

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

O FORMALISMO DE CARTAN NA
TEORIA DE GRAVITAÇÃO

Guaratinguetá
1993



1110000233



PAULINO FRULANI DE PAULA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

ESPECIALIDADE: FÍSICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: FÍSICA DE PLASMAS

O Formalismo de Cartan na Teoria de Gravitação

Paulino Frulani de Paula.

Prof. Dr. MANOEL FERREIRA BORGES NETO
Orientador

Prof. Dr. JOSÉ LOURENÇO CENDRA

Prof. Dr. ADILSON JOSÉ DA SILVA

Dezembro de 1993

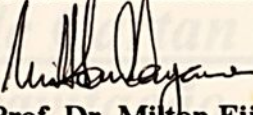
"O FORMALISMO DE CARTAN NA TEORIA DE GRAVITAÇÃO"

PAULINO FRULANI DE PAULA

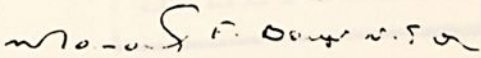
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

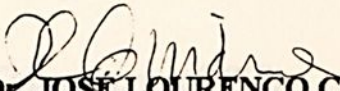
ESPECIALIDADE: FÍSICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: FÍSICA DE PLASMAS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Milton Eiji Kayama
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. MANOEL FERREIRA BORGES NETO
Orientador


Prof. Dr. JOSÉ LOURENÇO CINDRA


Prof. Dr. ADILSON JOSÉ DA SILVA

Dezembro de 1993

Dedicatória

CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO

UNESP - Universidade Estadual Paulista

FEG - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Dissertação de Mestrado

*A minha esposa Mônica, companheira
compreensiva e paciente de todos os momentos,
pelo incentivo ao presente trabalho e pela
companhia sempre amiga e carinhosa.*

Título:

**O Formalismo de Cartan na
Teoria de Gravitação**

*... presença terna e
carinhosa, pelo exemplo de vida e orientação
sempre sãbia e prudente.*

Aluno: Paulino Frulani de Paula.

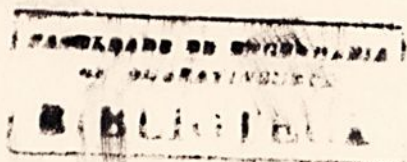


Orientador: Manoel Ferreira Borges Neto

**Local e data da defesa: Campus da UNESP, Guaratinguetá (SP),
em 17.12.1993.**

0 233

233



CARO LECTOR NÃO
RISQUE O LIVRO

UNESP - Universidade Estadual Paulista
FEC - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Dissertação de Mestrado

Título:

O Formalismo de Cartan na
Teoria de Gravitacão

T531.5 (043)
P324 f

BIBLIOTECA
FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ

Aluno: Paulino Frulani de Paula

Orientador: Manoel Ferreira Borges Neto

Local e data da defesa: Campus da UNESP, Guaratinguetá (SP),
em 17.12.1993.

0 233

BIBLIOTECA
FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ

Dedicatória

*À minha esposa Mônica, companheira
compreensiva e paciente de todos os momentos,
pelo incentivo ao presente trabalho e pela
companhia sempre amiga e carinhosa.*

*Aos meus pais, Jairo e Bianca, presença terna e
carinhosa, pelo exemplo de vida e orientação
sempre sábia e prudente.*

Agradecimentos

Abstract

Ao Professor Manoel Ferreira Borges Neto, orientador amigo e incentivador de todos os momentos, sem o qual esse trabalho absolutamente não seria possível.

Aos Professores José Lourenço Cindra, Marisa Andreata Whitaker e Adilson José da Silva pelas valiosas sugestões apresentadas.



"Cartan's Formalism in Gravitation Theory"

Abstract

The main purpose of this work is to give to the reader a better understanding of Cartan's mathematics related to exterior algebra and differential forms, and discussing the way these may be applied to General Relativity and to the Cartan-Einstein gravity theory.

As far as it was possible many of the topics discussed here were introduced and developed in a different form even when they are compared to other specialized texts. Certainly the topics concerned the intrinsic geometry (concepts of Vierbein and Cartan connexion), the open and the closed paralelogram are among these.

The Cartan-Einstein gravity theory exists since Cartan wrote a letter to Einstein in the later twenties telling him about the importance of the antisymmetric tensor of torsion in general relativity. In recent years the Cartan-Einstein theory has been extended in order to approximate gravity to the other forces existents in nature.

"O FORMALISMO DE CARTAN NA TEORIA DE GRAVITAÇÃO"

ÍNDICE GERAL

PREFÁCIO

Resumo

1 - A TEORIA DE RELATIVIDADE ESPECIAL

Introdução

O principal objetivo desta dissertação é o de oferecer ao leitor uma possibilidade de melhor entendimento da matemática de Elie Cartan relacionada a álgebra exterior e formas diferenciais, discutindo a partir daí o modo como estas podem ser aplicadas à relatividade geral e à teoria da gravitação de Cartan-Einstein.

Tanto quanto isso foi possível, muitos dos tópicos aqui discutidos foram introduzidos e desenvolvidos de um modo diferente mesmo quando comparados a outros textos especializados. Certamente entre estes estão os tópicos concernentes à geometria intrínseca (introdução da Vierbein e Conexão de Cartan na variedade) e ao paralelogramo aberto e fechado.

A teoria gravitacional de Einstein-Cartan existe desde que Cartan escreveu uma carta a Albert Einstein ao final dos anos vinte, dizendo-lhe sobre a importância do tensor antissimétrico de torção em relatividade geral. Em anos mais recentes a Teoria de Cartan-Einstein tem sido ampliada com o objetivo de aproximar a gravidade às outras forças existentes na natureza.

2.1.1.a - Variedades Riemannianas

2.1.1.b - Tétrades

2.1.1.c - Formas diferenciais

2.1.2 - Curvatura

O FORMALISMO DE CARTAN NA TEORIA DE GRAVITAÇÃO

ÍNDICE GERAL

PREFÁCIO	8
-----------------	---

1 - A TEORIA DE RELATIVIDADE ESPECIAL

Introdução	11
1.1 - As Transformações de Lorentz	14
1.2 - A Lei de Composição de Velocidades	21
1.3 - Os Grupos de Lorentz e Poincaré	23
1.4 - O Cone de Luz e o Espaço-Tempo de Minkowski	27

2 - TEORIA DE GRAVITAÇÃO

2.1 - Introdução

A Teoria de Einstein - a Relatividade Geral	30
--	----

2.1.1 - Variedades Riemannianas, Tétrades e Formas Diferenciais	32
---	----

2.1.1.a - Variedades Riemannianas;	32
------------------------------------	----

2.1.1.b - Tétrades;	38
---------------------	----

2.1.1.c - Formas diferenciais.	41
--------------------------------	----

2.1.2 - Curvatura	44
-------------------	----

2.1.3 - "O Paralelogramo Fechado"	
- O Tensor de Curvatura	44
2.1.4 - Os Tensores de Riemann-Christoffel, de Ricci e suas propriedades	51
2.1.5 - As Identidades de Bianchi	53
2.1.6 - O Princípio da Equivalência	55
2.1.7 - As Geodésicas	59
2.1.8 - Equações de Einstein	61
2.2 - A Teoria de Einstein-Cartan	
2.2.1 - Introdução	64
2.2.2 - "O Paralelogramo Aberto" - A Torção	66
2.2.3 - Curvatura, Torção e Conexão numa Variedade não Riemanniana	70
2.2.4 - A Teoria de Einstein-Cartan - Perspectivas	75
3 - CONCLUSÃO	78
4 - APÊNDICES	80
5 - BIBLIOGRAFIA	88

O FORMALISMO DE CARTAN NA TEORIA DE GRAVITAÇÃO

PREFÁCIO:

Três revoluções conceituais, ocorridas no início deste século, mudaram profundamente o entendimento do homem a respeito do universo físico: a Teoria Especial da Relatividade (1905), a Teoria Geral de Relatividade (1915) e a Mecânica Quântica (1925). Einstein foi responsável pelas duas primeiras teorias e auxiliou a dar forma à terceira. As instrospecções de Einstein sobre a física teórica, tiveram e tem tido profundo efeito no desenvolvimento da física na segunda metade deste século.

Einstein ficou profundamente impressionado com as conseqüências físicas do princípio de simetria (ou invariância) de Lorentz, encontrada como propriedade das equações de Maxwell, e trabalhou para ampliar o alcance dessa invariância. Esta idéia de uma invariância mais geral, conduziu, junto com o princípio de equivalência, à sua Teoria Geral de Relatividade. Podemos dizer que Einstein introduziu o conceito de que a simetria sugere interação. Este princípio desempenhou um papel essencial nos anos recentes, dando origem e possibilitando o desenvolvimento de várias teorias de campo, entre elas: a supersimetria e a super-gravidade. A invariância nas transformações de coordenadas deu origem à própria Relatividade Geral de Einstein.

Outro tema constante na percepção de Einstein sobre os fundamentos da física teórica deveu-se a sua parcialidade com os conceitos geométricos. Isto não surpreende, já que foi o próprio Einstein quem criou um profundo conceito de que a gravidade e a mecânica poderiam ser descritas em termos da geometria de Riemann. Ele procurou encontrar uma estrutura geométrica que desse origem ao eletromagnetismo, pois estava ciente do fato de que a invariância de Lorentz não era suficiente para obter as equações de Maxwell. Segundo ele, as equações de Maxwell implicavam na obtenção das equações do "Grupo de Lorentz", mas que estas não implicavam na obtenção das equações de Maxwell. Einstein estava ciente da necessidade de obter estruturas geométricas que resultassem em equações não lineares, já que as verdadeiras leis, segundo ele próprio, não poderiam ser lineares nem tampouco derivar delas.



A análise de Einstein sobre o sentido da física teórica e seu desenvolvimento podem ser obtidos nos seus próprios escritos: "... a base axiomática da física teórica não pode ser extraída da experiência, mas deve ser livremente criada ... A experiência deve sugerir os conceitos matemáticos apropriados, mas eles não podem certamente ser deduzidos dele ... mas o princípio criativo reside na matemática. Num certo sentido, portanto, eu julgo verdadeiro que o pensamento puro pode compreender a realidade como os antigos sonharam." Estas declarações não significavam que Einstein considerasse a física como uma parte da matemática, nem tampouco que a física teórica fundamental teria a tradição e o estilo da matemática, mesmo porque ele se considerava um físico e não um matemático. Ele esclareceu estas declarações de modo mais profundo, em suas Notas Autobiográficas: "...meu interesse no conhecimento da natureza foi também inqualificavelmente forte; e não estava claro para mim, como estudante, que a aproximação para um conhecimento mais profundo dos princípios básicos da física estava vinculado aos mais intrincados métodos matemáticos. Isto nasceu-me somente gradualmente após anos de trabalho científico independente. Na verdade, os físicos também estavam divididos em campos separados, cada qual foi capaz de devorar pequena parte da vida de trabalho sem satisfazer sua fome por conhecimento mais profundo. A massa de dados experimentais insuficientemente conectados foi preponderante aqui também." Einstein compreendeu, por sua própria experiência e da grande revolução no início do século, que, embora os físicos permanecessem fundamentados em leis experimentais, mais e mais a simplicidade e beleza matemáticas estavam exercendo importante papel na formação de conceitos na física fundamental.

A procura de Einstein em obter uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo conduziu distintos matemáticos como Tullio Levi-Civita, H. Weyl e sobretudo Elie Cartan a analisarem mais profundamente a estrutura matemática do espaço-tempo.

Algumas das sugestões colocadas por Elie Cartan, há aproximadamente 80 anos, deram origem, nos anos sessenta, a hoje conhecida teoria de gravitação de Einstein-Cartan. A análise ainda que sucinta, a interpretação e algumas das perspectivas daquele formalismo, apresentadas sob uma visão mais moderna, são os objetivos a que a presente dissertação almeja alcançar. O trabalho ora apresentado, se propõe inicialmente a expor em breves resumos as teorias da relatividade especial



(Capítulo 1), relatividade geral (Capítulo 2 - 1a. parte), e finalmente, introduzir o formalismo de Cartan em gravitação - Teoria de Einstein-Cartan - (Capítulo 2 - 2a. parte), reinterpretando-a a partir de uma série de trabalhos apresentadas nos anos oitenta pelos grupos de Varsóvia (Trautmann e Kopczynski) e de Turin (Regge, D'Auria e Fré).

Essa formulação introduzida por Cartan, emprega formas diferenciais como elementos de uma álgebra - álgebra exterior - associados por uma operação conhecida como diferenciação exterior. Essa variante é completamente autônoma com respeito à tradicional que empregava o cálculo diferencial absoluto e o conceito do paralelismo de Ricci e de Levi-Civita.

Um dos objetivos a que se propõe essa dissertação é o de apresentar a assim chamada Teoria de Einstein-Cartan de forma a que possa servir também de introdução matemática e pedagógica a quem nela tenha interesse em especializar-se. Visando essa meta, a forma de apresentação de alguns tópicos aqui é original em relação a outros textos didáticos de relatividade geral.

O interesse crescente que a Teoria de Einstein - Cartan tem obtido junto à comunidade de físicos teóricos, de alguns matemáticos, deve-se talvez ao fato de que se uma teoria unificada da natureza deva ser buscada, ela poderá ser atingida "não tanto por substituir as equações de Einstein, como por expandi-la em uma teoria generalizada" (A Trautmann).

Guaratinguetá, 13 de outubro de 1993.

Paulino Frulani de Paula

1 - A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Introdução

O ponto de partida desse capítulo será uma breve apresentação da relatividade restrita [1]. Nesta teoria o conjunto dos eventos físicos se desenvolvem no âmbito de um contínuo, dito espaço-tempo M de Minkowski. Os elementos desse espaço-tempo são chamados eventos e são caracterizados por ter coordenadas espaciais x, y, z e pelo tempo t , tal que $x = x^1, y = x^2, z = x^3, t = x^4$ ($x^\alpha, \alpha = 1, 2, 3, 4$). Cada fenômeno físico se pode representar como uma sucessão de eventos em M . O espaço-tempo contém matéria e cabe à física estudar as suas propriedades.

Como coordenada temporal, se introduz alternativamente $x^0 = ct$, onde c é a velocidade da luz no vácuo; neste caso os índices α assumem os valores 0, 1, 2, 3.

A evidência empírica mostra que o mesmo contínuo espaço-tempo pode ser descrito por infinitos observadores diversos, ditos inerciais, cujo movimento recíproco é retilíneo e uniforme. Para estes observadores, vale o princípio de inércia, isto é, um corpo sobre o qual não age força, se move de modo retilíneo uniforme.

Sejam $\underline{A}$ e $\underline{B}$ observadores inerciais genéricos e $\underline{P}$ um evento genérico de coordenadas x_A^α e x_B^α respectivamente em $\underline{A}$ e $\underline{B}$. É ainda um fato empírico que a relação entre x_A^α, x_B^α é unívoca e linear, isto é, do tipo:

$$x_A^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha(A, B)x_B^\beta + \Xi^\alpha(A, B) \quad (1.1)$$

onde o Λ_β^α e o Ξ^α são coeficientes constantes que dependem de $\underline{A}$ e $\underline{B}$. Os Λ_β^α são vinculadas a condição:

$$\Lambda_\beta^\alpha \Lambda_\delta^\gamma \eta_{\alpha\gamma} = \eta_{\beta\delta}, \quad (1.2)$$

sendo,

$$\eta_{00} = -1, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \quad \eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ se } \alpha \neq \beta. \quad (1.3)$$

Na equação (1.1) e nas seguintes, são omitidos os símbolos da soma sobre índices repetidos. Usando a expressão (1.1), é fácil verificar que a condição (1.2) implica a invariância da forma quadrática:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx_A^\alpha dx_A^\beta. \quad (1.4)$$

isto é:

$$\eta_{\alpha\beta} dx_A^\alpha dx_A^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx_B^\alpha dx_B^\beta. \quad (1.5)$$

Esta invariância significa, do ponto de vista físico, que a velocidade da luz no vácuo é independente dos observadores inerciais. Sejam de fato P_1 e P_2 dois eventos de coordenadas respectivamente x^α e $x^\alpha + dx^\alpha$, tal que a correspondente forma ds^2 seja nula:

$$(dx^0)^2 = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2;$$

dividindo por $(dt)^2$, vemos que vale a relação:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = c^2,$$

para a qual um sinal que parta de P_1 no tempo t chega em P_2 no tempo $t + dt$ viajando a velocidade da luz no vácuo ($c = 299.792,5 \pm 0,3 \text{ Km/s}$). Sob a condição (1.2), esta relação entre os dois eventos não depende do sistema referencial, pois esta relação possui um significado absoluto.

As (Λ_β^α) são conhecidas por **Matrizes de Lorentz** e dependem de seis parâmetros reais (três ângulos de Euler que expressem a inclinação relativa dos eixos espaciais de $\underline{A}$ e $\underline{B}$, e as três componentes da velocidade relativa entre $\underline{A}$ e $\underline{B}$). O conjunto de matrizes (Λ_β^α) , ao variar de tais parâmetros, formam um grupo chamado **SO (3,1)**. Acrescentando as translações Ξ^α , se obtém a transformação não homogênea de Lorentz (1.1), dependendo de 10 parâmetros, conhecida também por **Transformação de Poincaré**, em uma nomenclatura mais moderna e historicamente correta.

O espaço-tempo M de Minkowski é portanto o espaço linear a quatro dimensões com a estrutura adicional da forma quadrática (1.4). Se esta

fosse definida positiva, o espaço assim obtido seria aquele euclidiano a quatro dimensões; não nesse presente caso, uma vez que as equações (1.3) e (1.4) definem uma métrica dita pseudo-euclidiana.

Nada nos impede de considerar no espaço de Minkowski tais observadores não inerciais **A** e **B**, cujas coordenadas x_A^α e x_B^α pelo mesmo evento são ligadas pelas relações não mais lineares, do tipo:

$$x_A^\alpha = f^\alpha(x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3) \quad (1.5)$$

que substituem (1.1). Para um observador não inercial **A**, a forma quadrática ds^2 não é mais dada por (1.4), porém assume a forma:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3, A) dx_A^\alpha dx_A^\beta \quad (1.6)$$

onde $g_{\alpha\beta}(x_A, A)$ são funções que dependem da escolha das coordenadas x_A^α , e, por isso, do observador **A**. Além disso, em geral, não se espera aqui que x_A sejam coordenadas que cubram todo o espaço **M**. Se considere, por exemplo o seguinte caso particular de (1.5):

$$x_A^0 = x_B^0, \quad x_A^1 = (x_B^1)^2, \quad x_A^2 = x_B^2, \quad x_A^3 = x_B^3;$$

é evidente que, embora os x_B^α descrevam todo o **M**, os x_A^α cobrem somente o subespaço $x_A^1 > 0$.

O espaço-tempo de Minkowski é um caso muito particular de uma variedade diferencial Riemanniana, ou melhor, pseudoriemanniana por causa da métrica (1.3) não positiva $\eta_{00} = -1$. O estudo desta variedade é essencial para a relatividade geral. Me ocuparei desta na **seção 2.1, capítulo 2**. No presente capítulo discorrerei sobre álbuns tópicos brevemente tratados ao longo desta introdução.

1.1 - As transformações de Lorentz

Como já foi mencionado na seção precedente [Introdução], admitiremos que os fenômenos físicos tratados pela Relatividade Especial se desenvolverão em um espaço denominado espaço-tempo M , dito **espaço-tempo de Minkowski**. Os elementos deste espaço tempo são denominados eventos, que se caracterizam por 3 coordenadas espaciais (x, y, z) e o tempo (t) . Cada fenômeno físico se representará por uma sucessão de eventos em M , ou seja, M será visto como uma sucessão contínua de R_3 ao longo do tempo.

Seja O um sistema inercial qualquer. Um outro sistema do tipo O' será caracterizado como de origem O' , com suas novas 3 coordenadas espaciais, além de 3 ângulos inclinados em relação a O . Consideremos a existência de 2 observadores, localizados um no referencial O e outro em O' . Para fins de simplificação, consideremos que O' se movimenta em relação a O com velocidade v somente ao longo da coordenada x e que os sistemas tenham eixos paralelos e origem comum no tempo $t = 0$.

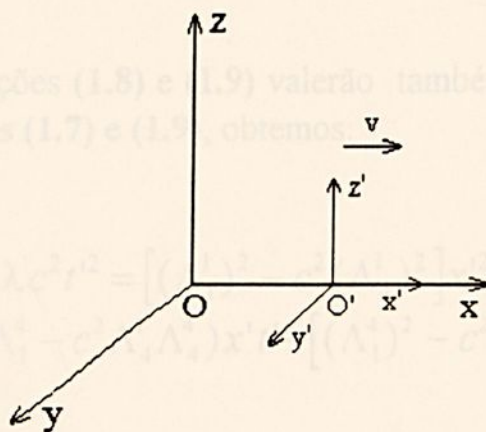


Fig. 1 - Representação de Sistemas Referenciais Inerciais - O sistema O' se move com velocidade v (constante) em relação ao sistema O , ao longo da coordenada x .

Podemos assim definir uma transformação Λ que possibilite definir as novas coordenadas em função das antigas, ou vice-versa:

$$\begin{aligned}
 x &= \Lambda_1^1 x' + \Lambda_1^4 t' \\
 y &= \Lambda_2^2 y' \\
 z &= \Lambda_3^3 z' \\
 t &= \Lambda_4^1 x' + \Lambda_4^4 t'
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Um ponto qualquer com centro em O, emite sinal luminoso que obedece a equação:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \quad \text{ou} \\
 x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Introduziremos um coeficiente λ :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) = \lambda (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) = 0
 \tag{1.9}$$

de forma que as relações (1.8) e (1.9) valerão também para o sistema $\underline{O'}$. Utilizando as relações (1.7) e (1.9), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \lambda x'^2 + \lambda y'^2 + \lambda z'^2 - \lambda c^2 t'^2 &= [(\Lambda_1^1)^2 - c^2 (\Lambda_4^1)^2] x'^2 + (\Lambda_2^2)^2 y'^2 + \\
 &+ (\Lambda_3^3)^2 z'^2 + 2(\Lambda_1^1 \Lambda_4^1 - c^2 \Lambda_4^1 \Lambda_4^1) x' t' + [(\Lambda_4^1)^2 - c^2 (\Lambda_4^4)^2] t'^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Desse modo, obtemos:

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_1^1)^2 - c^2 (\Lambda_4^1)^2 &= \lambda \\
 \Lambda_1^1 \Lambda_4^1 - c^2 \Lambda_4^1 \Lambda_4^1 &= 0 \\
 (\Lambda_4^1)^2 - c^2 (\Lambda_4^4)^2 &= -\lambda c^2 \\
 (\Lambda_2^2)^2 &= \lambda \quad ; \quad (\Lambda_3^3)^2 = \lambda
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Das relações (1.7), temos que:

$$x - \Lambda_1^1 x' = \Lambda_1^4 t' \quad (1.12)$$

$$t - \Lambda_4^1 x' = \Lambda_4^4 t'$$

isolando a variável t' , teremos:

$$\frac{x}{\Lambda_1^4} - \frac{\Lambda_1^1}{\Lambda_1^4} x' = t' \quad (1.13)$$

$$\frac{t}{\Lambda_4^4} - \frac{\Lambda_4^1}{\Lambda_4^4} x' = t'$$

Considerando $x=0$ (origem do sistema $\underline{Q}$) e naturalmente supondo $\Lambda_1^4 \neq 0$ e $\Lambda_4^4 \neq 0$, já que $\underline{Q}'$ se move em relação a $\underline{Q}$ com velocidade v , obteremos então, igualando as equações (1.13):

$$\frac{x'}{\Lambda_1^4} = \frac{t'}{\Lambda_4^4} \Rightarrow x' = \frac{\Lambda_1^4}{\Lambda_4^4} t' \quad (1.14)$$

o que implica dimensão de velocidade para $\frac{\Lambda_1^4}{\Lambda_4^4}$, ou seja:

$$\frac{\Lambda_1^4}{\Lambda_4^4} = v \quad \text{ou} \quad \Lambda_1^4 = v \Lambda_4^4 \quad (1.15)$$

Note-se que as novas transformações reduzem-se, num limite, ao caso clássico, ou seja, para $t = t'$ na equação (1.12), $\Lambda_4^4 = 1$ e conseqüentemente, $\Lambda_1^4 = v$ e $\Lambda_4^1 = 0$.

Substituindo (1.15) na segunda das equações (1.11), teremos:

$$\Lambda_1^1 v \Lambda_4^4 - c^2 \Lambda_4^1 \Lambda_4^4 = 0 \Rightarrow \Lambda_4^4 (\Lambda_1^1 v - c^2 \Lambda_4^1) = 0 \quad (1.20)$$

como $\Lambda_4^4 \neq 0$, logo: $(\Lambda_1^1 v - c^2 \Lambda_4^1) = 0$,

$$\text{ou seja, } v \Lambda_1^1 = c^2 \Lambda_4^1 \Rightarrow \Lambda_4^1 = \frac{v}{c^2} \Lambda_1^1 \quad (1.16)$$

Substituindo (1.16) na primeira das equações (1.11), obteremos:

$$(\Lambda_1^1)^2 - c^2 \left(\frac{v}{c^2} \right)^2 (\Lambda_1^1)^2 = \lambda$$

$$\Lambda_1^1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.17)$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$ e $|\beta| \leq 1$ para que tenha significado físico.

Substituindo (1.15) na terceira das equações (1.11):

$$-\frac{v^2}{c^2} (\Lambda_4^4)^2 + \frac{c^2}{c^2} (\Lambda_4^4)^2 = \lambda$$

logo:

$$\Lambda_4^4 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Lambda_1^1 \quad (1.18)$$

A equação (1.16), portanto, transforma-se em:

$$\Lambda_4^1 = \frac{v\sqrt{\lambda}}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.19)$$

Substituindo as equações (1.15) a (1.19) em (1.7), obtemos:

$$x = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\beta^2}} x' + \frac{v\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\beta^2}} t' = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\beta^2}} (x' + vt')$$

$$y = \sqrt{\lambda} y' \quad ; \quad z = \sqrt{\lambda} z' \quad ; \quad (1.20)$$

$$t = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{vx'}{c^2} + t' \right)$$

A fim de encontrar $\sqrt{\lambda}$, fazemos:

$x' = x'(x, t)$ e $t' = t'(x, t)$, logo:

$$x' = \frac{(\sqrt{\lambda})^{-1}}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - vt) \quad ;$$

$$y' = (\sqrt{\lambda})^{-1} y \quad ; \quad z' = (\sqrt{\lambda})^{-1} z \quad ; \quad (1.21)$$

$$t' = \frac{(\sqrt{\lambda})^{-1}}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Das equações (1.20) e (1.21) obteremos que:

$$(\sqrt{\lambda})^{-1} = \sqrt{\lambda}$$

o que somente é possível, se e somente se, $\lambda = 1$.

As transformações de coordenadas do sistema $\underline{O}$ para $\underline{O}'$ ficam assim expressas:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ;$$

$$y = y' \quad ; \quad z = z' \quad ; \quad (1.22)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

conhecidas como **Transformações de Lorentz.**

Notemos que, para baixas velocidades em relação à velocidade da luz c , ou seja, para $v \ll c$ ($\beta \rightarrow 0$), as Transformações de Lorentz, dadas na forma da eq. (1.21), tornam-se idênticas às Transformações de Galileu:

$$x' = x - vt \quad ; \quad t' = t \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z$$

As Transformações de Galileu, portanto, são particularizações de transformações mais abrangentes conhecidas como Transformações de Lorentz.

Introduzindo-se uma nova notação, qual seja:

$$X^0 = ct \quad , \quad X'^0 = ct'$$

$$X^1 = x \quad , \quad X'^1 = x'$$

$$X^2 = y \quad , \quad X'^2 = y'$$

$$X^3 = z \quad , \quad X'^3 = z'$$

as transformações (1.22) ficam assim expressas:

$$X^0 = \frac{X'^0 + \beta X'^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad X^1 = \frac{X'^1 + \beta X'^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.23)$$

$$X^2 = X'^2 \quad ; \quad X^3 = X'^3$$

A conexão entre a velocidade $\beta = \frac{v}{c}$ e a velocidade em termos de θ (ângulo de rotação) é dada por:

$$\beta = \tanh \theta$$

Desse modo, substituindo em (1.23), obtemos:

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = \cosh \theta$$

$$\beta(1 - \beta^2)^{-1/2} = \sinh \theta$$

1.2 - A Lei de Composição de Velocidades

Substituindo estes resultados na equação (1.21), obteremos:

$$X'^0 = X^0 \cosh\theta - X^1 \sinh\theta \quad (1.24)$$

$$X'^1 = -X^0 \sinh\theta + X^1 \cosh\theta$$

Do mesmo modo, substituindo esses resultados na equação (1.23), chegaremos às expressões:

$$X^0 = X'^0 \cosh\theta + X'^1 \sinh\theta \quad (1.25)$$

$$X^1 = X'^0 \sinh\theta + X'^1 \cosh\theta$$

Resumindo, em combinando (1.24) com as Transformações de Lorentz já encontradas, tem-se que:

$$\frac{X^0 - \beta X^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = X'^0 \cosh\theta - X'^1 \sinh\theta$$

$$\frac{X^1 - \beta X^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -X'^0 \sinh\theta + X'^1 \cosh\theta \quad ,$$

com o que chegaremos ao seguinte resultado:

$$\sinh\theta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.26)$$

$$\tanh\theta = \beta \quad (1.28)$$



1.2 - A Lei de Composição de Velocidades

Encontremos agora as fórmulas de composição de velocidades. Para isso, suponhamos os referenciais $\underline{O}$, $\underline{O'}$ e $\underline{O''}$. O referencial $\underline{O'}$ move-se com velocidade v_1 em relação a $\underline{O}$ e $\underline{O''}$ com velocidade v_2 em relação a $\underline{O'}$, conforme mostrado na **Fig. 2**. Para simplificação dos cálculos, consideremos que v_1 e v_2 são colineares e no sentido positivo do eixo x .

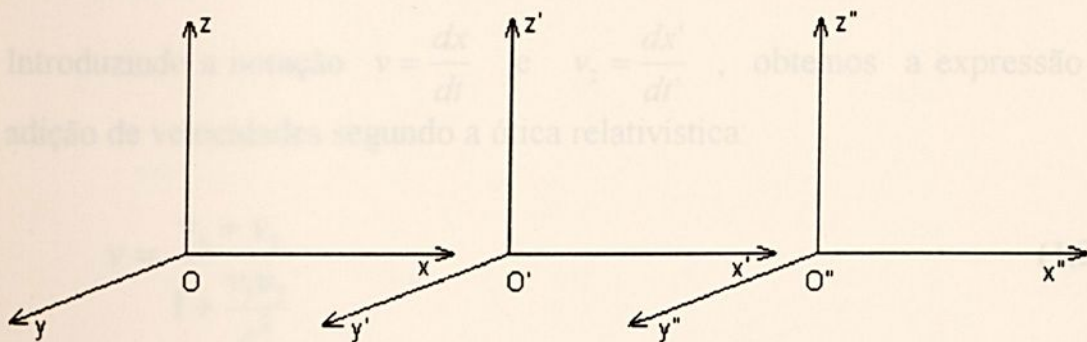


Fig. 2 - Composição de velocidades - Sistemas referenciais inerciais, em que O' e O'' se movem com velocidades v_1 e v_2 , respectivamente, em relação ao sistema O .

A teoria clássica, afirma axiomáticamente que as velocidades relativas poderiam ser assim expressas, pelo antigo teorema de adição de velocidades:

$$v = v_1 + v_2 \quad (1.27)$$

Para verificarmos como seria o enfoque relativístico neste caso, devemos partir das equações (1.22), considerando-as como deslocamentos infinitesimais. Logo:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + v_1 dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ dy &= dy' ; \quad dz = dz' ; \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v_1}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dividindo-se agora a expressão de dx por dt e, ao mesmo tempo, o numerador e o denominador por dt' , obteremos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_1}{1 + \frac{v_1}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \quad (1.29)$$

Introduzindo a notação $v = \frac{dx}{dt}$ e $v_2 = \frac{dx'}{dt'}$, obtemos a expressão da adição de velocidades segundo a ótica relativística:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (1.30)$$

Como podemos observar, segundo a equação (1.30), a soma de velocidades é sempre menor que a velocidade da luz. Note-se que, para baixas velocidades em relação a velocidade da luz c , o antigo teorema (eq. (1.27)) é perfeitamente válido, sendo, portanto, particularização da eq. (1.30), mais abrangente.

Lembrando que $\beta = \frac{v}{c} = \text{tgh}\theta$, dividindo-se a eq. (1.30) por c , temos que:

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \Rightarrow \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = \frac{\text{tgh}\theta_1 + \text{tgh}\theta_2}{1 + \text{tgh}\theta_1 \text{tgh}\theta_2}$$

$$\beta = \text{tgh}\theta = \text{tgh}(\theta_1 + \theta_2) \quad (1.31)$$

provando, portanto, a validade da expressão (1.30).

1.3 - Os Grupos de Lorentz e Poincaré

Definimos grupo como um conjunto de elementos em que as seguintes leis de composição são válidas:

(i) o conjunto é tal que é associativo em seus elementos, ou seja:

$$a) \forall A, B \in H, AB = C \in H \text{ e}$$

$$(AB)D = A(BD) \quad \forall D \in H ;$$

$$b) \forall A, B \in H : A + B = C \in H \text{ e}$$

$$(A + B) + D = A + (B + D) \quad \forall D \in H$$

(ii) existe um elemento neutro:

$$a) \forall A \in H \exists 0 \in H : A + 0 = A ;$$

$$b) \forall A \in H \exists I \in H : AI = A ;$$

(iii) todo elemento é inversível (admite inverso):

$$\forall A \in H \exists A^{-1} \in H : AA^{-1} = I$$

(A^{-1} é chamado o **inverso** de A)

Isto posto, podemos, tal e qual obtemos através das eqs. (1.25), obter também transformações sucessivas em relação às outras coordenadas (X^2 e X^3) e chegaríamos então a construir uma transformação geral de Lorentz. É fácil observar que essas transformações fazem parte de um grupo a que chamaremos **Grupo de Lorentz $O(3,1)$** . Por exemplo, sejam:

$$A = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

$$B = \begin{bmatrix} \cosh\theta_1 & \sinh\theta_1 & 0 & 0 \\ \sinh\theta_1 & \cosh\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Então:} \quad (1.33)$$

$$A.B = \begin{bmatrix} (\cosh\theta \cosh\theta_1 + \sinh\theta \sinh\theta_1) & (\cosh\theta \sinh\theta_1 + \sinh\theta \cosh\theta_1) & 0 & 0 \\ (\sinh\theta \cosh\theta_1 + \cosh\theta \sinh\theta_1) & (\sinh\theta \sinh\theta_1 + \cosh\theta \cosh\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh(\theta + \theta_1) & \sinh(\theta + \theta_1) & 0 & 0 \\ \sinh(\theta + \theta_1) & \cosh(\theta + \theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

Seja, $A.B = C$. Como: $A \in O(3,1)$ e $B \in O(3,1)$, é fácil verificar que

$$C \in O(3,1). \quad (1.37)$$

Desse modo, as condições (i), (ii) e (iii) são satisfeitas.

Definiremos da eq. (1.4) o invariante:

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad (1.32)$$

Considerando as matrizes retangulares, das coordenadas e seus deslocamentos infinitesimais, a equação (1.32) ficará então representada por:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dX^T \eta dX \quad (1.33)$$

As relações (1.23) e suas congêneres, podem ser escritas da forma:

$$X'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta X^\beta \quad \text{ou} \quad X' = \Lambda X \quad (1.34)$$

$$dX'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dX^\beta \quad \text{ou} \quad dX' = \Lambda dX \quad (1.35)$$

onde Λ é uma matriz quadrada de elementos Λ^α_β dada por:

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Sabemos de (1.2) que: $\eta_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\nu \Lambda^\beta_\mu$

e, como: $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

da eq. (1.33), obtemos:

$$ds'^2 = dX'^T \eta dX' = (\Lambda dX)^T \eta (\Lambda dX) = dX^T \Lambda^T \eta \Lambda dX$$

$$\text{logo: } ds'^2 = dX^T \eta dX$$

Por conseguinte, então, podemos afirmar que:

$$dX'^T \eta dX' = dX^T \eta dX \Rightarrow \underline{\text{INVARIANTE}} \quad (1.38)$$

(sob Transformações de Lorentz)

Generalizando, portanto, as equações (1.23), chegamos a um conjunto de matrizes Λ , que formam um grupo, o chamado **Grupo de Lorentz**, e conhecidas as **Transformações de Lorentz homogêneas**, ou seja:

$$X' = \Lambda X \quad \text{onde} \quad \Lambda \in O(3,1)$$

Agora, podemos então definir uma transformação **P**, chamada de **Transformação de Poincaré** - também conhecida como **Transformação de Lorentz não homogênea** -, como uma transformação do tipo:

$$X' = \Lambda X + \varepsilon \quad \text{onde} \quad \Lambda \in O(3,1) \quad (1.39)$$

e ε é uma matriz real 4×1 , dada por:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

A **Transformação de Poincaré P** tem 10 parâmetros e o conjunto destas transformações formam um grupo, o **Grupo de Poincaré**. O **Grupo de Lorentz** é um caso particular do **Grupo de Poincaré**, quando $\varepsilon = 0$.

Por meio de cálculo matricial, podem ser deduzidas as propriedades gerais das $\Lambda \in O(3,1)$. Dado que as matrizes (1.36) e (1.37) são quadradas, então:

$$\det \Lambda^T = \det \Lambda$$

$$\Lambda^T \Lambda = I$$

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = 1 \Rightarrow \det \Lambda^T \cdot \det \Lambda = 1$$

$$\text{logo: } \det \Lambda = \pm 1 \quad (1.40)$$

Se $\det \Lambda = +1$ se dirá que Λ é uma **matriz própria** e se $\det \Lambda = -1$ uma **matriz imprópria**. As matrizes (1.36) e (1.37) são tais que $\det \Lambda = +1$.

Ao subconjunto de $O(3,1)$ formado pelas matrizes Λ com $\det \Lambda = +1$ denotaremos por:

$$SO(3,1) \quad (\textit{Special Ortogonal})$$

Por conseguinte,

$$SO(3,1) \subset O(3,1)$$

1.4 - O Cone de Luz e o Espaço-Tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski M é um espaço-tempo plano (*flat space time*), linear, a 4 dimensões, no qual a distância elementar ds entre dois eventos na trajetória de uma partícula é definida pela forma quadrática:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.41)$$

Considerando: $dx^\mu = dx^\nu = (cdt, dx, dy, dz)$, obtemos:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \cdot [cdt \ dx \ dy \ dz] \quad (1.42)$$

Como vimos anteriormente em (1.38) ds^2 é um invariante, o qual consideraremos como:

$$-ds^2 = c^2 \tau^2 \quad (1.43)$$

onde τ é denominado tempo próprio (*proper time*). Dessa forma:

$$-c^2 \tau^2 = -c^2 t^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$\tau^2 = t^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$$

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1.44)$$

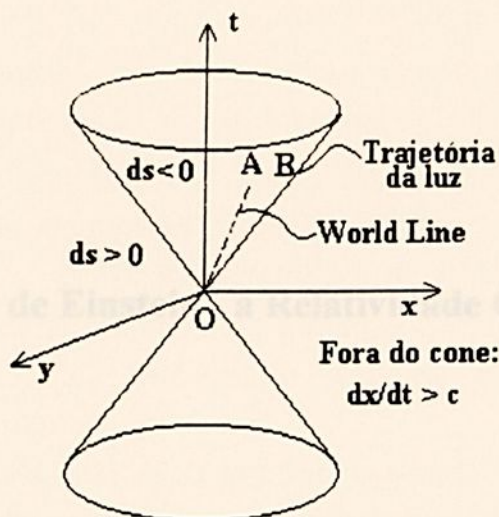
onde $\beta = \frac{v}{c}$.

Notemos que, para $v \ll c$, obtemos $\tau = t$ da física clássica.

Consideremos o espaço-tempo M de Minkowski, representado apenas pelas coordenadas espaciais x, y e a coordenada temporal t .

A representação gráfica de todas as trajetórias possíveis para o movimento de uma partícula em relação à uma origem O , seria delimitada por um cone de luz, representado pela **Fig. 3**.

2 - TEORIA DA GRAVITAÇÃO



Tempo positivo: $t > 0$ (futuro)
 Tempo negativo: $t < 0$ (passado)
 Tempo nulo: $t = 0$ (presente)

Fig. 3 - O cone de luz - Trajetórias possíveis de uma partícula no espaço-tempo de Minkowski, delimitadas pelo cone de luz.

Na **Fig. 3**:

- **Ponto A**: evento de coordenadas espaço-temporais (x, y, t) associadas a

linha do universo da partícula (*world line*).

- **Interior do cone**: eventos "possíveis" $ds < 0$ - gênero tempo (*time like*).

- **Exterior do cone** *: eventos "impossíveis" $ds > 0$ - gênero espaço (*space like*).

* Para que um evento ocorresse no exterior do cone, haveria necessidade de que possuísse velocidade

$v = \frac{dx}{dt} > c$. No caso limite temos o ponto B, onde $\frac{dx}{dt} = c$.

2 - TEORIA DA GRAVITAÇÃO

2.1 - Introdução

A Teoria de Einstein - a Relatividade Geral

A Teoria de Einstein da Gravitação, também conhecida como Relatividade Geral, foi criada em 1916 com a publicação do trabalho fundamental de Albert Einstein, "Die Grundlage der allgemeine Relativitätstheorie" (em português, parte integrante do volume "O Princípio da Relatividade") [2], [3]. São transcorridos mais de dois terços de século desde aquela data e a teoria sofreu uma grande evolução que nos tem levado a novas formulações de alto interesse teórico.

A Teoria da Relatividade Especial supõe, como vimos, que o espaço-tempo é um espaço de Minkowski, ou seja, um espaço pseudoriemanniano com elemento de arco:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 \quad (2.1)$$

Este elemento tem a mesma expressão em todos os pontos do espaço.

A Teoria da Relatividade Geral conserva a hipótese fundamental de que o espaço-tempo é um espaço pseudoriemanniano, mas supõe que a forma do elemento de arco depende da distribuição de matéria, e que, portanto, deve determinar-se em cada caso, o que significa dizer que os coeficientes $g_{\mu\nu}$ (em número de 10, posto que a dimensão do espaço-tempo é $n=4$), da forma fundamental:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

não serão dados a priori. Os $g_{\mu\nu}$, que correspondem a um sistema de coordenadas determinado, são funções das coordenadas x^λ e definirão completamente com respeito a este sistema o "fenômeno elementar da gravitação" * pelo princípio das geodésicas - linhas curvas do espaço Riemanniano que tem as mesmas propriedades das retas num espaço plano. Aos $g_{\mu\nu}$ daremos o nome de **potenciais de gravitação**. Estes e suas derivadas que aparecerão mediante os símbolos de Christoffel nas equações das geodésicas [seção 2.1.7], definirão o campo de gravitação no sistema de coordenadas considerado.

O problema essencial da teoria relativista da gravitação, tal e qual elaborada por Einstein, consiste na determinação efetiva dos potenciais de gravitação correspondentes aos diferentes estados da matéria e energia no espaço [4].

São consequências da Relatividade Geral nem tanto a predição de fenômenos sutis - e.g. a curvatura de um raio de luz num campo gravitacional - quanto o surgimento, em física, de teorias com exigências matemáticas de grande beleza estética. O ponto de partida da teoria vem da igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, de onde surge o famoso **princípio de equivalência** [seção 2.1.6]. A teoria do campo gravitacional se apoia sobre este princípio de equivalência entre gravitação e inércia. Partindo deste, muitos dos fenômenos físicos da relatividade geral podem ser demonstrados ou intuídos. O desenvolvimento completo, no entanto, e as últimas consequências do Princípio se podem deduzir somente através do **cálculo tensorial** [seção 2.1.1], ou através de um formalismo alternativo e mais moderno - **formas diferenciais** - introduzido em matemática por Elie Cartan [seção 2.2], [5], [6], [7]. Neste último, as equações do campo de gravitação independem diretamente dos potenciais $g_{\mu\nu}$ [7].

O espaço de Minkowski é uma variedade diferenciável M^4 que possui uma cobertura constituída de um único aberto $U = M^4$, o próprio espaço. As coordenadas x^μ identificam, neste caso, uma carta particular (U, φ) ; cartas diferentes terão o mesmo aberto e diferirão por transformações de Poincaré.

* A lei de movimento de um corpo de prova infinitamente pequeno, colocado no universo e não influenciado por nenhuma ação elétrica ou de contato; é um fato experimental que, se o corpo de prova não se acha muito distante de qualquer corpo material, seu movimento difere e muito do movimento retilíneo previsto pelo Princípio de Inércia.

2.1.1 - Variedades Riemannianas, Tétrades e Formas Diferenciais: a contribuição de Elie Cartan

2.1.1.a - Variedades Riemannianas

Seja M^n um espaço topológico e $\{U_A\}$ um conjunto aberto de M^n que recobre M^n : $\bigcup_A U_A = M^n$. Por **carta local** (abrev.: carta) em M^n se entende um par (U_A, φ_A) , onde $\varphi_A: U_A \rightarrow O_A$ é um homeomorfismo entre U_A e o subconjunto aberto O_A de $\mathbb{R}^n$. Em linguagem menos abstrata, isto significa identificar os pontos em U_A mediante n coordenadas cartesianas $x^1, x^2, \dots, x^n$ em O_A . Por **átlas de M^n** se entende a coleção de cartas (U_A, φ_A) . Tal átlas se constitui uma variedade diferenciável de ordem n sobre o espaço M^n se por cada A e B , tal que $U_A \cap U_B \neq \emptyset$, a $\varphi_B \varphi_A^{-1}: \varphi_A(U_A \cap U_B) \rightarrow \varphi_B(U_A \cap U_B)$ é uma aplicação diferenciável de $\varphi_A(U_A \cap U_B)$ sobre $\varphi_B(U_A \cap U_B)$. Esta condição significa [8], [9]:

i) quando um ponto aparece em duas cartas diferentes (U_A, φ_A) e (U_B, φ_B) , ele será então identificado de duas distintas **n-uplas** de coordenadas: $\underline{x}_A = (x_A^1, x_A^2, \dots, x_A^n)$ e $\underline{x}_B = (x_B^1, x_B^2, \dots, x_B^n)$;

ii) a troca entre as coordenadas $\underline{x}_A$ e $\underline{x}_B$ deve efetuar-se mediante funções diferenciáveis. Na maior parte das aplicações relativísticas se assume, para simplificação, diferenciabilidade indefinida, isto é, do tipo C^∞ .

O espaço de Minkowski é uma variedade diferenciável M^4 que possui uma cobertura constituída de um único aberto $U \equiv M^4$, o próprio espaço. As coordenadas x_A^α identificam, neste caso, uma carta particular (U_A, φ_A) ; cartas diferentes terão o mesmo aberto e diferirão por transformações de Poincaré.

A utilidade do conceito parece evidente ao considerar-se o espaço-tempo da relatividade geral. Antes de desenvolver as considerações físicas que conduzem à esta asserção, convém acenar com as várias estruturas

matemáticas definíveis sobre uma variedade diferenciável. Como já demonstrado, embora limitando-se ao caso trivial do espaço cartesiano $\mathbb{R}^n$, aqui se espera que não existam sobre uma variedade genérica M^n abertos que coincidam com M^n ; uma carta genérica servirá para descrever somente um fragmento da variedade. Todavia, o conhecimento das funções $\varphi_B \varphi_A^{-1}$ admite "colar" em conjunto os vários elementos da cobertura, fornecendo um atlas por toda a variedade.

Seja dado um ponto $P \in M^n$ e uma vizinhança $I(P) \subset M^n$ de P . Uma função diferenciável em P em uma carta genérica (U_A, φ_A) tal que $U_A \supset I(P)$, o é também em qualquer outra carta (U_B, φ_B) com $U_B \supset I(P)$, em consequência da diferenciabilidade da função $\varphi_B \varphi_A^{-1}$. O conceito de diferenciabilidade de uma função definida em M^n não depende, pois, da escolha da carta e é intrínseco à variedade.

Segundo a visão einsteniana, toda a quantidade de interesse físico deve ser descrita mediante campos tensoriais. Um campo tensorial do tipo $(p,q): T_{\{\beta\}}^{\{\alpha\}}$, consiste na fixação sobre toda a carta (U_A, φ_A) de funções diferenciáveis nas coordenadas x_A^α relativas ao ponto $P \in U_A$:

$$T_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}(\underline{x}_A, A) \equiv T_{\{\beta\}}^{\{\alpha\}}(\underline{x}_A, A), \quad (2.3)$$

onde $\{\alpha\} \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ e $\{\beta\} \equiv \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\}$ são índices compostos. Estas funções diferenciáveis são vinculadas às condições de consistência sobre $U_A \cap U_B \neq \emptyset$:

$$T_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}(\underline{x}_A, A) = T_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p}(\underline{x}_B, B) \left(\prod_{i=1}^q \frac{\partial x_B^{\nu_i}}{\partial x_A^{\beta_i}} \right) \left(\prod_{j=1}^p \frac{\partial x_A^{\alpha_j}}{\partial x_B^{\mu_j}} \right) \quad (2.4)$$

onde $\underline{x}_A$ e $\underline{x}_B$ são coordenadas estabelecidas em A e B ao mesmo ponto $P \in U_A \cap U_B$; a equação (2.4) é também conhecida *lei de transformação tensorial*.

Um tensor do tipo (p,q) é dito ser p vezes contravariante e q vezes covariante. Um tensor do tipo $(0,0)$ se diz escalar, do tipo $(1,0)$ se diz vetor contravariante e do tipo $(0,1)$ vetor covariante.

Uma variedade diferenciável dotada de um tensor $g_{\alpha\beta}$ do tipo $(0,2)$ se diz riemanniana se a matriz $(g_{\alpha\beta})$ é definida e positiva em uma carta

genérica. Se, ao contrário, a matriz $(g_{\alpha\beta})$ é toda formada de autovalores positivos, exceto um negativo, se diz que a variedade é pseudoriemanniana e do tipo Lorentz se $n=4$. Como veremos, o espaço-tempo da relatividade geral é uma variedade do tipo Lorentz e o espaço de Minkowski é um caso particular muito simples no qual as $g_{\alpha\beta}$ são constantes e coincidente com as $\eta_{\alpha\beta}$ definidas na equação (1.3). O tensor $g_{\alpha\beta}$ é denominado **tensor métrico**. Em uma carta genérica, convém definir também o tensor do tipo $(2,0)$ ou $g^{\alpha\beta}(\underline{x}_A, A)$ como o inverso do tensor métrico, ou seja:

$$g^{\alpha\beta}(\underline{x}_A, A)g_{\beta\gamma}(\underline{x}_A, A) = \delta_{\gamma}^{\alpha}$$

onde: $\delta_{\gamma}^{\alpha} = 1$ se $\alpha = \gamma$ e $\delta_{\gamma}^{\alpha} = 0$ se $\alpha \neq \gamma$

O intervalo entre dois eventos próximos é dado por (2.2):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(\underline{x}_A, A)dx_A^{\alpha}dx_A^{\beta} \quad (2.5)$$

O cálculo tensorial permite construir tensores partindo de outros tensores. As regras seguintes são muito simples e fáceis de verificar:

a) se $T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ e $S_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ são tensores do mesmo tipo (p,q) , a expressão:

$$Z_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(\underline{x}_A, A) = \lambda T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(\underline{x}_A, A) + \mu S_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(\underline{x}_A, A) \quad (2.6)$$

onde λ e μ são constantes, define-se um tensor Z do mesmo tipo (p,q) .

b) se $T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ e $S_{\beta_{q+1}, \dots, \beta_{q+s}}^{\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+t}}$ são campos tensoriais do tipo (p,q) e (t,s) respectivamente, a expressão:

$$Z_{\beta_1, \dots, \beta_{q+s}}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{p+t}}(\underline{x}_A, A) = T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(\underline{x}_A, A)S_{\beta_{q+1}, \dots, \beta_{q+s}}^{\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+t}}(\underline{x}_A, A) \quad (2.7)$$

define-se um campo tensorial do tipo $(p+t, q+s)$.

c) se $T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ é um tensor do tipo (p, q) , a expressão:

$T_{\beta_1, \dots, \beta_{t-1}, \gamma, \beta_{t+1}, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \gamma, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_p}$ define-se um tensor, dito contraído, do tipo $(p-1, q-1)$.

A diferenciação de um campo tensorial torna o problema mais complexo. Esse problema foi brilhantemente resolvido no *cálculo diferencial absoluto*, através da noção de *deslocamento paralelo*, introduzido por Levi-Civita.

De fato, se considere, por simplicidade, um campo vetorial covariante T_α . A expressão em uma carta genérica das derivadas:

$$\tilde{T}_{\alpha\gamma}(\underline{x}_A, A) = \frac{\partial T_\alpha(\underline{x}_A, A)}{\partial x_A^\gamma} \quad (2.8)$$

não dá lugar à quantidades possuindo caráter tensorial do tipo $(0, 2)$, como seria desejável. Derivando a relação:

$$T_\alpha(\underline{x}_A, A) = T_\beta(\underline{x}_B, B) \frac{\partial x_B^\beta}{\partial x_A^\alpha},$$

que é um caso particular da equação (2.8), se obtém:

$$\tilde{T}_{\alpha\gamma}(\underline{x}_A, A) = \tilde{T}_{\beta\delta}(\underline{x}_B, B) \frac{\partial x_B^\beta}{\partial x_A^\alpha} \frac{\partial x_B^\delta}{\partial x_A^\gamma} + T_\beta(\underline{x}_B, B) \frac{\partial^2 x_B^\beta}{\partial x_A^\alpha \partial x_A^\gamma}, \quad (2.9)$$

que, envolvendo as derivadas segunda das coordenadas, não tem caráter tensorial. Com efeito, a derivada $\tilde{T}_{\alpha\gamma}$ não possui nenhum significado geométrico intrínseco de relevo. Dado no espaço euclidiano um vetor $\underline{T}$ constante em cada ponto, as componentes do vetor resultam efetivamente constantes se se utilizam coordenadas cartesianas, e sua derivada é nula. Em coordenadas curvilíneas, ao contrário, as componentes do vetor *sentem* o encurvar-se das linhas coordenadas, e não são constantes. O deslocamento paralelo de Levi-Civita *permite impedir esta falha*, computando a variação que deve impor-se sobre as componentes de um vetor, a fim de que esse permaneça efetivamente constante no deslocamento de um ponto a um outro infinitesimalmente próximo.

Se considere, portanto, em $P \in U_A$, de coordenadas x_A , um vetor contravariante $T^\alpha(x_A, A)$, que tem sua notação simplificada para T^α . Deslocando T^α para o ponto próximo $x_A^\alpha + dx_A^\alpha$, se obtém novas componentes $T^\alpha + dT^\alpha$. Torna-se lógico assumir que as dT^α são lineares nas dx_A^α . Em tal caso se obterá uma expressão do tipo:

$$dT^\alpha = -\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha(x_A, A) T^\gamma dx_A^\beta, \quad (2.10)$$

onde as $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ são coeficientes que servem para deslocar os vetores e devem levar em conta a arbitrariedade do sistema de coordenadas.

A expressão (2.10) deve ser determinada pelas condições suplementares:

a) simetria: $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Existem esquemas mais gerais nos quais esta condição não é satisfeita, como nas chamadas geometrias não riemannianas (e.g. teoria de Einstein-Cartan, capítulo 2.2). Essa, no entanto, vale sem restrições na relatividade geral.

b) o comprimento do vetor T^α deve ser conservado durante o deslocamento. Em analogia com a geometria elementar, o quadrado do comprimento de T^α é dado pelo invariante:

$$T^2 = g_{\alpha\beta} T^\alpha T^\beta, \quad (2.11)$$

onde, por simplicidade de notação, se omite completamente o índice da carta. Impondo que T^2 seja o mesmo por T^α e por $T^\alpha + dT^\alpha$, se chega a relação diferencial:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta g_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta g_{\alpha\delta} \quad (2.12)$$

que possui como solução:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_A, A) = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}(x_A, A) \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}(x_A, A)}{\partial x_A^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}(x_A, A)}{\partial x_A^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}(x_A, A)}{\partial x_A^\delta} \right) \quad (2.13)$$

Os desenvolvimentos pormenorizados dos resultados obtidos nas equações (2.12) e (2.13) estão no Apêndice A.

As Γ são também escritas na forma $\{\beta \gamma\}^{\alpha} \equiv \Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha}$ e denominadas *Símbolos de Christoffel*. Para esses símbolos vale a lei de transformação não tensorial:

$$\Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha}(x_A, A) = \Gamma_{\mu \nu}^{\lambda}(x_B, B) \frac{\partial x_A^{\alpha}}{\partial x_B^{\lambda}} \frac{\partial x_B^{\mu}}{\partial x_A^{\beta}} \frac{\partial x_B^{\nu}}{\partial x_A^{\gamma}} + \frac{\partial^2 x_B^{\mu}}{\partial x_A^{\beta} \partial x_A^{\gamma}} \frac{\partial x_A^{\alpha}}{\partial x_B^{\mu}}, \quad (2.14)$$

que, combinada com a expressão análoga a (2.9) para o vetor contravariante T^{α} , mostra como a expressão:

$$T^{\alpha}_{;\beta}(\underline{x}_A, A) = \frac{\partial T^{\alpha}(\underline{x}_A, A)}{\partial x_A^{\beta}} + \Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha}(\underline{x}_A, A) T^{\gamma}(\underline{x}_A, A) \quad (2.15)$$

define um tensor do tipo (1,1), chamado derivada covariante de T^{α} . De modo análogo, se vê que um vetor covariante possui a derivada covariante dada por:

$$T_{\alpha;\beta}(\underline{x}_A, A) = \frac{\partial T_{\alpha}(\underline{x}_A, A)}{\partial x_A^{\beta}} - \Gamma_{\alpha \gamma}^{\beta}(\underline{x}_A, A) T_{\gamma}(\underline{x}_A, A), \quad (2.16)$$

enquanto um tensor genérico vem derivado covariantemente como segue:

$$T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q; \gamma} = \frac{\partial T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\mu \gamma}^{\alpha_1} T^{\mu, \alpha_2, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q} + \Gamma_{\mu \gamma}^{\alpha_2} T^{\alpha_1, \mu, \alpha_3, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q} + \dots + \Gamma_{\mu \gamma}^{\alpha_p} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \mu}_{\beta_1, \dots, \beta_q} +$$

$$- \Gamma_{\beta_1 \gamma}^{\mu} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\mu, \beta_2, \dots, \beta_q} - \Gamma_{\beta_2 \gamma}^{\mu} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \mu, \beta_3, \dots, \beta_q} - \dots - \Gamma_{\beta_q \gamma}^{\mu} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_{q-1}, \mu} \quad (2.17)$$

tendo sido omitido o índice da carta.

A condição (2.12) aparece então como a nulidade da derivada covariante do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$. Além disso é claro que o tensor métrico determina os Símbolos de Christoffel através da equação (2.13) e de toda a variedade.

É conveniente mencionar que em alguns textos é usual encontrar-se uma outra notação para expressar derivadas covariantes de vetores ou tensores. De acordo com aqueles, as expressões (2.15), (2.16) e (2.17) resultariam em:

$$T^{\alpha}{}_{;\beta}(x_A, A) = \nabla T^{\alpha}_{\beta} \quad (2.18)$$

$$T^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q; \gamma} = \nabla T^{\alpha_i}_{\gamma \beta_j} \quad (2.19)$$

2.1.1.b - Tétrades

É possível também desenvolver a geometria riemanniana em um formalismo mais moderno, suscetível de novas aberturas, usando o conceito de téttrade, introduzido originariamente por **Cartan** em geometria, op. cit. [5], e desenvolvido em física por Kibble e Utiyama [10].

Ao invés do tensor métrico, vem associado a cada ponto de uma carta genérica A , n vetores covariantes independentes e ortonormais $V^a_{\alpha}(x_A, A)$, $a = 1, \dots, n$, que formam portanto uma base $\underline{V}$, não degenerada, dita **n-ade**; no caso $n=4$, relativo à relatividade geral, se diz **téttrade**. A ortonormalidade implica:

$$V^a_{\alpha} V^b_{\beta} g^{\alpha\beta} = \eta^{ab} \quad (2.20)$$

relação que pode também ser escrita como:

$$V^a_{\alpha} V^b_{\beta} \eta_{ab} = g_{\alpha\beta} \quad (2.21)$$

para a qual o conhecimento da base $\underline{V}$ em cada ponto, implica o conhecimento do tensor métrico; a normalização é tal de modo que:

$$\det(V^a_{\alpha}) = \sqrt{-\det(g_{\alpha\beta})} \quad (2.22)$$

Junto à base $\underline{V}$ se considera ainda a base dual $\underline{W} = \underline{V}^{-1}$, constituída dos vetores contravariantes $\underline{W}^{\alpha}_a$ normais a $\underline{V}^a_{\alpha}$:

$$W_a^\alpha V_\beta^a = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.23)$$

que, em virtude de (1.2), conduz ao mesmo tensor métrico $g_{\alpha\beta}$.

A base $\underline{V}$ é determinada pelo tensor métrico, a menos de uma transformação genérica do grupo de Lorentz; de fato a base $\underline{V}'$:

$$V_\alpha'^a(\underline{x}_A, A) = \Lambda_b^a(\underline{x}_A) V_\alpha^b(\underline{x}_A, A) \quad (2.24)$$

que tem como dual:

$$W_a'^\alpha = W_b^\alpha (\Lambda^{-1})_a^b. \quad (2.25)$$

Dada a n-ade $\underline{V}^a$ e um vetor genérico contravariante T^α , podem ser consideradas as projeções:

$$T^a(\underline{x}, A, \underline{V}) = V_\alpha^a(\underline{x}, A) T^\alpha(\underline{x}, A) \quad (2.26)$$

ao invés das componentes originais T^α ; estas projeções resultam independentes da carta e se escrevem, portanto:

$$T^a(\underline{x}, \underline{V}) \equiv T^a(\underline{x}_A, A, \underline{V}). \quad (2.27)$$

De fato, trocando a base, de acordo com a expressão (2.24), se obtém a nova projeção:

$$T^a(\underline{x}, \underline{V}') = \Lambda_b^a(\underline{x}) T^b(\underline{x}, \underline{V}). \quad (2.28)$$

Portanto, é possível substituir sistematicamente aos componentes de um vetor contravariante T^α pelas projeções $T^a(\underline{V})$ que se comportam como escalares. De modo análogo, as componentes covariantes se projetam sobre a base dual $\underline{W}$.

Inicialmente, este formalismo usa somente escalares e não necessita dos $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ para a derivação covariante. Uma troca local de base, segundo a expressão (2.28), aparece como uma transformação de Lorentz sobre os índices b na projeção de um tensor genérico. Portanto, desaparece o efeito da transformação de coordenadas na troca de carta, mas aparece o de uma transformação genérica local de Lorentz.

2.3.1. Uma expressão $T_{q_1, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_s}(\underline{V})$ chama-se tensor se transforma-se exatamente como:

$$T_{q_1, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_s}(\underline{x}, \underline{V}') = \Lambda_{q_1}^{p_1}(\underline{x}) \dots \Lambda_{q_t}^{p_t}(\underline{x}) (\Lambda^{-1})_{q_1}^{b_1}(\underline{x}) \dots (\Lambda^{-1})_{q_t}^{b_t}(\underline{x}) T_{b_1, \dots, b_t}^{a_1, \dots, a_s}(\underline{x}, \underline{V}) \quad (2.29)$$

sob uma transformação de Lorentz genérica. Se observa, todavia, que as derivadas projetadas:

$$\frac{\partial T_{q_1, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_s}(\underline{V})}{\partial x^\alpha} W_{q_{t+1}}^\alpha = \tilde{T}_{q_1, \dots, q_t, q_{t+1}}^{p_1, \dots, p_s}(\underline{V}) \quad (2.30)$$

mesmo parecendo ser trivialmente covariantes com respeito a troca de carta, não o são com respeito a transformações locais de Lorentz; de fato, no caso $s=1$ e $t=0$, se obtém:

$$\frac{\partial T^p(\underline{V}')}{\partial x^\alpha} W_q^\alpha = \Lambda_a^p \frac{\partial T^a(\underline{V})}{\partial x^\beta} W_b^\beta (\Lambda^{-1})_q^b + \frac{\partial \Lambda_a^p(\underline{V})}{\partial x^\beta} T^a(\underline{V}) W_b^\beta (\Lambda^{-1})_q^b \quad (2.31)$$

A idéia aqui é a de introduzir a quantidade $\omega_\alpha^{pq}(\underline{V})$ analogamente aos $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, que torna covariante a derivada (2.30). Através de $\omega_\alpha^{pq}(\underline{V})$ se obtém a condição [Apêndice B]:

$$\frac{\partial V_\alpha^p}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V_\gamma^p + \omega_\beta^{pq} \eta_{qr} V_\alpha^r = 0 \quad (2.32)$$

da qual se vê facilmente que a derivada [Apêndice C]:

$$T_{;\alpha}^p(\underline{V}) = \frac{\partial T^p(\underline{V})}{\partial x^\alpha} + \omega_\alpha^{pa}(\underline{V}) \eta_{ab} T^b(\underline{V}) \quad (2.33)$$

é novamente um tensor, pois:

$$T_{;\alpha}^p(\underline{V}') = \Lambda_q^p T_{;\alpha}^q(\underline{V}) \quad (2.34)$$

2.1.1.c - Formas diferenciais

O formalismo da n -ade se simplifica, e muito, usando a linguagem das **formas**. Uma **1-forma** é essencialmente equivalente ao conceito de vetor covariante; de fato, em lugar do vetor T_α , se considere a forma diferencial:

$$T(A) = T_\alpha(x_A, A) dx_A^\alpha \quad (2.35)$$

para a qual $T(A) = T(B)$ em $U_A \cap U_B$, como consequência da lei de transformação tensorial. A forma não depende portanto da carta. Se introduz o produto à Grassman definido inicialmente sobre as diferenciais dx^α , anticomutativo e associativo:

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta = -dx^\beta \wedge dx^\alpha \quad (2.36)$$

$$(dx^\alpha \wedge dx^\beta) \wedge dx^\gamma = dx^\alpha \wedge (dx^\beta \wedge dx^\gamma). \quad (2.37)$$

Uma **q-forma** $f^{(q)}$ corresponde ao tensor do tipo $(0, q)$ totalmente antissimétrico e é definido como o polinômio genérico de grau q em dx^α , com coeficientes que dependem das x^α :

$$f^{(q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\{\alpha\}} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}(x_A, A) dx_A^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_A^{\alpha_q}; \quad (2.38)$$

a condição de consistência é dada por:

$$f_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}(x_A, A) = f_{\beta_1, \dots, \beta_q}(x_B, B) \frac{\partial x_B^{\beta_1}}{\partial x_A^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x_B^{\beta_q}}{\partial x_A^{\alpha_q}}. \quad (2.39)$$

Dessa forma, vale a relação óbvia:

$$f^{(q)} \wedge g^{(p)} = (-1)^{pq} g^{(p)} \wedge f^{(q)}. \quad (2.40)$$

Para a derivada df de uma forma, também chamada de **derivada exterior de f** , se f é uma **q -forma**, df é definida como uma **$(q+1)$ -forma** dada por:

$$df = \frac{1}{q!} \sum_{\{\alpha\}} \frac{\partial f_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}(x_A, A)}{\partial x_A^{\alpha_{q+1}}} dx_A^{\alpha_{q+1}} \wedge dx_A^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_A^{\alpha_q} \quad (2.41)$$

Ocorrem as relações particulares:

$$d(f^{(q)} \wedge g^{(p)}) = df^{(q)} \wedge g^{(p)} + (-1)^p f^{(q)} \wedge dg^{(p)} \quad (2.42)$$

$$d(df^{(q)}) = 0 \quad (2.43)$$

$$d(dx^\alpha) = 0 \quad (2.44)$$

que nos permitem definir recursivamente a derivada de uma forma.

O operador d generaliza a noção elementar de **rotacional** e de **divergência** de um vetor. Entendendo-se por **0-forma** uma função ordinária diferenciável $f(x)$, a derivada df corresponde ao diferencial ordinário:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (2.45)$$

No caso de uma **1-forma**: $T = T_\alpha dx^\alpha$, pela definição (2.41), sua derivada é dada por:

$$dT = \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial T_\beta}{\partial x^\alpha} \right) dx^\beta \wedge dx^\alpha \quad (2.46)$$

que corresponde ao **rotacional**. A relação (2.43) indica que o rotacional de um gradiente é nulo. Valerá a pena notar que, como a definição de rotacional não exige o conhecimento dos símbolos de Christoffel, porquanto,

$$dT = \frac{1}{2} (\tilde{T}_{\alpha\beta} - \tilde{T}_{\beta\alpha}) dx^\beta \wedge dx^\alpha = \frac{1}{2} (T_{\alpha;\beta} - T_{\beta;\alpha}) dx^\beta dx^\alpha \quad (2.47)$$

pela simetria destes símbolos. Analogamente, a derivada genérica de uma forma não exige o uso das $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ por causa da anti-simetrização que essa implica. A derivada d é portanto naturalmente covariante e de significado intrínseco.

Neste sentido, o cálculo da forma aparece como um algoritmo particular contido no cálculo tensorial usual. Havendo à disposição a n -ade V e as ω_{α}^{bc} , é possível exprimir por sua vez o conteúdo do cálculo tensorial de Ricci e Levi-Civita através daquele das formas. De fato, sempre se pode deslocar um índice α do espaço-tempo a um índice interno, projetando sobre a n -ade e deixando somente índices covariantes antissimétricos. Deste modo, as q -formas do tipo:

$$T_{q_1, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_s} = \sum_{\{\alpha\}} T_{q_1, \dots, q_t, \alpha_1, \dots, \alpha_q}^{p_1, \dots, p_s} (x_A, A) dx_A^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_A^{\alpha_q} \quad (2.48)$$

com um carácter genérico de transformação tensorial com respeito ao Grupo de Lorentz, devem ser suficientes para exprimir todos os entres geométricos representados no cálculo tensorial ordinário.

Para as formas contendo índices tensoriais, ocorre usar uma derivada covariante na qual as ω_{α}^{bc} desempenham o mesmo papel das $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$. Com esta finalidade, convém introduzir as **1-forma**:

$$\omega^{ab} = \omega_{\gamma}^{ab} dx^{\gamma} \quad (2.49)$$

$$V^a = V_{\alpha}^a dx^{\alpha} \quad (2.50)$$

que trazem como consequência da equação (2.32) [Apêndice D]:

$$dV^a + \omega^{ab} \wedge \eta_{bc} V^c = 0, \quad (2.51)$$

enquanto a derivada covariante da forma tensorial (2.48), também chamada de **derivada covariante exterior**, vem expressa por:

$$DT_{q_1, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_s} = dT_{q_1, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_s} + \sum_{i=1}^s \omega_{r_i}^{p_i} \wedge T_{q_1, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_{i-1}, r_i, p_{i+1}, \dots, p_s} - \sum_{i=1}^t \omega_{q_i}^{r_i} \wedge T_{q_1, \dots, q_{i-1}, r_i, q_{i+1}, \dots, q_t}^{p_1, \dots, p_s} \quad (2.52)$$

onde: $\omega_b^a = \omega^{ac} \eta_{cb}$.

Deste modo, a combinação (2.51) aparece como a nulidade da derivada covariante DV^r . Através das ω_b^a pode-se especificar ainda a lei de transformação por troca de base, que resulta em [Apêndice E]:

$$\omega_b^a = (\Lambda^{-1})_c^a d\Lambda_b^c + (\Lambda^{-1})_c^a \omega_c^e \Lambda_b^e \quad (2.53)$$

2.1.2 - Curvatura

As duas formulações da variedade riemanniana, mediante a métrica e a n-ade, resultam equivalentes como conteúdo, porém conduzem a desenvolvimentos formais diferentes. Em ambos os casos é fundamental o conceito de **curvatura**. Isso nasce da constatação que o deslocamento paralelo de Levi-Civita não é geralmente integrável: deslocando um vetor ao longo de uma linha fechada, se chega a um vetor final que não é igual àquele da partida. Só em um espaço que se comporta localmente como o plano euclidiano, o transporte de Levi-Civita equivale ao paralelismo ordinário.

Esta não integrabilidade se exprime também notando que não subsiste comutatividade das duas derivadas covariantes análogas àquela da derivada parcial. Abordarei esses fatos nas seções que se seguem.

2.1.3 - "O Paralelogramo Fechado" - O Tensor de Curvatura

Considere uma variedade V_N referida a um sistema de coordenadas (y^α) para a qual o elemento linear do espaço é

$$ds^2 = g_{\alpha\mu} dy^\alpha dy^\mu \quad (2.54)$$

Seja m um ponto da variedade e $\bar{e}_\alpha$ os vetores base associados a m . Defina o sistema natural de referência em m por $(\bar{m}, \bar{e}_\alpha) = (y_\alpha, \bar{e}_\alpha)$.

No espaço euclidiano E_N , a condição para que a forma diferencial quadrática (2.54) defina uma métrica é a de que se satisfaçam as condições de integrabilidade relativa aos vetores $\bar{e}_\alpha$ do sistema de referência. Se esta forma não satisfizer tais condições, diremos que em E_N ela não poderá ser categorizada como métrica, pois não existirão sistemas de coordenadas curvilíneas em E_N capazes de assim defini-la; diremos em tal caso que (2.54) define a V_N como um espaço de Riemann (R_N). Um espaço ou variedade de Riemann é, portanto, uma variedade dotada de uma métrica (2.54) [11].

Elie Cartan demonstrou [12] que num espaço de Riemann, ou pseudoriemanniano, é a não integrabilidade dos vetores $\bar{e}_\alpha$ que dá origem ao tensor de curvatura. Para determiná-lo, usarei aqui um método a que chamarei de "O Paralelogramo Fechado".

Para se calcular as derivadas de 2ª ordem de uma função escalar ou vetorial de variáveis (y^α), se efetuam duas derivações das quais em uma só varie y^α e na outra unicamente y^β . Generalizando este processo introduziremos dois símbolos de diferenciação, d e δ , permutáveis.

Partindo de valores quaisquer de variáveis arbitrárias (y^α) introduziremos variáveis (dy^α); diremos que esta variação define um símbolo de diferenciação $\underline{d}$. Seja analogamente (δy^α) um segundo símbolo de diferenciação $\underline{\delta}$. À partir de valores ($y^\alpha + dy^\alpha$) efetuaremos a diferenciação $\underline{\delta}$.

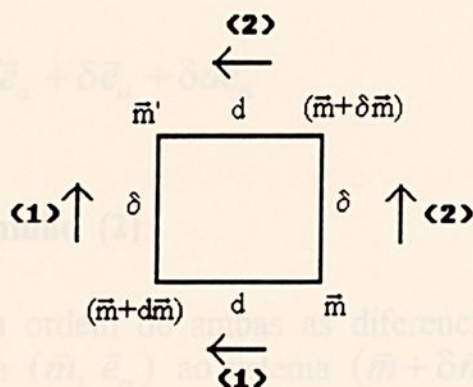


Fig. 4 - "O Paralelogramo Fechado" - Estudo da geometria de uma variedade riemanniana, em que se passa do ponto $\bar{m}$ a $\bar{m}'$, através de dois caminhos distintos, utilizando dois símbolos de diferenciação: d e δ (permutáveis).

Perguntas: - Pelos caminhos (1) e (2) chegaremos ao mesmo ponto M' ?
- Pelos caminhos (1) e (2) chegaremos ao mesmo referencial $\bar{e}'_\alpha$?

(III) Nos proporemos agora a desenvolver sobre o espaço V_N os 2 caminhos do paralelogramo que permitam passar de $\underline{\mathbf{M}}$ a $\underline{\mathbf{M}}'$. Ao ponto $\underline{\mathbf{M}}$ de V_N façamos corresponder um sistema de referência $(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha)$. Se efetuarmos primeiramente a diferencial d e depois a δ teremos que desenvolver os lados $(M, M + dM)$ e $(M + dM, M')$ do paralelogramo.

Desenvolvendo o caminho (1):

(I) se passará do sistema $(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha)$ ao $(\bar{\mathbf{m}} + d\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha + d\bar{\mathbf{e}}_\alpha)$ definido pelas equações:

$$d\bar{\mathbf{m}} = dy^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \quad (2.55)$$

$$d\bar{\mathbf{e}}_\alpha = \omega_\alpha^\beta(d) \bar{\mathbf{e}}_\beta \quad (2.56)$$

onde $\omega_\alpha^\beta(d)$ designa a *forma diferencial* ω_α^β para as dy^α .

(II) o desenvolvimento do lado $(M + dM, M')$ nos faz passar de $(\bar{\mathbf{m}} + d\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha + d\bar{\mathbf{e}}_\alpha)$ ao $(\bar{\mathbf{m}}_1', (\bar{\mathbf{e}}_\alpha)_1')$

$$\overrightarrow{mm}_1' = d\bar{\mathbf{m}} + \delta\bar{\mathbf{m}} + \delta d\bar{\mathbf{m}} \quad (2.57)$$

$$(\bar{\mathbf{e}}_\alpha)_1' - \bar{\mathbf{e}}_\alpha = d\bar{\mathbf{e}}_\alpha + \delta\bar{\mathbf{e}}_\alpha + \delta d\bar{\mathbf{e}}_\alpha \quad (2.58)$$

Desenvolvendo o caminho (2):

(I) se permutarmos a ordem de ambas as diferenciações, primeiramente passaremos do sistema $(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha)$ ao sistema $(\bar{\mathbf{m}} + \delta\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha + \delta\bar{\mathbf{e}}_\alpha)$ com:

$$\delta\bar{\mathbf{m}} = \delta y^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha \quad (2.59)$$

$$\delta\bar{\mathbf{e}}_\alpha = \omega_\alpha^\beta(\delta) \bar{\mathbf{e}}_\beta \quad (2.60)$$

(II) em seguida, passaremos ao sistema $(\vec{m}'_2, (\vec{e}'_\alpha)_2)$, tal que:

$$\vec{m}'_2 = \delta \vec{m} + d\vec{m} + d\delta \vec{m} \quad (2.61)$$

$$(\vec{e}'_\alpha)_2 - \vec{e}_\alpha = \delta \vec{e}_\alpha + d\vec{e}_\alpha + d\delta \vec{e}_\alpha \quad (2.62)$$

Por conseguinte, a diferença dos caminhos (1) e (2) nos permite passar do sistema $[\vec{m}'_1, (\vec{e}'_\alpha)_1]$ ao sistema $[\vec{m}'_2, (\vec{e}'_\alpha)_2]$, mediante as fórmulas:

$$\vec{m}'_2 - \vec{m}'_1 = d\delta \vec{m} - \delta d\vec{m} \quad (2.63)$$

$$(\vec{e}'_\alpha)_2 - (\vec{e}'_\alpha)_1 = d\delta \vec{e}_\alpha - \delta d\vec{e}_\alpha \quad (2.64)$$

Da equação (2.55), (2.59) e (2.63), vem que:

$$d\delta \vec{m} - \delta d\vec{m} = d(\delta y^\alpha \vec{e}_\alpha) - \delta(dy^\alpha \vec{e}_\alpha)$$

$$d\delta \vec{m} - \delta d\vec{m} = d\delta y^\alpha \vec{e}_\alpha + \delta y^\alpha d\vec{e}_\alpha - \delta dy^\alpha \vec{e}_\alpha - dy^\alpha \delta \vec{e}_\alpha \quad (2.65)$$

como $d\delta y^\alpha = \delta dy^\alpha$ (os símbolos de diferenciação são permutáveis), teremos que:

$$d\delta \vec{m} - \delta d\vec{m} = \delta y^\alpha d\vec{e}_\alpha - dy^\alpha \delta \vec{e}_\alpha \quad (2.66)$$

Utilizando as equações (2.56) e (2.60) e sabendo que, op. cit. [11]:

$$\omega^\beta_\alpha(d) = \Gamma^\beta_{\nu\alpha}(d) dy^\nu$$

$$\omega^\beta_\alpha(\delta) = \Gamma^\beta_{\nu\alpha}(\delta) \delta y^\nu$$

obteremos o seguinte resultado:

$$d\delta \vec{m} - \delta d\vec{m} = (\Gamma^\beta_{\nu\alpha} dy^\nu \delta y^\alpha - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} dy^\alpha \delta y^\nu) \vec{e}_\beta \quad (2.67)$$

Trocando-se os índices ν por α no segundo membro entre parêntesis, obteremos:

$$d\delta\bar{m} - \delta d\bar{m} = (\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} dy^{\nu} \delta y^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} dy^{\nu} \delta y^{\alpha}) \bar{e}_{\beta}$$

$$d\delta\bar{m} - \delta d\bar{m} = (\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}) dy^{\nu} \delta y^{\alpha} \bar{e}_{\beta} \quad (2.68)$$

As $\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}$, conhecidas como **Conexão Afim** ou **Símbolos de Christoffel**, são simétricas em seus sub-índices ν e α , se V_N for uma variedade riemanniana. Desse modo, chegamos a conclusão que, como:

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} = 0$$

logo:

$$d\delta\bar{m} - \delta d\bar{m} = \overrightarrow{m_1 m_2} = 0 \Rightarrow \bar{m}_1 = \bar{m}_2 \quad (2.69)$$

o que significa que através dos caminhos (1) e (2), chegaremos ao mesmo ponto final M' :

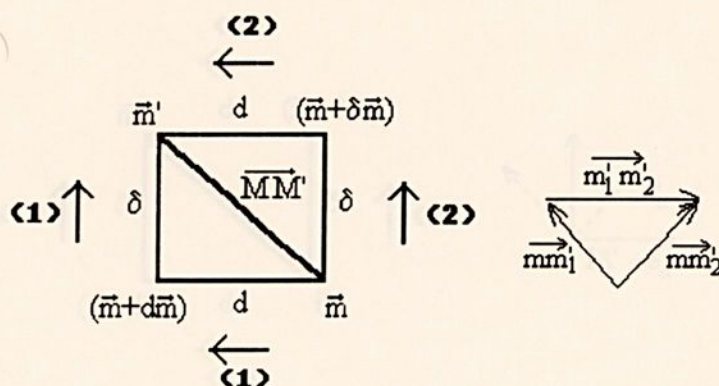


Fig. 5 - Representação da diferença entre vetores $(\bar{m}_2 - \bar{m}_1)$ - Partindo-se do ponto M , seja através do caminho (1) ou do caminho (2), chega-se ao mesmo ponto M' .

Substituindo (2.56) e (2.60) na equação (2.64), comparemos agora os vetores base dos dois sistemas de origem $\bar{m}'$:

$$d\delta\bar{e}_\alpha - \delta d\bar{e}_\alpha = d(\omega_\alpha^\nu(\delta)\bar{e}_\nu) - \delta(\omega_\alpha^\nu(d)\bar{e}_\nu)$$

$$d\delta\bar{e}_\alpha - \delta d\bar{e}_\alpha = [d\omega_\alpha^\nu(\delta) - \delta\omega_\alpha^\nu(d)]\bar{e}_\nu + \omega_\alpha^\beta(\delta)d\bar{e}_\beta - \omega_\alpha^\beta(d)\delta\bar{e}_\beta$$

$$d\delta\bar{e}_\alpha - \delta d\bar{e}_\alpha = [d\omega_\alpha^\nu(\delta) - \delta\omega_\alpha^\nu(d) + \omega_\alpha^\beta(\delta)\omega_\beta^\nu(d) - \omega_\alpha^\beta(d)\omega_\beta^\nu(\delta)]\bar{e}_\nu$$

Dessa forma, chegaremos ao seguinte resultado:

$$(\bar{e}'_\alpha)_2 - (\bar{e}'_\alpha)_1 = d\delta\bar{e}_\alpha - \delta d\bar{e}_\alpha = \Omega_\alpha^\nu \bar{e}_\nu \quad (2.70)$$

Em geral, as quantidades $\Omega_\alpha^\nu \bar{e}_\nu$ são diferentes de zero e os sistemas de referência finais, associados aos desenvolvimentos (1) e (2) possuem **distintas orientações**, embora conduzam a um mesmo ponto M' .

O sistema natural de referência final $(m', \bar{e}'_\alpha)$ é portanto "determinado" a menos de uma transformação ortogonal. Se o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ tiver um autovalor negativo e os outros positivos, essa variedade chamar-se-á pseudoriemanniana ou simplesmente variedade de Lorentz. Essa variedade constitui o espaço-tempo da relatividade geral.

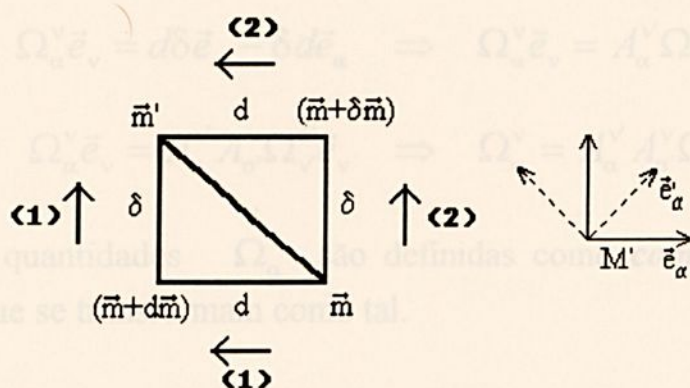


Fig. 6 - Representação da diferença de orientação dos vetores base $[(\bar{e}'_\alpha)_2 - (\bar{e}'_\alpha)_1]$ - Ao passarmos de M a M' através dos caminhos (1) e (2) o sistema "perde a orientação" dos vetores base, ou seja, o novo referencial é determinada a menos de uma rotação, embora seja conduzido ao mesmo ponto M' .

É importante verificar que as quantidades Ω_{α}^{ν} são componentes de um tensor. Utilizando a matriz de transformação A_{α}^{ν} aplicada sobre os vetores base, temos:

$$\bar{e}_{\alpha} = A_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} \quad \text{logo:}$$

$$\delta \bar{e}_{\alpha} = A_{\alpha}^{\nu} \delta \bar{e}_{\nu} + \delta A_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} \quad (2.71)$$

$$d\bar{e}_{\alpha} = A_{\alpha}^{\nu} d\bar{e}_{\nu} + dA_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} \quad (2.72)$$

e ainda:

$$d\delta \bar{e}_{\alpha} = A_{\alpha}^{\nu} d\delta \bar{e}_{\nu} + dA_{\alpha}^{\nu} \delta \bar{e}_{\nu} + \delta A_{\alpha}^{\nu} d\bar{e}_{\nu} + d\delta A_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} \quad (2.73)$$

$$\delta d\bar{e}_{\alpha} = A_{\alpha}^{\nu} \delta d\bar{e}_{\nu} + \delta A_{\alpha}^{\nu} d\bar{e}_{\nu} + dA_{\alpha}^{\nu} \delta \bar{e}_{\nu} + \delta dA_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} \quad (2.74)$$

Subtraindo a expressão (2.74) de (2.73), obteremos:

$$d\delta \bar{e}_{\alpha} - \delta d\bar{e}_{\alpha} = A_{\alpha}^{\nu} (d\delta \bar{e}_{\nu} - \delta d\bar{e}_{\nu}) \quad (2.75)$$

$$\text{Como:} \quad \Omega_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} = d\delta \bar{e}_{\alpha} - \delta d\bar{e}_{\alpha} \Rightarrow \Omega_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} = A_{\alpha}^{\nu} \Omega_{\nu}^{\sigma'} \bar{e}_{\sigma'} \quad (2.76)$$

$$\text{logo:} \quad \Omega_{\alpha}^{\nu} \bar{e}_{\nu} = A_{\alpha}^{\nu} A_{\sigma'}^{\nu} \Omega_{\nu}^{\sigma'} \bar{e}_{\nu} \Rightarrow \Omega_{\alpha}^{\nu} = A_{\alpha}^{\nu} A_{\sigma'}^{\nu} \Omega_{\nu}^{\sigma'} \quad (2.77)$$

ou seja, as quantidades Ω_{α}^{ν} são definidas como **componentes de um tensor** porque se transformam como tal.

2.1.4 - Os Tensores de Riemann-Christoffel, de Ricci e suas propriedades

Demonstraremos que as quantidades Ω_i^h são formas bi-lineares com respeito a dy^β e dy^σ .

Em primeiro lugar:

$$d\omega_\alpha^\vee(\delta) = d(\Gamma_{\sigma\alpha}^\vee \delta y^\sigma) = \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee dy^\beta \delta y^\sigma + \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee d\delta y^\sigma$$

$$\delta\omega_\alpha^\vee(d) = \delta(\Gamma_{\sigma\alpha}^\vee dy^\sigma) = \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee \delta y^\beta dy^\sigma + \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee \delta dy^\sigma$$

$$d\omega_\alpha^\vee(\delta) - \delta\omega_\alpha^\vee(d) = \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee dy^\beta \delta y^\sigma - \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee \delta y^\beta dy^\sigma \quad (2.78)$$

Se trocarmos, no 2º termo do membro à direita de (2.78), β por σ , virá que:

$$d\omega_\alpha^\vee(\delta) - \delta\omega_\alpha^\vee(d) = (\partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee - \partial_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\vee) dy^\beta \delta y^\sigma \quad (2.79)$$

Por outro lado:

$$\omega_\alpha^\theta(\delta)\omega_\alpha^\vee(d) - \omega_\alpha^\theta(d)\omega_\theta^\vee(\delta) = (\Gamma_{\sigma\alpha}^\theta \Gamma_{\beta\theta}^\vee - \Gamma_{\beta\alpha}^\theta \Gamma_{\sigma\theta}^\vee) dy^\beta \delta y^\sigma \quad (2.80)$$

$$\omega_\alpha^\theta(\delta)\omega_\alpha^\vee(d) - \omega_\alpha^\theta(d)\omega_\theta^\vee(\delta) = -(\Gamma_{\beta\alpha}^\theta \Gamma_{\sigma\theta}^\vee - \Gamma_{\sigma\alpha}^\theta \Gamma_{\beta\theta}^\vee) dy^\beta \delta y^\sigma$$

Recordando que:

$$\Omega_\alpha^\vee = d\omega_\alpha^\vee(\delta) - \delta\omega_\alpha^\vee(d) + \omega_\alpha^\theta(\delta)\omega_\theta^\vee(d) - \omega_\alpha^\theta(d)\omega_\theta^\vee(\delta) \quad (2.81)$$

substituindo (2.79) e (2.80) em (2.81), se chega a :

$$\Omega_\alpha^\vee = (\partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee - \partial_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\vee + \Gamma_{\sigma\alpha}^\theta \Gamma_{\beta\theta}^\vee - \Gamma_{\beta\alpha}^\theta \Gamma_{\sigma\theta}^\vee) dy^\beta \delta y^\sigma \quad (2.82)$$

Definindo:

$$R_{\alpha,\beta\sigma}^\vee = \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\vee - \partial_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\vee + \Gamma_{\sigma\alpha}^\theta \Gamma_{\beta\theta}^\vee - \Gamma_{\beta\alpha}^\theta \Gamma_{\sigma\theta}^\vee \quad (2.83)$$

$$\text{logo: } \Omega_{\alpha}^{\nu} = R_{\alpha, \beta \sigma}^{\nu} dy^{\beta} \delta y^{\sigma} \quad (2.84)$$

Como dy^{β} e dy^{σ} são componentes contravariantes de vetores arbitrários e Ω_{α}^{ν} são componentes de um tensor, então, $R_{\alpha, \beta \sigma}^{\nu}$ são **tensores** sobre V_N .

Trocando β por σ em (2.83):

$$R_{\alpha, \sigma \beta}^{\nu} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\beta \alpha}^{\nu} - \partial_{\beta} \Gamma_{\sigma \alpha}^{\nu} + \Gamma_{\beta \alpha}^{\theta} \Gamma_{\sigma \theta}^{\nu} - \Gamma_{\sigma \alpha}^{\theta} \Gamma_{\beta \theta}^{\nu} \quad (2.85)$$

$$\text{portanto: } R_{\alpha, \beta \sigma}^{\nu} = -R_{\alpha, \sigma \beta}^{\nu} \quad (2.86)$$

logo, $R_{\alpha, \beta \sigma}^{\nu}$ é **antissimétrico** em relação a β e σ .

O tensor $R_{\alpha, \beta \sigma}^{\nu}$ se chama **TENSOR DE RIEMANN-CHRISTOFFEL** ou **TENSOR DE CURVATURA DO ESPAÇO DE RIEMANNIANO** V_N .

À partir do tensor de R-C (Riemann-Christoffel) surge a questão de que se seria possível deduzir por contração de índices, novos tensores. Como $R_{\alpha \tau, \beta \sigma}$ é, em parte, antissimétrico com respeito a α e τ e a β e σ , resulta que a contração de α com τ ou de β com σ nos darão tensores **nulos**. Façamos então a contração de um índice do 1º grupo com outro do 2º, por exemplo índices 2º e 3º.

Se obtém que:

$$R_{\alpha \tau} = R_{\alpha, \nu \tau}^{\nu} \quad (2.87)$$

Observe que:

$$R_{\alpha \tau} = g^{\nu \eta} R_{\alpha \eta, \nu \tau} = g^{\nu \eta} R_{\nu \tau, \alpha \eta} = R_{\tau \alpha}$$

Ao tensor simétrico $R_{\alpha \tau}$, que desempenha papel importante em gravitação, se dá o nome de **TENSOR DE RICCI**.

Do tensor de Ricci resulta por contração um invariante:

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\tau} R_{\alpha\tau} \quad (2.88)$$

o qual se denomina **CURVATURA RIEMANNIANA ESCALAR DO ESPAÇO** V_N .

2.1.5 - As Identidades de Bianchi

À partir do tensor de RIEMANN-CHRISTOFFEL é possível, através de derivadas covariantes, se obter componentes que dão origem a identidades importantes. Com essa finalidade, utilizaremos a definição de derivada covariante [seção 2.1.1, equação (2.15)] aplicada ao tensor de RIEMANN-CHRISTOFFEL. Da definição (2.15) virá que:

$$\nabla_{\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu} = \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu} + \Gamma_{\beta\eta}^{\nu} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\eta} \quad (2.89)$$

Para o cálculo da derivada covariante do tensor de curvatura utilizaremos em um ponto p da variedade V_N um sistema particular de coordenadas, dito *sistema normal*, que tem a característica de que a métrica $g_{\alpha\beta}$ associada a tais coordenadas possui coeficientes constantes. Isto implica que os símbolos de Christoffel relativos a essas coordenadas se anulam todos no ponto p . Aplicando o resultado (2.89) na equação (2.85) e levando em conta a nulidade dos símbolos de Christoffel, teremos que:

$$\nabla_{\tau} R_{\alpha,\beta\sigma}^{\nu} = \partial_{\beta\tau} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu} - \partial_{\sigma\tau} \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \quad (2.90)$$

Por permutação de índices chegaremos a:

$$\nabla_{\beta} R_{\alpha,\sigma\tau}^{\nu} = \partial_{\sigma\beta} \Gamma_{\tau\alpha}^{\nu} - \partial_{\tau\beta} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu} \quad (2.91)$$

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha,\tau\beta}^{\nu} = \partial_{\tau\sigma} \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} - \partial_{\beta\sigma} \Gamma_{\tau\alpha}^{\nu} \quad (2.92)$$

Uma vez que os índices de derivação parcial são permutáveis, ou seja:

$$\partial_{\beta\sigma} = \partial_{\sigma\beta} \quad ; \quad \partial_{\beta\tau} = \partial_{\tau\beta} \quad ; \quad \partial_{\sigma\tau} = \partial_{\tau\sigma} \quad ,$$

adicionando-se as equações (2.90), (2.91) e (2.92):

$$\nabla_{\beta} R_{\alpha,\sigma\tau}^{\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\alpha,\tau\beta}^{\nu} + \nabla_{\tau} R_{\alpha,\beta\sigma}^{\nu} = 0 \quad (2.93)$$

As identidades representadas pela equação (2.93) são conhecidas como **Identidades de Bianchi**. Torna-se importante notar que, como tais identidades foram estabelecidas sob a **forma tensorial**, são válidas em todos os sistemas de coordenadas.

Por uma dupla contração em (2.93), se deduz uma consequência importante relativa ao tensor de Ricci. Para $\tau = \nu$, tem-se

$$-\nabla_{\beta} R_{\alpha\sigma} + \nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta} + \nabla_{\nu} R_{\alpha,\beta\sigma}^{\nu} = 0 \quad (2.94)$$

Por uma contração do índice α com σ , tem-se

$$-\nabla_{\beta} R + \nabla_{\sigma} R_{\beta}^{\sigma} + \nabla_{\nu} R_{\beta}^{\nu} = 0 \quad , \quad (2.95)$$

que implica em:

$$2\nabla_{\sigma} R_{\beta}^{\sigma} - \nabla_{\beta} R = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad (2.96)$$

escrevendo-a de outra forma:

$$\nabla_{\sigma} \left(R_{\beta}^{\sigma} - \frac{1}{2} g_{\beta}^{\sigma} R \right) = 0 \quad (2.97)$$

Se introduzirmos o tensor simétrico

$$G_{\beta\sigma} = R_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g_{\beta\sigma} R \quad , \quad (2.98)$$

este tensor satisfaz as identidades:

$$\nabla_{\sigma} G_{\beta}^{\sigma} = 0 \quad (2.99)$$

Estas identidades são fundamentais na teoria relativista da gravitação [seção 2.1.8].

Observe que, apesar de termos usado um sistema de coordenadas específico para a obtenção das identidade de Bianchi, devido a sua tensorialidade, estas fórmulas são válidas em qualquer sistema de coordenadas e em todo ponto da variedade

2.1.6 - O Princípio de Equivalência

Usa-se distinguir entre um princípio de equivalência fraco e um forte. No **princípio de equivalência fraco** o ponto de partida é a igualdade das massas inercial e gravitacional de um corpo. A massa inercial m_i aparece no segundo princípio da dinâmica newtoniana (2a. lei de Newton):

$$F = m_i a \quad (2.100)$$

que relaciona a aceleração à força F agindo sobre o corpo. A massa gravitacional m_g aparece na lei universal de atração:

$$F = G \frac{m_g m_i}{r^2} \quad (2.101)$$

Seja M_g a massa gravitacional da Terra, m_i e m_g a massa de um corpo, a que chamaremos de corpo de prova. Se R é o raio da Terra, e g é a aceleração de tal corpo sobre a superfície terrestre, se obtém, combinando (2.100) e (2.101):

$$g = G \frac{M_g}{R^2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \quad (2.102)$$

Esta aceleração gravitacional não depende do corpo de prova somente se a massa inercial for igual à massa gravitacional. A famosa, e talvez jamais executada, experiência de Galileu, na qual o cientista deixou cair os pesos da torre de Pisa, assinalou o ingresso do princípio de equivalência fraco na física. Em tempos recentes, a experiência de Eötvös [13], além da de Dicke, op.cit. [1], colocou em evidência a absoluta igualdade das duas massas em limites relativos inferiores a 10^{-12} . Entre estes limites, a aceleração da gravidade não depende do corpo de prova.

O princípio de equivalência fraco forneceu a Einstein a base física para a construção da relatividade geral [14]. Einstein imaginou um elevador ideal, um recipiente fechado no qual um observador desenvolve experiências físicas. O interior desse elevador pode equiparar-se ao conjunto aberto U de uma carta do espaço-tempo, descrito precedentemente. A experiência se desenvolve em quatro modalidades.

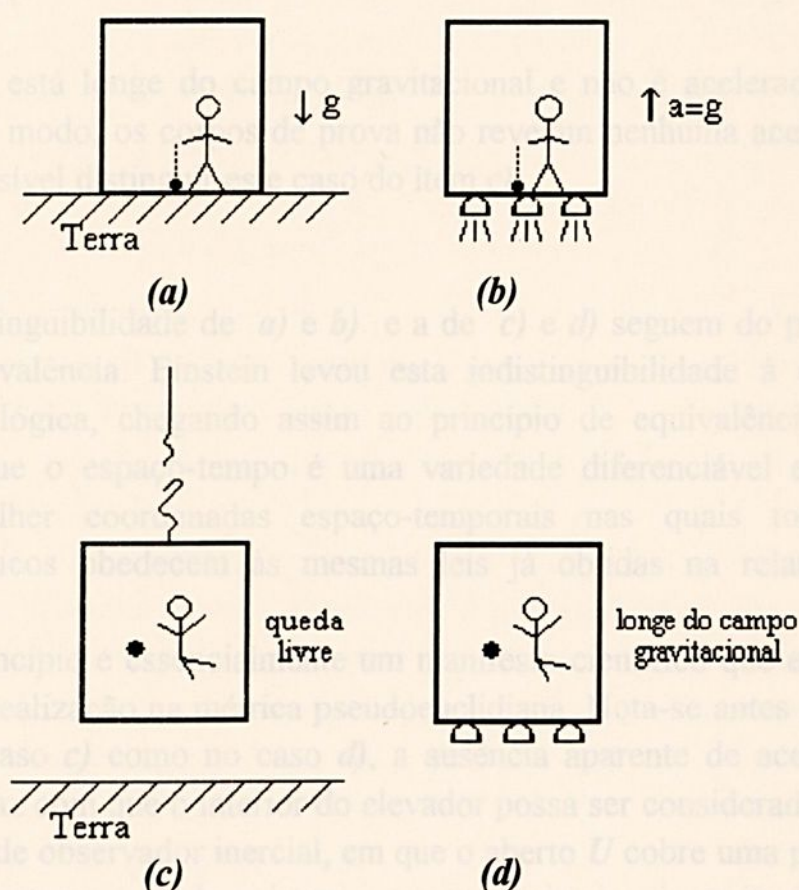


Fig. 7 - Elevador Ideal de Einstein - Recipiente fechado no qual um observador desenvolve experiências físicas.

- a)* o elevador é suspenso no campo gravitacional de um corpo (*Fig. 7.a*) e os corpos no seu interior mostram uma aceleração de gravidade comum, tal como g no campo terrestre;
- b)* o elevador é colocado no espaço vazio, afastado de qualquer influência gravitacional; um motor o impulsiona com uma aceleração constante a , idêntica a g (*Fig. 7.b*). Os corpos no seu interior mostram, relativamente às paredes, uma aceleração de recuo exatamente igual e contrária à do elevador, comum a todos os corpos de prova. Um observador interno não poderá distinguir esta configuração da precedente *a)* baseando suas observações no interior do elevador.
- c)* o elevador se encontra no campo gravitacional terrestre, mas em queda livre (*Fig. 7.c*). Os corpos internos caem com a mesma aceleração das paredes e, por isso, o observador no elevador não percebe nenhuma força de gravidade.
- d)* o elevador está longe do campo gravitacional e não é acelerado (*Fig. 7.d*). Deste modo, os corpos de prova não revelam nenhuma aceleração, e não é possível distinguir este caso do item *c*).

A indistinguibilidade de *a)* e *b)* e a de *c)* e *d)* seguem do princípio fraco de equivalência. Einstein levou esta indistinguibilidade à extrema consequência lógica, chegando assim ao princípio de equivalência forte. Este revela que o espaço-tempo é uma variedade diferenciável e que é possível escolher coordenadas espaço-temporais nas quais todos os fenômenos físicos obedecem às mesmas leis já obtidas na relatividade restrita.

Este princípio é essencialmente um manifesto científico que encontra sua completa realização na métrica pseudoeuclidiana. Nota-se antes de tudo que, seja no caso *c)* como no caso *d)*, a ausência aparente de aceleração gravitacional faz com que o interior do elevador possa ser considerado como um fragmento de observador inercial, em que o aberto U cobre uma pequena parte do espaço-tempo. Onde existam campos gravitacionais muito intensos e não homogêneos, ocorrerá diminuir as dimensões do elevador.

Uma nave espacial, estando em queda livre, é com boa aproximação um elevador de Einstein. Para simplificar, suponha que essa nave esteja em órbita circunterrestre. Neste caso, no centro da nave, a força de atração terrestre é exatamente compensada pela força centrífuga. Se se aproxima da parede em direção à Terra, a força de atração supera a centrífuga e a compensação não é mais exata. Disso resulta a fraca força de maré, que torna o interior da nave só aproximadamente inercial. O mesmo raciocínio pode ser repetido para a parede oposta. Por isso não é possível conceber um observador inercial ilimitado em extensão; na verdade, a compensação do campo gravitacional é considerada em linha de princípio somente para um observador de extensão infinitesimal.

Esta consideração encontra exata correspondência matemática na conjectura de Einstein segundo a qual o tensor métrico está associado ao potencial gravitacional, os $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ à aceleração da gravidade e os $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ à força de maré no espaço-tempo. De fato, é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas em torno de um ponto $\underline{x}$ qualquer, no qual o tensor métrico assume a forma $\eta_{\alpha\beta}$ do espaço de Minkowski, e ainda especializar ulteriormente tal sistema, de forma a obter $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$ localmente em $\underline{x}$. Desse modo, um observador limitado à vizinhança do ponto, a uma distância muito próxima dele, não consegue distinguir a variedade daquela do espaço de Minkowski. Afastando-se a distância de dx^{α} do ponto $\underline{x}$, os $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ não serão mais nulos, resultando da ordem de: $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \sim R_{\mu\nu\lambda}^{\alpha} dx^{\lambda}$, onde $R_{\mu\nu\lambda}^{\alpha}$ é o tensor de Riemann; este tensor determina portanto a força de maré. Não é possível escolher um sistema de coordenadas no qual também $R_{\mu\nu\lambda}^{\alpha}$ seja nulo, de vez que, sendo um tensor, se fosse nulo em um sistema referencial, o seria em todos.

O conceito de curvatura possui um conteúdo intuitivo que o liga diretamente ao desenvolvimento da geometria não euclidiana. No plano, o axioma das paralelas implica que a soma de seus ângulos internos de um triângulo vale π . Sobre a esfera este teorema não vale, sendo substituído pela seguinte generalização. Seja P_1, P_2, P_3 um triângulo esférico formado pelos arcos de máximos P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 e sejam $\alpha(P_i)$ os ângulos internos de tal triângulo; então:

$$\alpha(P_1) + \alpha(P_2) + \alpha(P_3) - \pi = \frac{A(P_1P_2P_3)}{R^2} \quad (2.103)$$

onde $A(P_1 P_2 P_3)$ é a área do triângulo esférico e R o raio da esfera. Pode-se dizer que, pela curvatura gaussiana da esfera:

$$K \equiv \frac{1}{R^2} = \frac{\alpha(P_1) + \alpha(P_2) + \alpha(P_3) - \pi}{A(P_1 P_2 P_3)} ; \quad (2.104)$$

essa resulta constante e expressa em termos das quantidades mensuráveis internamente com um dispositivo qualquer a duas dimensões, sem sair da superfície esférica. Em geral, para uma superfície Σ , a sua curvatura gaussiana é dada por:

$$K_\Sigma(P) = \lim_{P_1, P_2, P_3 \rightarrow P} \frac{\alpha(P_1) + \alpha(P_2) + \alpha(P_3) - \pi}{A(P_1 P_2 P_3)} \quad (2.105)$$

onde, no limite, P está contido em cada triângulo $P_1 P_2 P_3$ formado por arcos das chamadas, então, **linhas geodésicas** [seção 2.1.7] de Σ .

Em duas dimensões o tensor de Riemann possui uma só componente que pode ser identificada com a curvatura gaussiana. A quantidade $\alpha(P_1) + \alpha(P_2) + \alpha(P_3) - \pi$ é o ângulo pelo qual gira um vetor deslocado à Levi-Civita ao longo do perímetro do triângulo geodésico $P_1 P_2 P_3$.

Como a curvatura gaussiana possui dimensões do inverso do quadrado do raio de curvatura, espera-se que este raio de curvatura exprima a dimensão do aberto "elevador", no qual a força de maré não perturba a inercialidade do observador. A curvatura do espaço-tempo impede a construção de uma carta inercial global.

2.1.7 - As geodésicas - o vetor aceleração de um ponto móvel na variedade M^n

Uma outra idéia fundamental da teoria da relatividade geral concerne a relação entre distribuição de matéria e geometria do espaço tempo. O espaço-tempo age sobre a matéria, porquanto o tensor métrico é também potencial gravitacional. Por um princípio generalizado de ação e reação, a matéria deve agir sobre o espaço determinando as propriedades geométricas. Devem pois existir dois tipos de equações; a primeira determina o movimento relativístico de um corpo em um campo gravitacional e a outra



liga o tensor métrico à distribuição de matéria. Preliminarmente, no entanto, convém definir na presente seção um outro conceito fundamental, qual seja o de *geodésica*.

Para tanto, consideremos na variedade M^n um ponto móvel $\underline{P}$, de coordenadas y^α , função de um parâmetro τ que interpretaremos como a variável tempo. O vetor velocidade $\vec{v}$ de $\underline{P}$ terá como componentes contravariantes:

$$v^\alpha = \frac{dy^\alpha}{d\tau}, \quad (2.106)$$

enquanto o vetor aceleração $\vec{a}$ admitirá as componentes contravariantes:

$$a^\alpha = \frac{\nabla v^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha \frac{dy^\sigma}{d\tau} \frac{dy^\lambda}{d\tau}. \quad (2.107)$$

Se a aceleração de $\underline{P}$ é nula, sua trajetória se denominará geodésica do espaço riemanniano M^n , ou seja:

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha \frac{dy^\sigma}{d\tau} \frac{dy^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (2.108)$$

Em uma métrica riemanniana a geodésica fixa o percurso mínimo entre dois pontos dados. Em uma métrica lorentziana, a geodésica caracteriza o percurso correspondente ao máximo tempo-próprio entre dois eventos. Além disso, a geodésica é a linha *mais direta* - não querendo aqui incorrer num abuso de linguagem -, enquanto esta última equação implica que o vetor tangente $\frac{dy^\lambda}{d\tau}$ é deslocado paralelamente, segundo Levi-Civita, ao longo da curva. Enfim, em uma carta local inercial, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$, e portanto, a equação (2.108) se reduz àquela de uma reta e corresponde ao movimento uniforme com ausência de aceleração, como exigência do princípio de equivalência.

A equação (2.108) é válida também para o movimento de um raio de luz em um campo gravitacional. A luz é defletida pela gravidade, como resulta necessário aplicando o princípio de equivalência do citado elevador de Einstein, conforme ilustrado na *Fig. 8*.

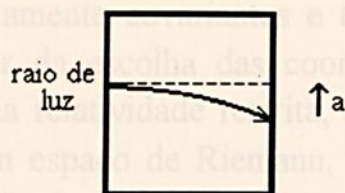


Fig. 8 - Deflexão de um raio de luz - Aplicando-se o Princípio de Equivalência no elevador de Einstein, obtemos como resultado a **deflexão (curvatura)** de um raio de luz em um campo gravitacional.

De fato, ao considerarmos no "elevador de Einstein" um raio de luz que parta de uma das paredes em direção à outra, haverá deflexão da luz, ou seja, esse raio de luz atingirá a parede oposta um pouco abaixo da direção inicial. Einstein concluiu daí que, em um campo gravitacional, a luz se "curvaria". Tal fato viria a ser comprovado experimentalmente poucos anos depois [15]. Retornando à equação (2.108), podemos verificar que, considerando $dt = 0$, se perderia seu significado. Na realidade, é necessário notar que essa equação permanece invariante escalando o parâmetro t de um fator arbitrário constante. Pela propagação da luz esse fator de escala torna-se infinito e a variabilidade do tempo é interpretada como um parâmetro sobre a curva, obtido do tempo-próprio mediante um procedimento limite.

É evidente que um raio de luz "sente" todas as componentes do tensor métrico e, por isso, a medida de sua deflexão fornece informações sobre toda a métrica, contribuindo assim para diferenciar a relatividade geral de teorias mais simples, na qual o campo gravitacional é representado por um só escalar.

b) O Princípio da conservação de energia obrigará ademais que a divergência de $T_{\mu\nu}$ seja nula, que implicaria que a divergência de $G_{\mu\nu}$ será também nula:

2.1.8 - Equações de Einstein

(2.110)

Na relatividade geral as coordenadas não possuem mais um significado físico direto, porquanto servirão apenas a "etiquetar" em modo convencional os pontos de uma carta do espaço-tempo. As quantidades de interesse físico serão inteiramente expressas mediante campos, entre os

quais o tensor métrico para o campo gravitacional. As equações de interesse físico devem ser completamente covariantes e ter caráter tensorial, posto que não podem depender da escolha das coordenadas, op. cit [1], [4]. Einstein mantém, como na relatividade restrita, a hipótese fundamental de que o espaço-tempo é um espaço de Riemann, mas a forma do elemento $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ depende da distribuição da matéria, e calcular-se-á caso a caso. Ou seja, os 10 coeficientes $g_{\mu\nu}$, posto que a dimensão do espaço-tempo é $n=4$, não serão dados a priori, mas calculados por meio de certas equações, as quais dependerão da distribuição da matéria e da energia, conceitos equivalentes no espaço.

Para determinar estas equações, Einstein parte das seguintes condições:

a) Estas equações deveriam ser tensoriais. Como existem 10 funções incógnitas deverão existir também 10 equações tensoriais que, por analogia a equação clássica de Poisson *, deverão ser do tipo:

$$G_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu} \quad (2.109)$$

onde α é uma constante e $T_{\mu\nu}$ um tensor simétrico, chamado **Tensor matéria-energia** e que depende essencialmente da distribuição da matéria e da energia no espaço.

b) O Princípio da conservação de energia obrigará ademais que a divergência de $T_{\mu\nu}$ seja nula, que implicaria que a divergência de $G_{\mu\nu}$ será também nula:

$$\nabla_\mu G^{\lambda\mu} = 0 \quad (2.110)$$

* $\Delta\phi = 4\pi G\rho$, (Laplaciano do Potencial Gravitacional ϕ é proporcional à densidade volumétrica de matéria no espaço).

É fácil e direto verificar que os únicos tensores que cumprem estas duas condições enumeradas, estão dados pela fórmula:

$$G_{\lambda\mu} = h[R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\mu}(R + k)] \quad (2.111)$$

onde h e k são constantes, $R_{\lambda\mu}$ é o **Tensor de Ricci** e R a **curvatura escalar**.

Prescindindo do último termo, qual seja, $kg_{\lambda\mu}$ que será interessante apenas para problemas de tipo cosmológico (k é uma constante chamada de **constante cosmológica** cujo valor é desprezível para distâncias não astronômicas) as equações de gravitação de Einstein serão:

$$G_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\mu} \quad (2.112)$$

que coincidem com as (2.98) encontradas no desenvolvimento das identidades de Bianchi

Estas dez equações em derivadas parciais devem ser resolvidas para determinação das $g_{\lambda\mu}$ a partir do que será conhecido o elemento de arco do espaço. Fora da matéria e das regiões de energia, sendo $G_{\lambda\mu} = 0$, as equações de Einstein tomarão a forma simples:

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\mu} = 0 \quad ,$$

o que implicará em: $R_{\lambda\mu} = 0 \quad (2.113)$

Conhecido o elemento de arco ds se pode estudar toda a geometria do espaço-tempo. O mérito de Einstein foi o de interpretar fisicamente esta geometria estabelecendo uma correspondência entre os elementos geométricos do espaço-tempo e os fenômenos físicos do espaço tridimensional. Os postulados que elaborou para estabelecer essa correspondência foram, op. cit. [1]:

a) se um ponto se move livremente, descreverá então uma geodésica do espaço-tempo;

b) se o ponto se move com velocidade da luz c , a geodésica que descreve tem comprimento nulo ($ds = 0$). Ou seja, as trajetórias dos raios luminosos são geodésicas de comprimento nulo do espaço-tempo.

Posteriormente, Einstein verificou que estes postulados eram consequências das equações fundamentais (2.112).

2.2 - A Teoria de Einstein-Cartan

2.2.1 - Introdução

Das interações fundamentais conhecidas na física moderna, a interação gravitacional é a mais fraca e, a nível microscópico, a menos compreendida. Várias evidências de experimentos macroscópicos atestam a validade da Teoria Geral da Relatividade de Einstein como a descrição desta interação, op. cit [15], [17]. Porquê, então, vale a pena propor alternativas ou outras teorias gerais de gravitação? Um empírico pode argüir que é melhor esperar por novos resultados experimentais e então, somente sob o desafio proposto pelas possíveis contradições da relatividade geral, revisar ou modificar a teoria de Einstein, ou propor uma alternativa.

Há, contudo, uma dicotomia na física teórica no presente. Interações forte, eletromagnética e fraca encontram suas mais bem sucedidas descrições dentro da estrutura da teoria de campo quântico relativístico no espaço-tempo plano de Minkowski. Estes campos quânticos residem no espaço-tempo mas estão separados dele. A gravitação, de acordo com Einstein, deforma o espaço de Minkowski e insere-se na própria geometria

riemanniana dinâmica do espaço-tempo. Um ramo da física fundamental é altamente bem sucedida em um plano e no espaço-tempo rígido, mas a gravitação requer um espaço tempo não plano e dinâmico. Este estado de coisas parece, ao menos de um ponto de vista epistemológico, ser insatisfatório, e estender os conceitos da relatividade geral a fim de facilitar a comparação e possivelmente, uma conexão com teorias de outras interações, é portanto desejável.

A relatividade geral foi originariamente formulada como uma teoria válida para distribuições de massa macroscópicas. A dicotomia em estruturas geométricas insinuada acima pode ser devido aos diferentes domínios de aplicabilidade das respectivas teorias. Correspondentemente, formas de teorias gravitacionais para processos microfísicos, teorias as quais poderiam repetir-se em algum limite macrofísico, poderiam ser pensadas como caminhos possíveis rumo a descrição do espaço-tempo unificado que nós desejamos.

O momento angular spin da matéria, ocorrendo na natureza em unidades de $\hbar/2$ (onde $\hbar$ é a constante de Planck reduzida), é a noção física que parece pertinente e necessária para uma bem sucedida extensão da relatividade geral para a microfísica. Os constituintes da matéria macroscópica são partículas elementares que obedecem, ao menos localmente, a mecânica quântica e a teoria da relatividade especial. A distribuição de massa-energia e spin sobre o espaço-tempo nos conduz as noções teóricas de um tensor momento-energia e um tensor momento angular spin de matéria.

No limite macrofísico, massa (ou momento-energia) se adiciona, devido seu caráter de monopólo, enquanto que um spin, sendo de caráter dipolar, spin "up" e spin "down", usualmente cancela-se. Dizemos então que a densidade do momento angular intrínseco é zero. (O então chamado spin de planetas ou bolas de bilhar é de origem orbital e não tem relação com o spin intrínseco que discutimos aqui.) Devido o spin cancelar-se à grande distância, a caracterização dinâmica de uma distribuição contínua de matéria macroscópica, pode ser bem sucedida somente através do momento-energia. A relatividade geral de Einstein tem nos ensinado que o tensor momento-energia de matéria (o "fluxo de momentum") é a fonte do campo gravitacional [seção 2.1.8].

Quando nos aventuramos adiante no reino microfísico da matéria, nós encontramos que o momento angular de spin (o "fluxo de spin") também entra em cena e caracteriza a matéria dinamicamente. A hipótese é que o momento angular do spin é a fonte de um campo, de fato, também a fonte do campo gravitacional. Por campo gravitacional, nós queremos dizer aqui um campo inseparavelmente ligado à geometria do espaço-tempo.

Esperamos que, em analogia com a ligação do momento-energia com a métrica, o spin esteja ligado à geométrica "quantidade de estado" do espaço-tempo, a qual relacionaria os graus de liberdade rotacional no espaço-tempo. Dessa maneira, somos levados não ao espaço tempo riemanniano da relatividade geral, mas a um espaço-tempo mais geral, ao espaço-tempo não riemanniano n -dimensional. A parte não riemanniana da conexão afim caracterizando o novo espaço-tempo é o tensor de torção a ser definido na próxima seção, a qual seria acoplado ao spin. O fluxo de spin encontra base dinâmica nesta estrutura estendida, a então chamada teoria de gravitação de Einstein-Cartan. A Teoria de Einstein-Cartan trata essencialmente da introdução do conceito de torção na geometria do espaço-tempo [19], [20].

A minha proposta no corrente capítulo é a de, além da descrição geométrica da origem do tensor de torção e de reinterpretá-lo na linguagem das formas diferenciais e da álgebra à Grassmann, dissertar também brevemente sobre suas perspectivas futuras. Não caberá aqui a análise física mais aprofundada da conexão spin-torção por dois motivos: não é objetivo a que a dissertação se propõe, e também porque, creio, o tema acha-se já bem percorrido em outros textos [21].

2.2.2 - "O Paralelogramo Aberto" - A Torção

O espaço-tempo até aqui é assumido ser uma variedade, ou seja, um contínuo Riemanniano, ou melhor, pseudoriemanniano, onde cada ponto pode ser representado por quatro coordenadas x^μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$. Em tal contínuo definimos vetores contravariantes e covariantes, tensores e estruturas adicionais como o transporte (deslocamento) paralelo [equação 2.10], sem o qual não faria sentido afirmar que um campo vetorial diferente de zero é constante. A noção de transporte paralelo é introduzida para dar um significado àquela afirmação [seção 2.1]. O conceito de transporte paralelo pode ser estendido a tensores e é então possível definir sua diferenciação covariante ∇ com respeito a Γ . Faz sentido afirmar-se que um campo é constante no espaço-tempo quando sua derivada covariante é zero.

De fato, da expressão (2.15):

$$\nabla T^\alpha = dT^\alpha + \Gamma_{\beta \nu}^\alpha T^\nu dx^\beta \quad (2.114)$$

O campo tensorial será constante se

$$\nabla T^\alpha = 0 \quad (2.115)$$

A estrutura do espaço-tempo como um contínuo não será, doravante, abandonada, mas para a definição do tensor de torção na variedade será requerido uma variedade com estrutura não Reimanniana.

Considere para tanto uma variedade qualquer V_N , não necessariamente Riemanniana e tal que um ponto M qualquer é referido a coordenada y^μ . Como [seção 2.1.3], a posição do sistema $(M + dM, \bar{e}_\mu + d\bar{e}_\mu)$ ficará completamente determinada com respeito a $(M, \bar{e}_\mu)$ se conhecermos as componentes contravariantes com relação aos vetores $\bar{e}_\mu$, dos vetores $d\bar{m}$ e $d\bar{e}_\mu$, ou seja:

$$d\bar{m} = dx^\mu \bar{e}_\mu \quad (2.116)$$

$$d\bar{e}_\mu = \omega_\nu^\mu \bar{e}_\nu, \quad (2.117)$$

o problema proposto será resolvido se as equações acima forem integráveis; estas deverão dar-nos para as derivadas segundas de M e de $\bar{e}_\mu$ valores simétricos com respeito aos índices de derivação [seção 2.1.3]. Em outras palavras, dizemos que os símbolos de diferenciação δ e d são permutáveis.

Numa variedade Riemanniana, como visto, as condições de integrabilidade da equação (2.116) são satisfeitas, o que implicava na simetria da Conexão Afim $\Gamma_{\sigma \nu}^\mu$ com respeito aos dois índices inferiores, enquanto que as condições de integrabilidade de (2.117) não o eram. Em não sendo, surgia na variedade o que chamamos de Tensor de Curvatura $R^{\mu\sigma}_{\nu\alpha}$. A integrabilidade de (2.116) preserva a definição de elemento linear do espaço:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.118)$$

que, em essência, define uma variedade Riemanniana.

Para uma variedade não Riemanniana no entanto, em geral, as condições de integrabilidade para (2.116) não são também satisfatórias, o que resulta:

$$\frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \neq \frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial \bar{m}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial \bar{e}_\nu}{\partial x^\sigma} \quad (2.120)$$

Como, $d\bar{e}_\nu = \omega_\nu^\mu \bar{e}_\mu$ e $\omega_\nu^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu dx^\sigma$, logo:

$$d\bar{e}_\nu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu dx^\sigma \bar{e}_\mu \quad (2.121)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \bar{e}_\mu \quad (2.122)$$

Da mesma maneira, chegaremos a

$$\frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} = \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \bar{e}_\mu \quad (2.123)$$

Em consequência de (2.119):

$$\Gamma_{\sigma\nu}^\mu \bar{e}_\mu \neq \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \bar{e}_\mu \quad (2.124)$$

$$\Gamma_{\sigma\nu}^\mu \neq \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \quad (2.125)$$

A não simetria da conexão afim com respeito aos seus dois índices inferiores é portanto uma consequência da não integrabilidade de (2.116). Um tipo de variedade não Riemanniana a que chamarei de U_N , é a variedade com torção, ou seja, uma variedade com conexão $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ não simétrica.

O *Tensor de Torção* é definido quando parte da conexão afim é anti-simétrica em relação aos seus dois índices inferiores.

Da expressão (2.14) é facilmente comprovado que, se:

$$U_{\beta\nu}^{\mu} \equiv \Gamma_{[\beta\nu]}^{\mu}, \quad (2.126)$$

então:
$$U_{\beta\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu}) \quad (2.127)$$

transforma-se como um **tensor**, o chamado **Tensor de Torção**.

Da expressão (2.14), tem-se, de fato, que:

$$\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}(x_A, A) = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x_B, B) \frac{\partial x_A^{\alpha}}{\partial x_B^{\lambda}} \frac{\partial x_B^{\mu}}{\partial x_A^{\beta}} \frac{\partial x_B^{\nu}}{\partial x_A^{\alpha}} + \frac{\partial^2 x_B^{\mu}}{\partial x_A^{\beta} \partial x_A^{\alpha}} \frac{\partial x_A^{\alpha}}{\partial x_B^{\mu}} \quad (2.128)$$

que prova o caráter tensorial de (2.127).

A expressão (2.127) é também chamada de o **Tensor de Torção de Cartan**. Se tentássemos construir, como na seção 2.1.3, pequenos paralelogramos em U_N , por conta da assimetria de $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, eles não se fechariam. A torção como que "**quebra**" paralelogramos infinitesimais; a abertura do paralelogramo é proporcional ao Tensor de Torção.

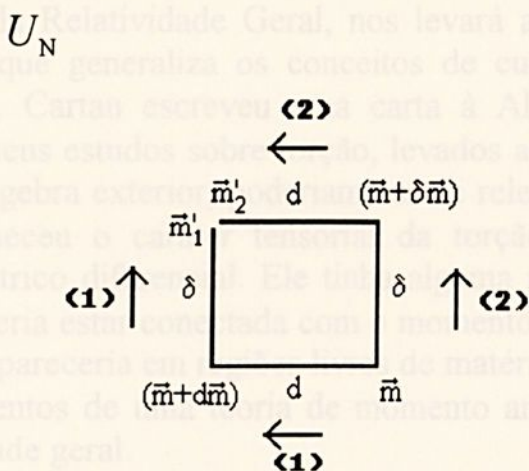


Fig. 9 - "O Paralelogramo Aberto" - O Tensor de Torção proporciona em U_N uma "quebra" do paralelogramo.

Na **Fig. 9**, em analogia com as expressões (2.63) e (2.68), teremos:

$$\overrightarrow{m_1 m_2} = (\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}) dx^{\sigma} \delta x^{\nu} \vec{e}_{\mu} \quad (2.129)$$

ou seja,

$$\overrightarrow{m_1 m_2} = 2U_{\sigma\nu}^{\mu} dx^{\sigma} \delta x^{\nu} \vec{e}_{\mu} \quad (2.130)$$

Na próxima seção interpretarei o Tensor de Torção $U_{\beta\nu}^{\mu}$ na linguagem das formas exteriores e da álgebra à Grassmann. A variedade com torção U_N é chamada também de Variedade de Cartan-Riemann, op. cit. [21], ou Variedade de Einstein-Cartan-Riemann.

2.2.3 - Curvatura, Torção e Conexão numa Variedade não-Riemanniana

O formalismo mais conveniente para tratar de variedades não-riemannianas seria o de empregarmos as formas diferenciais [seção 2.1.1.c], associadas pela operação de diferenciação exterior. Essa variante autônoma com respeito a tradicional - tensores -, que teve o seu mérito histórico no desenvolvimento da Relatividade Geral, nos levará a uma teoria com um multipletto único, que generaliza os conceitos de curvatura e torção. Em maio de 1929, E. Cartan escreveu uma carta à Albert Einstein. Cartan argumentava que seus estudos sobre torção, levados a termo no formalismo das formas e da álgebra exterior, poderiam ser de relevância à Relatividade Geral. Ele reconheceu o caráter tensorial da torção e desenvolveu um formalismo geométrico diferencial. Ele tinha alguma idéia que a torção do espaço-tempo poderia estar conectada com o momento angular intrínseco da matéria e que desapareceria em regiões livres de matéria. Cartan estabeleceu somente os rudimentos de uma teoria de momento angular intrínseco e de torção na relatividade geral.

A possível ligação entre torção e momento angular intrínseco foi esquecido mais tarde, provavelmente devido ao conceito moderno de spin ter seu pleno reconhecimento somente com a descoberta do spin do elétron (1925-26), e devido ao trabalho de Cartan não ter sido amplamente lido pelos relativistas. O conceito de uma conexão afim assimétrica, do tipo da Relatividade Geral, reapareceu no contexto de diferentes tentativas de uma teoria de campo unificada.

No início dos anos sessenta, na tentativa de reformular a relatividade einsteiniana, Kibble e Utiyama, op. cit. [10], deram uma formulação da teoria substancialmente equivalente àquela de Cartan. Para haver uma compreensão geométrica desta última, retornarei aos conceitos de Vierbein e conexão sobre uma variedade diferenciável, [seção 2.1.1.b], aqui reinterpretados.

Consideremos um campo vetorial de referência sobre uma variedade que suporemos o espaço-tempo quadridimensional; sobre todo o plano tangente é definida uma quadra (4) de vetores $\vec{e}_i$ que define o referencial local (sistema intrínseco). Se a variedade é o espaço-tempo, os $\vec{e}_i$ constituem um referencial localmente inercial. Um deslocamento infinitesimal $d\vec{m}$ se poderá escrever como:

$$d\vec{m} = V^i \vec{e}_i \quad (2.131)$$

onde os V^i são lineares nas diferenciais das coordenadas x^μ da variedade:

$$V^i = V^i_\mu dx^\mu \quad (2.132)$$

As 1-forma V^i são as **Vierbein** ou **tétrades** [seção 2.1.b]. Se na equação (2.131) o referencial é aquele dos vetores tangentes às linhas coordenadas $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \vec{\partial}_\mu = \vec{e}_\mu$

$$d\vec{m} = dx^\mu \vec{\partial}_\mu \quad (2.133)$$

e ainda

$$\vec{\partial}_\mu = V^i_\mu \vec{e}_i \quad (2.134)$$

$$\vec{e}_i = V^\mu_i \vec{\partial}_\mu \quad \left(|V^\mu_i| = |V^i_\mu|^{-1} \right) \quad (2.135)$$

As componentes da Vierbein podem assim ser interpretadas como matrizes que fazem passar do sistema local àquele das coordenadas. Dado um vetor:

$$A = A^i e_i \equiv A^\mu \partial_\mu \quad (2.136)$$

se tem ainda

$$A^i = V_{\mu}^i A^{\mu} \quad (2.137)$$

$$A^{\mu} = V_i^{\mu} A^i \quad (2.138)$$

e assim por diante.

Até agora não foi introduzido nenhum conceito métrico. Suponhamos agora que no plano tangente seja definida uma métrica η_{ij} invariante sobre $SO(3,1)$ e que os vetores $\bar{e}_i$ sejam ortonormais: $\bar{e}_i \times \bar{e}_j = \eta_{ij}$. Pode-se agora definir ds^2 :

$$ds^2 = d\bar{m}^2 = V_{\mu}^i V_{\nu}^j dx^{\mu} dx^{\nu} \eta_{ij} \quad (2.139)$$

e, portanto, o tensor métrico é dado por:

$$g_{\mu\nu} = V_{\mu}^i V_{\nu}^j \eta_{ij},$$

o que reinterpreta o mesmo resultado obtido em (2.21).

Note-se que uma rotação de gauge de $SO(3,1)$ do referencial $\bar{e}_i$ ($\bar{e}^i = A_j^i \bar{e}^j$) em todos os pontos da variedade, não altera a descrição local da geometria.

A conexão de Cartan sobre a variedade, é introduzida ao considerar-se o deslocamento $d\bar{e}_i$ na passagem de um ponto $M(x^{\mu})$ a um ponto infinitesimalmente próximo $M'(x^{\mu} + dx^{\mu})$, então,

$$d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j \quad (2.140)$$

sendo ω_i^j um matriz infinitesimal de rotação, se obtém:

$$\omega^{ij} = -\omega^{ji} \quad (2.141)$$

Ademais, de (2.141), a Conexão de Cartan ω^{ij} será linear nas diferenciais das coordenadas, ou:

$$\omega^{ij} = \omega_{\mu}^{ij} dx^{\mu} \quad (2.142)$$

É fácil observar que, sob uma transformação de $SO(3,1)$ ($\bar{e}^i = A_j^i \bar{e}^j$), a Vierbein transforma-se como segue:

$$V^i = (A^{-1})_j^i V^j \quad (2.143)$$

A conexão transforma-se de acordo com a equação (2.53).

Finalmente, a torção e a curvatura da variedade não riemanniana são expressas como duas formas de valores sobre o Grupo de Poincaré, definidas como segue:

$$R^i = dV^i - \omega^{ij} \wedge V_j \quad (2.144)$$

$$R^{ij} = d\omega^{ij} - \omega^{ik} \wedge \omega_k^j \quad (2.145)$$

onde d denota o operador de derivação e $\wedge$ o operador de produto no cálculo exterior da forma diferencial. A 2-forma $(R^{ij}, R^i) = R^A$ pode ser decomposta, seja na base das coordenadas (índices gregos), seja naquela intrínseca da Vierbein (índices latinos):

$$R^A = R_{\mu\nu}^A dx^\mu \wedge dx^\nu = R_{ij}^A V^i \wedge V^j \quad (2.146)$$

Dado um vetor na base local $\vec{A} = A^i \bar{e}_i$, logo:

$$d\vec{A} = dA^j \bar{e}_j + A^i \omega_i^j \bar{e}_j = (dA^j + A^i \omega_i^j) \bar{e}_j \quad (2.147)$$

e a quantidade: $\mathcal{D}A^j = dA^j + A^i \omega_i^j \quad (2.148)$

é a **derivada covariante** (de Lorentz) de A^j .

Se demonstra ainda facilmente a seguinte relação entre a derivada covariante de Lorentz $\mathcal{D}_\mu A^j$ definida em (2.148) e a derivada covariante $\nabla_\mu A^\nu$ das coordenadas da relatividade geral (2.15):

$$V_j^\nu \mathcal{D}_\mu A^j = \nabla_\mu A^\nu \quad (2.149)$$

assim como é possível exprimir o Tensor de Curvatura de Riemann no sistema intrínseco, que ficará escrito como:

$$R_{ij,\rho\sigma} = V_i^\mu V_j^\nu R_{\mu\nu,\rho\sigma} \quad (2.150)$$

As expressões (2.144) e (2.145) podem ser resumidas num multipletto único a que chamarei de "curvatura generalizada da variedade não riemanniana":

$$R^A = (R^{ij}, R^i) = d\mu^A + \frac{1}{2} C_{BC}^A \mu^B \wedge \mu^C \quad (2.151)$$

onde R^{ij} é o *Tensor de Curvatura* e R^i o *Tensor de Torção*.

Cabe uma indagação a esse ponto conclusivo: qual seria a vantagem em se construir uma teoria não Riemanniana do espaço-tempo, usando álgebra à Grassmann, formas diferenciais e um potencial

$$\mu^A \equiv (\omega^{ab}, V^a) \quad * \quad ? \quad (2.152)$$

Enumerarei duas delas:

1 - Uma teoria assim construída com as formas ω^{ab} e V^a apresenta, ademais à invariância local de Lorentz, invariância sob transformações de coordenadas arbitrárias, porquanto formas são, em essência, tensores covariantes [22], [23].

2 - Nas equações (2.144) e (2.145) não há referência à dimensão do espaço sobre o qual as formas ω^{ab} e V^a são definidas. Pode-se supor que o potencial $\mu^A \equiv (\omega^{ab}, V^a)$ seja definido sobre uma variedade que contenha o espaço-tempo M^4 da Relatividade Geral; uma escolha natural é tomar μ^A como definido sobre a variedade do Grupo de Poincaré, op. cit. [22], [23] [seção 1.3]. Sendo a variedade o Grupo de Poincaré, que tem 10 parâmetros [Capítulo 1], uma base local de referência é constituída pelo potencial ("Zehn-bein") μ^A .

* O potencial é definido como tal, porquanto R^{ij} e R^i são funções de ω^{ab} e V^a .

O espaço-tempo M^4 é, então, localmente:

$$M^4 \equiv \frac{\text{ISO}(3,1)}{\text{SO}(3,1)} \quad (2.153)$$

onde $\text{ISO}(3,1)$ é o Grupo de Poincaré a 4 dimensões.

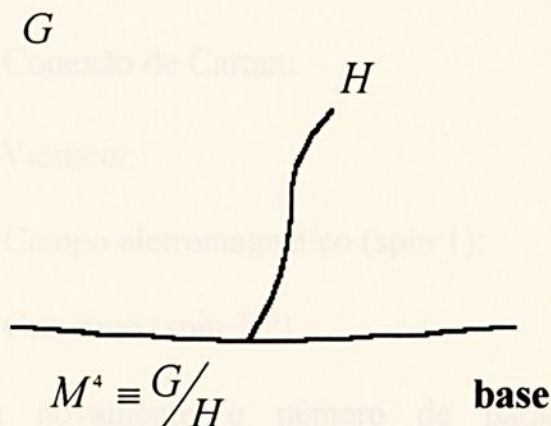


Fig. 10 - Diagrama de um espaço-tempo de uma teoria de Einstein-Cartan a 4 dimensões:

$G = \text{ISO}(3,1)$ (Grupo de Poincaré)

$H = \text{SO}(3,1)$ (Grupo de Lorentz)

2.2.4 - A Teoria de Einstein-Cartan - Perspectivas

A mais simples extensão da teoria de Einstein-Cartan considerada na seção precedente, ocorre ao considerarmos o potencial numa variedade formada por um grupo mais genérico que o de Poincaré, como aconteceu em op. cit. [22], [23]. Ali se construiu uma teoria de gravitação em 5 dimensões que, além da invariância por transformações locais de Lorentz e de coordenadas, possuía também uma invariância por supersimetria [24] - uma simetria física entre campos bosônicos, que seguem a estatística bosônica (spin inteiro) e campos fermiônicos que seguem a estatística de Fermi (spin semi-inteiro). A supersimetria nos diz que o número de graus de liberdade dos campos bosônicos devem ser igual ao dos campos fermiônicos. Em op. cit. [22] o grupo de Poincaré estendido foi escolhido como sendo

$$SU(2,2/1) \quad (2.154)$$

grupo $SU(2,2) \approx ISO(4,1)$.

O multipleteo potencial, contém, portanto, além da conexão ω^{ab} , os campos,

$$\mu^A \equiv (\omega^{ab}, V^a, B, \Psi) \quad (2.155)$$

onde: ω^{ab} = Conexão de Cartan;

V^a = Vierbein;

B = Campo eletromagnético (spin 1);

Ψ = Gravitino (spin 3/2).

Observe que novamente o número de parâmetros do grupo $SU(2,2/1)$, coincide com o número de parâmetros do multipleteo μ^a (24 parâmetros, a saber: 10 parâmetros associados aos ω^{ab} ; 5 às Vierbein V^a ; 5 ao campo B ; 4 ao gravitino Ψ). A "curvatura generalizada" é definida como em (2.151).

Uma ulterior extensão para a teoria de Einstein-Cartan foi realizada em [25]. Ali foi construída uma estrutura geométrica para uma teoria supersimétrica de Yang-Mills em 5 dimensões. Uma teoria de Yang-Mills, sobre o ponto de vista geométrico, é tal que a forma da conexão aparece como uma generalização do campo eletromagnético. O objeto central na teoria de Yang-Mills é uma **1-forma** A . A partir da **1-forma** A se constrói a curvatura segundo a equação:

$$F^\alpha = dA^\alpha + \frac{1}{2} C_{\theta\nu}^\alpha A^\theta \wedge A^\nu \quad (2.156)$$

A **1-forma** A generaliza o potencial eletromagnético e F as forças de campo.

Uma perspectiva futura para a teoria de Einstein-Cartan é a possível extensão do trabalho realizado em [25], [26]. Como foi colocado por Breitelohner [28] e, a posteriori, brevemente mencionado por L. Castellani [27], a **teoria supersimétrica de Yang-Mills em 5 dimensões** é diretamente acoplável a sua congênere teoria de **supergravidade**, op. cit. [22], e o que é mais importante, a teoria acoplada é **quantizável** (uma teoria

é quantizável se é renormalizável - Teoria Quântica de Campos). O que deve ser realizado, então, é estender o multipletto potencial para

$$\mu^A = (\omega^{ab}, V^a, B, \Psi, A)$$

associado a um grupo $G = g \otimes SU(2, 2/1)$,

sendo g um grupo genérico com r parâmetros associado à Yang-Mills.

O multipletto da "curvatura generalizada" de Yang-Mills já foi explicitamente encontrado em op. cit. [26]. Caberia encontrar as equações do movimento para o sistema acoplado (Yang-Mills e supergravidade). A possível conexão desse sistema com outros sistemas formulados em altas dimensões (e. g. superstrings, supergravidade) pode, pela técnica de redução dimensional, melhorar o conhecimento das teorias envolvidas e ter importância no contexto da unificação [29].

Finalmente, a relevância do uso da geometria intrínseca ao invés da extrínseca, resumir-se-ia em dois pontos fundamentais:

- (i) a introdução numa variedade de V^n da conexão ω^{ab} , chamada de *Conexão de Cartan*, de ω^{ab} , que desempenharia o mesmo papel que a conexão afim Γ_{μ}^{ν} , exerce no espaço Riemanniano R^n da relatividade geral, e da tetrade V^a . A conexão ω^{ab} e a tetrade V^a , fazem com que as derivadas covariantes em V^n não sejam mais funções de Γ_{μ}^{ν} , e, por conseguinte, do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, como acontece no formalismo usual. O uso de ω^{ab} e de V^a será essencial para a construção de teorias gravitacionais com torção (e.g. Teoria de Cartan-Einstein)[16], [17], [18]. Desapareceriam os efeitos de transformações de coordenadas, posto que as 1-forma ω^{ab} e V^a são essencialmente equivalentes ao conceito de vetor covariante;

3 - CONCLUSÃO

Nesta dissertação foram apresentados, de forma sintetizada, não apenas tópicos importantes das teorias especial e geral da relatividade através de formalismo tradicional do cálculo diferencial absoluto e dos tensores, mas também uma introdução ao formalismo menos usual das formas diferenciais cujos usos e vantagens para a compreensão e extensão da teoria de Einstein, apesar de já apontados por Elie Cartan ainda nos anos vinte (1922), foram apenas compreendidos e aceitos por alguns, de fato, na última década.

A minha contribuição maior está por toda a **seção 2.1.1 e apêndices**, ao introduzir de modo formal e pedagógico a geometria intrínseca (os conceitos de Vierbein, ou tétrade, e conexão de Cartan). As **seções 2.1.3 e 2.2.2**, concernentes aos métodos do "**paralelogramo aberto**" e "**paralelogramo fechado**", respectivamente, apresentadas de forma pouco convencional em relação a textos de relatividade geral, auxiliam a dar um entendimento geométrico aos conceitos de curvatura e torção. A **seção 2.2.4** teve um objetivo mais informativo, uma vez que detalhes técnicos acham-se bem percorridos nas referências citadas ali, e não creio que melhor pudesse fazê-lo.

Finalmente, a relevância do uso da geometria intrínseca ao invés da extrínseca, resumir-se-ia em dois pontos fundamentais:

- (i) a introdução numa variedade de V^n da conexão ω^{ab} , chamada de **Conexão de Cartan**, de ω_v^{ab} , que desempenharia o mesmo papel que a conexão afim $\Gamma_{\beta v}^{\mu}$ exerce no espaço Riemanniano R^n da relatividade geral, e da tétrade V^a . A conexão ω^{ab} e a tétrade V^a , fazem com que as derivadas covariantes em V^n não sejam mais funções de $\Gamma_{\beta v}^{\mu}$ e, por conseguinte, do tensor métrico $g_{v\mu}$, como acontece no formalismo usual. O uso de ω^{ab} e de V^a será essencial para a construção de teorias gravitacionais com torção (e.g. Teoria de Cartan-Einstein)[16], [17], [18]. Desapareceriam os efeitos de transformações de coordenadas, posto que as 1-forma ω^{ab} e V^a são essencialmente equivalentes ao conceito de vetor covariante;

(ii) no formalismo das formas diferenciais, uma troca local de bases aparece como uma transformação de Lorentz sobre os índices $\underline{b}$ na projeção de um tensor genérico:

$$T^a(x, v') = \Lambda^a_b(x) T^b(x, v)$$

O efeito de transformação de coordenadas desaparece, mas aparece o de transformação genérica de Lorentz.

Espero, em concluindo, que a forma como os tópicos foram apresentados possa ser útil não só ao entendimento da teoria de Einstein-Cartan, como também de motivação a ulteriores generalizações que possam abrir algum caminho rumo a uma provável unificação das leis físicas.

Paulino Frulani de Paula

Guaratinguetá, dezembro de 1993.

4 - APÊNDICES

APÊNDICE A: Obtenção dos Símbolos de Christoffel

Partindo das expressões:

$$dT^\delta = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\delta T^\alpha dx^\gamma \quad \text{e} \quad (2.10)$$

$$T^2 = g_{\alpha\beta} T^\alpha T^\beta \quad , \quad (2.11)$$

considerando que T^2 seja o mesmo por T^α e por $T^\alpha + dT^\alpha$, ou seja, o seu comprimento é conservado durante o deslocamento, logo:

$$dT^2 = 0 = dg_{\alpha\beta} T^\alpha T^\beta + g_{\delta\beta} dT^\delta T^\beta + g_{\alpha\delta} T^\alpha dT^\delta$$

Utilizando a (2.10), temos que:

$$dg_{\alpha\beta} T^\alpha T^\beta - g_{\delta\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta T^\alpha dx^\gamma T^\beta - g_{\alpha\delta} T^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\delta T^\beta dx^\gamma = 0$$

logo:

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - g_{\delta\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta - g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta \right) T^\alpha T^\beta dx^\gamma = 0$$

Como: $T^\alpha T^\beta dx^\gamma \neq 0$,

logo: $\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - g_{\delta\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta - g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta \right) = 0$, ou seja:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = g_{\delta\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta + g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta \quad (2.12)$$

Trocando α por δ em (2.12), obteremos:

$$\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} = g_{\alpha\beta} \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha + g_{\delta\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$$

efetuando-se permutação cíclica dos índices δ , γ e β , mantendo α fixo, teremos:

$$\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\delta} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + g_{\gamma\alpha} \Gamma_{\delta\beta}^\alpha$$

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} = g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\delta}^\alpha + g_{\beta\alpha} \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha$$

Devido à simetria: $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \Gamma_{\beta\alpha}^\delta$ e $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ chegaremos a:

$$\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right) = 2 g_{\delta\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$$

Como: $g_{\delta\alpha} g^{\alpha\delta} = 1$, multiplicando-se ambos os lados da expressão anterior por $g^{\alpha\delta}$, obteremos:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right) \quad (2.13)$$

APÊNDICE B - Demonstração da expressão (2.32)

Sabendo que: $d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$; $d\bar{e}_i' = d(A_i^j \bar{e}_j) = \omega_j^{i'} \bar{e}_j'$;

$$\bar{e}_\mu = V_\mu^i \bar{e}_i \quad ; \quad \bar{e}_i = (V_\mu^i)^{-1} \bar{e}_\mu \quad ; \quad \bar{e}_\mu = \omega_\mu^\rho \bar{e}_\rho \quad ,$$

então:

$$d\bar{e}_i' = d(A_i^j \bar{e}_j) = dA_i^j \bar{e}_j + A_i^j d\bar{e}_j$$

$$d\bar{e}_i' = dA_i^j \bar{e}_j + A_i^j \omega_j^k \bar{e}_k = (dA_i^j + A_i^k \omega_k^j) \bar{e}_j$$

$$d\bar{e}_i' = \omega_i^{j'} \bar{e}_j' = (dA_i^j + A_i^k \omega_k^j) \bar{e}_j$$

$$\omega_i^{p'} \bar{e}_p' = (dA_i^j + A_i^k \omega_k^j) \bar{e}_j$$

$$\omega_i^{k'} A_k^j \bar{e}_j = (dA_i^j + A_i^k \omega_k^j) \bar{e}_j$$

$$\omega_i^{k'} \bar{e}_j = [dA_i^j (A_k^j)^{-1} + A_i^k \omega_k^j (A_k^j)^{-1}] \bar{e}_j$$

$$\omega_i^{k'} = dA_i^j (A_k^j)^{-1} + A_i^k \omega_k^j (A_k^j)^{-1}$$

Em notação matricial:

$$\hat{\omega}' = d\hat{A}\hat{A}^{-1} + \hat{A}\hat{\omega}\hat{A}^{-1}$$

onde: $\hat{\omega}' =$ matriz dos $\omega_i^{k'}$ e $\hat{A} =$ matriz dos A_i^j

Considere:

1 - Sistema genérico ' - extrínseco - índices latinos ($\bar{e}_i$)

2 - Sistema de coordenadas - intrínseco - índices gregos ($\bar{e}_\mu$)

portanto,

$$\bar{e}_i = (V_\mu^i)^{-1} \bar{e}_\mu \Rightarrow \bar{e}' = \hat{V}^{-1} \bar{e}$$

$$\hat{\omega} = d\hat{V}^{-1} \hat{V} + \hat{V}^{-1} \hat{\omega} \hat{V}$$

Como: Diferença - Demonstração das expressões (2.33) e (2.34)

$$d\hat{V}^{-1} = -\frac{1}{(\hat{V})^2} d\hat{V} = -d\hat{V}\hat{V}^{-2}$$

$$\hat{\omega} = -d\hat{V}\hat{V}^{-1} + \hat{V}^{-1}\hat{\omega}\hat{V}$$

$$\omega_q^p = -dV_\mu^p (V_\mu^q)^{-1} + (V_p^v)^{-1} \omega_\mu^v V_q^\mu$$

$$\partial_\sigma \omega_q^p = -\partial_\sigma V_\mu^p (V_\mu^q)^{-1} + (V_p^v)^{-1} \Gamma_{\mu\sigma}^v V_q^\mu$$

onde: $\omega_q^p =$ Conexão de Lorentz e

$\Gamma_{\mu\sigma}^v =$ Conexão Afim da Relatividade Geral.

Então:

$$\omega_\sigma^{pr} \eta_{rq} V_\mu^q = -\frac{\partial V_\mu^p}{\partial x^\sigma} + V_\nu^p \Gamma_{\mu\sigma}^v$$

$$\frac{\partial V_\mu^p}{\partial x^\sigma} - V_\nu^p \Gamma_{\mu\sigma}^v + \omega_\sigma^{pr} \eta_{rq} V_\mu^q = 0$$

e fazendo: $\mu = \alpha$; $\sigma = \beta$; $r = q$

$$\frac{\partial V_\alpha^p}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^v V_\nu^p + \omega_\beta^{pq} \eta_{qr} V_\alpha^q = 0 \quad (2.32)$$



APÊNDICE C - Demonstração das expressões (2.33) e (2.34)

Sendo: $dT^v = -\Gamma_{\alpha\beta}^v T^\alpha dx^\beta$

seja então: $dT^v = \frac{\partial T^v}{\partial x^\beta} dx^\beta$, onde: $\frac{\partial T^v}{\partial x^\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta}^v T^\alpha$

e ainda: $dT^p = -\Gamma_{\alpha\beta}^v T^\alpha V_v^p dx^\beta$, onde: $\frac{\partial T^p}{\partial x^\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta}^v T^\alpha V_v^p$

Retornando à expressão (2.32), tem-se que:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^v V_v^p = \frac{\partial V_\alpha^p}{\partial x^\beta} + \omega_{\beta}^{pq} \eta_{qr} V_\alpha^r$$

Trocando α por β e fazendo $r = b$ e $q = a$, tem-se:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^v V_v^p = \frac{\partial V_\beta^p}{\partial x^\alpha} + \omega_\alpha^{pa} \eta_{ab} V_\beta^b$$

multiplicando o último resultado por T^β , se obtém:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^v V_v^p T^\beta = \left(\frac{\partial V_\beta^p}{\partial x^\alpha} \right) T^\beta + \omega_\alpha^{pa} \eta_{ab} V_\beta^b T^\beta$$

$$\Gamma_{\beta\alpha}^v T^\beta V_v^p = \frac{\partial (V_\beta^p T^\beta)}{\partial x^\alpha} - V_\beta^p \frac{\partial T^\beta}{\partial x^\alpha} + \omega_\alpha^{pa} \eta_{ab} V_\beta^b T^\beta$$

pois: $\frac{\partial (V_\beta^p T^\beta)}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial V_\beta^p}{\partial x^\alpha} \right) T^\beta + V_\beta^p \frac{\partial T^\beta}{\partial x^\alpha}$

logo:
$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} T^{\beta} V_{\nu}^p + V_{\beta}^p \frac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial (V_{\beta}^p T^{\beta})}{\partial x^{\alpha}} + \omega_{\alpha}^{pa} \eta_{ab} T^b$$

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} T^{\beta} V_{\nu}^p + V_{\beta}^p \frac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial T^p}{\partial x^{\alpha}} + \omega_{\alpha}^{pa} \eta_{ab} T^b \quad (1)$$

Voltando à expressão (2.15), $T^{\alpha}_{;\beta} dx^{\beta} = dT^{\alpha} + \omega_{\nu}^{\alpha} T^{\nu}$, que multiplicada por V_{α}^p é igual a:

$$V_{\alpha}^p T^{\alpha}_{;\beta} dx^{\beta} = V_{\alpha}^p dT^{\alpha} + V_{\alpha}^p \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} T^{\nu} dx^{\beta}$$

$$T^p_{;\beta} \equiv V_{\alpha}^p \frac{\partial T^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} T^{\nu} V_{\alpha}^p$$

ou ainda que: $V_{\alpha}^p \nabla T^{\alpha}_{\beta} \equiv T^p_{;\beta}$

Voltando à expressão (1):

$$T^p_{;\alpha} = \frac{\partial T^p}{\partial x^{\alpha}} + \omega_{\alpha}^{pa} \eta_{ab} T^b \quad (2.33)$$

De (2.33) segue diretamente (2.34), pois:

$$T^p_{;\alpha} dx^{\alpha} = dT^p + \omega_{\alpha}^{pa} \eta_{ab} T^b dx^{\alpha}$$

$$T^p_{;\alpha} dx^{\alpha} = \Lambda_q^p dT^q + \Lambda_q^p \omega_{\alpha}^{qa} \eta_{ab} T^b dx^{\alpha}$$

$$T^p_{;\alpha} = \Lambda_q^p T^q_{;\alpha} \quad (2.34)$$

APÊNDICE D - Demonstração da expressão (2.51)

Partirei da expressão (2.32),

$$\frac{\partial V_{\alpha}^p}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} V_{\nu}^p + \omega_{\beta}^{pq} \eta_{qr} V_{\alpha}^r = 0$$

Fazendo-se: $p = a$; $q = b$; $r = c$ e multiplicando-se o resultado por dx^{β} , obtem-se que:

$$\frac{\partial V_{\alpha}^a}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} V_{\nu}^a dx^{\beta} + \omega_{\beta}^{ab} \eta_{bc} V_{\alpha}^c dx^{\beta} = 0$$

$$dV_{\alpha}^a - V_{\nu}^a \omega_{\alpha}^{\nu} + \omega_{\beta}^{ab} dx^{\beta} \eta_{bc} V_{\alpha}^c = 0$$

$$dV_{\alpha}^a - V_{\nu}^a V_{\alpha}^{\nu} \omega_b^b + \omega^{ab} \eta_{bc} V_{\alpha}^c = 0$$

multiplicando por dx^{α} o último resultado:

$$dV_{\alpha}^a dx^{\alpha} - V_{\alpha}^b dx^{\alpha} \omega_b^a + \omega^{ab} \eta_{bc} V_{\alpha}^c dx^{\alpha} = 0$$

$$dV_{\alpha}^a dx^{\alpha} - V^b \omega_b^a + \omega^{ab} \eta_{bc} V^c = 0$$

$$dV_{\alpha}^a dx^{\alpha} - V^c \omega_b^a \eta_{bc} + \omega^{ab} \eta_{bc} V^c = 0$$

Utilizando a álgebra exterior, a última expressão pode ser reduzida a:

$$dV^a + \omega^{ab} \wedge \eta_{bc} V^c = 0 \quad , \quad (2.51)$$

porquanto,

$$dV^a = d[V_{\alpha}^a dx^{\alpha}] = dV_{\alpha}^a dx^{\alpha} + V_{\alpha}^a ddx^{\alpha} = dV_{\alpha}^a dx^{\alpha}$$

já que, pelo Lema de Poincaré, expressão (2.44): $ddx^{\alpha} = 0$

APÊNDICE E - Demonstração da expressão (2.53)

Partirei da expressão (2.51), fazendo: $a = c$; $b = d$; $c = e$.

Então:

$$dV^c + \omega^{cd} \wedge \eta_{de} V^e = 0$$

$$dV^c + \omega_e^c V^e - V^b \omega_b^c = 0$$

$$dV^c + \omega_e^c \Lambda_b^e V^b - V^b \Lambda_a^c \omega_b^a = 0$$

$$dV^c + \omega_e^c \Lambda_b^e V^b - \Lambda_a^c \omega_b^a V^b = 0$$

$$(d\Lambda_b^c) V^b + \omega_e^c \Lambda_b^e V^b - \Lambda_a^c \omega_b^a V^b = 0$$

$$d\Lambda_b^c + \omega_e^c \Lambda_b^e - \Lambda_a^c \omega_b^a = 0$$

$$d\Lambda_b^c = \Lambda_a^c \omega_b^a - \omega_e^c \Lambda_b^e$$

$$\omega_b^a = (\Lambda^{-1})_c^a d\Lambda_b^c + (\Lambda^{-1})_c^a \omega_e^c \Lambda_b^e \quad (2.53)$$

5 - BIBLIOGRAFIA

1. C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, Gravitation, Freeman, San Francisco 1973.
2. A. Einstein, Ann. Physik 49, 769 (1916).
3. A. Einstein, "O Princípio da Relatividade", Editora Calouste Gulbenkian, Lisboa 1976.
4. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley, New York 1972.
5. E. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la Relativité Généralisée, Annales Ecole Norm. Sup. 40, 325 (1923); *ibid.* 41, 1 (1924).
6. H. Flanders, Differential Forms, Academic Press, New York 1963.
7. L. Santaló, Vectores e tensores, con sus aplicaciones, Editorial Universitario de Buenos Aires, 1989.
8. S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, New York 1963.
9. M. Perdigão do Carmo, Geometria Riemanniana, IMPA, 1990.
10. T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. 2, 212 (1961); R. Utiyama, Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
11. L.P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton 1926.
12. E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2a. ed., Gauthier-Villars, 1946.
13. R.V. Eötvös, Math. und Natur. Ber. ungarn, 8, 65 (1899).
14. A. Einstein e L. Infeld, A evolução da Física, Zahar, Rio 1971.



15. F.W.Dyson, A.S.Eddington and C. Davidson, Phyl. Trans. Royal Society London A 220,291 (1920).
16. A. D'Adda, R. D'Auria, P. Fré and T. Regge, Geometrical Fomulation of Supergravity Theories on Orthosymplectic Supergroup Manifolds, Rivista Nuovo Cimento, 3, nr.6, 1980.
17. A. Trautmann; W. Kopczynski, "Space, Time and Gravitation", Wiley, New York, 1992.
18. L. Castellani; R. D'Auria; P. Fré, Supergravity and Superstrings. A geometric perspective, vol. 1, "Mathematical Foundations", World Scientific Publishing, New Jersey 1991.
19. A. Trautmann, "Recent advances in Einstein-Cartan gravity", Ann. N.Y. Acad. Sciences, 262, 241, 1975.
20. A. Trautmann, "Spin and Torsion may avert gravitational singularities", Nature, 242, 7, 1973.
21. F.W. Hehl, P.V. der Heyde, G.D. Kerliek, J.M. Nester, "General relativity with spin and torsion: Foundations and Prospects", Reviews of Modern Physics, vol. 48, nr. 3, July 1976.
22. D'Auria, R. ; Fré, P. ; Maina, E. ; Regge, T. ; Annals of Physics, vol. 135, 237, 1981.
23. D'Auria, R. ; Fré, P. ; Maina, E. ; Regge, T. ; Annals of Physics, vol. 139, 93, 1982.
24. Ne'eman, Y. ; Regge, T. ; Rivista del Nuovo Cimento, vol. 1, nr. 5, 1, 1978.
25. Borges, M. ; Pio, G. ; ICTP Trieste, Italy, Preprint number 83/22, July, 1983.
26. Borges, M., Ph.d.Thesis, King's College, London, august 1986.



27. Castellani, L. ; D'Auria, R. ; Fré, P. ; Supergravity and Superstrings. A geometric perspective, vol 2. Superstrings; World Scientific Publishing, New Jersey, 1991.
28. Breitelohner, P. ; Sohnius, M. ; Nuclear Physics B, 187, 409, 1981.
29. Castellani, L. ; D'Auria, R. ; Fré, P. ; Supergravity and Superstrings. A geometric perspective, vol 3. Superstrings; World Scientific Publishing, New Jersey, 1991.



