satisfizer*

- i) *γ contém arcos de trajetória de pelo menos dois entre os campos vetoriais X , Y e F_Z , ou é formado por um arco de F_Z ;*
- ii) *a transição de arcos de trajetória de X para arcos de trajetória de Y é feito em pontos de costura;*
- iii) *a transição de arcos de trajetória de X , ou de Y , para arcos de trajetória de F_Z é feita através de Π -dobras, ou de pontos regulares do arco de escape, ou do arco deslizante, respeitando-se o sentido dos arcos de trajetória.*

Na Figura 2.8 é apresentado um exemplo de uma politrajétoria.

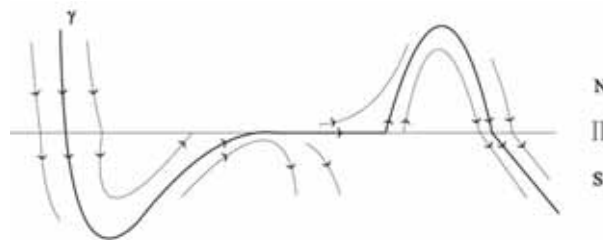


Figura 2.8: Politrajétoria. Fonte: referência [11].

Definição 8 *Seja γ uma politrajétoria de Z .*

- a) *Seja q^* um equilíbrio de X (ou Y). Uma órbita homoclínica é uma trajetória que se conecta ao equilíbrio q^* , isto é, $\gamma(t) \rightarrow q^*$.*
- b) *Seja q_1^* e q_2^* equilíbrios de X e Y , respectivamente. Uma órbita heteroclínica conecta q_1^* e q_2^* , isto é, $\gamma(t) \rightarrow q_1^*$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $\gamma(t) \rightarrow q_2^*$ quando $t \rightarrow +\infty$.*

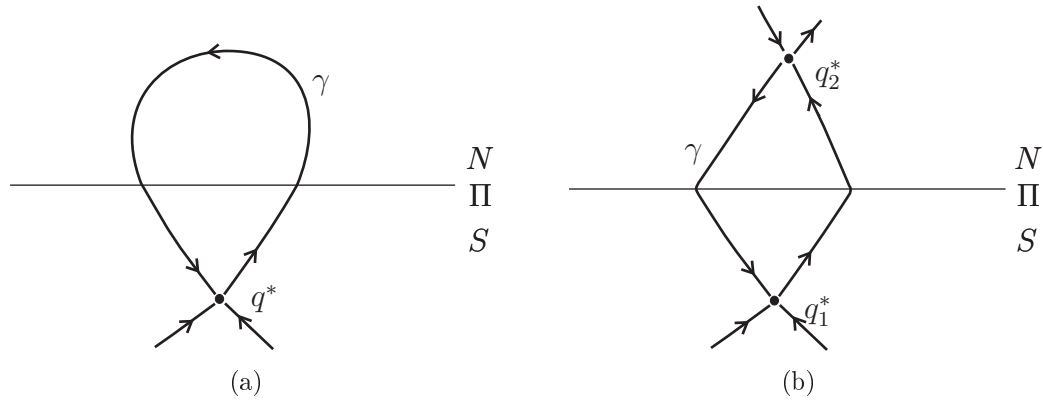


Figura 2.9: (a) Órbita homoclínica. (b) Dupla ligação heteroclínica.

A seguir apresentamos como em [11] uma caracterização de órbitas fechadas, ou seja, de politrajétórias fechadas de Z .

Definição 9 *Seja γ uma politrajétoria fechada de Z . Dizemos que*

- a) *γ é uma trajetória fechada do tipo I se γ encontra Π apenas em pontos de costura.*

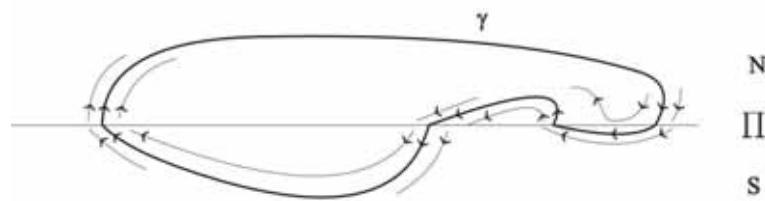


Figura 2.10: Politrajétoria do tipo I. Fonte: referência [11].

- b) *γ é uma trajetória fechada do tipo II se $\gamma = \Pi$.*

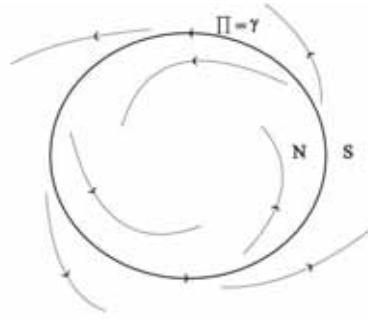


Figura 2.11: Politrajetória do tipo II. Fonte: referência [11].

c) γ é uma trajetória fechada do tipo III se γ contém, pelo menos, uma Π -dobra de Z .

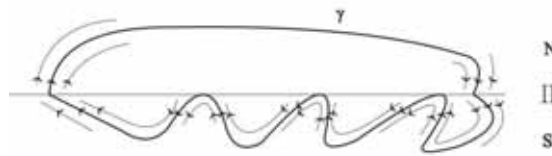


Figura 2.12: Politrajetória do tipo III. Fonte: referência [11].

Definição 10 Dada uma politrajetória fechada γ do tipo I, com $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ onde γ_{2j} são arcos de trajetória de X em N e γ_{2j+1} são arcos de trajetória de Y em S , para $j = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$. Para cada $j = 0, 1, \dots, n$ seja $\gamma_j \cap \Pi = \{p_j, p_{j+1}\}$ com $p_0 = p_{n+1}$. Para cada $j = 0, 1, \dots, n$ definimos um germe em p_j de uma transformação de Poincaré $\pi_j : (\Pi, p_j) \rightarrow (\Pi, p_{j+1})$ tal que a aplicação de primeiro retorno associada à órbita γ é dada por

$$\pi = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_0$$

com $\pi(p_0) = p_0$.

A Figura 2.13 mostra a divisão de uma politrajetória fechada de acordo com a definição anterior.

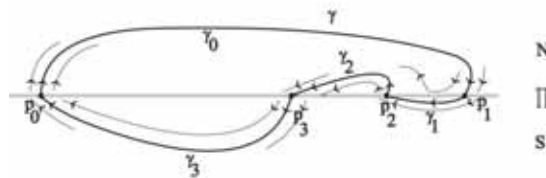


Figura 2.13: Politrajetória fechada. Fonte: referência [11].

Sistema linear por partes no plano com três zonas

Neste capítulo é apresentado o estudo de sistemas lineares por partes, contínuos, definidos no plano, simétricos e com três zonas, conforme estudado em [5].

3.1 Formas canônicas

Nesta seção estudaremos as formas canônicas para sistemas lineares por partes, contínuos, definidos no plano, simétricos e com três zonas como uma etapa para facilitar sua análise. Apresentamos procedimentos para determinar sistemas equivalentes ao inicial (obtidos por mudanças lineares) com menor número de parâmetros e que, portanto, são mais simples e tem o mesmo comportamento dinâmico do sistema inicial.

Como o sistema tem três zonas existem duas retas paralelas dividindo o plano. Os campos de vetores de cada zona devem ser sistemas lineares não-homogêneos com coeficientes constantes que são “colados” de forma contínua nas duas retas paralelas. Como em [5], o campo de vetores é considerado simétrico em relação à origem.

Sem perda de generalidade, toma-se as duas retas paralelas $\{x_1 = -1\}$ e $\{x_1 = 1\}$ dividindo o plano em três zonas. Supondo que

$$\dot{x} = F(x) = \begin{cases} A_L x + c_L, & \text{se } x_1 \leq -1, \\ A_C x + c_C, & \text{se } -1 \leq x_1 \leq 1, \\ A_R x + c_R, & \text{se } x_1 \geq 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

com A_L, A_C e $A_R \in \mathbb{M}(\mathbb{R})_{2 \times 2}$ e c_L, c_C e $c_R \in \mathbb{R}^2$.

É necessário que $A_L = A_C = A_E$, $c_L = -c_R = c$ e $c_C = 0$, pois o campo de vetores é simétrico em relação à origem. O índice E indica as zonas externas.

A continuidade nas fronteiras das zonas, ou seja, nas retas $\{x_1 = \pm 1\}$, exige que

$$A_E = \begin{pmatrix} e_1 & a_1 \\ e_2 & a_2 \end{pmatrix}, \quad A_C = \begin{pmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} e_1 - c_1 \\ e_2 - c_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

As equações correspondentes ao sistema (3.1)-(3.2) podem ser escritas da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1) + a_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1) + a_2 x_2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

com

$$\varphi_i(x_1) = \begin{cases} e_i x_1 + (e_i - c_i), & \text{se } x_1 \leq -1, \\ c_i x_1, & \text{se } -1 < x_1 < 1, \\ e_i x_1 - (e_i - c_i), & \text{se } 1 \leq x_1, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

O sistema (3.3) tem pelo menos um ponto de equilíbrio na origem, e pode ter outros dois (um em cada zona externa) ou um segmento de pontos de equilíbrio.

Assumindo que o sistema (3.3) tem uma curva invariante fechada Γ , nota-se que quando Γ ocupa apenas duas das três zonas, então (devido a simetria) o sistema tem uma outra curva invariante fechada simétrica a Γ com relação à origem, e nenhuma destas curvas inclui a origem. Por outro lado, quando Γ passa pelas três zonas, então Γ é simétrica com relação à origem e a origem ou é englobada por Γ ou pertence a Γ .

Valem os seguintes resultados apresentados em [5].

Proposição 1 (Freire et al., 2002) *Se o sistema (3.3) tem uma única curva invariante fechada Γ , então*

$$\int \int_{int_C(\Gamma)} T_C dx_1 dx_2 + \int \int_{int_E(\Gamma)} T_E dx_1 dx_2 = T_C S_C + T_E S_E = 0,$$

onde Γ é uma curva de Jordan, $int_C(\Gamma) = \{|x_1| < 1\} \cap int(\Gamma)$, $int_E(\Gamma) = \{1 \leq |x_1|\} \cap int(\Gamma)$, $T_C = \text{Traço}(A_C)$, $T_E = \text{Traço}(A_E)$, $S_C = \text{Área}(int_C(\Gamma))$ e $S_E = \text{Área}(int_E(\Gamma))$.

Proposição 2 (Freire et al., 2002) *Se Γ é um ciclo limite, uma órbita homoclínica ou uma dupla ligação heteroclínica do sistema (3.3), então Γ existe, pelo menos, em duas zonas e a condição inicial $a_1 \neq 0$ e $T_E T_C < 0$ ou $T_E T_C = 0$ é válida. Além disso quando Γ é um ciclo limite, então $T_E T_C < 0$.*

Demonstração. Dentro de cada zona o sistema (3.3) é linear e sistemas lineares não podem ter ciclos limites, órbitas homoclínicas e nem órbitas heteroclínicas, portanto Γ está em pelo menos duas zonas. Entretanto, para que Γ seja um ciclo limite, uma órbita homoclínica ou uma dupla ligação heteroclínica, a curva deve cruzar alguma fronteira, ou

as duas, duas vezes e em sentido oposto. Supondo que $a_1 = 0$, o sistema (3.3) mostra que

$$\dot{x}_1|_{x_1=-1} = -c_1 \quad \text{e} \quad \dot{x}_1|_{x_1=1} = c_1 .$$

Se $c_1 \neq 0$ então o fluxo em todos os pontos da fronteira é direcionado para dentro ou para fora da zona central, pois a primeira coordenada do campo é constante em cada fronteira. Se $c_1 = 0$ então as fronteiras são invariantes com relação ao fluxo do sistema. Em qualquer um dos casos é impossível cruzar uma fronteira em ambos os sentidos, logo Γ não é um ciclo limite, uma órbita homoclínica e nem uma dupla ligação heteroclínica e assim chega-se a uma contradição. Portanto, $a_1 \neq 0$.

Se $T_C T_E > 0$, então $T_C, T_E > 0$ ou $T_C, T_E < 0$ e assim $T_C S_C + T_E S_E \neq 0$. Logo, pela Proposição 1, o sistema (3.3) não pode ter qualquer órbita periódica, órbita homoclínica ou ligações duplas heteroclínicas. Então $T_C T_E \leq 0$.

Se Γ é um ciclo limite que está em duas ou três zonas com $T_C T_E = 0$, pela Proposição 1, T_C e T_E serão nulos o que resulta em um sistema conservativo. Como em sistemas conservativos não existem ciclos limites chega-se a uma contradição. Desta forma, Γ é um ciclo limite quando $T_E T_C < 0$. ■

Para obter a forma canônica do sistema (3.3) as variáveis serão alteradas preservando os limites verticais. Em [5] os autores fazem as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} x &= x_1 , \\ y &= \epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 , \quad \epsilon_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Com isto, obtém-se

$$\dot{x} = \varphi_1(x) - \frac{\epsilon_1 a_1 x}{\epsilon_2} + \frac{a_1 y}{\epsilon_2}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon_1 \dot{x}_1 + \epsilon_2 \dot{x}_2 \\ &= \epsilon_1 \left(\varphi_1(x) - \frac{\epsilon_1 x a_1}{\epsilon_2} + \frac{y a_1}{\epsilon_2} \right) + \epsilon_2 \left(\varphi_2(x) + a_2 \left(\frac{y}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_1 x}{\epsilon_2} \right) \right) \\ &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \left(\frac{\epsilon_1 a_1}{\epsilon_2} + a_2 \right) x + y \left(\frac{\epsilon_1 a_1}{\epsilon_2} + a_2 \right) \\ &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + y \epsilon_3, \end{aligned}$$

onde $\epsilon_3 = \frac{\epsilon_1 a_1}{\epsilon_2} + a_2$ e ϵ_1, ϵ_2 serão adequadamente selecionados. O sistema com as novas variáveis é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi_1(x) - \frac{\epsilon_1 x a_1}{\epsilon_2} + \frac{y a_1}{\epsilon_2}, \\ \dot{y} = \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + y \epsilon_3. \end{cases} \tag{3.5}$$

Para simplificar (3.5) podemos analisar o termo linear por partes $\epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2$ em cada uma das três zonas, com o que obtemos.

- Para $x \leq -1$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) &= \epsilon_1(e_1x + e_1 - c_1) + \epsilon_2(e_2x + e_2 - c_2) \\
 &= \epsilon_1 e_1 x + \epsilon_1 e_1 - \epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 e_2 x + \epsilon_2 e_2 - \epsilon_2 c_2 \\
 &= (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2)x + (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2) - (\epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2).
 \end{aligned}$$

- Para $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) &= \epsilon_1(c_1x) + \epsilon_2(c_2x) \\
 &= (\epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2)x.
 \end{aligned}$$

- Para $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) &= \epsilon_1(e_1x - e_1 + c_1) + \epsilon_2(e_2x - e_2 + c_2) \\
 &= \epsilon_1 e_1 x - \epsilon_1 e_1 + \epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 e_2 x - \epsilon_2 e_2 + \epsilon_2 c_2 \\
 &= (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2)x - (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2) + (\epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2).
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) = \begin{cases} (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2)x + (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2) - (\epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2), & \text{se } x \leq -1, \\ (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2)x, & \text{se } |x| < 1, \\ (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2)x - (\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2) + (\epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2), & \text{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

Se $\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2 = \epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2$ ou equivalentemente

$$\begin{aligned}
 \epsilon_2(e_2 - c_2) &= \epsilon_1(e_1 - c_1) \\
 &= \epsilon_1(e_1 + a_1 - a_1 - c_1) \\
 &= \epsilon_1(T_E - T_C),
 \end{aligned}$$

então a segunda equação de (3.5) torna-se linear.

Proposição 3 (Freire et al., 2002) *Se $a_1 \neq 0$ existe uma mudança de variáveis que reduz o sistema (3.3) para a seguinte forma canônica (Forma de Liénard)*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) - y, \\ \dot{y} = g(x), \end{cases} \quad (3.6)$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} T_E x + (T_E - T_C), & \text{se } x \leq -1, \\ T_C x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ T_E x - (T_E - T_C), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} D_E x + (D_E - D_C), & \text{se } x \leq -1, \\ D_C x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ D_E x - (D_E - D_C), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Na mudança de variável (3.4) tomando $\epsilon_1 = a_2$ e $\epsilon_2 = -a_1$, obtemos

- Para $x \leq -1$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi_1(x) - \frac{\epsilon_1 a_2 x}{\epsilon_2} + \frac{a_1 x}{\epsilon_2} \\ &= e_1 x + (e_1 - c_1) - \frac{\frac{\epsilon_2}{a_1} a_2 x}{-a_1} + \frac{a_1 y}{-a_1} \\ &= e_1 x + (e_1 - c_1) + a_2 x - y \\ &= (e_1 + a_2)x + (e_1 - c_1) - y \\ &= T_E x + (T_E - T_C) - y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + \epsilon_3 y \\ &= a_2(e_1 x + (e_1 - c_1)) + (-a_1)(e_2 x + (e_2 - c_2)) - a_2 \frac{(a_1 a_2 + (-a_1) a_2)x}{-a_1} \\ &\quad + (a_1 a_2 + (-a_1) a_2) y \\ &= a_2 e_1 x + a_2(e_1 - c_1) - a_1 e_2 x - a_1(e_2 - c_2) \\ &= (a_2 e_1 - a_1 e_2)x + a_2 e_1 - a_2 c_1 - a_1 e_2 + a_1 c_2 \\ &= D_E x + (D_E - D_C). \end{aligned}$$

- Para $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi_1(x) - \frac{\epsilon_1 a_2 x}{\epsilon_2} + \frac{a_1 x}{\epsilon_2} \\ &= c_1 x - \frac{\frac{\epsilon_2}{a_1} a_2 x}{-a_1} y \\ &= c_1 x + a_2 x - y \\ &= T_C x - y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + \epsilon_3 y \\ &= a_2 c_1 x + -a_1 c_2 x \\ &= D_C x. \end{aligned}$$

- Para $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi_1(x) - \frac{\epsilon_1 a_2 x}{\epsilon_2} + \frac{a_1 x}{\epsilon_2} \\ &= e_1 x - (e_1 - c_1) - \frac{\frac{\epsilon_2}{a_1} a_2 x}{-a_1} + \frac{a_1 y}{-a_1} \\ &= e_1 x - (e_1 - c_1) + a_2 x - y \\ &= (e_1 + a_2)x - (e_1 - c_1) - y \\ &= T_E x - (T_E - T_C) - y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + \epsilon_3 y \\
&= a_2(e_1 x - (e_1 - c_1)) + (-a_1)(e_2 x - (e_2 - c_2)) - a_2 \frac{(a_1 a_2 + (-a_1) a_2) x}{-a_1} \\
&\quad + (a_1 a_2 + (-a_1) a_2) y \\
&= a_2 e_1 x - a_2(e_1 - c_1) - a_1 e_2 x + a_1(e_2 - c_2) \\
&= (a_2 e_1 - a_1 e_2) x - a_2 e_1 + a_2 c_1 + a_1 e_2 - a_1 c_2 \\
&= D_E x - (D_E - D_C).
\end{aligned}$$

■

Proposição 4 (Freire et al., 2002) *Se $T_E \neq T_C$ e $a_1 \neq 0$, existe uma mudança de variáveis que reduz o sistema (3.3) para a seguinte forma canônica (forma de Van der Pol)*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - y, \\ \dot{y} = \rho x - by, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} m_E x + (m_E - m_C), & \text{se } x \leq -1, \\ m_C x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ m_E x - (m_E - m_C), & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

$$b = -\frac{D_C - D_E}{T_C - T_E}, \quad m_E = T_E + b, \quad m_C = T_C + b \quad \text{e} \quad \rho = \frac{m_C - m_E}{2} b + \frac{D_C + D_E}{2}.$$

Demonstração. Se na mudança de variáveis (3.4) for assumido

$$\epsilon_1 = -\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -a_1,$$

tem-se que

- Se $x \leq -1$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= e_1 x + (e_1 - c_1) - \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} x - y \\
&= \left(e_1 - \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) x - y + (e_1 - c_1) \\
&= \left(e_1 + a_2 - a_2 - \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) x - y + (e_1 - c_1) \\
&= \left(e_1 + a_2 - \frac{a_2(T_E - T_C) + a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) x - y + (e_1 - c_1) \\
&= (e_1 + a_2)x - \left(\frac{a_2 e_1 - a_2 c_1 + a_1 c_2 - a_1 e_2}{T_E - T_C} \right) x - y + (e_1 - c_1) \\
&= (e_1 + a_2)x - \left(\frac{D_C - D_E}{T_E - T_C} \right) x - y + (e_1 - c_1) \\
&= \left(e_1 + a_2 - \frac{D_C - D_E}{T_E - T_C} \right) x - y + (e_1 - c_1) \\
&= (T_E + b)x - y + (T_E + b - b - T_C) \\
&= m_E x + (m_E - m_C) - y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + \epsilon_3 y \\
&= \left(-\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) (e_1 x + (e_1 - c_1)) + (-a_1)(e_2 x + (e_2 - c_2)) \\
&\quad - \left(\left(-\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) \left(a_2 + \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) \right) x + \left(a_2 + \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) y \\
&= -\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} e_1 x - \frac{a_1(c_2 - e_2)(e_1 - c_1)}{e_1 - c_1} - a_1 e_2 x + a_1(c_2 - e_2) + \\
&\quad + \frac{a_1 a_2 (c_2 - e_2)}{T_E - T_C} x + \left(\frac{-a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right)^2 x - b y \\
&= (b + a_2) e_1 x - a_1 e_2 x - a_2 b x - a_2^2 x + b^2 x + 2b a_2 x + a_2^2 x - b y \\
&= b e_1 x + a_2 e_1 x - a_1 e_2 x + a_2 b x b^2 x - b y \\
&= [(e_1 + a_2)b + b^2 + (a_2 e_1 - a_1 e_2)] x - b y \\
&= (T_E b + b^2 + D_E) x - b y \\
&= (T_E + b) x + D_E x - b y.
\end{aligned}$$

- Se $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= c_1 x + \left(-\frac{D_C - D_E}{T_C - T_E} + a_2 \right) x - y \\
&= \left(c_1 + a_2 - \frac{D_C - D_E}{T_C - T_E} \right) x - y \\
&= (T_C + b) x - y \\
&= m_C x - y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + \epsilon_3 y \\
&= \left(-\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) c_1 x + (-a_1) c_2 x - \left(\left(-\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) \left(a_2 + \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) \right) x \\
&\quad + \left(a_2 + \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) y \\
&= (b + a_2) c_1 x - a_1 c_2 x - a_2 (b + a_2) x + (b + a_2)^2 x - b y \\
&= b c_1 x + a_2 c_1 x - a_1 c_2 x - a_2 b x - a_2^2 x + b^2 x + 2b a_2 x + a_2^2 x - b y \\
&= b c_1 x + a_2 c_1 x - a_1 c_2 x + b a_2 x - b y \\
&= (c_1 + a_2) b x + (a_2 c_1 - a_1 c_2) x - b y \\
&= T_C x + D_C x - b y.
\end{aligned}$$

- Se $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= e_1 x + \left(-\frac{D_C - D_E}{T_C - T_E} + a_2 \right) x - (e_1 - c_1) - y \\
&= \left(e_1 + a_2 - \frac{D_C - D_E}{T_C - T_E} \right) x - (e_1 - c_1) - y \\
&= (T_E + b) x - (T_E + b - b - T_C) - y \\
&= m_E x - (m_E - m_C) - y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \epsilon_1 \varphi_1(x) + \epsilon_2 \varphi_2(x) - \epsilon_1 \epsilon_3 x + \epsilon_3 y \\
&= \left(-\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) (e_1 x - (e_1 - c_1)) + (-a_1)(e_2 x - (e_2 - c_2)) + \\
&\quad - \left(\left(-\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) \left(a_2 + \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) \right) x + \left(a_2 + \frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right) y \\
&= -\frac{a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} e_1 x + \frac{a_1(c_2 - e_2)(e_1 - c_1)}{e_1 - c_1} - a_1 e_2 x + a_1(c_2 - e_2) + \\
&\quad + \frac{a_1 a_2 (c_2 - e_2)}{T_E - T_C} x + \left(\frac{-a_1(c_2 - e_2)}{T_E - T_C} \right)^2 x - b y \\
&= (b + a_2) e_1 x - a_1 e_2 x - a_2 b + x - a_2^2 x + b^2 x + 2b a_2 x + a_2^2 x - b y \\
&= b e_1 x + a_2 e_1 x - a_1 e_2 x + a_2 b x + b^2 x - b y \\
&= [(e_1 + a_2)b + b^2 + (a_2 e_1 - a_1 e_2)] x - b y \\
&= (T_E b + b^2 + D_E) x - b y \\
&= (T_E + b) x + D_E x - b y.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1 (Freire et al., 2002) *Se um sistema linear por partes (3.1)-(3.2) tem um ciclo limite, então se verifica $T_E T_C < 0$ e o sistema pode ser transformado por uma mudança de variáveis mais um reescalonamento no tempo na forma canônica*

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x) - y, \\ \dot{y} = x - \beta y, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} \mu_E x + (\mu_E - \mu_C), & \text{se } x \leq -1, \\ \mu_C x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ \mu_E x - (\mu_E - \mu_C), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e β, μ_E e μ_C são parâmetros reais.

Demonstração. Primeiro será mostrado que se o sistema linear por partes (3.1)-(3.2) tem um ciclo limite, então o sistema pode ser transformado na forma canônica (3.7) com $\rho > 0$. Pela Proposição 2, se o sistema (3.1)-(3.2) tem um ciclo limite, então $a_1 \neq 0$ e $T_C T_E < 0$, ou seja, $T_E \neq T_C$. Assim, aplicando a Proposição 4, tem-se a forma canônica do sistema (3.1)-(3.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - y, \\ \dot{y} = \rho x - b y. \end{cases}$$

Assumindo que o ciclo limite Γ está em duas zonas, é claro que existe outro ciclo limite simétrico a Γ . Logo Γ não envolve a origem, pois caso contrário as duas curvas se cruzariam. Sabe-se que uma órbita periódica de um campo vetorial contínuo no plano

deve conter no mínimo um ponto de equilíbrio em seu interior [17]. Portanto, Γ deve englobar o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ que está localizado em uma das zonas externas.

Se $\rho \leq 0$, $\bar{x}$ é sela ou é nó. De fato, os autovalores de (3.7) nas zonas externas são

$$\lambda_{1,2} = \frac{m_E - b \pm \sqrt{(m_E + b)^2 - 4\rho}}{2}$$

e assim

$$(m + b)^2 - 4\rho \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \leq 0.$$

Portanto, $\bar{x}$ é sela ou é nó quando $\rho \leq 0$ e assim existem retas invariantes associadas a este ponto, o que exclui a existência de órbitas periódicas situadas em duas zonas. Agora, supondo que Γ esteja nas três zonas, $\rho \leq 0$ e observando o fluxo nas fronteiras $x = -1$ e $x = 1$, tem-se que Γ deve englobar a origem. Além disso, a órbita Γ atravessa os dois semieixos positivos nos primeiros quadrantes.

Se $\rho = 0$, a reta $y = 0$ é uma trajetória que cortaria Γ , o que é impossível. Se $\rho < 0$, uma análise do fluxo nas fronteiras do primeiro quadrante mostra que as órbitas que saem de tal quadrante nunca mais voltam a ele. Conclui-se que $\rho > 0$ e então tomando em (3.7) a mudança de variáveis

$$x \mapsto x \quad \text{e} \quad y \mapsto \sqrt{\rho}y,$$

e o reescalonamento no tempo $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{\rho}}$, tem-se

$$\frac{dx}{dt/\sqrt{\rho}} = \sqrt{\rho} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\rho} (f(x) - y(\sqrt{\rho})) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{\sqrt{\rho}} - y,$$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{\rho}} = \begin{cases} \frac{\mu_E}{\sqrt{\rho}}x + \frac{(\mu_E - \mu_C)}{\sqrt{\rho}}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{\mu_C}{\sqrt{\rho}}x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ \frac{\mu_E}{\sqrt{\rho}}x - \frac{(\mu_E - \mu_C)}{\sqrt{\rho}}, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

$$\frac{dy\sqrt{\rho}}{dt/\sqrt{\rho}} = (\sqrt{\rho})^2 \frac{dy}{dt} = \rho x - by\sqrt{\rho} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = x - \frac{b}{\sqrt{\rho}}y.$$

Considerando então as mudanças de parâmetros

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{\rho}}, \quad \mu_C = \frac{m_C}{\sqrt{\rho}} \quad \text{e} \quad \mu_E = \frac{m_E}{\sqrt{\rho}}$$

o sistema (3.8) é obtido, o que prova o teorema. ■

3.2 Soluções do sistema (3.8)

Como as formas explícitas das soluções de (3.8) são necessárias para o estudo dos sistemas lineares por partes com três zonas, fazemos um estudo detalhado das mesmas. Isto é possível devido ao fato dos sistemas serem lineares em cada zona. Primeiramente assumamos, seguindo o que é feito em [5], que $D \neq 0$, onde D é D_C ou D_E , A denota A_E ou A_C e $T = \text{traço}(A)$.

As soluções no interior de cada zona (para ser estendida continuamente para a fronteira comum) tem a forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \mp \frac{\beta(\mu_C - \mu)}{D} \\ y(t) \mp \frac{\mu_C - \mu}{D} \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x(0) \mp \frac{\beta(\mu_C - \mu)}{D} \\ y(0) \mp \frac{\mu_C - \mu}{D} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $e^{At} = e^{\frac{T}{2}t}C(t)$, μ é μ_E ou μ_C e o sinal de menos (resp. mais) deve ser escolhido para a zona direita (resp. esquerda) (na zona central o termo correspondente desaparece). A matriz $C(t)$ depende do sinal de

$$\begin{aligned} \Delta &= (\mu - \beta)^2 - 4(-\mu\beta + 1) \\ &= (\mu + \beta)^2 - 4 \\ &= \begin{cases} \Delta_E, & \text{se } |x| \geq 1, \\ \Delta_C, & \text{se } |x| < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

pois o comportamento dinâmico do sistema é determinado pelos autovalores de cada zona.

Quando $D > 0$ e $\Delta < 0$, as órbitas lineares correspondem a um foco ou a um centro e em ambas as situações será usado a expressão zona de foco. Quando $D > 0$ e $\Delta \geq 0$ a zona será chamada de zona de sela. Escrevendo

$$\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \begin{cases} \omega_E, & \text{se } |x| \geq 1, \\ \omega_C, & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

e usando Δ para Δ_E ou Δ_C , e ω para ω_E ou ω_C , são obtidas as seguintes expressões para a matriz $C(t)$.

Se $\Delta < 0$ (caso zona de foco), então

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \frac{(\beta + \mu)\text{sen}(\omega t)}{\frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} 2\omega} & -\frac{\text{sen}(\omega t)}{2\omega} \\ \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} & \cos(\omega t) - \frac{(\beta + \mu)\text{sen}(\omega t)}{2\omega} \end{pmatrix}.$$

Se $\Delta > 0$ (casos zonas de sela ou de nó próprio), então

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) + \frac{(\beta + \mu)\sinh(\omega t)}{2\omega} & -\frac{\sinh(\omega t)}{2\omega} \\ \frac{\sinh(\omega t)}{\omega} & \cosh(\omega t) - \frac{(\beta + \mu)\sinh(\omega t)}{2\omega} \end{pmatrix}.$$

Quando $\Delta = 0$ (caso zona de nó impróprio), então

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 + t(\mu - T/2) & -t \\ t & 1 - t(\mu - T/2) \end{pmatrix}.$$

Considerando $D = 1 - \mu\beta = 0$ é possível deduzir que $\beta \neq 0$ e $\mu = 1/\beta$. Quando $D = 0$ e $T \neq 0$, isto é $\mu = 1/\beta$ e $0 \neq |\beta| \neq 1$, a expressão (3.9) não é mais válida. Assim usaremos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}e^{Tt} - \beta & 1 - e^{Tt} \\ e^{Tt} - 1 & \frac{1}{\beta} - \beta e^{Tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \mp D_C t \begin{pmatrix} \beta + \frac{1}{\beta}e^{Tt} \\ 1 + e^{Tt} \end{pmatrix},$$

onde $T = (1 - \beta^2)/\beta$, e o sinal de menos (mais) corresponde à zona direita (esquerda).

Mais um caso degenerado surge quando $\mu = \beta = \pm 1$, então $D = T = 0$. Neste caso, as soluções são da forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \beta t & -t \\ t & 1 - \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \mp T_C t \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Por fim, Freire et al. [5] introduzem dois parâmetros que são cruciais na análise do caso em que $\Delta \neq 0$,

$$\gamma_E = \frac{\mu_E - \beta}{2\omega_E} = \frac{T_E}{2\omega_E}, \quad \gamma_C = \frac{\mu_C - \beta}{2\omega_C} = \frac{T_C}{2\omega_C}$$

para o qual uma observação elementar é dada.

Observação 1 Para $\Delta > 0$ e $D \neq 0$, tem-se $\gamma^2 - 1 = D/\omega^2$, e então $|\gamma| < 1$ para uma zona de sela e $|\gamma| > 1$ para uma zona de nó, onde $\gamma = \gamma_C$ ou $\gamma = \gamma_E$ de acordo com a escolha de $\omega = \omega_C$ ou $\omega = \omega_E$.

O seguinte resultado é imediato, analisando-se os casos para se ter $\dot{x} = \dot{y}$ em (3.8).

Proposição 5 (Freire et al., 2002) Para o sistema (3.8) a origem é sempre um ponto de equilíbrio e as seguintes condições ocorrem.

- (a) Se $D_E D_C \geq 0$ e $D_C \neq 0$, então a origem é o único ponto de equilíbrio.
- (b) Se $D_E D_C < 0$, então $\beta \neq 0$ e o sistema tem três pontos de equilíbrio, um em cada zona.

- (c) Se $D_E \neq 0$ e $D_C = 0$, então $\beta \neq 0$ e o sistema tem uma infinidade de pontos de equilíbrio que compõem o segmento dado por $y = x/\beta$ com $|x| \leq 1$.
- (d) Se $D_E = D_C = 0$, então $\beta \neq 0$ e o sistema tem uma infinidade de equilíbrios que compõem a linha dada pela equação $y = x/\beta$.

3.3 Sistema linear por partes no plano com três zonas e um ponto de equilíbrio

Nesta seção será estudado o caso (a) da Proposição 5, isto é, o sistema linear por partes no plano com três zonas e um ponto de equilíbrio. Neste caso, exclui-se $T_E = T_C$ (que implica $\mu_E = \mu_C$), pois esta condição resulta em um sistema linear e não em um sistema linear por partes.

Proposição 6 (Freire et al., 2002) *Considere o sistema (3.8) com $D_E D_C \geq 0$ e $D_C \neq 0$. Então a origem é o único ponto de equilíbrio e as seguintes condições acontecem.*

- (a) Se $D_C > 0$, a origem é uma antissela (nó, foco ou centro) e surgem os seguintes casos:
- (a1) Se $T_C T_E < 0$, então a origem é englobada por um único ciclo limite, que é estável se $T_C > 0$ e instável se $T_C < 0$ (ver Figura 3.1(a)).
 - (a2) Se $T_C = 0$ e $T_E \neq 0$, então a origem é englobada por um continuum de órbitas periódicas contidas na zona central (ver Figura 3.1(b)).
 - (a3) Se $T_C T_E \geq 0$, com $T_C \neq 0$, então não existe uma curva invariante fechada (ver Figuras 3.2(a) e 3.2(b)).
- (b) Se $D_C < 0$, o ponto de equilíbrio é uma sela e o sistema não tem curvas invariantes fechadas (ver Figura 3.2(c)).

Demonstração. Pela afirmação (a) da Proposição 5 segue que a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.8).

(a) Como $D_C > 0$, a origem é uma antissela.

(a1) Considerando que $T_C > 0$, como o sistema (3.8) pode ser transformado, através de uma mudança de variáveis, no sistema (3.6), que está escrito na forma de Liénard, as seguintes propriedades podem ser deduzidas.

- (i) $F(x) = -F(-x)$, $g(x) = -g(-x)$.
- (ii) $xg(x) > 0$ quando $x \neq 0$.
- (iii) $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$.

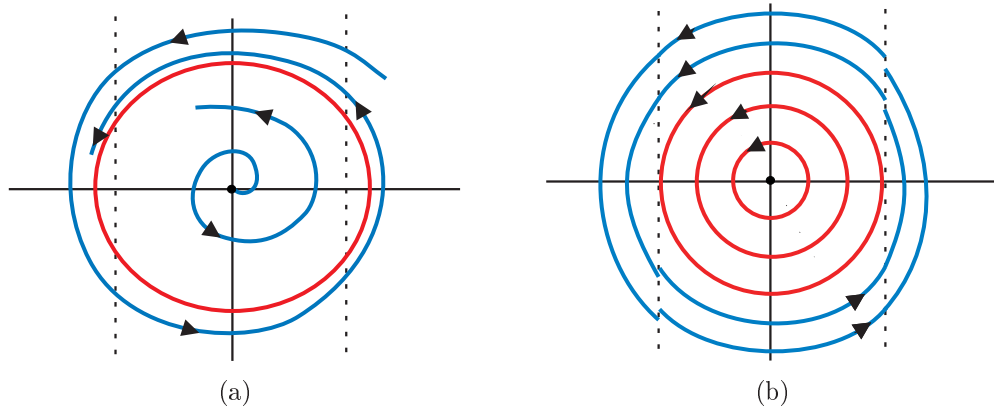


Figura 3.1: Esboço dos retratos de fase: (a) A origem é um foco englobado por um ciclo limite estável, afirmação (a1) da Proposição 6. (b) A origem é um centro englobada por um *continuum* de órbitas periódicas na zona central, afirmação (a2) da Proposição 6.

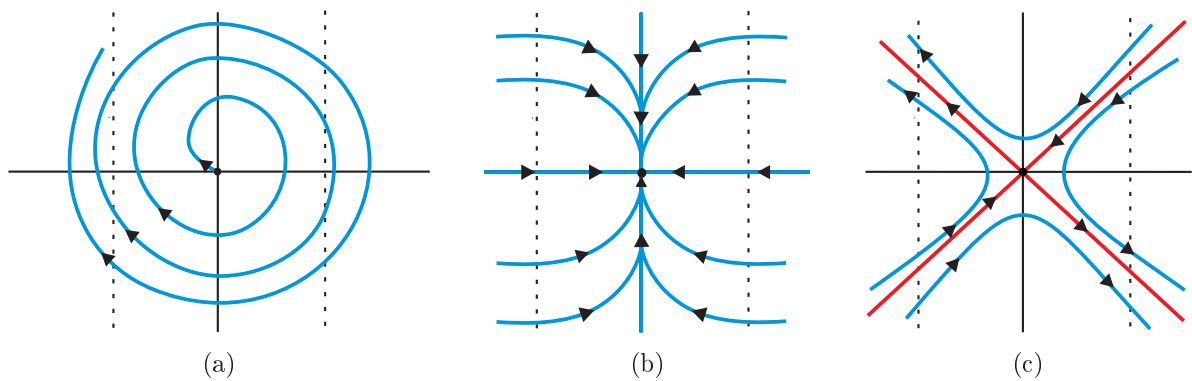


Figura 3.2: Esboço dos retratos de fase : (a) A origem é um foco, não há curva invariante fechada, afirmação (a3) da Proposição 6. (b) A origem é um nó, não há curva invariante fechada, afirmação (a3) da Proposição 6. (c) A origem é uma sela, o sistema não tem curvas invariantes fechadas, afirmação (b) da Proposição 6.

- (iv) Quando $x > 0$, a equação $F(x) = 0$ tem uma única raiz $x_0 = 1 - (T_C/T_E) > 1$.
- (v) Para $x \geq x_0$, quando $x \rightarrow \infty$ F decresce monotonamente para menos infinito.
- (vi) As funções F e g têm derivadas contínuas para todo x , com exceção dos pontos $x = \pm 1$ onde as duas funções tem derivadas laterais diferentes.

O Teorema de Liénard, demonstrado no Apêndice A, garante que as condições acima são suficientes para provar a existência de um ciclo limite estável. Para $T_C < 0$, basta fazer uma análise semelhante invertendo o tempo.

(a2) A matriz Jacobiana na zona central do sistema (3.8) é dada por

$$\begin{pmatrix} \mu_C & -1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz Jacobiana são dados por $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1 + \mu_C\beta}$. A igualdade $T_C = 0$ junto com $D_C > 0$ implica que os autovalores são imaginários puros. Logo, a origem é um centro e portanto existe um *continuum* de órbitas periódicas englobando este ponto. Da Proposição 1 conclui-se que $T_ES_E = 0$, o que é possível somente se $S_E = 0$ (pois por hipótese $T_E \neq 0$), ou seja, a área das órbitas periódicas nas zonas externas é nula e portanto, não existe órbitas periódicas com partes nas zonas externas. Então as órbitas periódicas estão restritas à zona central.

(a3) Se $T_CT_E \geq 0$ e $T_C \neq 0$, então existem as seguintes possibilidades :

- $T_E = 0$ e assim pela Proposição 1, tem-se $T_CS_C = 0$ que é possível somente se $S_C = 0$, logo não existem órbitas periódicas envolvendo a zona central. Portanto, não existem órbitas periódicas no sistema.
- $T_C, T_E > 0$ ou $T_C, T_E < 0$ e assim

$$T_CS_C + T_ES_E \neq 0.$$

Logo, pela Proposição 1, o sistema não pode ter qualquer órbita periódica.

(b) Como $D_C < 0$, o ponto de equilíbrio é uma sela. Então não existem órbitas periódicas que estão apenas na zona central, e uma possível órbita invariante fechada pode ter algumas partes nas zonas externas. Mas isto é impossível neste caso, pois quando uma órbita periódica entra em uma das zonas externas, nunca retorna para a zona central.

■

Exemplo 1 Tomando-se $\mu_C = 2$, $\mu_E = -1$ e $\beta = -\frac{1}{4}$, o sistema (3.8) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x) - y, \\ \dot{y} = x + \frac{1}{4}y, \end{cases} \quad (3.10)$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} -x - 3, & \text{se } x \leq -1, \\ 2x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ -x + 3, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Como $D_C = 1.5 > 0$ e $T_CT_E = -1.7 < 0$ temos que o caso (a1) da Proposição 6 se verifica. O retrato de fase é mostrado nas Figuras 3.3 e 3.4.

Exemplo 2 Tomando-se $\mu_C = \frac{1}{2}$, $\mu_E = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$, tem-se

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x) - y, \\ \dot{y} = x - \frac{1}{2}y, \end{cases} \quad (3.11)$$

com

$$\phi(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Como $T_C = 0$ e $T_E = \frac{1}{2}$, caso (a2) da Proposição 6, então a origem é englobada por um continuum de órbitas periódicas que ficam na zona central, como podemos observar na Figura 3.5.

Exemplo 3 Considerando o sistema com os valores de parâmetros $\mu_C = \frac{1}{2}$, $\mu_E = 3$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x) - y, \\ \dot{y} = x + \frac{1}{2}y, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} 3x + \frac{5}{2}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ 3x - \frac{5}{2}, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Note que $D_C = 1.25$ e $T_C T_E = 3.5 > 0$ com $T_C = 1$, portanto, segundo a Proposição 6 não existe uma curva invariante fechada neste caso. Ver Figura 3.6.

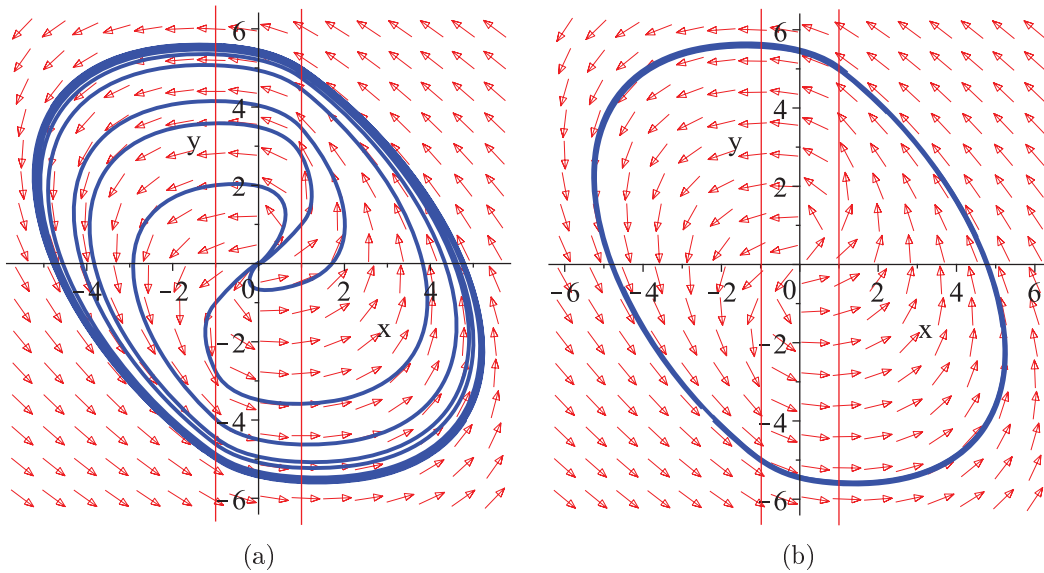


Figura 3.3: Retrato de fase do sistema (3.10). (a) A origem é um foco instável, e o ciclo limite englobando a origem é estável. O tempo de integração é $[-8, 16]$. (b) No tempo de integração $[11, 14]$ observa-se a existência de uma órbita periódica estável.

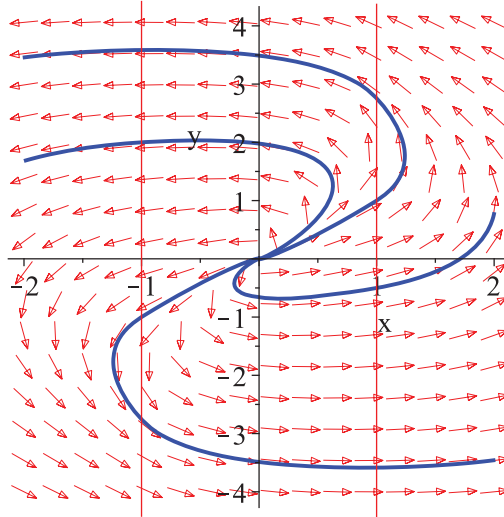


Figura 3.4: Retrato de fase do sistema (3.10). Tempo de integração: $[-8,14]$.

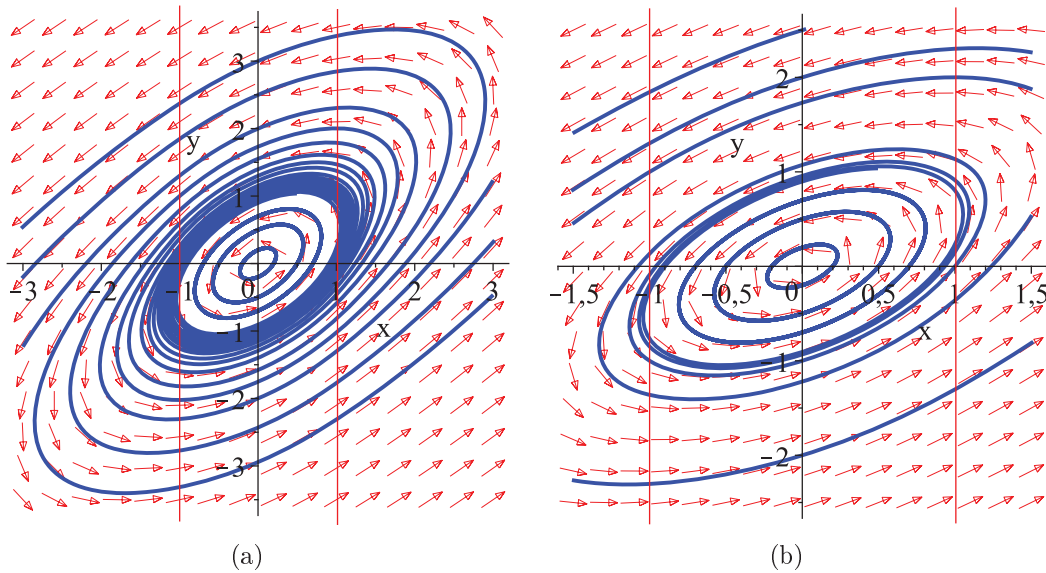


Figura 3.5: Retrato de fase do sistema (3.11). Tempo de integração: $[-20,20]$. A origem é um centro e existe um *continuum* de órbitas periódicas englobando a origem.

Exemplo 4 Tomando-se $\mu_C = 5$, $\mu_E = 3$ e $\beta = \frac{1}{2}$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x) - y, \\ \dot{y} = x - \frac{1}{2}y, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x \leq -1, \\ 5x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ 3x + 2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Como $T_C = 4.5$, $T_E = 2.5$, $D_E = -0.5$ e $D_C = -1.5$, temos o caso (b) da Proposição 6. O retrato de fase do sistema (3.13) é mostrado na Figura 3.7.

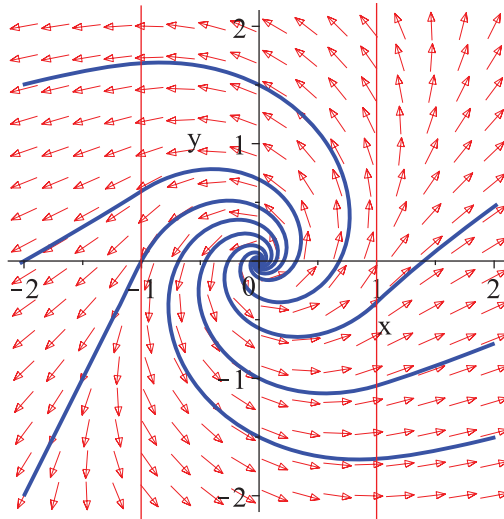


Figura 3.6: Retrato de fase do sistema (3.12). Tempo de integração: $[-10, 5]$. A origem é uma foco globalmente repulsor.

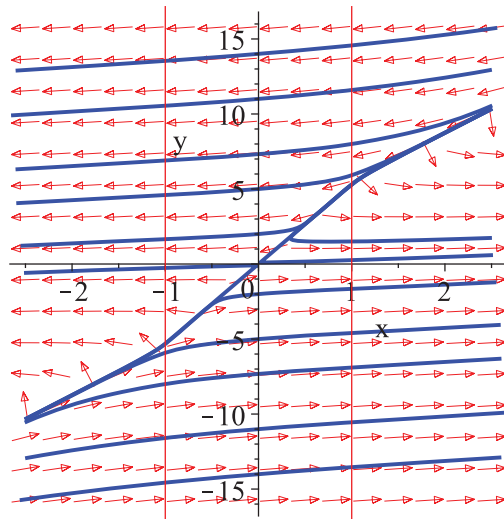


Figura 3.7: Retrato de fase do sistema (3.13). Tempo de integração: $[-20, 5]$. A origem é um ponto de sela.

Proposição 7 (Freire et al., 2002) *Se o sistema (3.8) tem somente um ponto de equilíbrio e $|\beta| \geq 1$, então o sistema não pode ter curvas invariantes fechadas.*

Demonstração. Em virtude da simetria, serão considerados apenas o caso $\beta \geq 1$. Como o sistema tem apenas um ponto de equilíbrio, pela Proposição 5 temos que $D_C D_E \geq 0$ e $D_C \neq 0$. Quando $D_C > 0$ e $D_E \geq 0$, tem-se $\mu_C < 1/\beta < \beta$ e $\mu_E \leq 1/\beta \leq \beta$ e então

$$\begin{aligned} T_C T_E &= (\mu_C - \beta)(\mu_E - \beta) \\ &= \mu_C \mu_E - \beta \mu_C - \beta \mu_E + \beta^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, da afirmação (a3) da Proposição 6, não existe uma curva invariante fechada. Se $D_C < 0$, não há curvas invariantes fechadas devido a afirmação (b) da Proposição 6. ■

Exemplo 5 Tomando-se $\mu_C = -1$, $\mu_E = -3$ e $\beta = 5$ em (3.8) obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x) - y, \\ \dot{y} = x - 5y, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} -3x - 2, & \text{se } x \leq -1, \\ -x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ -3x + 2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Como tomamos $\beta > 1$, pela Proposição 7 temos que o sistema não pode ter curvas invariantes fechadas como podemos observar na Figura 3.8.

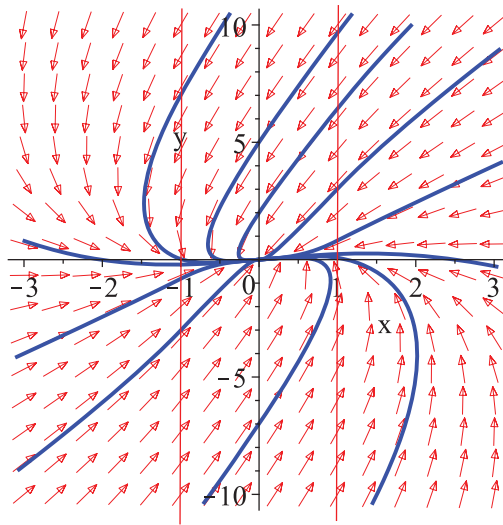


Figura 3.8: Retrato de fase do sistema (3.14). A origem é um nó estável.

3.4 Sistema linear por partes no plano com três zonas e um ponto de equilíbrio em cada zona

Nesta seção estudaremos o sistema linear por partes no plano com três zonas com um ponto de equilíbrio em cada zona (caso (b) da Proposição 5). Desta forma, no sistema (3.8) verifica-se $D_E D_C < 0$ o que implica que apenas um determinante é negativo, ou seja, $D_E < 0$ ou $D_C < 0$. Logo o ponto de sela está ou na zona central ou nas zonas externas. Lembrando que $\beta \neq 0$ em todos os casos.

O sistema não é diferenciável nas linhas $\{x = \pm 1\}$, então não é possível usar teoremas sobre sistemas diferenciáveis. Portanto, integrando o sistema em cada zona, uma transformação de retorno de Poincaré pode ser definida, o que é uma etapa importante para os resultados desta seção.

Nas órbitas na zona externa $x \leq -1$, pontos de $S_+ = \{x = -1, y \geq -\mu_C\}$ podem ser transformados em pontos de $S_- = \{x = -1, y \leq -\mu_C\}$. Usando a notação $(-1, p - \mu_C)$ com $p \geq 0$ para representar pontos de S_+ e $(-1, -q - \mu_C)$ com $q \geq 0$ para representar pontos de S_- é possível definir uma transformação de retorno P_E (quando existir) de modo que $q = P_E(p)$, esta igualdade denota a existência de uma órbita na zona externa $x \leq -1$ do ponto $(-1, p - \mu_C)$ para o ponto $(-1, -q - \mu_C)$.

Com relação a zona central, existem órbitas que transformam os pontos de S_- em pontos de $\Sigma_- = \{x = 1, y \geq \mu_C\}$. É definida uma transformação de retorno Q_C , se existe, descrita por $s = Q_C(q)$. Esta função transforma o ponto $(-1, -q - \mu_C)$ no ponto $(1, -s + \mu_C)$. Também existem órbitas que transformam pontos de Σ_- em $\Sigma_+ = \{x = 1, y \geq \mu_C\}$ e pontos de Σ_+ em pontos de S_+ , respectivamente. Estas transformações de retorno são definidas (se existirem) por $\tilde{P}_E(s) = u$, que transforma o ponto $(1, -s + \mu_C)$ no ponto $(1, u + \mu_C)$, e $\tilde{Q}_C(u) = r$, que transforma o ponto $(1, u + \mu_C)$ no ponto $(-1, r - \mu_C)$, respectivamente, onde $u, s, r \geq 0$ (ver Figura 3.9).

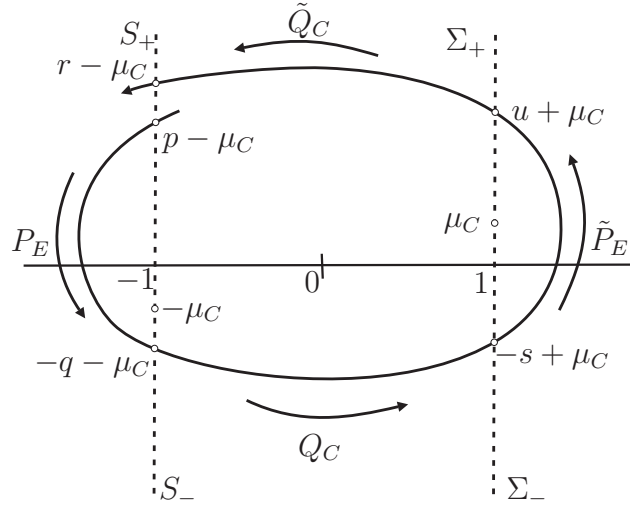


Figura 3.9: As transformações de retorno P_E , Q_C , $\tilde{P}_E$ e $\tilde{Q}_C$.

A composição $P_T = \tilde{Q}_C \circ \tilde{P}_E \circ Q_C \circ P_E$, quando existe, constitui uma transformação de Poincaré relacionada com a seção de Poincaré $x = -1$. As quatro transformações são crescentes, e então suas derivadas são não-negativas. Portanto, a composição P_T será crescente.

Trabalhar com a transformação P_T é muito difícil. Logo usando a simetria do sistema, em [5] os autores consideram a transformação $P = Q_C \circ P_E$ que tem propriedades semelhantes à transformação P_T como mostra a seguinte proposição.

Proposição 8 (Freire et al., 2002) *As transformações $P_T = \tilde{Q}_C \circ \tilde{P}_E \circ Q_C \circ P_E$ e $P = Q_C \circ P_E$, onde ambas são definidas, possuem as seguintes propriedades.*

(a) $P_T = P \circ P$.

(b) P e P_T têm os mesmos pontos fixos com as mesmas propriedades de estabilidade.

Demonstração. Ver [5].

Da relação entre P_T e P , a partir de agora usaremos P ao invés de P_T . Para este fim, são introduzidas as funções auxiliares

$$\varphi_\gamma(\tau) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \sin \tau)$$

e

$$\psi_\gamma(\tau) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cosh \tau - \gamma \sinh \tau)$$

com as propriedades de simetria

$$\varphi_{-\gamma}(-\tau) = \varphi_\gamma(\tau), \quad \varphi_{-\gamma}(\tau) = \varphi_\gamma(-\tau)$$

e

$$\psi_{-\gamma}(-\tau) = \psi_\gamma(\tau), \quad \psi_{-\gamma}(\tau) = \psi_\gamma(-\tau),$$

para $\gamma, \tau \in \mathbb{R}$ e os gráficos estão nas Figuras 3.10 e 3.11.

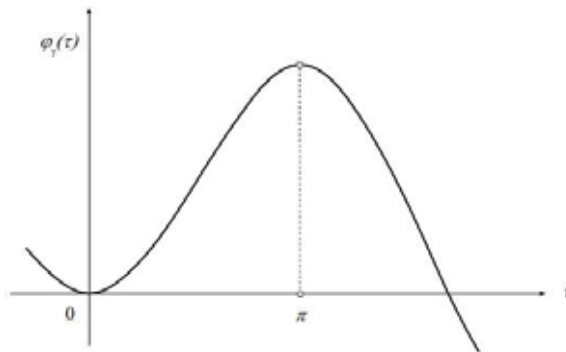


Figura 3.10: A função $\varphi_\gamma(\tau)$ para $\gamma > 0$. Fonte: referência [5].

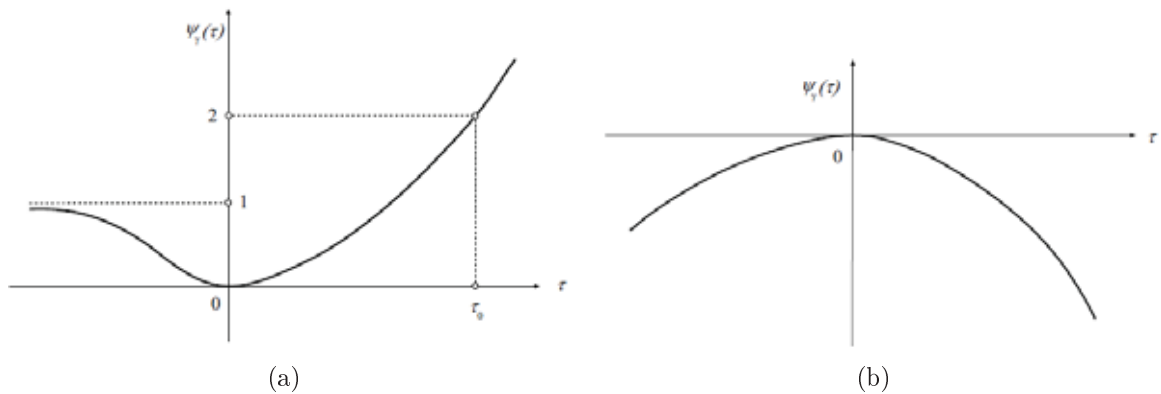


Figura 3.11: (a) A função $\psi_\gamma(\tau)$ para $\gamma > 1$. (b) A função $\psi_\gamma(\tau)$ para $0 < \gamma < 10$. Fonte: referência [5].

O primeiro caso considerado será o foco-sela-foco.

Teorema 2 (Freire et al., 2002) (*Foco-sela-foco com $0 < |\beta| < 1$*) Consideramos o sistema (3.8) com $D_C < 0$, $D_E > 0$ e $\Delta_E < 0$. Então o sistema tem um ponto de equilíbrio em cada zona. O ponto de equilíbrio na origem é um ponto de sela e os equilíbrios nas zonas externas são focos. Além disso, se $|\beta| < 1$ então $T_C \neq 0$ e as seguintes afirmações se verificam.

- (a) (*Curvas fechadas em duas zonas*) Se $T_C T_E < 0$, então um e somente um dos seguintes casos ocorrem:
 - (a1) *Existem dois ciclos limites instáveis, mutuamente simétricos, englobando cada ponto de equilíbrio nas zonas externas e não há órbitas homoclínicas (ver Figura 3.12(a)).*
 - (a2) *Existem duas órbitas homoclínicas, mutuamente simétricas, englobando cada ponto de equilíbrio nas zonas externas (ver Figura 3.12(b)).*
 - (a3) *Não existem nem ciclos limites nem órbitas homoclínicas (ver Figura 3.13(a)).*
- (b) (*Curvas fechadas em três zonas*) Se $T_C T_E < 0$, então um e somente um dos seguintes casos ocorrem:
 - (b1) *Existem dois ciclos limites instáveis mutuamente simétricos englobando cada ponto de equilíbrio nas zonas externas, e um terceiro ciclo limite estável englobando o terceiro ponto de equilíbrio e os dois outros ciclos limites (ver Figura 3.13(b)).*
 - (b2) *Existem duas órbitas homoclínicas mutuamente simétricas englobando cada ponto de equilíbrio nas zonas externas, e um ciclo limite estável englobando o terceiro ponto de equilíbrio e os duas órbitas homoclínicas (ver Figura 3.14(a)).*
 - (b3) *Existem dois ciclos limites englobando os três equilíbrios. O externo é estável e o interno é instável e não existem órbitas homoclínicas (ver Figura 3.14(b)).*
 - (b4) *Existe um único ciclo limite semiestável e não existem órbitas homoclínicas (ver Figura 3.15(a)).*
 - (b5) *Não existem ciclos limites nem órbitas homoclínicas (ver Figura 3.15(b)).*
- (c) *Se $T_E = 0$, então cada ponto de equilíbrio na zona externa é englobado por um continuum de órbitas periódicas que se encontram nestas zonas, e não existem ciclos limites nem órbitas homoclínicas.*
- (d) *Se $T_E > 0$ não existem ciclos limites nem órbitas homoclínicas.*

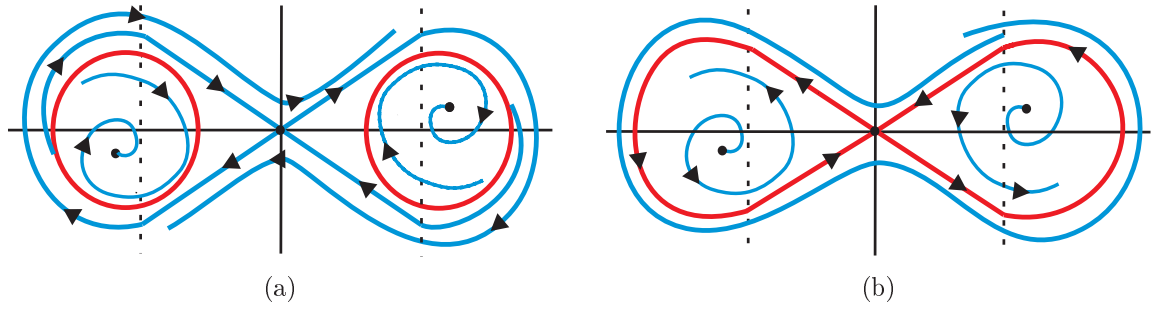


Figura 3.12: Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existem dois ciclos limites instáveis, mutuamente simétricos, afirmação (a1) do Teorema 2. (b) Existem duas órbitas homoclínicas, mutuamente simétricas, afirmação (a2) do Teorema 2.

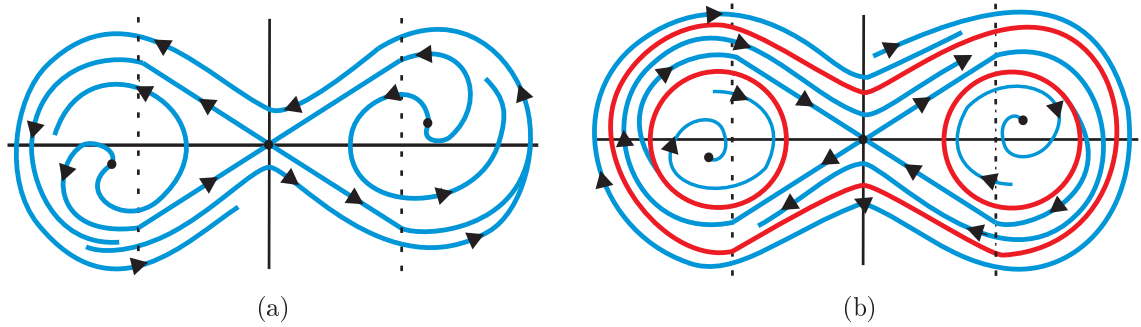


Figura 3.13: Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Não existem nem ciclos limites nem órbitas homoclínicas, afirmação (a3) do Teorema 2. (b) Existem um ciclo limite estável englobando a origem e dois ciclos limites instáveis que englobam cada ponto de equilíbrio na zona externa, afirmação (b1) do Teorema 2.

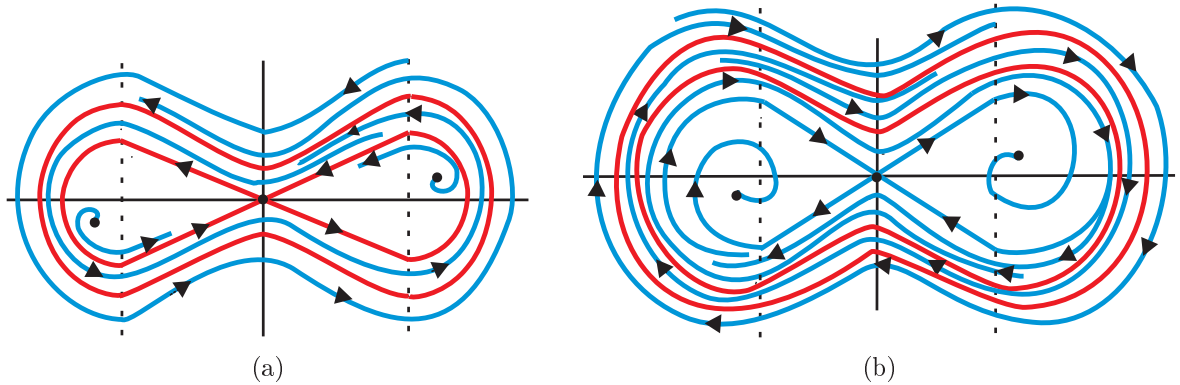


Figura 3.14: Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existe um ciclo limite estável englobando a origem e os duas órbitas homoclínicas que englobam cada ponto de equilíbrio na zona externa, afirmação (b2) do Teorema 2. (b) Existe dois ciclos limites cercando os três pontos de equilíbrio, o externo é estável e o interno é instável, afirmação (b3) do Teorema 2.

Demonstração. O sistema (3.8) tem um ponto de equilíbrio em cada zona, na zona central a origem é uma sela, $D_C < 0$, nas zonas externas os equilíbrios são focos ou centros, $\Delta_E < 0$. Se $|\beta| < 1$, supondo que $T_C = \mu_C - \beta = 0$ temos que $D_C = 1 - \beta^2 > 0$, o que contradiz a hipótese de $D_C < 0$. Portanto $T_C \neq 0$.

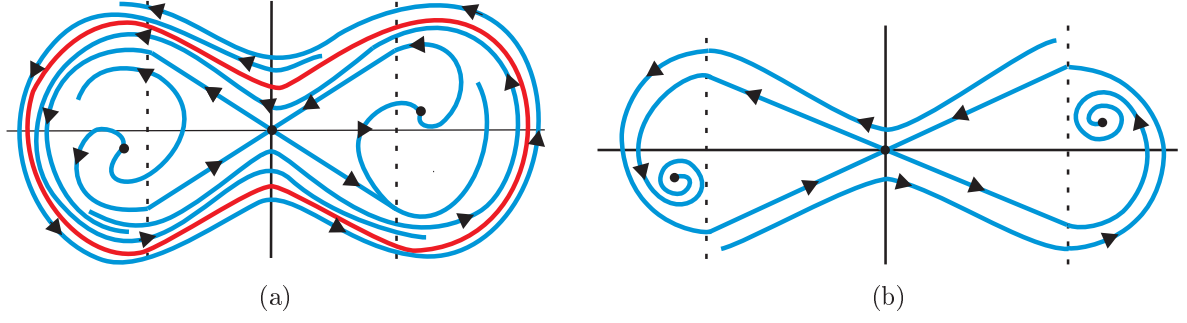


Figura 3.15: Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existe um único ciclo limite semi-estável, afirmação (b4) do Teorema 2. (b) Não existem ciclos limites nem órbitas homoclínicas, afirmação (b5) do Teorema 2.

A simetria do sistema (3.8) permite considerar apenas o caso $0 < \beta < 1$. Assim, de $D_C = 1 - \mu_C \beta < 0$, pode-se concluir que $\mu_C > 1/\beta > 1 > \beta$, e assim $T_C = \mu_C - \beta > 0$.

(a) A prova deste item segue da Proposição 20 de [4], neste artigo o estudo é feito para duas zonas.

(a1) O item (b2) da Proposição 20 de [4] afirma que não existem órbitas homoclínicas e que existe um ciclo limite na zona de foco. Logo, neste caso, haverá um ciclo limite em cada zona de foco (zonas externas) que são mutuamente simétricos (por causa da simetria do sistema) e não existem órbitas homoclínicas.

(a2) A afirmação (b3) da Proposição 20 de [4], garante que em duas zonas, com um ponto de sela em uma zona e um foco na outra zona, existe uma órbita homoclínica englobando o foco e não existem órbitas periódicas. Portanto, para o caso foco-sela-foco, existem duas órbitas homoclínicas englobando os pontos nas zonas externas. Além disso, na Proposição 27 de [4], os autores deduzem que a situação (a2) aparece exatamente quando $\mu_E = h(\mu_C)$, onde a função

$$h : \left(\frac{1}{\beta}, \infty \right) \rightarrow (-2 - \beta, \mu^*),$$

que corresponde a uma dupla órbita homoclínica, é definida implicitamente pela equação

$$\pi + \cot^{-1} \frac{4 - (\mu_C + \beta)(\mu_E + \beta)}{4\omega_C\omega_E} + \frac{\omega_E}{T_E} \log \left(\frac{2\omega_C\beta - \omega_C\beta + 2 - \beta^2}{\mu_C - \beta - 2\omega_C} \right)^2$$

e $\mu^* \in (-2 - \beta, \beta)$.

(a3) A sentença (b1) da Proposição 20 de [4] afirma que não há nem órbita homoclínica e nem ciclos limites no caso foco-sela, assim no caso foco-sela-foco também não há.

(b) Por hipótese, tem-se que $T_C T_E < 0$, então $T_E < 0$, pois $T_C > 0$. De $\Delta_E < 0$ e $T_E < 0$, é preciso considerar apenas os valores de μ_E tal que $-2 - \beta < \mu_E < \beta$.

Como os pontos de equilíbrio nas zonas externas são focos, toma-se como valores iniciais $(x(0), y(0)) = (-1, p - \mu_C)$ com $p \geq 0$ (Figura 3.9) na fronteira $x = -1$, a órbita que envolve a zona da esquerda chega a mesma fronteira no ponto $(-1, -q - \mu_C)$ depois

do tempo t . Das soluções (3.9), temos

$$\begin{pmatrix} -1 + \frac{\beta(\mu_C - \mu_E)}{D_E} \\ -q - \mu_C + \frac{\mu_C - \mu_E}{D_E} \end{pmatrix} = e^{\frac{T_E}{2}t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_E t) + \frac{(\beta + \mu_E)\sin(\omega_E t)}{2\omega_E} & -\sin(\omega_E t) \\ \frac{\sin(\omega_E t)}{\omega_E} & \cos(\omega_E t) - \frac{(\beta + \mu_E)\sin(\omega_E t)}{2\omega_E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + \frac{\beta(\mu_C - \mu_E)}{D_E} \\ p - \mu_C + \frac{\mu_C - \mu_E}{D_E} \end{pmatrix}$$

ou equivalentemente

$$\begin{pmatrix} -\frac{D_C}{D_E} \\ -q - \frac{D_C\mu_E}{D_E} \end{pmatrix} = e^{\frac{T_E}{2}t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_E t) + \frac{(\beta + \mu_E)\sin(\omega_E t)}{2\omega_E} & -\sin(\omega_E t) \\ \frac{\sin(\omega_E t)}{\omega_E} & \cos(\omega_E t) - \frac{(\beta + \mu_E)\sin(\omega_E t)}{2\omega_E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{D_C}{D_E} \\ p - \frac{D_C\mu_E}{D_E} \end{pmatrix}$$

que permite escrever p e q da forma

$$p(\tau_E) = \frac{\omega_E D_C e^{-\gamma_E \tau_E} \varphi_{\gamma_E}(\tau_E)}{D_E \sin(\tau_E)}, \quad q(\tau_E) = \frac{\omega_E D_C e^{\gamma_E \tau_E} \varphi_{-\gamma_E}(\tau_E)}{D_E \sin(\tau_E)},$$

com $\gamma_E = \frac{T_E}{2\omega_E} < 0$ e $\tau_E = \omega_E t \in (0, \pi)$, onde t é o tempo de passagem das órbitas na zona $x \leq -1$.

De $P_E(p) = q$ tem-se que $P_E^{-1}(q) = p$ e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} (P_E^{-1})'(q) &= \frac{dp/d\tau_E}{dq/d\tau_E} \\ &= \frac{\omega_E D_C \varphi_{-\gamma_E}(\tau_E)}{D_E \sin^2(\tau_E)} \frac{D_E \sin^2(\tau_E)}{\omega_E D_C \varphi_{\gamma_E}(\tau_E)} \\ &= \frac{\varphi_{-\gamma_E}(\tau_E)}{\varphi_{\gamma_E}(\tau_E)} \\ &= \frac{q}{p} e^{-2\gamma_E \tau_E}, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} (P_E^{-1})'(q) = e^{-\gamma_E \pi} > 1, \quad (P_E^{-1})''(q) > 0.$$

Consequentemente $P_E''(p) < 0$, porque $P_E'(p) > 0$.

Da mesma forma, toma-se $(x(0), y(0)) = (-1, -q - \mu_C)$ como valores iniciais, que pelo fluxo na zona central é levado no ponto $(1, -s + \mu_C)$. Agora, usando (3.9), a transformação de retorno $s = Q_C(q)$ é definida pelas equações paramétricas

$$q(\tau_C) = \frac{\omega_C e^{-\gamma_C \tau_C} (2 - \psi_{\gamma_C}(\tau_C))}{\sinh(\tau_C)}, \quad s(\tau_C) = \frac{\omega_C e^{\gamma_C \tau_C} (2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C))}{\sinh(\tau_C)}, \quad (3.15)$$

com $\gamma_C = \frac{T_C}{2\omega_C} > 0$ e $\tau_C = \omega_C t$, onde t é o tempo da trajetória na zona central.

Por outro lado, o sistema tem duas retas invariantes associadas ao ponto sela que corta a fronteira $x = -1$ nos pontos

$$y_+ = \lambda_+ - \mu_C \quad \text{e} \quad y_- = \lambda_- - \mu_C \quad (3.16)$$

onde $\lambda_{\pm}$ são autovalores da matriz A_C . Nesta proposição será utilizada a notação $\hat{p} = \lambda_+$ e $\hat{q} = \lambda_-$.

Está claro que para analisar ciclos limites em três zonas, deve-se considerar apenas as situações em que $q > \hat{q}$.

De (3.15) e (3.16), tem-se

$$\lim_{\tau_C \rightarrow +\infty} q(\tau_C) = \hat{q} \quad \text{e} \quad \lim_{\tau_C \rightarrow 0} q(\tau_C) = +\infty.$$

Depois de alguns cálculos, tem-se

$$Q'_C(q) = \frac{2 - \psi_{\gamma_C}(\tau_C)}{2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C)},$$

com

$$\lim_{q \rightarrow \hat{q}} Q'_C(q) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} Q'_C(q) = 1.$$

A segunda derivada de $Q_C(q)$ é dada pela expressão

$$Q''_C(q) = \frac{2(\gamma_C^2 - 1)\sinh^3(\tau_C)[\sinh(\gamma_C\tau_C) + \gamma_C\sinh(\tau_C)]}{\omega_C[2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C)]^3}.$$

Como $D_C < 0$ e $T_C > 0$ tem-se $0 < \gamma_C < 1$ e das propriedades da função ψ_{γ} , tem-se $\psi_{-\gamma}(\tau) < 0$ e então $Q''_C(q) < 0$.

Agora, serão consideradas as funções $z(p) = P(p) - p$ para $p \in (P_E^{-1}(\hat{q}), +\infty)$. Assim

$$\begin{aligned} z'(p) &= P'(p) - 1 \\ &= Q'_C(P_E(p))P'_E(p) - 1 \\ &= Q'_C(q)\frac{1}{(P_E^{-1}(q))'} - 1, \end{aligned}$$

e então, tem-se

$$\lim_{p \rightarrow P_E^{-1}} z'(p) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} z'(p) = \frac{1}{e^{-\gamma_E\pi}} - 1 < 0,$$

o que indica que existe pelo menos um ponto crítico $\bar{p} \in (P_E^{-1}, +\infty)$.

A segunda derivada de $z(p)$ é

$$\begin{aligned} z''(p) &= P''(p) \\ &= Q''_C(q)(P'_E(p))^2 + Q'_C(q)P''_E(p) < 0, \end{aligned}$$

pois $Q_c''(q) < 0$, $Q_C'(q) > 0$ e $P_E''(p) < 0$. Então, o ponto crítico é único e $z(p) \leq z(\bar{p})$ para todo $p \geq P_E^{-1}(\hat{q})$. Tem-se então os seguintes casos a considerar.

(b1) Se $\mu_E \in (h(\mu_C), \beta)$. A inequação $\mu_E > h(\mu_C)$ implica que $P_E^{-1}(\hat{q}) < \hat{p}$. Portanto,

$$\lim_{p \rightarrow P_E^{-1}(\hat{q})} (P(p) - p) = \hat{p} - P_E^{-1}(\hat{q}) > 0$$

isto é, $z(p) = P(p) - p > 0$ quando p está próximo de $P_E^{-1}(\hat{q})$. Logo, o valor máximo de $z(\bar{p})$ é positivo. Então, no intervalo $[P_E^{-1}(\hat{q}), \bar{p}]$, a função $z(p)$ é positiva, enquanto o intervalo $(\bar{p}, \infty)$ é estritamente decrescente. Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} z(p) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p \left(\frac{P(p)}{p} - 1 \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p(P'(p) - 1) = -\infty, \end{aligned} \quad (3.17)$$

então, existe um único $p^* \in (\bar{p}, \infty)$ tal que $z(p^*) = 0$. Portanto, o sistema tem um único ciclo limite estável com partes nas três zonas.

(b2) Como neste caso, existem duas órbitas homoclínicas mutuamente simétricas englobando os pontos de equilíbrio nas zonas externas, pela Proposição 20 de [4], tem-se que $h(\mu_C) = \mu_E$ e portanto $P_E^{-1}(\hat{q}) = \hat{p}$. Então, $z(\hat{p}) = P(\hat{p}) - \hat{p} = 0$, e o valor máximo de $z(\bar{p})$ é positivo. Logo, no intervalo $(P_E^{-1}(\hat{q}), \bar{p})$, a função $z(p)$ é positiva, enquanto o intervalo $(\bar{p}, \infty)$ é estritamente decrescente. Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} z(p) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p \left(\frac{P(p)}{p} - 1 \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p(P'(p) - 1) = -\infty, \end{aligned}$$

então, existe um único $p^* \in (\bar{p}, \infty)$ tal que $z(p^*) = 0$. Portanto, o sistema tem um único ciclo limite estável com partes nas três zonas.

Nos casos (b3) e (b4), tem-se que $\mu_E < h(\mu_C)$ o que implica que $P_E^{-1}(\hat{q}) > \hat{p}$. E então

$$\lim_{p \rightarrow P_E^{-1}(\hat{q})} (P(p) - p) = \hat{p} - P_E^{-1}(\hat{q}) < 0$$

isto é, $z(p) = P(p) - p < 0$ quando p está próximo de $P_E^{-1}(\hat{q})$.

(b3) Neste caso, considera-se que $-2 - \beta < \mu_E < h(\mu_C)$, com μ_E suficientemente perto de $h(\mu_C)$. Pela continuidade, o valor máximo $z(\bar{p})$ ainda é positivo. Como a função $z(p)$ é monotonamente crescente no intervalo $[P_E^{-1}(\hat{q}), \bar{p}]$ existe um único ponto p_1^* neste intervalo, tal que $z(p_1^*) = 0$. Como (3.17) também é válida para este caso, temos que existe $p_2^* \in (\bar{p}, \infty)$ com $z(p_2^*) = 0$. Portanto, como $z(p)$ tem duas raízes, existe um ciclo limite instável correspondente a p_1^* englobando os três equilíbrios e outro ciclo limite estável correspondente a p_2^* englobando o primeiro ciclo limite.

(b4) Consideremos $-2-\beta < \mu_E < h(\mu_C)$, com μ_E suficientemente perto de $-2-\beta$. Como é mostrado em [5] a transformação Q_C tem uma assíntota. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{Q_C(q)}{q} &= \lim_{\tau_C \rightarrow 0} \frac{s(\tau_C)}{q(\tau_C)} \\ &= \lim_{\tau_C \rightarrow 0} \frac{e^{2\gamma_C \tau_C} (2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C))}{2 - \psi_{\gamma_C}(\tau_C)} = 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow +\infty} (Q_C(q) - q) &= \lim_{\tau_C \rightarrow 0} (s(\tau_C) - q(\tau_C)) \\ &= \lim_{\tau_C \rightarrow 0} \frac{\omega_C}{\sinh(\tau_C)} (e^{\gamma_C \tau_C} (2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C)) - e^{-\gamma_C \tau_C} (2 - \psi_{\gamma_C}(\tau_C))) \\ &= \lim_{\tau_C \rightarrow 0} \frac{\omega_C}{\sinh(\tau_C)} (e^{\gamma_C \tau_C} - e^{-\gamma_C \tau_C} + 2\gamma_C \sinh(\tau_C)) \\ &= \lim_{\tau_C \rightarrow 0} \omega_C \left(\frac{2\sinh(\gamma_C \tau_C)}{\sinh(\tau_C)} + 2\gamma_C \right) \\ &= \lim_{\tau_C \rightarrow 0} T_C \left(\frac{\sinh(\gamma_C \tau_C)}{\gamma_C \sinh(\tau_C)} + 1 \right) \\ &= 2T_C. \end{aligned}$$

Portanto, a reta $s_a = q + 2T_C$ é uma assíntota para Q_C . Além disso, como $Q_C''(q) < 0$, tem-se $Q_C(q) < s_a$, para todo $q > \hat{q}$. Agora, analisaremos o sinal da função

$$z(p) = P(p) - p = Q_C(P_E(p)) - P_E^{-1}(q) = Q_C(q) - P_E^{-1}(q). \quad (3.18)$$

Considerando a inequação

$$\begin{aligned} Q_C(q) - P_E^{-1}(q) &< q + 2T_C - P_E^{-1}(q) \\ &= 2T_C + \frac{D_C \omega_E}{D_E \sinh(\tau_E)} (e^{\gamma_E \tau_E} - e^{-\gamma_E \tau_E} - 2\gamma_E \sinh(\tau_E)) \\ &= 2T_C + \frac{D_C \omega_E}{D_E} \left(\frac{e^{\gamma_E \tau_E} - e^{-\gamma_E \tau_E}}{\sinh(\tau_E)} - 2\gamma_E \right) \\ &= 2T_C + \frac{D_C \omega_E \gamma_E}{D_E} \left(\frac{2(e^{\gamma_E \tau_E} - e^{-\gamma_E \tau_E})}{2\gamma_E \sinh(\tau_E)} - 2 \right) \\ &= 2T_C + \frac{D_C T_E}{2D_E} (-2) \left(1 - \frac{\sinh(\gamma_E \tau_E)}{\gamma_E \sinh(\tau_E)} \right) \\ &= 2T_C - T_E \frac{D_C}{D_E} \left(1 - \frac{\sinh(\gamma_E \tau_E)}{\gamma_E \sinh(\tau_E)} \right), \end{aligned}$$

onde $\pi < \tau_E < 2\pi$, como $\tau_E \in (\pi, 2\pi)$ a seguinte inequação é válida

$$1 - \frac{\sinh(\gamma_E \tau_E)}{\gamma_E \sinh(\tau_E)} > 1 + \frac{\sinh(\gamma_E \pi)}{\gamma_E}.$$

Logo

$$Q_C - P_E^{-1}(q) < 2T_C - T_E \frac{D_C}{D_E} \left(1 + \frac{\sinh(\gamma_E \pi)}{\gamma_E} \right),$$

que juntamente com

$$\lim_{\mu_E \rightarrow -(2-\beta)} \left(1 + \frac{\sinh(\gamma_E \pi)}{\gamma_E} \right) = +\infty$$

permite concluir que para μ_E suficientemente perto de $-2 - \beta$ tem-se $z(p) < 0$. O que exclui a existência de um ponto fixo de P . Na afirmação (b3) foi mostrado que se $\mu_E < h(\mu_C)$ e μ_E está suficientemente perto de $h(\mu_C)$, o valor máximo de $z(p)$ ainda é positivo. Agora foi mostrado que para $\mu_E < h(\mu_C)$ e μ_E suficientemente perto de $-2 - \beta$, o valor máximo da função $z(p)$ é negativo. Então, por causa da continuidade, deve existir um valor de $\mu_E \in (-2 - \beta, h(\mu_C))$ tal que o valor máximo $z(\bar{p}) = 0$, o que corresponde a existência de pelo menos um ciclo limite semiestável.

(a5) Assumindo que $\mu_E > -2 - \beta$ com μ_E suficientemente perto de $-2 - \beta$. Foi mostrado na última afirmação que o valor máximo de z é negativo e então a equação $z(p) = 0$ não tem raiz. Portanto, não existe uma órbita invariante fechada. Os casos (b) e (c) são semelhantes aos casos (a2) e (a3) da Proposição 6. ■

Exemplo 6 *A seguir ilustraremos alguns dos casos do Teorema 2, assumindo valores de β , μ_E e μ_C para o sistema (3.8) que satisfaçam as hipóteses da proposição.*

Caso b4: $\mu_E = -1$, $\mu_C = 5$ e $\beta = \frac{1}{4}$.

Como $T_C T_E < 0$ temos que ou acontece o caso (a) ou o caso (b). No entanto, ao analisarmos o retrato de fase mostrado na Figura 3.16, observamos que existe um único ciclo limite semiestável e não há órbitas homoclínicas, ou seja, temos o caso (b4).

Caso b5: $\mu_E = -1$, $\mu_C = 3$ e $\beta = 0.9$.

Temos que $T_E = -1.9$, portanto temos que este sistema não se encaixa nos casos (c) e (d). Analisando o retrato de fase, obtido com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e passo 0.01, temos que o sistema (3.8), com $\mu_E = -1$, $\mu_C = 3$ e $\beta = 0.9$, não tem ciclos limites nem órbitas homoclínicas. Logo, temos o caso (b5). Ver Figura 3.17.

Caso c: $\mu_E = \frac{1}{2}$, $\mu_C = 3$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

Podemos observar na Figura 3.18 que cada ponto de equilíbrio na zona externa é englobado por um continuum de órbitas periódicas. Logo, o sistema (3.8) com $\mu_E = \frac{1}{2}$, $\mu_C = 3$ e $\beta = \frac{1}{2}$, representa o caso (c) do Teorema 2.

Caso d: $\mu_E = 0.1$, $\mu_C = -2$ e $\beta = -0.8$.

Com estes valores de parâmetros, temos que $T_E > 0$ e portanto ocorre o caso (d) do Teorema 2, como podemos observar no retrato de fase mostrado na Figura 3.19.

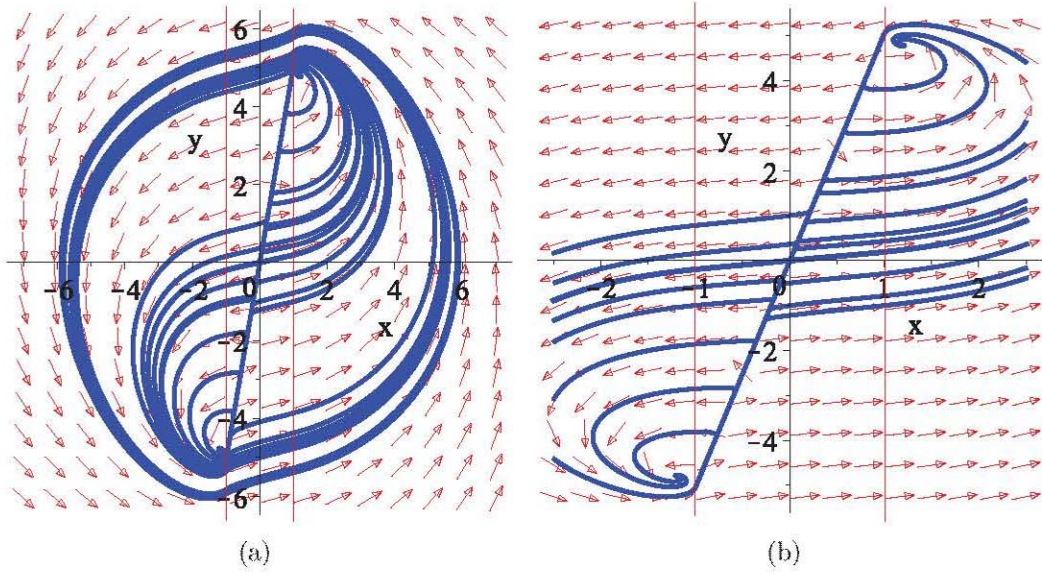


Figura 3.16: Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = -1$, $\mu_C = 5$ e $\beta = \frac{1}{4}$ que representa o caso (b4) do Teorema 2.

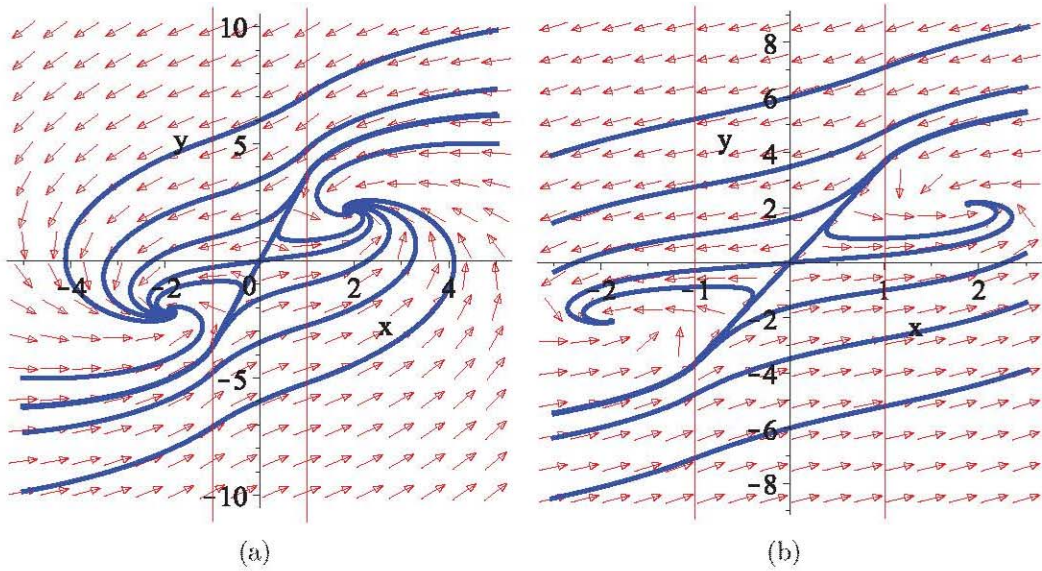


Figura 3.17: Retrato de fase do sistema (3.8) com os parâmetros $\mu_E = -1$, $\mu_C = 3$ e $\beta = 0.9$. A origem é um ponto de sela e os pontos de equilíbrio nas zonas externas são focos estáveis.

Proposição 9 (Freire et al., 2002) (*Caso foco-sela-foco com $|\beta| \geq 1$*). O sistema (3.8) com $D_C < 0$, $D_E > 0$, $\Delta_E < 0$ e $|\beta| \geq 1$, não pode ter curvas invariantes fechadas.

Demonstração. Consideramos apenas o caso $\beta \geq 1$. Neste caso o Teorema 2 de [5] exclui a ideia de que pode haver curvas invariantes fechadas em apenas duas zonas. Provemos que o sistema não tem órbitas invariantes fechadas que estejam nas três zonas. Para isto, consideramos as ideias usadas para provar a afirmação (a4) do Teorema 2. Mais uma vez

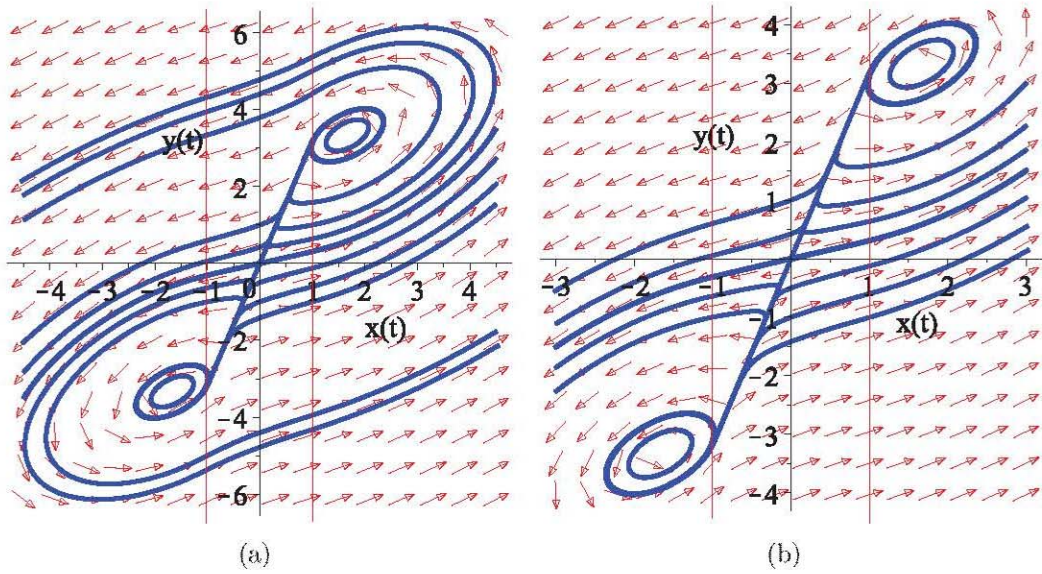


Figura 3.18: Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_E = \frac{1}{2}$, $\mu_C = 3$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Cada ponto de equilíbrio na zona externa é englobado por um *continuum* de órbitas periódicas.

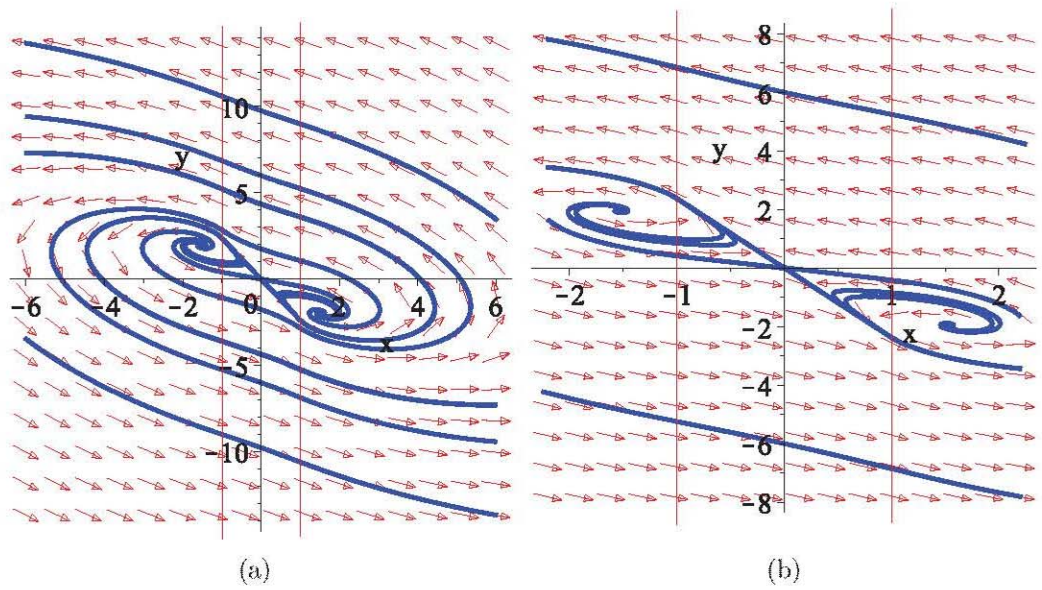


Figura 3.19: Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_E = 0.1$, $\mu_C = -2$ e $\beta = -0.8$, que representa o caso (d) do Teorema 2.

será analisado o sinal da função (3.18). Notemos que:

$$1 + \frac{\sinh(\gamma_E \pi)}{\gamma_E} > 1 + \pi, \quad \text{para todo } \gamma_E \in \mathbb{R},$$

e assim, é possível escrever

$$\begin{aligned}
 z(p) &< 2T_C - T_E \frac{D_C}{D_E}(1 + \pi) \\
 &= 2T_C \frac{(1 + \pi)}{(1 + \pi)} - T_E \frac{D_C}{D_E}(1 + \pi) \\
 &= 2T_C(1 + \pi) \left(\frac{2}{(1 + \pi)} - \frac{T_E D_C}{D_E T_C} \right), \quad \forall p > P_E^{-1}(\hat{q}).
 \end{aligned}$$

Como $D_E > 0$, então $\mu_E < 1/\beta$ e assim, $T_E = 1 - \beta^2 \leq 0$ já que $\beta \geq 1$. Logo, tem-se que $(T_E/D_E) < 0$, e esta razão é decrescente com μ_E . De $-2 - \beta < \mu_E < 2 - \beta$ temos que

$$\frac{\mu_E - \beta}{\beta + 1} < \frac{-2}{\beta + 1}$$

e também que

$$\frac{1}{-\mu_E \beta} < \frac{1}{\beta + 1}$$

e portanto,

$$\frac{T_E}{D_E} = \frac{\mu_E - \beta}{-\mu_E \beta + 1} \leq \frac{-2}{\beta + 1} \quad \text{para} \quad -2 - \beta < \mu_E < 2 - \beta.$$

Por outro lado, a razão $(D_C/T_C) < 0$, pois $D_C > 0$ e $T_C < 0$, e é crescente com μ_C . De $D_C < 0$ e $\mu_C > 1/\beta$ tem-se

$$\frac{1}{\mu_C - \beta} < \frac{-\beta}{1 - \beta^2}$$

e de $T_C < 0$ e $\mu_C > \beta$ encontra-se

$$1 - \mu_C \beta < 1 - \beta^2.$$

As duas últimas desigualdades permitem concluir que

$$\frac{D_C}{T_C} = \frac{1 - \mu_C \beta}{\mu_C - \beta} \leq -\beta \quad \text{para} \quad \beta < \mu_C.$$

Então,

$$z(p) < T_C(1 + \pi) \left(\frac{2}{1 + \pi} - \frac{2\beta}{\beta + 1} \right) < 0, \quad \forall \beta \geq 1,$$

e assim $P(p) < p$ para todo $p > P_E^{-1}(\hat{q})$, o que impossibilita a existência de curvas invariantes fechadas. ■

Lema 1 *Se $0 < |\beta| < 1$, então existe um certo valor $\mu_{Ca} < \beta$ e $\mu_{Ea} > 1/\beta$ junto com a função $het : (-\infty, \mu_{Ca}) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que o sistema (3.8) tem uma órbita heteroclínica se e somente se os parâmetros μ_E e μ_C verifica a igualdade $\mu_E = het(\mu_C)$. Além disso, a função het tem como assíntota a reta $\mu_E = \mu_{Ea}$ quando $\mu_C \rightarrow -\infty$, e $\lim_{\mu_C \rightarrow \mu_{Ca}^-} het(\mu_C) = +\infty$.*

Observação 2 Como visto em [4] quando $\text{het}(\mu_C) = \mu_E$ a função $\text{het} : (-\infty, \mu_{Ca}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada implicitamente por

$$\coth^{-1} \left(\frac{4 - (\mu_E + \beta)(\mu_C + \beta)}{4\omega_C\omega_E} \right) - \frac{\omega_C}{\mu_C - \beta} \log \frac{(\beta^2 + 1)(\mu_E + \beta) - 4\beta + 2\omega_E(\beta^2 - 1)}{(\beta^2 + 1)(\mu_E + \beta) - 4\beta - 2\omega_E(\beta^2 - 1)} = 0.$$

Lema 2 Se $|\beta| \geq 1$, então o sistema (3.8) não pode ter órbitas heteroclínicas.

Proposição 10 (Freire et al., 2002) (O caso sela-antissela-sela com $0 < |\beta| < 1$). Consideremos o sistema (3.8) com $D_C > 0$ e $D_E < 0$. Então o sistema tem um ponto de equilíbrio em cada zona. O ponto de equilíbrio na origem é uma antissela (nó, foco ou centro) e os equilíbrios nas zonas externas são pontos de sela. Além disso, se $|\beta| < 1$, então $T_E \neq 0$ e as seguintes condições ocorrem.

- (a) Se $T_C T_E < 0$, um e somente um dos seguintes casos acontecem:
- (a1) Existe um único ciclo limite instável englobando o ponto de equilíbrio na origem e não há órbitas heteroclínicas (ver Figura 3.20(a)).
 - (a2) Existe um único loop heteroclínico e não há ciclos limite (ver Figura 3.20(b)).
 - (a3) Não há ciclos limites nem órbitas heteroclínicas (ver Figura 3.21).
- (b) Se $T_C = 0$, o ponto de equilíbrio na origem é englobado por um continuum de órbitas periódicas que fica na zona central.
- (c) Se $T_C T_E > 0$, não há nem ciclos limites nem órbitas heteroclínicas.

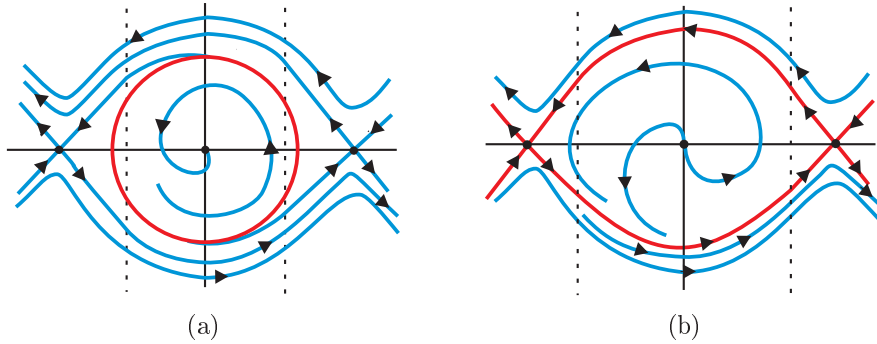


Figura 3.20: Esboço do retrato de fase do sistema (3.8). (a) Existe um ciclo limite instável englobando o ponto de equilíbrio na origem, afirmação (a1) da Proposição 10. (b) Existe um loop heteroclínico, afirmação (a2) da Proposição 10.

Demonstração. Da Proposição 5, o sistema tem um ponto de equilíbrio em cada zona. Como $D_E < 0$ os pontos de equilíbrio nas zonas externas são pontos de sela, enquanto que na zona central o equilíbrio é uma antissela, pois $D_C > 0$. Novamente, será considerado o caso $0 < \beta < 1$, devido à simetria. Assim, $D_E = -\mu_E \beta + 1 < 0$ o que implica em $T_E > 0$.

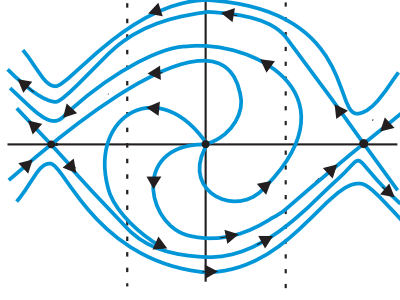


Figura 3.21: Esboço do retrato de fase do sistema (3.8), não existem ciclos limites e nem órbitas heteroclínicas, afirmação (a3) da Proposição 10.

As duas semirretas invariantes do ponto de sela na zona externa da esquerda, cortam a fronteira $x = -1$ nos pontos

$$\begin{aligned} y_+ &= \frac{D_C}{D_E} \lambda_- - \mu_C = \hat{p} - \mu_C, \\ y_- &= \frac{D_C}{D_E} \lambda_+ - \mu_C = -\hat{q} - \mu_C, \end{aligned}$$

onde $\lambda_{\pm}$ são os autovalores da matriz A_E .

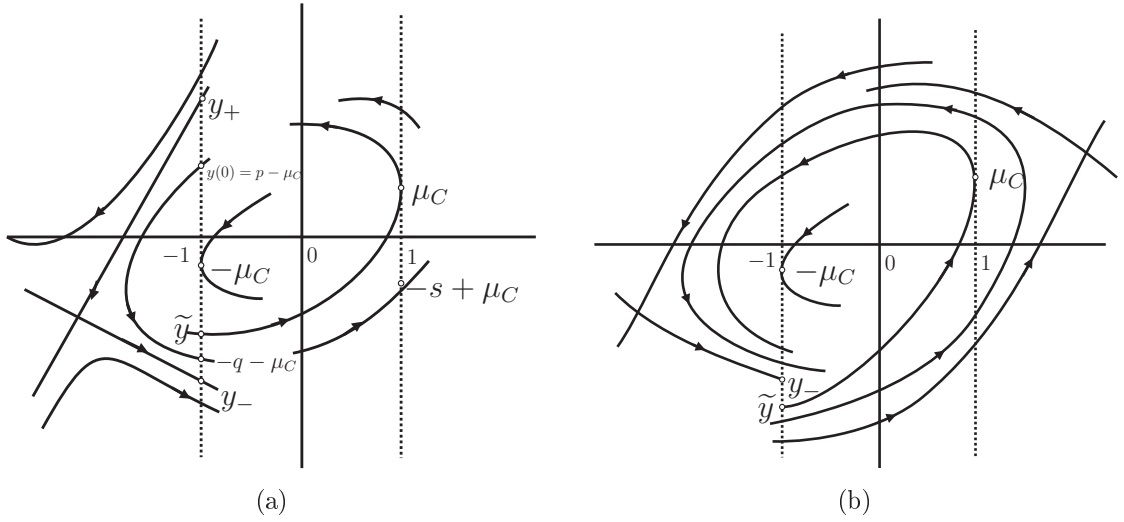


Figura 3.22: Retrato de fase de antissela-sela-antissela (a) $\tilde{y} > y_-$ (b) $\tilde{y} < y_-$.

Tomando $(x(0), y(0)) = (-1, p - \mu_C)$ como valores iniciais da órbita, com $-\mu_C \leq y(0) \leq y_+$, (veja Figura 3.22(a)) a órbita evolui na zona externa voltando à mesma fronteira no ponto $(-1, -q - \mu_C)$. Deste modo, usando (3.9) obtemos as equações paramétricas da transformação de retorno P_E :

$$\begin{aligned} p(\tau_E) &= \frac{\omega_E D_C e^{-\gamma_E \tau_E} \psi_{\gamma_E}(\tau_E)}{D_E \sinh(\tau_E)}, \\ q(\tau_E) &= \frac{\omega_E D_C e^{\gamma_E \tau_E} \psi_{-\gamma_E}(\tau_E)}{D_E \sinh(\tau_E)}, \end{aligned}$$

e fica claro que P_E é definido para $0 < p < \hat{p}$.

Das relações,

$$\lim_{\tau_E \rightarrow +\infty} p(\tau_E) = \hat{p}, \quad \lim_{\tau_E \rightarrow 0^+} p(\tau_E) = 0 \quad \text{e} \quad P'_E(p) = \frac{\psi_{\gamma_E}(\tau_E)}{\psi_{-\gamma_E}(\tau_E)}$$

tem-se

$$\lim_{p \rightarrow 0} P'_E(p) = \lim_{\tau_E \rightarrow 0} \frac{\psi_{\gamma_E}(\tau_E)}{\psi_{-\gamma_E}(\tau_E)} = 1$$

e

$$\lim_{p \rightarrow \hat{p}} P'_E(p) = \lim_{\tau_E \rightarrow \infty} \frac{\psi_{\gamma_E}(\tau_E)}{\psi_{-\gamma_E}(\tau_E)} = \infty.$$

A segunda derivada $P''_E(p)$ é dada por

$$P''_E(p) = \frac{D_E}{D_C} \frac{2(\gamma_E^2 - 1) \sinh^3(\tau_E) (\sinh(\gamma_E \tau_E) - \gamma_E \sinh(\tau_E))}{\omega_E(\psi_{-\gamma_E}(\tau_E))^3} > 0.$$

Além disso, P'_E é uma função crescente de p , com

$$1 < P'_E(p) \quad \text{para todo} \quad p \in (0, \hat{p}). \quad (3.19)$$

A órbita que passa pelo ponto $(1, \mu_C)$ é tangente à fronteira $x = 1$ e começa no ponto $(-1, \tilde{y})$ (veja as Figuras 3.22(a) e 3.22(b)). Agora, surgem dois casos, que dependem do sinal de $\tilde{y} - y_-$.

Quando $\tilde{y} \leq y_-$, as possíveis órbitas que poderiam estar em duas zonas englobam a origem, o que não é permitido (pois devido a simetria, estas curvas se cruzariam). Então o sistema não pode ter uma órbita periódica apenas em duas zonas.

Por outro lado, é claro que uma órbita começando do ponto $(-1, y)$ com $y < \tilde{y}$ chega à linha $x = 1$ e não pode retornar ao ponto inicial. Então, se $y < \tilde{y}$, o ponto $(-1, y)$ não pode pertencer a uma órbita periódica que ocupa as três zonas. Além disso, é claro que o sistema não tem órbitas heteroclínicas para $\tilde{y} \leq y_-$ (ver Figura 3.22(b)).

Como o sistema tem órbitas heteroclínicas para certos parâmetros (veja Lema 1) e isto é incompatível com a condição $\tilde{y} \leq y_-$, então a condição $\tilde{y} > y_-$ deve valer para aqueles valores de parâmetros. Desta forma, a desigualdade $\tilde{y} > y_-$ será assumida. Então, através da transformação de retorno $P = Q_C \circ P_E$ pode-se ver que o sistema tem curvas invariantes fechadas. Primeiramente, considera-se o ponto de equilíbrio na origem como um nó próprio. O ponto $(-1, -q - \mu_C)$ com $y_- < y(0) \leq -\mu_C$ é o ponto inicial da órbita que atravessa a zona central até a fronteira $x = 1$ depois de um tempo τ_C , tocando o ponto $(1, -s + \mu_C)$, então usando (3.9) é possível obter as seguintes equações paramétricas da

transformação de retorno Q_C

$$\begin{aligned} q(\tau_C) &= \frac{\omega_C e^{-\gamma_C \tau_C} (2 - \psi_{\gamma_C}(\tau))}{\sinh(\tau_C)}, \\ s(\tau_C) &= \frac{\omega_C e^{\gamma_C \tau_C} (2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau))}{\sinh(\tau_C)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Denotando $\tilde{q} = -\tilde{y} - \mu_C$, é claro que para analisar os ciclos limites com partes nas três zonas é preciso considerar $q > \tilde{q}$. De (3.20) retira-se

$$\lim_{\tau_C \rightarrow 0^+} q(\tau_C) = +\infty \quad \text{e} \quad q(\tau_{C0}) = \tilde{q},$$

onde τ_{C0} é a única raiz positiva da equação $s(\tau_C) = 0$, ou seja, $2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C) = 0$.

Se o ponto na origem for um nó próprio estável, tem-se $-\gamma_C > 1$, e então T_{C0} corresponde a τ_0 na Figura 27(a). Além disso, a primeira derivada de Q'_C é dada por

$$Q'_C = \frac{2 - \psi_{\gamma_C}(\tau_C)}{2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C)},$$

com $\lim_{q \rightarrow \tilde{q}} Q'_C(q) = \infty$ e $\lim_{q \rightarrow \infty} Q'_C(q) = 1$.

Depois de alguns cálculos em [5] os autores mostraram que considerando $\gamma_C < 0$, tem-se

$$Q''_C(Q) = \frac{2(\gamma_C^2 - 1)\sinh^3(\tau_C)(\sinh(\gamma_C \tau_C) + \gamma_C \sinh(\tau))}{\omega_C (2 - \psi_{-\gamma_C}(\tau_C))^3} > 0.$$

Então, Q'_C é uma função decrescente de q com

$$1 < Q'_C(q) \quad \text{para todo} \quad q > \tilde{q}. \quad (3.21)$$

Quando o ponto de equilíbrio na origem é um nó impróprio, de modo análogo pode-se obter as seguintes equações paramétricas da transformação Q_C ,

$$\begin{aligned} q(t_C) &= \frac{e^{-\frac{T_C}{2}t} (2 - \sigma_{T_C/2}(t_C))}{t_C}, \\ s(t_C) &= \frac{e^{\frac{T_C}{2}t} (2 - \sigma_{-T_C/2}(t_C))}{t_C}, \end{aligned}$$

onde a função σ_T é definida por $\sigma_T(t) = 1 - e^{Tt}(1 - Tt)$. Finalmente, quando o ponto de equilíbrio na origem é um foco, as equações paramétricas da transformação Q_C são

$$\begin{aligned} q(\tau_C) &= \frac{\omega_C e^{-\gamma_C \tau_C} (2 - \varphi_{\gamma_C}(\tau_C))}{\sin(\tau_C)}, \\ s(\tau_C) &= \frac{\omega_C e^{\gamma_C \tau_C} (2 - \varphi_{-\gamma_C}(\tau_C))}{\sin(\tau_C)}. \end{aligned}$$

Nos dois últimos casos, a transformação Q_C verifica

$$\lim_{q \rightarrow \tilde{q}} Q'_C(q) = \infty, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} Q'_C(q) = 1$$

e

$$1 < Q'_C(q) \quad \text{para todo} \quad q > \tilde{q}.$$

Agora, considerando a transformação de Poincaré $P : [P_E^{-1}(\tilde{q})] \rightarrow [0, Q_C(\hat{q})]$ com

$$P(P_E^{-1}(\tilde{q})) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{p \rightarrow \hat{p}} P(p) = Q_C(\hat{q}).$$

Para analisar a existência de órbitas periódicas, considera-se novamente a função

$$z(p) = P(p) - p \quad \text{para} \quad p \in [P_E^{-1}(\tilde{q}), \hat{p})$$

com

$$z'(p) = Q'_C(P_E(p))P'_E(p) - 1.$$

Levando em consideração (3.19) e (3.20), tem-se

$$\begin{aligned} z(P_E^{-1}(\tilde{q})) &= -P_E^{-1}(\tilde{q}) < 0, \\ \lim_{p \rightarrow \hat{p}} z(p) &= Q_C(\hat{q}) - \hat{p}, \quad z'(p) > 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Desta forma, dependendo do sinal de $Q_C(\hat{q}) - \hat{p}$, as seguintes situações acontecem.

- (i) Quando $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} < 0$, então $z(p) < 0$ para todo $p \in [P_E^{-1}(\tilde{q}), \hat{p})$ e o sistema não tem nenhuma órbita heteroclínica nem ciclos limites.
- (ii) Quando $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} = 0$, considerando a simetria deduz-se que o sistema tem uma órbita heteroclínica.
- (iii) Quando $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} > 0$, z tem apenas uma raiz e o sistema tem um único ciclo limite.

A seguir é estabelecido que os três casos mencionados acima aparecem. Para isto, calculamos

$$\frac{d}{d\mu_E}(Q_C(\hat{q}) - \hat{p}) = \left(Q'_C(\hat{q}) \frac{d\hat{q}}{d\hat{p}} - 1 \right) \frac{d\hat{p}}{d\mu_E}. \tag{3.23}$$

Logo, para análise de z será estudado o sinal de ambos os fatores. Começando com

$$\frac{d\hat{p}}{d\mu_E} = -\frac{D_C}{2D_E\omega_E} \left(\frac{1 - \beta^2}{\lambda_+} - \beta \right).$$

De $D_E = 1 - \mu_E \beta < 0$, desde que $0 < \beta < 1$, temos

$$\mu_E - \beta > \frac{1 - \beta^2}{\beta} \quad \text{e} \quad \sqrt{(\mu_E + \beta)^2 - 4} > \frac{1 - \beta^2}{\beta}.$$

Portanto,

$$\lambda_+ = \frac{\mu_E - \beta}{2} + \frac{\sqrt{(\mu_E + \beta)^2 - 4}}{2} > \frac{1 - \beta^2}{\beta} \quad (3.24)$$

e consequentemente

$$\frac{d\hat{p}}{d\mu_E} < 0 \quad \text{para} \quad 0 < \beta < 1. \quad (3.25)$$

Por outro lado, de $\hat{p} = (D_C/D_E)\lambda_-$ e $\hat{q} = -(D_C/D_E)\lambda_+$, tem-se

$$\hat{q} = \frac{D_C(\beta\hat{p} + D_C)}{(\beta^2 - 1)\hat{p} + \beta D_C}$$

e

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{p}} = \frac{D_C^2}{((\beta^2 - 1)\hat{p} + \beta D_C)^2}.$$

Agora, analisaremos o sinal de

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{p}} - 1 = (\beta^2 - 1) \frac{(\hat{p} - (D_C + \beta\hat{p}))(\hat{p} + (D_C + \beta\hat{p}))}{((\beta^2 - 1)\hat{p} + \beta D_C)^2}. \quad (3.26)$$

O único fator que o sinal é desconhecido em (3.26) é $\hat{p} - (D_C + \beta\hat{p})$. Usando (3.24) é possível escrever

$$\begin{aligned} \hat{p} - (D_C + \beta\hat{p}) &= \hat{p}(1 - \beta) - D_C \\ &= D_C \left(\frac{1 - \beta}{\lambda_+} - 1 \right) < 0, \end{aligned}$$

e então

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{p}} > 1 \quad \text{para} \quad 0 < \beta < 1. \quad (3.27)$$

Usando (3.21), (3.25) e (3.27) é possível verificar que a expressão (3.23) é negativa, então $Q_C(\hat{q}) - \hat{p}$ é uma função decrescente de μ_E quando $0 < \beta < 1$. Nesta parte, Freire et al. [5] dividem o intervalo $-\infty < \mu_C < \beta$ em duas partes, $-\infty < \mu_C < \mu_{Ca}$ e $\mu_{Ca} \leq \mu_C < \beta$, onde μ_{Ca} é definido no Lema 1.

Começando com o intervalo $-\infty < \mu_C < \mu_{Ca}$, será considerada a função “het” definida no Lema 1. Usando a transformação de retorno Q_C , a igualdade $\mu_E = \text{het}(\mu_C)$ é equivalente a $Q_C(\hat{q}) = \hat{p}$. E como $Q_C(\hat{q}) - \hat{p}$ é uma função decrescente de μ_E , a inequação $\mu_E < \text{het}(\mu_C)$ implica que $Q_C(\hat{q}) > \hat{p}$, enquanto que a desigualdade $\mu_E > \text{het}(\mu_C)$ implica que $Q_C(\hat{q}) < \hat{p}$.

Considerando agora o outro intervalo, $\mu_{Ca} \leq \mu_C < \beta$, onde het não é definida. Por isso, $Q_C(\hat{q}) - \hat{p}$ nunca desaparece. Para fazer a análise do seu sinal, o limite é calculado

$$\lim_{\mu_E \rightarrow +\infty} (Q_C(\hat{q}) - \hat{p}) = Q_C\left(\frac{D_C}{\beta}\right) > 0,$$

e lembrando que (3.23) é negativo obtemos que $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} > 0$, sempre. Com essas ideias, conclui-se

- (a1) Se $\mu_E < het(\mu_C)$ com $-\infty < \mu_C < \mu_{Ca}$ ou $\mu_{Ca} \leq \mu_C < \beta$ tem-se $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} > 0$. Então, de (3.19) e (3.21), a transformação de Poincaré P tem um único ponto fixo $\bar{p}$ com $P'(\bar{p}) > 1$. Então o sistema (3.8) tem ciclo limite instável e não tem órbitas heteroclínicas.
- (a2) Se $\mu_E = het(\mu_C)$, então $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} = 0$ e assim, o sistema (3.8) tem uma órbita heteroclínica e não tem ciclos limites.
- (a3) Se $\mu_E > het(\mu_C)$, então $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} < 0$, e a transformação de Poincaré não tem pontos fixos, isto é, o sistema (3.8) não tem ciclos limites nem órbitas heteroclínicas.
- (b) Esta afirmação pode ser provada pelo mesmo caminho da afirmação (a2) da Proposição 6.
- (c) Se $T_C T_E > 0$, a Proposição 2 exclui a existência de órbitas periódicas isoladas.

■

Exemplo 7 Neste exemplo, escolheremos os parâmetros μ_E , μ_C e β no sistema (3.8) para que satisfaçam as hipóteses da Proposição 10.

Caso a1: $\mu_E = 3$, $\mu_C = -1$, e $\beta = \frac{1}{2}$.

Como $T_C T_E = -3.75 < 0$, então ocorre o caso (a). Observando a solução encontrada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem na Figura 3.23, notamos que existe um único ciclo limite instável englobando a origem e não há órbitas homoclínicas.

Caso b: $\mu_E = 3$, $\mu_C = \frac{1}{2}$, e $\beta = \frac{1}{2}$.

Neste caso, temos $T_C = 0$ e portanto, ocorre o caso (b) da Proposição 10, isto é, o ponto de equilíbrio na origem está englobado por um continuum de órbitas periódicas que ficam na zona central como podemos notar na Figura 3.24.

Caso c: $\mu_E = 3$, $\mu_C = 1$, e $\beta = \frac{1}{2}$.

Como $T_E T_C > 0$, neste caso não há ciclos limites nem órbitas heteroclínicas (ver Figura 3.25).

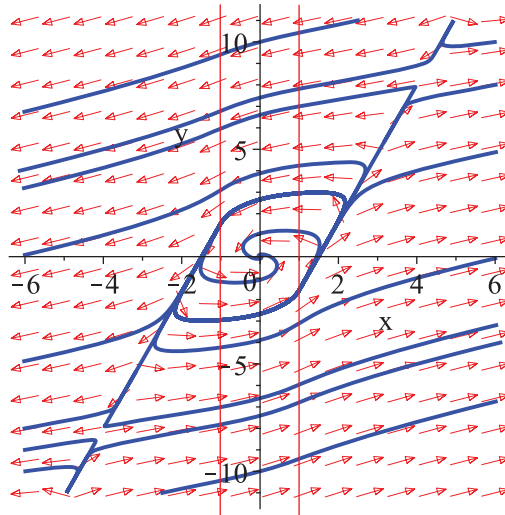


Figura 3.23: Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_E = 3$, $\mu_C = -1$, e $\beta = \frac{1}{2}$, existe um ciclo limite instável englobando a origem e os pontos de equilíbrio nas zonas externas são pontos de sela.

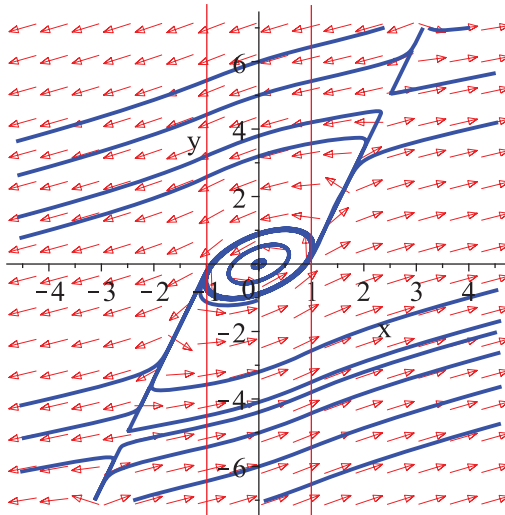


Figura 3.24: Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 3$, $\mu_C = \frac{1}{2}$, e $\beta = \frac{1}{2}$. O ponto de equilíbrio na origem englobado por um *continuum* de órbitas periódicas que ficam na zona central.

Proposição 11 (Freire et al., 2002) (*O caso sela-antissela-sela com $|\beta| \geq 1$*). *Considere o sistema (3.8) com $D_C > 0$, $D_E < 0$ e $|\beta| \geq 1$, então o sistema não pode ter curvas invariantes fechadas.*

Demonstração. Da Proposição 5, o sistema tem um ponto de equilíbrio em cada zona. Os equilíbrios nas zonas externas são pontos de sela enquanto que o ponto de equilíbrio na zona central é um ponto de antissela estável. Do Lema 2, temos que o sistema não pode ter órbitas heteroclínicas. Por outro lado, o ponto de equilíbrio na origem não é um centro, porque $T_C = 0$, $D_C > 0$ e $|\beta| \geq 1$ são condições incompatíveis com um centro.

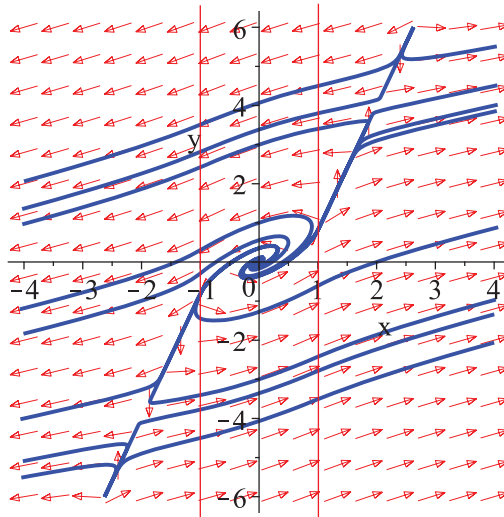


Figura 3.25: Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 3$, $\mu_C = 1$, e $\beta = \frac{1}{2}$.

Então, curvas invariantes fechadas englobando a origem só são possíveis se forem ciclos limites, assim sua existência será analisada usando a transformação de Poincaré.

No entanto, $Q_C(\hat{q}) - \hat{p} < 0$, o que implica de acordo com (3.22) que o sistema não tem ciclos limites. De fato, seja o ponto de equilíbrio na origem um nó próprio estável. Então usando a equação implícita definindo Q_C (ver (3.20)), tem-se

$$s(\tau_C) - q(\tau_C) = T_C \left(1 + \frac{\sinh(\gamma_C \tau_C)}{\gamma_C \sinh(\tau_C)} \right) < T_C < 0,$$

que para $q(\tau_C) = \hat{q}$, tem $Q_C(\hat{q}) - \hat{q} < T_C$.

Por outro lado, de (3.4) tem-se que $\hat{p} - \hat{q} = (D_C/D_E)T_E$, e então

$$\begin{aligned} Q_C(\hat{q}) - \hat{p} &= (Q_C(\hat{q} - \hat{q}) - (\hat{p} - \hat{q})) \\ &< T_C - \frac{D_C}{D_E} T_E \\ &= \frac{(1 - \beta^2)(T_C - T_E)}{D_E} < 0. \end{aligned}$$

Os outros casos (quando o ponto de equilíbrio na origem são nó impróprio ou foco) podem ser provados de forma similar. ■

3.5 Sistema linear por partes no plano com três zonas e um segmento de pontos de equilíbrio

Nesta seção estudaremos o sistema linear por partes com três zonas e um segmento de pontos de equilíbrio. De acordo com as afirmações (c) e (d) da Proposição 5, isto ocorre quando $D_C = 1 - \mu_C \beta = 0$, e então $\beta \neq 0$.

Se $D_C = D_E = 0$, mostra-se que todas as trajetórias são linhas retas, e o sistema não tem uma curva invariante fechada.

Agora, analisaremos o caso $D_E \neq 0$ com $D_C = 0$.

Proposição 12 (Freire et al., 2002) *Considerando o sistema (3.8) com $D_E \neq 0$, $D_C = 0$ e $0 < |\beta| < 1$. Então o sistema tem uma infinidade de pontos de equilíbrio que compõem o segmento dado pela equação $y = \mu_C x$ com $|x| \leq 1$ e as seguintes condições ocorrem.*

- (a) *Se $\mu_E \leq -1 - \beta$, existe uma infinidade de órbitas heteroclínicas.*
- (b) *Se $-2 - \beta < \mu_E < \beta$ existe um único ciclo limite estável englobando todos os pontos de equilíbrio.*
- (c) *Se $\mu_E > \beta$, curvas fechadas invariantes não existem.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 5, o sistema tem infinitos pontos de equilíbrio, que são da forma $y = \mu_C x$, com $|x| \leq 1$ e sem mais pontos de equilíbrio. Será considerado apenas o caso $0 < \beta < 1$. A solução na zona central é dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{T_C} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} e^{T_C t} - \beta & 1 - e^{T_C t} \\ e^{T_C t} - 1 & \frac{1}{\beta} - \beta e^{T_C t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Ou seja,

$$x(t) = \left(\frac{1}{T_C} \frac{1}{\beta} e^{T_C t} - \frac{1}{T_C} \beta \right) x(0) + \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_C} e^{T_C t} \right) y(0), \quad (3.28)$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{T_C} \frac{1}{\beta} e^{T_C t} - \frac{1}{T_C} \right) x(0) + \left(\frac{1}{T_C} \frac{1}{\beta} - \frac{1}{T_C} \beta e^{T_C t} \right) y(0). \quad (3.29)$$

Fazendo (3.29) $-\beta$ (3.28), obtemos

$$y(t) - \beta x(t) = \left(\frac{\beta^2 - 1}{T_C} \right) x(0) + \left(\frac{1 - \beta^2}{\beta T_C} \right) y(0),$$

ou equivalentemente

$$y(t) - \beta x(t) - (y(0) - \beta x(0)) = 0. \quad (3.30)$$

A equação (3.30) é a equação para as órbitas, observe que é uma reta.

Como $D_C = 0$, tem-se que $\mu_C = 1/\beta$ e portanto $T_C = \mu - \beta = 1/\beta - \beta > 0$. Com isto, os pontos de equilíbrio no interior da zona central são instáveis e as retas vão desde o equilíbrio até a fronteira.

(a) A condição $\mu_E \leq -2 - \beta$ implica que $D_E > 0$, assim as zonas externas são zonas de nó com $T_E < 0$. Portanto, todas as órbitas que estão entrando nas zonas externas caem em um dos pontos de equilíbrio que estão na fronteira $x = \pm 1$. Logo, há uma infinidade

de órbitas heteroclínicas conectando os pontos de equilíbrio na zona central com um dos equilíbrios nas fronteiras.

(b) Se $-2 - \beta < \mu_E < \beta$, então as zonas externas são zonas de foco com $T_E < 0$. Construindo uma transformação de Poincaré e provando que tem um único ponto fixo, conclui-se que o sistema tem um único ciclo limite. O ponto $(-1, p - \mu_C)$ é transformado pelo fluxo no ponto $(-1, -q - \mu_C)$. Usando (13) é possível encontrar

$$q = P_E(p) = pe^{\gamma_E \pi}.$$

Agora, o ponto $(-1, -q - \mu_C)$ é transformado pelo fluxo no ponto $(1, -s + \mu_C)$. Usando (3.30) tem-se

$$s = q + 2(\mu_C - \beta) = Q_C(q).$$

Finalmente, temos a transformação de Poincaré

$$\begin{aligned} s &= P(p) \\ &= Q_C(P_E(p)) \\ &= pe^{\gamma_E \pi} + 2(\mu_C - \beta), \quad p > 0. \end{aligned}$$

Esta função tem um único ponto fixo p^* , de fato

$$p^* = P(p^*) \Rightarrow p^* = p^* e^{\gamma_E \pi} + 2(\mu_C - \beta) \Rightarrow p^* = \frac{2(\mu_C - \beta)}{1 - e^{\gamma_E \pi}}$$

com $P'(p) = e^{\gamma_E \pi} < 1$, desde que $T_E < 0$. Então o sistema tem um único ciclo limite.

(c) As condições $\mu_E > \beta$ e $D_C = 0$ implicam que $T_E > 0$ e $T_C > 0$. Pela Proposição 2, o sistema não tem uma curva invariante fechada isolada. ■

Exemplo 8 *A seguir ilustraremos alguns dos casos da Proposição 12, assumindo valores de β , μ_E e μ_C para o sistema (3.8) que satisfaçam as hipóteses da proposição.*

Caso a: $\mu_C = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\mu_E = -4$.

Tomamos $\mu_E \leq -1 - \beta$, logo o sistema (3.8) tem uma infinidade de órbitas heteroclínicas, como podemos observar na Figura 3.26.

Caso b: $\mu_C = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\mu_E = -1$. *Neste caso tomamos $-2 - \beta < \mu_E < \beta$, o que nos garante o caso (b) da Proposição 12. Na Figura 3.27 podemos notar que existe um ciclo limite estável englobando todos os pontos de equilíbrio.*

Caso c: $\mu_C = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\mu_E = 1$ *Como $\mu_E > \beta$, temos o caso (c) da Proposição 12. Na Figura 3.28 é possível observar que não existem curvas invariantes fechadas.*

Proposição 13 (Freire et al., 2002) *Considerando o sistema (3.8) com $D_E \neq 0$, $D_C = 0$ e $|\beta| \geq 1$. Então o sistema tem uma infinidade de pontos de equilíbrio que compõem o segmento dado pela equação $y = \mu_C x$ com $|x| \leq 1$ e não há curvas invariantes fechadas.*

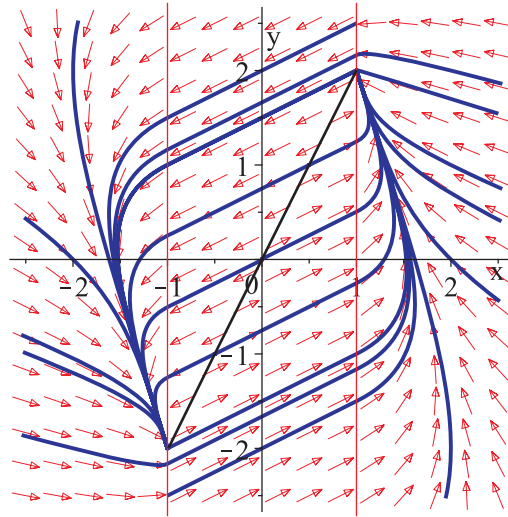


Figura 3.26: Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = -4$, $\mu_C = 2$, e $\beta = \frac{1}{2}$. Tempo de integração: $[-5, 15]$. Existe uma infinidade de órbitas heteroclínicas.

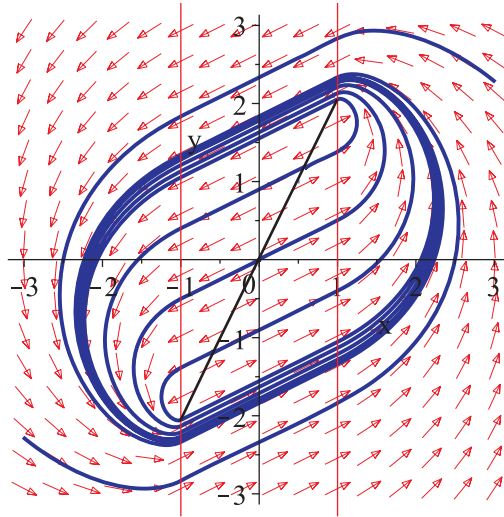


Figura 3.27: Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 2$, $\mu_C = 2$, e $\beta = \frac{1}{2}$. Tempo de integração: $[-5, 12]$. Existe um ciclo limite estável englobando todos os pontos de equilíbrio.

Demonstração. Considerando apenas o caso $\beta \geq 1$, de $D_C = 0$ tem-se que $T_C = \mu_C - \beta = 1/\beta - \beta < 0$. Pela Proposição 2, para que exista alguma curva invariante fechada é preciso que $T_E T_C < 0$ e portanto, $T_E > 0$. Se $T_E > 0$, então

$$\mu_E > \beta \geq 1 \quad \text{e} \quad \Delta_E = (\mu_E + \beta)^2 - 4 > 0.$$

Então, as zonas externas são zonas de nó próprio ou zonas de sela com retas invariantes associadas aos equilíbrios nas fronteiras $x = \pm 1$, o que impede a existência de curvas invariantes fechadas. ■

Exemplo 9 Tomando $\mu_C = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$, $\mu_E = 1$ em (3.8) obtemos o sistema

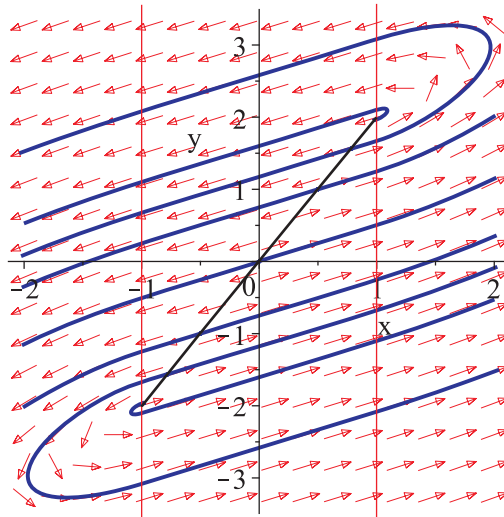


Figura 3.28: Retrato de fase do sistema (3.8) com $\mu_E = 1$, $\mu_C = 2$, e $\beta = \frac{1}{2}$. Tempo de integração: $[-5, 15]$. Não existem curvas invariantes fechadas.

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x) - y, \\ \dot{y} = x - 2y, \end{cases} \quad (3.31)$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ x + \frac{1}{2}, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Como $\beta > 1$ temos que o sistema (3.31) tem uma infinidade de pontos de equilíbrio e não possui curvas invariantes fechadas, como podemos notar na Figura 3.29.

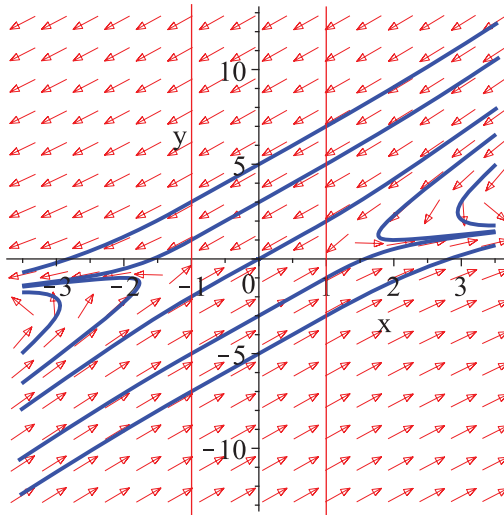


Figura 3.29: Retrato de fase do sistema (3.8) com os seguintes parâmetros $\mu_C = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ e $\mu_E = 1$.

Observação 3 *Sistemas lineares por partes, contínuos, simétricos e com três zonas, sobre certas condições podem apresentar órbitas periódicas no infinito e um ciclo limite bifurca a partir desta órbita periódica no infinito, para mais detalhes ver [13].*

Estudo de um circuito elétrico envolvendo um memristor

Conforme visto na Introdução, por 150 anos, os conhecidos elementos fundamentais de um circuito elétrico foram o *capacitor*, o *resistor* e o *indutor*, descobertos em 1745, 1827 e 1831, respectivamente. Porém, no início da década de setenta, Leon Chua, engenheiro elétrico da Universidade da Califórnia em Berkeley, observou que existem seis diferentes relações matemáticas que conectam pares de quatro variáveis fundamentais de um circuito: corrente i , voltagem v , carga q e fluxo magnético φ . Cinco dessas relações são amplamente conhecidas. Duas são dadas pela definição de corrente elétrica e pela lei de Faraday, ou seja,

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad v(t) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

As outras três são equações básicas do circuito

$$R = \frac{dv}{di}, \quad C = \frac{dq}{dv} \quad \text{e} \quad L = \frac{d\varphi}{di},$$

onde R , C e L representam a resistência, a capacitância e a indutância, respectivamente. Chua observou que parecia faltar uma relação, a que existe entre φ e i .

Assim, o pesquisador percebeu que poderia existir um quarto elemento básico para um circuito, o qual denominou *memristor*, abreviação de “memory resistor”. Chua demonstrou matematicamente que esse dispositivo hipotético poderia estabelecer uma relação funcional entre fluxo e carga, semelhante a que um resistor não-linear forneceria entre voltagem e corrente. Isto equivale a dizer que a resistência do dispositivo poderia variar de acordo com a quantidade de carga que passa através dele e o dispositivo poderia armazenar o valor da resistência, mesmo depois da corrente ser desligada. Em 1971, Chua provou em [3] que as propriedades do memristor não poderiam ser reproduzidas por qualquer

combinação dos outros três elementos, por isso o memristor é considerado um *elemento eletrônico fundamental*, o *quarto elemento*.

Apesar de ter sido teorizado por Leon Chua em 1971, foi somente em 2008 que cientistas da Hewlett-Packard Company anunciaram em [18] a construção física de um memristor. O grupo de pesquisadores da HP conseguiu desenvolver um protótipo em nanoescala, cujas propriedades comprovam ser as do memristor teorizado em [3]. A demora na construção do memristor se deve à dimensão em que os dispositivos eletrônicos foram construídos. Williams afirma em [21] que a memristência - propriedade do memristor - é importante em escala nanométrica e em escala micrométrica, não podendo ser observada em escalas milimétricas e maiores.

Segundo [9] o memristor mostrado na Figura 4.1 é um dispositivo eletrônico passivo, de dois terminais, caracterizado por uma relação funcional não-linear entre a voltagem v e a corrente i . É dito ser de carga controlada (fluxo controlado) se a relação pode ser expressa como único valor da função q (do fluxo associado φ).

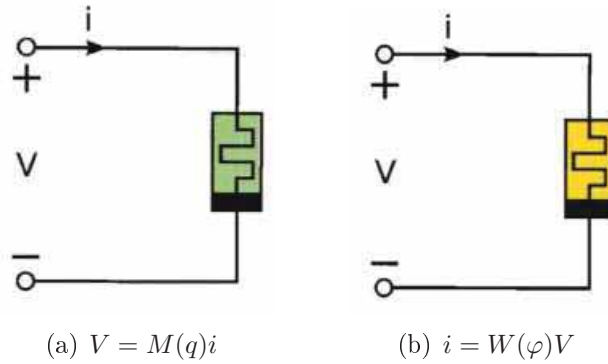


Figura 4.1: (a) Memristor de carga controlada. (b) Memristor de fluxo controlado. Fonte: referência [9].

A voltagem que atravessa um memristor de carga controlada é dada por

$$v(t) = M(q)i(t),$$

onde

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}. \quad (4.1)$$

Da mesma forma, a corrente que atravessa um memristor de fluxo controlado é dado por

$$i(t) = W(\varphi)v(t),$$

com

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \quad (4.2)$$

A quantidade $M(q)$ em (4.1) tem a unidade de medida da resistência, e é chamada de *memristência*, enquanto que $W(\varphi)$ em (4.2) tem a unidade de medida da condutância, e é chamada de *memdutância*, sendo que

$$q \triangleq \int_{-\infty}^t i(t)dt \quad \text{e} \quad \varphi \triangleq \int_{-\infty}^t v(t)dt.$$

De acordo com [3], o memristor caracterizado por um curva diferenciável $q(\varphi)$ (resp. $\varphi(q)$) é *passivo* se, e somente se, $M(q)$ (resp. $W(\varphi)$) é não-negativa, isto é

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq} \geq 0 \quad (\text{resp.} \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \geq 0).$$

Em [9], Itoh e Chua assumem que o memristor é caracterizado por uma função monótona crescente e linear por partes, mostrada na Figura 4.2, da forma

$$\varphi(q) = bq + 0.5(a - b)(|q + 1| - |q - 1|),$$

ou

$$q(\varphi) = d\varphi + 0.5(c - d)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|),$$

onde $a, b, c, d > 0$.

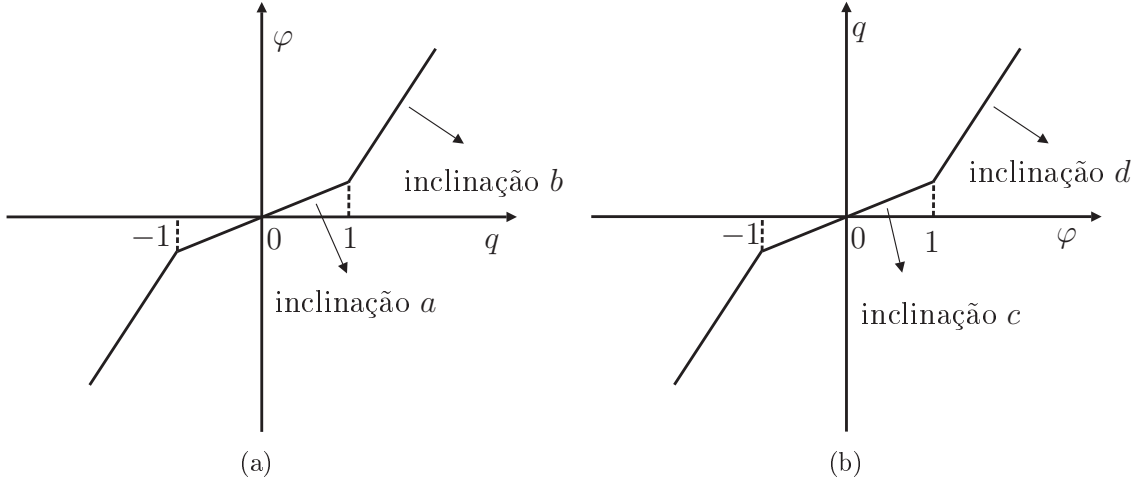


Figura 4.2: Relação constitutiva de um memristor monotonamente crescente e linear por partes. (a) Memristor de carga controlada. (b) Memristor de fluxo controlado.

Consequentemente, a memristência $M(q)$ e a memdutância $W(\varphi)$ de um memristor determinado por estas funções não-lineares são definidas por

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq} = \begin{cases} a, & |q| < 1, \\ b, & |q| > 1, \end{cases}$$

e

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = \begin{cases} c, & |\varphi| < 1, \\ d, & |\varphi| > 1, \end{cases}$$

respectivamente.

A potência instantânea dissipada pelo memristor tomado por Itoh e Chua, em [9] é dada por

$$p(t) = v(t)i(t) = M(q(t))i(t)^2 \geq 0,$$

e

$$p(t) = v(t)i(t) = W(\varphi(t))v(t)^2 \geq 0,$$

sendo que o fluxo de energia no memristor de t_0 a t satisfaz

$$\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \geq 0,$$

para todo $t \geq t_0$. Portanto, o memristor constituído pelas relações mostradas na Figura 4.2 é do tipo passivo.

4.1 Circuito com memristor obtido do oscilador canônico de Chua

Considere o oscilador canônico de Chua mostrado na Figura 4.3 (a). Substituindo neste circuito o diodo de Chua por um memristor de fluxo controlado, Itoh e Chua obtiveram o circuito apresentado na Figura 4.3 (b). Removendo um capacitor do circuito da Figura 4.3 (b), encontraram o oscilador de terceira ordem mostrado na Figura 4.4 (a).

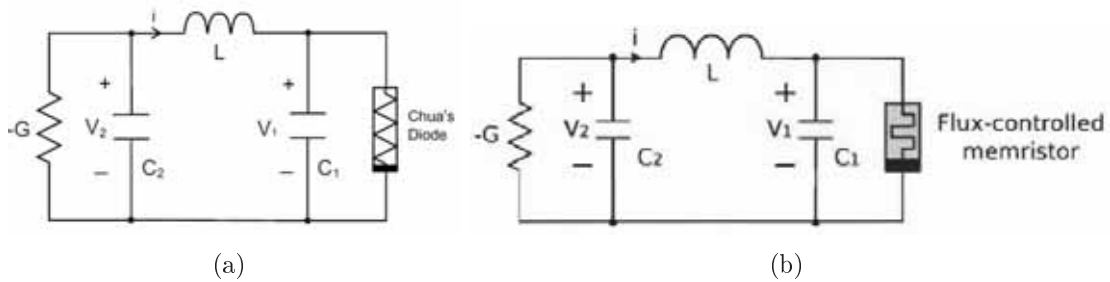


Figura 4.3: (a) Oscilador canônico de Chua. (b) Oscilador canônico com um memristor de fluxo controlado.

Aplicando as leis de Kirchhoff no nó A e no loop C do circuito mostrado na Figura 4.4 (b), obtém-se o sistema

$$\begin{cases} i_1 = i_3 - i, \\ v_3 = v_4 - v_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

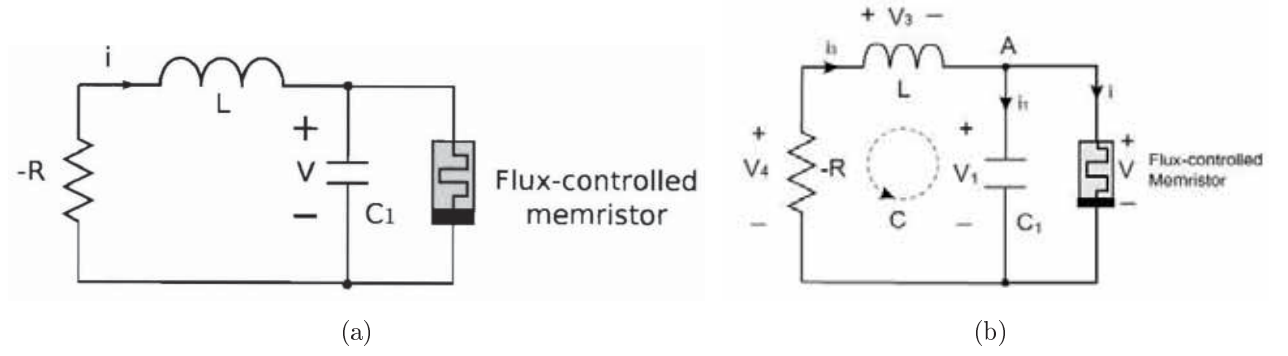


Figura 4.4: (a) Oscilador de terceira ordem com um memristor de fluxo controlado. (b) Oscilador de terceira ordem com um memristor de fluxo controlado. Fonte: referência [9].

Integrando (4.3) com relação ao tempo t , Itoh e Chua em [9] obtiveram o sistema de equações que define a relação entre a carga e o fluxo, dado por

$$\begin{cases} q_1 = q_3 - q(\varphi), \\ \varphi_3 = \varphi_4 - \varphi_1, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde

$$q_1 \triangleq \int_{-\infty}^t i_1(t)dt, \quad q_3 \triangleq \int_{-\infty}^t i_3(t)dt, \quad q \triangleq \int_{-\infty}^t i(t)dt,$$

$$\varphi_1 \triangleq \int_{-\infty}^t v_1(t)dt, \quad \varphi_3 \triangleq \int_{-\infty}^t v_3(t)dt, \quad \varphi_4 \triangleq \int_{-\infty}^t v_4(t)dt, \quad \varphi \triangleq \int_{-\infty}^t v(t)dt = \varphi_1.$$

Os símbolos q_1 , q_3 e q denotam a carga no capacitor C_1 , no indutor L e no memristor, respectivamente, e os símbolos φ_1 , φ_3 , φ_4 e φ denotam o fluxo no capacitor C_1 , no indutor L , na resistência $-R$ e no memristor, respectivamente. Considerando a seguinte curva característica para o memristor (ver Figura 4.2)

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|)$$

e resolvendo (4.4) para q_3 e φ_4 , encontramos

$$\begin{cases} q_3 = q_1 + q(\varphi), \\ \varphi_4 = \varphi_3 + \varphi. \end{cases}$$

Então, q_1 , φ e φ_3 podem ser escolhidas como variáveis independentes, ou seja, determinamos expressões para a carga no capacitor C_1 , o fluxo no indutor L , e o fluxo no memristor, respectivamente. Diferenciando (4.4) com relação ao tempo t , é possível obter o sistema de três equações diferenciais de primeira ordem, que define a relação entre as

três variáveis v_1, i_3, φ

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = i_3 - W(\varphi)v_1, \\ L \frac{di_3}{dt} = Ri_3 - v_1, \\ \frac{d\varphi}{dt} = v_1, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} = i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad \frac{dq_3}{dt} = i_3, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = v_1, \\ \frac{d\varphi_3}{dt} = v_3 = L \frac{di_3}{dt}, \quad \frac{d\varphi_4}{dt} = v_3 = Ri_3, \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Em [12] os autores estudam o comportamento deste circuito. O sistema (4.5) pode ser transformado em um sistema adimensional da forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - W(z)x), \\ \frac{dy}{dt} &= -\xi x + \beta y, \\ \frac{dz}{dt} &= x, \end{aligned} \quad (4.6)$$

por meio da mudança de variáveis e parâmetros $x = v_1, y = i_3, z = \varphi, \alpha = 1/C_1, \xi = 1/L$ e $\beta = R/L$, e considerando-se as funções lineares por partes $q(z)$ e $W(z)$ dadas por

$$q(z) = bz + 0.5(a - b)(|z + 1| - |z - 1|) \quad \text{e} \quad W(z) = \begin{cases} a, & \text{se } |z| < 1, \\ b, & \text{se } |z| > 1, \end{cases}$$

com $\alpha, \beta, \xi, a, b > 0$.

É importante observar que o sistema (4.6) não está definido nos planos $z = \pm 1$. De fato, o sistema fica definido em três zonas no $\mathbb{R}^3$, determinadas pelas inequações $|z| < 1$ e $|z| > 1$, tendo como fronteira os planos $\{z = \pm 1\}$.

4.2 Convenções de Filippov aplicadas no estudo do sistema (4.6)

Consideremos os planos $\Pi_1 = F_1^{-1}(0)$ e $\Pi_2 = F_2^{-1}(0)$ onde $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por $F_1(x, y, z) = z - 1$ e $F_2(x, y, z) = z + 1$, respectivamente. Então o conjunto $M = \Pi_1 \cup \Pi_2$ corresponde à fronteira das regiões

$$M_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1\},$$

$$M_C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1\}$$

e

$$M_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq -1\}.$$

Definição 11 *Seja $\Omega^r(\mathbb{R}^3)$ o conjunto dos campos vetoriais X em $\mathbb{R}^3$ tais que*

$$X(q) = \begin{cases} X_+(q), & \text{se } q \in M_+, \\ X_C(q), & \text{se } q \in M_C, \\ X_-(q), & \text{se } q \in M_-, \end{cases}$$

onde X_+ , X_C e $X_- \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^3)$, e $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^3)$ denota o conjunto dos campos vetoriais de classe $\mathcal{C}^r$, definidos no $\mathbb{R}^3$, com $r \geq 1$. Denotamos por $X = (X_+, X_C, X_-)$ os elementos de $\Omega^r(M, \mathbb{R}^3)$.

Proposição 14 *Seja $X = (X_+, X_C, X_-) \in \Omega^r(\mathbb{R}^3)$ o campo vetorial suave por partes associado ao sistema (4.6), dado por*

$$X(q) = \begin{cases} X_+(q) = (\alpha y - \alpha b x, -\xi x + \beta y, x), & \text{se } q \in M_+, \\ X_C(q) = (\alpha y - \alpha a x, -\xi x + \beta y, x), & \text{se } q \in M_C, \\ X_-(q) = (\alpha y - \alpha b x, -\xi x + \beta y, x), & \text{se } q \in M_-, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, M_+ , M_C e M_- e $M = \Pi_1 \cup \Pi_2$ são definidos como acima. As seguintes propriedades são válidas.

a) *Todos os pontos de M são pontos de costura de X , exceto os pontos das linhas*

$$L_1 = \{(0, y, 1); y \in \mathbb{R}\}, \quad L_2 = \{(0, y, -1); y \in \mathbb{R}\}.$$

b) *Se $\alpha \neq 0$ então todos os pontos em $L_1 \cup L_2$ são pontos de dobra de X , exceto $(0, 0, \pm 1)$, que são pontos mais degenerados.*

Demonstração. Das definições das funções F_1 e F_2 , temos

$$\nabla F_1 = \nabla F_2 = (0, 0, 1)$$

e então

$$X_+ F_1 = X_C F_1 = x, \quad X_C F_2 = X_- F_2 = x.$$

Então os pontos em $\Pi_1 \cup \Pi_2$ são pontos de costura de X se, e somente se, $x \neq 0$. Além disso $X_+^2 F_1 = X_C^2 F_1 = X_C^2 F_2 = X_-^2 F_2 = \alpha y$ em $L_1 \cup L_2$. O resultado segue então da definição de ponto de dobra e de costura. ■

Teorema 3 a) *O campo vetorial (4.7) tem os planos*

$$\pi_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{\beta}{\alpha(\xi - a\beta)}x - \frac{1}{(\xi - a\beta)}y + k_1, \ k_1 \in \mathbb{R}, 1; |z| < 1 \right\}$$

e

$$\pi_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{\beta}{\alpha(\xi - b\beta)}x - \frac{1}{(\xi - b\beta)}y + k_2, \ k_2 \in \mathbb{R}, 1; |z| > 1 \right\}$$

como planos invariantes, onde $\pi_1 \subset M_C$, $\pi_2 \subset M_-$ se $z < -1$ e $\pi_2 \subset M_+$ se $z > 1$.

b) Os planos π_1 e π_2 intersectam os planos $z = \pm 1$ nas retas paralelas

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_1 \mp 1)(\xi - a\beta)$$

e

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_2 \mp 1)(\xi - b\beta),$$

respectivamente. Além disso, estas retas coincidem se para $\pi_2 \subset M_+$ tivermos

$$k_2 = 1 + (k_1 - 1)\frac{(\xi - a\beta)}{(\xi - b\beta)}$$

e para $\pi_2 \subset M_-$ tivermos

$$k_2 = -1 + (k_1 + 1)\frac{(\xi - a\beta)}{(\xi - b\beta)},$$

ou seja, dado $k_1 \in \mathbb{R}$, sempre existe k_2 tal que os planos invariantes intersectam-se na mesma reta, sobre os planos $z = \pm 1$.

Demonstração. Temos que o plano $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ é um plano invariante do campo vetorial (4.7), com $|z| < 1$, se e somente se

$$\langle (\alpha(y - ax), -\xi x + \beta y, x), (a_1, a_2, a_3) \rangle = 0,$$

ou seja

$$\begin{cases} (a_3 - \alpha a a_1 - \xi a_2)x = 0, \\ (\alpha a_1 + \beta a_2)y = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos que

$$a_1 = -\frac{\beta a_3}{\alpha(\xi - a\beta)}, \quad a_2 = \frac{a_3}{\xi - a\beta} \quad \text{e} \quad a_3 \in \mathbb{R}, \ a_3 \neq 0.$$

Logo o plano invariante é dado por

$$z = \frac{\beta}{\alpha(\xi - a\beta)}x - \frac{1}{\xi - a\beta}y + k_1, \quad \text{com} \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Da mesma forma, temos que o plano $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$ é invariante para o campo vetorial (4.7) com $|z| \geq 1$ se, e somente se,

$$b_1 = -\frac{\beta b_3}{\alpha(\xi - b\beta)}, \quad b_2 = \frac{b_3}{\xi - b\beta} \quad \text{e} \quad b_3 \in \mathbb{R}, b_3 \neq 0,$$

donde obtemos

$$z = \frac{\beta}{\alpha(\xi - b\beta)}x - \frac{1}{\xi - b\beta}y + k_2, \quad \text{com} \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Fica assim provada a parte (a) do teorema.

Para provar a parte (b), observemos que $\pi_1 \cap \{z = 1\}$ é a reta

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_1 - 1)(\xi - a\beta)$$

e que $\pi_1 \cap \{z = -1\}$ é a reta

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_1 + 1)(\xi - a\beta),$$

o que mostra que o plano π_1 intersecta os planos $z = \pm 1$ nas retas paralelas

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_1 - 1)(\xi - \beta a) \quad \text{e} \quad y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_1 + 1)(\xi - a\beta).$$

De maneira análoga, temos que o plano $\pi_2 \subset M_+$ intersecta o plano $\{z = 1\}$ na reta

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_2 - 1)(\xi - b\beta)$$

e $\pi_2 \subset M_-$ intersecta o plano $\{z = -1\}$ na reta

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + (k_2 + 1)(\xi - b\beta).$$

Logo, dado k_1 , os planos $\pi_1 \subset M_C$ e $\pi_2 \subset M_+$ se intersectam no plano $z = 1$ se e somente se

$$k_2 = 1 + (k_1 - 1)\frac{\xi - a\beta}{\xi - b\beta}.$$

Por outro lado, os planos $\pi_1 \subset M_C$ e $\pi_2 \subset M_-$ também se intersectam em uma reta no plano $z = -1$ se, dado k_1 , tomarmos

$$k_2 = -1 + (k_1 + 1)\frac{\xi - a\beta}{\xi - b\beta}.$$

■

Observação 4 *Pode-se mostrar facilmente que estes planos são gerados por autovetores associados aos autovalores não nulos dos equilíbrios $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.*

Da Proposição 14 e do Teorema 3 acima, segue o seguinte resultado.

- Teorema 4 a)** *Em cada uma das zonas M_- e M_+ (externas) e M_C (central), as soluções do campo vetorial (4.7) ficam contidas em planos invariantes, paralelos entre si e transversais ao eixo- z , gerados pelos autovetores associados aos autovalores não nulos dos equilíbrios $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.*
- b)** *A posição relativa destes planos depende dos parâmetros do sistema, sendo que os planos localizados nas zonas externas, M_- e M_+ , são também paralelos entre si.*
- c)** *Os planos da zona central intersectam os planos das zonas externas sobre os planos Π_1 e Π_2 em retas paralelas em cada um destes planos e paralelas entre si.*

Para uma visualização geométrica deste resultado, ver Figura 4.5.

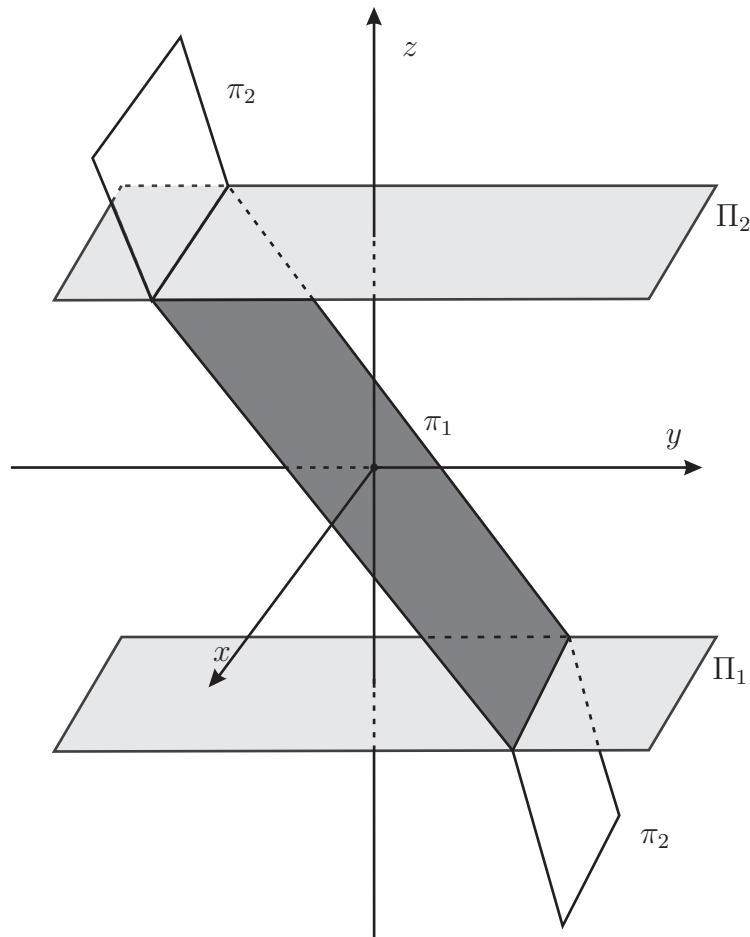


Figura 4.5: Representação dos planos π_1 e π_2 . Os planos da zona central intersectam os planos das zonas externas sobre os planos Π_1 e Π_2 em retas paralelas.

Um fato importante que segue do Teorema 4 é que, para cada condição inicial (x_0, y_0, z_0) dada, existe uma combinação de três planos invariantes (um na zona M_C e outros dois nas zonas M_- e M_+) que contém a solução do campo vetorial (4.7) que passa por (x_0, y_0, z_0) .

Desta forma as soluções do sistema ficam sempre contidas em uma combinação de três planos invariantes, obtidos dentre aqueles dados no Teorema 3 (ver Figura 4.5).

Na próxima seção estudaremos a posição relativa destes planos, com o objetivo de determinar como o $\mathbb{R}^3$ é folheado por esses planos invariantes, contendo as soluções do campo vetorial (4.7), lembrando que o eixo- z é composto por pontos de equilíbrio do sistema.

4.3 Posição relativa dos planos

Como vimos nas seções anteriores, as soluções do campo vetorial (4.7) ficam contidas em planos invariantes paralelos, em cada zona. Da demonstração do Teorema 3 temos que os vetores normais dos planos π_1 e π_2 são dado por

$$\vec{n} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}, 1, (\xi - \beta W(z)) \right),$$

onde

$$W(z) = \begin{cases} a, & \text{se } |z| < 1, \\ b, & \text{se } |z| > 1. \end{cases}$$

Para estudar a posição relativa destes planos, usando o fato deles serem transversais ao eixo- z , determinamos o ângulo entre um vetor normal ao plano e o vetor $(0, 0, 1)$. Calculando o produto escalar entre estes vetores obtemos

$$\langle \vec{n}, (0, 0, 1) \rangle = (\xi - \beta W(z)),$$

que substituído na expressão que fornece o ângulo entre estes vetores, nos dá

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{n}, (0, 0, 1) \rangle}{|\vec{n}|} = \frac{(\xi - \beta W(z))}{|\vec{n}|}.$$

Assim, o ângulo entre $\vec{n}$ e $(0, 0, 1)$ é agudo se $(\xi - \beta W(z)) > 0$ e a inclinação do plano é a mostrada na Figura 4.6; se $(\xi - \beta W(z)) < 0$ o ângulo entre os dois vetores é obtuso e a inclinação do plano é a mostrada na Figura 4.7.

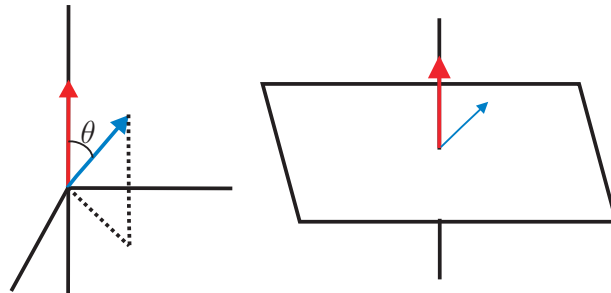


Figura 4.6: Inclinação do plano quando o ângulo entre o vetor normal e $(0, 0, 1)$ é agudo.

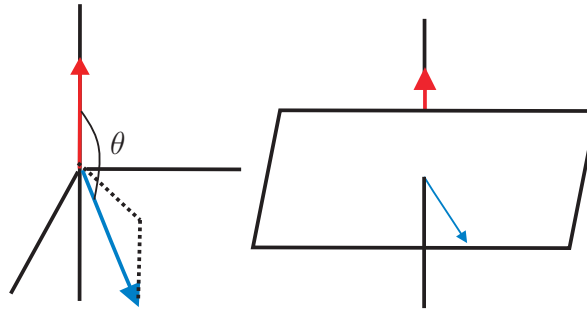


Figura 4.7: Inclinação do plano quando o ângulo entre o vetor normal e $(0,0,1)$ é obtuso.

As Figuras 4.8 (a), (b) e 4.9 (a), (b) representam as possíveis combinações das posições relativas dos planos π_1 na zona central e π_2 nas zonas externas. Utilizaremos estas figuras para representar as soluções do sistema (4.6), nas próximas seções.

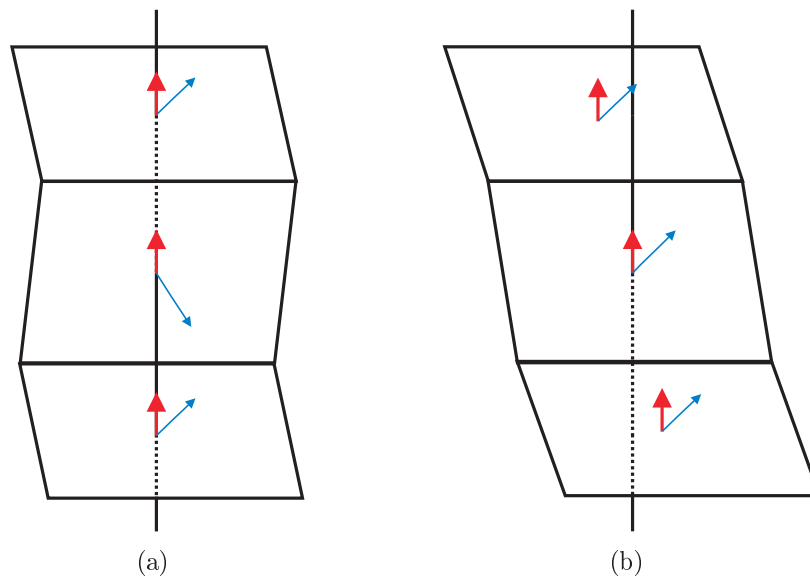


Figura 4.8: Combinação da inclinação dos planos. (a) O ângulo entre o vetor normal aos planos das zonas externas e o vetor $(0,0,1)$ é agudo. Entre o vetor normal da zona central e o vetor $(0,0,1)$ é obtuso. (b) O ângulo entre o vetor normal de todos os planos e o vetor $(0,0,1)$ é agudo.

Na Figura 4.10 são representados os planos π_1 e π_2 . Tomamos o ângulo entre o vetor normal do plano π_1 e o vetor $(0,0,1)$ como agudo e mostramos as posições relativas entre π_1 e π_2 . Quando o ângulo entre o vetor normal de π_2 e o vetor $(0,0,1)$ é agudo, representamos o plano pela cor verde. Note que nesta combinação dos planos, haverá apenas um ponto de equilíbrio na zona central. Quando o ângulo é obtuso, plano representado na cor vermelha, haverá três pontos de equilíbrio na combinação destes planos, um em cada zona. O plano representado pela cor azul, representa a situação em que os planos π_2 , nas zonas externas, são paralelos ao eixo- z .

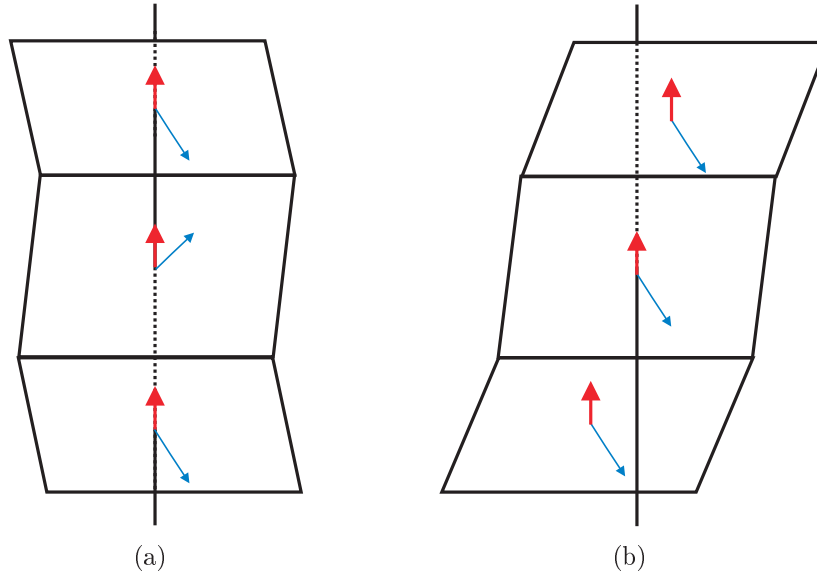


Figura 4.9: Combinação da inclinação dos planos. (a) O ângulo entre o vetor normal aos planos das zonas externas e o vetor $(0, 0, 1)$ é obtuso. Entre o vetor normal, da zona central, e o vetor $(0, 0, 1)$ é agudo. (b) O ângulo entre o vetor normal de todos os planos e o vetor $(0, 0, 1)$ é obtuso.

4.4 Estudo local dos equilíbrios

Os pontos de equilíbrio do sistema (4.6) são dados pelo conjunto

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \text{ e } z \in \mathbb{R}\},$$

portanto o sistema tem uma linha de pontos de equilíbrio contida no eixo- z . Estudando a estabilidade local dos equilíbrios nesta linha, os autores de [12] obtiveram o seguinte resultado:

Teorema 5 (Messias et al., 2010) *A estabilidade local normal dos equilíbrios $(0, 0, z)$ do sistema (4.6) com $0 < a < b$ é descrita na Tabela 4.1, para valores positivos dos parâmetros α, β, ξ, a, b .*

Demonstração. A matriz Jacobiana J do sistema (4.6) aplicada no ponto de equilíbrio $(0, 0, z)$ é dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha W(z) & \alpha & 0 \\ -\xi & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que tem como autovalores

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_{2,3} = \frac{\tau \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (4.8)$$

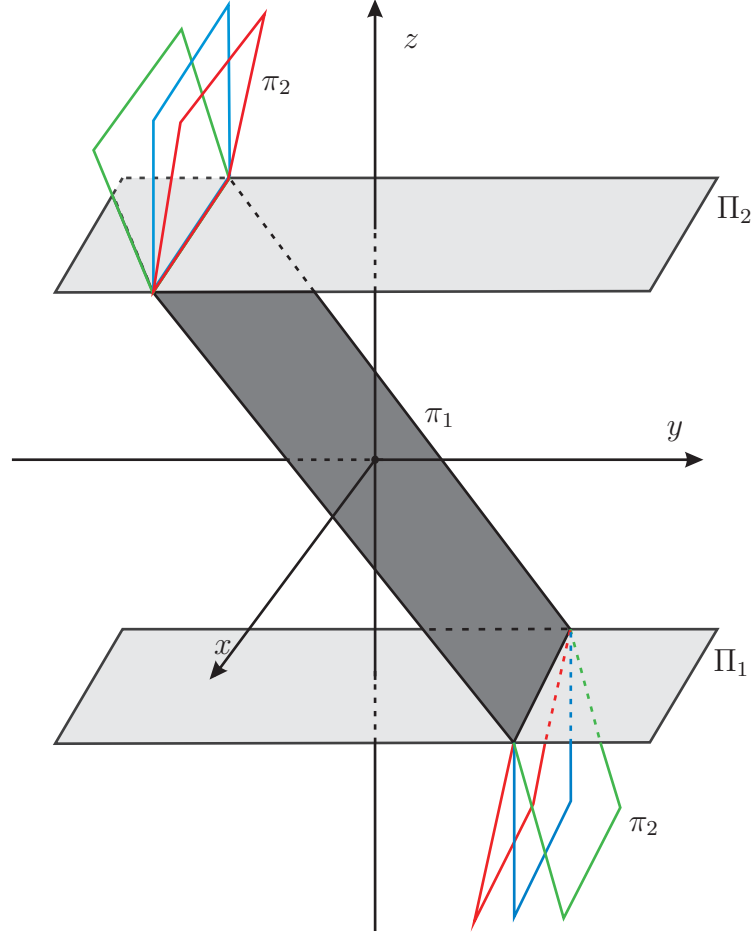


Figura 4.10: Representação das possíveis posições relativas dos planos invariantes π_1 e π_2 .

onde $\tau = \beta - \alpha W(z)$, $\Delta = \tau^2 - 4D$ e $D = \alpha(\xi - \beta W(z))$. Os autovetores correspondentes são $v_1 = (0, 0, 1)$,

$$v_2 = \left(\frac{\tau - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-(\beta + \alpha W(z) - \sqrt{\Delta})(-\tau + \sqrt{\Delta})}{4\alpha}, 1 \right) \quad (4.9)$$

e

$$v_3 = \left(\frac{\tau + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-(\beta + \alpha W(z) + \sqrt{\Delta})(-\tau - \sqrt{\Delta})}{4\alpha}, 1 \right). \quad (4.10)$$

Analisando as diferentes possibilidades para os autovalores (4.8), em função das relações entre τ , Δ e D , que dependem dos parâmetros α , β , ξ , a, b , obtemos os casos descritos na Tabela 4.1 para a estabilidade local (normal) dos equilíbrios $(0, 0, z)$, com $|z| \neq 1$.

Para verificar a hiperbolicidade normal dos equilíbrios $(0, 0, z)$, é suficiente calcular a equação do plano π gerado pelos autovetores (4.9) e (4.10). Se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais, então tal plano π terá

$$n = v_2 \wedge v_3 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}, 1, \xi - \beta W(z) \right)$$

Condições em τ	Condições em Δ	Estabilidade Local de $(0, 0, z)$		Casos
		$ z < 1$	$ z > 1$	
$\tau < 0$ $\left(\frac{\beta}{\alpha} < W(z)\right)$	$\Delta < 0$	Foco estável	Foco Estável	(a)
	$\Delta = 0$	Nó impróprio estável	Nó impróprio estável	(b)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$	Nó estável	Nó estável	(c)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$	Sela	Sela	(d)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco Estável	(e)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó estável	Foco Estável	(f)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z > 1$	Foco Estável	Sela	(g)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco Estável	Nó Estável	(h)
	$\Delta < 0$	Foco Instável	Foco Instável	(i)
$\tau > 0$ $\left(\frac{\beta}{\alpha} > W(z)\right)$	$\Delta = 0$	Nó Impróprio Instável	Nó Impróprio Instável	(j)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$	Nó Instável	Nó Instável	(k)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$	Sela	Sela	(l)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco Instável	(m)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó Instável	Foco Instável	(n)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z > 1$	Foco Instável	Sela	(o)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco Instável	Nó Instável	(p)
	$\Delta < 0$	Foco Instável	Foco Estável	(q)
	$\Delta = 0$	Nó impróprio Instável	Nó impróprio estável	(r)
τ muda de sinal de acordo com z $\left(a < \frac{\beta}{\alpha} < b\right)$	$\Delta > 0$ e $D > 0$	Nó Instável	Nó Estável	(s)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$	Sela	Sela	(t)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco Estável	(u)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó Instável	Foco Estável	(v)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z > 1$	Foco Instável	Sela	(w)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco Instável	Nó Estável	(x)
	$\Delta < 0$	Foco Instável	Foco Estável	(q)
	$\Delta = 0$	Nó impróprio Instável	Nó impróprio estável	(r)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$	Nó Instável	Nó Estável	(s)

Tabela 4.1: Estabilidade normal local dos pontos de equilíbrio $(0, 0, z)$.

como vetor normal. Calculando o produto escalar de n com o vetor $(0, 0, 1)$ tem-se

$$\langle n, (0, 0, 1) \rangle = (\xi - \beta W(z)),$$

o que implica que o plano π é transversal ao eixo- z . Pelo Teorema da Variedade Estável, as variedades invariantes do equilíbrio $(0, 0, z)$ com $|z| \neq 1$ são tangentes ao plano π , sendo assim, essas variedades são transversais ao eixo- z . Portanto, as singularidades são normalmente hiperbólicas, com exceção do caso em que $\Delta = 0$. No caso de autovalores complexos, tem-se o mesmo tipo de resultado, considerando o plano gerado pelas partes real e imaginária de v_2 . ■

No entanto, nos casos em que os autores de [12] consideraram $\Delta > 0$ se $|z| < 1$ e $\Delta < 0$ se $|z| > 1$ (casos (e), (f), (m), (n), (u) e (v) da Tabela 4.1), as hipóteses são impossíveis de serem verificadas. Tais casos são possíveis somente se considerarmos $0 < b < a$ em vez de $0 < a < b$, como será mostrado a seguir.

Visando completar o estudo apresentado em [12], fizemos uma análise da estabilidade local dos equilíbrios $(0, 0, z)$ no caso $0 < b < a$. Os resultados obtidos estão descritos na Tabela 4.2. Indicamos cada caso com a mesma letra usada na Tabela 4.1 para facilitar a comparação.

Teorema 6 *A estabilidade local normal dos equilíbrios $(0, 0, z)$ do sistema (4.6) com $0 < b < a$ é descrita na Tabela 4.2, para valores positivos dos parâmetros α, β, ξ, a, b .*

Condições em τ	Condições em Δ	Estabilidade Local de $(0, 0, z)$		Casos
		$ z < 1$	$ z > 1$	
$\tau < 0$ $\left(\frac{\beta}{\alpha} < W(z)\right)$	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco Estável	(e)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó estável	Foco Estável	(f)
$\tau > 0$ $\left(\frac{\beta}{\alpha} > W(z)\right)$	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco Instável	(m)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó Instável	Foco Instável	(n)
τ muda de sinal de acordo com z $\left(b < \frac{\beta}{\alpha} < a\right)$	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco Instável	(u)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó Estável	Foco Instável	(v)

Tabela 4.2: Estabilidade local dos pontos de equilíbrio $(0, 0, z)$, complemento da Tabela 4.1.

Demonstração. A matriz Jacobiana J do sistema (4.6) aplicada no ponto de equilíbrio $(0, 0, z)$ é dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha W(z) & \alpha & 0 \\ -\xi & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que tem como autovalores

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{2,3} = \frac{\tau \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (4.11)$$

onde $\tau = \beta - \alpha W(z)$, $\Delta = \tau^2 - 4D$ e $D = \alpha(\xi - \beta W(z))$. Os autovetores correspondentes são $v_1 = (0, 0, 1)$,

$$v_2 = \left(\frac{\tau - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-(\beta + \alpha W(z) - \sqrt{\Delta})(-\tau + \sqrt{\Delta})}{4\alpha}, 1 \right) \quad (4.12)$$

e

$$v_3 = \left(\frac{\tau + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-(\beta + \alpha W(z) + \sqrt{\Delta})(-\tau - \sqrt{\Delta})}{4\alpha}, 1 \right). \quad (4.13)$$

Analisando as diferentes possibilidades para os autovalores (4.11), em função das relações entre τ , Δ e D , que dependem dos parâmetros α, β, ξ, a, b , encontramos os casos

descritos na Tabela 4.2 para a estabilidade local (normal) dos equilíbrios $(0, 0, z)$, com $|z| \neq 1$.

Os casos em que $\Delta > 0$ se $|z| < 1$ e $\Delta < 0$ se $|z| > 1$, são possíveis somente se $0 < b < a$. De fato, para $|z| < 1$ temos

$$\Delta = (\beta + \alpha a)^2 - 4\xi\alpha > 0 \implies (\beta + \alpha a)^2 > 4\xi\alpha, \quad (4.14)$$

e para $|z| > 1$ temos

$$\Delta = (\beta + \alpha b)^2 - 4\xi\alpha < 0 \implies (\beta + \alpha b)^2 < 4\xi\alpha. \quad (4.15)$$

De (4.14) e (4.15) segue que $(\beta + \alpha b)^2 < 4\xi\alpha < (\beta + \alpha a)^2$, donde obtemos, necessariamente, que $b < a$.

Para verificar a hiperbolicidade normal dos equilíbrios $(0, 0, z)$ o procedimento é análogo ao descrito na prova do Teorema 5. ■

4.5 Estudo numérico de casos que levam a oscilações periódicas

O fato das soluções do sistema (4.6) ficarem contidas na combinação de três planos invariantes no $\mathbb{R}^3$ nos leva a fazer um paralelo entre o estudo desenvolvido por Freire et al. em [5], apresentado no Capítulo 3, e as possíveis situações que podem ocorrer com as soluções de (4.6).

Assim, tendo como base o estudo analítico desenvolvido até aqui e os resultados de Freire et al. [5], nesta seção faremos um estudo numérico dos casos (q), (w) e (x) do Teorema 5 e dos casos (u) e (v) do Teorema 6. A escolha destes casos se deve ao fato de apresentarem as soluções mais interessantes do ponto de vista dos circuitos elétricos, que são as oscilações periódicas (não-lineares).

4.5.1 Foco Estável - Foco Instável - Foco Estável

Caso (q). Foco Estável - Foco Instável - Foco Estável. No caso (q), apresentado na Tabela 4.1 do Teorema 5, o equilíbrio $(0, 0, z)$ do sistema (4.6) tem autovalores complexos conjugados com parte real positiva na zona central e com parte real negativa nas zonas externas, levando a mudanças de estabilidade dos equilíbrios quando z cruza os planos $z = \pm 1$. Considerando uma órbita que tem como conjunto α -limite um dos equilíbrios na zona central, $|z| < 1$, temos que o conjunto ω -limite pode ser vazio (a solução tende para infinito) ou uma órbita periódica, como podemos observar no esboço da solução na Figura 4.11. Veremos a seguir que, ao resolver numericamente o sistema (4.6) pelo método

de Runge-Kutta de quarta ordem e tomando valores dos parâmetros que satisfazem as condições do caso (q), isto é, $a < \beta/\alpha < b$ e $\Delta < 0$ para $|z| < 1$ e $|z| > 1$, obtivemos evidências numéricas de que, para certos valores dos parâmetros, ocorrem as situações mostradas na Figura 4.11. Observamos que, no conjunto de planos em que a solução é representada nesta figura, temos apenas um equilíbrio na zona central. Este caso pode ser comparado ao caso (a1) da Proposição 6 do Capítulo 3, estudado em [5] (ver Figuras 3.1 (a) e 3.2 (a) no Capítulo 3). Observamos que o caso de o equilíbrio na zona central ser um centro (caso (a2) da mesma Proposição 6 do Capítulo 3) não ocorre no estudo do sistema (4.6), pois para isso teríamos que ter $a = b$ neste sistema, o que o tornaria um sistema linear trivial no $\mathbb{R}^3$. De fato, estamos considerando somente os casos $0 < a < b$ e $0 < b < a$.

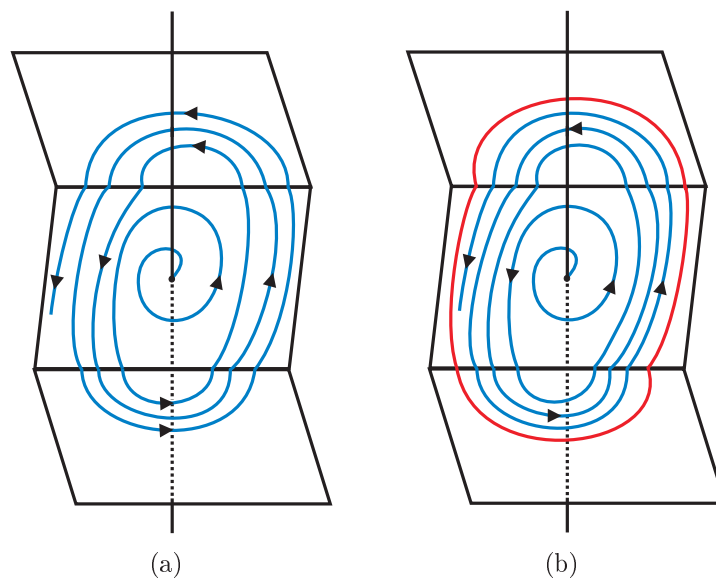


Figura 4.11: Esboço da solução do caso (q). (a) A solução tende para infinito quando $t \rightarrow \infty$. (b) Quando ocorre uma órbita periódica.

Considerando os valores $\alpha = 0.17$, $a = 1$, $b = 12$, $\xi = 50$ e $\beta = 2$, resolvemos o sistema (4.6) numericamente e obtivemos as soluções mostradas na Figura 4.12 (a), que indica que o conjunto ω -limite é vazio, isto é, a solução tende para infinito. Ao alterarmos o valor do parâmetro α para 0.5, obtivemos a solução mostrada na Figura 4.12 (b), que sugere que o conjunto ω -limite da solução é uma órbita periódica estável.

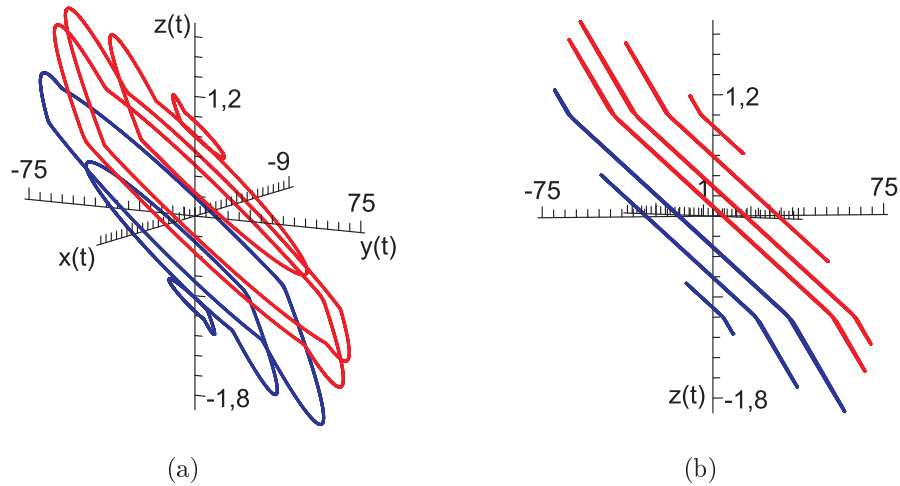


Figura 4.13: (a,b) Retrato de fase do sistema (4.6) com $\alpha = 0.5$, $a = 1$, $b = 12$, $\xi = 50$ e $\beta = 2$ indicando a existência de órbitas periódicas estáveis englobando o eixo- z , que corresponde aos equilíbrios $(0, 0, z)$ com $|z| < 1$.

Na Figura 4.14 (b) consideramos que o conjunto ω -limite da solução correspondente ao equilíbrio $(0, 0, z)$ com $|z| < 1$ é um ciclo heteroclínico, enquanto na Figura 4.14 (c) a solução considerada tende a uma órbita periódica. Este caso pode ser comparado ao resultado da Proposição 10 do Capítulo 3 (ver Figuras 3.20 e 3.21), estudado em [5] para sistemas lineares por partes no plano, com três zonas.

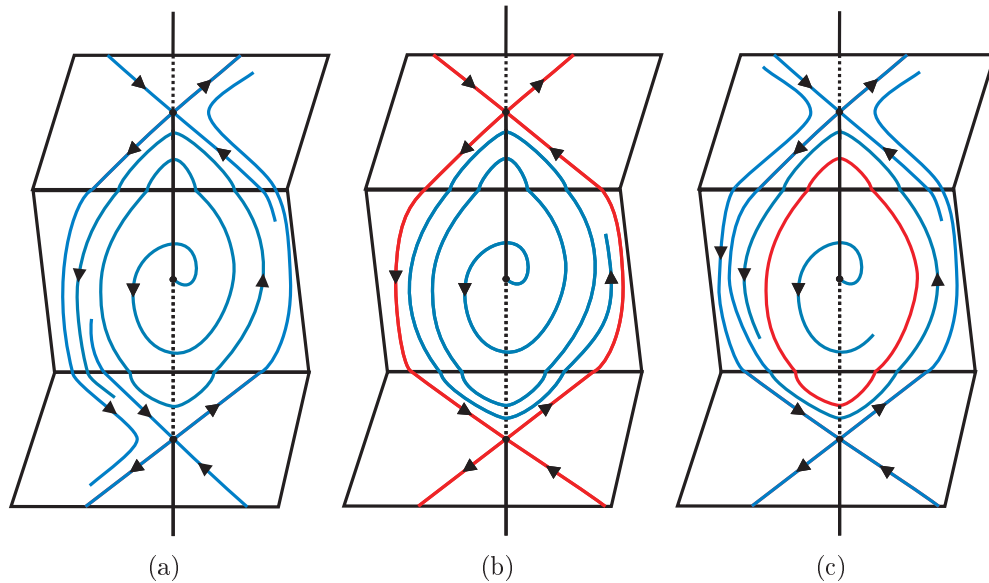


Figura 4.14: Esboço da solução do caso (w). (a) Considerando que não há nem órbita periódica e nem ciclo heteroclínico. (b) Considerando que a solução tende a um ciclo heteroclínico. (c) Considerando que existe um ciclo limite estável.

Resolvendo o sistema numericamente, podemos observar na Figura 4.15 que as soluções encontradas numericamente indicam que ocorre o que se esperava, com base nos estudos analíticos. Com os valores dos parâmetros $\alpha = 0.32$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$

obtivemos a solução mostrada na Figura 4.17 (a), onde supostamente não há ciclos limites e nem órbitas heteroclínicas. Quando $\alpha = 0.35$ a solução encontrada indica o surgimento de um ciclo heteroclínico e a solução que tem como conjunto α -limite o equilíbrio da zona central tende a este ciclo heteroclínico. Esta solução é similar a descrita na afirmação (a2) da Proposição 10. Por causa da continuidade, ao alterarmos o parâmetro α para 0.38 surge uma órbita periódica com parte nas três zonas, o que é semelhante ao caso (a1) da Proposição 10 (Ver Figura 3.20).

É importante dizer que as variedades estável e instável associadas aos pontos de sela (nas zonas externas) estão exatamente na direção dos autovetores associados a cada ponto de equilíbrio. No entanto, devido as aproximações que são feitas no cálculo numérico das órbitas, as variedades não vão direto para o ponto de equilíbrio. É por isso que na solução mostrada na Figura 4.15 (b) a variedade estável se afasta do ponto de equilíbrio e acompanha a variedade instável.

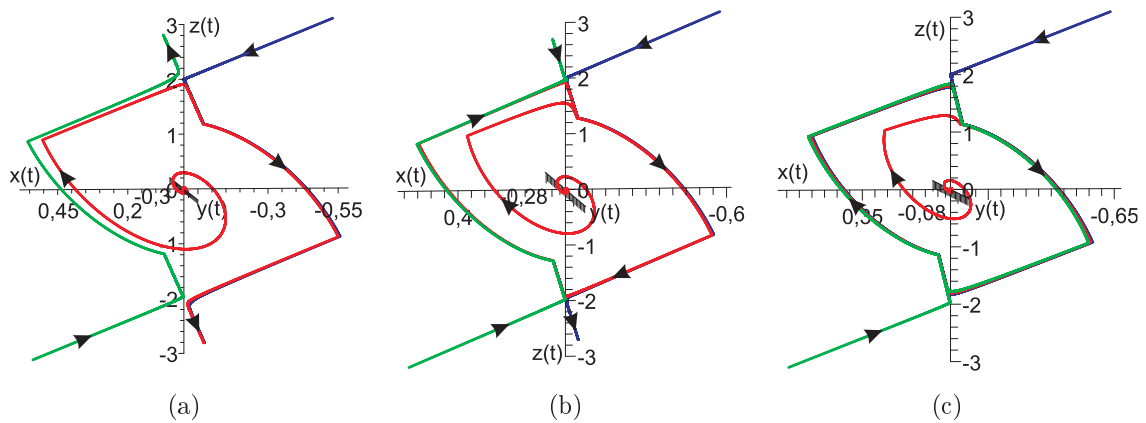


Figura 4.15: Solução numérica do caso (w) com os parâmetros (a) $\alpha = 0.32$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[-20, 180]$, onde supostamente não há nem órbita periódica e nem órbita heteroclínica (b) $\alpha = 0.35$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[-20, 180]$, onde a solução indica a existência de uma dupla órbita heteroclínica. (c) $\alpha = 0.38$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[-20, 180]$, onde há evidências numéricas de que existe um ciclo limite estável.

Na Figura 4.16 pode-se ver apenas a órbita periódica da solução mostrada na Figura 4.15 (c). Na Figura 4.16 (b) mostramos o gráfico da coordenada $z(t)$ da solução periódica contra o tempo t . No passado a solução tende ao equilíbrio e, no futuro, tende para a órbita periódica, o que fica claro nesta figura.

Da mesma forma que no caso (q), há evidências numéricas de que existe uma órbita periódica relacionada com cada ponto de equilíbrio instável $(0, 0, z)$ para $|z| < 1$, como podemos verificar na Figura 4.17. De fato, em cada uma das combinações de três planos paralelos invariantes que contém a solução do sistema (4.6), há indícios de que existe uma órbita periódica. Devido à posição dos planos paralelos nas três zonas, a amplitude destas órbitas é diferente. Ver Figura 4.17

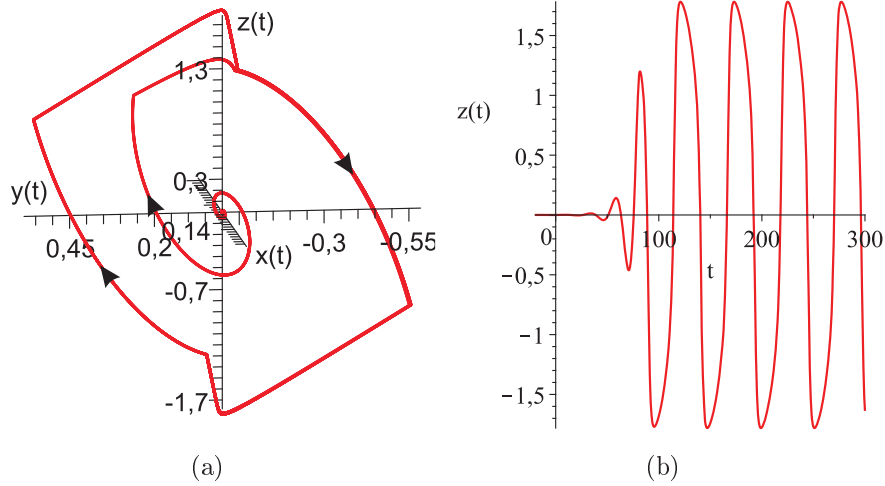


Figura 4.16: (a,b) Solução numérica do sistema (4.6) com os parâmetros $\alpha = 0.38$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[40, 80]$.

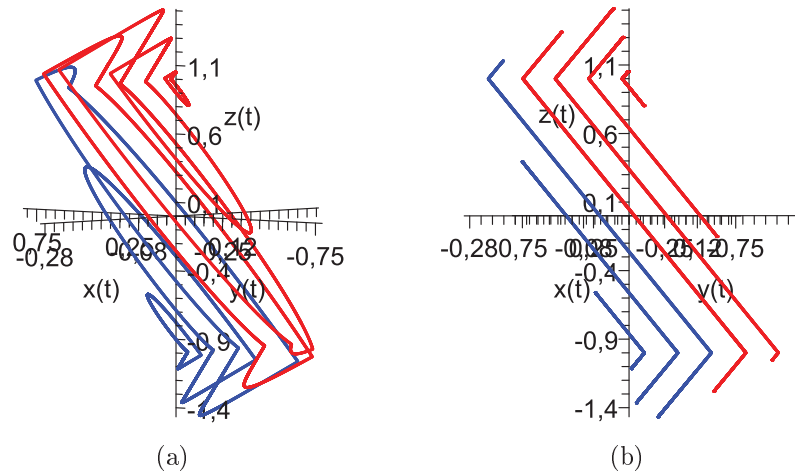


Figura 4.17: Solução numérica do sistema (4.6) com os parâmetros $\alpha = 0.8$, $a = 0.02$, $b = 2$, $\xi = 0.2$ e $\beta = 0.2$ e tempo $[40, 80]$. Indicando a existência de órbitas periódicas associadas aos equilíbrios $(0, 0, z)$ com $|z| < 1$.

4.5.3 Nó Estável - Foco Instável - Nó Estável

Caso (x) Nó Estável - Foco Instável - Nó Estável. No caso (x) do Teorema 5 temos $a < \beta/\alpha < b$ e $\Delta < 0$ para $|z| < 1$ e $\Delta > 0$ e $D > 0$ para $|z| > 1$. Neste caso, a combinação dos planos é da forma da Figura 4.8 (b), ou seja, o ângulo entre os vetores normais de cada um dos planos e o $(0, 0, 1)$ é agudo. Assim, como os equilíbrios na zona externa são nós estáveis e devido a inclinação dos planos, ocorre o que é esboçado na Figura 4.18. Note que o nó estável da zona externa apresentado esboçado tem os dois autovetores bem próximos e logo, as curvas próximas aos autovetores tem a forma mostrada Figura 4.18. Logo, a solução que entra nesta zona acompanha a direção destas curvas e retorna a zona central, sendo que o mesmo ocorre na zona externa com $z < -1$. Assim, é provável que sempre exista uma órbita periódica, como mostrado na Figura 4.18(b).

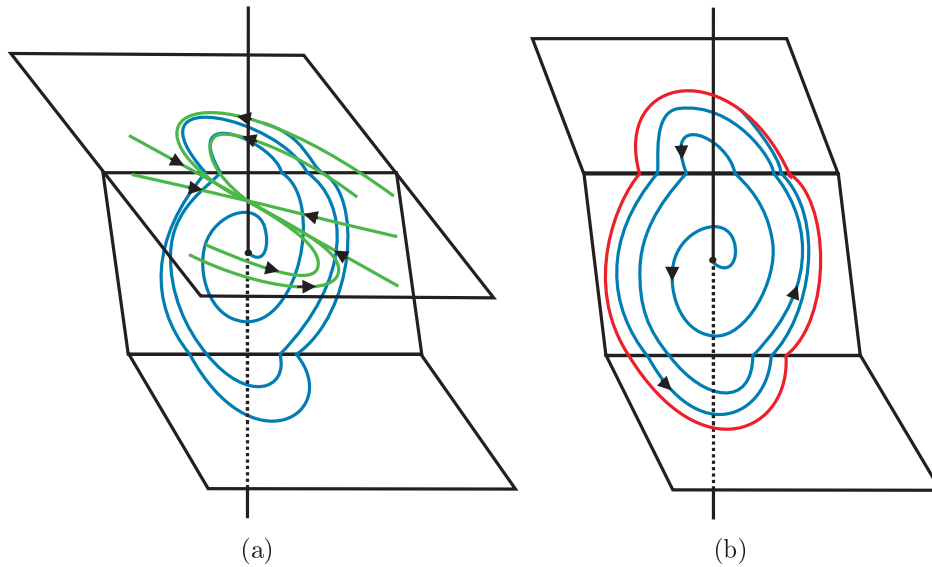


Figura 4.18: Esboço da solução do caso (x). (a) Visão de como é o nó estável. (b) Esboço da solução com uma órbita periódica.

Resolvendo numericamente o sistema (4.6) tomando-se os valores dos parâmetros como sendo $\alpha = 2.3$, $a = 1$, $b = 2$, $\beta = 3$ e $\xi = 6.1$ comprovamos que ocorre o exposto acima, como podemos ver na Figura 4.19 (a). Fizemos uma escolha particular dos parâmetros para a resolução numérica, mas é interessante observar que para quaisquer valores dos parâmetros satisfazendo as condições $a < \beta/\alpha < b$ e $\Delta < 0$ para $|z| < 1$ e $\Delta > 0$ e $D > 0$ para $|z| > 1$, surge uma órbita periódica. Da mesma forma que no caso (q) e (w), neste também podemos observar que existe uma órbita periódica relacionada com cada equilíbrio na zona central, ver Figura 4.19 (b). De fato, cada uma delas fica contida num dos conjuntos de planos que contém as soluções.

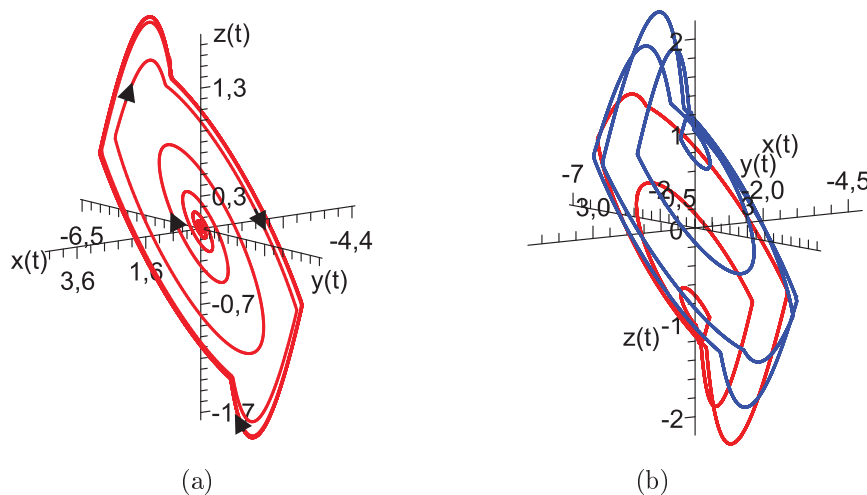


Figura 4.19: Solução numérica do caso (x) com os parâmetros $\alpha = 2.3$, $a = 1$, $b = 2$, $\beta = 3$ e $\xi = 6.1$. (a) Indica a existência de uma órbita periódica. (b) Indica a existência de órbitas periódicas associadas aos equilíbrios da zona central.

A seguir são apresentados os estudos dos casos (u) e (v) do Teorema 6.

4.5.4 Foco Instável - Sela - Foco Instável

Caso (u) Foco Instável - Sela - Foco Instável. Neste caso temos $a < \beta/\alpha < b$ e $\Delta > 0$ e $D < 0$ para $|z| < 1$ e $\Delta < 0$ para $|z| > 1$. Como os equilíbrios nas zonas externas são focos instáveis, quando a solução entra na zona central existem é possível que: a solução se une ou fica a esquerda da variedade estável da sela. Quando ocorre a união da solução que tem como conjunto α -limite o equilíbrio da zona externa com a variedade estável da sela, a solução da variedade instável da sela, ao entrar nas zonas externas, contorna os focos instáveis (ver Figura 4.20 (a)). Ao variarmos algum dos parâmetros, a solução que sai da zona externa ao entrar na zona central fica a esquerda da variedade estável da sela, logo quando a solução entra na zona central contorna as variedades da sela e retorna a zona externa. Neste caso, a variedade instável da sela, ao entrar na zona externa pode contornar a solução formada pelo foco instável e se unir a variedade estável da sela, quando entrar na zona central novamente. Assim, surgem duas órbitas homoclínicas, formando a “figura oito” como esboçamos na Figura 4.20 (b). Quando esta última solução não se une a variedade estável da sela, ela acompanha a solução formada pelo foco instável, envolvendo-a, formando duas (por causa da simetria do sistema) órbitas periódicas, Figura 4.20 (c)

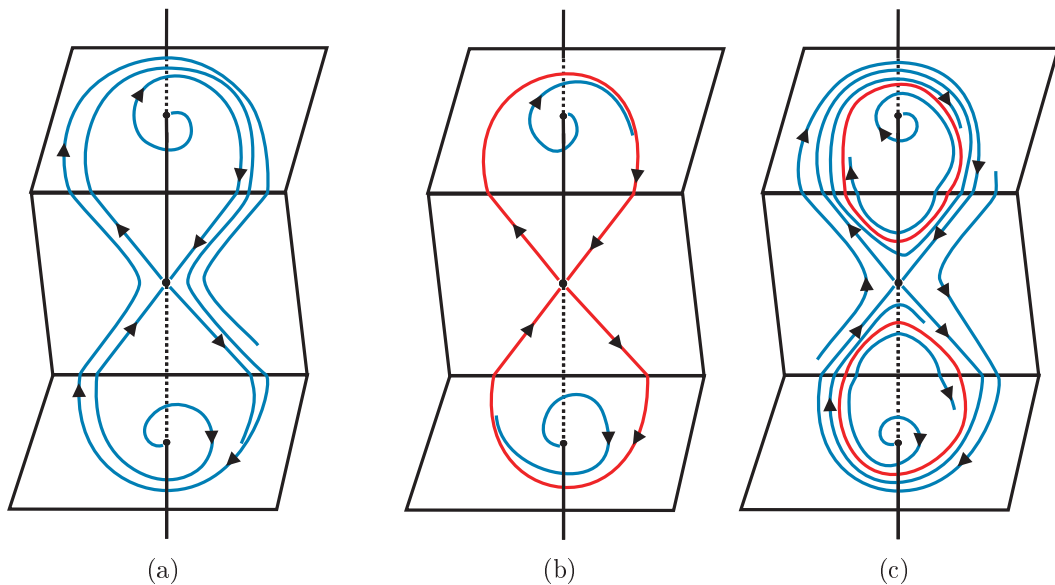


Figura 4.20: Esboço do caso (u). (a) Existem duas órbitas heteroclínicas e não há órbitas periódicas. (b) Existem duas órbitas homoclínicas, formando a “figura oito”. (c) Existem duas órbitas periódicas simétricas com relação à origem.

Tomando-se os valores dos parâmetros como sendo $\alpha = 1.8$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 25$ e $\beta = 6$ e integrando o sistema numericamente, obtivemos a solução mostrada na Figura 4.21 (a) que indica o seguinte: a solução que começa próxima do ponto de equilíbrio

na origem, através das variedades instáveis, contorna os pontos de equilíbrio nas zonas externas e tendem ao infinito. A solução que supostamente tem como conjunto α -limite o equilíbrio na zona externa se une a variedade estável da sela na zona central. O que sugere que existe duas órbitas heteroclínicas, ligando os focos na zona externa à sela na zona central. Ao alterarmos o valor do parâmetro α para 2.08, a solução, citada acima, que antes se unia a variedade estável da sela, agora fica a sua esquerda. É a solução que começa no equilíbrio da zona central e contorna os equilíbrios nas zonas externas que se une as variedades estáveis da sela. Logo, esta mudança no valor do parâmetro α indica o surgimento de duas órbitas homoclínicas, formando a figura de um “oito”, mostrada na Figura 4.21 (b).

Quando aumentamos novamente o parâmetro α para 3.1 surge outra situação. Agora a solução numérica encontrada sugere que temos duas órbitas periódicas simétricas com relação à origem que ficam em duas zonas, veja Figura 4.21 (c). Assim, encontramos numericamente a solução semelhante ao esboço mostrado na Figura 4.20 (c).

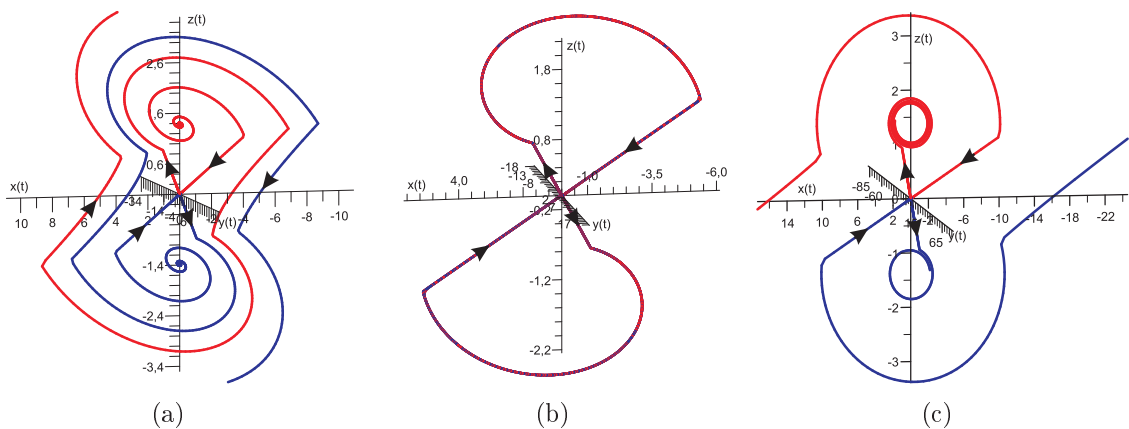


Figura 4.21: Solução numérica do caso (u) com os parâmetros (a) $\alpha = 1.8$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-20, 20]$. (b) $\alpha = 2.08$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[0, 30]$. (c) $\alpha = 3.1$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-10, 20]$.

Neste caso, podemos observar que os resultados são similares aos de Freire et al. [5], apresentados no Capítulo 3, quando os autores trabalham com sistemas lineares por partes no plano com três zonas e três pontos de equilíbrio. Os autores estudaram o caso foco-sela-foco, mesma configuração que temos no caso (u). Observando a solução apresentada na Figura 4.21 (a), indica que não existem nem ciclos limites e nem órbitas homoclínicas, como no caso (a3) da Proposição 2; na solução da Figura 4.21 (b) é semelhante a solução da afirmação (a2) da Proposição 2 do Capítulo 3. E como na afirmação (a1) do mesmo resultado, temos a solução mostrada na Figura 4.21 (c).

Acima notamos que ao alterar o parâmetro α , mudamos a posição (em relação as variedades estáveis da sela) em que as órbitas que supostamente tem como conjunto α -limite o equilíbrio nas zonas externas “entram” na zona central. Agora veremos que

mudando o mesmo parâmetro há indícios de que surgem órbitas periódicas que englobam os três equilíbrios.

No caso em que a solução sugere a existência de duas órbitas heteroclínicas, isto é, órbitas que ligam pontos nas zonas externas ao equilíbrio na zona central, como mostrado na Figura 4.21 (a), ao alterarmos o parâmetro α de 1.8 para 2 a solução numérica encontrada indica o surgimento uma órbita periódica que engloba os focos e o ponto de sela, como mostrado na Figura 4.22 (a). A Figura 4.22 (b), que apresenta o gráfico da coordenada $z(t)$ contra o tempo t , indica a existência da órbita periódica. Observe que a solução que tem como conjunto α -limite o equilíbrio na zona externa, no futuro, tende a uma órbita periódica. Este caso é semelhante ao da afirmação (b4) da Proposição 2 do Capítulo 3.

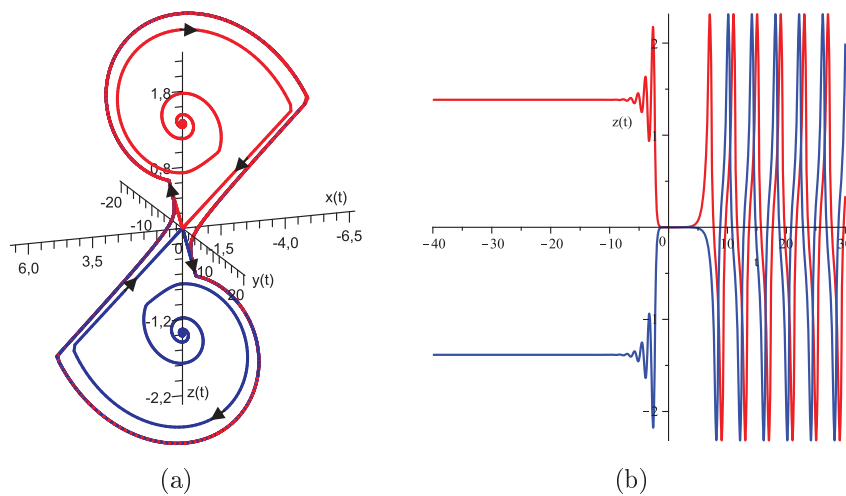


Figura 4.22: (a) Solução numérica do caso (u) com parâmetros $\alpha = 2$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-40, 30]$, que indica a existência de uma órbita periódica. (b) Gráfico $z(t) \times t$ da solução de (a).

Numericamente detectamos também o surgimento de uma órbita periódica, no caso em que existem duas órbitas periódicas simétricas com relação à origem, isto é, o caso mostrado na Figura 4.21 (c). Quando tomamos o valor de α igual à 2.2 observamos que a solução numérica, mostrada na Figura 4.23 (a), sugere a existência de duas órbitas periódicas simétricas em relação à origem e a solução que se afasta dos equilíbrios tendendo a uma órbita periódica. Esta última órbita engloba as duas órbitas periódicas simétricas. Assim, no passado, temos uma órbita periódica com partes nas três zonas, e no futuro temos duas órbitas periódicas simétricas com relação à origem com partes em duas zonas. Este caso é semelhante ao descrito na afirmação (b1) da Proposição 2 do Capítulo 3.

Na Figura 4.23 (b) podemos observar evidências da existência de duas órbitas periódicas simétricas com relação à origem com partes em duas zonas e da órbita que engloba estas órbitas “menores” e o equilíbrio na zona central. As soluções que tendem a órbita periódica no passado (azul e vermelha), tendem no futuro para as duas órbitas periódicas

menores. Enquanto que a solução que tem como conjunto α -limite o equilíbrio na zona externa tende a uma órbita periódica.

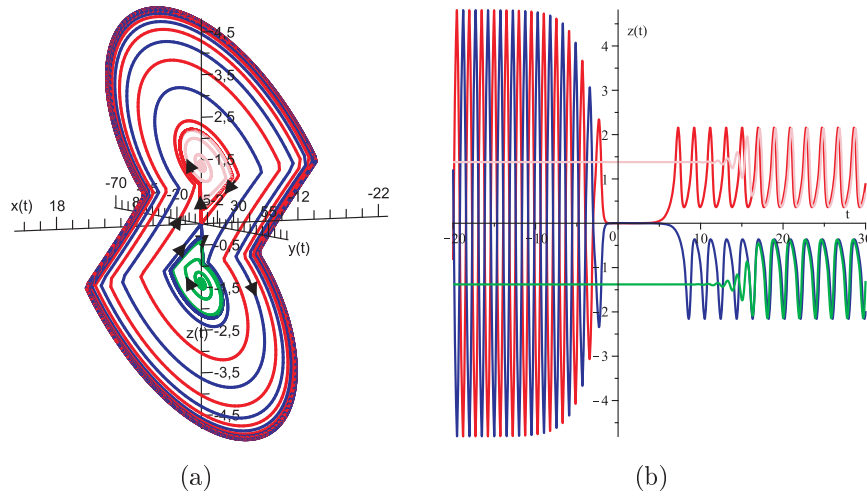


Figura 4.23: Solução numérica do caso (u) com os parâmetros $\alpha = 2.2$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 25$ e $\beta = 6$ e tempo $[-20, 20]$ que indica a existência de dois ciclos limites simétricos com relação à origem e uma órbita periódica englobando os dois ciclos limites.

A Figura 4.24 mostra as órbitas periódicas deste caso separadamente. Na Figura 4.24 (a) no tempo $[-25, -20]$ e na Figura 4.24 (b) no tempo $[20, 30]$ (nesta figura mudamos um pouco a escala para melhor visualizar as órbitas periódicas).

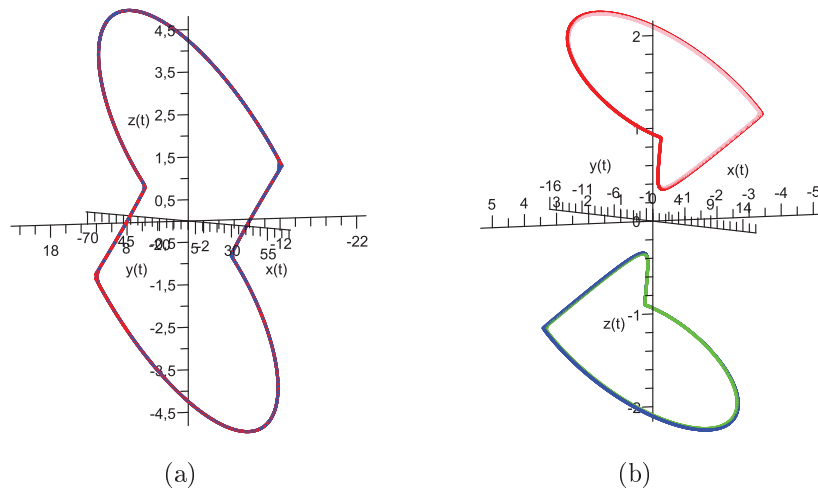


Figura 4.24: Solução numérica do caso (u). (a) No tempo $[-25, -20]$, que indica a existência da órbita periódica com partes nas três zonas. (b) No tempo $[20, 30]$ indicando a existência de dois ciclos limites simétricos com relação à origem.

4.5.5 Foco Instável - Nó Estável - Foco Instável

Caso (v) Foco Instável - Nó Estável - Foco Instável. No caso (v) do Teorema 6, temos $a < \beta/\alpha < b$ e $\Delta > 0$ e $D > 0$ para $|z| < 1$ e $\Delta < 0$ para $|z| > 1$. Os equilíbrios são

nós estáveis para $|z| < 1$ e focos instáveis para $|z| > 1$. A solução que tem como conjunto α -limite os equilíbrios da zona central, podem ter como conjunto ω -limite uma órbita periódica ou tender ao infinito. Na Figura 4.25 (a) quando a solução tende ao infinito e na Figura 4.25 (b) podemos ver o esboço da solução quando temos uma órbita periódica.

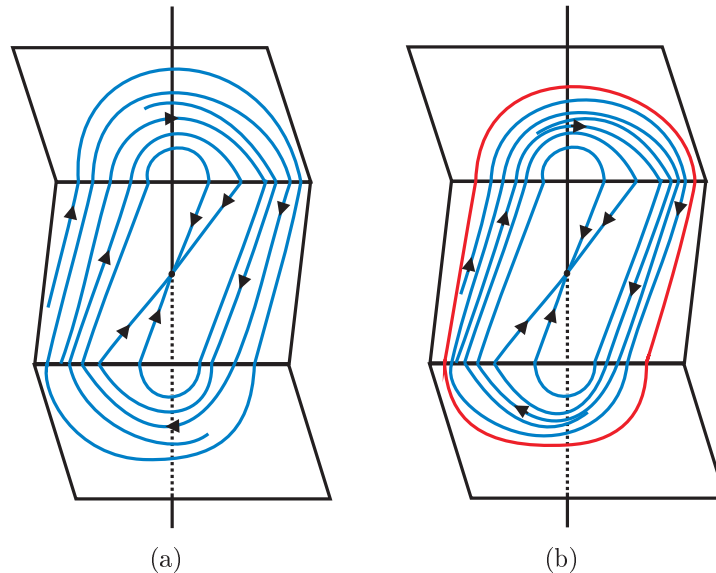


Figura 4.25: Esboço da solução do caso (v). (a) Quando não existe órbita periódica. (b) Quando existe uma órbita periódica.

Tomando valores específicos dos parâmetros para satisfazer as condições necessárias para este caso, a resolução numérica é mostrada na Figura 4.26. As condições iniciais utilizadas foram pontos pertencentes às retas geradas pelos autovetores v_2 e v_3 associados aos equilíbrios não nulos em $|z| < 1$. Na Figura 4.26 (a) foram utilizados os parâmetros $\alpha = 2.9$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 31$ e $\beta = 6$; podemos notar que a solução numérica tende ao infinito. Quando alteramos o valor do parâmetro α para 2 a solução encontrada sugere a existência de uma órbita periódica, que é o conjunto ω -limite da solução, como podemos observar na Figura 4.26 (b).

Na Figura 4.27 (a) temos os mesmos valores de parâmetros da Figura 4.26 (b) com o tempo $[-18, -16]$, mostrando apenas a solução que indica a existência de uma órbita periódica. Podemos observar que ocorre mudança de estabilidade local do ponto de equilíbrio quando z atravessa os pontos de descontinuidade do sistema (4.6), ou seja, os planos $z = \pm 1$. Essa mudança na estabilidade dos pontos gera as oscilações periódicas (instáveis). Na Figura 4.27 (b) tomamos condições iniciais com $|z| > 1$, isto é, quando os equilíbrios são focos instáveis. Note que com os mesmo valores de parâmetros e com o tempo $[-8, 4]$ indicam o surgimento órbitas periódicas.

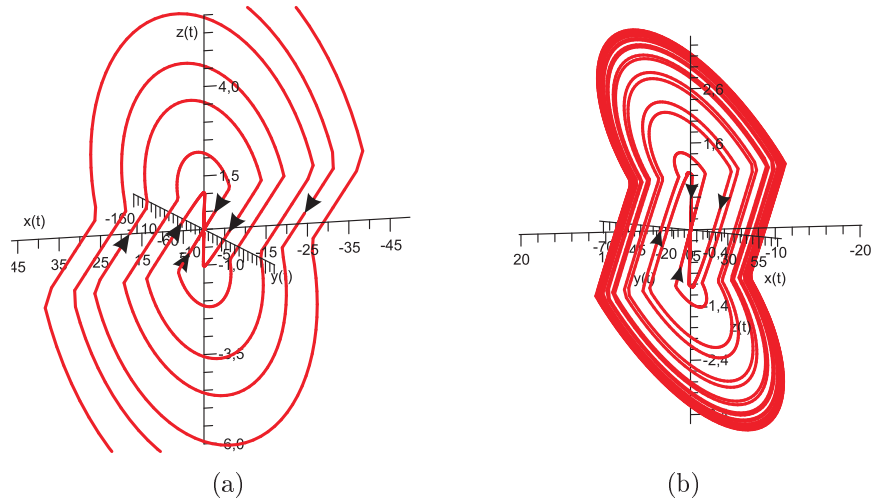


Figura 4.26: Solução numérica do caso (v) com os parâmetros (a) $\alpha = 2.9$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $[-8, 5]$. (b) $\alpha = 2$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $[-8, 4]$.

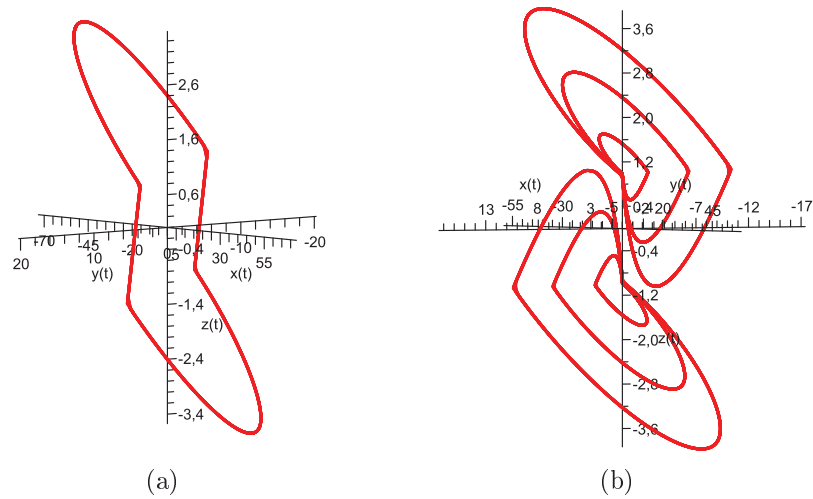


Figura 4.27: Solução numérica do caso (v) com os parâmetros (a) $\alpha = 2$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $[-18, -16]$. (b) $\alpha = 2$, $a = 5$, $b = 2$, $\xi = 31$ e $\beta = 6$ e tempo $t = -8.4$.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos o estudo de sistemas lineares por partes no plano com três zonas, desenvolvido em [5]. Utilizamos as ideias deste trabalho no estudo analítico e numérico de um modelo matemático de um circuito elétrico envolvendo um memristor, um resistor, um capacitor e um indutor, os quatro elementos eletrônicos fundamentais. O memristor envolvido no circuito é caracterizado por uma função linear por partes, o que implica em que o modelado matemático associado seja dado pelo sistema (4.6), que é um sistema linear por partes, definido em três zonas no $\mathbb{R}^3$. O circuito e seu modelo matemático foram propostos por Itoh e Chua em [9] e uma primeira análise teórico computacional do mesmo foi elaborada por Messias et al. em [12].

A partir dos estudos desenvolvidos em [5, 9, 12], obtivemos alguns resultados analíticos e numéricos que complementam aqueles obtidos em [12]. A dinâmica do modelo se mostrou bastante rica, com várias possibilidades para as soluções. Dentre estes, analisamos os casos que consideramos mais relevantes, do ponto de vista do estudo dos circuitos elétricos, ou seja, aqueles em que é possível a ocorrência de oscilações não-lineares para as soluções do sistema. Em [9] foi provado que o sistema não apresenta comportamento caótico, pois é equivalente a um sistema plano. Deste modo, os tipos de oscilações aqui descritos representam os comportamentos dinâmicos mais interessantes para o sistema analisado.

Apesar de o sistema estudado ser formado por funções lineares em cada zona, surgem grandes dificuldades ao se tentar provar analiticamente a existência de soluções periódicas, obtidas numericamente neste trabalho. A dificuldade maior ocorre ao se tentar determinar analiticamente o ponto exato em que as soluções atingem os pontos de descontinuidade, nos planos $|z| = 1$. Tais pontos são importantes na definição de uma forma analítica para a transformação de Poincaré associada ao sistema e no cálculo dos pontos fixos desta transformação, que determinariam as órbitas periódicas. Assim, depois de muito esforço na tentativa de provar analiticamente a existência de tais órbitas, porém sem êxito,

optamos por apresentar os resultados numéricos obtidos, descrevendo-os e justificando-os com base no estudo analítico apresentado em [5].

O estudo aqui apresentado ainda não é exaustivo, dada a riqueza de possibilidades dinâmicas para as soluções do sistema analisado. Restam, por exemplo, o estudo dos casos em que as soluções ficam contidas numa combinação de três planos invariantes, com equilíbrios somente em uma das zonas externas. Estes casos são deixados para trabalhos futuros, a serem desenvolvidos por nós ou outros interessados.

Referências Bibliográficas

- [1] BERNARDO, M., BUDD, C., CHAMPNEYS, A.R., KOWALCZYK, P. Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications, 7ed. Springer, 2008. v. 163
- [2] CARDIN, P. T. Ciclos Limites e a equação de van der Pol. 2008. 138 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto.
- [3] CHUA, L. O. Memristor - the missing circuit element. *IEEE Transactions on Circuit Theory* 18, 5 (1971), 507–519.
- [4] FREIRE, E., PONCE, E., RODRIGO, F. AND TORRES, F. Bifurcation sets of symmetrical continuous piecewise linear systems with two zones. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 8, 11 (1988), 2073–2097.
- [5] FREIRE, E., PONCE, E., RODRIGO, F. AND TORRES, F. Bifurcation sets of symmetrical continuous piecewise linear systems with three zones. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 12, 8 (2002), 1675–1702.
- [6] GERGEL-HACKETT, N. ET AL. A flexible solution-processed memristor. *IEEE Electron Device Letters* 30, 7 (2009), 706–708.
- [7] HARIDAS, M., PATIL, S. AND MANJUNATH, T. C. Recent atc's in the design of memristors. *International Journal of Computer and Electrical Engineering* 2, 3 (2010), 1793–8163.
- [8] ITOH, M. AND CHUA, L. O. Memristor cellular automata and memristor discrete-time cellular neural networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 19, 11 (2009).
- [9] ITOH, M. AND CHUA, L. O. Memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 18, 11 (2008), 3183–3206.
- [10] KAVEHEI, O. ET AL. The fourth element: characteristics, modelling and electromagnetic theory of the memristor. *Proceedings of the Royal Society A-Mathematical Physical and Engineering Sciences* 466 (2010), 2175–2202.

-
- [11] MACIEL, A. L. Bifurcações de Campos Vetoriais Descontínuos. 2009. 178 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [12] MESSIAS, M., NESPOLI, C. AND BOTTA, V. A. Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 20, 2 (2010), 437–450.
- [13] MORAES, J. R. Ciclos Limites de Sistemas Lineares por Partes. 2011. 121 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto.
- [14] PERKO, L. Differential Equations and Dynamical Systems Springer, New York, 2000.
- [15] RIAZA, R. Dynamical properties of electrical circuits with fully nonlinear memristors. Disponível em: arXiv:1008.2528v1, 2010.
- [16] RIAZA, R. First order devices, hybrid memristors, and the frontiers of nonlinear circuit theory. Disponível em: arXiv:1010.0123v1., 2010.
- [17] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides. IMPA, 1979.
- [18] STRUKOV, D. B., SNIDER, G. S., STEWART, D. R. AND WILLIAMS, R. S. The missing memristor found. *Nature* 453 (Maio 2008), 80–83.
- [19] VERGES, M. C. Regularização e Análise Qualitativa de Modelos da Teoria do Controle. 2003. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- [20] WANG, F. Y. Memristor for introductory physics. Disponível em: arXiv:0808.0286v1, Agosto 2008.
- [21] WILLIAMS, R. S. How we found the missing memristor. *IEEE Spectrum* 45, 12 (Dezembro 2008), 28–35.
- [22] YU, Q., QIN, Z., YU, J. AND MAO, Y. Transmission characteristics study of memristors based op-amp circuits. *Proc. IEEE Int. Conf. on Communications, Circuits and Systems, ICCAS* (2009), 974–977.

Teorema de Liénard

A prova deste teorema foi baseada em [2] e em [14].

Teorema 7 (Liénard) *Considere o seguinte sistema de Liénard*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) - y, \\ \dot{y} = g(x), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} T_E x + (T_E - T_C), & \text{se } x \leq -1, \\ T_C x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ T_E x - (T_E - T_C), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} D_E x + (D_E - D_C), & \text{se } x \leq -1, \\ D_C x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ D_E x - (D_E - D_C), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Suponhamos que as funções $F(x)$ e $g(x)$ no sistema (A.1) satisfaçam as seguintes condições:

- $F(x) = -F(-x)$, $g(x) = -g(-x)$;
- $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$;
- $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$;
- Quando $x > 0$, a equação $F(x) = 0$ tem uma única raiz $x_0 = 1 - (T_C/T_E) > 1$;
- Para $x \geq x_0$ quando $x \rightarrow \infty$ F decresce monotonamente para menos infinito;
- As funções F e g têm derivadas contínuas para todo x , com exceção dos pontos $x \pm 1$ onde as duas funções têm derivadas laterais diferentes. Considere $T_C > 0$, então o sistema (A.1) tem uma única solução periódica não constante que é estável.

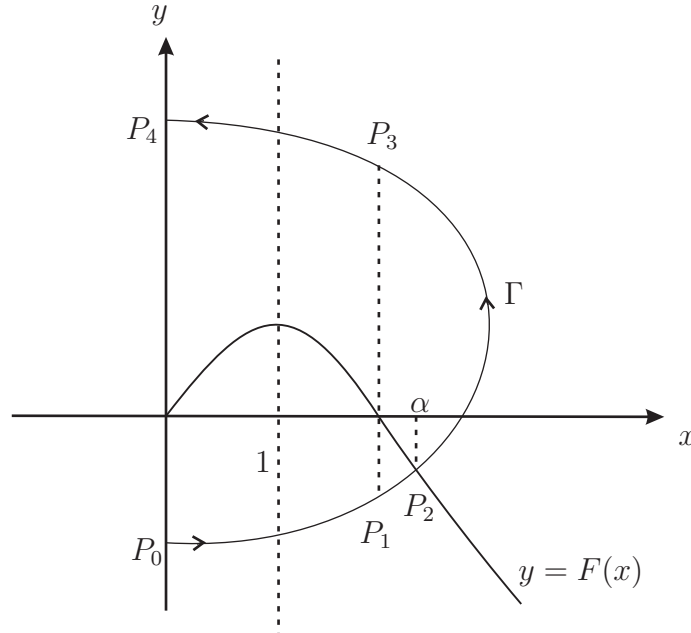


Figura A.1: Plano com trajetória Γ .

Na prova do Teorema 7 usaremos o diagrama apresentado na Figura A.1 onde os pontos P_j tem coordenadas (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \dots, 4$ e Γ é a trajetória do sistema de Liénard (A.1). A função $F(x)$ que é mostrada na figura é uma típica função que satisfaz as hipóteses do teorema.

Demonstração. As funções $F(x)$ e $g(x)$ são de classe C^0 em $\mathbb{R}^2$ e de classe C^1 em cada uma das zonas. No entanto, elas satisfazem a condição de Lipschitz em todo o $\mathbb{R}^2$. Logo, é possível aplicar o Teorema de Existência e Unicidade ao sistema (A.1). Assim, existe uma única solução que passa por cada ponto $(x(t), y(t))$ do plano.

Como por hipótese as funções F e g são ímpares, é fácil verificar que o campo $X(x, y) = (F(x) - y, g(x))$ é simétrico com relação à origem, isto é, $X(-x, -y) = -X(x, y)$. Então se $\Gamma(x, z)$ é uma trajetória do sistema (A.1) então $\Gamma(-x, -z)$ também será, isto quer dizer que se Γ é uma trajetória fechada do sistema (isto é, periódica) então deve ser simétrica com relação à origem.

Do sistema (A.1) vemos que toda solução $(x(t), y(t))$ é tal que $x(t)$ é crescente onde $y(t) < F(x(t))$ e decrescente onde $y(t) > F(x(t))$. Também $y(t)$ é decrescente se $x(t) < 0$ e crescente se $x(t) > 0$. Além disso o campo de vetores $(F(x) - y, g(x))$ é horizontal no eixo y e vertical na curva $y = F(x)$. Assim, qualquer trajetória Γ começando de um ponto P_0 sobre o eixo negativo y , deve cruzar verticalmente a curva $y = F(x)$ no ponto P_2 e então cruzar horizontalmente o eixo positivo y no ponto P_4 [14]. Pela simetria, se Γ é uma trajetória fechada do sistema (A.1) se e somente se $y_4 = -y_0$; e para

$$u(x, y) = \frac{z^2}{2} + G(x),$$

isto é equivalente a $u(0, y_4) = u(0, y_0)$, onde $G(x) = \int_0^x g(s)ds$.

Seja A o arco que vai de P_0 até P_4 sobre a trajetória Γ e considere a função definida pela seguinte integral de linha,

$$\phi(\alpha) = \int_A du = u(0, y_4) - u(0, y_0),$$

onde α é a abscissa do ponto P_2 , isto é, $\alpha = x_2$. Segue que Γ é uma trajetória fechada do sistema (A.1) se e somente se $\phi(\alpha) = 0$, para isto, mostraremos que a função $\phi(\alpha)$ tem exatamente uma raiz $\alpha = \alpha_0$ para $\alpha_0 > x_0$. Notemos que sobre Γ

$$du = g(x)dx + ydy = F(x)dy.$$

Se $\alpha \leq x_0$ então $F(x) > 0$ e $dy = g(x)dt > 0$. Então $du > 0$, ou seja, que $\phi(\alpha) > 0$, logo $u(0, y_4) > u(0, y_0)$. Assim, qualquer trajetória Γ que cruza a curva $z = F(x)$ no ponto P_2 com $0 < x_2 = \alpha \leq x_0$ não é fechada.

Agora vejamos que para todo $\alpha \geq x_0$, a função $\phi(\alpha)$ é monótona crescente e cresce desde o valor negativo $\phi(x_0)$ até $+\infty$ quando α cresce no intervalo $[x_0, \infty)$.

Para $\alpha \geq x_0$, como na Figura A.1, vamos decompor o arco A em três partes: A_1 que vai de P_0 até P_1 , A_2 que vai de P_1 até P_3 e A_3 que vai de P_3 até P_4 e definir as funções:

$$\phi_1(\alpha) = \int_{A_1} du, \quad \phi_2(\alpha) = \int_{A_2} du, \quad \text{e} \quad \phi_3(\alpha) = \int_{A_3} du.$$

Portanto $\phi(\alpha) = \phi_1(\alpha) + \phi_2(\alpha) + \phi_3(\alpha)$. Ao longo de Γ se tem que

$$\begin{aligned} du &= F(x)dy = \left(y + \frac{dx}{dt} \right) \frac{dy}{dx} dx \\ &= y \frac{dy}{dx} dx + \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} dx \\ &= y \frac{dy}{dx} dx + \frac{dy}{dt} dx \\ &= \left(y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dt} \right) dx \\ &= \left(g(x) + y \frac{g(x)}{F(x) - y} \right) dx \\ &= \left(\frac{-yg(x) + F(x)g(x) + yg(x)}{F(x) - y} \right) dx \\ &= \left(\frac{F(x)g(x)}{F(x) - y} \right) dx. \end{aligned}$$

Ao longo de A_1 temos

$$\phi_1(\alpha) = \int_0^{x_0} \frac{g(x)F(x)}{F(x) - y} dx,$$

que $F(x) > 0$, $g(x) > 0$ e $\frac{dx}{F(x) - y} = dt < 0$. Portanto, $\phi_1(\alpha) < 0$. Para cada x fixado em $[0, x_0]$, quando aumentamos α o arco A_1 abaixa, decrescendo y , e assim $F(x) - y$ decresce. Logo o integrando $\frac{g(x)F(x)}{F(x) - y}$ aumenta. Portanto $\phi_1(\alpha)$ cresce quando α cresce.

Sobre A_3 temos

$$\phi_3(\alpha) = \int_{x_0}^0 \frac{g(x)F(x)}{F(x) - y} dx = - \int_0^{x_0} \frac{g(x)F(x)}{F(x) - y} dx = \int_0^{x_0} \frac{g(x)F(x)}{-(F(x) - y)} dx,$$

que $F(x) > 0$, $g(x) > 0$ e $\frac{dx}{F(x) - y} = dt > 0$. Logo, $\phi_3(\alpha) < 0$. Para cada x fixado em $[0, x_0]$, quando aumentamos α o arco A_3 sobe, o que faz com que y cresça, e portanto $F(x) - y$ também cresça. Assim $-(F(x) - y)$ decresce e $\phi_3(\alpha)$ cresce quando α cresce.

Sobre A_2 , a integral está definida para $y_1 \leq y \leq y_3$ e $x \geq x_0$. Para cada x fixado em $[y_1, y_3]$, aumentando x , diminui-se $F(x)$ e como

$$\phi_2(x) = \int_{y_3}^{y_1} F(x) dy = F(x)(y_3 - y_1),$$

isto mostra que $\phi_2(\alpha)$ é crescente. Portanto, para $\alpha \geq x_0$, ϕ é uma função monotóna crescente de α .

Como

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \phi_2(\alpha) = \infty,$$

então $\phi(\alpha) \rightarrow +\infty$ quando $\alpha \rightarrow \infty$.

Finalmente, como $\phi(x_0)$ é uma função contínua que cresce monotonamente desde o valor negativo $\phi(x_0)$ até ∞ quando α cresce em $[x_0, \infty)$, segue que existe um $\alpha_0 \in (x_0, \infty)$ tal que $\phi(\alpha_0) = 0$. Assim, o sistema (A.1) tem exatamente uma trajetória fechada Γ que passa pelo ponto $(\alpha_0, F(\alpha_0))$.

Além disso, desde que $\phi(\alpha) > 0$ para $\alpha > \alpha_0$, segue da simetria do sistema (A.1) que para $\alpha \neq \alpha_0$, pontos sucessivos da intersecção da trajetória Γ através do ponto $(\alpha, F(\alpha))$ com o eixo z aproximam-se de Γ_0 , isto é, Γ_0 um ciclo limite estável.

■