UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

DOUGLAS MATHEUS GAVIOLI DIAS

O USO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ANÉIS DE POLINÔMIOS EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ilha Solteira
2021

DOUGLAS MATHEUS GAVIOLI DIAS

O USO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ANÉIS DE POLINÔMIOS EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada junto à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

Ilha Solteira
2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

D541u

Dias, Douglas Matheus Gavioli.
O uso da resolução de problemas no ensino de anéis de polinômios em um curso de licenciatura em matemática / Douglas Matheus Gavioli Dias. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
152 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Educação Matemática, 2021

Orientador: Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
Inclui bibliografia

1. Educação básica. 2. Álgebra. 3. Formação de professores. 4. Estruturas algébricas.

Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

O USO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ANÉIS DE POLINÔMIOS EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Autor: **DOUGLAS MATHEUS GAVIOLI DIAS**

Orientador: **INOCÊNCIO FERNANDES BALIEIRO FILHO**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino e Processos Formativos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus Ilha Solteira.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

UNESP – Ilha Solteira

Profa. Dra. Patrícia Sandalo Pereira

UFMS – Campo Grande

Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira

UNESP – Ilha Solteira

Ilha Solteira
08 de junho de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais. Minha mãe, que desde quando eu era pequeno, sempre me incentivou a buscar o que queria. Agradeço meu pai pelo suporte, em todos os meus anos de graduação.

Sempre fui grato também à universidade pública, que é dedicada em todos os setores aos seus estudantes e que permitem que muitas pessoas, que não teriam oportunidade de estudar, se tornem profissionais qualificados e que, além disso, ofereceu para mim e meus amigos a oportunidade de permanência estudantil.

Agradeço aos meus professores, que desde o ensino infantil me mostraram o quão interessante é descobrir coisas novas e que, no ensino médio, despertaram em mim a vontade de continuar com meus estudos. Não fogem desta lista os professores que tive na graduação, que me mostraram o quão importante, necessário e interessante são os estudos na área de Educação, em particular, Educação Matemática. Especialmente, o Professor Inocêncio, que sempre me ajudou, de todas as formas possíveis e é um exemplo de ser humano, que vive a filosofia e a passa para todos ao seu redor. Agradeço aos professores da banca, Professora Dra. Patrícia e Professor Dr. Ernandes, membros de minha banca, que me ajudaram com sábias contribuições a construir este projeto. Gostaria de agradecer ao Professor Edson Donizete, que ofereceu suas aulas para que eu pudesse trabalhar junto a sua turma e também aos alunos que participaram das atividades propostas.

Agradeço a todos que vieram antes de mim, pela contribuição quase ilimitada para meu trabalho. E a todos os amigos que sempre me deram condições emocionais para continuar, Matheus, Marcos Vinícius, Paulo, Marcos Roza e minha noiva, Rebeca De Marcos, aquela que anda lado a lado a mim nesta jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Nos cursos de Licenciatura em Matemática, nas disciplinas de conhecimento específico, deve se questionar se existem conexões entre os conteúdos de Matemática do ensino básico e os abordados por essas disciplinas. Isso leva os alunos a, muitas vezes, questionarem qual a contribuição das disciplinas de conteúdo específico na formação do professor de Matemática. Nessa perspectiva, a pergunta que guiou a pesquisa desenvolvida foi: Como o desenvolvimento de uma proposta de ensino de Anéis de Polinômios, por meio da metodologia da Resolução de Problemas, pode levar os alunos de uma turma de um curso de Licenciatura de Matemática a compreender de forma abrangente esse conteúdo e suas relações com os conteúdos desenvolvidos na Educação Básica? O objetivo da pesquisa é estabelecer uma discussão sobre as possíveis contribuições de uma proposta didática que utilize a metodologia de Resolução de Problemas para a aprendizagem do conteúdo Anéis de Polinômios por parte de uma turma de 11 (onze) alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, localizada na cidade de Ilha Solteira - SP, com o intuito de contribuir para que esses alunos tenham uma compreensão mais abrangente desse conteúdo e de suas relações com os temas de polinômios do currículo do ensino básico. A pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa. Os resultados obtidos por meio da proposta desenvolvida em sala de aula foram analisados por meio da análise de conteúdo, utilizando da análise temática como ferramenta, e apontam que houve a compreensão das propriedades de anéis, mas não ocorreu um aprofundamento em teoremas ou corolários para a manipulação dessas propriedades, nem ligação dessas propriedades aos conhecimentos de polinômios desenvolvidos no ensino básico. Também houve referências aos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, mas não podemos afirmar que a atividade proposta foi capaz de conectar o conhecimento que os alunos já tinham sobre polinômios – ou outros conteúdos do ensino básico - com os Anéis, estudados na disciplina de Estruturas Algébricas II.

Palavras chave: educação básica; álgebra; formação de professores; estruturas algébricas.

ABSTRACT

In the Licentiate Degree in Mathematics courses, in specific knowledge disciplines, it should be questioned whether there are connections between the contents of Mathematics in basic education and those covered by these disciplines. This often leads students to question the contribution of specific content disciplines in the formation of Mathematics teachers. From this perspective, the question that guided the research was: How can the development of a proposal for teaching Polynomial Rings, through the Problem Solving methodology, take students from a class of a Mathematics Degree course to comprehensively understand this content and its relationship with the content developed in Basic Education? The objective of the research is to establish a discussion about the possible contributions of a didactic proposal that uses the Problem Solving methodology for the learning of the Polynomial Rings content by a class of 11 (eleven) students of a Degree Course in Mathematics at the São Paulo State University “Júlio de Mesquita Filho”, located in the city of Ilha Solteira-SP, with the aim of helping these students to have a more comprehensive understanding of this content and its relations with the themes of polynomials of the basic education curriculum. The research was developed through a qualitative approach. The results obtained through the proposal developed in the classroom were analyzed through content analysis, using thematic analysis as a tool, and indicate that there was an understanding of the properties of rings, but there was no deepening in theorems or corollaries for the manipulation of these properties, nor connection of these properties to the knowledge of polynomials developed in basic education. There were also references to the contents of Elementary and High School, but we cannot say that the proposed activity was able to connect the knowledge that students already had about polynomials - or other contents of basic education - with the Rings, studied in the discipline of Algebraic Structures II.

Keywords: basic education; algebra; teacher training; algebraic structures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	-	Diagrama de uma pequena parcela da nossa composição cognitiva	31
Figura 1	-	Primeira folha de resposta do grupo A (imagem enviada pelo celular de um estudante)	147
Figura 3	-	Segunda folha de resposta do grupo A (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)	148
Figura 4	-	Primeira folha de respostas grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)	149
Figura 5	-	Segunda folha de respostas do grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)	150
Figura 6	-	Terceira folha de respostas do grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)	151
Figura 7	-	Quarta folha de resposta do grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)	152

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CIEM	-	Congresso Internacional de Ensino em Matemática
CNE	-	Conselho Nacional de Educação
GTERP	-	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
MEC	-	Ministério da Educação
NCTM	-	National Council of Teacher of Mathematics
NDP	-	Nível de Desenvolvimento Potencial
NDR	-	Nível de Desenvolvimento Real
PCN	-	Parâmetros Curriculares Nacionais
RP	-	Resolução de Problemas
UNESP	-	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
ZDP	-	Zona de Desenvolvimento Potencial
ZDR	-	Zona de Desenvolvimento Real
AT	-	Análise Temática

LISTA DE SÍMBOLOS

R	-	Conjunto dos números reais
π	-	Número pi
Q	-	Conjunto dos números racionais
$\sqrt{}$	-	Radical
$<$	-	Menor do que
$>$	-	Maior do que
$\in$	-	Pertence a
$\notin$	-	Não pertence a
$\leq$	-	Menor ou igual a
$\geq$	-	Maior ou igual a
$=$	-	Igual a
$\Rightarrow$	-	Implica em
$\Leftrightarrow$	-	Se, e somente se,
$\neq$	-	Diferente de
$\vee$	-	Valor absoluto de
N	-	Conjunto dos números naturais
Z	-	Conjunto dos números inteiros
$\cup$	-	União com
$\backslash$	-	Tal que
$\cong$	-	Congruente a

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Extratos e Códigos 129
Tabela 2 - Códigos e Categorias 144

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	14
2	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**	21
2.1	UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO ACERCA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	21
2.2	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA	27
2.2.1	**Uma rápida contextualização construtivista**	30
2.2.2	**Um roteiro inicial para a resolução de problemas**	33
2.3	**A resolução de problemas no ensino superior: algumas possibilidades**	37
2.4	A AVALIAÇÃO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E COMO PODEMOS SABER QUE O TRABALHO APLICADO GEROU CONHECIMENTO NOS FUTUROS PROFESSORES	41
2.4.1	**Avaliar o problema**	42
2.4.2	**Avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem**	43
3	**OS ANÉIS DE POLINÔMIOS**	47
3.1	A DISCIPLINA	47
3.2	O QUE É A ÁLGEBRA E COMO CHEGAMOS NO NÍVEL DE ABSTRAÇÃO DE HOJE?	49
3.3	GRUPOS, CORPOS, ANÉIS E ANÉIS DE POLINÔMIOS: UMA COMPREENSÃO NECESSÁRIA	53
3.3.1	**Grupos, corpos e anéis**	55
3.3.2	**Anéis de polinômios**	62
4	**O REFERENCIAL METODOLÓGICO E O ROTEIRO DE ATIVIDADES**	65
4.1	A ANÁLISE DOS DADOS	65
4.2	A METODOLOGIA DE ANÁLISE OU REFERENCIAL METODOLÓGICO	66
4.3	ANÁLISE TEMÁTICA	70
4.4	COMO FOI ELABORADO?	72
4.4.1	**As atividades**	73

4.4.2	**Formalização do conteúdo**	77
5	**CONTEXTUALIZAÇÃO DAS AULAS**	84
5.1	A BUSCA DO CONSENSO	87
5.2	A FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO	90
6	**ANÁLISE DOS DADOS**	91
6.1	EXPERIÊNCIA VIVIDA NA MEDIAÇÃO DA ATIVIDADE	92
6.2	CONHECIMENTO POR PARTE DOS ALUNOS SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	96
6.3	DIFICULDADES EM RESOLVER PROBLEMAS SOBRE CONTEÚDOS JÁ ESTUDADOS	99
6.4	COMPREENSÃO DAS PROPRIEDADES DE UM ANEL	104
6.5	CONEXÕES ENTRE O CONCEITO DE ANEL DE POLINÔMIOS E OS CONTEÚDOS DE POLINÔMIOS DO ENSINO BÁSICO.	108
6.6	ELEMENTOS DAS QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS	112
7	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	117
	REFERÊNCIAS	122
	APÊNDICE A – MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	126
	APÊNDICE B – TABELA DE EXTRATOS E CÓDIGOS	129
	APÊNDICE C – TABELA DE CÓDIGOS E CATEGORIAS	144
	APÊNDICE D – RESPOSTAS ESCRITAS DOS GRUPOS	147

1 INTRODUÇÃO

Até hoje, passei a maior parte da minha vida em uma escola. Desde a educação infantil, passando pelo Ensino Fundamental, pelo Ensino Médio, e chegando ao ensino superior, sempre fui aluno de escola pública, o que me fez conviver de perto com os desafios da profissão docente e com os problemas existentes nas escolas públicas. Mas foi somente no Ensino Médio que o meu interesse pela Matemática surgiu. Dois professores foram fundamentais para isso: minha professora do Ensino Médio que, mesmo há anos na rede pública de ensino, nunca perdeu o amor pela docência, sempre sendo atenciosa e amorosa em suas aulas. E um professor do cursinho, que sempre demonstrava proposições matemáticas com uma clareza esplendorosa.

Por meio dessas experiências pessoais, pude perceber o impacto que um professor pode ter na vida de um aluno e, com isso, entendi que uma boa formação profissional é essencial para que ele, em seu trabalho, possa fazer a diferença, em especial, na escola pública. Essa percepção acabou me levando a querer ser professor e a também buscar formas de contribuir com a formação do professor, para que fosse possível despertar em outros alunos o interesse pela Matemática que um dia surgiu em mim.

Durante a minha graduação, como aluno das disciplinas de conhecimento específico do Curso de Licenciatura em Matemática, muitas vezes, não ficava claro para mim a relação entre os conteúdos de Matemática do ensino básico e os conteúdos abordados nessas disciplinas.

Desde a minha formação como professor, até minha recente atividade docente, notei que há dificuldades, por parte dos professores, em fugir das aulas tradicionais, expositivas, sobre os mais diversos temas dentro da Matemática. Isso me levou a vários questionamentos sobre a minha atividade docente: como que minha formação poderia ter contribuído para que eu pudesse utilizar uma maior variedade de metodologias de ensino-aprendizagem? De fato, certos aspectos da atividade do professor só se aprendem na prática docente, como, por exemplo, resolver conflitos em sala de aula ou compreender como os alunos se sentem depois que um professor aborda um determinado tema. Mas, ainda assim, como a formação inicial pode influenciar e ajudar o futuro professor nesse sentido? O intuito

desta pesquisa não é criticar as metodologias mais tradicionais e nem os docentes que as empregam no ensino superior, pelo contrário, é o de fornecer um novo olhar, uma nova perspectiva para que o aluno de graduação possa ter contato com novas metodologias de forma direta.

Shulman (1986) aponta os professores devem ter domínio em três conhecimentos: conhecimento do conteúdo, o conhecimento curricular e o conhecimento didático do conteúdo. O primeiro diz respeito ao conhecimento específico da área do professor; o segundo “envolve conhecimento do assunto a ser ensinado e as suas estruturas de organização.”; e o último propõe “caracterizar um tipo de conhecimento próprio dos professores e que se distingue do modo de pensar inerente aos especialistas da disciplina, atribuindo consequentemente identidades profissionais diferentes para professores” (MELLO, MORIEL E WIELEWSKI, 2017, p.127). Ainda de acordo com Mello, Moriel e Wielewski (2017), Shulman (1986) propôs estas categorias para qualquer disciplina e Ball e colaboradores (2008) propõe o MKT (*Mathematical Knowledge for teaching)*:

> o conhecimento do conteúdo (SMK) e o conhecimento didático do conteúdo (PCK). A primeira delas foi subdividida em conhecimento comum do conteúdo (CCK), conhecimento especializado do conteúdo (SCK) e, posteriormente, nela foi inserido o conhecimento no horizonte matemático (HCK). E a segunda foi subdividida em conhecimento de conteúdos e estudantes (KCS), conhecimento de conteúdos e ensino (KCT) e, posteriormente, nela foi incorporado o conhecimento do currículo (KC). (MELLO, MORIEL E WIELEWSKI, 2017, p.127)

Assim, o conhecimento do professor de Matemática deve ir além dos conteúdos específicos, sendo composto por uma diversidade de outros conhecimentos. Libâneo (2012) aponta:

> O dilema dos cursos de licenciatura põe-se inversamente: para entender como se ensina um conteúdo para que os alunos de apropriem deles de modo significativo, somente o conhecimento do conteúdo é insuficiente. É necessário saber como converter a ciência em matéria de ensino, e isso supõe não apenas conhecer a lógica dos conteúdos a ensinar, mas, também, a lógica dos modos de aprender dos alunos com base em seus processos cognitivos, afetivos, linguísticos, etc., as características dos alunos e seu contexto sociocultural e as formas de organização das situações pedagógico-didáticas Esta é precisamente uma questão pedagógico-didática". (LIBÂNEO, 2012, p. 6).

Somente no último ano do curso de Licenciatura é que, de fato, comecei a questionar o papel das disciplinas de conteúdo específico na formação de um

professor de Matemática. Tais questionamentos se voltaram para o caso específico das disciplinas que tratavam das Estruturas Algébricas. Ao cursar essas disciplinas, pude aprofundar minha compreensão sobre a Álgebra, mas não consegui visualizar as interfaces entre os conteúdos de álgebra do ensino básico e os conteúdos de Álgebra tratados nas disciplinas da graduação. Por conta da minha experiência, me propus, neste trabalho, a buscar entender se o uso de uma metodologia alternativa poderia trazer à tona conexões entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento curricular do ensino básico.

Com esses questionamentos em mente, comecei a procurar temas de conteúdos que tem ligação direta com o ensino básico. Na disciplina Estruturas Algébricas, que tem um alto grau de abstração, são tratados os conteúdos relacionados a Anéis de Polinômios. Em paralelo, no ensino básico, os conteúdos relacionados a polinômios são tratados desde o 7º ano do Ensino Fundamental. No 7º ano do Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2019), na unidade temática de Álgebra, já inclui o estudo das equações polinomiais do 1º grau. Na mesma unidade, no 8º ano, são incluídos como objetos do conhecimento que devem ser desenvolvidos: Sistema de equações polinomiais de 1º grau - resolução algébrica e representação no plano cartesiano – e equação polinomial de 2º grau. No 9º ano recomenda-se o estudo da resolução de equações polinomiais do 2º grau, por meio das fatorações. No Ensino Médio, dentre as habilidades associadas ao conhecimento de polinômios estão: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica; Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica; Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau; Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização,

reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau; Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

Diante disso, passei a pensar sobre qual abordagem de ensino poderia ser usada para o melhor entendimento dos conceitos de Anéis de Polinômios por parte dos alunos da graduação como forma de explorar as interfaces entre tais conteúdos e a álgebra do ensino básico.

Nos cursos de Licenciatura em Matemática há uma gama de professores que lecionam disciplinas de forma expositiva. É muito comum, dentro desses cursos, docentes que na sala de aula apenas formalizam conceitos e demonstram proposições matemáticas, fazendo da aula uma via de mão única, sem a menor participação do aluno. E, muitas vezes, são passadas listas de exercícios apenas para a fixação de conceitos, em que, raramente, são encontrados problemas que demandem constantes reflexões em sua resolução. Além disso, a maioria das avaliações se baseia em exercícios em que os alunos, em sua resolução, devem apenas aplicar as ideias e conceitos já trabalhados em sala de aula. Tendo isso em mente, pensei em trabalhar com a metodologia de Resolução de Problemas, já que ela é cada vez mais explorada nos currículos de Matemática de âmbito estadual e nacional.

> (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
> (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
> (EF08MA17) Conhecer e aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
> (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
> Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (SÃO PAULO, 2020)

Buscando aprofundar meus conhecimentos sobre a Resolução de Problemas, realizei uma busca por teses e dissertações que abordavam essa metodologia na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações do IBICT. Foram localizadas 397 teses e dissertações sobre o tema. Uma autora brasileira muito citada como referência nos trabalhos encontrados foi a Profa. Lourdes de La Rosa Onuchic. Em 13 trabalhos

suas obras foram usadas como referencial teórico. Dessas treze, apenas uma tese de 2017 abordava o uso da Resolução de Problemas no ensino superior: “Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de Matemática”, de Nilton César Ferreira, que utilizou a metodologia de Onuchic para o ensino de Álgebra Abstrata. O autor, em 16 encontros com duração de 2 aulas, trabalhou com os alunos problemas sobre Operações Binárias, Grupos (Grupos Finitos, Tábua de Operações e Ordem de Grupos), Grupos Z_n, Subgrupos, Grupos não-abelianos, Classes de Equivalência e Relação de Equivalência (e a ligação desses conceitos com conteúdos da Educação Básica), Anel (levando o aluno a perceber que a estrutura de Anel está presente no Ensino Básico), Domínio de Integridade e Corpos. Entretanto, o tema de Anéis de Polinômios não foi tratado.

Ao fazer uma busca, na mesma plataforma, para o tema de “Polinômios”, em conjunto com o tema “Resolução de Problemas”, foram encontrados dois trabalhos: um de Juscelino de Araújo Silva (2019), que tratou da Resolução de Problemas para o ensino de sistemas de equações polinomiais do primeiro grau e o segundo, de Rosilda dos Santos Morais (2008), que utilizou o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas para ministrar o conteúdo de polinômios para alunos do oitavo ano do ensino fundamental. Não foi localizado um trabalho que utilizasse a Resolução de Problemas no ensino superior, buscando conectar os conhecimentos específicos do professor com os do ensino básico para o conteúdo de Anéis de Polinômios.

Segundo Onuchic (2012), ensino, aprendizado e avaliação deveriam ocorrer simultaneamente, num processo ensino-aprendizado-avaliação, em que o professor, o aluno e o conhecimento matemático seriam três partes de um mesmo processo. Entretanto, o que ocorre em sala de aula, nos diferentes níveis de ensino e, em especial, segundo minha experiência, na graduação, é o oposto: o professor expõe a matéria na lousa ou em um slide, o aluno assiste a essa exposição em sala de aula, estuda em casa – momento em que, muitas vezes, ocorre o aprendizado, ou parte dele – e, depois de algum tempo, ocorre a avaliação da disciplina, que, em geral, é uma prova escrita. Neste sentido, para a autora, as três partes do processo (ensino, aprendizagem e avaliação) estão totalmente separadas.

As discussões sobre as potencialidades do uso da Resolução de Problemas

para o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática estão mais presentes no currículo do ensino básico, mas, segundo Onuchic (2012), todo o currículo deveria ser fundamentado na Resolução de Problemas. Assim, buscaremos com as atividades propostas, para além dos objetivos da nossa pesquisa, familiarizar os futuros professores de Matemática com a Resolução de Problemas e mostrar que é possível utilizar a Resolução de Problemas para ensinar os conteúdos mais avançados de Matemática que são vistos pelos alunos na disciplina de Estruturas Algébricas. Nessa perspectiva, a partir do desenvolvimento de uma proposta didática que utilize a metodologia de Resolução de Problemas para o ensino de conceitos de Álgebra Moderna num curso de Licenciatura em Matemática, queremos discutir as contribuições dessa proposta para a aprendizagem dos alunos do conteúdo de anéis de polinômios e para as visões dos alunos sobre as interfaces entre esse conteúdo e alguns conteúdos de álgebra do ensino básico.

Sendo assim, temos como questão central: Como o desenvolvimento de uma proposta de ensino de Anéis de Polinômios, por meio da metodologia da Resolução de Problemas, pode levar os alunos de uma turma de um curso de Licenciatura de Matemática a compreender de forma abrangente esse conteúdo e suas relações com os conteúdos desenvolvidos na Educação Básica?

Assim, temos como objetivo principal analisar as compreensões dos alunos de uma turma de um curso de Licenciatura de Matemática do conteúdo de Anéis de Polinômios, tomando-se por base uma proposta de ensino por meio da metodologia de Resolução de Problemas.

Visando alcançar o objetivo principal, temos os seguintes objetivos específicos:

1) Elaborar uma proposta de ensino do conteúdo Anéis de Polinômios por meio da metodologia de Resolução de Problemas;

2) Desenvolver a proposta de ensino com os alunos relacionando os Anéis de Polinômios com os conteúdos desenvolvidos na Educação Básica;

3) Analisar as compreensões dos alunos do curso de Licenciatura de Matemática após o desenvolvimento da proposta de ensino por meio da metodologia de Resolução de Problemas.

A relevância deste projeto vai além de responder a pergunta proposta, mas também teve a proposta de familiarizar os alunos de graduação com abordagens de ensino diferenciadas, para que eles pudessem conhecer e vivenciar uma experiência

de aprendizagem com o uso de uma abordagem de ensino que seja diferente da tradicional, que é a comumente utilizada nas disciplinas de conhecimento específico do Curso de Licenciatura em Matemática.

O capítulo a seguir tratará do referencial teórico utilizado para a elaboração e aplicação da proposta, o mesmo se trata da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas. O segundo capítulo deste texto será uma contextualização ao tema de Anéis de Polinômios, onde buscaremos entender a construção deste conteúdo numa cronologia histórica e lógica (dentro da disciplina de Álgebra Abstrata), d'onde chegaremos à construção dos problemas a serem aplicados. Os capítulos seguintes darão conta da descrição das atividades aplicadas, na turma de Estruturas Algébricas II de um curso de Licenciatura em Matemática e do recolhimento, organização, categorização e interpretação dos dados coletados durante a aplicação das aulas.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO ACERCA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em nosso cotidiano nos depararmos com situações em que precisamos resolver problemas que envolvem a Matemática. Por exemplo: alguma companhia de telemarketing nos liga e nos oferece um produto, que se adquirido, pode ser pago em dezenas de parcelas. Mas, muitas vezes, sentirmos desconfiança e percebemos que se fizéssemos o financiamento desse produto, pagaríamos muito mais do que o valor original. Além disso, a Matemática está presente em outras situações rotineiras: qualquer pessoa que acompanhe a programação da TV, alguma vez, já se deparou com um gráfico que apresentava dados.

Essas e outras situações surgem com frequência no cotidiano. Há casos também em que, tais obstáculos, aparecem na ciência em geral. A modelagem necessária para se construir um foguete, envolve problemas matemáticos. As equações utilizadas para tirar a foto do buraco negro, que ocorreu no ano passado (2019) eram puramente problemas matemáticos a serem resolvidos por meio de computação. Diante da Pandemia de COVID-19, nos são apresentados dados de infectados seguindo modelos matemáticos já existentes, o que nos ajuda a entender a velocidade de propagação do vírus. E, em determinadas situações, para entender fenômenos sociais, também é preciso superar desafios e problemas ligados a modelos matemáticos.

Todos esses exemplos nos mostram que a Matemática se apresenta no cotidiano de diferentes formas e em diferentes problemas, assim como nas ciências. Desse modo, o conhecimento matemático é importante para a sociedade e para os indivíduos nela inseridos. É possível notar que o conhecimento matemático que se apresenta no cotidiano, para todos nós, em grande parte, aparece em forma de problemas e não como a Matemática é apresentada na escola. Em nossas vidas, nem sempre temos alguém que nos descreva todo o conhecimento acerca de

financiamentos, prazos e soma antes de nos depararmos com uma oferta de um empréstimo ou de um parcelamento de uma compra. O que ocorre é que esse tipo de situação aparece sem nos planejarmos e, para isso, o conhecimento matemático é essencial para lidar com essas situações.

Neste trabalho, utilizaremos como referencial teórico a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática por meio da Resolução de Problemas, com base em autores, sobretudo, brasileiros, pois é nesse contexto que estamos inseridos. No entanto, é preciso entender como se deu a construção histórica da Resolução de Problemas, pois esse desenvolvimento influencia diretamente as concepções acerca de metodologias tradicionais e não tradicionais de ensino em Matemática.

A Resolução de Problemas representa uma alternativa ao ensino tradicional de Matemática, como estamos acostumados no cotidiano escolar. O ensino repetitivo e, muitas vezes, a ênfase no aspecto abstrato da Matemática pode torná-la cansativa, entediante e, quase sempre, não desperta o interesse dos alunos para a construção do conhecimento matemático de uma forma satisfatória. Segundo Rossetto (2018):

> Quando a Matemática é ensinada somente a partir da memorização de conceitos e procedimentos, por diversas ocasiões, torna-se incompreensível e abstrata demais para os alunos. Além disso, o rigor matemático, quando imposto antes da superação das dificuldades e da compreensão de um novo conteúdo que está sendo introduzido, pode não promover uma aprendizagem satisfatória. (ROSSETTO, 2018, p. 22)

Tais dificuldades tornam necessário um novo olhar sobre as práticas e metodologias de ensino de Matemática no ensino básico. Quando buscamos alternativas para as metodologias de ensino, várias possibilidades surgem. Dentre elas, uma que muito tem se destacado em artigos de revistas especializadas e trabalhos de congressos de Educação Matemática é a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas. Além disso, como discutimos na Introdução deste trabalho, nos currículos, tem sido enfatizado o uso da Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, o que torna necessário, ao professor de Matemática, conhecer essa abordagem de ensino.

Ao fazermos uma revisão histórica sobre o tema, o primeiro grande trabalho

sobre a Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática é atribuído a Thorndike, que em 1921 lançou o livro "*Os novos métodos da Aritmética".* No livro, o autor enfatiza que a aritmética deveria ser ensinada para auxiliar a vida e indicava que os problemas deveriam ser propostos de modo que tivessem aplicação na vida real. (ONUCHIC; MORAIS; LEAL JÚNIOR, 2017, p. 410). Para Thorndike, conforme citado em Rezende e Santos (2016),

> os novos métodos para os manuais para o ensino de aritmética deveriam "respeitar os interesses vitais do aluno, fugindo de aborrecê-los e cansá-los com dificuldades inúteis de vocabulário ou de construção" (THORNDIKE, 1936, p. 27) e exigem que levem em conta a vida da criança e as suas atividades, quer na escola, quer fora dela, e procuram utilizá-las, quando de real proveito. Procurem, sendo possível, problemas vitais e atraentes para indicação em cada novo processo. Apliquem cada processo a assuntos dos quais se possa, razoavelmente, esperar que a criança, no momento atual ou pouco mais tarde, tenha de aplicar, visto que tais aplicações são tão instrutivas, quanto às remotas e artificiais. Usem jogos, competições, e outros recursos semelhantes, como meio de motivação e de treinamento, visto serem tão instrutivos quanto o mero exercício pelo próprio exercício. Associem aos trabalhos de aritmética humorismo, sociabilidade, variedade, e ação, sempre que for possível sem prejuízo da ordem, do sistema e da boa execução da tarefa. (THORNDIKE, 1936, p. 41 apud REZENDE e SANTOS, 2016, p. 4).

Em seu livro, Thorndike apresenta uma técnica para a resolução de problemas que consistia nas seguintes etapas: 1) Sabe-se como resolver o problema prossiga e resolva-o; 2) Se não consegue visualizar uma forma de resolução, considere a questão os dados e faça questionamentos ao problema: Qual é a pergunta feita? Como utilizar os dados? O que fazer com os números e o que significam? 3) Fazer um planejamento de como irá proceder na resolução; 4) Analisar a resposta, verificando se está de acordo com o solicitado no problema (ONUCHIC; MORAIS; LEAL JÚNIOR, 2017).

O próximo trabalho que se destaca é o do matemático húngaro George Pólya que, em 1945, publicou o livro "*How to solve it",* em que tratava sobre problemas matemáticos e estratégias de resolução desses problemas. Nesse livro, Pólya trouxe quatro passos importantes para se resolver qualquer problema matemático. São eles:

1- Ler e compreender o problema: esta fase é importante, pois se o problema não for bem compreendido, o leitor encontrará grandes dificuldades para a sua resolução;

2- Elaborar um plano para a resolução: esta é a parte em que o leitor

passará mais tempo, pois nem sempre um problema apresenta um caminho óbvio para a resolução;

3- Executar o plano;

4- Refletir sobre o trabalho realizado: nesta etapa, o leitor confere tudo o que foi feito anteriormente, a fim de encontrar possíveis equívocos em sua resolução.

Podemos constatar que houve muitas mudanças acerca dos estudos sobre a resolução de problemas (até aqui, descrito como o ato de resolver um problema). A partir de 1945, o próprio Pólya dedicou-se, em seus livros, aos professores, que, segundo ele, deveriam ser bons resolvedores de problemas (Ferreira, 2017, p. 73). O autor aprofundou seus estudos, o que influenciou seus próximos livros e, consequentemente, novas pesquisas acerca do assunto. Segundo Andrade e Onuchic (2017), citando Andrade (1998):

> em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares tem início na década de 1970. Embora grande parte da literatura hoje conhecida em Resolução de Problemas tenha sido desenvolvida a partir dos anos 70, os trabalhos de George Pólya datam de 1944. A partir do final da década de 1960, a metodologia de investigação, utilizando sessões de resolução de problemas em grupo e com alunos se manifestando em voz alta, se tornou prática comum. (ANDRADE, 1998, apud ANDRADE; ONUCHIC, 2017, p. 434 – 435).

Ainda conforme Andrade (1988), citado em Andrade e Onuchic (2017), as pesquisas sobre a Resolução de Problemas, antes da década de 1960, enfatizaram como obter um bom desempenho na obtenção da solução de problemas, não havendo preocupação com o processo. Nessa perspectiva, defendia-se que o aluno deveria resolver uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo, para desenvolver sua capacidade em resolução de problemas.

> O ensino de resolução de problemas limitava-se ao ensino da busca de solução, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta. “Posteriormente, período de 60-80, a preocupação voltou-se para o processo envolvido na resolução de problemas e, assim, centrando o ensino no uso de diferentes estratégias.” (ANDRADE, 1988 apud ANDRADE; ONUCHIC, 2017, p. 435).

A partir do final dos anos de 1950, no Brasil e no mundo, começaram a ocorrer diversas discussões sobre a necessidade de uma renovação do ensino da Matemática, nos diferentes níveis de ensino. Esses debates, que envolveram professores de Matemática e pesquisadores da área de Educação produziram o

Movimento da Matemática Moderna (ALVES E SILVEIRA, 2016). Esse movimento, que tomou grandes proporções ao redor do mundo, acabou ofuscando as pesquisas acerca da Resolução de Problemas.

Porém, em 1980, houve outro marco para a área de Resolução de Problemas. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou um manifesto chamado *An agenda for action*, em que defendia que “a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar para os anos 80”, ou seja, que a Matemática na escola deveria se basear na resolução de problemas de forma geral. Nesse documento havia recomendações de que a resolução de problemas deveria levar em consideração a aplicação da matemática na vida real, servindo às mais diversas ciências, e por diversas vezes, passando pelos limites da matemática escolar (NTCM, 1980). Esse marco é importante, pois inspirou a publicação de diversas teses e dissertações acerca do tema no mundo todo. É exatamente nessa época que começam as pesquisas em Resolução de Problemas no Brasil, que mais à frente ganhariam força por meio dos grupos de estudos que foram criados.

O NTCM ainda lançou novos documentos para a maior reforma na matemática escolar da época, foram eles: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989; Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991; Assesstment Standards for School Mathematics, 1995.* Segundo Andrade e Onuchic (2017):

> Esses *Standards* não pretendiam dizer, passo a passo, como trabalhar esses documentos. Ao contrário, queriam apresentar objetivos e princípios em defesa de que práticas curriculares, de ensino e de avaliação pudessem ser examinadas. Queriam estimular políticos educacionais, pais professores, administradores, comunidades locais e conselhos escolares a melhorar os programas de matemática em todos os níveis educacionais. (ANDRADE; ONUCHIC, 2017, p. 436)

A partir da década de 1980, quando o NTCM lançou o *An agenda for action,* pesquisas acerca da Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática via Resolução de Problemas começaram a aparecer com maior frequência no Brasil. A partir daí, teses de doutoramento e dissertações de mestrado apresentam os resultados das pesquisas desenvolvidas sobre o tema no país.

No final da década de 1990, foram elaborados no Brasil os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática). Esse documento, organizado pelo Ministério da Educação (MEC) com o intuito de nortear o ensino de Matemática

no Brasil, sofreu forte influência das ideias veiculadas pelos *Standards*. No documento é clara a importância dada a Resolução de Problemas e a habilidade de resolver problemas para o futuro dos estudantes, à aplicação na vida, no mercado de trabalho e em outros aspectos científicos e sociais atribuídos à Matemática. De acordo com Onuchic (2012), “Especificamente no que se refere à Matemática, os PCN indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula” (ONUCHIC, 2012, p. 12).

Nos Estados Unidos, muitos professores e pesquisadores da época do *“An agenda for action”* fizeram críticas acerca do documento publicado como, por exemplo, o fato de não especificar diretrizes norteadoras para a aplicação da Resolução de Problemas necessárias para que professores do ensino básico da época pudessem utiliza-las de forma clara em seu dia-a-dia. Como consequência, em 2000, o NCTM publicou um novo documento para o ensino de Matemática, denominado *Principles and Standards for school Mathematics*, conhecido como NCTM 2000, que levantou novos pontos para a Resolução de Problemas e novos aspectos abordados. Foram eles:

- (Os alunos) Construam novos conhecimentos matemáticos por intermédio do seu trabalho com problemas;
- Desenvolvam vontade para formular, representar, abstrair e generalizar em situações dentro e fora da Matemática;
- Apliquem uma grande variedade de estratégias para resolver problemas e adaptem as estratégias a novas situações;
- Monitorizem e reflitam sobre o seu pensamento matemático na RP. .

Neste documento, o NCTM também destacou abordagens e apresentou diretrizes para que os docentes pudessem aplicar a metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula (VAN DE WALLE, 2007).

No Brasil, atualmente, as pesquisas sobre a Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação de Matemática via Resolução de Problemas são desenvolvidas e publicadas com certa regularidade. Todavia, ainda existem caminhos a serem desbravados dentro da Resolução de Problemas, bem como áreas que foram pouco exploradas e que têm potencialidades de desenvolvimento.

Dentre tais áreas, está o trabalho com a Resolução de Problemas no Ensino Superior, que será o enfoque deste trabalho.

2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Na seção anterior deste capítulo apresentamos um breve panorama histórico do desenvolvimento da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática via Resolução de Problemas. Contudo, ainda não foram especificados e nem elucidados os principais pontos da pesquisa em Resolução de Problemas. Para prosseguir e entender a RP[1] no ensino superior é preciso responder algumas questões chaves sobre a metodologia, tais quais: O que é Resolução de Problemas? O que se caracteriza como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação? O que é um problema?

A última questão levantada no parágrafo anterior pode parecer óbvia na visão de alguns, no entanto não é. Isto porque, segundo Kilpatrick (1981, p.2, apud. Serrazina, 2017), o uso impreciso e indiscriminado de determinados termos permite que “numerosos pecados sejam cometidos em seu nome”. O uso correto do termo problema leva ao uso preciso da Resolução de Problemas, quando combinado com outros fatores. Para Serrazina (2017), entender o que é um problema é essencial para que o professor possa elaborar atividades de Resolução de Problemas. O entendimento correto leva ao uso correto. Assim, o que é um problema?

O termo problema é definido no dicionário online Michaelis como “tema em qualquer área do conhecimento, cuja solução ou resposta requer considerável pesquisa, esforço e reflexão”. Para além das definições dos dicionários, pesquisadores discutem o que deveria ser tratado como problema. No NCTM temos:

> Um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (NCTM, 1991, p. 11).

1 Quando for referenciada a sigla RP, sempre será tratada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática via Resolução de Problemas.

Um aluno ou um grupo de estudantes que esteja lidando com um problema, não se sentirá motivado a continuar a resolver esse problema ou concluirá a atividade muito mais rápida, se para ele(s) o problema não for desafiador. O caso contrário também ocorre. Se o problema for de grau muito elevado para o grupo em questão, ele não se sentirá motivado a continuar, ou até mesmo terá a sensação de que não é capaz de aprender determinado conteúdo ou de fazer Matemática, o que os professores procuram evitar no ensino de Matemática.

O entendimento do docente sobre o que caracteriza uma atividade como problema se faz importante. O professor deve se preocupar com determinados pontos quando for elaborar um problema.

Na perspectiva de Serrazina (2017, p. 60), um problema deve:

> (i) ser desafiante e interessante de um ponto de vista matemático;
>
> (ii) ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento e as capacidades dos alunos já tem para de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas;
>
> (iii) ser problemático a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível (SERRAZINA, 2017, p. 60).

Se, por acaso, o problema escolhido ou elaborado seja, de certa forma, desinteressante, os estudantes não se sentirão motivados e intrigados por ele e, em consequência, muitas vezes, não chegarão a uma resposta satisfatória. Isso também ocorre se o problema não abarcar conhecimentos prévios dos estudantes, o que pode levar os alunos a achar que não podem terminá-lo ou que não são capazes. O fato de o problema proposto ser intrigante e sem um caminho pré-definido para sua solução, pode promover de forma intencional a reflexão, o desenvolvimento de estratégias de resolução e a apreensão, não somente de conhecimento, mas de habilidades. Por estes motivos, foi considerada a perspectiva de Serrazina (2017) sobre a caracterização de um problema para a formulação das atividades desenvolvidas com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, foco desta pesquisa.

Como podemos ver, um problema, dentro da Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação de Matemática via Resolução de Problemas, é caracterizado de forma mais cuidadosa, pois é com base nele que os professores irão trabalhar na elaboração de atividades para seus alunos. Esse é um ponto chave na pesquisa, entretanto, não só da definição de problemas vive a Metodologia de Resolução de Problemas: existem diversos aspectos metodológicos e pedagógicos que a cercam. Vamos discutir esses aspectos após tratarmos das questões citadas no começo desta seção.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática via Resolução de Problemas é defendida por diversos estudiosos e pesquisadores na área da Educação Matemática (KILPATRICK, 1987; SCHOENFELD, 2007; VAN DE WALLE, 2007; SINGER; ELLERTON, 2016; ALLEVATO, 2011; ONUCHIC, 2017; ROSSETTO, 2018), mas até agora não a mostramos com clareza neste trabalho.

A força desse método se encontra no potencial que ele tem para promover o ensino de Matemática de uma forma mais acessível e, ao mesmo tempo, de um modo mais reflexivo para os estudantes.

No cotidiano, os principais fenômenos são percebidos, primeiramente, em forma de enigmas. Como, por exemplo, quando vamos a um mercado, compramos algo e chegamos ao caixa, o (a) atendente nos dá o troco do que compramos, quando pagamos em dinheiro, a primeira pergunta que geralmente fazemos é: o troco está correto? Obviamente é um exemplo muito trivial, no entanto descreve perfeitamente a maneira como os problemas aparecem para nós. A partir daí, informações diferentes são coletadas e, com perguntas como “quanto eu paguei pela compra?” e “quanto o caixa me devolveu?”, com uma dose de reflexão chegamos ao resultado, que é se o troco está correto ou incorreto. Isto é, a maioria das dificuldades do cotidiano ou das ciências se apresenta em forma de problemas, quando relacionados à Matemática.

Esse tipo de reflexão levou os pesquisadores do início do século passado a procurarem possibilidades para a mudança do ensino de Matemática, a fim de formar cidadãos preparados para lidarem com os problemas da vida, sejam eles cotidianos, das ciências ou dos mais diversos tipos de trabalhos. A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, busca que aluno seja trazido para o

centro de seu aprendizado e pode ser vista em uma perspectiva pós[2] construtivista ou construtivista[3]. Um problema, caracterizado da forma como definimos anteriormente, é apresentado para um aluno ou um grupo de alunos (um problema que associe obrigatoriamente conhecimentos anteriores, já apreendidos pelos alunos, a novos conhecimentos). Cabe ao professor atuar como um mediador. Para isso, ele já deve ter tido, nesse ponto, uma conversa prévia com os estudantes, a fim de esclarecer o que se espera deles, isto é, os objetivos daquela atividade. Logo, com incentivos prévios e durante a atividade, o trabalho em grupo é estimulado, a troca de ideias, e a escolha de caminhos distintos, conversa e escolha do melhor método é feita. (ANDRADE; ONUCHIC, 2017, p. 440)

O professor, obviamente, tem que tentar não entregar uma dica que facilite demais o trabalho dos alunos e nem dar alguma informação que os leve diretamente a resposta. O docente, atentamente, deve levar os alunos para o caminho da reflexão e, em alguns casos, para a discussão em grupos, momento em que ideias poderão ser trocadas. Desse modo, o aluno é construtor de seu próprio conhecimento, ou seja, ele é o centro do processo de ensino-aprendizagem.

2.2.1 Uma rápida contextualização construtivista

O construtivismo é uma concepção psicológica, com fortes inspirações da psicologia cognitiva e das teorias de Piaget, renomado psicólogo suíço. Trata-se de uma perspectiva em que o aluno não é uma “tábula rasa”, isto é, o aluno não somente recebe as informações e as retém, mas, na verdade, é o construtor do próprio conhecimento. Sobre o significado de construir o conhecimento, Van de Walle (2007) esclarece:

> Construir ou formar algo no mundo físico requer instrumentos, materiais e esforço. O modo como construímos ideias pode ser considerado de uma maneira análoga. Os instrumentos que usamos para a compreensão são nossas ideias já existentes, o conhecimento que já possuímos. Os materiais sobre os quais atuamos para a construção da compreensão, podem ser as coisas que vemos, ouvimos e tocamos [“...].” (VAN DE WALLE, 2007, p. 42).

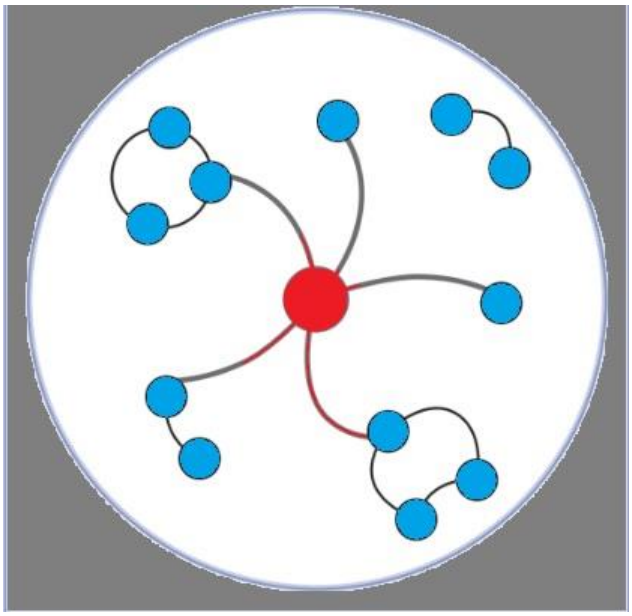
---

2 Abarca o construtivismo, mas o expande numa perspectiva de trabalho coletivo, de cooperação entre os aprendizes.

3 Construtivismo é uma tese epistemológica que defende o papel ativo do sujeito na criação e modificação de suas representações do objeto do conhecimento.

Van de Walle ainda nos traz um diagrama para ilustrar a nossa composição cognitiva (Figura 1).

Figura 2- Diagrama de uma pequena parcela da nossa composição cognitiva



Fonte: (VAN DE WALLE, 2007, p. 43).

Esse diagrama é encontrado em seu livro *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula* e representa um esquema cognitivo construído por uma pessoa frente a um novo conhecimento. Os pontos azuis representam os conhecimentos e as ideias já existentes na cognição do indivíduo. Repare que algumas dessas ideias estão ligadas entre si e outras podem ser encontradas isoladas. O ponto vermelho representa um novo conhecimento a ser assimilado[4]. É possível notar que os conhecimentos prévios constroem elos com este novo conhecimento.

Após esse ponto vermelho, isto é, a nova ideia, ser assimilada pelo complexo de conhecimentos ao seu redor, naquela "região" cognitiva, os conhecimentos prévios criam novas ligações e até mesmo modificam suas disposições no esquema cognitivo. As ideias antigas podem mudar e,

4 A assimilação se refere ao uso de esquemas já existentes para dar significado às experiências (VAN DE WALLE, 2007).

provavelmente, irão, com o novo conhecimento. Este processo se chama *acomodação*[5].

É dessa maneira que podemos interpretar o construtivismo na escola. Mas podemos notar que em uma sala de aula temos uma diversidade considerável de alunos com experiências diferentes, aprendizados diferentes e, assim, conhecimentos prévios distintos e que podem levar a ligações únicas entre eles. Desse modo, é necessário que um professor conheça plenamente os estudantes com os quais estão trabalhando.

Além disso, para Van de Walle (2007),

> Construir e compreender uma ideia requer pensar ativamente na mesma. E pensar 'como isso se ajusta ao que eu já sei?' e em 'como eu posso compreender isso em face da minha compreensão atual dessa ideia?'. As ideias Matemáticas não podem ser 'despejadas' em um estudante passivo. As crianças devem estar mentalmente ativas para que isto aconteça. (VAN DE WALLE, 2007, p. 43).

Isto nos leva a entender que uma metodologia baseada no construtivismo se torna uma alternativa às tradicionais, em que, em geral, o professor "transmite" o conhecimento e o aluno o "recebe". Na perspectiva construtivista, o aluno domina seu próprio processo de aprendizado e é responsável por ele.

Claro que se um professor pretende trabalhar em uma perspectiva construtivista, ele deverá estudar e refletir a respeito de como quer conduzir sua aula. Isto é, aqui o professor é um mediador entre o aluno e o conhecimento planejado para ser desenvolvido numa atividade.

É nessa perspectiva cognitiva que se baseia a Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação em Matemática via Resolução de Problemas. A definição de problema que apresentamos anteriormente e os passos indicados para o desenvolvimento dessa metodologia em sala de aula, que serão mostrados a seguir, envolvem uma concepção construtivista em sua elaboração. Nessa metodologia, o aluno constrói novos conhecimentos, refletindo e pensando no problema, com mediação do professor em todo o processo, assimilando um novo conhecimento sobre conhecimentos anteriores, acomodando todos novamente e novamente, assim que outros novos conhecimentos sejam trazidos para a sua rede cognitiva.

---

5 A acomodação é o processo de se alterar os modos existentes de se ver as coisas ou ideias que se contradizem ou não se ajustam aos esquemas existentes.

2.2.2 Um roteiro inicial para a resolução de problemas

Nesta etapa, será feito um roteiro de atividades, o que é desejável sempre que elaboramos uma aula, mas que é encontrado com mais facilidade na Resolução de Problemas. O roteiro que seguiremos neste trabalho foi retirado do livro "*Perspectivas para Resolução de Problemas"* de Lourdes Onuchic, Luiz Carlos Leal Júnior e Marcio Pironel, e reflete a visão do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) acerca da Resolução de Problemas. Segundo Onuchic (2017), os passos para se aplicar a Resolução de Problemas em sala de aula devem ser análogos aos seguintes:

1) Primeiro, se formam grupos entre os estudantes;
2) Preparação de um problema;
3) Leitura individual do problema;
4) Leitura em conjunto;
5) Resolução do Problema;
6) Observar e incentivar;
7) Registro das Resoluções na lousa;
8) Plenária;
9) Busca de um consenso;
10) Formalização do conteúdo.

Vamos agora, perpassar cada um dos itens listados acima.

1) Formar grupos entre os estudantes: esta etapa parece muito simples, no entanto, é necessário preparar os estudantes para que eles entendam o que é esperado em relação à atividade proposta. Um professor que conhece seus estudantes pode alinhar os grupos de forma que sejam compostos por alunos com diversos níveis de conhecimento e habilidades. Assim, múltiplas concepções podem aparecer em um mesmo grupo, levando os alunos a uma reflexão maior sobre o problema.

2) Preparação do problema: na verdade, esta fase deve começar antes mesmo da aula. O professor, cuidadosamente, escolhe o problema objetivando, ao fim da atividade, a apreensão de um novo conhecimento, mas estando sempre atento aos saberes prévios de seus estudantes, para que ao fim, o problema seja bem definido para aqueles alunos, assumindo o papel de problema, como descrito

por Serrazina (2017).

3) Leitura individual: é necessária a entrega de uma cópia do problema para cada aluno, mesmo que a atividade seja aplicada em grupos. Assim, cada aluno terá acesso à leitura do problema sempre que precisar. Entretanto, cabe salientar que a Resolução de Problemas, também podem ter atividades feitas individualmente pelos estudantes.

4) Leitura em conjunto: o professor deve solicitar e incentivar uma nova leitura, desta vez, não mais individualmente. O professor pode ler em voz alta o problema ou pedir para que seja lido nos grupos. Caso haja termos desconhecidos no texto do problema, surge um problema secundário e pode-se, nessa oportunidade, ser feita uma discussão sobre os termos desconhecidos ou propor aos alunos que consultem livros e dicionários.

5) Resolução do Problema: agora que os alunos entenderam o que o problema quer dizer, é hora de pôr a mão na massa! Os estudantes cooperarão entre si, discutirão o problema e buscarão chegar a uma resposta satisfatória. Muitas dificuldades serão encontradas ao longo do caminho, o que é muito bom, pois o incentivo correto pode levar a uma reflexão aprofundada, o que nos leva ao próximo item;

6) Observar e incentivar: aqui, o professor assume o papel de mediador e observador. O ideal é passar de grupo em grupo para que seja possível observar o comportamento dos alunos e despertar reflexões. Nesse momento, os alunos farão muitas perguntas. É importante que o professor não forneça uma dica que possa levar os alunos diretamente à resposta. Pode-se, por exemplo, responder uma pergunta com uma reflexão, como “e se vocês mudassem isso?” ou “e se vocês pensassem de outra forma?”. Incentivos devem também ser dados para que os alunos possam participar. Caso algum aluno esteja mais isolado durante a atividade, ou sem interesse no trabalho com o problema, o professor deve incentivá-lo, a fim de que possa participar da construção desse novo conhecimento, assim como os seus colegas. É no aluno que, até então, não se sente motivado na resolução do problema que o professor deve manter o seu foco. O professor deve incentivar os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios para a resolução do problema, sem, mais uma vez, dar dicas que possam levar a uma solução diretamente.

7) Registro das soluções na lousa: nesta etapa, cada grupo deve escolher um representante para registrar a solução do grupo na lousa. Podem ser colocadas

respostas certas, erradas, feitas por diferentes e múltiplos métodos. A intenção é a reflexão vinda da próxima etapa;

8) Plenária: Nessa etapa todos os estudantes são convidados para discutirem as soluções apresentadas na lousa. O ideal é que cada grupo defenda seu ponto de vista e tire suas dúvidas sobre as demais resoluções. O professor assume o papel de mediador e incentivador, motivando os alunos a participarem da discussão. Se conduzido de maneira correta, este momento pode se transformar em um momento de amplo aprendizado por parte dos alunos (e do professor também, como discutiremos mais à frente, neste referencial teórico).

9) Busca de um consenso: após a discussão anterior e depois de serem esclarecidas todas as dúvidas, o professor deve incentivar os alunos a chegarem a uma só resposta, ou seja, um consenso acerca das resoluções registradas no quadro ou possíveis novas soluções apresentadas na plenária;

10) Formalização do conteúdo: o professor, após o consenso, deve escrever na lousa a resolução alcançada, formalmente, para maior compreensão dos alunos. A formalização pode também ser feita por meio de uma atividade ou de uma aula expositiva, em que podem ser usados exercícios de fixação ou outros problemas que remetem ao problema primário, enfatizando as operações utilizadas e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Pelos passos apresentados acima, é visível que a Metodologia de Ensino aprendizagem-Avaliação em Matemática via Resolução de Problemas necessita de cuidados ao ser aplicada em sala de aula e, por isso, demanda professores preparados para tal.

Para que o professor, nos passos supracitados, lide com as dificuldades que possam surgir, como, por exemplo, não entregar uma dica que leve diretamente a resolução, Serrazina (2017) sugere estratégias que podem ser adotadas durante o processo. São elas:

(i) Utilizar um esquema/diagrama/tabela/gráfico: Um esquema para resolver qualquer problema seria o desenho dos elementos presentes no problema e fazer ligações entre eles. Esquema aqui é a palavra principal e se dá como uma via alternativa para se chegar ao objetivo;

(ii) Trabalhar do início para o fim: esta estratégia é adequada quando se conhece o ponto de chegada, mas não o ponto de partida;

(iii) Simular/simplificar um problema: Simular um problema, uma situação

mais descritiva, utilizando-se de objetos ou modelos para a resolução; (iv) Descobrir uma regra/regularidade: o professor pode incentivar, de forma superficial, os alunos a identificarem uma regra que rege o problema, ou algum elemento regular nele; fazendo isto, os alunos podem chegar mais perto da resolução;

(v) Tentativa e erro: os alunos terão que testar cada hipótese para solucionar o problema, o que pode ser bom para um melhor entendimento das regras matemáticas que cercam o problema;

(vi) Organizar uma sequência de passos: o professor, para si, deve organizar uma sequência que leva até a resolução; isto facilitará o trabalho do professor para incentivar a reflexão dos estudantes sem indicar diretamente a direção para a resolução;

(vii) Procurar problema análogo mais simples: essa dica deve ser usada com atenção, pois pode ser escolhido um problema análogo “simples demais” o que deixa o problema gerador menos desafiador;

(viii) Desdobrar um problema complexo com problemas mais simples: essa é uma dica valiosa. Se o professor indicar passos a serem resolvidos que se complementam no final, não estará, necessariamente, excluindo a reflexão de seus alunos e o farão enxergar a resolução de um problema de forma diferente;

(ix) Criar um problema equivalente;

(x) Explorar casos particulares.

Problemas que se encaixam na definição citada anteriormente por Serrazina (2017), numa Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática via Resolução de Problema, encorajam os alunos a questionar, experimentar, estimar, explorar e sugerir explicações, pois uma atividade criativa como a Resolução de Problemas não pode ser construída valendo-se de atividades rotineiras e da prática de procedimentos. A RP é uma proposta completa, que envolve objetivos, metodologia, seleção de conteúdos e processo de avaliação. Por si só, pode integrar de forma completa e sólida a base curricular em Matemática. Nesse sentido, a RP é encarada como metodologia de ensino e como conteúdo a ensinar consistindo em uma “larga variedade de processos, atividades e experiências intelectuais e, portanto, as situações de aprendizagem não devem ser entendidas de forma restritiva, mas sim corresponder a esta diversidade” (SERRAZINA, 2017, p. 67).

Na Metodologia Ensino-aprendizagem-Avaliação em Matemática via

Resolução de Problemas uma das principais discussões de autores na área se dá ao terceiro termo em Ensino-aprendizagem-Avaliação, que receberá foco na próxima seção 2.4 deste capítulo.

2.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO SUPERIOR: ALGUMAS POSSIBILIDADES

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino-aprendizagem avaliação amplamente difundida no âmbito acadêmico e no magistério. Vemos referências a ela em praticamente todos os documentos curriculares brasileiros (ANDREATTA; ALLEVATO, 2018).

Entretanto, segundo Rossetto (2018), uma das dificuldades para a implementação da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática via Resolução de Problemas em sala de aula é a falta de subsídios e materiais de apoio ao professor. No Estado de São Paulo, por exemplo, conforme a autora, o material oferecido pelo governo não oferece subsídios suficientes para uma implementação satisfatória da Resolução de Problemas.

Assim, uma formação inicial que contemple discussões sobre a metodologia de Resolução de Problemas pode contribuir para que o futuro professor possa adotar metodologias diferenciadas em sua prática, uma vez que promova debates e reflexões sobre como formular (adaptar), aplicar e avaliar os problemas. Além disso, seria adequado que os futuros docentes tivessem a oportunidade de vivenciar experiências com o uso de RP em suas aulas, o que, certamente, contribuiria para que fossem compreendidos as potencialidades e obstáculos para o uso dessa metodologia.

Segundo Ferreira, Silva e Martins (2017), a metodologia de Resolução de Problemas é proposta de quatro maneiras diferentes para cursos de educação superior. A primeira é a RP para cursos de Licenciatura em Matemática em disciplinas de ensino básico*;* a segunda trata da RP em outros cursos de graduação, também para disciplinas de ensino básico; a terceira possibilidade existente nos cursos de graduação é RP em outros cursos para Matemática superior; A quarta é RP para cursos de Licenciatura em Matemática em disciplinas de Matemática superior.

Uma das propostas deste trabalho é promover aos discentes de Licenciatura

em Matemática a compreensão das interfaces entre as disciplinas de Matemática superior e os conteúdos do ensino básico, promovendo uma reflexão sobre o papel das disciplinas de conhecimento específico para a atuação docente no ensino Básico. Desse modo, a proposta apresentada neste trabalho é a quarta opção de aplicação da Resolução de Problemas no ensino superior, isto é RP para cursos de Licenciatura em Matemática em uma disciplina de Matemática superior, de acordo com a classificação de Ferreira, Silva e Martins (2017).

A tese de Ferreira (2017) aborda a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática via Resolução de Problemas em cursos de Licenciatura em Matemática, nas disciplinas de Matemática superior. No entanto, não há muitos trabalhos que complementam essa perspectiva. Ferreira, Silva e Martins (2017) destacam:

> Assim, uma pesquisa como a de Ferreira (2017), além de trazer contribuições no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática, avança para um terreno, de certa forma, fora dos limites dos educadores matemáticos. Apesar de os dados desse trabalho apresentarem o descontentamento sobre a metodologia utilizada pela maioria desses especialistas, esse trabalho não teve o propósito de criticar a metodologia utilizada por outros professores, muito menos buscar confronto entre matemáticos e educadores matemáticos. Mas, sem dúvidas, direcionou para novos horizontes dentro da licenciatura, que acreditamos ser um dos melhores contextos de mudança possam ter uma maior abrangência. O trabalho permeou uma disciplina, em geral, de domínio de professores com pouca, ou até nenhuma, formação na área de Educação. Neste aspecto, o trabalho de Ferreira (2017) pôde servir também para mostrar uma perspectiva de se trabalhar Resolução de Problemas nesse novo contexto, e consequentemente, ao apresentar uma proposta aos professores formadores de professores, mostrando que é possível em disciplinas de Matemática superior, mesmo abstratas, trabalhar a construção de seus conceitos a partir de concreto, através da Resolução de Problemas. (FERREIRA; SILVA; MARTINS, 2017, p. 200).

Andreatta e Allevato (2019), em mapeamento das pesquisas que envolveram a temática Resolução de Problemas e foram apresentadas no Congresso Internacional de Ensino de Matemática (CIEM), entre os anos de 2013 e 2017, chegaram a um total de 42 trabalhos, dos quais 9 tratavam de estudos sobre a Resolução de Problemas no Ensino Superior. Desses nove trabalhos, apenas um abordava a utilização da RP como metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação (COSTA e ALLEVATO, 2017). Nesse trabalho, os autores discutem aspectos do ensino, da aprendizagem e da avaliação de Estatística Descritiva na Educação Superior por meio do uso da resolução de problemas. A pesquisa foi realizada com alunos do terceiro período de uma turma de Engenharia Ambiental de uma

universidade particular do Estado do Maranhão.

Há diversas formas de se trabalhar com a Resolução de Problemas na formação inicial ou continuada de professores de Matemática. Fiorentini (2012) estabelece algumas abordagens da Resolução de Problema que são utilizadas em cursos de formação de professores:

1- Ensinar *para* a resolução de problemas: essa perspectiva é considerada a abordagem mais tradicional da RP e a mais utilizada em cursos de formação de professores. Nessa abordagem, inicialmente se ensinam os conteúdos matemáticos e, só depois, é desenvolvido o trabalho com os problemas, como forma de aplicação e reforço dos conteúdos estudados. Em geral, são usados problemas fechados e que, em sua resolução, são utilizados conceitos e procedimentos anteriormente aprendidos.

2- Ensinar *sobre* Resolução de Problemas: Nessa perspectiva, o foco é a teoria sobre a metodologia de RP. Para isso, a ênfase do trabalho é o estudo de autores que discutem a Resolução de Problemas e os processos heurísticos para, depois, ser possível aplicar a RP em suas aulas. Em geral, essa abordagem é desenvolvida em disciplinas específicas sobre Resolução de Problemas na formação inicial ou em cursos de formação continuada. Em ambos os casos, o professor-aluno aprende a teoria e, em seguida, aplica o que aprendeu, resolvendo problemas.

3- *Aprender sobre* Resolução de Problemas: é uma variação da abordagem descrita acima, mas enfatiza a necessidade de que o professor assuma um papel central na construção de um conhecimento sobre Resolução de Problemas. Nessa abordagem o professor formador propõe o estudo de bibliografias ou recursos para o desenvolvimento das atividades. O resultado desse estudo culmina com a apresentação de seminários ou atividades reflexivas sobre as ações desenvolvidas.

4- Essa abordagem propõe que o professor/aluno vivencie práticas por meio da resolução de problemas, sem necessariamente teoriza-las ou problematiza-las.

> Essa abordagem, contrariamente às anteriores, nega a importância de uma teoria sobre resolução de problemas. Supõe que o professor ou futuro professor, ao vivenciar uma prática diferenciada de RP ou IM, se apropria também de uma forma de ensinar e aprender matemática via RP. Esta abordagem, do mesmo modo que as duas primeiras, não promove problematização nem metacognição, a partir da reflexão e análise

> sistemática dessas práticas com/através RP ou IM. (FIORENTINI, 2012, p. 70).

5- Esta abordagem é uma variação da anterior, mas com o intuito de problematizar e teorizar as experiências vividas em práticas de uso da resolução de problemas. As práticas referem-se ao ensino de disciplinas de formação matemática e também as disciplinas de natureza didático-pedagógicas. Fiorentini afirma que "essa problematização ocorre mediante reflexões e análises contínuas e sistemáticas sobre o processo de vir a ser professor" (FIORENTINI, 2012, p. 70).

6- Esta abordagem, que tem forte impacto no desenvolvimento profissional do professor, "é a investigação sobre a própria pratica de ensinar/aprender matemática em um ambiente exploratório-investigativo ou de resolução de problemas. Essa abordagem tem sido utilizada por nós nos estágios supervisionados e na formação continuada de professores." (FIORENTINI, 2012, p. 70).

No caso da presente pesquisa, nosso foco é a quarta perspectiva apresentada, pois propomos desenvolver em sala de aula uma intervenção com o uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas, porém com a proposta de reflexão sobre a experiência vivida. Entretanto, vale salientar que, apesar das diferentes abordagens existentes, como salienta Fiorentini (2012), todas são possíveis e desejáveis em um curso de formação inicial para futuros professores.

Desse modo, com o auxílio de bibliografia consultada, foram formulados problemas que, primeiramente, pertençam aos temas propostos neste trabalho, relacionados à álgebra abstrata, mas que tracem ligações com os conteúdos do ensino básico, de forma que o discente do curso de Licenciatura em Matemática tenha a oportunidade de construir um novo conhecimento, acerca de Anéis de Polinômios, em Estruturas Algébricas, e, ao mesmo tempo, poder relacionar esses conhecimentos com os conteúdos da educação básica. Além disso, pretendemos propor aos futuros professores uma vivência com o uso da metodologia de Resolução de Problemas que, segundo Ferreira, Silva e Martins (2017), é pouco explorada no ensino superior e nos cursos de formação de professores.

2.4 A AVALIAÇÃO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E COMO PODEMOS SABER QUE O TRABALHO APLICADO GEROU CONHECIMENTO NOS FUTUROS PROFESSORES

Como diz o próprio nome, a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas contempla também a avaliação, que está integrada ao processo de ensino-aprendizagem, isto é, ela ocorre simultaneamente, junto aos passos roteirizados anteriormente da RP.

No entanto, é preciso entender que nem sempre os três componentes de ensino-aprendizagem-avaliação ocorrem simultaneamente. Pironel e Vallilo (2017) entendem as seguintes configurações possíveis:

> 1- Pode ocorrer ensino e aprendizagem sem que exista uma avaliação desse processo;
> 2- Pode haver ensino e avaliação sem que haja uma aprendizagem;
> 3- Pode haver aprendizagem e avaliação dessa aprendizagem sem que ela tenha ocorrido por meio do ensino;
> 4- Porém, compreende-se a necessidade de que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorram integradamente quando pensamos na sala de aula de matemática. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 280)

Segundo Pironel e Vallilo (2017), "*quando pensamos em avaliação devemos pensar em quando avaliar, o que avaliar, como avaliar e por que avaliar*" e, de fato, a avaliação influencia diretamente o processo de ensino-aprendizagem. Vide como exemplo o que ocorre em muitos cursos de graduação. O aluno participa das aulas normalmente, mas por conta da quantidade de disciplinas e, muitas vezes, da necessidade de abstração do conteúdo, em metodologias tradicionais de ensino, ele não consegue realizar o aprendizado pleno em sala da aula – o que até aqui é normal. O discente, muitas vezes, realiza o aprendizado fora de sala de aula, por meio de estudos com livros, vídeos e outros meios, para que, depois, em uma data marcada, realize uma prova. Isto, muitas vezes, deixa o aluno muito nervoso. Nem sempre passamos por dias bons e todos nós temos problemas em nossas vidas. Ser estudante de graduação é ter cinco ou até mais disciplinas simultâneas. Nem sempre, por diversos fatores alheios a disciplina ou o aprendizado do aluno, o aluno consegue se sair bem na prova. Isso também ocorre para as disciplinas do ensino básico. Por esse fator, defendo aqui, uma avaliação diferente da tradicional.

Pironel e Vallilo (2017) sugerem quatro tipos de avaliação:

1- Avaliar o problema;

2- A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem;

3- A avaliação do sentido atribuído pelo aluno;

4- A meta-avaliação.

Vamos perpassar os tipos de avaliação a fim de melhor entender os passos da avaliação junto ao processo de ensino-aprendizagem.

2.4.1 Avaliar o problema

Segundo Pironel e Vallilo (2017), citando Leal Júnior e Onuchic (2015):

> A postura do professor em considerar o que o aluno traz como conhecimento prévio enquanto resolve um problema se relaciona com o que Vygotsky chama de Zona de Desenvolvimento Proximal. Definida como a diferença entre o Nível de Desenvolvimento Real e Nível de Desenvolvimento Potencial. A ZDP "engloba tudo aquilo que o sujeito não consegue realizar sozinho, mas que terá êxito ao obter o auxílio de alguém que o saiba fazer" (LEAL JÚNIOR; ONUCHIC, 2015, *apud* PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 286).

Além disso, os próprios autores argumentam que:

> Dessa forma, entendemos que o professor atua na ZDP de seus alunos e, por isso, influência diretamente na construção de seus conhecimentos. O professor deve conhecer qual o NDR de seus conhecimentos. O professor deve conhecer qual o NDR de seus alunos para propor um problema a eles, objetivando que atinjam o NDP através da resolução de um problema gerador, de forma que o professor possa conduzir os alunos à construção de um novo conhecimento. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 286)

Neste sentido, o professor que planeja escolher ou formular um problema deve, primeiramente, entender qual é o nível de conhecimentos prévios de seus alunos, avaliando assim, as ideias de problemas disponíveis. Para isto, Pironel e Vallilo (2017) indicam que o professor deve se debruçar sobre as seguintes questões para avaliar seu problema:

- Isso é um problema?
- Para que séries ele é adequado?
- Quais conteúdos estão envolvidos?

- É possível que a resolução desse problema nos leve à do conteúdo pretendido?

De fato, tais perguntas podem auxiliar um professor na hora de formular ou escolher um problema para a aplicação da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas. Serrazina (2017), como já foi citado, define como deve ser um problema e sua definição acaba por envolver diretamente estas perguntas. Para que, a atividade escolhida, de fato, seja um problema, ela deve ser problemática para os estudantes que se depararem com ela, deve ser adequada para seus conhecimentos prévios e sua série e deve suportar diretamente uma atividade posterior. Se o problema escolhido se adaptar corretamente a essas questões, o professor pode seguir com a aplicação da metodologia.

2.4.2 Avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem

Para que uma boa aula baseada em resolução de problemas seja efetivada, o professor deve desconstruir toda a sua noção de uma aula tradicional e convencional, a sua ideia de como o aluno aprende, em que é baseado o processo de avaliação e até como se ensina. Durante a aplicação da RP, o professor deve avaliar se suas falas são muito explicativas, a ponto de tirar o interesse do aluno para o desafio, pensar em como dar uma dica sem explicar muito e também como cativar os alunos para eles engajarem-se na resolução do problema proposto. Além disso, o professor deve incentivar constantemente a autoavaliação dos alunos. Segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 81), o aluno precisa analisar melhor os seus próprios métodos de resolução e as soluções obtidas para os problemas, o que o faz elaborar justificativas e dar sentido ao que faz.

Deve ser pedido aos alunos que sigam as instruções

1-Ler o problema individualmente;

2-Ler o problema junto aos seus colegas de grupo;

3-Discutir o que é pedido no problema e quais as suas condicionantes;

4-Eleger um relator para, ao final da atividade, explicar a resolução do grupo;

5-Resolver o problema.

O professor deve também fazer o aluno refletir sobre como resolveu o

problema, ou seja, suas estratégias e os conteúdos utilizados, e também a entender como funciona o resultado obtido. Isto é importante, pois gera uma compreensão maior acerca da resolução de problemas nos estudantes. Uma das estratégias para isto é, constantemente, questionar os alunos sobre como chegaram a tal resultado e se poderiam chegar a esse mesmo resultado de outra forma. Os alunos também devem ser questionados sobre como encontraram a estratégia utilizada.

Depois disso, o professor pode agir como observador e mediador, contemplando a totalidade dos grupos a fim de coletar o máximo de evidências possíveis para a avaliação.

Durante as perguntas dos alunos, o professor sempre deve tentar responder com outra pergunta que pode levar a um objetivo primário ou secundário do problema. Isto gerará reflexões nos estudantes, de modo que eles não receberão dicas diretas sobre o resultado ou os resultados do problema proposto.

O professor precisa chamar a atenção aos alunos que estiverem à margem do grupo, seja por timidez ou desinteresse; quando der uma dica precisa ser discreto, apresentando-a na forma de pergunta, incentivando o raciocínio dos estudantes e a integração dos membros do grupo. Desse modo, poderá avaliar mais alunos, ajudando esses, que a princípio não estavam participando da atividade.

Na fase de resolução do problema, em que o professor atua como mediador e que ocorre a partir das fases cinco e seis definidas por Onuchic (2017), o professor deve registrar o que acontece na aula, tomar anotações para si de reflexões, falas e problematizações dos alunos. Por isso, a importância de observar e incentivar para a avaliação. Essas notas, tomadas pelo professor, serão essenciais para a composição da avaliação de seus estudantes. Na etapa oito de Onuchic (2017), o professor, como mediador, também deve incentivar o debate dos alunos e tomar anotações também sobre suas reflexões e problematizações.

Assim, seguindo as anotações realizadas durante todo o processo de Resolução de Problemas, o professor, poderá avaliar os alunos e, posteriormente, fazer a sua autoavaliação. Mas para que o processo de avaliação ocorra de forma plena e integrada ao ensino-aprendizagem, os estudantes devem saber o que se espera deles e que eles estarão sendo constantemente avaliados, mas não de forma que os façam se sentirem pressionados, para que, dessa forma, possam tirar proveito de cada passo da Resolução de Problemas.

Pironel e Vallilo (2017) sugerem alguns questionamentos que podem ser

feitos para ajudar no processo da composição dessa avaliação integrada, são eles: · Quais raciocínios, habilidades e conteúdos são esperados que os alunos apresentem?

· Qual a finalidade dessa avaliação?

· Qual tempo de avaliação é necessário para atingir os propósitos do professor?

Considerando essas questões, é possível verificar se a avaliação será feita de maneira satisfatória. Além disso, o professor pode considerar para sua avaliação o raciocínio do aluno, suas reflexões, seu engajamento no grupo, a maneira como expõem seus argumentos e ideias, as estratégias utilizadas para se atingir a resolução daquele problema. A evolução do aluno no decorrer da aula, a sua compreensão do problema, a leitura e até a motivação podem servir como bons indicadores na composição da avaliação dos estudantes. Por isso, é importante refletir sobre a avaliação e quais serão as variáveis que serão consideradas para ela, sempre tomando notas do que ocorre durante o processo de solução do problema proposto.

Segundo Pironel (2002), a melhor maneira de se avaliar um aluno durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas se dá por meio das observações, e sobre isto, em uma obra mais recente o autor diz que existem dois tipos de observação:

> Observação com registro: Na observação registrada, o professor precisa registrar as observações realizadas durante a aula. As observações registradas serão utilizadas por ele para determinar os resultados do processo. A observação pode contribuir para direcionar a prática docente e melhorar os resultados dos estudantes. Observação com intervenção imediata: a observação com intervenção imediata pode ocorrer por meio de questionamentos, dicas e resolução de problemas periféricos ao abordado na aula. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 295).

Nessa parte, segundo Santos:

> Em vez de registrar juízos de valor, que pouco ou nada contribuem para a aprendizagem (por exemplo, “confuso”, “excelente”, “vago”, “não responde ao pedido”), o professor poderá aproveitar mais uma ocasião para construir contextos favoráveis ao desenvolvimento de uma postura autorreflexiva em seus alunos (por exemplo, “o que te levou a escolher esta estratégia?”, “por que é que a solução que chegaste não responde ao problema inicialmente colocado?”). (SANTOS, 2002, p. 82)

É possível complementar o raciocínio com as ideias de Van de Walle (2007), que afirma: “Se você coletar informações dos alunos enquanto eles completam uma

atividade, enquanto ela está sendo discutida, enquanto os resultados são justificados [...] você obterá informação que fornecerá insights sobre a natureza da compreensão dos estudantes sobre aquela ideia.” (Van de Walle, 2007, p. 102).

Assim, pode-se concluir que uma boa avaliação passa por diversos processos, o de autoavaliação do professor sobre a própria avaliação, o de autoavaliação do aluno sobre como processa e desenvolve a atividade e a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem em si. Dessa forma, uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação vem para trazer novas perspectivas sobre o conceito de avaliação. Mesmo que muitos professores façam a avaliação integrada ao processo de ensino aprendizado, a Resolução de Problemas contempla também esse componente do processo, como foi mencionado, por meio de observações registradas e observações com intervenção e com autorreflexão.

O que é entendido por avaliação na metodologia de ensino-aprendizagem avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas será utilizado como um dos parâmetros para entendermos os resultados obtidos com o desenvolvimento da atividade que foi trabalhada com os alunos. As aulas foram gravadas e transcritas para que, além dos elementos citados acima, este trabalho tivesse outra fonte de dados confiáveis, para que fosse também utilizada na composição das anotações, a fim de podermos avaliar as potencialidades e obstáculos da atividade proposta.

Na próxima seção da pesquisa, traremos uma contextualização da disciplina em que deve ser abordado o tema de Anéis de Polinômios. Depois, discutiremos o desenvolvimento de *anéis* até *anéis de polinômios*, buscando uma melhor compreensão desses conteúdos para a elaboração das atividades que foram propostas. Também é necessário entender como esses conteúdos são abordados nos livros acadêmicos e que, em alguma dimensão, podem influenciar as aulas da disciplina Estruturas Algébricas nos cursos de formação de professores de Matemática. Depois, serão apresentadas as sequências de atividades que foram utilizadas para implementar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas em sala de aula.

3 OS ANÉIS DE POLINÔMIOS

3.1 A DISCIPLINA

Nesta seção, adentraremos no conteúdo escolhido para este trabalho, os *anéis de polinômios*. Esse é um dos temas da disciplina de Estruturas Algébricas II, do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, o primeiro Campus da UNESP (TONON, 2020). No Curso de Matemática de Ilha Solteira os conteúdos de álgebra são desenvolvidos desde o começo do curso, com as disciplinas de Álgebra Elementar e Introdução à Teoria dos números até Estruturas Algébricas I e Estruturas Algébricas II. Em outros Cursos, essa disciplina pode receber outras nomenclaturas, como Álgebra, Álgebra Abstrata, entre outros.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2001), os Fundamentos de Álgebra estão indicados entre os conteúdos curriculares para os Cursos de Licenciatura. O documento também recomenda que no tratamento da Álgebra sejam incluídos os conteúdos matemáticos da educação básica.

A disciplina Estruturas Algébricas II integra o quadro do terceiro ano de graduação do Curso de Matemática da UNESP de Ilha Solteira e tem como pré-requisito o curso de Álgebra Elementar. Segundo o site do Departamento de Matemática, na página do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Ilha Solteira, a disciplina Estruturas Algébricas tem a seguinte ementa:

> LM-28-Estruturas Algébricas II Ementa: Anéis e ideais. Homomorfismos. Anel quociente. Ideais primos e ideais maximais. Teoremas de homomorfismo. Corpos. Domínios Inteiros. Corpo de quocientes de um Domínio Inteiro. Anel de polinômios. Introdução à extensão de Corpos. Extensões Algébricas. Noções sobre Corpos Finitos. (UNESP, acessado dia 21/06/2020, https://www.feis.unesp.br/#!/graduacao/cursos/).

Para a disciplina de Álgebra Elementar, a ementa é:

> LM-01-Álgebra Elementar. Ementa: Progressões aritméticas e geométricas. Números complexos: operações e representações. Polinômios e fatoração. Equações algébricas e Inequações. Teorema Fundamental da Álgebra. Sistemas de equações e álgebra de matrizes. Recorrências. Números

> Algébricos. Na carga horária destinada à Prática como Componente Curricular serão discutidas as inter-relações dos conteúdos de Álgebra Elementar com os conteúdos ensinados no Ensino Fundamental e será proposta a discussão do conhecimento matemático abordado em diferentes contextos socioculturais, a investigação e a busca de soluções para problemas práticos de Matemática e das Ciências em geral e a investigação matemática dentro e fora da sala de aula. (UNESP, acessado dia 21/06/2020, https://www.feis.unesp.br/#!/graduacao/cursos/).

Antes de prosseguir, desejo salientar que o intuito dos dados aqui apresentados é o de fornecer um panorama da disciplina em que iremos aplicar as atividades de ensino-aprendizagem-avaliação via Resolução de Problemas. Com isso, queremos dizer que o foco não é problematizar a estrutura do curso ou da disciplina, mas sim buscar analisá-la para encontrar as melhores atividades a serem trabalhadas.

Como podemos ver na ementa do curso de Álgebra Elementar, existe uma preocupação com a inter-relação entre os conteúdos da disciplina e os conteúdos ensinados no Ensino Fundamental, o que é essencial para uma disciplina com este enfoque. No entanto, não encontramos esse enfoque na ementa do curso de Estruturas Algébricas II e esse aspecto poderia ser questionado e investigado em outro estudo.

Outro ponto a ser levantado é a presença de conteúdos relacionados aos polinômios em ambas as disciplinas. Na ementa de Álgebra Elementar, o tema aparece como “Polinômios e fatoração”, com a intencionalidade de se estabelecer uma relação com os conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental. Polinômios também aparecem em Estruturas Algébricas II, associado ao conteúdo de *anéis de polinômios.* É possível notar que os polinômios são introduzidos no começo do curso, para que sejam aprofundados no decorrer da disciplina. No entanto, seria adequado, considerando que o Curso visa a formação de professores para a Educação Básica, que houvesse uma discussão sobre como o conteúdo relacionado ao tema *polinômios* em Estruturas Algébricas está relacionado aos conteúdos do ensino fundamental e médio, em um espaço dentro da disciplina ou em alguma outra disciplina que tratasse especificamente da conexão entre os conteúdos específicos do curso e os conhecimentos do professor de Matemática.

3.2 O QUE É A ÁLGEBRA E COMO CHEGAMOS NO NÍVEL DE ABSTRAÇÃO DE HOJE?

A pergunta “o que é a Álgebra?” pode conter uma ambiguidade em sua resposta, que o leitor não espera. Da mesma maneira que, quando perguntamos, “o que é Matemática?”, ao perguntar “o que é a Álgebra” iniciamos uma discussão filosófica de questões tratadas por diversos estudiosos matemáticos e filósofos matemáticos que construíram o conhecimento que temos atualmente, ao longo das eras.

Os primeiros registros de que se tem conhecimento são dos egípcios, que determinaram uma nova linguagem escrita, chamada escrita cuneiforme, e datam de mais de cinco mil anos atrás (BOYER, 1974, p.8). Por conta dessa escrita, e a partir de quando ela foi decifrada, foi possível entender como funcionava a Matemática egípcia. Astronomia, calendário e até a engenharia desse povo era repleta de uma ordem dificilmente casuística. Entretanto, segundo Boyer (1974), não somente os calendários, astronomia e engenharia são capazes de traduzir a matemática egípcia. O povo em questão também deixou documentos escritos, chamados papiros, sobre a Matemática. O maior já encontrado, Papiro de Ahmes, data de 1650 a.C. e é uma cópia do original, que pode ser bem mais antigo. Nesse documento, Ahmes mostra uma escrita diferente da cuneiforme tradicional para a Matemática em questão e que foi responsável por mudar e deixar mais fluídos alguns números, além de introduzir novos sinais. Havia também frações e algumas equações no Papiro.

Os últimos itens citados acima podem demarcar o início do que podemos chamar de Álgebra aritmética[6]. Depois, novos métodos aritméticos foram desenvolvidos por babilônios, mesopotâmios, gregos (por mais que sua Matemática fosse mais geométrica, muitos resultados da álgebra aritmética puderam ser encontrados por meio de descobertas gregas geométricas), indianos, chineses, árabes e por fim, Inglaterra, França, e outros países da Europa após o século XV.

Vamos avançar um pouco no tempo - ainda que fosse interessante discutir outros episódios da história, fugiríamos da proposta inicial. Chegamos, então, ao século dezenove. O mundo ainda se encontra em colonização e muitos países detêm territórios para além de sua fronteira onde empregam repressão, poder

6 A generalização dos métodos numéricos e de resolução de equações, sinais, ordenação, igualdades entre outras coisas.

político, poder sobre as riquezas e conhecimento e onde determinam cultura, língua e outros mais diversos meios de dominação. O centro (cultural, acadêmico, financeiro e político) do mundo era formado pelos países que exerciam essa dominação, ou seja, a Europa, que exercia essa dominação desde o século quinze. Logo, não é de se surpreender que viessem de lá os maiores resultados sobre a Matemática acadêmica, depois das grandes navegações. É no século dezenove que se inicia uma nova tendência Matemática. É nesse século que mais se produziu conhecimento sobre matemática que ainda persiste em muitas áreas do conhecimento matemático, mais do que qualquer outro predecessor (BOYER, 1974, p. 419).

A Inglaterra se encontrava, nessa época, em um hiato de grandes produções acadêmicas no campo de Matemática. A França também. No entanto, foi nessa época que na Europa começou-se a pensar em uma nova definição para a Matemática. Depois do desenvolvimento do Cálculo e o surgimento dos números complexos, o entendimento sobre o que era a Matemática já estava mais do que consolidado. Tratava-se de uma ciência que quantifica e explica a continuidade de numerosidades vinculadas ao mundo real. Os números, nessa visão, são signos que expressam uma medida ou quantificação do mundo real e assim deveria ser. Na vida acadêmica inglesa era muito defendido que os números complexos e até os negativos não tinham validade. Nesse cenário, George Peacock lançou, em 1830, o *Treatrise on Algebra,* que tentou estruturar as leis e operações algébricas da mesma forma que Euclides elaborou em *Os elementos*. Em seu livro foram abordadas as leis da aritmética, as leis associativas e comutativas para adição e multiplicação (BOYER, 1974, p. 420).

Os estudos de Peacock ainda não apresentavam uma ideia de generalidade, para além dos números e conjuntos numéricos. Foi com De Morgan, matemático indiano, que viraria professor na Universidade de Londres, que a ideia de abstração da Álgebra surgiu. De Morgan considerava que a ideia de Peacock deveria ser levada para além de conjuntos numéricos, considerando elementos de qualquer conjunto, para além dos numéricos, como “elementos A, B e C que podem ser virtudes e pecados, que com interações dadas por + ou -, que podem ser castigos ou recompensas” (BOYER, 1974, p.420), satisfazem as condições estabelecidas para Peacock. Segundo Boyer (1974), De Morgan também percebeu que algumas propriedades dos números complexos eram as mesmas de outros conjuntos de

álgebra “simples”, mas que certas propriedades não iriam se manter em álgebras triplas ou quadruplas. Em 1867, Hankel concorda com De Morgan dizendo que os números complexos seriam a Álgebra mais geral possível, o que de fato se concretizou, já que os números complexos detêm várias propriedades que, se juntas, seriam caracterizadas mais tarde como um corpo.

Depois de De Morgan, Boole foi o grande nome do campo da Álgebra. Boole definia a Matemática diferente dos pesquisadores passados e que se baseavam em uma visão criada por Peacock e De Morgan. Para Boole, que estudou lógica, a “lógica deveria ser associada à Matemática”, isto é, “constrói um sistema puramente formal, e só depois procura interpretação na fala comum”, com essa ideia, descreveu os passos para a sua nova lógica padrão, que ia contra as lógicas antecessoras, a lógica grega[7]e a lógica grega[7] e a lógica escolástica[8]. Para Boole, “*Se qualquer tópico é apresentado de tal modo que consiste de símbolos e regras precisas de operação sobre esses símbolos, sujeitas somente à exigência de consistência interna, tal tópico é parte da Matemática*.” (BOYER, 1974, p. 428).

Desse modo, surge na Filosofia da Matemática um novo panorama sobre o que seria essa Ciência. De “ciência da grandeza” a Matemática passa a ser entendida com uma visão mais ampla, em que ela se trataria de símbolos e operações, em qualquer contexto que ambos produzissem resultados consistentes e previsíveis. Essa é uma visão chamada de formalista da Matemática e que teve seu início interligado ao início da Álgebra abstrata.

No ano de 1854, Boole publicou o *A investigation of the Laws of Thought,* que ampliou significativamente a descrição da álgebra dos conjuntos ou álgebra da lógica. De fato, conforme Boyer:

> Boole usou as letras x, y, z, ... para representar subconjuntos de coisas – números, pontos, ideias, ou outras entidades – escolhidas de um conjunto universal ou universo de discurso, cuja totalidade ele designava pelo símbolo ou “número” 1. (...) o símbolo ou número 0 Boole tomou para indicar o conjunto vazio, que não contém nenhum elemento do conjunto universal – o que agora se chama conjunto nulo. O sinal $+$ entre duas letras ou símbolos, como $x + y$, ele tomou como sendo a união dos subconjuntos x e y – isto é, o conjunto formado de todos os elementos em x ou y (ou ambos). O sinal de multiplicação $\times$ representava a intersecção de conjuntos, de modo que $x \times y$ significa os elementos ou objetos que estão

7 Consistiam-se de palavras da linguagem ordinária (BOYER, 1974, p. 428);
8 Era tirada da linguagem ordinária, mas era caracterizada por regras pré-definidas (BOYER, 1974, p. 428).

> no subconjunto x e também no subconjunto y. (...) O sinal representa a relação de identidade. (...) As notações mudaram um pouco desde os dias de Boole, de modo que a união e a interseção são geralmente denotadas por $\cup$ e $\cap$, em vez de $+$ e $\times$, e o símbolo para o conjunto vazio é $\emptyset$ em vez de 0; mas os princípios fundamentais são os estabelecidos por Boole há mais de um século. (BOYER, 1974, p. 429)

Contudo, foi com um matemático francês que uma nova classificação para conjuntos com determinadas propriedades foi estabelecida.

Évarist Galois veio de família tradicional e teve uma jornada conturbada. Seu pai era prefeito de sua cidade, eram eruditos, no entanto somente Galois se interessou pela Matemática. Logo em sua infância se considerava bom demais para a escola, o que realmente era. Galois era um gênio prematuro, que tentou entrar para a *École Polytechnique* da França mais de uma vez, no entanto não conseguiu ser aceito nenhuma das vezes. Era membro do grupo que apoiava uma republica na França e até foi preso por isso. Entretanto, em sua jornada conturbada, Galois conseguiu grandes progressos dentro da Matemática. Não há alguém em específico que se atribua o estudo inicial sobre o conceito de grupo, no entanto, foi Galois que desenvolveu de forma célebre vários conceitos conhecidos na área. Galois determinou quando uma equação polinomial pode ser resolvida por radicais, ele descobriu que uma equação algébrica é resolúvel se o grupo de permutações de suas raízes é resolúvel (BOYER, p. 433, 1974). Galois teve uma vida curta, no entanto, segundo Boyer (1974), “a obra de Galois foi importante não só por tornar a noção de grupo fundamental na teoria das equações, mas também por levar, por meio das contribuições de Dedekind, Kronecker e Kummer, ao que se pode chamar de tratamento aritmético da álgebra”.

Segundo Boyer “o conceito de corpo estava implícito nas teorias de Abel e Galois (outro Matemático que desenvolveu algumas ideias utilizadas por Galois), mas Dedekind, em 1879, parece ter sido o primeiro a dar uma definição explícita de corpo numérico”.

Além desta contribuição, para Boyer, Dedekind

> Generalizou ainda mais a teoria dos inteiros algébricos – números que satisfazem a equações polinomiais com coeficientes inteiros e primeiro coeficiente igual a um. Tal sistema de “inteiros”, é claro, não formam um corpo, pois faltam inversos para a multiplicação. Têm algo em comum no fato de satisfazerem às demais exigências para um corpo. Dizemos que formam um “domínio de integridade”. (BOYER, 1974, p. 434).

Dessa forma, Dedekind e Kummer introduziram o conceito de ideal, baseado na noção de anel. Desta forma, conseguimos entender agora como alguns conteúdos previstos na ementa de Estruturas Algébricas surgiram. A história também nos conta que essa é uma disciplina realmente abstrata, diferente de toda a Matemática feita anteriormente, não tinha uma aplicação direta na realidade, e classifica a Matemática. Sendo assim, muitos alunos quando chegam para cursar essa disciplina na graduação enfrentam dificuldades, e é compreensível, ela é diferente de tudo o que viram até então. A Álgebra contribui com generalização dos conjuntos matemáticos e os caracteriza em uma lógica pré-estabelecida, por axiomas, teoremas e proposições muito bem elaboradas. Assim, A Resolução de Problemas pode auxiliar os estudantes a construir as ideais, inicialmente, sem precisar de toda a formalidade, após a resolução de problemas e discussão toda essa formalidade dessa disciplina pode ser descrita e exposta.

Não deixarei para trás o leitor da dissertação que não teve contato ou nunca viu e ouviu falar sobre os assuntos abordados acima. Na próxima seção, trarei uma referência em Matemática, para que tais conceitos sejam abordados e entendidos com o intuito de, ainda neste capítulo, trabalhar com as atividades e o roteiro que serão aplicados na pesquisa.

3.3 GRUPOS, CORPOS, ANÉIS E ANÉIS DE POLINÔMIOS: UMA COMPREENSÃO NECESSÁRIA

Esta seção do capítulo será destinada a contextualização dos conteúdos abordados no roteiro de atividades. Para isso, tomamos como referência o livro de Audrey Terras, *Abstract Algebra with aplications* da *Cambridge Mathematics Textbooks* (2018), referência moderna em Álgebra Abstrata.

Começaremos com alguns axiomas, definições e teoremas que compõe o assunto e que fazem parte do tema de Anéis de Polinômios.

Antes, é necessário exibir algumas notações que os matemáticos utilizam para formular um teorema, seguindo uma lógica específica pré-determinada, como citado anteriormente na parte histórica deste capítulo.

“=>” Significa “implica”, isto é, uma afirmação lógica implica outra. Por exemplo, se uma garrafa for jogada para cima no planeta Terra, então ela cairá no chão, em notação matemática: uma garrafa é jogada pra cima no planeta Terra => ela cairá no chão;

“<=” significa “é implicado por”, é a volta da colocação anterior, que ficaria: uma garrafa cairá no chão <= ela for solta no ar no planeta Terra. Não necessariamente uma sentença implica **e** é implicada por outra, note que nesse exemplo, houve uma modificação na segunda sentença, pois uma garrafa cai no chão sem necessariamente ser jogada para cima;

“⇔” Significa “se, e somente se,”. Se aplica quando “=>” e “<=” são verdadeiras ao mesmo tempo;

“∀” Significa “para todo” e é utilizado como símbolo para abreviar as sentenças matemáticas;

“∃” Significa “existe um” e tem o mesmo fim que o item anterior;

“$\mathbb{N}$” é o símbolo para representar o conjunto dos números naturais $(1, 2, 3, 4, \dots)$;

“$\mathbb{Z}$” é o símbolo para representar o conjunto dos números inteiros, isto é, $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$;

“$\mathbb{Q}$” símbolo para representar o conjunto dos números racionais;

“$\mathbb{R}$” é o símbolo para representar o conjunto dos números reais.

Não existem somente esses símbolos para as notações matemáticas, no entanto, são os mais utilizados e servem para facilitar o desenvolvimento da sentença. Começaremos pelo assunto grupo, com sua definição e algumas sentenças lógicas necessárias. O intuito aqui não é se prolongar no assunto, somente mostrar o que é necessário para o leitor entender o que vem adiante na

dissertação.

3.3.1 Grupos, corpos e anéis

Vários conjuntos se enquadram na definição de grupo. Ela é a primeira a ser citada já que é, dentre as três que serão apresentadas aqui, a que exige menos axiomas para que os conjuntos se enquadrem. Contudo, mesmo assim, muitos conjuntos não se enquadram nessa definição, em virtude do grau de generalização e de abstração do que se trata um conjunto. Começaremos por ele:

Definição 2.3.1.1 Um conjunto é uma reunião de elementos. Geralmente damos um nome em letra maiúscula para um grupo, ou colocamos seus elementos entre chaves $\{A, B, C, \dots\}$. Os símbolos "1" ou "U" representam o conjunto universo, isto é, o conjunto que detém todos os conjuntos ou elementos que se encaixa no que estamos tratando. O símbolo "Ø" representa o conjunto vazio, ele é único e se encaixa quando queremos dizer que um conjunto não tem elemento algum.

Como podemos ver acima, a definição de conjunto é bem geral, por isso, existem infinitos exemplos de conjuntos que não se encaixam em algumas das definições de grupo, corpo e anéis.

Exemplo 2.3.1.2 Podemos dizer que o conjunto dos adolescentes com entre 15 e 19 anos que moram na cidade de São Paulo é um conjunto A ou $\{(lista\ de\ todos\ os\ adolescentes\ que\ se\ encaixam\ nessa\ definição)\}$. O conjunto B é o de todas as meninas que têm entre 15 e 19 anos. Dizemos que B está *contido* em A, pois as meninas também são adolescentes. Seja C o conjunto das mulheres que moram na cidade de São Paulo, com mais de 20 anos, podemos dizer que não existe nenhuma mulher ou menina que se encaixem nos dois conjuntos ao mesmo tempo. Nota-se matematicamente que o conjunto de meninas que tem entre 15 e 19 anos, **e** mais que 20 anos, simultaneamente é vazio. Isto é: $A \cap B = \emptyset\ ou \{\ \}$. $\cap$ significa interseção, ou seja, quando queremos citar os elementos que estão em mais de um grupo ao mesmo tempo. Agora se unirmos, nesse mesmo exemplo o grupo B, das meninas entre 15 e 19 anos que moram em São Paulo, e um conjunto D, que é o conjunto de todas as pessoas que não se consideram do gênero feminino, que têm idade entre 15 e 19 anos, temos que o resultado é o conjunto A de

todos os adolescentes do estado de São Paulo com idades entre 15 e 19 anos. Matematicamente, temos a notação: $B \cup D\ B \cup D\ = A$. ($\cup\ simboliza\ união$).

Após este breve exemplo, vamos para a definição de conjunto que pretendemos mostrar:

Definição 2.3.1.3 Um conjunto A é denominado *grupo* quanto, $\forall a, b, c \in A$ uma operação binária "+" é bem definida em A e as propriedades abaixo são satisfeitas:

(i) $+$ é $associativa\ em\ A$. Isto é:

$$(a + b + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in A.$$

(ii) Elemento neutro de $+$: existe um $e \in A$ tal que

$$a + e = e + a = a$$

"e" *se chama elemento neutro da adição.*

(iii) Elemento oposto da adição: $\forall a \in A$, $\exists a'$ tal que

$$a + a' = a' + a = e$$

Observação: Uma operação binária "+" em um conjunto A, é uma função f sobre $A\ tal\ que\ f: AxA\ \rightarrow A$. Isto é, ela é uma função que soma dois elementos de A e o resultado está em A.

Definição 2.3.1.4 Um *grupo* A é chamado *grupo abeliano* se for comutativo para a operação binária "+". Isto é, seja $a, b\ \in A$, temos:

$$a\ +\ b\ =\ b\ +\ a\ , \forall\ a, b\ \in\ A$$

Se qualquer conjunto, seja ele matemático ou não, satisfazer às condições acima, este conjunto é denominado grupo. Um grupo consegue satisfazer a várias proposições e teoremas que mostram de forma lógica (matemática) as propriedades que conjuntos, com estas especificações, satisfazem. No entanto, não avançarei no conteúdo, já que nosso foco está em anéis. Mas antes de começar anéis, é necessário entender outra categoria de conjuntos na Matemática, que surgiu antes dos próprios anéis, os corpos.

Definição 2.3.1.5 Um conjunto F é denominado um *corpo* se satisfazer as condições de *grupo abeliano* para duas operações binárias, denotadas "+" e "." (adição e multiplicação).

Exemplo 2.3.1.6 O conjunto dos números racionais, reais e complexos são corpos. Eles são associativos, comutativos, detêm elemento neutro e oposto para a adição e multiplicação. (Esta demonstração pode ser encontrada em vários livros de Álgebra Abstrata disponível).

Segundo Boyer (1974), Dedekind estudou os corpos e dizia que os que não detinham oposto para a multiplicação se chamavam domínio de integridade. Logo após, foi definido o conceito de anel.

Definição 2.3.1.7 Seja R um conjunto $e\ a, b, c \in R$, se as condições abaixo forem satisfeitas em R, então R é um anel:

(i) R é um grupo abeliano para a operação de adição;

(ii) R é associativa para a multiplicação, isto é,

$$a.(b.c) = (a.b).c\ para\ todo\ a, b, c \in R.$$

(iii) Vale a propriedade distributiva:

$$a.(b + c) = a.b + a.c\ , para\ todo\ a, b, c \in R.$$

Agora, um conjunto, para ser definido como anel, tem que aceitar duas operações binárias $(+, .)$ – da mesma forma que para os corpos. Vários conjuntos se adequam a esta definição e veremos algumas proposições e teoremas que os conjuntos com esta característica podem satisfazer.

Proposição 2.3.1.8 Sejam $a, b, c \in R$, em que R é anel com oposto de *a* sendo $-a\ e\ a - b = a + (-b)$, temos:

1) $a.0 = 0.a = 0, em\ que\ 0\ é\ elemento\ neutro\ de\ +$;

2) $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$;

3) $(-a).(-b) = a.b$

4) $a.(b - c) = a.b - a.c$

5) $Se\ R\ tem\ elemento\ neutro\ para\ a\ multiplicação\ (1), então$
$(-1).a = -a.$

Vários conjuntos numéricos satisfazem estas propriedades, como por exemplo, o conjunto dos números inteiros. Por serem dotados de números positivos e negativos eles se encontram dentro desta categoria e satisfazem todos os teoremas e proposições para anéis, anéis comutativos, anéis com elemento neutro para a multiplicação e uma propriedade adicional que nos diz que em uma multiplicação de números não nulos, o resultado será não nulo. Sendo assim, quando um conjunto, no caso os inteiros $\mathbb{Z}$, satisfaz à definição de anéis e mais estas três propriedades, o chamamos de *domínio de integridade*. Uma classe de conjunto que dista somente uma propriedade (a de inverso da multiplicação) de um corpo.

Definição 2.3.1.9 Suponha que R seja um anel com elemento neutro para a multiplicação. As unidades em R são os elementos *inversíveis* para a multiplicação, isto é:

$$R^* = \{a \in R\ tal\ que \exists\ b \in R\ tal\ que\ a.b = 1\}$$

Isto significa que o conjunto R^* é o conjunto de todos os elementos em R que possuem um inverso multiplicativo.

Deste modo podemos partir para a proposição a seguir. Lembrando que é importante saber de algumas propriedades destes conjuntos para que possamos entender melhor do que se tratam os anéis de polinômios.

Proposição 2.3.1.10 Se R é um anel com identidade para a multiplicação, o subconjunto das unidades será um grupo com a multiplicação.

Um grande número de proposições e teoremas deste tipo se prova mostrando que o conjunto definido acima se encaixa nos requisitos propostos.

Assim, como R tem um conjunto com inverso multiplicativo, é possível mostrar que ele obedece às leis de grupo multiplicativo.

Antes de dar prosseguimento, é necessário conhecer um subconjunto de um anel, muito conhecido e que terá grande utilidade em anéis de polinômios, os ideais. Um ideal I é um subgrupo aditivo de um anel A, tal que $A.I$ está contido em I. Isto é, um ideal é um subconjunto de A, que é um subgrupo (um subconjunto que obedece às leis de grupo aditivo) e que, se operarmos qualquer elemento de I com outro elemento fora de I, mas em A, o resultado estará em A. Por exemplo, os números pares são um ideal dos números inteiros, pois todos os números que são multiplicados por um número par, serão pares. Um ideal principal é um ideal gerado somente por um elemento do anel. Isto é, I é gerado por um $a \in A$. Isto é, podemos dizer que $I = \{números\ pares\}$ é um ideal principal de $A = \{números\ inteiros\}$ e é gerado por $a = 2$. Além disto, um ideal I é chamado maximal se é o maior ideal de A, ou seja, não existe ideal $J\ tal\ que\ I$ esteja dentro de J.

Exemplo 2.3.1.11 $Z[x]$ é o anel de uma indeterminada[9] x com coeficientes pertencentes ao conjunto dos números inteiros. Isto é, os elementos desse conjunto têm a forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

em que a_i são números inteiros e i são números inteiros positivos.
Se $n \neq 0$ então o grau de $f(x)$ é n e denotamos por $deg\ f = n$. Chamamos x de indeterminada e não variável, para distinguirmos polinômios e funções.

As operações de adição e multiplicação para esse conjunto em particular são:

Para a adição em $\mathbb{Z}[x]$ temos duas possibilidades:

(i) $deg\ f = deg\ g = n$, para $f, g \in \mathbb{Z}[x]$. Neste caso, temos:

9 Indeterminada: o termo foi escolhido somente para que não houvesse confusão com a noção de variável, muito visto em outras áreas da Matemática. Indeterminada significa, como o próprio nome diz, um valor que não é determinado, que não podemos dizer algo a respeito (TERRAS, 2018).

$f(x) + g(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 =$
$(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0)$

Ou seja, para o caso em que o grau de ambos seja o mesmo, temos de somar os coeficientes que acompanham a indeterminada de mesma potência.

(ii) $deg\, f \neq deg\, g$. Supondo que o grau de f seja n e o grau de g seja m com $n > m$, temos:

$f(x) + g(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0) + (b_m x^m +$
$b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 =$
$(a_n)x^n + (a_{n-1})x^{n-1} + \ldots (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0)$

Isto é, somamos os coeficientes a_i, com $i > m, a_i \neq 0$ e obtemos o mesmo elemento. A partir dos $i \leq m$ teremos $a_i + b_i$.

Agora, trataremos da multiplicação. Esta operação acaba sendo extensa para polinômios de grau muito alto, mas veremos que no fim, existe uma lei de formação para toda a multiplicação inteira. Além disso, a lei permanece quase a mesma para polinômios com coeficientes em outros conjuntos. Sejam $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, temos:

$f(x).g(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0).(b_m x^m +$
$b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$

Neste ponto, a definição nos mostra que a multiplicação neste conjunto é parecida com propriedade distributiva.

$$\begin{aligned} f(x).g(x) = {} & (a_n x^n b_m x^m + a_n x^n b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_n x^n b_1 x^1 + a_n x^n b_0 + (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \\ & + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0).(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0 \\ = {} & (a_n b_m x^{n+m} + a_n b_{m-1}x^{n+m-1} + \cdots + a_n b_1 x^{n+1} + a_n x^n b_0 + (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \\ & + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0).(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0 \end{aligned}$$

Observando a distributiva do primeiro monômio de $f(x)$ pelo polinômio $g(x)$ podemos deduzir a lei de formação para $f(x).g(x)$:

$$f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i.b_j\right).x^k$$

Isto significa que o produto entre dois polinômios de coeficientes inteiros é igual ao somatório do produto de cada coeficiente de $f(x)$ e $g(x)$ que vão de 0 a $m+n$ (que é o grau do polinômio dado pelo produto destes dois) vezes a indeterminada x elevada a soma do índices destes coeficientes.

Exemplo 2.3.1.12 Sejam $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Pela fórmula acima, temos que o produto entre estes dois polinômios será:

$$f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{3+2}\left(\sum_{5=k} a_i.b_j\right).x^k$$

$$= (2.4)x^5 + (2.3 + 3.4)x^4 + (4.4 + 3.3 + 2.2)x^3 + (4.3 + 2.3 + 2.1)x^2$$

$$+ (3.1 + 2.4)x + (4.1) = 8x^5 + 18x^4 + 29x^3 + 20x^2 + 11x + 4$$

Assim, podemos chegar à construção dos polinômios com coeficientes inteiros como anel, já que sabemos como as operações se comportam neste conjunto. O elemento neutro de $\mathbb{Z}[x]$, para a adição é $f(x) = 0$. O oposto da adição é:

$$g(x) - g(x) = 0 \rightarrow$$

$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ e

$-g(x) = -(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_m x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \ldots - a_1 x^1 - a_0$

A identidade para a multiplicação, isto é, elemento neutro da multiplicação, é $f(x) = 1$.

Logo, temos as proposições.

Proposição 2.3.1.13 Sejam $f(x)$ e $g(x)$, polinômios com coeficientes inteiros com grau n e m, respectivamente, temos que o produto de f e g terá grau igual a $n+m$, isto é:

$$deg\,(f.g) = deg\,f + deg\,g$$

Definição 2.3.1.14 Suponha que f seja um polinômio com coeficientes em um anel R, uma raiz θ de f é um elemento que pode se encontrar em um anel maior do que R tal que θ é a solução para o polinômio f, ou seja, $f(\theta) = 0$.

Esta definição nos diz que a raiz de um polinômio pode ou não ser encontrada no mesmo conjunto dos seus coeficientes. Isto explica o motivo de algumas raízes de polinômios com coeficientes inteiros se encontrarem no conjunto dos números complexos. Durante o ensino fundamental e parte do ensino médio, a maioria dos professores orienta os alunos a pararem de desenvolver o método de resolução de polinômios quando o *delta* é negativo. Se *delta* for negativo, a segunda etapa da resolução de equações do segundo grau, o famoso método de *Bhaskara,* deve ser interrompido, pois segundo os professores, o método não possibilita uma resolução. Mais tarde, os professores explicam que quando o delta é negativo, as raízes desses polinômios serão números complexos. A definição de raiz nos permite avançar nas seções e chegar diretamente em anéis de polinômios.

3.3.2 Anéis de polinômios

Anteriormente, foram mostrados alguns conceitos sobre grupos, corpos e anéis, além de uma pequena demonstração do anel de polinômios com coeficientes inteiros, para introduzirmos os conceitos de grau e raiz. Nesta seção começarei trabalhando com os polinômios com coeficientes pertencentes a um corpo. A primeira definição também é trabalhada em ensino básico, se trata da irredutibilidade de um polinômio.

Definição 2.3.2.14 Um polinômio $f(x)$ de grau maior do que zero é chamado irredutível se $f(x) = g(x).h(x)$ para $g, f \in F[x]$, em que F é um corpo, implica que g ou h tem grau nulo. Caso contrário ele é redutível.

Definição 2.3.2.15 Um polinômio é chamado *mônico* se o coeficiente da maior potência dele é 1 (um).

Teorema 2.3.2.16 (Teorema do Algoritmo de divisão para Anéis de Polinômios) Sejam $f(x), g(x) \in F[x]$ com $g(x)$ não nulo, existem $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x), \quad com\ deg\ r < deg\ g\ ou\ r = 0$$

O teorema nos mostra o algoritmo da divisão para polinômios.

Corolário 3.3.2.17 Suponha que F é um corpo e $g(x) \in F[x]$. Então $g(a) = 0$, com $a \in F$ se, e somente se, $g(x) = (x - a)q(x)$, com $q(x)$ *pertencente a* $F[x]$.

Este corolário nos mostra um resultado bem conhecido dos alunos do ensino básico sobre polinômios e suas raízes. Ele nos diz que se um polinômio tem uma raiz *a*, então ele será redutível pelo polinômio mônico $(x - a)$. Veremos agora mais alguns resultados do teorema 2.3.2.16.

Corolário 3.3.2.18 Supondo que $f \in F[x]\ e\ deg\ f = n.$ Então *f* tem no máximo *n* raízes, contando a multiplicidade de $(x - a)^k$.

Corolário 3.3.2.19 Todo ideal em $F[x]$ é principal se F é corpo.

Corolário 3.3.2.20 As afirmações sobre $F[x]$ a seguir são equivalentes:

(i) O conjunto formado por todos os polinômios gerados por $f(x)$ é um ideal maximal;

(ii) $f(x) \in F[x]$ é irredutível;

(iii) *O quociente* entre o conjunto $F[x]$ e o conjunto formado pelos polinômios gerados por $f(x)$ é um corpo.

Esse é um formato de um teorema famoso na Matemática. Por ele, percebemos que se um polinômio é irredutível, o conjunto formado por ele operando em si será um ideal maximal. O conjunto quociente se trata de uma operação entre anéis e subanéis ou um anel e um ideal que forma um conjunto que também pode ter características de grupos, anéis e corpos.

Corolário 3.3.2.21 Seja $f(x) \in F[x]$ um polinômio de grau 2 ou 3 e F um corpo, f é redutível se existir um $c \in F$ tal que $f(c) = 0$.

O corolário acima é o último que trataremos sobre o tema, contudo, apresenta um resultado muito interessante. Ele nos mostra que todo polinômio, com e raízes em um corpo, pode ser os números reais, complexos etc. pode ser reduzido, e a demonstração é simples, decorre de um resultado anterior, que nos diz que se um polinômio tem uma raiz *a*, então $(x - a)$ divide-o.

Assim, terminamos esta etapa do nosso roteiro de atividades. A próxima seção será dedicada ao referencial metodológico, os materiais de análise, ferramentas, o planejamento e como deve se dar a análise de dados em si, bem como a elaboração e os problemas que foram aplicados.

■

4 O REFERENCIAL METODOLÓGICO E O ROTEIRO DE ATIVIDADES

4.1 A ANÁLISE DOS DADOS

A pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa. Para a etapa de desenvolvimento da proposta didática em sala de aula, foi mantido um Caderno de Campo para anotações sobre as observações das aulas, sobre as intervenções realizadas e sobre as conversas com os alunos e com o professor responsável pela disciplina. Dessa forma, os dados para a pesquisa foram coletados por meio de observação, da transcrição das aulas e das atividades desenvolvidas pelos alunos. Iremos trabalhar em conjunto com o docente responsável pela disciplina Estruturas Algébricas II do Curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Ilha Solteira, para que possamos desenvolver a proposta didática em sala de aula.

A disciplina é composta por 11 estudantes, em sua maioria, do terceiro ano de curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual localizada na cidade de Ilha Solteira. No decorrer das aulas, o número de estudantes presentes nas aulas variara entre dois e sete. O desenvolvimento das atividades ocorreu a partir do dia 15 de dezembro de 2020, por meio de salas de videoconferência no aplicativo do Google Meet. Os dados foram recolhidos por meio da gravação, recurso próprio do aplicativo, e deram origem a alguns documentos que devem ser analisados mais a frente.

Os documentos a serem analisados foram:

i) Aulas em que o problema foi resolvido: foram realizadas quatro aulas, em que dois grupos diferentes de alunos foram separados e denominados grupo A e grupo B. Assim, temos as transcrições referentes aos dois grupos. Cada aula teve cerca de uma hora e trinta minutos (respeitando os intervalos), o que nos leva a doze horas de diálogos e mensagens enviadas via chat pelos alunos, que foram transcritas para a análise.

ii) Produto escrito da atividade: compreende a fase da “escrita da resolução na lousa”. O documento é composto por uma ou duas páginas por grupo, nos quais os próprios integrantes escreveram à mão suas respostas e depois enviaram uma foto dessas respostas via Whatsapp (recurso mais rápido para os alunos, pois os mesmo são familiarizados com este) para o mediador, que expôs estes documentos

para a fase da plenária. Estas páginas revelam de forma oficial, escrita pelos alunos, o seu entendimento final a respeito da resolução dos problemas;

iii) Plenária: a fase da plenária também revela dados importantes para compor uma avaliação. Assim, sua transcrição também é um documento, pois mostra o que os estudantes pensam a respeito de sua resposta e da resposta de seus colegas. Na plenária, os alunos fizeram uma exposição oral das suas respostas. Nessa fase, os estudantes procuram elaborar um pouco mais suas concepções e pensamentos antes de anunciá-los na discussão.

A partir da gravação das aulas via *Google Meet* os áudios foram transcritos, resultando numa grande quantidade de dados coletados. Foram cerca de doze horas de aula transcritas, resultando em quase oitenta páginas. Para analisar essa quantidade de dados foi necessário escolher uma metodologia que fosse adequada e que filtrasse os dados para trazer o que realmente fosse relevante para a análise. Dessa forma, foi escolhida a análise de conteúdo, metodologia que enfatiza a análise crítica das comunicações e que, por meio desta, nos permite entender o conteúdo, com contexto das falas ou discursos.

Segundo Bardin (2016), o motivo para o uso da análise de conteúdo se dá pelas demandas de confirmação, "ultrapassagem da incerteza" (o meu entendimento é válido?) e pelo "enriquecimento da leitura, onde se extrai mais detalhes e significados do objeto de estudo" (BARDIN, 2016, p. 35).

4.2 A METODOLOGIA DE ANÁLISE OU REFERENCIAL METODOLÓGICO

Em virtude da sua objetividade a metodologia de análise de conteúdo tem grande aplicação dentro das análises quantitativas e qualitativas de comunicação. Teve seu desenvolvimento, em especial, nos EUA na guerra fria, mas era utilizado anteriormente, na década de 1920 para análise jornalística e estudos psicológicos (BARDIN, 2016). Após a década de 1940, estudos eram direcionados a jornais a fim de procurar aspectos que fizessem apologia ao regime nazista dentro dos Estados Unidos, sendo até utilizada para a análise de discurso e propaganda nazista com o intuito de descobrir estratégias e possíveis ataques. Com este incentivo, e mais tarde com o desenvolvimento mais profundo nas áreas de linguística e psicanálise, o método foi se consolidando e ganhando novas formas. Mas do que se trata a Análise de Conteúdo? De acordo com Bardin (2016), trata-se de um

> *conjunto de técnicas de análise das comunicações.* Visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição dos conteúdos da mensagem, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção destas mensagens. (BARDIN, 2016, p. 37)

Dessa forma, entende-se que a análise de conteúdo é uma ferramenta com diversas aplicações, podendo ser utilizada em diversas áreas, quando se trata de pesquisa que envolva algum tipo de comunicação, sejam entrevistas, discursos, aulas, propagandas e falas, a fim de exprimir as atitudes que se apresentam de duas formas: no corpo do texto ou no interior do significado da comunicação; em outras palavras, as motivações, crenças e atitudes envolvidas na mensagem podem se manifestar de forma direta e explícita no texto ou de forma implícita, que se esconde entre as palavras dispostas na mensagem.

O método organiza-se em três fases: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material 3) o tratamento dos resultados, a inferência e interpretação (BARDIN, 2016).

1) A primeira fase, a da pré-análise, é em que o método é definido. Por ser uma metodologia com grande campo de aplicação, é nesta fase que ela se define. Nesta fase ocorre a leitura flutuante, a escolha dos documentos e o levantamento de hipóteses, e por meio destes, a escolha e a elaboração da melhor maneira de investigar o material na fase dois e fazer inferências, infirmar ou confirmar as hipóteses na fase três. Bardin (2016) afirma que ambas as etapas da pré-análise podem ocorrer simultaneamente, sendo a leitura flutuante e o levantamento de hipóteses momentos muito próximos na pré-análise, pois concomitantemente à leitura, ideias e pensamentos a respeito da mensagem vão se levantando as hipóteses. A escolha de documentos também pode ser implicada ou implicar nas duas fases anteriores ao mesmo tempo.

2) Exploração do material: depois da leitura flutuante dos documentos, do levantamento das hipóteses e esclarecimento do método a ser utilizado, temos a fase de *exploração do material*, que é a “fase de análise propriamente dita, não é mais do que a administração sistemática das decisões tomadas (…) consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 2016, p. 131). É a parte em que o

pesquisador “coloca a mão na massa” e põe em prática tudo o que foi teorizado, sobre o que foi escolhido, até então.

3) Tratamento dos resultados, inferências e interpretações: A partir do método elaborado e da exploração do material, agora o pesquisador pode fazer inferências e induções, a partir dos dados levantados para verificar as hipóteses. No caso deste trabalho, os resultados extraídos da exploração do material deverão ser cruzados com as teorias estudadas para que se chegue a resultados conclusivos, passíveis de servirem como respostas das questões-hipóteses.

A unidade indivisível de estudo dentro da análise de conteúdo, assim como na Matemática temos um número ou um ponto, é a palavra, ou seja, a palavra é a menor unidade de estudo dentro da análise de conteúdo, ainda que não seja a única. Palavras carregam significados quando encontradas em conjuntos ou sozinhas e revelam atitudes do emissor da mensagem em relação a um tema ou conteúdo (Bardin, 2016). A palavra é considerada uma unidade de registro. Para Bardin (2016), uma unidade de registro é “a unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade base, visando categorização e a contagem de frequência”. As unidades de registro mais recorrentes na análise de conteúdo são: o tema, o objeto ou referente, o personagem, o acontecimento e o documento.

i) A palavra: A palavra é uma unidade de registro com menor tamanho, seu próprio significado é difícil de alcançar e não tem definição clara. Mas palavras podem ser úteis para encontrar em um texto uma referência a algo que se deseja estudar e assim, utilizar a busca por *palavras-chaves* e levantar sua frequência, pode ser uma maneira útil de analisar determinados tipos de mensagens e conteúdos (BARDIN, 2016, p. 135);

*ii)*Tema: Corresponde a uma unidade de registro sem tamanho definido e pode ser percebido diretamente no ato da leitura ou após uma análise sobre o real significado das palavras, para Bardin (2016),

> Fazer análise de temática consiste em descobrir ‘núcleos de sentido’ que compõe a comunicação e cuja presença ou frequência de aparição podem significar alguma coisa para o objeto analítico escolhido. O tema enquanto unidade de registro corresponde a uma regra de recorte ‘do sentido e não da forma’ que não é fornecida uma vez por todas, visto que o recorte

> depende do nível de análise e não de manifestações formais reguladas. (BARDIN, 2016, p. 135-136)

Esta unidade de registro, se bem utilizada, pode revelar crenças, atitudes e opiniões a respeito do tópico de pesquisa. Assim, enunciar palavras-tema e explicitar bem o tema que se procura estudar é essencial para a análise.

iii) Objeto ou referente: é o sujeito da mensagem ou um tema forte que pode ser considerado como um sujeito.

iv) Personagens: aquele em que a fala é direcionada ou que é proveniente. É interessante que todos os personagens sejam descritos pelo pesquisador. Os personagens podem também servir como categorias (termo que deverá ser explicado mais a frente);

v) O acontecimento.

vi) O documento: também pode ser entendido como uma unidade de registro e em análises mais rápidas como fonte de dados (Bardin, 2016).

Entretanto, a unidade de registro não é a única unidade que uma mensagem ou comunicação pode expelir. Existem também as *unidades de contexto.*

As unidades de contexto são aquelas que por trás das palavras, e junto a elas, podem trazer sentidos diferentes para a fala. Segundo Bardin,

> a unidade de contexto serve como unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores a unidade de registro) são ótimas para que se possa entender a significação exata da unidade de registro (BARDIN, 2016, p. 137).

Muitas palavras e sua frequência não trazem o real significado do que se pretende entender. No nosso caso, avaliar às vezes em que a palavra “associatividade” aparece, descolada de seu contexto real e do contexto da fala dos estudantes, não reflete em nada em nossa análise. As unidades de contextos podem ser fundamentais para revelar as atitudes do enunciador e seus reais pensamentos por meio das palavras ou termos que ele pronuncia (Bardin, 2016). Por isso “a referência ao contexto é muito importante para a análise avaliativa e para a análise de contingência” (BARDIN, 2016, p. 137). Como deve ser explicado mais a frente, a análise temática é o método que será empregado neste trabalho. Desse modo, analisar somente a frequência e a presença/ausência das palavras no texto torna-se ineficaz para avaliar o nível de aprendizado dos alunos. A unidade de contexto

revela sua importância quando exprime as atitudes dos estudantes em relação a um conceito ou termo.

4.3 ANÁLISE TEMÁTICA

Dentre os mais variados e flexíveis métodos de análise de conteúdo disponíveis, o escolhido para este trabalho foi a Análise Temática, ou simplesmente AT. Segundo Souza (2019) “AT é um método de análise qualitativa de dados, para identificar, analisar, interpretar e relatar padrões (temas)”, Assim, esta análise nos ajudará a categorizar e interpretar estas categorias de acordo com o que os estudantes apresentaram durante o desenvolvimento das atividades em consonância com o tema e a questão problema do projeto.

Souza (2019) se referindo a Clarke (2016) diz que foram propostas três abordagens diferentes para a AT, sendo elas Coding Reliability, Codebook, e a Reflexive. Não cabe a este trabalho se prolongar nas demais categorias, mas segundo a literatura consultada, a que mais se adequa a nossa proposta é a Reflexive. “As abordagens de tipo Reflexive em AT atestam que a codificação é fluida e flexível. Seu ponto principal não é alcançar acurácia, mas imersão e profundo engajamento com os dados” (SOUZA, 2019, p. 3). Desse modo, considera-se que este método deve cumprir de forma satisfatória a categorização e análise destas categorias de acordo com o proposto pelo tema do projeto.

As categorias chamadas pela análise de conteúdo de Bardin, na verdade são padrões de códigos que aparecem no decorrer do texto. Estes padrões são chamados “temas” na análise temática. Desta forma, a autora propõe seis fases para encontrar, analisar, interpretar e concluir sobre estes temas:

> FASE 1 – Familiarização com os dados: Transcrever os dados; ler e reler o banco; anotar as ideias iniciais durante o processo;
> FASE 2 – Gerando os códigos iniciais: Codificar aspectos interessantes dos dados de modo sistemático em todo o banco; reunir extratos relevantes a cada código;
> FASE 3 – Buscando temas: Reunir os códigos em temas potenciais; unir os dados pertinentes a cada tema potencial;
> FASE 4 – Revisando os temas: Checar se os temas funcionam em relação ao extrato e ao banco de dados como um todo; gerar mapa temático da análise;
> FASE 5 – Definindo e nomeando os temas: Refinar os detalhes de cada tema e a história que a análise conta; gerar definições e nomes claros a cada tema;

> FASE 6 – Produzindo o relatório: Fornecer exemplos vívidos; última análise dos extratos escolhidos na relação com a pergunta da pesquisa e literatura; relato científico da análise. (SOUZA, 2019, p. 6)

Primeiro, os dados obtidos por meio das gravações das aulas remotas foram transcritos. Após a transcrição dos dados houve a leitura repetitiva dos dados coletados. Foram quase oitenta páginas de transcrição a serem analisadas. Nessas leituras iniciais, anotações foram sendo feitas, buscando chegar aos extratos que corresponderiam de forma mais próxima ao problema da pesquisa e que pudessem revelar códigos pertinentes entre os dados.

Depois, uma análise mais profunda destes extratos foi feita, buscando entre eles códigos que serviram para mostrar quais são os temas que aparecem entre as falas.

> A codificação depende, até certo ponto, de se os temas sendo construídos são mais derivados dos dados (data-driven) ou derivados de teoria (theory-driven). Na primeira situação, os temas dependem dos dados. Contudo, na segunda, os dados são abordados a partir de questões específicas que o pesquisador tem em mente e que usa para orientar sua codificação. Naturalmente que o pesquisador pode combinar as duas abordagens em sua análise, desde que tenha a clareza disso e consiga demonstrar a coerência dos procedimentos adotados. A codificação também depende se a meta é codificar o conteúdo de todo o banco de dados ou se a codificação busca identificar aspectos específicos do banco. (SOUZA, 2019, p. 7)

Por meio dessa análise, pretendeu-se encontrar os temas derivados dos dados que ao mesmo tempo fossem pertinentes a questão-problema do trabalho. Após encontrar todos estes códigos que se revelaram nos dados, foi preciso categoriza-los por proximidade, isto é, estes foram identificados por unidades de significação comuns. Recodificar também foi um trabalho necessário nesta parte, para que os temas fossem alcançados de forma mais condizente com os dados analisados e o problema do trabalho.

Os temas encontrados foram analisados, nomeados e renomeados, para que se chegasse a nomenclaturas e categorias condizentes com o proposto pelo trabalho e explicitado pelos dados recolhidos por meio das transcrições.

Na próxima seção apresentamos os resultados da análise;

Logo, na análise e na interpretação dos temas e categorias que seguem, discutiremos as contribuições da atividade aplicada para: 1) a compreensão dos

conteúdos da disciplina; 2) estabelecer conexões entre os conteúdos da disciplina e os conteúdos do ensino básico.

Na próxima seção será elucidado como foi elaborado e como se planejou a aplicação do projeto proposto. A partir deste planejamento, podemos entender melhor a ideia que existia de como seria a aplicação antes dela ocorrer, aplicação esta que deve ser explicada na seção posterior à próxima para enfim entendermos os dados que foram nos revelados.

4.4 COMO FOI ELABORADO?

Para elaborar o roteiro de atividades, consideramos vários aspectos. O primeiro é a Álgebra e o tema que estamos trabalhando: o que ele nos diz? Depois, os conteúdos trabalhados no ensino básico: que relações podemos formar? E, por último, a Resolução de Problemas: como podemos elaborar nossa aula?

Essa etapa foi essencial para este trabalho, já que nela foi planejado todo o roteiro de atividades que foi desenvolvido com os alunos, buscando que eles compreendessem a parte do conteúdo específico da disciplina, mostrado acima, por meio da metodologia de Resolução de Problemas.

É observável que diversas características em anéis de polinômios são exatamente as mesmas que são encontradas para a maioria dos polinômios com coeficientes em conjuntos com certas identidades conhecidas, como os anéis e corpos.

No estado de São Paulo, a álgebra começa a aparecer no 7º ano do ensino fundamental. Segundo *O Currículo do estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias,* o conceito mais próximo de polinômios que começa aparecer é o de “uso de letras para representar um valor desconhecido” seguido, no mesmo bimestre, pelo “conceito de equação”. Depois, no 8º ano com “Resolução de equações de 1º grau”. No 9º ano, aparece a resolução de equações do segundo grau. Note que até aqui, apareceram os métodos para encontrar as raízes e o que é uma equação, que são totalmente condizentes com o que é apresentado pela disciplina de Estruturas Algébricas. E, por fim, no 3º ano do ensino médio, “equações polinomiais”, “números complexos” e “Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial”, que conseguem contemplar quase todas as raízes para polinômios de coeficientes inteiros.

Podemos notar que uma parte dos conteúdos relacionados ao tema Polinômios e Equações Polinomiais está relacionada com os temas de anéis de polinômios tratados na disciplina Estruturas algébricas.

Conforme as discussões apresentadas no Capítulo 2, na metodologia de Resolução de Problemas os alunos devem estar cientes do que é esperado por eles. Assim, antes de iniciar as atividades, apresentamos a forma como a aula seria desenvolvida e o que os estudantes deveriam fazer (resolver os problemas, mostrar sua resposta e discuti-la com seus colegas, etc.).

4.4.1 As atividades

As atividades apresentadas aqui tentaram contemplar todos os temas em Anéis de Polinômios, de forma a conectar estes conhecimentos com os saberes de conteúdos do ensino básico. Construir problemas não é uma tarefa fácil, ao contrário, demandou uma profunda leitura do conteúdo e entendimento dos Anéis de Polinômios. As atividades foram elaboradas com base no que se entende como um problema de acordo com Serrazina (2017). Para a sua construção, primeiro me perguntei: “o que espero que dos estudantes com esta atividade?” Outro aspecto a ser considerado, foi o tempo. Assim, deveria condensar o conteúdo em poucos problemas, considerando, além de ambos os aspectos citados, que o primeiro problema deveria trazer uma perspectiva do que se trata a aula e que deveriam fazer referências ao ensino básico.

Para tanto, as atividades propostas foram:

1. Quais e quantas propriedades você consegue encontrar para o conjunto $Z[x]$? O grau do polinômio influencia?

O que é esperado desse problema? Esse problema foi selecionado por alguns motivos. O primeiro, é que os alunos podem ter dúvidas sobre o que é $Z[x]$. Se essa pergunta vir à tona, deve ser respondida da seguinte forma: “esta é a representação formal para o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros na indeterminada x”. Ao responder dessa forma, o conceito se esclarece para os alunos, que já lidaram com este conjunto diversas vezes em sua jornada até o curso de graduação. Conexões com o ensino básico devem começar a surgir, pois esse é

o primeiro conjunto que é tratado tanto no ensino fundamental quanto na disciplina de Estruturas Algébricas II, nos conteúdos relacionados aos Anéis de Polinômios.

Outra questão que pode surgir é “Como assim propriedades?”. As propriedades de um conjunto são como as que estudamos no decorrer da disciplina até agora: características que os conjuntos detêm e que dão identidade a eles – considero que esta seja uma resposta adequada para esta pergunta, se os estudantes a fizerem. É esperado aqui, que os alunos encontrem a fórmula da adição e multiplicação de polinômios, além de propriedades como a associativa e a distributiva. O esperado é que com esse problema os estudantes consigam categorizar o conjunto como um anel sem conhecer o conceito de anel, isto é, citar as propriedades que fazem um conjunto ser anel. Durante a atividade, por meio de reflexões como “tentem com um exemplo de polinômio do segundo grau e depois generalizem para facilitar a visualização” ou “O que vocês acham de operar dois polinômios?” entre outras, tentarei encaminhar os grupos para respostas que cheguem, ao menos, perto do esperado. Além disso, é natural mostrar a notação deg para grau de um polinômio.

2. Sabemos que alguns conjuntos, como os dos números racionais, possuem inverso para a multiplicação. Então, para quais conjuntos R (grupos, anéis ou corpos), $R[x]$ possui subconjunto de elementos inversos? Mostre como chegou a esta conclusão.

O que é esperado desse problema? Aqui, é esperado que os alunos entendessem que existem determinados conjuntos que não aceitam inversos para polinômios com coeficientes neles, como, por exemplo, os próprios inteiros, já não possuem inversos multiplicativos, e, polinômios com coeficientes inteiros, também não detém esta propriedade. Questões podem surgir por parte dos estudantes acerca da transposição das características de R para $R[x]$, no entanto, tal transposição pode ser feita, assim como na atividade 1. O problema mostra também que algumas propriedades são determinantes para um conjunto apresentarem os comportamentos estudados pela Álgebra. Boyer e Dedekind, como citado na seção anterior deste capítulo, mostraram que esta diferença, entre existir ou não inverso multiplicativo, desqualifica um conjunto da ordem dos corpos, tornando-o um domínio de integridade.

3. Sendo $R[x]*$ o conjunto dos inversos de $R[x]$, para R corpo, quais as propriedades $R[x]*$ satisfaz?

O que é esperado desse problema? Aqui, espera-se que os alunos percebam que o conjunto $R[x]*$ se caracteriza como um grupo, independentemente das qualidades atribuídas a R (seja corpo ou anel). Este exercício pode aparentar não ter conexão com conteúdos do ensino básico, no entanto, para mostrar que este conjunto é um grupo, é necessário o uso de propriedades e algoritmos tratados no ensino básico, como a multiplicação de polinômios e as propriedades numéricas de corpos, como o inverso.

4. Quando dizemos que um polinômio $p(x)\ em\ R[x]$, R um anel, é irredutível dizemos que não existem dois polinômios $q(x)$ e $g(x)$, ambos de grau não nulo tal que $p(x) = q(x).g(x)$. Sabendo isto, mostre que *a* é uma raiz de *p* se, e somente se $(x - a)$ divide $p(x)$.

O que é esperado desse problema? Esse problema tem sua demonstração encontrada em diversos livros de Álgebra. Para resolver esse problema, os alunos devem conhecer o Teorema da divisão de polinômios. Se esta dúvida surgir, é possível exemplificar como dividir um polinômio por métodos tradicionais já conhecidos ou propor a discussão “como vocês dividem um polinômio por outro?”. Dessa forma, os alunos podem chegar a sozinhos a essa demonstração, por meio do próprio algoritmo de divisão de polinômios aprendido por eles no ensino básico. Aqui, muitas respostas serão divergentes e durante várias etapas da demonstração os alunos encontrarão dúvidas. Nesse momento, é o papel do mediador conduzi-los no processo.

5. Descreva com suas palavras, utilizando o que foi aprendido até agora, os motivos que fazem o dispositivo de Briot-Ruffini para divisão polinomial dar certo.

O que é esperado desse problema? Primeiramente, que os alunos se lembrem do que é o método de Briot-Ruffini para dividir um polinômio por outro e o relacione com a atividade anterior. Durante o processo de resolução, várias dúvidas em relação ao método aparecerão, como, por exemplo, o motivo do dispositivo exigir

a raiz do divisor. Se esta dúvida aparecer, devem-se propor reflexões como “e se o polinômio divisor não tiver raiz real?” ou “por que os elementos colocados estão desta forma e não como a equação mostrada no problema 4?”. Deste modo, deve-se levar os alunos e os grupos em direção a uma conclusão satisfatória para esta questão. Além disto, o dispositivo de Briot-Ruffini é muito utilizado em classes do ensino médio, tornando importante a discussão do algoritmo no ensino superior.

6. Elabore 3 atividades que utilizem os conhecimentos adquiridos até aqui na aula, para o ensino fundamental, médio ou superior.

Esse problema tem como foco o “fazer” ou “propor” um problema. Se os alunos concluírem esta atividade de forma satisfatória, mostrarão que adquiriram os conhecimentos tratados por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática via Resolução de Problemas. Os alunos poderão elaborar exercícios, problemas ou qualquer atividade que envolva anéis de polinômios ou equações polinomiais, mostrando assim que são capazes de relacionar os conhecimentos específicos com os conhecimentos didático-pedagógicos.

Após o desenvolvimento das atividades, o conteúdo será formalizado. Esta formalização deverá ser feita utilizando os conceitos, teoremas, corolários e definições mostradas acima. Uma boa opção é utilizar a História da Matemática na formalização do conteúdo.

4.4.2 Formalização do conteúdo

Após a discussão e o consenso sobre as soluções para os problemas propostos acima, deve ser feita, segundo as diversas fontes em Resolução de Problemas, a formalização do conteúdo, utilizando a linguagem formal matemática, para que os estudantes consigam conectar os temas tratados nas atividades com o conteúdo em estruturas algébricas.

Na lousa, ou em transparências, deve ser passado da seguinte forma:

Formalizando o conceito de anel de polinômios.

Segundo Boyer (1974), Dedekind utilizou os inteiros algébricos, que são as raízes de polinômios com coeficientes inteiros, para mostrar que a categoria de domínio de integridade abrangia uma quantidade muito grande e importante de conjuntos. Assim, surgiram os anéis. Isto é, os anéis estão, desde sua caracterização, alinhados com os polinômios com coeficientes inteiros, e é por eles que começamos.

Definição 1.0 $Z[x]$ é o anel de uma indeterminada x com coeficientes pertencentes ao conjunto dos números inteiros. Isto é, os elementos desse conjunto têm a forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

em que a_i são números inteiros e i são números inteiros positivos.

Se $a_n \neq 0$, então o grau de f é n e denotamos por $\partial f = n$ ou $degf = n$. Chamamos x de indeterminada e não variável, para distinguirmos polinômios e funções.

As operações de adição e multiplicação para esse conjunto em particular são:

Para a adição em $\mathbb{Z}[x]$ temos duas possibilidades:

(iii) $deg\, f = deg\, g = n, para\, f, g \in \mathbb{Z}[x]$. Neste caso, temos:

$f(x) + g(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0)$

Ou seja, para o caso em que o grau de ambos seja o mesmo, temos de somar os coeficientes que acompanham a indeterminada de mesma potência.

(iv) $deg\, f \neq deg\, g$. Supondo que o grau de f seja n e o grau de g seja m com $n > m$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0) + (b_m x^m \\ &\quad + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 \\ &= (a_n)x^n + (a_{n-1})x^{n-1} + \ldots (a_m + b_m)x^m \\ &\quad + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

Isto é, somamos os coeficientes a_i, com $i > m$, $a_n \neq 0$ e obtemos o mesmo elemento. A partir dos $i \leq m$ teremos $a_i + b_i$.

Agora, trataremos da multiplicação. Esta operação acaba sendo extensa para polinômios de grau muito alto, mas veremos que no fim, existe uma lei de formação para toda a multiplicação inteira. Além disso, a lei permanece quase a mesma para polinômios com coeficientes em outros conjuntos. Sejam $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, temos:

$f(x).g(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0).(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$

Neste ponto, iremos aplicar a propriedade distributiva. Como os coeficientes são inteiros (e o conjunto inteiros é anel) é condizente aplicarmos a distributiva.

$f(x).g(x) = (a_n x^n b_m x^m + a_n x^n b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_n x^n b_1 x^1 + a_n x^n b_0 + (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0).(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0 = (a_n b_m x^{n+m} + a_n b_{m-1}x^{n+m-1} + \cdots + a_n b_1 x^{n+1} + a_n x^n b_0 + (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0).(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0)$

Observando a distributiva do primeiro monômio de $f(x)$ pelo polinômio $g(x)$ podemos deduzir a lei de formação para $f(x).g(x)$:

$$f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i.b_j\right).x^k$$

Isto significa que o produto entre dois polinômios de coeficientes inteiros é igual ao somatório do produto de cada coeficiente de $f(x)$ e $g(x)$ que vão de 0 a $m+n$ (que é o grau do polinômio dado pelo produto desses dois) vezes a indeterminada x elevada a soma dos índices desses coeficientes.

Exemplo 1.1 Sejam $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Pela fórmula acima, temos que o produto entre esses dois polinômios será:

$$f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{3+2}\left(\sum_{5=k} a_i.b_j\right).x^k$$

$$= (2.4)x^5 + (2.3 + 3.4)x^4 + (4.4 + 3.3 + 2.2)x^3 + (4.3 + 2.3 + 2.1)x^2$$

$$+ (3.1 + 2.4)x + (4.1) = 8x^5 + 18x^4 + 29x^3 + 20x^2 + 11x + 4$$

Após definir as operações sobre o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros, podemos mostrar que esses obedecem às regras para se tornarem um anel.

O elemento neutro de $\mathbb{Z}[x]$, para a adição é $f(x) = 0$. O oposto da adição é:

$$g(x) - g(x) = 0 \rightarrow$$

$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ e

$$-g(x) = -(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0)$$

$$= -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_m x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \ldots - a_1 x^1 - a_0$$

A identidade para a multiplicação, isto é, elemento neutro da multiplicação, é $f(x) = 1$.

Logo, temos as proposições.

Proposição 1.2 Sejam $f(x)\ e\ g(x)$, polinômios com coeficientes inteiros com grau *n* e *m,* respectivamente, temos que o produto de $f\ e\ g$ terá grau igual a $n+m$, isto é:

$$deg\ (f.g)\ =\ deg\ f\ +\ deg\ g$$

Demonstração: A demonstração pode ser feita pelo produto de dois polinômios $f\ e\ g$ em F (anel ou corpo).

■

Definição 1.3 Suponha que *f* seja um polinômio com coeficientes em um anel R, uma raiz θ de f é um elemento que pode se encontrar em um anel maior do que R tal que θ é a solução para o polinômio f, ou seja, $f(\theta)=0$.

Definição 1.4 Um polinômio $f(x)$ de grau maior do que zero é chamado irredutível se $f(x)\ =\ g(x).h(x)$ para $g,f\ \in\ F[x]$, em que F é um corpo, implica que $g\ ou\ h$ tem grau nulo. Caso contrário ele é redutível.

Definição 1.5 Um polinômio é chamado *mônico* se o coeficiente da maior potência dele é 1 (um).

Definição 1.6 Seja $f\ \in\ F[x]$ tal que $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$, dizemos que o *termo líder* do polinômio f é o primeiro termo, ou seja, a_nx^n. Notação $tl(f)\ =a_nx^n$.

Teorema 1.6 (Teorema do Algoritmo de divisão para Anéis de Polinômios) Sejam $f(x),g(x)\ \in\ F[x]$ com $g(x)$ não nulo, existem $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

$$f(x)\ =g(x).q(x)+r(x),\quad com\ deg\ r\ <\ deg\ g\ ou\ r=0$$

Demonstração: (Existência) Nesta proposição apresentam-se três casos:

Caso 1: $f(x)\ =0$. Neste caso, teremos que $f(x)\ =\ r(x)\ e\ g(x).q(x)=0$.

Caso 2: $f\ \neq\ 0\ e\ deg\ f\ <\ deg\ g$. Neste caso, podemos tomar $f(x)\ =\ r(x)\ e\ q(x)\ =0$ que teremos:

$f(x)\ =g(x).0\ +\ r(x)\Leftrightarrow\ f(x)\ =\ r(x)$.

Caso 3: $f \neq 0 \, e \, deg \, f \geq deg \, g.$ Este é o caso mais complicado de se demonstrar, diga-se de passagem, devemos demonstrar por indução: Considere um polinômio h tal que:

$$h = f - \frac{tlf}{tlg} g$$

Se $h = f - \frac{tlf}{tlg} g = 0$ temos que $f = \frac{tlf}{tlg} g$ e podemos considerar $q = \frac{tlf}{tlg}$.

No caso que $h \neq 0$ temos que:

$$deg \, (f - \frac{tlf}{tlg} g) < deg \, f$$

E por hipótese de indução, existem polinômios $q' \, e \, r'$ tais que:

$$f - \frac{tlf}{tlg} g = q'.g + r',$$

com $deg \, r' < deg \, g,$ temos:

$$f = (q' - \frac{tlf}{tlg}) g + r'$$

fazendo $r = r' \, e \, q = (q' - \frac{tlf}{tlg}) g$ temos a demonstração.

■

Corolário 1.7 Suponha que F é um corpo e $f(x) \in F[x]$. Então $f(a) = 0$, com $a \in F$ se, e somente se, $f(x) = (x - a)q(x)$, com $q(x)$ *pertencente a* $F[x]$.

Demonstração:

$(=>)$ Pelo algoritmo da divisão de polinômios, temos que $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$, pelo teorema 1.6, temos que $deg \, r < deg \, g$, como $deg \, g = 1, deg \, r < 1 \; ou \; deg \, r = 0.$ Pela hipótese, $f(a) = 0$ o que implica que $f(a) = (a - a).q(a) + r = 0 => r = 0.$

$(<=)$ Suponha que *a* não seja tal que $f(a) = 0$, por hipótese temos que $f(x) = (x - a).q(x) => f(a) = (a - a).q(a) \neq 0$ o que é absurdo pois para $a \in F$, F anel, $(a - a) = 0$. Portanto, $f(a) = 0$.

■

Corolário 1.8 Supondo que $f \in F[x] \, e \, deg \, f = n.$ Então f tem no máximo n raízes, contando a multiplicidade de $(x - a)^k$.

Demonstração: Pelo corolário $f(a) = 0$ logo, pelo corolário anterior, $f(x) = (x-a)q(x)\ e\ deg\ f = n = 1 + deg\ q => deg\ q = n - 1$. Para concluir, devemos fazer a demonstração para $k - 1\ e\ k$.

■

Corolário 1.9 Todo ideal em $F[x]$ é principal se F é corpo.

Demonstração: Seja A um ideal de $F[x]$. Se $A = \{0\} =< 0 >$, as condições já são satisfeitas. Agora, seja $f(x) \in A$ de grau mínimo, provaremos que $A =< f >$. Suponha que exista um $h \in A$ pelo algoritmo da divisão, existem $q, r \in F[x]$ únicos tais que $h = fq + r$, como $deg\ r < deg\ f$ ou $r = 0 => r = h - qf \in A$, o que contradiz a hipótese de minimalidade de f, ao menos que $r = 0$, nesse caso, $h \in < f > e\ A =< f >$.

■

Corolário 1.10 As afirmações sobre $F[x]$ a seguir são equivalentes:

1. O conjunto formado por todos os polinômios gerados por $f(x)$ é um ideal maximal;
2. $f(x) \in F[x]$ é irredutível;
3. O *quociente* entre o conjunto $F[x]$ e o conjunto formado pelos polinômios gerados por $f(x)$ é um corpo.

Demonstração:

$(1 => 2)$ Assuma que $< f >$ é um ideal maximal. Se $f = g.h\ para\ g, h \in F[x]$ tais que $g\ e\ h$ não sejam unidades, então $< f > \subset < g > \subset < 1 > = F[x]\ e < f > \subset < h > \subset < 1 > = F[x]$, o que contradiz a hipótese de maximalidade de $< f >$.

$(2 => 1)$ Suponha que f seja irredutível. Sabemos que, pelo corolário anterior que todo ideal em $F[x]$ é principal. Qualquer ideal contendo $< f >$ deve estar na forma de $< g >$ isto é, $f = g.h$, para $h \in F[x]$, mas a irredutibilidade de f nos diz que $g\ ou\ h$ deve ser uma unidade. Assim, temos que se g é unidade $g = F[x]$ ou se h é unidade, $< g > =< f >$, assim, $< f >$ é ideal maximal.

$(3 => 1)$ Suponha que $F[x] / < f >$ seja um corpo. Se $< g >$ é um ideal tal que $< f > \subset < g > \subset F[x]$, mas $< g > \neq < f >$, precisamos mostrar que $< g > = F[x]$. Se $< g > \neq < f >$ existe $h \in < f > - < g > o$ que implica que $< h > \neq < 0 >$ em $F[x] / < f >$. Como $F[x] / < f >$ é um corpo podemos assumir

que existe $p(x) \in F[x] / < f >$ tal que $h.p = 1 => h.p - 1 \in < f > => h.p - u = 1$, para $u \in F[x]$. No entanto, por $< g >$ ser um ideal que contém $< f >$ também contém *p* e *u* o que implica que $1 \in < g >$, assim, para qualquer $r \in F[x]$ temos $r.1 = r \in < g > => < g > = F[x]$. Portanto, $< f >$ é ideal maximal.

$(1 => 3)$ Suponha que $< f >$ é ideal maximal. Precisamos mostrar que $F[x]/< f >$ é corpo. Para isso, suponha exista $a \in F[x]/< f >, a \neq 0$, precisamos encontrar $a^{-1} \in F[x]/< f >$. Para isto, observe o ideal $< g >$ gerado por $< f > e\, a$. Isto é, $< g > = \{u + r.a / u \in < f > e\, r \in F[x]\} = < F[x], a >$ $, então < f > \subset < g > \subset F[x]$. Sabemos que $< f > \neq < g >$. Como por hipótese, $< f >$ é maximal, temos que $< g > = F[x]$. Assim, temos que $1 \in < g >$. Então $1 = u + ra$ para $u \in < f > e\, r \in F[x]$, o que implica que $[r].[a] = [1] => [r] = [a]^{-1}$.

■

Corolário 1.11 Seja $f(x) \in F[x]$ um polinômio de grau 2 ou 3 e F um corpo, f é redutível se existir um $c \in F$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração:

$(=>)$Pela hipótese, $f = gh$, para $g, h \in F[x]$ em que g ou h tem grau 1. Sabemos que $deg\, f = deg\, g + deg\, h$ e $2 = 1 + 1\, ou\, 3 = 2 + 1$, que são as únicas possibilidades para f de grau 2 ou 3. Assim podemos pegar uma das fatorações. Seja $g(x)$ mônico e linear (pelo que foi dito de $g\, ou\, h$ de grau 1) temos $g(x) = x - c\, para\, c \in F[x]$. Assim $f(x) = (x - c)h(x) => f(c) = 0$.

$(<=)$ Se $f(c) = 0$, então, pelo corolário 1.7, $(x - c)$ divide f.

No próximo capítulo, traremos uma breve exposição do que foi a aplicação das atividades e uma contextualização para a análise dos dados.

5 CONTEXTUALIZAÇÃO DAS AULAS

A turma da disciplina de Estruturas Algébricas é composta por onze discentes do curso de Licenciatura em Matemática. Desde o início do semestre (outubro de 2020), as aulas da disciplina foram realizadas de forma remota e ministradas pelo professor via Google Meet, em razão da pandemia da Covid-19.

Eu acompanhei, sempre que possível, as aulas de forma síncrona e, desde o começo, foi possível ir entendendo como se dava a participação dos alunos nas aulas. Geralmente, nas aulas presenciais (e tradicionais) o professor explica o conteúdo e a participação dos estudantes se resume a fazer questionamentos e responder ao professor quando ele se direciona aos discentes. Pode-se dizer que, nas aulas remotas, a dinâmica das aulas ocorreu da mesma forma.

Em princípio, como ocorre naturalmente na atuação docente, o plano de aula apresentado na seção anterior foi elaborado antes das aulas serem ministradas, assim como o conteúdo, o referencial teórico e os problemas, que foram elaborados muito antes da aplicação da atividade. Cabe aqui explicitar se as expectativas foram alcançadas em relação ao que foi pensado e elaborado.

Antes de tudo, vale destacar o contexto no qual se deram as aulas. O fator chave aqui foi a pandemia de COVID-19 e seus efeitos sobre a educação superior. Como citado anteriormente, este trabalho foi pensado para o ensino presencial, no entanto, teve de ser modificado para o “novo normal”, isto é, as aulas remostas. Entretanto, este não foi o único impacto da pandemia sobre o trabalho. Sua aplicação, primeiramente, estava planejada para o começo ou metade do segundo semestre do ano letivo, mas com o atraso do semestre – dado pelo planejamento da universidade diante da nova realidade – a aplicação acabou sendo adiada. Com o adiamento, a previsão era de que a primeira aula deveria ocorrer na primeira metade do mês de janeiro de 2021.

A data não era perfeita, mas era ideal para o cenário: os estudantes já estariam “assentados” no novo ano, provavelmente em casa pela pandemia e já prontos para a nova etapa do semestre. No entanto, outro imprevisto ocorreu. Na primeira metade do mês de dezembro de 2020, o docente responsável pela disciplina adoeceu e teve que se ausentar das aulas. Assim, em situação excepcional, pediu para que a aplicação do projeto fosse adiantada para 15 de dezembro – uma semana antes do recesso de natal\ano novo. Os estudantes não

estavam acostumados a ir tão “longe” no semestre e, por isso, já estavam cansados do ano letivo e das dificuldades que a pandemia, a suspensão das aulas presenciais e o ensino remoto havia imposto a eles.

Para estimular e motivar os estudantes a participar da atividade, o docente da disciplina disse aos alunos que consideraria a possibilidade de atribuir nota à atividade. Dessa forma, a nota da atividade, proveniente da avaliação contínua da metodologia proposta, poderia ser utilizada como nota de trabalho da disciplina (equivalente a dez por cento da nota final dos estudantes no semestre). Segundo o docente, esta estratégia iria estimular os estudantes a participarem da atividade, mesmo sendo realizada no final do mês de dezembro de um dos anos mais difíceis da vida dos alunos. Contudo, essa expectativa não se concretizou. Na primeira aula, do dia 15 de dezembro, apenas quatro estudantes participaram da atividade.

O primeiro dia de aplicação começou com uma apresentação geral da atividade. O docente responsável pela disciplina participou somente dos primeiros minutos de chamada. Na primeira sala virtual, a da disciplina em si, em que ocorreram os primeiros passos da Resolução de Problemas, havia oito alunos inicialmente, mas, no decorrer da apresentação, este número foi reduzindo, até que na fase de separação dos grupos, havia apenas quatro estudantes. Vale pontuar que, nesse dia, houve instabilidade nos servidores do Google Meet – na fase da resolução dos problemas, essa questão também atrapalhou a minha entrada nas salas dos grupos para tirar dúvidas, mediar e avaliar. No entanto, a participação em ambos os grupos foi bastante satisfatória.

No dia 17 de dezembro foi o segundo dia de aplicação da atividade. A primeira chamada, a da disciplina em si, começou com a participação de quatro alunos – novamente, os mesmos que participaram dos grupos A e B na aula anterior. Contudo, quando estes foram redirecionados as suas respectivas chamadas, a videochamada do grupo B permaneceu vazia por oito minutos, até que apenas uma estudante entrou na sala. Neste momento, me vi diante de uma situação imprevista: se não houvesse estudantes suficientes para a aplicação da metodologia, isso poderia afetar diretamente o desenvolvimento da atividade, pois conjecturei que um grupo com apenas um estudante não alcançaria o grau de resolução do outro grupo, comprometendo assim as demais fases metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas. Considerando estes aspectos, depois de aguardar por x minutos os

demais alunos do grupo B na chamada, em consenso com os alunos, a aula foi adiada para o dia 22 de dezembro – apenas três dias antes do natal.

A situação que ocorreu na aula do dia 17 foi relatada ao docente da disciplina. Com isso, o docente resolveu oficializar a atividade como trabalho e acrescentar a avaliação à nota final dos estudantes. Este posicionamento refletiu sobre a atitude dos alunos, que participaram da atividade na segunda aula em número satisfatório.

No dia 22 de dezembro, seis alunos estiverem presentes na aula remota. Os estudantes foram orientados a escolherem novos grupos, para recomeçarmos o desenvolvimento da atividade, dando oportunidade aos dois novos estudantes de participarem da resolução dos problemas e, aos que já estavam presentes na aula anterior, de orientar e tomar frente na resolução dos problemas propostos. Ao final desta aula, os grupos A e B conseguiram, com cálculos mentais segundo seus relatos, chegar a uma resolução do primeiro problema proposto.

As aulas foram interrompidas em razão do recesso de fim de ano. Dessa forma, a terceira aula foi ministrada somente dia 05 de janeiro de 2021. Antecipadamente, em diálogo com o docente da disciplina, foi estabelecido que essa seria uma das últimas aulas disponíveis para a aplicação das atividades. O docente havia concordado com a realização da atividade em parte de suas aulas e já era de meu conhecimento que eu disporia de um tempo limitado, já que o professor da disciplina deveria prosseguir com o plano de ensino. Dessa forma, em conjunto com os alunos da disciplina, foi decidido que só iríamos trabalhar somente a primeira questão, já que os alunos levaram mais de duas horas para finalizar a primeira questão (contando com o tempo em que alguns dos participantes tiveram na aula do dia 15 de dezembro). Nesse tempo está também incluída a exposição das respostas escritas, a discussão e a busca do consenso entre os alunos. Se houvesse tempo, as outras questões seriam abordadas.

Na aula do dia 05 de janeiro estiveram presentes os mesmos participantes da aula anterior. Na primeira videochamada, a da disciplina em si, foi explicado que a atividade fora modificada e que agora haveria uma mudança na ordem das fases: como citado na seção anterior, a primeira ideia era de que os estudantes resolvessem todos os problemas, pois desta forma não haveria “interrupção” de pensamento, porém, para abarcar mais fases da RP, já que não conseguiríamos finalizar todos os problemas e discuti-los, seria uma melhor alternativa finalizar a resolução do primeiro problema, depois fazer uma plenária em busca do consenso

e, só então, se houvesse tempo, resolver os próximos problemas. Depois disso, os estudantes foram transferidos para as salas de seus respectivos grupos. Houve em engano e um dos alunos foi para o grupo em que estava na aula do dia 15 de dezembro, e não para o grupo que havia sido escolhido pelos seus colegas após a retomada das atividades no dia 22 de dezembro. Esse engano só foi percebido depois de uma hora de aula. Além disto, por conta do período de recesso de fim de ano, alguns alunos ainda estavam em viagem e sem o seu material, com o que havia sido desenvolvido nas aulas anteriores. Além disto, o recesso interrompeu o processo e o desenvolvimento das atividades, de modo que, na retomada das aulas, os estudantes já não se lembravam do que tinham feito previamente. Ou seja, muitos raciocínios e ideias tiveram de ser retomadas, agora em ritmo mais acelerado, para que as respostas fossem escritas a tempo para a discussão naquele dia ainda. Ao final deste dia, os estudantes conseguiram, por meio de mediação e incentivo constante, resolver o problema um, escrevê-lo e enviar para que fosse discutido. Houve então uma discussão, mas um consenso a respeito das resoluções não foi alcançado.

No quinto e último dia de aplicação do método, dia 07 de janeiro, o conhecimento trabalhado na questão um foi oficializado por meio de uma aula expositiva. Os poucos equívocos cometidos pelos estudantes foram solucionados e o conteúdo foi formalizado. Esta aula teve a presença e o auxílio do docente da disciplina, que complementou com excelência - por meio de comentários pontuais – a oficialização do tema (Anel de Polinômios com Coeficientes Inteiros).

Iremos nos referir aos participantes da disciplina da seguinte forma: *Mediador, Estudante 1, Estudante 2, Estudante 3, Estudante 4,.., Estudante 11* os indicando nos trechos apresentados por *M, E1, E2,..., E11*.

5.1 A BUSCA DO CONSENSO

Com as mudanças relatadas neste capítulo, a fase da plenária foi feita apenas para as resoluções escritas dos estudantes. A plenária ocorreu na mesma aula em que os estudantes terminaram de resolver o problema um. Os participantes se reuniram em uma sala de videoconferência. Ao entrar na sala, expliquei como deveria ser realizada a atividade:

> M: Eu vou colocar aqui as duas resoluções, pra cada grupo ver. Tem um aqui em pdf e tem um aqui em imagem né? Agora, eu vou apresentar a minha tela. Pronto, vocês estão vendo? Bom, aqui temos duas resoluções… Deixa dar um "zoom" aqui, por que tá difícil de ver né? A resolução da esquerda é a resolução do grupo A, da direita, do grupo B. Então assim, eu vou ler primeiro a do grupo A, depois a do grupo B, e aí a gente vai jogar algumas ideias ok?

Em seguida, foi feita uma leitura em voz alta de ambas as resoluções escritas, buscando resolver qualquer dificuldade dos alunos em enxergar alguma das respostas. Após a leitura, indaguei aos estudantes do grupo B:

> M: vou começar pelo grupo B falando sobre a resolução do grupo A, vou até dar uma "aumentada" na resolução do grupo A pra dar mais foco. Grupo B, vocês têm algo a falar da resolução do grupo A? O que vocês acham dela? O que vocês mudariam ou tem algo ali que vocês acham que daria pra melhorar? De forma construtiva.

Um estudante respondeu: "*E8: Eu acho que eu mudaria essa parte da comutatividade. […] Eu acho que ficou muito vago só colocar que 'analogamente a comutatividade para a multiplicação'*". Eu considerei interessante o ponto abordado e tentei fazer que os estudantes fizessem mais comentários sobre esse ponto: "*M: É um bom ponto esse. Vocês acham que esse ponto que vocês colocaram da comutatividade, se colocado aqui, formaria uma resposta um pouco mais completa? Não quero que ninguém se ofenda aqui pessoal, é só conversar*". Um aluno respondeu

> E7: Ah, não, eu concordo, por que a nossa explicação… Minha letra tá horrorosa, porque eu fiz muito rápido, então eu fiz pra poupar tempo. Mas eu super concordo que tá bem vago, eu mesmo odeio que os professores fazem isso (risos), mas como era uma coisa bem óbvia, eu coloquei só pra poupar tempo, mas eu super concordo que a explicação deles tá mais completa e faz mais sentido.

Buscando continuar a discussão e tratar de outros aspectos, comecei a indagar os estudantes e fazer o grupo oposto refletir sobre estas indagações:

> M: O que vocês acham dessa questão aqui, da maneira que eles colocaram a resolução? De colocar o conjunto dos coeficientes aqui, vocês acham essa maneira legal? Eu quero que agora, os que fizeram essa resolução, expliquem porque que utilizaram essa notação, e eu queria saber do grupo B se eles mudariam isso. Qualquer pessoa do grupo A pode falar dessa notação.

> E7: É, o motivo na real, é por que essa é a notação mais simples e mais rápida de fazer, mas eu entendo que não é a maneira mais adequada, mas eu não sei… Mas foi mais por facilitador. Não sei exatamente o motivo…
>
> M: E o grupo B, mudaria a notação? Faria de um jeito diferente ou não?
>
> E8: Bom, eu não sei nem se eu conseguiria fazer alguma coisa né, mas essa parte do elemento neutro, pra eles colocarem o zero igual a zero, zero e zero, eles não teriam que especificar o grau que eles tão usando.

Desta forma, os estudantes do grupo A, de maneira geral, alegaram que a falta de tempo para escrever foi um dos pontos chaves para alguns aspectos de sua resolução estar incorretas. Ainda sobre as notações utilizadas, o estudante do grupo B disse:

> E1: Acho que tem até uma questão de tempo né… A gente tinha cinco questões, uma quantidade limitada de aulas e ninguém tinha muita certeza do que fazer, ninguém viu essa, esse conteúdo antes, acho que até por uma questão de tempo, tentar simplificar, o quanto mais pudesse essas notações e tudo mais, para poder ficar mais compacto e poder produzir um pouco mais.

Dando agora a palavra ao Grupo A, questionei o que eles mudariam na resolução do Grupo B. A resposta de um deles foi:

> E7: Olha, eu, no geral, não tenho dúvidas nem questionamentos, mas o que eu achei muito curioso a segunda parte da pergunta, referente ao grau do polinômio, por que eu particularmente não tinha pensado na resposta que eles nos deram, de analisar como se fosse um número, então eu achei legal a explicação deles, mas no geral é mais isso, eu achei a resolução deles ok, não vi nada de mais, não tenho mais nenhum ponto a citar, nada a levantar, não sei os outros membros do grupo.

Nesse ponto, esperei que os estudantes questionassem essa maneira de colocar a resposta, com números inteiros no lugar dos polinômios, mas, isso não ocorreu, e decidi conduzir a discussão, tentando fazer que os participantes chegassem a algumas conclusões.

> M: Alguém tem algum ponto? (...) É… tá, aqui na resolução do grupo A, como vocês caracterizariam o Z de x? Agora que vocês testaram essas propriedades, o que seria o Z de x pra vocês? Tem o elemento neutro, inverso e associatividade, esses três formam o que?
>
> E7: Um grupo?
>
> M: Isso, mais a comutatividade, e nós temos um?
>
> E1: Grupo abeliano.

> M: Isso. A associatividade para a multiplicação e a distributividade, então nós temos que ele é?
>
> E1: Anel.
>
> M: Isso! No grupo B, aqui foi testado a associatividade, aqui a existência do elemento neutro, aqui a comutatividade, que caracteriza novamente o grupo abeliano, aqui a distributiva e aqui a associatividade pra multiplicação, então nós temos uma anel também. Então os dois chegaram a conclusão de que o conjunto Z de x é um anel, agora o grupo B, ele chegou a essa conclusão, de que não existe elemento inverso para a multiplicação, então ele vai ser um anel sem inverso, uma pergunta: vocês já viram aquela propriedade do multiplico de zero? Do anel com múltiplo de zero ou com múltiplo de zero.

Analisando posteriormente a forma como tentei conduzir a discussão, acredito que utilizei mais a palavra do que os alunos. O ideal, segundo Onuchic (2017), seria apenas levantar reflexões, como fiz no começo da plenária. Dessa forma, não conseguimos chegar a um consenso sobre o problema um e nem consegui que os estudantes notassem alguns erros, como o já citado, de substituir polinômios por números inteiros. Assim, uma condução com menos interferências por parte do professor-pesquisador pode ser a ideal em alguns casos. Foi possível concluir que os estudantes reconheciam o potencial da atividade e que não conseguiram progredir por questão de tempo.

5.2 A FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

A ideia inicial era a de trabalhar a formalização do conteúdo por meio de uma aula expositiva, em que se utilizasse a História da Álgebra para construir os conceitos sobre os Anéis de Polinômios. Contudo, depois de todos os desafios e dificuldades para concluir a resolução do problema um e com as dificuldades impostas pelo ensino remoto, essa etapa da proposta não foi desenvolvida. Em alternativa, foi trabalhado de forma expositiva em uma aula (cerca de uma hora e quarenta minutos), o conceito de Anel de Polinômios com Coeficientes Inteiros. A aula foi ministrada também por meio da plataforma Google Meet e teve a colaboração do professor da disciplina, que contribuiu com questões e explicações pontuais para a exposição.

Na próxima seção, deve ser apresentada a forma com que foi feita a organização, categorização e interpretação dos dados utilizando a análise de conteúdo e a análise temática.

6 ANÁLISE DOS DADOS

Partindo de nossa pergunta “como o desenvolvimento de uma proposta de ensino de Anéis de Polinômios, por meio da metodologia da Resolução de Problemas, pode levar os alunos de uma turma de um curso de Licenciatura de Matemática a compreender de forma abrangente esse conteúdo e suas relações com os conteúdos desenvolvidos na Educação Básica?”, buscamos encontrar os códigos que fossem pertinentes ao trabalho nos extratos obtidos por meio dos dados. Depois de um trabalho de codificação e recodificação desses extratos, agrupamento por similaridade e categorização chegamos aos seguintes códigos, expostos na tabela abaixo, e nos temas que analisaremos e interpretaremos nesta etapa.

Quadro 1 – Categorias de Análise

Códigos por proximidade	**Categorias**
Incentivar os alunos\interação entre os elementos\transposição das propriedades	Experiência vivida na mediação da atividade.
Conhecimento prévio\Resolver problemas\demonstração\desconhecimento da atividade\leitura\exercício\Atividade em si	Conhecimento por parte dos alunos sobre a Resolução de Problemas
Pensar os Polinômios como números\ideia incorreta\alunos dizem que não sabem\ ideia\dúvida	Dificuldades em resolver problemas sobre conteúdos já estudados
Propriedades\elemento inverso\elemento oposto\associativa\comutativa\distributiva\id entidade\dividir por zero\nulidade\não nulidade\anel\Z de x\grau\polinômio\raiz	Compreensão das propriedades de um Anel
Adição\multiplicação\subtração\divisão\con hecimento básico\encontrar raiz\ensino médio\inteiros\coeficientes	Conexões entre o conceito de Anel e os conteúdos de polinômio do ensino básico.
Irredutível\Briot-Ruffini\Números Racionais\critério de divisibilidade	Elementos das questões não resolvidas.

Fonte: Elaborado pelo Autor

Os extratos foram codificados e recodificados em cinquenta e dois códigos que deram origem aos seis temas mostrados acima e que discutiremos em seguida. Cada um deles contribui, de alguma forma, para entender se houve a compreensão do conteúdo da disciplina e se ocorreu conexão entre os conhecimentos de Anéis de Polinômios e os de Polinômios encontrados no ensino básico. É importante enfatizar que também foram utilizadas as transcrições da fase de resolução dos problemas e da plenária para extrair os códigos e temas; as respostas escritas também servem de base para a argumentação de alguns temas abaixo, ou seja, tudo o que foi produzido pelos estudantes foi utilizado como fonte de dados para nossa análise e discussão.

6.1 EXPERIÊNCIA VIVIDA NA MEDIAÇÃO DA ATIVIDADE

Na proposta de uso da metodologia de resolução de problemas, o papel do professor é fundamental no desenvolvimento das atividades propostas. É o professor quem deve buscar incentivar os estudantes, mediando o processo e conduzindo os alunos na busca para uma solução dos problemas.

> O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõe. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. (ANDRADE E ONUCHIC, 2017, p. 440).

Dessa forma, entende-se que o a atuação do professor é um dos fatores responsáveis pelo bom desenvolvimento dos estudantes na resolução de problemas, já que sua atuação pode influenciar a compreensão dos alunos sobre a atividade, sobre o conteúdo e sobre os objetivos que se pretendem alcançar.

Assim, consideramos relevante apresentar a forma como eu, como professor-pesquisador, atuei no processo de mediação durante a aplicação da atividade.

No começo da primeira aula, foi apresentada aos alunos a atividade proposta. Os estudantes permaneceram em silêncio e, mesmo após serem perguntados sobre as dúvidas, eles não se manifestaram.

> M: Pode ficar tranquilo pessoal, não vai ser absurdo não, eu vou ajudar vocês entendeu? Por exemplo, eu me esqueci de falar; vocês vão ser redirecionados pra estas salas; lá, vocês vão resolver o problema um, por exemplo. Lá eu vou entrar de sala em sala, como se fosse um professor que tivesse indo de mesa em mesa, né? pra tirar dúvidas, pra auxiliar vocês nessas resoluções, mas claro, sem dar aquelas dicas muito óbvias; o intuito é vocês aprenderem resolvendo os problemas né? Então, podem ficar tranquilos, podem escolher as duplas;
>
> M: Tá certo. Se vocês tiverem dúvidas sobre algum conceito que eu falar aqui, vocês podem se pronunciar, certo?
> M: Alguma dúvida sobre o texto dos problemas pessoal?
> Silêncio…
> M: Bom, então eu vou prosseguir.

Na primeira fala, nota-se que há uma tentativa de incentivar os estudantes ao mesmo tempo em que se buscou tranquilizá-los frente a uma metodologia que era totalmente nova, afinal “como resolveriam problemas sobre um tema que nem estudaram ainda?” A segunda e a terceira fala se encontram no mesmo parágrafo da transcrição, isto é, são partes de uma fala ininterrupta do professor-pesquisador, em que houve a leitura dos problemas em voz alta. O silêncio dos alunos ante a pergunta “alguma dúvida?” é normal, afinal se trata de uma situação nova em que os estudantes ainda não tiveram a oportunidade de conceber ideias a respeito da atividade, o que pode ser um dos motivos do silêncio. É fundamental, antes e durante da resolução dos problemas, que os estudantes se sintam totalmente capazes de resolvê-los, desta forma, o incentivo e o ato de tentar acalmá-los são justificados.

Nos dados obtidos por meio da transcrição, após a realização da análise temática, os trechos que se referem às influencias do professor-pesquisador na condução da atividade são explicitadas pelos códigos “*incentivar os alunos*, *interação entre os elementos* e *transposição das propriedades”*.

Incentivar os alunos foi um código atribuído às falas que não ocorreram somente no início das atividades, mas também durante o processo de resolução. Por exemplo: “*M: Pessoal, vocês não precisam estar cem por cento certos; só não tenham medo de fazer; façam e ai depois uma pessoa passa a limpo da maneira que vocês acharem que tá melhor feito*”. Essa fala ocorreu quando foi percebido que os estudantes não estavam avançando no desenvolvimento da atividade por medo de errar e, como será discutido à frente, errar e ter dificuldades podem ser partes importantes do processo de resolução de problemas. Assim, fazê-los perceber que não havia problemas se eles errassem pareceu uma boa forma de incentivo naquela

hora. Essa postura foi adotada no decorrer das atividades, ou seja, mostrar que o erro faz parte do processo de buscar uma solução para o problema proposto.

Além disso, ouvir os alunos também faz parte do processo de mediação na Resolução de Problemas. Segundo D'Ambrosio (2017), "quem ouve apoia quem fala, muitas vezes, em silêncio, mas com empatia, ajudando-o a elaborar e a criar uma estrutura de saber mais útil e satisfatória" (2017, p. 111). A autora aponta três maneiras de ouvir que podem ser adotadas como postura dos professores em sala de aula:

> Alguns ouvem para avaliar e, nessas situações, estão procurando a resposta correta, valorizam-na e querem mudar o pensamento dos alunos incapazes de produzir a verdade. Outra forma de ouvir tem o objetivo de interpretar a solução do aluno. Este professor tenta compreender o que o aluno está pensando, faz a ele muitas perguntas para entender qual o seu equívoco, para então, poder criar situações que o leve a corrigir seu erro. […] uma terceira maneira de ouvir é a hermenêutica, na qual o professor ouve a voz discente, acreditando que ele próprio, professor, possa aprender algo novo. (D'AMBRÓSIO, 2017, p. 111-112)

Dessa forma, buscou-se ouvir os alunos: ao mesmo tempo em que buscávamos a compreensão dos conceitos e a conexão com os conhecimentos do ensino básico, não se podia deixar passar a oportunidade de aprender com os estudantes e entender sua maneira de pensar. Por isso, os alunos foram incentivados a não terem medo de errar, pois tanto o professor-pesquisador, quanto eles próprios poderiam aprender com os erros. Isto, com toda a certeza, foi um dos pontos relevantes da experiência vivida pelo pesquisador no decorrer da atividade.

Já os códigos *interação entre os elementos* e *transposição das propriedades*, foram utilizados pelo professor-pesquisador em falas que tinham como propósito mostrar compreensões um pouco mais "profundas" sobre as propriedades de conjuntos, isto é, falas que buscaram levar os estudantes a perceberem regras mais gerais, enquanto resolviam os problemas.

> M: É… eu quero que vocês expliquem isso, justamente isso que vocês fazem: pegar elementos dentro desses conjuntos e ver como eles interagem um com outro e continuem nesse caminho que vocês estavam indo do elemento neutro e associatividade e vai puxando essa ideia de pegar dois elementos e ver como eles interagem certo?

Considerando essa fala, um dos alunos conseguiu chegar a uma ideia interessante:

> E1: Bom, eu estava pensando agora na outra propriedade, que é a existência do elemento inverso… Mas não deu tempo de fazer nada… eu tinha pensado no que você tinha falado de ver como os elementos se interagem e aparentemente eu consegui ver um elemento inverso pra soma, mas não um elemento inverso pra multiplicação.

E, sobre a *transposição de propriedades:*

> M: O que eu quero que vocês reflitam é o seguinte: quando vocês trabalharam com módulos, por exemplo, o Z três, quais propriedades dos números inteiros ocorriam também para estes módulos? Então, por exemplo, se os números inteiros fossem considerados um grupo, quais características teriam este módulo? Ele seria um grupo também? Isso que eu estou falando se chama transposição de propriedades, certo? Que é uma coisa que eu quero que vocês reflitam… Será que as propriedades dos inteiros se repetem para os polinômios de coeficientes inteiros? Então, pensem nisso que eu falei. Deu pra entender o que eu falei?
> E1: Até que deu, acho que eu peguei a ideia…
>
> M: Essa é uma boa. Eu tinha falado pra vocês sobre a transposição das propriedades do conjunto dos inteiros para o conjunto dos polinômios. Deixa fazer uma pergunta pra vocês: no conjunto dos inteiros tem inverso multiplicativo? (…) No conjunto dos inteiros, qual a definição de inverso? É se você pegar um número e você multiplicar com outro ele tem que dar a unidade. Então assim, reflitam sobre a questão dos inteiros, dos inteiros não, dos inversos. A questão dos inversos funciona pros inteiros e se ela funciona pros inteiros ou não, elas vão funcionar pros polinômios de coeficientes inteiros?

Por fim, falar sobre a *transposição de propriedades* também levou um dos estudantes a seguinte conclusão:

> E1: Boa pergunta, tá tudo junto, eu não sei o que fiz. (…) Tá… eu fui checar as propriedades de anel, e aí o carinha ficou falando o negócio da transposição de propriedades e aí pensando nisso, pensando na transposição de propriedades, eu fui ver as seis propriedades de anel, só que assim, foi tudo na cabeça, não resolvi nada, aparentemente são todas verdadeiras.

Entretanto, ouvir sobre “transpor propriedades” também pode ter gerado uma confusão no estudante, que após ter sido orientado a refletir dessa forma, pensou em substituir as indeterminadas dos polinômios por números inteiros, transformando-os assim em números inteiros - ideia esta que deve ser abordada mais a frente.

É possível concluir, a partir da experiência vivida, que no papel de professor-pesquisador, deve-se ter cuidado ao encaminhar dicas ou levantar reflexões para os estudantes, mesmo em forma de questionamentos, pois eles podem interpretar da

maneira correta ou não, trazendo para si uma compreensão correta do conteúdo ou se distanciando dele. E essa conclusão não poderia ser alcançada se não tivéssemos assumido a posição de ouvinte construtivista (D'AMBRÓSIO, 2017).

Concluímos, a partir da experiência vivida que, ao aplicar a metodologia de ensino-aprendizado-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas o pesquisador deve focar não só no objetivo de promover a compreensão dos conteúdos, mas também na maneira de incentivar os participantes a resolver problemas sem medo de errar, fazendo questionamentos que os levem a uma compreensão mais aprofundada daquele conteúdo, sem buscar evitar o erro e as oportunidades que os erros podem fornecer para a aprendizagem.

6.2 CONHECIMENTO POR PARTE DOS ALUNOS SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As atividades propostas neste trabalho, como já citado, foram desenvolvidas com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, que é um curso de formação de professores. Nessa perspectiva, consideramos que é relevante para os alunos, em sua formação inicial, conhecer e trabalhar com diferentes metodologias de ensino, para que possam entendê-las, refletir sobre elas e, quando estiverem em sala de aula, utilizá-las em sua prática docente.

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino que é enfatizada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e pelo Currículo de Matemática do Estado de São Paulo. Nesse último documento podemos encontrar referência à Resolução de Problemas em diferentes habilidades, como por exemplo:

> (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
> (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
> (EF08MA17) Conhecer e aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas. (SÃO PAULO, 2020, p. 1-13)
>
> (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
> Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais

> de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (SÃO PAULO, 2020, p. 1-3)

Pelas referências citadas acima, percebe-se que, no Currículo, a Resolução de Problemas é vista como um meio de promover o desenvolvimento de diferentes habilidades de Matemática.

A Base Nacional Comum Curricular também cita que os alunos devem resolver problemas no ensino básico, assim como formulá-los:

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (BRASIL, 2019).

Tanto a BNCC quanto o Currículo Paulista são documentos que devem ser conhecidos e estudados pelos licenciandos em Matemática e, consequentemente, a Resolução de Problemas é uma das metodologias que devem ser foco dos conteúdos abordados durante o Curso de Licenciatura, já que tal metodologia é enfatizada pelos documentos citados. Dessa forma, é importante que o aluno do Curso de Licenciatura em Matemática tenha a capacidade de reconhecer e diferenciar diferentes metodologias de ensino, tendo compreensão de como deve ser conduzido o processo de ensino-aprendizagem em cada uma delas.

> E1: Então, a ideia é a gente resolver utilizando nossos conhecimentos que a gente tem até agora, o que é um anel, o que é um corpo e o que a gente viu no ensino médio e tentar resolver…
> E9: Não tem grupo no ensino médio (risos), não tem nada no ensino médio;
>
> E1: Então… esse é o problema, não tem nada falando desse polinômio ainda, por que esse é o intuito do negócio, é a gente aprender a partir dos problemas;
>
> E9: Aí ele tinha que resolver isso com a gente, a gente não sabe, vai demorar se a gente ficar aqui pensando, a gente vai ficar se sentindo mais burra ainda;
>
> E9: ó, o Mediador postou uma lista no classroom com cinco exercícios, e daí a gente tem que resolver esta lista… em grupo, e ai no caso eu, você e

> o estudante 1…
> E3: Mas são os cinco exercícios pra agora?

Os dois primeiros extratos mostram que o *Estudante 1* compreendeu o que deveria ser feito nessa etapa da atividade, ou seja, que os problemas deveriam ser resolvidos utilizando os conhecimentos prévios e buscando fazer conexões com os conteúdos do ensino básico. Além de entender o objetivo da atividade proposta, ele também soube explicar para os seus colegas de grupo como essa deveria ser feita.

Já os dois últimos trechos expõem o desconhecimento dos alunos sobre a proposta do trabalho com Resolução de Problemas, pois um aluno diz que o professor deveria ajudá-los a resolver o problema e o outro chama os problemas de exercícios. Ainda que não tenha sido explicada aos alunos a diferença entre problema e exercício, buscamos deixar explícito que eles deveriam construir seu próprio conhecimento, conforme relatado pelo *Estudante 1*, nos trechos iniciais.

A fala transcrita do *Estudante 9* mostra sua dificuldade em trabalhar com uma atividade de Resolução de Problemas, por considerar que não iria conseguir concluir a atividade sozinha e que precisaria de dicas e da ajuda do professor. De fato, como aponta Van de Walle (2009):

> Construir e compreender uma nova ideia requer pensar ativamente sobre a mesma. E pensar em “Como isso se ajusta ao que eu já sei?” e em “Como eu posso compreender isso em face de minha atual compreensão dessa ideia?”. As ideias matemáticas não podem ser “despejadas” em um estudante passivo. As crianças devem estar mentalmente ativas para que a aprendizagem aconteça. Nas salas de aula, as crianças devem ser encorajadas a refletir sobre as novas ideias, a trabalhar para ajustá-las às redes conceituais existentes e desafiar suas próprias ideias ou as ideias de outros. (VAN DE WALLE, 2009, p. 43).

O livro de Van de Walle é voltado para a Matemática do Ensino Fundamental, contudo, o autor diz em outro trecho que suas palavras servem para todas as idades de estudantes. O que foi descrito por Van de Walle pode nos mostrar que o *Estudante 1*, ao contrário do *Estudante 9*, entendeu o que era esperado dele e pensou ativamente sobre sua ideia. Esse aspecto talvez tenha contribuído para ele construir uma resolução, guiar seus colegas e influenciá-los a respeito de sua ideia (de se atribuir um número inteiro a indeterminada do polinômio, a fim de que ele se tornasse um inteiro). Porém, apesar de compreender a atitude esperada dele na realização da atividade, o *Estudante 9* construiu uma resolução que não levou a uma compreensão correta de Anéis de Polinômios e nem estabeleceu conexões entre o

conteúdo trabalhado e os conhecimentos do ensino básico – esse aspecto é discutido no tema *Dificuldades em resolver problemas sobre conteúdos já estudados*. Assim, entender o que era esperado no desenvolvimento da atividade pode ter sido um dos fatores que levaram o Estudante 1 a elaborar uma resolução para o problema, contudo, isso não levou o aluno a construir novos conhecimentos e nem a estabelecer conexões entre os conteúdos do ensino básico e os da disciplina de Estruturas Algébricas.

Já o Estudante 9 não compreendeu que deveria construir seu próprio conhecimento, o que o levou a não levantar argumentos que tenham contribuído para a discussão durante o desenvolvimento da atividade, o que pode nos mostrar que ele não pensou ativamente em alguma ideia. Desse modo, pode-se concluir que quando o aluno entende o que é esperado dele, ele conseguirá construir um raciocínio para resolver o problema, diferente do aluno que não sabe o que é esperado.

Depois que passaram pelos passos da Resolução de Problemas e chegaram até o final da atividade, podemos conjecturar que os estudantes tenham compreendido, em algum nível, o processo de trabalho dessa metodologia.

6.3 DIFICULDADES EM RESOLVER PROBLEMAS SOBRE CONTEÚDOS JÁ ESTUDADOS

Comumente ouvimos, por parte dos professores, nos diferentes níveis de ensino, que os alunos apresentam dificuldades básicas em relação a conhecimentos de conteúdos já estudados ou que estão no currículo de anos anteriores. Tal aspecto deve ser considerado pelos pesquisadores da área de metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, quando se tem a proposta de que se utilizem os conhecimentos prévios para construir um novo. Contudo, neste trabalho, por desenvolvermos nossa proposta em uma disciplina que é ministrada para estudantes no terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, conjecturamos que as dificuldades provenientes do ensino básico, como a manipulação e operações com polinômios (aqui cabem as operações de adição, multiplicação, conceito de raiz e de conjunto singulares destes elementos matemáticos), já tivessem sido superadas.

Entretanto, ao contrário do que esperávamos, dificuldades em conceitos anteriores permaneceram nos estudantes que cursam Estruturas Algébricas II e influenciaram a maneira como eles resolveram os problemas propostos. Essas dificuldades foram diferentes para cada aluno, uma vez que, cada um, carrega consigo um *background* na Matemática e, dentro de uma sala de aula – mesmo com poucos alunos como no curso de Licenciatura em Matemática – esses variados *backgrounds* se transformam em uma diversidade entre os estudantes.

> Talvez um dos maiores desafios para os professores, atualmente, seja atingir todos os alunos em suas salas de aula cada vez mais diversas. Todo professor enfrenta esse dilema porque toda sala de aula contém uma variedade de habilidades e *backgrounds* de seus alunos. […] De maneira interessante e talvez surpreendente para alguns, a abordagem de ensino baseada na resolução de problemas é o melhor modo para ensinar matemática e atender à diversidade de estudantes. [...] Ao contrário, em uma lição tradicional, altamente dirigida, é assumido que todos os alunos compreenderão e usarão as mesmas abordagem e ideias. Aqueles que não estão prontos para compreender as ideias apresentadas têm que focar sua atenção em seguir as regras ou orientações do professor de uma maneira instrumental. Isso, é claro, conduz a infinitas dificuldades e deixa muitos estudantes para trás ou com grave necessidade de recuperação. (VAN DE WALLE, 2009, p. 85).

Dessa forma, há dificuldades em se construir um edifício sobre alicerces comprometidos, ou seja, as dificuldades dos estudantes em conhecimentos prévios influenciaram seu desempenho na resolução dos problemas propostos. Segundo Van de Walle (2209), a metodologia de Resolução de Problemas se sobressai às tradicionais no aspecto de que, quando formulado corretamente, o problema pode deter mais de um ponto de partida, o que permite que os estudantes “utilizem modelos com os quais estejam familiarizados” (VAN DE WALLE, 2019, p.85), assim criando suas próprias regras e técnicas para utilizar os conceitos que já conhecem e resolver o problema.

Nesse sentido, cabe aqui avaliar o problema que foi resolvido pelos dois grupos, o problema um. “Quais e quantas propriedades você consegue encontrar para o conjunto $\mathbb{Z}[x]$? O grau do polinômio influencia?”.

Os alunos foram avisados, logo no começo da primeira aula: “É… bom, como eu disse, esses problemas foram elaborados de uma maneira que vocês consigam resolver mesmo não tendo assistido à aula, essa é a proposta da Resolução de Problemas… é utilizar os conhecimentos que vocês já têm pra criar um novo”. Dentre os principais pontos de partida possíveis para a resolução do problema, dois

merecem destaque pela sua aderência ao objetivo da atividade: começar provando que as operações de adição e multiplicação são bem definidas no conjunto $\mathbb{Z}[x]$ – o que poderia ser feito utilizando-se ferramentas presentes no ensino básico – ou pelos conteúdos aprendidos nas disciplinas de Estruturas Algébricas I e II, isto é, as propriedades que caracterizam os conjuntos estudados nessas disciplinas. Dessa forma, havia mais de um ponto de partida e pensava-se que os problemas levariam a compreensão do conteúdo de Anéis de Polinômios e a conexão entre os conhecimentos da disciplina e do ensino básico. Entretanto, algumas dificuldades surgiram por parte dos alunos para relembrar os conteúdos já estudados - essas que, por sua vez, serão mostradas a seguir.

Uma primeira dificuldade que pode ser percebida por meio dos dados obtidos foi o erro em se compreender/pensar nos polinômios como números, que foi o posicionamento de um estudante e que, no decorrer das discussões do grupo, acabou sendo aceito pelos demais participantes da atividade:

> Estudante 1: “Como eu considerei todo e qualquer polinômio como número inteiro, pela hipótese de que x corre em Z, então os graus não influenciam, por que todo e qualquer polinômio vai ser um número inteiro”;
> Estudante 1: “É, pensando naquela ideia de, ao invés de olhar as expressões dos polinômios, aplicar num certo x e ver como número inteiro, eu consegui provar as propriedades de anel. Sempre usando a ideia de sempre ver como números inteiros”.

Esse erro pode ser oriundo de uma interpretação errada da definição de polinômios. Em momento algum, na atividade, foi citado o conjunto de origem das indeterminadas dos polinômios - no caso mais usual, seriam os números reais ou os complexos – apenas havia sido especificada a origem dos coeficientes dos polinômios em questão.

No trecho “*Estudante 1: (risos) é assim, que eu to imaginando… esse Z de x deve ser o conjunto dos polinômios onde os coeficientes estão em Z… e aí, aquelas propriedades que ele tá falando são aquelas coisas de anel, de corpo… aquelas coisas tudo…”* percebemos que o aluno tinha uma compreensão desse conjunto. Então, a pergunta que fica é “como uma concepção correta se transformou em uma incorreta?”. Uma possível resposta pode ser a dificuldade de aplicar conteúdos já estudados em contextos diferentes.

É importante destacar que por pensar os polinômios como números, o estudante não pensou na possibilidade de trabalhar com os polinômios como um conjunto diferente dos conjuntos numéricos e que possuem elementos conhecidos, multiplicando potências de elementos desconhecidos (que por sua vez, não podem ser ignorados), “pulando” a parte (importante) de definir como se dão as operações com os polinômios, que poderiam o levar para uma abordagem mais próxima da abordagem acadêmica do conteúdo de Anéis de Polinômios. Esse conhecimento sobre as operações com polinômios é trabalhado pela primeira vez ainda no ensino básico, no 7º ano (e se estende pelos anos seguintes até o final deste nível de ensino), em que é abordada a “soma dos coeficientes de variáveis com a mesma potência” e também a multiplicação de dois polinômios de forma “distributiva”. Essas duas propriedades poderiam ser utilizadas como ponto de partida para a resolução do problema, mas o estudante optou por substituir as indeterminadas por números inteiros, o que tornou “mais prática”, porém errônea, a demonstração das demais propriedades de Anéis. O ideal seria demonstrar as propriedades daquele conjunto de acordo com uma (ou duas) operação(ões) que deve(m) ser bem definida(s). Assim, é possível afirmar que, considerando os polinômios como números inteiros para se demonstrar as propriedades de Anéis, ocorreu uma dificuldade em utilizar estes conhecimentos anteriores do ensino básico, relacionados a polinômios, bem como conceitos ligados à Álgebra, vistos nas disciplinas de Estruturas Algébricas I e II, para resolver o problema um.

Um último ponto interessante é que *pensar polinômios como números* esteve presente até na resolução escrita de um dos grupos, que por sua vez trataram de forma correta e, aparentemente, sem maiores dificuldades as propriedades que definem um Anel.

Outro código presente no tema é o de *ideia incorreta* que, na maior parte das falas em que foi atribuído, apareceu junto ao código discutido anteriormente, reforçando a ideia de que as *ideias incorretas* podem ser persistentes. Contudo, existem extratos em que *ideias incorretas* apareceram separadas da ideia de se atribuir ao polinômio um número inteiro:

> E5: ‘Ao tratar de conjuntos numéricos… unidimensional… aqueles tratando sobre um espaço vetorial R n… Pode ser usado como exemplo para qualquer subconjunto de R que são subconjuntos amplos de R… Que tem inverso multiplicativo…;
> E2: Como assim só na intersecção dos naturais vocês falam?

> E5: Não tem aquele desenho que a gente faz que fala que A tá com intersecção com B?
> E5: Então seria união e intersecção.
> E2: Então, só que aqui fala “o grau do polinômio influencia”? Então acho que tem algo a ver com polinômios, mas não sei o que ele quer dizer, estou “encucado” com isso.

Aqui é possível entender como os estudantes frequentemente geraram ideias incorretas para tentar chegar a uma resposta satisfatória do problema. É interessante notar que os conceitos de R^n, Espaços Vetoriais, União e Intersecção são conceitos presentes em disciplinas que tradicionalmente são cursadas pelos estudantes em semestres anteriores a Estruturas Algébricas II. Os dados nos mostram que há certa confusão na hora de selecionar quais os conhecimentos prévios podem ser aplicados na resolução do problema. Entretanto, vale enfatizar que procurar e achar possibilidades que não sejam adequadas para o problema são parte do processo de resolução.

Por muitas vezes, os estudantes relutaram no processo de resolução do problema (alguns até o fim), declarando por diversas vezes que não sabiam o que deveria ser feito. Pode-se atribuir duas razões a este tipo de posicionamento pelos alunos, o primeiro é de que eles sentiam dificuldades em (co)relacionar os conhecimentos prévios a fim de se obter uma resposta; e segundo, que estes possuem fortes dificuldades em se resolver problemas. Abaixo há exemplos de trechos que mostram essa relutância:

> E9: Boa noite! Só pra ficar registrado, não sei nada (risos).
> E1: Pra ficar registrado, somos dois (risos);
> E9: Não tem grupo no ensino médio (risos), não tem nada no ensino médio;
> E9: Essa gravação a gente vai ter que enviar pra você?
> M: Sim, pois vou precisar transcrever ela, mas eu não vou….
> E9: (risos) só vai ter eu falando que não sei fazer;
> E5: Você ainda tá tentando fazer a quatro?
> E2: Sim, mas não consegui formular não;
> Estudante 1: Você chegou a pensar nos problemas? Nesse meio tempo aí.
> E9: (risos) só nos problemas da minha vida…

No entanto, apesar dos alunos dizerem com frequência que não estavam conseguindo resolver ou que não sabiam fazer a atividade, eles acabaram realizando a atividade.

Com o que foi exposto até aqui, podemos entender mais sobre as dificuldades que se apresentam no processo de se resolver problemas de conteúdos já

estudados. As dificuldades podem ser profundas e se manifestar de formas diferentes, ao mesmo tempo em que são parte do processo de resolução do problema e fundamentais para o desenvolvimento de ideias.

Neste tema buscamos entender as dificuldades dos alunos ao mesmo tempo em que procuramos identificar as influências dessas dificuldades no resultado final. Podemos afirmar que os erros fazem parte do processo de aprendizagem e, no caso desses alunos, foi possível perceber que as dificuldades foram superadas:

> E5: Então seria união e intersecção.
> E2: Então, só que aqui fala “o grau do polinômio influencia?” Então, acho que tem algo a ver com polinômios, mas não sei o que ele quer dizer, estou “encucado” com isso…” [os estudantes do grupo ficaram, aproximadamente, dois minutos de silêncio e mudaram de assunto]
> E5: A divisão dos polinômios não seria uma propriedade?
> E2: Acredito que sim, se a gente trabalhar divisão... que mais dá pra fazer com polinômio? Dá pra somar, subtrair e multiplicar também.

Isso nos mostra que houve uma superação e substituição daquela ideia incorreta por uma nova, que pode estar correta. Van de Walle (2009), se referindo à rede de ideias que formam o aprendizado da perspectiva construtivista, afirma:

> Conforme ocorre a aprendizagem as redes são reorganizadas, acrescidas ou, em caso contrário, modificadas. Enquanto houver pensamento ativo e reflexivo, os esquemas estão constantemente sendo modificados ou mudados de modo que as ideias se ajustem melhor com o que já é conhecido (VAN DE WALLE, 2009, p. 43).

Ao resolver e discutir o problema um, os estudantes demonstraram que conseguiram superar algumas ideias e conhecimentos anteriores que não contribuiriam de forma satisfatória para a compreensão dos conteúdos da disciplina. Entretanto, ao mesmo tempo, insistiram, de forma incorreta, na ideia de substituir a indeterminada por um número inteiro, o que não trouxe um desenvolvimento que culminou numa resolução satisfatória em relação à boa definição das operações do conjunto Z[x] e que, consequentemente, não possibilitou o estabelecimento de conexões entre os conteúdos da disciplina e os conteúdos do ensino básico.

6.4 COMPREENSÃO DAS PROPRIEDADES DE UM ANEL

A construção do conceito e da compreensão de Anéis de Polinômios depende

tanto do conhecimento do ensino básico relacionado aos polinômios quanto aos conceitos de Anéis. Nesta categoria vamos analisar a compreensão dos estudantes e o que foi desenvolvido nas atividades, em relação aos conceitos de Anéis, relacionados a compreensão do conteúdo estudado, Anéis de Polinômios, isto é, o conjunto dos polinômios que se caracterizam como Anel.

No caso do problema 1, único a ter sido trabalhado de forma integral com os alunos, foi abordado o conjunto Z[x], ou seja, o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros, e o objetivo era que os estudantes revisitassem seus conhecimentos a respeito das propriedades do conjunto dos inteiros, o que serviria de introdução para uma compreensão mais geral sobre os aspectos relacionados a Anéis de Polinômios. Foi possível notar que o foco dos alunos foi mostrar que o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros se caracterizava como um anel. Dessa forma, vamos analisar como se deu o desenvolvimento das ideias relacionadas ao conceito de Anel e se este processo de construção contribuiu para a compreensão do conteúdo de Anéis de Polinômios.

Durante a leitura e releitura dos dados, percebeu-se que havia vários extratos que tratavam de assuntos que remetiam aos Anéis, de forma geral, e ao tópico de Anéis de polinômios. Tais extratos foram agrupados e a cada significante foi atribuído um código. Os códigos que remetiam ao conteúdo de Anéis são: propriedades/elemento inverso/elemento e oposto/associativa/comutativa/distributiva/identidade/dividir por zero/nulidade/não nulidade/anel/Z de x/polinômio/raiz. Por exemplo:

> 1) E1: Eu acho… Eu acho que sei como se resolve esse primeiro… se eu não tiver muito enganado esse Z de x deve ser o conjunto dos polinômios onde os coeficientes estão em Z… e aí, aquelas propriedades que ele tá falando são aquelas coisas de anel, de corpo… aquelas coisas tudo…
>
> 2) E1: (risos) é assim, que que eu to imaginando… esse Z de x deve ser o conjunto dos polinômios onde os coeficientes estão em Z… e aí, aquelas propriedades que ele tá falando são aquelas coisas de anel, de corpo… aquelas coisas tudo…
>
> 3)E1: é… eu pensei nas propriedades que definem um grupo e eu estava vendo a associatividade e a existência do elemento neutro tanto pra adição quanto pra adição. E eu acho que consegui… não sei se tô fazendo certo, se estou inventando coisa, mas eu consegui fazer pra essas duas propriedades aí.
>
> 4) E5: A divisão dos polinômios não seria uma propriedade?

> 5) E2: Não… Então, por exemplo, o primeiro, “as propriedades que vocês conseguem encontrar pro Z x” até então o… encontrar o conjunto Z x dos inteiros… agora as propriedades, a gente discutiu mais as conhecidas né… você pode ter a adição, multiplicação, divisão… você pode ter a diferenciação… É uma desigualdade… e mais uma dúvida quanto ao grau do polinômio influencia… que ai… me surgiu as questões das propriedades que você pode pensar nelas adaptadas a polinômios inteiros, no caso, e raízes inteiras… e o grau do polinômio pode influenciar quando você pensa na desigualdade de polinômios… por que se você pegar um polinômio de grau nulo… ele não dividiria outro polinômio… ou se você pegasse um polinômio de grau primo, ele não é divisível né…

> 6) E2: Eu acho que não… pois a maioria das ideias se a gente fosse tirar dúvidas seria pra matar ou não uma resposta… já que seria pra saber se isso ou aquilo tá errado, então não é bem uma dúvida né… Agora a quatro, que a gente estava pensando… eu tinha pensado… “a vai ser raiz de p se, e somente se, x menos a vai dividir p” você vai ter um polinômio dividindo um monômio… Isso você tem o dispositivo de Briot-Ruffini, mas isso não resolve minha dúvida… por que não vai mostrar que a é uma raiz... pegar um polinômio genérico e pensar no que o resto da divisão ocasionaria…

Há uma quantidade considerável de falas que tratam de propriedades relacionadas a Anéis e Anéis de Polinômios. Isso mostra que houve, por parte dos alunos, um aprofundamento da ideia de que as propriedades que deviam ser trabalhadas eram a de Anéis – ou, de forma geral, as propriedades de anéis, grupos e corpos. As duas primeiras falas mostram que, já no começo da atividade em grupo, os estudantes conseguiram estabelecer uma relação entre as propriedades tratadas pelo problema e as propriedades de Anel. Também existem falas que abordam essas propriedades para conceitos diferentes, como na fala 3, em que as propriedades são relacionadas ao conceito de Grupo, mas quando as ideias foram sendo desenvolvidas, os alunos chegaram ao conceito de Anel, como no caso dos extratos 3 e 4.

Em outros casos, as propriedades citadas culminaram no desenvolvimento de ideias que não se aplicavam ao problema em si, como destacado no extrato 6. Contudo, percebe-se que o conceito de anel foi amplamente desenvolvido e discutido durante as atividades e que as propriedades e códigos referentes às suas propriedades apareceram de forma recorrente. Abaixo apresentamos alguns extratos relacionados ao desenvolvimento da ideia de anel e de suas propriedades para que possamos entender se as discussões levaram à compreensão correta desse conceito.

> 7) E1: Eu acho que consegui provar a associatividade… eu acho... Se a gente pensar assim… uma f de x, uma g de x e uma p de x e a gente coloca assim f de x mais g de x mais p de x separadinho isso pra adição, se a

> gente pensa não f de x, p de x e g de x como polinômios, como parcelas de números em relação à x, e sim como números, a gente vai ter que p de x g de x e f de x são na verdade, elementos de Z...
>
> 8) E1: é… eu pensei nas propriedades que definem um grupo e eu estava vendo a associatividade e a existência do elemento neutro tanto pra adição quanto pra multiplicação. E eu acho que consegui… não sei se to fazendo certo, se estou inventando coisa, mas eu consegui fazer pra essas duas propriedades aí.
>
> 9) E7: As propriedades que eu pensei são: associativa, comutativa, existência de um elemento neutro, do simétrico… só. Não sei, vou deixar esses anotados. E aí… por que assim, é um polinômio de coeficiente, então você consegue fazer operações básicas com polinômios, tipo adição, multiplicação, subtração e divisão… Não sei se tem essas também, por que aí entra outros tipos de propriedade, por exemplo, a distributiva, da multiplicação. Bom, vou deixar anotado aqui.
>
> 10) E2: Sim. No caso a multiplicação escalar sim, por que você vai multiplicando por cada termo… o a de n e vai fazendo de forma distributiva, até você ter distribuído por todos os termos do polinômio, ai você vai chegar num polinômio único.

No extrato 7 o conceito discutido é o de associatividade e percebe-se que essa propriedade seria desenvolvida de maneira correta – o que ocorreu se considerarmos a resolução escrita – se não fosse a ideia de aplicar um número inteiro ao polinômio. Outras ideias, como a de elemento neutro e distributiva também foram tratadas nas discussões dos estudantes, quando eles se referiram a anéis, conforme as falas transcritas nos extratos 9 e 10.

O que se pode concluir, é que, considerando-se em conjunto com as discussões transcritas a resolução escrita, as propriedades relacionadas a Anéis foram desenvolvidas e compreendidas da forma correta e ajudaram a desenvolver o foco do problema - introduzir os Anéis de Polinômios. Contudo, quando as propriedades foram utilizadas para mostrar que o conjunto Z[x] era um Anel, não se obteve uma compreensão total do conjunto, havendo equívocos na resolução escrita e no discurso.

Desse modo, pode-se dizer que houve a compreensão das propriedades de anéis, mas não ocorreu um aprofundamento em teoremas ou corolários para a manipulação dessas propriedades, nem ligação dessas propriedades aos conhecimentos de polinômios desenvolvidos no ensino básico. Além disso, na resolução escrita não foi citada a necessidade de se mostrar que ambas as operações, adição e multiplicação, deveriam ser bem definidas para se provar que Z[x] é um Anel.

6.5 CONEXÕES ENTRE O CONCEITO DE ANEL DE POLINÔMIOS E OS CONTEÚDOS DE POLINÔMIOS DO ENSINO BÁSICO

Conectar o conhecimento específico do professor de Matemática, com foco em Anéis de Polinômios, com o conhecimento que ele deve utilizar no futuro para ministrar suas aulas, por meio da Resolução de Problemas é o objetivo deste trabalho e, durante a análise temática, na fase de leitura e releitura, foram identificados aspectos nas falas dos alunos que podem remeter a esta conexão. Desta forma, espera-se entender por meio de alguns extratos se houve uma conexão entre tais conhecimentos e se essa conexão levou à compreensão do conteúdo de Estruturas Algébricas II ou aos conteúdos de Polinômios do ensino básico.

Os códigos nas falas que podem revelar uma conexão entre os dois conhecimentos são: *Adição**multiplicação**subtração**divisão**encontrar* e *raiz**ensino médio**inteiros**coeficientes.*

Os códigos Adição\multiplicação\subtração\divisão referem-se a operações entre polinômios que estão presentes desde os níveis mais iniciais de ensino; o estudo de polinômios começa no 7º Ano do ensino fundamental, segundo o Currículo do Estado de São Paulo (2020), e se estende até o terceiro ano do ensino médio (tratando de operações mais complexas como a divisão polinomial, por exemplo). As operações são utilizadas de forma abrangente nas disciplinas que tratam de Álgebra e das Estruturas Algébricas, assim como nas demais disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática. Nas disciplinas de Estruturas Algébricas I e II, por exemplo, deve-se mostrar que uma operação é bem definida em um conjunto para depois demonstrar, por meio de algumas propriedades, se este é um Grupo – duas operações para Anéis – para isto, mais comumente são utilizadas operações de adição e multiplicação (para Anéis de polinômios, isto não é diferente); a subtração ocorre em alguns teoremas e proposições, como no conteúdo de Grupos, em que existe um Corolário que ajuda a mostrar que um subconjunto de um grupo, com certas propriedades, é um subgrupo; e a divisão, que pode servir para o algoritmo da divisão e também mostrar que um conjunto não tem (ou tem) divisores de zero.

Dessa forma, o que revela o uso destes códigos (referentes às operações) pelos estudantes? Uma forte conexão com o ensino básico, ou “apenas” referências

à compreensão dos conceitos de Anéis em si? Buscaremos responder a essas perguntas, para podermos avaliar se os estudantes fizeram conexões entre os conteúdos da disciplina e os conteúdos do ensino básico.

Os trechos abaixo mostram as discussões dos alunos:

> E5: A divisão dos polinômios não seria uma propriedade?
> E2: Acredito que sim, se a gente trabalhar divisão... que mais dá pra fazer com polinômio? Dá pra somar, subtrair e multiplicar também;
> E5: Tá falando que é, tá falando de um… conjuntos numéricos…tá falando que tem que considerar a adição e a multiplicação...
> E2: Você tá falando no dois?
> E5: Sim, no dois;
>
> E5: Sim, somar e multiplicar…
> E2: Adição, subtração que é a mesma coisa… multiplicação… e divisão. Agora, um polinômio de grau zero, não dividiria outro polinômio? Que não dá pra dividir com zero, isso se aplica a polinômios também?
>
> E9: Eu penso sempre naquelas… Acho que são anéis e corpos, não sei… A associativa da soma, existência do elemento neutro, comutatividade… é o que consigo lembrar;
>
> E1: Eu acho que consegui provar a associatividade… eu acho. Se a gente pensar assim… uma f de x, uma g de x e uma p de x e a gente coloca assim f de x mais g de x mais p de x separadinho;
>
> E1: ...isso pra adição, se a gente pensa não f de x, p de x e g de x como polinômios, como parcelas de números em relação à x, e sim como números, a gente vai ter que p de x, g de x e f de x são na verdade, elementos de Z…

É possível perceber nos recortes acima que alguns trechos contêm referências ao ensino fundamental e médio, como nos três primeiros extratos destacados, e são estes que vamos discutir, pois as últimas falas separadas se referem aos conteúdos específicos da disciplina Estruturas Algébricas, já que os códigos das operações de adição e multiplicação se encontram em contextos relacionados às propriedades de Anéis e Anéis de Polinômios.

As três primeiras falas são interessantes, pois remetem a como as operações eram de fato feitas, pelos alunos, no ensino básico. A primeira fala, "*A divisão de polinômios seria uma propriedade*", foi dita logo no começo do desenvolvimento da atividade em um dos grupos e percebe-se que o estudante pensou diretamente no algoritmo de divisão de polinômios por chaves, tema visto por eles no ensino médio, e que poderia ter sido colocado como propriedade do conjunto Z[x] (pois o problema não especificava quais propriedades deveriam ser trabalhadas). Contudo, a ideia

não foi desenvolvida pelos estudantes do grupo e não aparece na resolução escrita.

No terceiro extrato citado acima, percebemos que o estudante levanta uma questão curiosa: "*um polinômio de grau n diferente de zero pode ser dividido por um de grau zero?*". Percebemos que a questão de grau e a de divisão estão atreladas, aqui, ao desenvolvimento destes conceitos no ensino fundamental e médio, pois a divisão empregada não remete a nenhum elemento em Anéis, mas sim a operação básica. Entretanto, é outra reflexão que acabou por não ser desenvolvida pelos estudantes e que não apareceu na resolução escrita do problema.

Podemos concluir com estes extratos que, de forma involuntária, os estudantes criaram uma ligação entre os Anéis de Polinômios e as operações de adição\multiplicação\subtração\divisão ensinadas no ensino básico, mas que não desenvolveram estas reflexões, nem para mostrar que as operações são bem definidas em Z[x]. Até aqui, podemos concluir que as operações foram de fato utilizadas para desenvolver a compreensão de conceitos relacionados aos Anéis de Polinômios como conteúdo de Estruturas Algébricas II e não para relacionar este conteúdo com o de polinômios ensinados no ensino básico.

O código *ensino médio* foi encontrado poucas vezes e, somente em um trecho, há uma referência direta. Nesse trecho, transcrito abaixo, podemos encontrar uma referência, mas que, contudo, não explicita uma relação entre os conceitos de Anéis de Polinômios e os conteúdos do Ensino Médio, mas, ao contrário, o estudante questiona o que havia aprendido naquela etapa de sua vida, empregando a frase "não tem grupo no ensino médio".

> E1: Então, a ideia é a gente resolver utilizando nossos conhecimentos que a gente tem até agora, o que é um anel, o que é um corpo e o que a gente viu no ensino médio e tentar resolver…
> E9: Não tem grupo no ensino médio (risos), não tem nada no ensino médio…
> E1: Eu acho… Eu acho que sei como se resolve esse primeiro… se eu não tiver muito enganado;

O próximo trecho nos mostra que há, dessa vez, várias ideias que estão relacionadas ao ensino médio e que, se postas em ação por parte dos estudantes, poderiam trazer muitas propriedades singulares, como a tentativa de mostrar a congruência de polinômios; a divisão polinomial por chaves; e as definições de como funcionam as operações básicas neste conjunto. Contudo, essas ideias não foram levadas adiante e nem ocorreram na escrita das resoluções, o que traria uma

diversidade interessante para a plenária e para a fase de consenso.

> E2: Na questão um, por exemplo… vamos considerar Z x como a estrutura dos polinômios com coeficientes inteiros né… As propriedades, quando a gente trabalha nesses polinômios de coeficientes inteiros, a gente pode somar eles, multiplicar o que leva a gente à subtração e a divisão, fora isso o que a gente pode fazer com eles é montar uma desigualdade ou uma igualdade. Outras coisas também seria a congruência… Eu não tenho certeza, mas acredito que seja possível montar a congruência dos polinômios de coeficientes inteiros… Se a gente pegar aquela divisão por chaves do ensino médio, pegar um polinômio e dividir por outro então você vai achar a divisão comum mesmo, isso não pode acontecer se o seu polinômio tiver grau nulo, por exemplo, que no caso você vai estar fazendo a divisão por reais…

Contudo, temos uma referência ao ensino básico que talvez possa ter sido desenvolvida e que chegou à resolução escrita do grupo A. O trecho a seguir mostra isso.

> E7: Ah, por que assim, de maneira geral influencia, por que quanto maior o grau desse polinômio, vão ter diferentes maneiras de resolver… Então acredito que isso influencia;
> E6: (…) Então é se o grau do polinômio influencia nessas propriedades do conjunto, eu acho… Então eu acho que influencia, por que pode ser que a propriedade não valha ou que valha dependendo do grau.

Esse trecho está nos extratos dos códigos grau e encontrar raiz, que nos mostra que alguns estudantes buscaram nos conteúdos do ensino básico conhecimentos que ajudariam a responder se o grau do polinômio influencia nas propriedades. Nos extratos acima, o estudante se refere aos diferentes métodos de encontrar a raiz do polinômio ou de manipulá-las. No entanto, por mais que tal resposta faça referência a conteúdos do ensino básico e esteja presente na resolução escrita, ela não é desenvolvida, pois não há uma discussão ou a apresentação de algum argumento contra ou a favor dessas falas, antes que a ideia fosse para o papel.

Em síntese, podemos apontar que houve referências diretas e indiretas aos conteúdos do ensino fundamental e médio, uma até citada na resolução final. No entanto, não podemos afirmar que a atividade proposta foi capaz de conectar o conhecimento que os alunos já tinham sobre polinômios – ou outros conteúdos do ensino básico - com os Anéis, estudados na disciplina de Estruturas Algébricas II, pois foram poucas as ideias ligadas ao ensino básico que permaneceram em discussão nos grupos e que tenham sido desenvolvidas pelos estudantes de forma a

acrescentar à compreensão dos conteúdos de Anéis de Polinômios e conectá-los, de forma a entendê-los mais profundamente, aos conteúdos do ensino básico.

6.6 ELEMENTOS DAS QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS

Discutimos, no decorrer da categorização, várias questões relacionadas à compreensão dos conteúdos da disciplina e sobre as possíveis contribuições da atividade para o estabelecimento de conexões entre os conteúdos da disciplina e os conteúdos do ensino básico. Durante a aplicação da atividade, por conta de desafios já citados, somente foi possível o desenvolvimento de um problema (Problema 1) e, por isso, a discussão acerca da compreensão dos conteúdos da disciplina e das conexões com o ensino básico se deram, até aqui, apenas sobre as discussões acerca desse problema. Contudo, no processo de transcrição e leitura, perceberam-se algumas ideias discutidas pelos estudantes acerca das demais questões.

Os extratos que tinham em comum algum elemento que remetesse a algum problema da lista que foi aplicada ou que revelasse alguma atitude de qualquer um dos participantes, foram separados e códigos relacionados ao que era mencionado pelos estudantes foram atribuídos a estes extratos – como descrito anteriormente. Separando e agrupando os códigos, a impressão inicial, de que haviam elementos ligados aos demais problemas, foi confirmada. Assim, esta última categoria foi criada com o intuito de entender e discutir se esses elementos contribuíram, de alguma forma, para a compreensão dos alunos acerca de algum outro elemento do conteúdo de Anéis de Polinômios ou se foi responsável por estabelecer alguma conexão com o ensino básico.

Os códigos i*rredutível/Briot-Ruffini/Números Racionais/critério de divisibilidade,* mostram que há referências a questões posteriores ao problema um. Os extratos a seguir representam o que os estudantes discutiram a respeito destes códigos.

> 1) E2: Ah, eu estava testando Z de x r de x é o corpo dos reais, esse quatro aí… sei não… ele disse que é uma demonstração de ida e volta… só que eu não sei… “p é o polinômio nos reais e ele é um anel, é um polinômio irredutível… sabendo isso, mostre que a é uma raiz de p se, e somente se, x menos a divide p”… cara, se você pegar um polinômio genérico… p de x, ele é um polinômio que vai de x elevado a n, não, a de x elevado a n, é isso? Mais, b de x elevado a n menos um, mais “...” é isso? Tem alguma

> coisa… que é uma constante, é isso. (Murmúrios inaudíveis);
>
> 2) E2: Agora a quatro, que a gente estava pensando… eu tinha pensado… "a vai ser raiz de p se, e somente se, x menos a vai dividir p" você vai ter um polinômio dividindo um monômio… Isso você tem o dispositivo de Briot-Ruffini, mas isso não resolve minha dúvida… por que não vai mostrar que a é uma raiz... pegar um polinômio genérico e pensar no que o resto da divisão ocasionaria…;
>
> 3) E7: O pior é que a gente viu isso, mas não lembro exatamente o por quê ele (dispositivo de Briot-Rufini) funciona, só sei que ele funciona pelo critério da divisibilidade, mas eu não sei explicar o por quê;
>
> 4) E7: É, "sabemos que o conjunto dos números racionais possui inverso" inverso é aquele, x, o inverso vai ser um sobre x "então para quais conjuntos R (grupos, anéis ou corpos) R de x possui conjunto de elementos inversos?", então, grupos e corpos a gente já viu né, mas a gente tem que ver no material se possuem inversos, mas pra anéis eu já não sei… Mas na minha cabeça é assim, pra grupos e corpos, considerando que eles tenham inverso, que eu não lembro se eles têm, tem que ver no material, se eles têm, anel também vai ter que ter (risos). Então minha conclusão é fonte: vozes da minha cabeça (risos);
>
> 5) E6: Tipo assim, ele deu que a gente sabe que os números racionais têm um inverso, e a gente tem que descobrir quais conjuntos desses racionais que tem um subconjunto?
> E7: Pelo que eu entendi… olha vou ler de novo "sabemos que alguns conjuntos, como o dos números racionais possuem inverso para a multiplicação, então para quais conjuntos R" aí ele especifica "(grupos anéis ou corpos)" desses três "possuem um subconjunto de elementos inversos?". Eu tenho em mente que corpo é a entidade matemática mais geral, tanto que anéis e grupos estão dentro da categoria de corpos, então se corpo possui inverso, eu acredito que anéis possuem inverso, assim como grupos também. Por que como corpo engloba tudo e corpo pra multiplicação possui inverso, então eu acredito que grupos e anéis possuem inverso multiplicativo.

A primeira e a segunda fala referem-se ao problema quatro, em que é foi pedido que se mostrasse que se um polinômio tem uma raiz, pertencente a um anel, então a diferença entre a indeterminada e sua raiz divide o polinômio; é um problema de *se, e somente se*, isto é, deve-se mostrar que a primeira afirmação implica na segunda e a segunda implica na primeira – como mencionado pelo Estudante 2. Ele tem uma resposta correta, provavelmente já estabelecida pela sua experiência, pois esta relação de implicações é fruto do *Corolário 3.3.2.17* apresentado na seção de Anéis de Polinômios deste trabalho; contudo, não se pretendia que os estudantes respondessem ao problema dessa forma, mas sim que desenvolvessem a ideia do conceito de raiz de um polinômio e sua influência na divisibilidade – como uma forma de também introduzir o problema 5, que tratava do dispositivo de Briot-Ruffini.

Acreditamos que uma discussão sobre o conceito de raiz e divisibilidade de

polinômios traria uma contribuição tanto para a compreensão do conteúdo de Anéis de Polinômios, quanto para a realização de conexão com os polinômios conhecidos no ensino básico (pois aprendemos várias maneiras de encontrar a raiz de um polinômio e algumas formas de como dividi-lo, justamente nessa etapa da educação básica). O primeiro extrato não mostra um desenvolvimento mais aprofundado da ideia por parte do aluno que pensava a respeito desta questão, entretanto, o segundo extrato nos mostra que o estudante fez uma relação interessante com o algoritmo de Briot-Ruffini – um algoritmo para se obter o resultado de uma divisão entre dois polinômios – que era um dos objetivos da questão. Neste sentido, a breve troca de ideias a respeito do problema os levou a uma conclusão interessante. Esse resultado nos mostra que o problema tinha o potencial de levar os participantes à compreensão dos conteúdos em questão e de promover a conexão desses conteúdos com os conhecimentos do ensino básico.

O problema cinco pedia que os estudantes explicassem, considerando o que eles haviam discutido até então (conceitos de Anéis e Anéis de Polinômios), o motivo do dispositivo de Briot-Ruffini para divisão polinomial dar certo. A respeito deste conceito, os estudantes relatam nas falas 2 e 3 que a razão deveria ser, de alguma forma, uma consequência dos pensamentos relacionados ao quarto problema e que a explicação para seu funcionamento era o critério de divisibilidade. Esperava-se dos estudantes, além dessa explicação, que o problema promovesse uma discussão sobre divisibilidade de polinômios, com destaque para os conceitos relacionados aos Anéis de Polinômios e suas conexões com os conhecimentos do ensino básico, como algum critério de divisibilidade adaptado para os polinômios – já que critérios semelhantes são utilizados como números inteiros. O Critério de divisibilidade é citado no extrato 3 como razão para o funcionamento do dispositivo. Tal resposta se aproxima do que se esperava com o desenvolvimento da resolução do problema.

No problema dois era dado um exemplo de conjunto com inverso, o Conjunto dos Números Racionais, para que os estudantes refletissem e respondessem a questão: “para quais conjuntos R (grupos, anéis ou corpos), R[x] possui subconjunto de elementos inversos?”. A resposta, do ponto de vista da álgebra, é que os corpos, e raramente alguns domínios (ou anéis) que possuem mais de um elemento inverso e não possuem comutatividade para multiplicação ou possuem múltiplo de zero ou não possuem identidade, ou mais de um dos citados ou os três, possuem

subconjunto de elementos inversos; os anéis também possuem esse subconjunto, contudo apenas a identidade (para Anéis com identidade) e seu inverso se encontram em seu subconjunto de elementos inversos.

Grupos não possuem elemento inverso da multiplicação, com exceção dos grupos multiplicativos, e, portanto, não possuem subconjunto de elementos inversos. Este problema propunha abordar uma das partes importantes dos Anéis de polinômios – que seria mostrar para os estudantes que existem conjuntos em que estão os coeficientes que aceitam elementos inversos e, assim, o conjunto de seus polinômios também aceitariam inverso, reconhecendo assim a transposição das propriedades. Os extratos 4 e 5 tratam deste problema e revelam algumas poucas ideias geradas pelos estudantes acerca deste problema. Na fala 4, os estudantes entendem que, se Grupos possuem uma determinada propriedade, esta propriedade será vista em Anéis. De fato, isso ocorre para as propriedades que caracterizam um grupo, contudo, nem Grupos e nem Anéis comuns possuem subconjuntos com elementos inversos para a multiplicação.

Na quinta e última fala, o Estudante 7 levanta um argumento que não é correto. Segundo sua fala, se um Corpo possui um subconjunto de elementos inversos, Anéis e Grupos também deveriam possuir, entretanto, essa afirmação não é correta, pois coloca Corpo como uma estrutura algébrica “menos complexa” que a de Anel e Grupo; o próprio estudante que falou isso se corrigiu posteriormente para uma colega:

> *E7:* Miga, só comentando que eu acho que te passei a informação errada, quando eu falei que grupo tem inverso multiplicativo. Grupo não tem inverso multiplicativo, ele tem inverso aditivo. Corpo que possui propriedade de inverso multiplicativo, aditivo, enfim… Corpo possui maior gama de propriedade, então grupo não tem, grupo tem inverso aditivo. Então agora não sei…

Outro aspecto a respeito da questão dois é tocado pelo estudante 7 no extrato 5. Em sua leitura em voz alta, o Estudante 7 diz: “*sabemos que alguns conjuntos, como os do números racionais, possuem inverso para a multiplicação, então para quais conjuntos R* (ele especifica grupos, anéis ou corpos) *desses três possuem um subconjunto de elementos inversos?*”. Dessa forma, o aluno enfatiza que se deveria pensar a respeito de somente os três tipos de conjuntos, não pensando, dessa forma, na possibilidade de se trabalhar com Anéis de Polinômios

nesta questão.

É possível conjecturar que os demais problemas poderiam contribuir de forma significativa para a discussão – e possivelmente compreensão – do conteúdo e para a conexão com os temas do ensino básico. Isso pode ser corroborado pelos comentários feitos pelos estudantes. Possivelmente, se houvessem outras condições para o desenvolvimento da proposta, os demais problemas poderiam ser respondidos e discutidos de forma a contribuir fortemente para a compreensão do tema.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram levantadas algumas questões importantes relacionadas aos cursos de Licenciatura em Matemática: o dilema de que *para entender como se ensina um conteúdo, somente o conhecimento do conteúdo é insuficiente* (LIBÂNEO, 2012, p.6)*;* a forte aderência de professores a metodologias tradicionais - também por conta da estrutura curricular vigente (STAHL; ISAIA, 2008) e a desconexão entre os conteúdos específicos e os conhecimentos do currículo do ensino básico nos cursos de formação de professores. Considerando tais questões, a proposta deste trabalho foi estabelecer uma discussão sobre as possíveis contribuições de uma proposta didática que utilizasse a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas para a aprendizagem do conteúdo Anéis de Polinômios por parte de uma turma de alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática, com o intuito de contribuir para que esses alunos tivessem uma compreensão mais abrangente deste conteúdo e de suas relações com os temas de polinômios do currículo do ensino básico.

A Resolução de Problemas foi escolhida como alternativa às metodologias tradicionais, em razão da sua crescente discussão no âmbito das propostas curriculares, em nível estadual e federal e pela sua capacidade de fazer que os estudantes assimilem uma ideia de maneira construtivista (VAN DE WALLE, 2009). Para de fato aplicar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, foi preciso primeiramente elaborar problemas de forma que se alinhassem à concepção de Serrazina (2017) e aplicá-los sob a perspectiva de Andrade e Onuchic (2017); contudo, essas perspectivas tiveram de ser adaptadas para o ensino remoto, por conta da pandemia de COVID-19, que assolou o Brasil e o mundo, desde 2020.

Na adaptação da metodologia pretendeu-se não se distanciar da forma como essa seria desenvolvida no ensino presencial, o que nos levou aos resultados desta pesquisa, com suas dificuldades e desafios influenciando o desenvolvimento das atividades e os resultados.

De fato, a pandemia foi um fator inesperado e que gerou várias dificuldades a serem superadas. Uma dessas dificuldades foi a falta de orientações para que professores possam aplicar a Resolução de Problemas de forma não presencial,

sendo este um campo totalmente novo e ainda não explorado por pesquisadores. Esperamos que este trabalho possa contribuir com as discussões sobre as possibilidades do uso da Resolução de Problemas de forma remota.

Sob os novos desafios, a metodologia foi aplicada no ensino remoto para um curso de Licenciatura em Matemática com os mesmos objetivos: levar à compreensão do conteúdo de Anéis de Polinômios e a uma conexão entre este conhecimento específico e o conteúdo de polinômios do ensino básico. Entretanto, dos seis problemas elaborados, apenas um foi contemplado na atividade, por conta de desafios relacionados à própria condição docente em meio à pandemia, como mencionado anteriormente, e outros que surgiriam em razão da época do ano em que as atividades tiveram de ser aplicadas.

Pensar a aplicação da metodologia de Resolução de Problemas é pensar em remodelar nossas concepções sobre ensino, aprendizagem e avaliação, como por exemplo, entender estes como processos associados. No que se refere ao planejamento da aula, ao transformar uma atividade presencial em remota, levando em conta também que a metodologia empregada era nova para os estudantes, foi necessário um planejamento detalhado. Entretanto, ainda assim, imprevistos ocorreram.

Durante a resolução da primeira questão, os estudantes exibiram alguns padrões de falas, que foram percebidos e posteriormente analisados utilizando a Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016) e a Análise Temática (SOUZA, 2019). Aos padrões, isto é, falas ou ideias que se repetiam no texto ou que exprimiam alguma ideia interessante do ponto de vista do objetivo do trabalho, foram dados nomes, os códigos, que ao serem agrupados por proximidade revelaram os temas que os estudantes abordaram em suas falas e que nos possibilitou uma discussão sobre as contribuições da atividade para a compreensão dos conteúdos da disciplina e para estabelecer conexões entre estes e os conteúdos do ensino básico. Os temas ou categorias levantadas foram: *Experiência vivida na mediação da atividade; Conhecimento por parte dos alunos sobre a Resolução de Problemas; Dificuldades em resolver problemas sobre conteúdos já estudados; Compreensão das propriedades de um Anel; Conexões entre o conceito de Anel e os conteúdos de polinômio do ensino básico; Elementos das questões não resolvidas.*

Da experiência vivida na mediação da atividade entendemos que a participação do professor influencia diretamente na compreensão dos estudantes

sobre o conteúdo abordado na atividade. Dessa forma, ao conduzir a atividade, o professor deve ser cauteloso ao dar dicas. Vimos o caso em que o pesquisador deu uma dica, sem prever as consequências, e, um dos estudantes, interpretando de maneira inesperada, concluiu que deveria substituir a indeterminada dos polinômios por números inteiros. Contudo, a análise da categoria nos revela que o erro é parte do processo e que, muitas vezes, ele é reparado pelos próprios estudantes, o que faz que novas ideias substituam as incorretas, se aproximando um pouco mais da compreensão do que é estudado. O professor-pesquisador deve então entender a diferença entre o erro que pode ser reparado e substituído pelos próprios estudantes e aqueles que crescem e se tornam alicerces de uma compreensão do conteúdo totalmente diferente da que se deseja.

Do *conhecimento por parte dos alunos sobre a Resolução de Problemas* entendeu-se que os estudantes, cientes do que é esperado deles na Resolução de Problemas, conseguem desenvolver suas ideias de forma ativa. No trabalho foi mostrado o exemplo de um estudante que entendeu o que era esperado dele e outro que não estava consciente disto; o primeiro conseguiu desenvolver uma ideia forte e que foi levada até o final, apesar de ser a já mencionada ideia de se substituir polinômios por números inteiros; já o segundo não apresentou argumentos consistentes na resolução. Concluiu-se então que, estar ciente do que se deve fazer é um dos fatores importantes para se atingir a compreensão do conteúdo por parte dos estudantes.

A análise revelou que existem dificuldades por parte dos alunos em resolver problemas sobre conteúdos já estudados; muitas vezes, dificuldades naturais, em que os estudantes procuram em seu repertório de ideias e conhecimentos caminhos a serem tomados para resolver o problema. Um problema novo, sobre um tema não visto, deve gerar esse tipo de dificuldade em vários momentos e estas devem ser superadas pelos próprios estudantes.

Da *compreensão das propriedades de um Anel,* pudemos perceber que os participantes apresentaram em sua resolução escrita do problema um, um esboço de demonstração de que o conjunto Z[x] é um anel. Nesse esboço foram lembradas as propriedades que caracterizam um Anel e, durante a discussão entre os estudantes, também foram relatadas estas propriedades, contudo, faltou aos alunos mostrar que as operações de adição e multiplicação são bem definidas no conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros e nenhuma outra propriedade proveniente

dos anéis foi lembrada (como a de subconjunto de elementos inversíveis). Podemos concluir que foi desenvolvida, por meio do problema proposto, uma compreensão de algumas propriedades de Anéis, mas não o aprofundamento esperado.

Mas, o que podemos afirmar em relação às *conexões entre o conceito de Anel e os conteúdos de polinômio do ensino* básico? De forma direta, não podemos afirmar que houve esta conexão, pois, apesar de haver menções aos conteúdos do ensino básico quando os alunos resolviam o problema um, nenhuma das ideias foi discutida com mais ênfase. Apesar do Grupo A lembrar em sua resolução escrita da fala do Estudante 9, que argumentou sobre a influência do grau do polinômio, utilizando um conceito do conteúdo de polinômios do ensino básico, não se pode dizer que a referência foi discutida mais profundamente pelos estudantes, reforçando o argumento inicial deste parágrafo.

E sobre os *elementos das questões não resolvidas*, eles acrescentaram algo de relevante à compreensão do conteúdo ou à conexão do ensino básico? Não se pode responder a esta pergunta de forma afirmativa, contudo, a análise revelou que os estudantes levantaram argumentos interessantes sobre os problemas não resolvidos e que se houvessem mais recursos para a aplicação (tempo), estes poderiam ter contribuído para a compreensão dos conteúdos de Anéis de Polinômios e a para a ligação deste com conteúdos de polinômios do ensino básico.

Podemos afirmar que a atividade proposta levou a uma compreensão restrita acerca do conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros e a reduzidas conexões com o conteúdo do ensino básico. Além disso, por meio das falas dos estudantes, podemos perceber que houveram erros construtivos e erros que levaram a uma compreensão inadequada do conteúdo. Contudo, acreditamos que a resolução da atividade de forma integral poderia revelar outro cenário.

Por fim, percebemos que o paradigma da aula tradicional está enraizado nas concepções dos alunos e acreditamos que, se fosse possível desenvolver os demais problemas, existiriam possibilidades de levarmos os alunos a uma reflexão sobre as potencialidades do uso de diferentes metodologias de ensino.

Vejo como possibilidade futura uma pesquisa que se aprofunde, teoricamente e também de forma prática, no uso da metodologia de ensino-aprendizado-avaliação em Matemática por meio da Resolução de Problemas, nos mais diferentes níveis, para o ensino remoto, pois no momento em que surge a necessidade de uma nova maneira de ser professor e de se fazer o ensino é que se sente a falta de

sistematização prévia de maneiras alternativas do ser e do fazer docente. Nesse sentido, espero que este trabalho contribua para se entender os desafios de se trabalhar com a metodologia de forma remota no ensino superior.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. M. M. SILVEIRA, D. N. Uma leitura sobre as origens do Movimento da Moderna (MMM) no Brasil. **Tópicos Educacionais**, Recife, n. 2, p.6-17, jul./dez. 2016.

ANDRADE, C. P. ONUCHIC, L. R. Perspectiva para a Resolução de Problemas no GTERP. *In*: ONUCHIC, L. R. *et al.* (org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 433-465.

ANDREATTA, C.; ALLEVATO, N. S. G. Um cenário das pesquisas envolvendo Resolução de Problemas em edições do CIEM A scenario of research involving Problem Solving in issues of CIEM. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 69-92, 2019.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências, e Ciências Exatas Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 1998.

APM. **Renovação do Currículo de Matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. 1988.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições70, 2011.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: Ensino Médio. Brasília, DF: MEC/SEMT, 1999.

BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. SEB/MEC: Brasília, 2019.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. A formação inicial de futuros professores de matemática sob a perspectiva da resolução de problemas. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 3, n. 1, p. 40, 6 maio 2019.

D'AMBRÓSIO, B. S. O Professor-Pesquisador Diante da Produção Escrita dos Alunos. *In*: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa *et al.* **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria Física, 2017. p. 109-129.

REZENDE, A. M. S; DOS SANTOS, I. B. Um Exame de The Thorndike Arithmetics em Busca de Elementos para uma Compreensão dos novos métodos para o ensino dos saberes elementares aritméticos. *In*: SEMINÁRIO TEMÁTICO, 14., 2016, Natal. **Anais** [...] Natal: [*s. n.*], 2016.

FERREIRA, N. C. **Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências, e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2017.

FERREIRA, N. C.; SILVA, L. E.; MARTINS, E.R. A Resolução de Problemas no Ensino Superior. *In*: ONUCHIC l. R. et al. (org.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 189-219.

FIORENTINI, D. Formação de Professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender Matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CIBEM, 13., 2012, Recife. **Anais** [...]Recife: [*s. n.*], 2012.

KILPATRICK, J. One point of view; Stop the bandwagon, I want off. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 28, n. 8, p. 1-2, 1981.

KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from. **Cognitive science and mathematics education**, p. 123-147, 1987.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sóciointeracionista. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 955-978, 2015.

LIBÂNEO, J. C. A persistente dissociação entre o conhecimento pedagógico e o conhecimento disciplinar na formação de professores: problemas e perspectivas. **Anais da 35ª Reunião Anual da ANPED**. Porto de Galinhas: ANPED, 2012.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MICHAELIS **moderno dicionário da língua portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos, 2021. Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php. Acesso em: 01 fev. 2021.

MORAIS, R. S. **A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado**. 2008. 251 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2008.

MORAIS, R. S. et al. Resolução de Problemas, uma matemática *para* ensinar? In: ONUCHIC et al. In **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria Física, 2017. p. 397-432.

MELLO, G; MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D. Base de Conhecimento de Professores de Matemática: do Genérico ao Especializado. **Revista Ensino, Educação e Ciências Humanas**, [*s. l.*], v. 18, n. 2, p. 126-133, 24 de jul. 2017.

NCTM. **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar**. (Tradução portuguesa do original em inglês de 1989). Lisboa: APM & IIE.1991.

NCTM. **Principles and Norms for School Mathematics**. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics. 2000.

NCTM. **Agenda for Action**: recommendations for school mathematics for the 1980s. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics. 1980.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R. A Resolução de Problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Revista Espaço Pedagógico**, [*s. l.*], v. 20, n. 1, 2012.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática na sala de aula**. 2002. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências, e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

PIRONEL, M; VALLILO, S. A. M. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. *In:* ONUCHIC, L. R. *et al.* **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria Física, 2017. p. 279-303.

POLYA, G. **Como resolver problemas**. Lisboa: Gradiva, 2003.

ROSSETTO, D. Z. **A Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio: o currículo do Estado de São Paulo e a visão dos professores.** 2018. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2018. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/157138. Acesso em: 19 mar. 2021.

SANTOS, L. Auto-avaliação Regulada. Porquê, o quê e como? *In*: ABRANTES, P.; ARAÚJO, F. (coord.). **Avaliação das Aprendizagens**: das concepções às práticas. Reorganização Curricular do Ensino de Básico. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica, 2002. p. 77-84.

SÃO PAULO, Estado de. **Currículo Paulista**. EFAPE EDUCAÇÃO, 2020. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/educacao-infantil-e-ensino-fundamental/materiais-de-apoio-2/. Acesso em: 10 abr. 2021.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. **ZDM**, v. 39, n. 5-6, p. 537-551, 2007.

SERRAZINA, L. Resolução de problemas e formação de professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 55-83.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, Abingdon, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SINGER, F. M; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2016.

SILVA, J. de A. **Resolução de problemas e representações múltiplas no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º Grau com duas incógnitas**. 2019. 163f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SOUZA, L. K. Pesquisa com análise qualitativa de dados: conhecendo a Análise Temática. **Arquivos brasileiros de Psicologia**, Rio de Janeiro, v. 71, n. 2, p. 51-67, 2019. Disponível em http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1809-52672019000200005&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 08 maio 2021.

STAHL, L. R.; ISAIA, S. M. A. Articulação entre os conhecimentos específicos e a formação de professores: a Licenciatura em discussão. **Políticas Educativas**, [*s. l.*], v. 6, n. 1, p. 41-55, 2008.

TERRAS, A. **Abstract Algebra with Aplications**. San Diego. Cambridge University Press, 2018. p. 156-243.

TONON, F. M. **A História do Curso de licenciatura em Matemática da UNESP – Câmpus de Ilha Solteira**. 2020. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2020.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2007.

APÊNDICE A – MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: “O uso da Resolução de Problemas no ensino de Anéis de Polinômios em um curso de Licenciatura de Matemática”

Nome da Pesquisadora: Douglas Matheus Gavioli Dias

Nome da Orientadora: Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

1. **Natureza da pesquisa**: você está sendo convidada(o) a participar desta pesquisa que tem como finalidade analisar e discutir as potencialidades do uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio de Resolução de Problemas na disciplina de Estruturas Algébricas para correlacionar o conteúdo de Anéis de Polinômios com temas do ensino básico.
2. **Participantes da pesquisa**: Onze (11) discentes de graduação em Licenciatura em Matemática e um (01) professor doutor, que leciona na disciplina de Estruturas Algébricas.
3. **Envolvimento na pesquisa**: ao participar deste estudo você permitirá que o pesquisador compreenda como o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio de Resolução de Problemas na disciplina de Estruturas Algébricas pode correlacionar o conteúdo de Anéis de Polinômios com temas do ensino básico.
4. **Sobre a aula**: O estudo será realizado por meio de três aulas ministradas durante o semestre letivo 2020/02, com duração de 1h até 1h45, via Google Meet, devido à pandemia de Coronavírus.
5. **Riscos e desconforto**: a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução no. 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos usados oferece riscos à sua dignidade.

6. **Confidencialidade**: todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e seu orientador terão conhecimento de sua identidade e nos comprometemos a mantê-la em sigilo ao publicar os resultados desta pesquisa.
7. **Benefícios**: ao participar desta pesquisa você não terá algum benefício direto. Entretanto, esperamos que os alunos apreendam os conteúdos de Anéis de Polinômios de modo a entender e correlacionar este tema de Estruturas Algébricas com os do ensino básico. O pesquisador se compromete a divulgar os resultados obtidos, respeitando-se o sigilo das informações coletadas, conforme previsto no item anterior.
8. **Pagamento**: você não terá algum tipo de despesa para participar desta pesquisa, bem como nada será pago por sua participação.

Você tem liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo. Sempre que quiser poderá pedir mais informações sobre a pesquisa por meio do telefone do pesquisador do projeto e, se necessário, mediante o telefone do Comitê de Ética em Pesquisa.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para participar desta pesquisa. Portanto preencha, por favor, os itens que se seguem: Confiro que recebi uma via deste termo de consentimento, e autorizo a execução do trabalho de pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

Observação: Não assine este termo se ainda tiver dúvida a respeito.

Consentimento Livre e Esclarecido

Tendo em vista os itens acima apresentados, eu, de forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento em participar da pesquisa

_____

Nome do Participante da Pesquisa

_____

Assinatura do Participante da Pesquisa

_____

Assinatura do Pesquisador

_____

Assinatura do Orientador

Pesquisador: Douglas Matheus Gavioli Dias; Fone: (18) 988 158 925

Orientador: Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

APÊNDICE B – TABELA DE EXTRATOS E CÓDIGOS

Tabela 1 – Extratos e Códigos	
Extratos	Códigos
Estudante 9: Boa noite! Só pra ficar registrado, não sei nada (risos). *Estudante 1:* Pra ficar registrado, somos dois (risos).	Alunos dizem que não sabem
E3: Gente, eu não sei nem o que tá acontecendo… to perdidinha… *E9:* Se você tá imagina a gente…	Alunos dizem que não sabem
ó, o Mediador postou uma lista no classroom com cinco exercícios, e daí a gente tem que resolver esta lista… em grupo, e ai no caso eu, você e o *estudante* 1… *E3:* Mas são os cinco exercícios pra agora?	Atividade em si
E3: Gente, onde tem um material falando desse polinômio de Z de x?	Polinômio\Z de x
E1: Então… esse é o problema, não tem nada falando desse polinômio ainda, por que esse é o intuito do negócio, é a gente aprender a partir dos problemas…	Polinômio\atividade em si\resolver problemas
E1: Então, a ideia é a gente resolver utilizando nossos conhecimentos que a gente tem até agora, o que é um anel, o que é um corpo e o que a gente viu no ensino médio e tentar resolver… *E9:* Não tem grupo no ensino médio (risos), não tem nada no ensino médio… *E1:* Eu acho… Eu acho que sei como se resolve esse primeiro… se eu não tiver muito enganado…	Resolver problemas\conhecimento prévio\anel\corpo\ensino médio\grupo
esse Z de x deve ser o conjunto dos polinômios onde os coeficientes estão em Z… e ai, a quelas propriedades que ele tá falando são aquelas coisas de anel, de corpo… aquelas coisas tudo…	Z de x\Polinômios\ coeficientes\propriedades\anel\corpo
pra ver se tem algumas propriedades que se encaixam nos polinômios… Eu testei pra anel… e pelo que eu vi, o grau não tá fazendo nenhuma diferença,	propriedades\polinômios\anel\grau
mas eu fiz de cabeça, não fiz nenhuma conta não, eu fui olhando e vendo se dava	Ideia\resolver problemas

certo ou não…	
E1: (risos) é assim, que que eu to imaginando… esse Z de x deve ser o conjunto dos polinômios onde os coeficientes estão em Z… e ai, a quelas propriedades que ele tá falando são aquelas coisas de anel, de corpo… aquelas coisas tudo…	Ideia\Z de x\polinômios\coeficientes \inteiros\propriedades\anel\corpo
E1: E ai eu tava dando uma olhadinha naqueles pdf do *Professor* pra ver se tem algumas propriedades que se encaixam nos polinômios… Eu testei pra anel… e pelo que eu vi, o grau não tá fazendo nenhuma diferença, mas eu fiz de cabeça, não fiz nenhuma conta não, eu fui olhando e vendo se dava certo ou não… pode ter muitos erros, pode (risos).	Material digital\propriedades\polinômios\anel\gra u\ideia\dúvida
E1: É… a gente tá meio perdido, é o melhor jeito de definir…	Alunos dizem que não sabem
E1: é, eu tava expondo aqui para as meninas a minha ideia de uma possível resolução para o problema um.	Resolver problemas\ideia
E1: Tá… A primeira coisa que quero confirmar, esse conjunto Z de x é o conjunto dos polinômios onde os coeficientes estão em Z? *E1:* E essas propriedades seriam as de anéis, corpos ou algo assim?	Dúvida\Z de x\polinômios\coeficientes\propriedades\a néis
*E9:E*u penso sempre naquelas…. Acho que são anéis e corpos, não sei…. A associativa da soma, existência do elemento neutro, comutatividade… é o que consigo lembrar.	Dúvida\anel\corpo\Associativa\adição\el emento neutro\comutativa
E1: A primeira coisa que eu pensei são nas propriedades que definem um anel.	Anel

M: Pessoal, vocês não precisam estar cem porcento certos, só não tenham medo de fazer, façam, e ai depois uma pessoa passa a limpo da maneira que vocês acharem que tá melhor feito	incentivar os alunos
E9: Essa gravação a gente vai ter que enviar pra você?	Dúvida\atividade em si\alunos dizem que não sabem

M: Sim, pois vou precisar transcrever ela, mas eu não vou…. *E9:* (risos) só vai ter eu falando que não sei fazer…	
E1: Bom, pelo que eu entendi, não tem muita distinção entre Estruturas I e II, então a gente pode voltar lá nos primórdios e usar as propriedades de grupo por exemplo, pegar lá atras e trazer até agora.	Estruturas I\ Estruturas II\propriedades\grupos
então, eu abri aqui e tem: associativa e… a existência do elemento neutro, identidade, não, neutro	associativa\elemento neutro\identidade
E9: Então, eu deixei o pdf da aula 3, em que ele tá falando das propriedades de anel… ah gente, é isso, eu não sei… tô ficando irritada já….(risos).	Material digital\anel\dúvida
E9: Ah aqui, achei…. As três propriedades: associativa, a existência do elemento neutro e existência do elemento inverso. Ah, mas como a gente vai fazer com o Z de x?	ideia\propriedades\associativa\elemento neutro\elemento inverso\dúvida\Z de x
E1: Eu acho que consegui provar a associatividade… eu acho…. Se a gente pensar assim… uma f de x, uma g de x e uma p de x e a gente coloca assim f de x mais g de x mais p de x separadinho	ideia\demonstração\associatividade\polinômios\adição
isso pra adição, se a gente pensa não f de x , p de x e g de x como polinômios, como parcelas de números em relação a x, e sim como números, a gente vai ter que p de x g de x e f de x são na verdade, elementos de Z….	Adição\polinômios\pensar polinômios como números\inteiros\ideia incorreta
E1:Tá. E imaginando estes indivíduos em Z, a gente vai ter que o nosso f de x mais ge de x mais p de x são associativos. A mesma coisa a gente vai ter para a multiplicação, a gente vai ter esse polinômios como números inteiros e por isso a gente pode afirmar que são associativos.	Ideia\inteiros\adição\associativa\multiplicação\polinômios\inteiros\associativa
E1: é… eu pensei nas propriedades que definem um grupo e e u tava vendo a associatividade e a existência do elemento neutro tanto pra adição quanto pra multiplicação. E eu acho que consegui…	Propriedades\grupo\associativa\elemento neutro\adição\ideia

não sei se to fazendo certo, se estou inventando coisa, mas eu consegui fazer pra essas duas propriedades aí.	
E1: Existência do elemento neutro e associatividade.	Elemento neutro\associativa
E1: Eu parti de que eu tinha que chegar em "entre parênteses" uma f de x mais g de x, mais q de x igual a uma f de x "entre parênteses" g de x mais q de x, disso ai eu fui tentando imaginar algum caminho, e que eu pensei foi imaginar esses polinômios como um número inteiro depois que a gente aplica um certo x nelas, e partir disso a gente poderia pensar nessa proposição em Z e pensar que a associatividade vale em z.	Polinômios\ideia\pensar polinômios como números\ideia incorreta\inteiros
E1: Bom, eu tava pensando agora na outra propriedade, que é a existência do elemento inverso… Mas não deu tempo de fazer nada… eu tinha pensado no que você tinha falado de ver como os elementos se interagem e aparentemente eu consegui ver um elemento inverso pra soma, mas não um elemento inverso pra multiplicação.	Ideia\elemento inverso\interação entre elementos\adição
Estudante 2: É… o conjunto Z de x, quem é Z de x? É o conjunto dos inteiros?	Z de x\inteiros
Estudante 2: Na um ele fala "quais e quantas propriedades você consegue encontrar para o conjunto Z de x?". Quem é Z de x? O conjunto dos inteiros? É isso?	Leitura\propriedades\Z de x\inteiros
E2: Não, por que é Z de x né? Conjunto Z de x… ele não pode ser…. Tem que ser inteiro ou conjunto contínuo…	Z de x\ideia incorreta
E5: É, só consigo pensar na intersecção dos naturais mesmo...	Ideia incorreta
*E2:*Como assim só na intersecção dos naturais vocês fala? *E5:* Não tem aquele desenho que a gente faz que fala que A tá com intersecção com B? Ou em	Ideia incorreta
E5: Então seria união e intersecção *E2:*Então, só que aqui fala "o grau do	Ideia incorreta\polinômios

polinômio influencia?” Então acho que tem algo a ver com polinômios, mas não sei o que ele quer dizer, estou “encucado” com isso…	
*E5:*A divisão dos polinômios não seria uma propriedade?	Divisão\polinômios\propriedades
*E2:*Acredito que sim, se a gente trabalhar divisão... que mais dá pra fazer com polinômio? Dá pra somar, subtrair e multiplicar também.	Dúvida\polinômios\adição\subtração\multiplicação
E5: Sim, somar e multiplicar… *E2:*Adição, subtração que é a mesma coisa… multiplicação… e divisão. Agora, um polinômio de grau zero, não dividiria outro polinômio? Que não dá pra dividir com zero, isso se aplica à polinômios também?	Adição\subtração\multiplicação\divisão\polinômio\grau\dividir por zero\dúvida
Que mais a gente pode fazer com polinômio? Só isso? Eu acho que é. (Sussurro). Vamos pensar o dois então	Polinômios\dúvida
Têm a multiplicação, a adição e a divisão…Tem os números naturais né….	Multiplicação\adição\divisão
E2: Inteiros, números inteiros… então por exemplo, a gente conseguiria reduzir esse polinômio se ele não fosse divisível… Por exemplo, um polinômio de grau cinco, ele não seria divisível por um polinômio de grau dois, por que o dois não divide cinco, eu acho, não sei	Inteiros\polinômios\grau\Divisão
E2: Acho que a primeira resposta dá R x não nulo né… faria sentido…	Polinômio\não nulidade
E2: Pra quando o R x não fosse nulo… Por que se ele é nulo, ele não tem inverso…	Polinômio\não nulidade\elemento inverso
E5: Tá falando que é, tá falando de um … conjuntos numéricos… tá falando que tem que considerar a adição e a multiplicação...	Adição\Multiplicação
E2: É, tava pensando isso…É que o R x, o R x vai ser o polinômio de raízes reais, ainda não sei… se pensar no subconjunto dos elementos inversos, se pensar no conjunto dos números inversos… as raízes reais teria inverso na soma e na multiplicação… eles são inversíveis eu	Polinômios\raiz\elemento inverso\adição\multiplicação

acredito...	
*E5: "*Ao tratar de conjuntos numéricos… unidimensional… aqueles tratando sobre um espaço vetorial R n… Pode ser usado como exemplo para qualquer subconjunto de R que são subconjuntos amplos de R… Que tem inverso multiplicativo…"	Ideia incorreta\conjuntos numéricos\inverso\multiplicação
E5:Faz sentido não faz? *E2:* Faz… três, "sendo os inversos de R o conjunto dos inversos de R pra R corpo, quais propriedades os inversos de R satisfazem?". Bom, satisfazem as propriedades multiplicativas, ai os inversos de R não teria elementos neutro, por que R não é inversível.	Leitura\corpo\elemento inverso
E2: Então, o inverso aditivo acho que não, por que… quem são os inversos de R, são, por exemplo o um , o dois, o três, o quatro, o zero não tem inverso, por que se vocês pegar uma propriedade aditiva, não tem como cumprir o elemento neutro aditivo, por que zero não é inversível…	Elemento inverso\adição\elemento neutro
agora ele teria por exemplo a propriedade de… elemento inverso… o elemento inverso na adição existe, por que qualquer número que você pegar nesse conjunto.. ele possui inverso..	Propriedade\elemento inverso\adição
então se você usar a propriedade aditiva, funciona, se você tentar considerara a associatividade também… ele só não vai ter o elemento neutro… o elemento neutro aditivo.	Propriedade\adição\associativa\elemento neutro
*E2: "*Quando dizemos que um polinômio r de x… é um anel (leitura inaudível)".	Leitura\polinômios
E2: Ah, eu tava testando Z de x r de x é o corpo dos reais, esse quatro aí… sei não… ele disse que é uma demonstração de ida e volta… só que eu não sei…	Z de x\corpo\demonstração
"p é o polinômio nos reais e ele é um anel, é um polinômio irredutível… sabendo isso, mostre que a é uma raiz de p se, e somente se, x menos a divide p"… cara, se você pegar um polinômio genérico… p de x, ele é um polinômio que vai de x elevado a n, não, a de x elevado a n, é isso?	Leitura\Polinômios\irredutível\raiz\

E5: Ele disse que tinha que resolver isso até amanhã?	Atividade em si\desconhecimento da atividade
E2: Eu não sei… não faço a menor ideia do que está acontecendo direito. *E5:* Ele disse que ia entrar e ainda não entrou…	Desconhecimento da atividade\ atividade em si
E5: Provavelmente…Você viu a parte que tá no genérico? Tá p x igual a zero, x à n, mais a um, mais x à n menos um.	Polinômios\adição\subtração
E5: Muito complicado… a gente tá tentando fazer a questão quatro.	Alunos dizem que não sabem
E2: É, a gente tentou discutir da questão um à três, e a gente chegou a algumas conclusões, que eu não sei se estão certas… Mas, foi o que a intuição dizia e a gente tava pensando na quatro, mas eu voltei pra dois…	Alunos dizem que não sabem
E2: Não… Então por exemplo o primeiro, "as propriedades que vocês conseguem encontrar pro Z x" até então o… encontrar o conjunto Z x dos inteiros… agora as propriedades, a gente discutiu mais as conhecidas né… você pode ter a adição, multiplicação, divisão… você pode ter a diferenciação… É uma desigualdade… e mais uma dúvida quanto ao grau do polinômio influencia… que ai… me surgiu as questões das propriedades que você pode pensar nelas adaptadas a polinômios inteiros, no caso, e raízes inteiras… e o grau do polinômio pode influenciar quando você pensa na desigualdade de polinômios… por que se você pegar um polinômio de grau nulo… ele não dividiria outro polinômio… ou se você pegasse um polinômio de grau primo, ele não é divisível né… *E2:* Eu acho que não… pois a maioria das ideias se a gente fosse tirar dúvidas seria pra matar ou não uma resposta… já que seria pra saber se isso ou aquilo tá errado, então não é bem uma dúvida né… Agora a quatro, que a gente tava pensando… eu tinha pensado… "a vai ser raiz de p se, e somente se, x menos a vai dividir p" você vai ter um polinômio dividindo um	Leitura\Z de x\inteiros\propriedades\adição\multiplicação\divisão\grau\polinômio\Briot Ruffini\raiz

monômio… Isso você tem o dispositivo de Briot-Ruffini, mas isso não resolve minha dúvida… por que não vai mostrar que a é uma raiz...pegar um polinômio genérico e pensar no que o resto da divisão ocasionaria…	
E5: Você ainda tá tentando fazer a quatro? *E2:* Sim, mas não consegui formular não…	Alunos dizem que não sabem
E5: tá dificil… *E2:* Na questão um por exemplo… vamos considerar Z x como a estrutura dos polinômios com coeficientes inteiros né… As propriedades, quando a gente trabalha nesses polinômios de coeficientes inteiros, a gente pode somar eles, multiplicar o que leva a gente à subtração e a divisão, fora isso o que a gente pode fazer com eles é montar uma desigualdade ou uma igualdade. Outras coisas também seria a congruência… Eu não tenho certeza, mas acredito que seja possível montar a congruência dos polinômios de coeficientes inteiros… Se a gente pegar aquela divisão por chaves do ensino médio, pegar um polinômio e dividir por outro então você vai achar a divisão comum mesmo, isso não pode acontecer se o seu polinômio tiver grau nulo, por exemplo, que no caso você vai estar fazendo a divisão por reais…	Alunos dizem que não sabem\Z de x\polinômios\propriedades\coeficientes\inteiros\adição\multiplicação\divisão\ensino médiograu\nulidade
E2: Tenta provar que para qualquer número genérico isso funciona… A comutatividade… você pegar por exemplo dois genéricos dos reais e a comutatividade de x y se igual a yx ser válida…	Comutativa\polinômios
E5: E não pode dar nulo né... *M:É…* E pro Z de x, como vocês fariam? *E2:* Pegaria dois polinômios genéricos?	Nulidade\Z de x\polinômios
E2: Não é o que a gente acaba fazendo? Dividindo e multiplicando polinômios? Que em geral é uma coisa que já tá vinculado no nosso… Matemática e mecânica?	Divisão\multiplicação\polinômios
E2: É… eu não sei… deu pra entender… Eu entendi o que você quer que a gente faça, mas não sei se entendi (risos) é	Dúvida\demonstração\Estruturas Algébricas

complicado… Mas eu entendi o princípio, como a gente elabora a nossa prova, as interações nessa estrutura algébrica… Só que eu to tentando colocar isso na minha cabeça de uma forma palatável.	
E1: Você chegou a pensar nos problemas? Nesse meio tempo aí. *E9:* (risos) só nos problemas da minha vida…	Alunos dizem que não sabem
E9: Isso vale nota… e na prova? *E1:* Vai ser lindo (risos).	Desconhecimento da atividade
E9: É que eu acho que nem todo mundo do grupo tá sabendo que esta atividade está sendo considerada como trabalho né? Então seria bom lembrar… *M:* Eu achei que o *Professor* tinha avisado, por isso não comentei nada. *E9:* Ele tinha avisado mas “ah e tal, talvez eu use como nota”…	Atividade em si\desconhecimento da atividade
Estudante 7: Oi professor, eu tava vendo o “exercício um” aqui “Quais propriedades vocês encontrar para o conjunto”, estas propriedades são por exemplo…. De que caráter? Pois tipo assim, ele tem elemento neutro, pode fazer adição, subtração, divisão, como que é ? Esse Z de x são os polinômios com coeficientes inteiros…	Desconhecimento da atividade\exercício\propriedades\elemento neutro\adição\subtração\divisão\Z de x\polinômios\coeficientes\ inteiros
E7: Então, eu pensei nas padrões né… Nas propriedades padrões né, por exemplo, associativa, comutativa, da existência de um neutro, de um simétrico…	Propriedades\associativa\comutativa\elemento neutro\elemento inverso
E7: As propriedades que eu pensei são: associativa, comutativa, existência de um elemento neutro, do simétrico… só. Não sei, vou deixar esses anotados. E aí… por que assim, é um polinômio de coeficiente, então você consegue fazer operações básicas com polinômios, tipo adição, multiplicação, subtração e divisão… Não sei se tem essas também, por que aí entra outros tipos de propriedade, por exemplo a distributiva, da multiplicação. Bom, vou deixar anotado aqui.	Propriedades\associativa\comutativa\elemento neutro\elemento inverso\polinômio\coeficiente\adição\multiplicação\subtração\divisão\distributiva

E7: E sobre a segunda pergunta, alguém tem ideia? O grau do polinômio influencia? *E6:* Eu acho que deve valer, algumas propriedades igual vocês falou, da divisão, multiplicação e tal… Aí agora eu não sei, mas se elas valem, então o grau do polinômio influencia.	Duvida\grau\polinômio\propriedades\divisão\multiplicação
E7: Ah, por que assim, de maneira geral influencia, por que quanto maior o grau desse polinômio, vão ter diferentes maneiras de resolver… Então acredito que isso influencia…	grau\polinômio\encontrar raiz
E6: (…) Então é se o grau do polinômio influencia nessas propriedades do conjunto, eu acho… Então eu acho que influencia, por que pode ser que a propriedade não valha ou que valha dependendo do grau...	Grau\polinômio\propriedades, encontrar raiz
M:E sobre a um? Vocês chegaram a alguma coisa? *E7:* Então, a gente pensou… É um polinômio, então, com o polinômio a gente consegue fazer as operações básicas… Adição, multiplicação e por ai vai… E quando a gente pensa nessas operações, logo vem a cabeça a associatividade, a comutatividade, a existência de elemento neutro, de um simétrico, falando em multiplicação tem a distributiva, então eu listei essas propriedades que eu recordei...	Ideia\polinômio\adição\multiplicação\associativa\comutativa\elemento neutro\inverso\distributiva\propriedades
E1: Boa pergunta, tá tudo junto, eu não sei o que fiz.(…) Tá… eu fui checar as propriedades de anel, e ai o carinha ficou falando o negócio da transposição de propriedades e ai pensando nisso. Pensando na transposição de propriedades eu fui ver as seis propriedades de anel, só que assim, foi tudo na cabeça, não resolvi nada, aparentemente são todas verdadeiras.	Duvida\propriedade\transposição de propriedades\anel\ideia
E9: Ai ele tinha que resolver isso com a gente, a gente não sabe, vai demorar se a gente ficar aqui pensando, a gente vai ficar se sentindo mais burra ainda.	Atividade em si\desconhecimento da atividade

E6: Eu acho assim, a gente deveria ter uma ultima aula pra gente resolver isso junto. Que tudo isso a gente não vai ter tempo de resolver tudo não, e eu acho que todo mundo junto não vai conseguir. Então tipo, ele podia resolver com a gente né.	Desconhecimento da atividade
E1: Ah, posso falar, essa um é muito complexa. Tem muita propriedade… *E7:* Então, a gente conhece trilhões de propriedades, eu não sei qual vai funcionar. Aí eu coloquei essas que tá no papel, do elemento neutro, do inverso, associativo, pra adição, pra multiplicação, comutatividade.	Desconhecimento da atividade\propriedades\elemento neutro\elemento inverso\associativa\adição\multiplicação\ comutatividade
E9: Então por que na pergunta ele pergunta… Obvia (risos)… "Quais e quantas propriedades você consegue encontrar" é as que a gente consegue, então a gente pode colocar essas que vocês conseguiram resolver, que eu não sei quantas são… Já esqueci.	Leitura\propriedades
E9: E ai, por exemplo se… igual pra anéis, pra anéis tem mais propriedades, eu acho que são nove propriedades, e a gente não testou, então a gente acha que… Foi essa que a gente conseguiu, tá na pergunta, pronto.	Anel\propriedades
E7: Então, a gente tinha chegado a conclusão que influenciava, mas que a gente não tem a resposta correta, a gente tem a resposta que é leiga e geral "quanto maior o grau do polinômio, mais complexo vai ser a resolução e pra cada tipo de polinômio e seu grau, existem diferentes tipos de resolução". Mas, eu não sei se existe um mistério por trás, mas esse é meu conhecimento básico, que a gente tem que "quanto mais… pra diferentes tipos de graus de polinômios, existem diferentes resoluções" mas eu só sei isso, eu não sei onde isso vai cair na… No que ele quer.	Grau\polinômio\resolver problemas\leitura
E1: Então, seguindo o que eu fiz, eu sempre considerava, o conjunto como sendo o conjunto dos polinômios com	Polinômios\coeficientes\inteiros\ideia incorreta\polinômio como número\grau

coeficientes inteiros e sempre considerando que esse x, valia também os inteiros. A partir disso, eu teria que todo e qualquer polinômio seria na verdade um número inteiro, independente do grau e portanto não faria nenhuma diferença. *E7:* Hummm… É um bom argumento.	
E6: É o cinco? Ah, então é a cinco… *E7:* O pior é que a gente viu isso, mas não lembro exatamente o por que ele (dispositivo de Briott Rufini) funciona, só sei que ele funciona pelo critério da divisibilidade, mas eu não sei explicar o por que…	Briot-Ruffini\Critério de divisibilidade
E6: Mas assim, não foi nessa dois que ele tinha falado que tem a ver com… não sei o que lá, que a gente tinha que refletir sobre isso… *E7:* É, "sabemos que o conjunto dos números racionais possui inverso" inverso é aquele, x, o inverso vai ser um sobre x "então para quais conjuntos R (grupos, anéis ou corpos) R de x possui conjunto de elementos inversos?", então, grupos e corpos a gente já viu né, mas a gente tem que ver no material se possuem inversos, mas pra anéis eu já não sei… Mas na minha cabeça é assim, pra grupos e corpos, considerando que eles tenham inverso, que eu não lembro se eles tem, tem que ver no material, se eles tem, anel também vai ter que ter (risos). Então minha conclusão é fonte: vozes da minha cabeça (risos).	Leitura\Números racionais\inverso\polinômios\anéis\corpos\grupos\dúvidas
E6: Tipo assim, ele deu que a gente sabe que os números racionais têm um inverso, e a gente tem que descobrir quais conjuntos desses racionais que tem um subconjunto? *E7:* Pelo que eu entendi… olha vou ler de novo "sabemos que alguns conjuntos, como os do números racionais possuem inverso para a multiplicação, então para quais conjuntos R" ai ele especifica	Números Racionais\elemento inverso\leitura\grupos\anel\corpo\ideia incorreta

“(grupos anéis ou corpos)” desses três “possuem um subconjunto de elementos inversos?”. Eu tenho em mente que corpo é a entidade matemática mais geral, tanto que anéis e grupos estão dentro da categoria de corpos, então se corpo possui inverso, eu acredito que anéis possuem inverso, assim como grupos também. Por que como corpo engloba tudo e corpo pra multiplicação possui inverso, então eu acredito que grupos e anéis possuem inverso multiplicativo.	
E6: É, se você for olha a questão três, ele meio que confirma que corpo pelo menos possui um subconjunto de elementos inversos, por que olha a pergunta da três, já é tipo assim “Sendo R... o conjunto dos inversos pra R corpo” então tipo assim, o corpo tem inverso, e ai como vocês diz, engloba tudo. Se ele tá perguntando pra quais conjuntos, a gente vai ter que especificar quais conjuntos…	Corpo\elemento inverso\leitura\ideia
E7: Miga, só comentando que eu acho que te passei a informação errada, quando eu falei que grupo tem inverso multiplicativo. Grupo não tem inverso multiplicativo, ele tem inverso aditivo. Corpo que possui propriedade de inverso multiplicativo, aditivo, enfim… Corpo possui maior gama de propriedade, então grupo não tem, grupo tem inverso aditivo. Então agora não sei…	Correção de fala\elemento inverso\ multiplicação\adição\corpo\propriedade\ grupo
E7: É, por que corpo possui todas as propriedades que a gente conhece, tanto pra adição quanto pra multiplicação, associatividade, inverso, comutatividade, distributiva, divisão por zero, multiplicativa, corpo tem tudo, é o mais completo em propriedade, ai dentro de corpo tem grupos, eu imagino que anel entra dentro de um corpo, então tem que ver quais propriedades cabem pra anel, por que pra grupo eu já vi que não tem inverso multiplicativo não.	Corpo\propriedades\adição\multiplicação \associativa\elemento inverso\comutativa\distributiva\dividir por zero\corpo\grupos\anel
Estudante 1: Tá, aparentemente ele gostou do que eu fiz, então é isso. Eu tava	Ideia\dúvida\propriedades\grupo\associa tiva\elemento neutro\elemento inverso\Z

completamente perdido e fui rabiscando umas ideias e eu fui pensando lá nas propriedades que formam um grupo, a associativa, a existência do elemento neutro e a existência do elemento inverso, e ai eu fui tentando provar essas propriedades para aquele Z de x né. E tentando provar essas três propriedades, eu cheguei numa coisinha bem interessante, que sempre que eu tentava provar, eu chagava a pensar nesses polinômios aplicados num certo x inteiro, tal que cada polinômio se tornasse um numero inteiro ao invés de uma expressão né. Você pensa qualquer x inteiro como coeficientes desses polinômios inteiros. O resultado do polinômio vai ser um número inteiro. Então você consegue trabalhar ao invés de um polinômio um número. Você vê a vida inteira, você sabe que os inteiros são um grupo associativo, que eles tem um elemento neutro, tanto pra adição quanto pra multiplicação, associatividade vale pra adição e pra multiplicação e só que na existência do elemento inverso, quando você começa a trabalhar dessa forma, você vai ter o elemento inverso pra adição, tem os números negativos, mas você não vai conseguir encontrar a existência do elemento inverso pra multiplicação, e foi onde eu parei, eu fiz… fui provando essas três propriedades, mostrando os polinômios como números inteiros…	de x\demonstração\pensar polinômios como números\ideia incorreta\inteiros\coeficientes\adição\multiplicação
Estudante 1: As propriedades que eu falei são: associativa, existência de elemento neutro e existência de elemento inverso. Essas três que eu olhei. A única que não teria como é o elemento inverso da multiplicação.	Propriedade\associativa\elemento neutro\elemento inverso\multiplicação
Estudante 1: É, pensando naquela ideia de, ao invés de olhar as expressões dos polinômios, aplicar num certo x e ver como número inteiro, eu consegui provar as propriedades de anel. Sempre usando a ideia de sempre ver como números inteiros.	Ideia\polinômios\inteiro\propriedades\anel\pensar polinômios como números
Estudante 1: Tá, deixa eu mandar as coisas pra vocês (murmuro inaudível). Mandei, essa é a resolução que eu fiz, o básico é o seguinte, eu tava pensando primeiro nas propriedades de grupo, associativa,	Propriedades\grupo\associativa\elemento neutro\elemento inverso\Z de x\polinômios\coeficientes\inteiros\pensar polinômios como números\ideia

existência de elemento neutro e inverso e no segundo momento eu pensei nas propriedades de anel. A sacada das minhas provas, basicamente é : pensar esse conjunto Z de x como… Como ele é o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros lá, imaginar também que o x tá correndo nos inteiros e portanto, todo e qualquer polinômio, vai se resumir a um número inteiro, e ai, a gente usa todas as propriedades que a gente sabe que são verdadeiras pro conjunto dos inteiros, aqui nesse conjunto Z de x, o grosso é isso.	incorreta
Estudante 8: Cada um tem que fazer individual? *E1:* Então, a ideia é discutir em grupo, chegar num consenso do grupo e ai depois a gente vai discutir a resolução dos dois grupos, mas não sei, tá difícil fazer isso. Numa semana fui de um grupo, ai na outra semana eu tava em outro grupo. Ai hoje eu tava completamente perdido e acabei em outro grupo. Então tipo, eu fiz essa resolução, meio que sozinho, mas a ideia era fazer em grupo.	Desconhecimento da Atividade\atividade em si\resolver problemas
E1: (Risos) tá bom… Ah, verdade, eu esqueci de falar da segunda parte né, que tem… Se o grau do polinômio influencia né… Como eu considerei todo e qualquer polinômio como número inteiro, pela hipótese de que x corre em Z, então os graus não influenciam, por que todo e qualquer polinômio vai ser um número inteiro. E é isso, foi nisso que eu cheguei, se tá certo eu não sei (risos).	Grau\polinômio\pensar os polinômios como números\inteiros\ideia incorreta\dúvida

APÊNDICE C – TABELA DE CÓDIGOS E CATEGORIAS

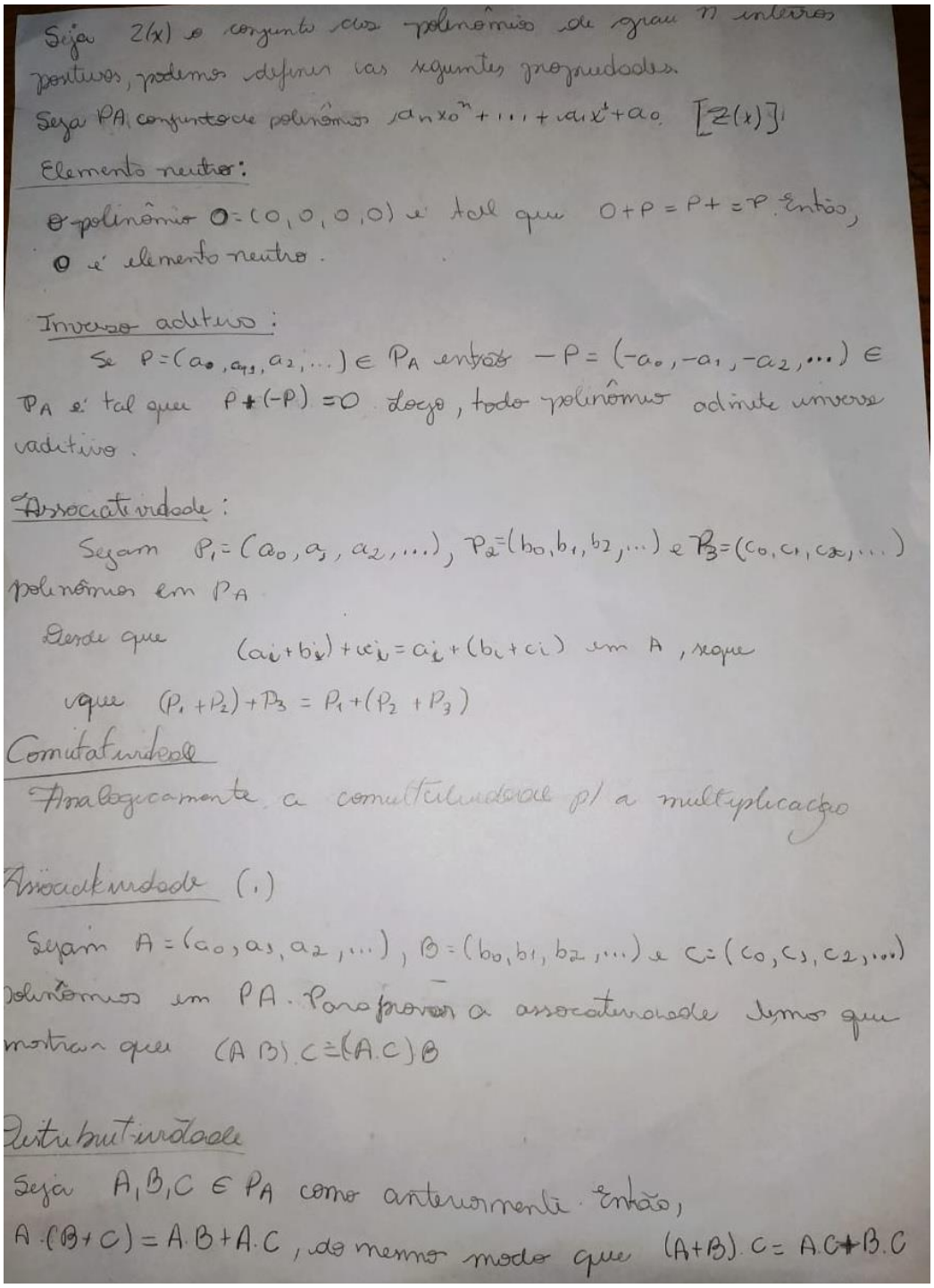
Tabela 2 – Códigos e Categorias		
Códigos	Códigos por proximidade	Categorias
Atividade em si	Atividade em si\incentivar os alunos\interação entre os elementos\transposição das propriedades	Atitudes do professor-pesquisador
Falta de alunos		
Conhecimento prévio		
Incentivar os alunos		
Propriedades		
Z de x	Conhecimento prévio\Resolver problemas\desconhecimento da atividade\leitura\exercício	Desconhecimento por parte dos alunos sobre a atividade proposta
Grau		
Elemento inverso		
Grupos		
Anéis		
Corpos		
Conjuntos numéricos	Pensar os Polinômios como números\ideia incorreta\alunos dizem que não sabem\ ideia\dúvida\ demonstração	Dificuldade em resolver problemas sobre conteúdos já estudados
Polinômio		
Irredutível		
Não nulidade		
Raiz		
Divisão		
Briot Ruffini	Propriedades\elemento inverso\elemento oposto\associativa\comutativa\distributiva\identidade\dividir por zero\nulidade\não	Compreensão das propriedades de um Anel
Demonstração		
Resolver os problemas		
Desconhecimento da atividade		

Ensino Médio	nulidade\anel\Z de x\grau\polinômio\raiz	
Inteiros		
Coeficientes		
Multiplicação		
Adição		
Alunos dizem que não sabem		
Ideia		
Conhecimento prévio		
Dúvida		
Elemento neutro		
Comutativa		
Estruturas I		
Estruturas II		
Identidade		
Pensar polinômios como números		
Ideia incorreta		
Interação entre elementos	Adição\multiplicação\subtração\divisão\encontrar raiz\ensino médio\inteiros\coeficientes	Estabelecendo conexões entre Anel e os conteúdos de polinômio do ensino básico.
Leitura		
Subtração		
Dividir por zero		
Nulidade		
	Irredutível\Briot Ruffini\Números Racionais\critério de divisibilidade	Elementos das questões não resolvidas
Estruturas Algébricas		
Exercício		

Distributiva		
Encontrar a raiz		
Transposição de propriedades		
Conhecimentos básicos		
Critério de divisibilidade		
Números Racionais		

APÊNDICE D – RESPOSTAS ESCRITAS DOS GRUPOS

GRUPO A


Seja Z(x) o conjunto dos polinômios de grau n inteiros positivos, podemos definir as seguintes propriedades.
Seja PA conjunto de polinômios $a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$ [Z(x)]

Elemento neutro:

O polinômio O=(0,0,0,0) é tal que O+P=P+=P. Então, O é elemento neutro.

Inverso aditivo:

Se $P=(a_0, a_1, a_2, \dots) \in P_A$ então $-P=(-a_0, -a_1, -a_2, \dots) \in P_A$ é tal que $P+(-P)=0$ Logo, todo polinômio admite inverso aditivo.

Associatividade:

Sejam $P_1=(a_0, a_1, a_2, \dots)$, $P_2=(b_0, b_1, b_2, \dots)$ e $P_3=(c_0, c_1, c_2, \dots)$ polinômios em P_A

Sendo que $(a_i+b_i)+c_i = a_i+(b_i+c_i)$ em A, segue que $(P_1+P_2)+P_3 = P_1+(P_2+P_3)$

Comutatividade

Analogicamente a comutatividade p/ a multiplicação

Associatividade (.)

Sejam $A=(a_0, a_1, a_2, \dots)$, $B=(b_0, b_1, b_2, \dots)$ e $C=(c_0, c_1, c_2, \dots)$ polinômios em PA. Para provar a associatividade temos que mostrar que $(A.B).C=(A.C).B$

Distributividade

Seja $A, B, C \in P_A$ como anteriormente então,
$A.(B+C)=A.B+A.C$, do mesmo modo que $(A+B).C=A.C+B.C$

Figura 3:Primeira folha de resposta, grupo A (imagem enviada pelo celular de um estudante)

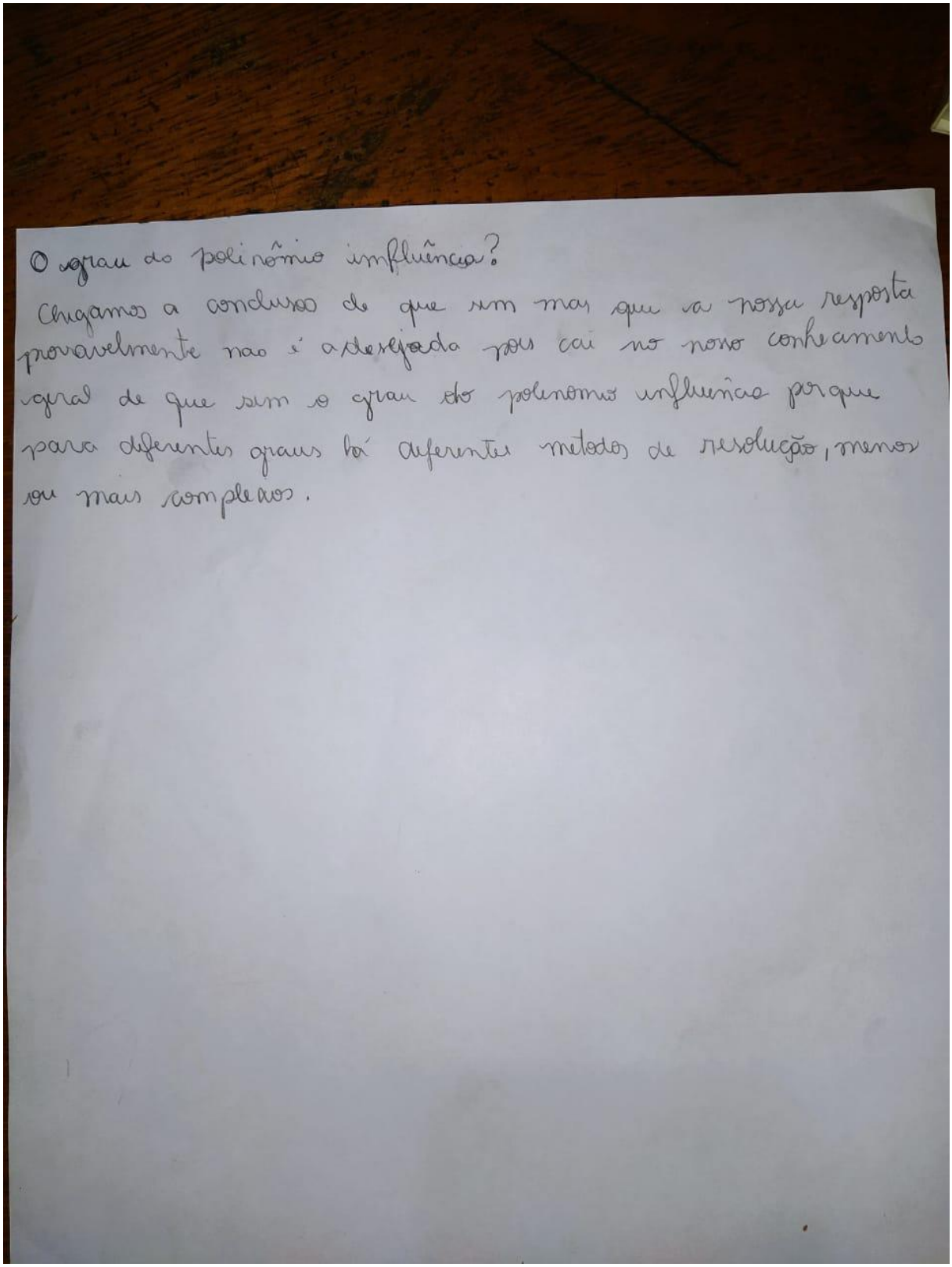


Figura 4: Segunda folha de resposta do grupo A (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)

GRUPO B

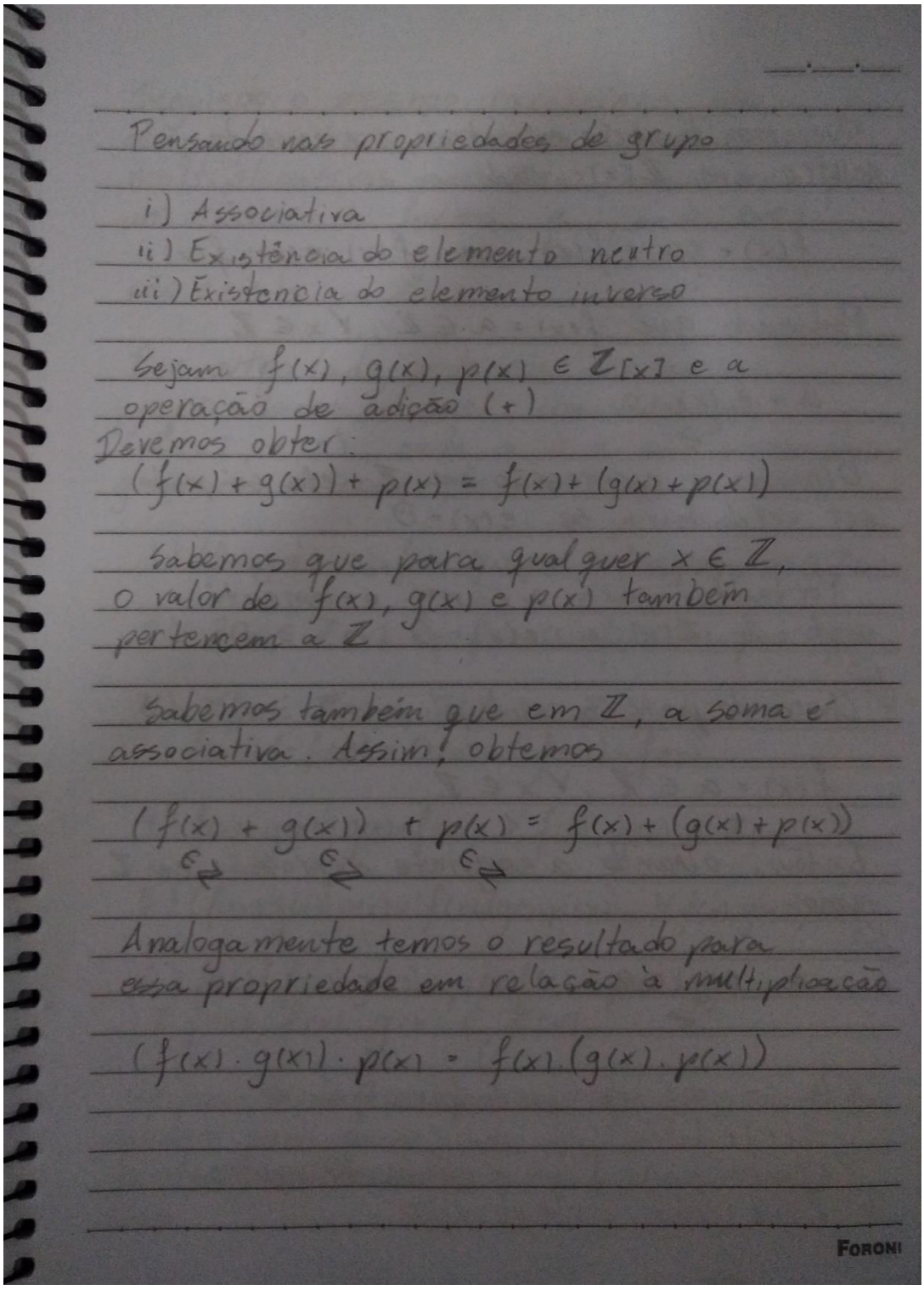
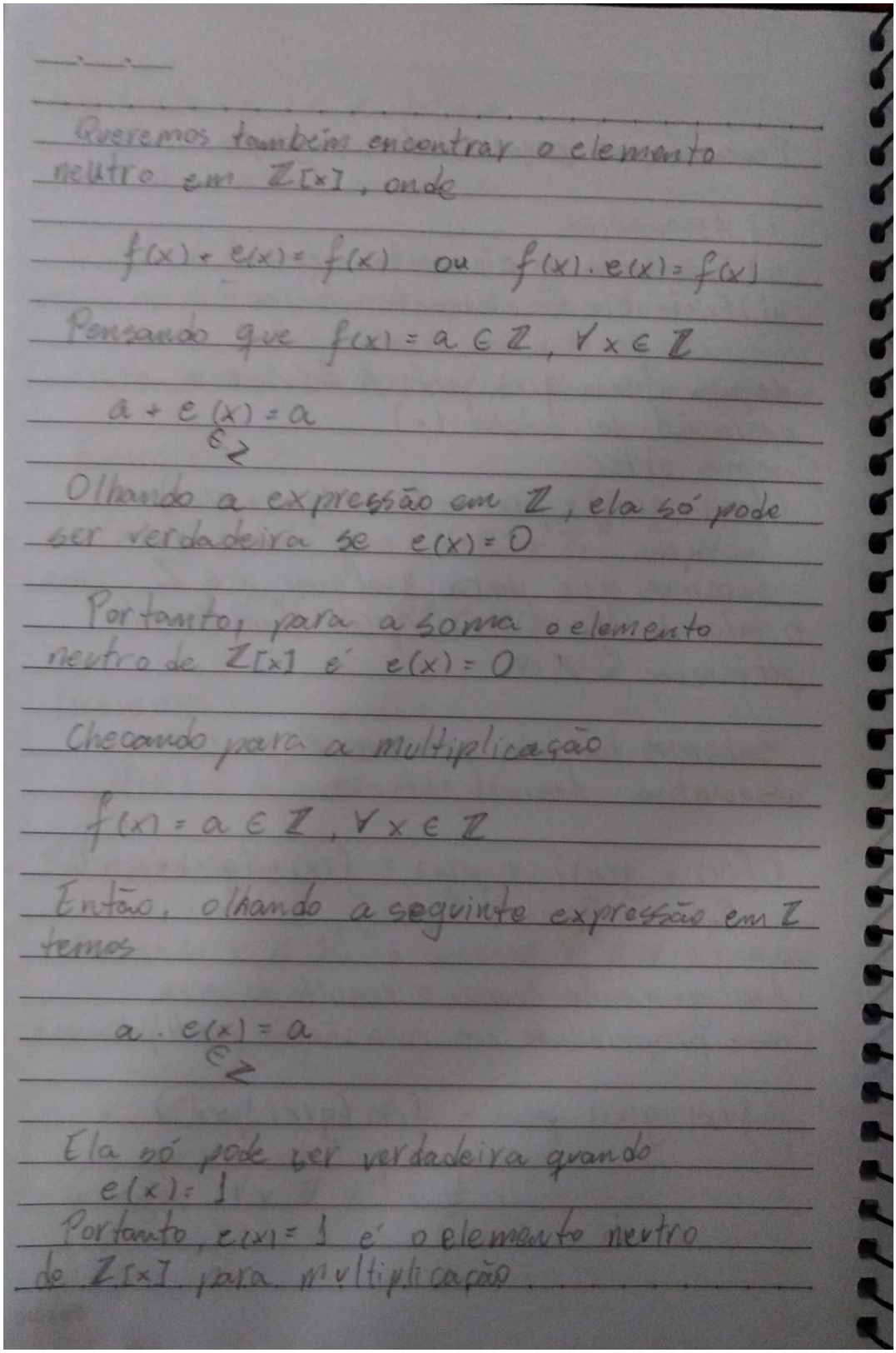


Figura 5 Primeira folha de respostas grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)


Queremos também encontrar o elemento neutro em $\mathbb{Z}[x]$, onde

$f(x) + e(x) = f(x)$ ou $f(x) \cdot e(x) = f(x)$

Pensando que $f(x) = a \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

$a + e(x) = a$
$\in \mathbb{Z}$

Olhando a expressão em $\mathbb{Z}$, ela só pode ser verdadeira se $e(x) = 0$

Portanto, para a soma o elemento neutro de $\mathbb{Z}[x]$ é $e(x) = 0$

Checando para a multiplicação

$f(x) = a \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

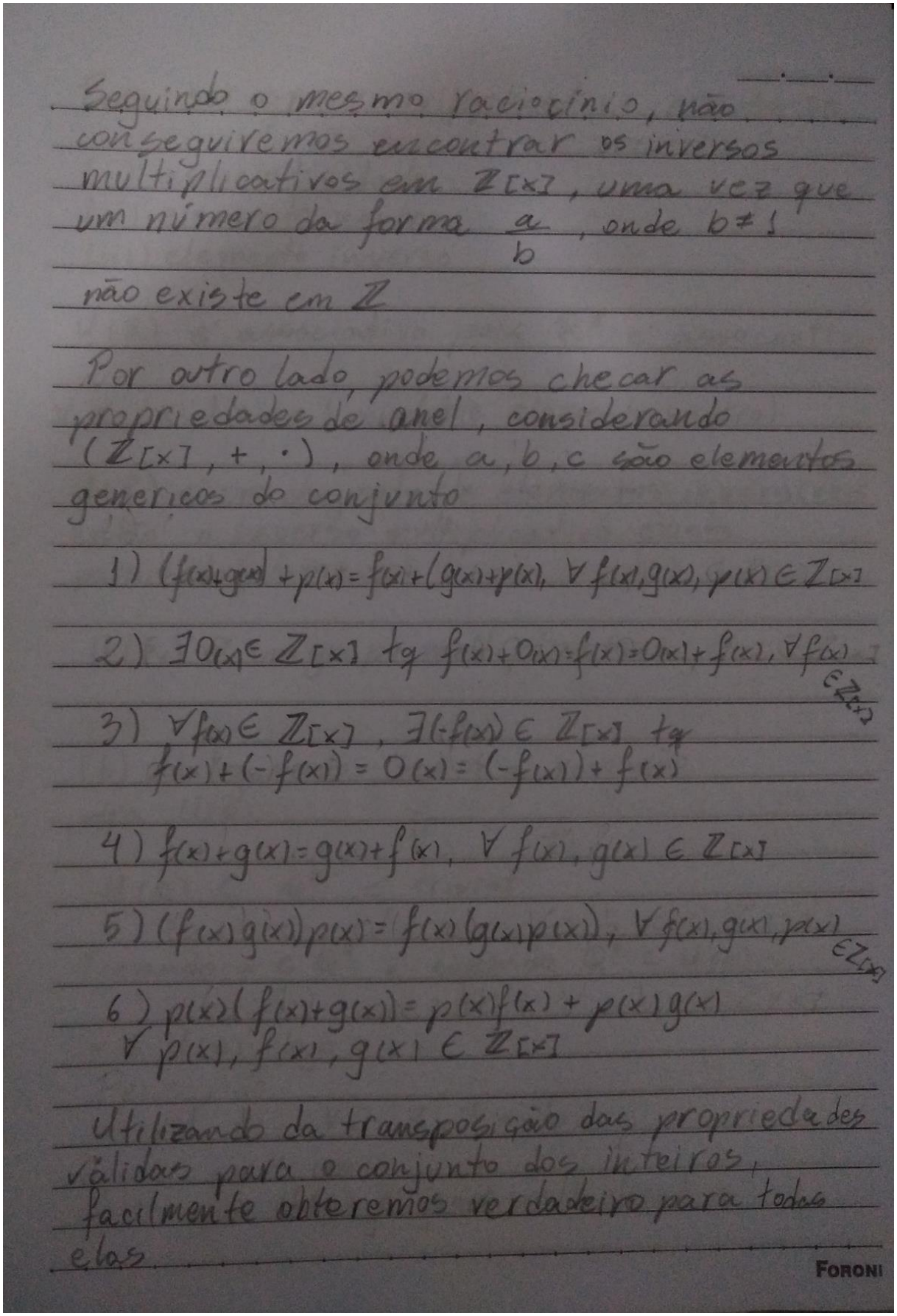
Então, olhando a seguinte expressão em $\mathbb{Z}$ temos

$a \cdot e(x) = a$
$\in \mathbb{Z}$

Ela só pode ser verdadeira quando $e(x) = 1$

Portanto, $e(x) = 1$ é o elemento neutro de $\mathbb{Z}[x]$ para multiplicação

Figura 6Segunda folha de respostas do grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)



Seguindo o mesmo raciocínio, não conseguiremos encontrar os inversos multiplicativos em $\mathbb{Z}[x]$, uma vez que um número da forma $\frac{a}{b}$, onde $b \neq 1$ não existe em $\mathbb{Z}$

Por outro lado, podemos checar as propriedades de anel, considerando $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$, onde a, b, c são elementos genéricos do conjunto

1) $(f(x)+g(x))+p(x) = f(x)+(g(x)+p(x)),\ \forall f(x), g(x), p(x) \in \mathbb{Z}[x]$

2) $\exists 0_{(x)} \in \mathbb{Z}[x]$ tq $f(x)+0_{(x)} = f(x) = 0_{(x)}+f(x),\ \forall f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

3) $\forall f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\exists (-f(x)) \in \mathbb{Z}[x]$ tq
$f(x)+(-f(x)) = 0(x) = (-f(x))+f(x)$

4) $f(x)+g(x) = g(x)+f(x),\ \forall f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$

5) $(f(x)g(x))p(x) = f(x)(g(x)p(x)),\ \forall f(x), g(x), p(x) \in \mathbb{Z}[x]$

6) $p(x)(f(x)+g(x)) = p(x)f(x) + p(x)g(x)$
$\forall p(x), f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$

Utilizando da transposição das propriedades válidas para o conjunto dos inteiros, facilmente obteremos verdadeiro para todas elas

FORONI

Figura 7 terceira folha de respostas do grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)

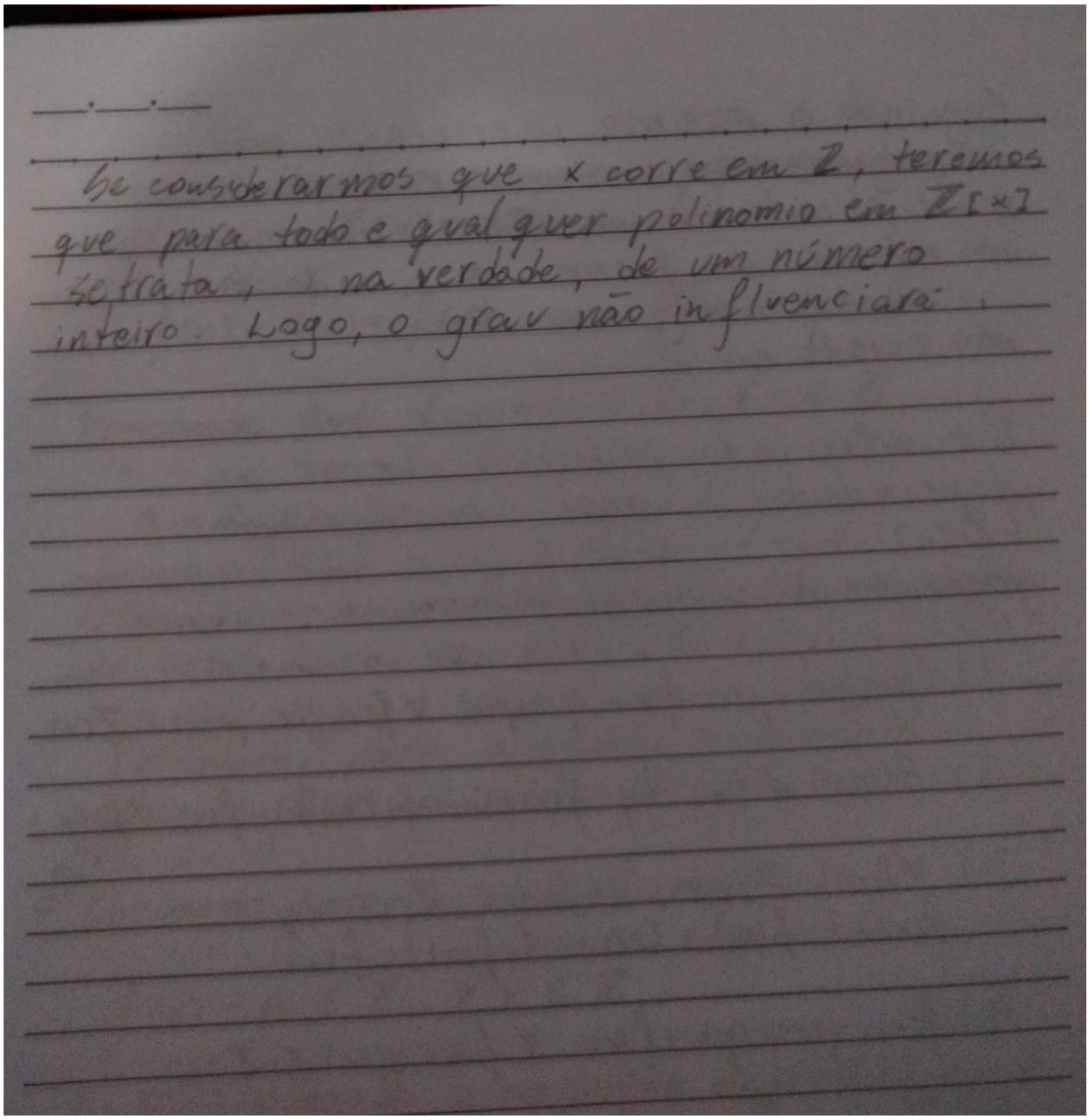


Figura 8 quarta folha de resposta do grupo B (imagem enviada por um dos estudantes pelo seu celular)