

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
JÚLIO DE MESQUITA FILHO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS
EXATAS

TIAGO BOTARI

Aceleração de Fermi em bilhares com fronteiras dependentes do tempo descritas por osciladores não lineares: caso conservativo e dissipativo

Rio Claro

2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de
Rio Claro

TIAGO BOTARI

Aceleração de Fermi em bilhares com fronteiras
dependentes do tempo descritas por osciladores não
lineares: caso conservativo e dissipativo

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

VERSÃO ORIGINAL

Rio Claro

2012

TIAGO BOTARI

Aceleração de Fermi em bilhares com fronteiras dependentes do tempo descritas por osciladores não lineares: caso conservativo e dissipativo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Prof. Dr. Tiago Kroetz

VERSÃO ORIGINAL

Rio Claro

2012

Dedico esta dissertação à minha família.

AGRADECIMENTOS

Acredito que a busca do conhecimento dificilmente é feita sozinho, sendo a interação e discussão com outras pessoas fundamentais para aprendizagem e elucidação de ideias. Deste modo acho fundamental agradecer a participação de algumas dessas pessoas.

À minha família que me incentivou o estudo e ao questionamento das coisas. Ao meu irmão por ser o meu primeiro companheiro de discussões e debates sobre ciências e outros assuntos.

À Sabrina Nicoletti Carvalho dos Santos que ao longo de mais de dois anos vem sendo uma grande companheira, muito compreensiva, atenciosa e carinhosa. Sempre expondo o outro lado das coisas que para mim as vezes é oculto.

Aos amigos Bruno Moser Nunes, Caio Bruno Wetterich, Carlos Miranda Awano, Everton Cortez Rosado, Filipe Batista Ribeiro, Igor Fier, Júlia Inforzato Guermandi, Leandro Xavier Moreno, Luís Felipe Barbosa Faria Gonçalves, Rafael Amatte Bizão, Rivania Maria do Nascimento Teixeira, Renato Juliano Martins, Renato Sturion Martins, Silvana Beani Poiani, Vinicius Tadeu Santana, Willian Chiappim Junior. Por sempre estarem interessados nas minhas ideias e dispostos a discutir os mais diversos assuntos. Agradeço também por não terem faltado nas horas difíceis e participarem em horas alegres de descontração e comemoração. Espero que nossa amizade seja duradora e que juntos possamos elevar o nível do nosso conhecimento.

A Everlin Carolina Ferreira da Silva, Kelly Tasso de Paula, Larissa de Oliveira Figueira e Thaís L. Caliman por sempre me receberem na sua casa e pelas oportunidades de discutir sobre física.

Ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel pela orientação, conselhos e otimismo constante. Também por me iniciar na atividade de pesquisa de um forma agradável e com extrema liberdade. Espero ter a oportunidade de trabalharmos juntos novamente.

Aos colegas do grupo de pesquisa de Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear pelas discussões e debates nas reuniões do grupo, levantando e discutindo questões sobre este trabalho.

Aos professores da Unesp de Rio Claro por sempre estarem dispostos a ensinar, discutir e debater sobre Física. Em especial agradeço a Profa. Dra. Lygia de Moura Walmsley, Prof. Dr. Makoto Yoshida, Prof. Dr. Roberto Eugenio Lagos Monaco e Prof. Dr. Tadashi Yokoyama.

Gostaria de agradecer também aos funcionários do Departamento de Física, as secretárias Maristela C. Rebusine e Rosana A. Gonçalves Pesce, aos técnicos Geraldo A. de Lima Sobrinho e Saulo R. Canola, as funcionárias responsáveis pela limpeza. E a Nilza H. Sartori funcionária da biblioteca. Ao Orlando S. do Nascimento Júnior funcionário do DEMAC. Por serem tão prestativos, dispostos e pacientes em me ajudar.

A FAPESP e CAPES pelo apoio financeiro.

“Por que a silhueta de uma árvore sem folhas, batida por um tempestade, sobre o pano de fundo de um céu de entardecer no inverno é considerada bela, mas a silhueta correspondente de um edifício universitário de múltiplos propósitos não é, apesar de todos os esforços do arquiteto? A resposta parece-me, mesmo que seja um tanto especulativa, estar nas novas maneiras de ver os sistemas dinâmicos. Nosso sentimento de beleza é inspirado pela disposição harmoniosa da ordem e da desordem, tal como ocorre nos objetos naturais - nas nuvens, nas árvores, nas cadeias de montanhas ou nos cristais de neve. As formas de todos eles são processos dinâmicos congelados em formas físicas, e combinações específicas de ordem e desordem são típicas delas”.

Gert Eilenberger, físico alemão.

Resumo

Botari, T. **Aceleração de Fermi em bilhares com fronteiras dependentes do tempo descritas por osciladores não lineares: caso conservativo e dissipativo** 2011 78 p. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Geociências e Ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

Neste trabalho estudamos dois bilhares com fronteira móvel cuja perturbação temporal é dada por um oscilador *van der Pol*. Estudamos um bilhar unidimensional e outro bidimensional na qual uma ou mais partículas clássicas de massa m não interagentes são confinadas ao interior da fronteira que define o bilhar. Investigando algumas propriedades dinâmicas e estatísticas da partícula em função do parâmetro χ que controla o termo não linear e o parâmetro y_0 que controla a amplitude do oscilador de *van der Pol*. O bilhar unidimensional consiste em duas paredes rígidas, em que uma delas é móvel centrada na origem regida pelo oscilador de *van der Pol* e a outra fixa em L . Descrevemos todos os procedimentos para construção do mapeamento que fornece a dinâmica da partícula, assim como as equações necessárias que definem o movimento da parede móvel. O espaço de fases, o expoente de *Lyapunov* e a velocidade média são obtidos para diferentes valores de parâmetros de controle. Para o caso em que massa da partícula (m_p) é muito menor que a massa da parede móvel (m_w), $\mu = m_p/m_w \simeq 0$, podemos dividir o regime dinâmico em função do parâmetro χ em dois tipos: (i) que recupera os resultados do modelo *Fermi-Ulam*; e (ii) no qual é observado um regime de crescimento da velocidade média final. Para o caso em que $\mu \neq 0$, as colisões da partícula com a parede móvel perturbam o movimento da parede móvel e o sistema se torna dissipativo. Neste caso a dinâmica da partícula tende a pontos fixos de forma assintótica passando por um transiente inicial. Para este caso construímos a bacia de atração e a frequência do número de períodos de um conjunto de condições iniciais. Para o bilhar bidimensional, construímos um modelo em que a fronteira é do tipo ovoide, analisamos o caso estático e o móvel regida pelo oscilador de *van der Pol*. Quando a razão entre a massa da partícula e da fronteira é $\mu = 0$, calculamos a velocidade média em função do número de colisões com a fronteira para diversos valores dos parâmetros que controlam o oscilador de *van der Pol*, χ e y_0 e para os parâmetros que controlam a forma da fronteira. Esse caso mostra que o fenômeno de aceleração de *Fermi* é observado. Para o caso em que $\mu \neq 0$, não é mais observado o fenômeno de aceleração de *Fermi*, e as órbitas tanto da partícula quanto da fronteira entram em um regime dinâmico em que sua energia média fica limitada.

Palavras-chave: Bilhares. Caos. Oscilador de van der Pol. Sistemas Dinâmicos.

Abstract

Botari, T. **Fermi acceleration in billiards with boundary described by a nonlinear oscillator: conservative and dissipative case** 2011 78 p. Dissertation (Master in Physics) - Instituto de Geociências e Ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

Some dynamical properties for an ensemble of non-interacting particles confined in a billiard with a time-dependent boundary are studied. The boundary is given by *van der Pol* oscillator and two cases are considered namely: (i) one-dimensional and (ii) two-dimensional dynamics.

For the one-dimensional case, we considered the dynamics of classical particle of mass m confined to bounce between two rigid walls. One of them is fixed at a distance L from the average position of the first that fluctuates according to a *van der Pol* oscillator. We consider the case where the mass of the particle is sufficiently small as compared to the mass of the moving wall. Then we investigate some properties of the phase space including the average velocity of the particle. Our results reveal a scaling invariance for the final average velocity, i.e., when $n \rightarrow \infty$. We discuss also the case when the mass of the particle is a fraction of the mass of the moving wall therefore showing the system now shows features of dissipative model. This is characterized specifically by the presence of attractors in the phase space.

For the two-dimensional case, we considered the dynamics of a classical particle of mass m where the particle is confined to bounce inside a billiard whose boundary is of elliptical-oval like shape. First we analyze the static case. Second we consider the case where the boundary moves according to a *van der Pol* oscillator. We discuss the model in a similar way as made for the 1-D case including very small mass of the particle ($m = 0$) and $m \neq 0$. Dynamical properties for the particle were obtained like the behavior of the average velocity therefore demonstrating that unlimited energy gain is in course, as predicted by the LRA conjecture. For the case of $m \neq 0$, dissipative features were observed thus leading the particle to stop unlimited energy growth.

Keywords: Billiards. Chaos. *Van der Pol* oscillator. Dynamical Systems.

LISTA DE FIGURAS

- 1.1 *Exemplo de um bilhar.* p. 13
- 3.1 *Algumas órbitas do espaço de fases para o oscilador de van der Pol em função do parâmetro de controle χ' . Bifurcação de Hopf ocorre a partir de $\chi' = 0$.* p. 27
- 3.2 *(a) Espaço de fases para oscilador de van der Pol; (b) y versus τ . Ambos os gráficos para o parâmetro $\chi' = 0.1$.* p. 28
- 3.3 *(a) Espaço de fases para oscilador de van der Pol; (b) y versus τ . Ambos os gráficos para o parâmetro $\chi' = 0.5$.* p. 29
- 3.4 *(a) Espaço de fases para oscilador de van der Pol; (b) y versus τ . Ambos os gráficos para o parâmetro $\chi' = 2$.* p. 29
- 4.1 *Bilhar unidimensional, parede móvel centrada em $x = 0$ e a parede fixa em $x = L$.* p. 31
- 4.2 *Comparação entre o espaço de fases e trajetória da partícula. Pontos vermelhos para órbita caótica, azuis órbitas em ilha KAM e verdes para órbitas em curva invariante. (a) Espaço de fases para o modelo de Fermi-Ulam, fronteira oscilando com $0,1 \cos(t + \theta)$; (b) Trajetória da partícula com as mesmas cores da sua órbita no espaço de fases, parede móvel e fixa representadas em linhas amarelas.* p. 35
- 4.3 *(a) Espaço de fases do movimento da parede móvel, v_w versus y ; (b) Curva na cor vermelha v_w versus τ , curva na cor preta y versus τ ; (c) Espaço de fases v versus ϕ . Os parâmetros de controle usados em todos os gráficos foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^3$. Representação das órbitas: linhas azuis ilhas KAM, verdes curvas invariantes e pontos pretos mar de caos.* p. 36

4.4	(a) Espaço de fases do movimento da parede móvel, v_w versus y ; (b) Curva na cor vermelha v_w versus τ , curva na cor preta y versus τ ; (c) Espaço de fases v versus ϕ . Os parâmetros de controle usados em todos os gráficos foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^4$. Representação das órbitas: linhas azuis ilhas KAM, verdes curvas invariantes e pontos pretos mar de caos.	p. 37
4.5	(a) Espaço de fase do movimento da parede móvel, v_w versus y ; (b) Curva na cor vermelha v_w versus τ , curva na cor preta y versus τ ; (c) Espaço de fases v versus ϕ . Os parâmetros de controle usados em todos os gráficos foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^5$. Representação das órbitas: linhas azuis ilhas KAM, verdes curvas invariantes e pontos pretos mar de caos.	p. 38
4.6	(a) Espaço de fases de v versus ϕ ; (b) Zoom para região no espaço de fases que surgem as primeiras curvas invariantes; (c) Zoom para região no espaço de fases que existem ilhas KAM. Os parâmetros de controle usados foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^5$;	p. 39
4.7	Expoente de Lyapunov em função do número de colisões com o parâmetro de controle $y_0 = 10^{-2}$.	p. 43
4.8	Comparação entre 3 trajetórias próximas com $y_0 = 10^{-2}$ para distintos valores de parâmetro de controle χ . Linha amarela corresponde a parede móvel. (a) e (c) y versus τ para $\chi = 10^2$; (b) e (d) y versus τ para $\chi = 10^5$.	p. 44
4.9	Comparação entre os diferentes métodos utilizados. Quadrados são calculados utilizando o método de transformada a baixa velocidade proposto e os círculos são calculados pelo método descrito pela equação (5.24).	p. 46
4.10	Velocidade média para $y_0 = 0,001$ e diversos valores do parâmetro de controle χ .	p. 47
4.11	Velocidade média final $\langle v \rangle_f$ obtida da extrapolação da velocidade média $\langle v \rangle$ quando $n \rightarrow \infty$.	p. 48
4.12	(a) Comportamento de $\langle v \rangle_f^{FU}$ versus y_0 e o valor do expoente α ; (b) Comportamento de χ_c versus y_0 e o expoente z .	p. 49
4.13	Colapso das curvas de $\langle v \rangle_f$ versus χ quando reescaladas, eixo horizontal como $\chi \rightarrow \chi y_0^{-z}$ e o eixo vertical como $\langle v \rangle_f \rightarrow \langle v \rangle_f y_0^{-\alpha}$.	p. 50
4.14	(a) v versus x , pontos amarelos representam o transiente inicial; (b) Espaço de fases para o oscilador de van der Pol quando é perturbado pelas colisões com a partícula, mapa (4.55). Os parâmetros de controle utilizados foram $y_0 = 10^{-3}$, $\mu = 0,004$ e $\chi = 10^6$. Quadrados são pontos no instante da colisão com a partícula.	p. 51
4.15	(a) Bacia de atração v_0 versus ϕ_0 ; (b) Pontos fixos v versus x . Os parâmetros de controle usados foram $y_0 = 10^{-3}$, $\mu = 0,004$ e $\chi = 10^6$.	p. 52
4.16	(a) Bacia de atração v_0 versus ϕ_0 ; (b) Espaço de fases quando $\mu = 0$. Os parâmetros de controle usados foram $y_0 = 10^{-3}$, $\mu = 0,004$ e $\chi = 10^6$.	p. 53

4.17	<i>Fração entre a frequência do número de períodos dos pontos fixos e o número de condições iniciais total. Os parâmetros controle usados foram $\mu = 0,004$, $\chi = 10^6$ e $y_0 = 10^{-3}$.</i>	p. 54
5.1	<i>Exemplo de fronteiras do bilhar bidimensional.</i>	p. 57
5.2	<i>Ilustração de uma trajetória e os ângulos θ, α e ϕ para um partícula confinada em um bilhar bidimensional.</i>	p. 58
5.3	<i>(a) Espaço de fases para o bilhar circular; (b) Duas trajetórias para o bilhar circular.</i>	p. 59
5.4	<i>Órbitas em azul rotores, órbitas em verde libradores e órbitas em vermelho separatriz. (a) Espaço de fases para o bilhar elíptico; (b) Duas trajetórias para o bilhar elíptico.</i>	p. 60
5.5	<i>Órbitas em azul rotores, órbitas em verde libradores e órbitas em preto movimento caótico. (a) Espaço de fases para o bilhar ovoide; (b) Duas trajetórias para o bilhar ovoide.</i>	p. 61
5.6	<i>Comportamento da velocidade média da partícula $\langle V \rangle$ versus n para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $y_0 = 0.001$ e diversos valores de V_0.</i>	p. 62
5.7	<i>Comportamento da velocidade média $\langle V \rangle$ versus n para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $y_0 = 0.001$ e diversos valores de χ.</i>	p. 63
5.8	<i>Comportamento do expoente da lei de potência final da velocidade média β_f versus χ para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.2$ e $y_0 = 0.001$.</i>	p. 64
5.9	<i>Comportamento da velocidade média $\langle V \rangle$ versus n. (a) para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$; (b) para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.6$, $y_0 = 0.001$.</i>	p. 65
5.10	<i>Projeção do espaço de fases no plano formado por V e θ para os parâmetros de controle $\mu = 0.001$, $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$ e $\chi = 10^6$.</i>	p. 67
5.11	<i>Projeção do espaço de fases no plano formado por V e θ para os parâmetros de controle $\mu = 0.008$, $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$ e $\chi = 10^6$.</i>	p. 68
5.12	<i>Velocidade média de um conjunto de 125 condições iniciais para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$ e $\chi = 10^6$.</i>	p. 69

SUMÁRIO

1	Introdução	p. 13
2	Conceitos Básicos	p. 17
2.1	Sistemas Dinâmicos	p. 17
2.1.1	Aspectos históricos	p. 17
2.1.2	Equações diferenciais e mapas	p. 19
2.2	O teorema de Liouville	p. 20
2.3	O teorema de recorrência de Poincaré	p. 22
3	Oscilador de <i>van der Pol</i>	p. 24
3.1	Conceitos históricos e o modelo	p. 24
3.2	Linearizando o oscilador de <i>van der Pol</i>	p. 26
3.3	Bifurcação de <i>Hopf</i>	p. 27
3.4	Simulações Numéricas	p. 27
4	Bilhar unidimensional com fronteira dependente do tempo regida pelo oscilador de <i>van der Pol</i>	p. 30
4.1	Conceitos básicos	p. 30
4.2	Instante da colisão	p. 32
4.2.1	Casos	p. 32
4.3	Mapa para o caso em que $\mu = 0$	p. 34
4.3.1	Cálculo da matriz Jacobiana	p. 38
4.3.2	Expoente de <i>Lyapunov</i>	p. 41
4.3.3	Análise da Velocidade Média	p. 44
4.4	Mapa para o caso em que $\mu \neq 0$	p. 51
4.5	Conclusões	p. 55

5	Bilhar elíptico ovoide	p. 56
5.1	Forma estática	p. 56
5.2	Fronteira móvel regida pelo oscilador de <i>van der Pol</i> , caso $\mu = 0$	p. 61
5.2.1	Análise da Velocidade Média	p. 65
5.3	Caso em que $\mu \neq 0$	p. 68
5.4	Conclusões	p. 70
6	Conclusões e Perspectivas	p. 72

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Bilhares constituem uma das mais simples classes de sistemas dinâmicos e vêm despertando grande interesse em físicos e matemáticos nos últimos anos, sendo muito populares no estudo de caos Hamiltoniano clássico⁽¹⁻⁴⁾ e quântico⁽⁴⁻⁸⁾, ambos com trabalhos experimentais⁽⁹⁾. Tais sistemas são aplicados em áreas da química⁽¹⁰⁾, de fenômenos de transferência de calor⁽¹¹⁾, gases quânticos⁽¹²⁾, de supercondutores⁽¹³⁾, guias de ondas ópticas⁽¹⁴⁻¹⁵⁾, nanoestruturas⁽¹⁶⁾, *quantum dots*⁽¹⁷⁻¹⁸⁾, entre outros.

Basicamente, bilhares consistem de sistemas em que uma ou mais partículas são confinadas dentro de uma região fechada Q no espaço e sofrem colisões com a fronteira ∂Q que limita essa região; as colisões podem ser tratadas como elásticas ou inelásticas. Um exemplo de um bilhar pode ser visto na figura 1.1.

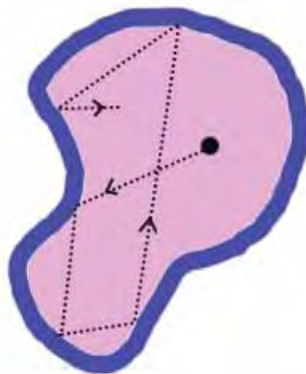


Figura 1.1: *Exemplo de um bilhar.*

Dependendo da forma do bilhar, as propriedades da partícula apresentam aspectos dinâmicos e estatísticos variados, podendo ser integrável e não-integrável. Sistemas integráveis são aqueles que apresentam um número de constantes de movimento igual ou maior que o número de graus de liberdade do sistema. Neste caso pode apresentar órbitas periódicas e/ou quase-periódicas. Já sistemas não-integráveis podem ser classificados em duas classes. Uma delas é a totalmente caótica na qual não existem órbitas periódicas estáveis. Um exemplo desse tipo de sistema é o bilhar de Sinai⁽¹⁹⁾. A outra classe é a dos sistemas mistos que podem apresentar um conjunto de órbitas quase-periódicas (Kolmogorov-Arnold-Moser - KAM⁽²⁰⁾), órbitas caóticas, e órbitas periódicas estáveis e instáveis. As órbitas caóticas apresentam período definido e apresentam grande sensibilidade às condições iniciais. Normalmente a classificação de uma órbita caótica é feita através do expoente de Lyapunov, que considera que a distância entre duas órbitas com condições iniciais próximas divergem exponencialmente à medida que o tempo passa.

Apesar da simplicidade dos bilhares, estes podem apresentar comportamento totalmente caótico, integrável ou misto. Devido a essa simplicidade, o estudo de bilhares vem crescendo. Podem ser usados para a investigação de comportamentos complexos que são exibidos em outros tipos de modelagens físicas e matemáticas. Deste modo pode-se estudar caos Hamiltoniano e sua comparação quântica sem a complicação que a resolução que as equações diferenciais podem trazer para o caso clássico.

A fronteira do bilhar pode ser fixa, $\partial Q = c$ em que c é constante no tempo, ou móvel $\partial Q = \partial Q(t)$. Para bilhares com fronteiras fixas não ocorre troca de energia entre partícula e fronteiras durante o choque. Essa condição leva a uma reflexão especular. Entretanto quando $\partial Q = \partial Q(t)$, existe troca de energia entre a partícula e a fronteira. Tais trocas são de grande interesse, devido uma variedade de fenômenos da natureza que podem ser modelados.

Um fenômeno que vem sendo investigado há vários anos é chamado de aceleração de *Fermi*, o qual tenta descrever o mecanismo que raios cósmicos podem ser acelerados no universo. Proposto por Enrico Fermi em 1949⁽²¹⁾, considerou que campos eletromagnéticos oscilantes poderiam acelerar partículas carregadas a energias muito altas. Bilhares com fronteira dependente do tempo são excelentes candidatos para modelar tais sistemas. Diversos modelos foram criados com o intuito de compreender este fenômeno, alguns deles são: o modelo *Fermi-Ulam*⁽²²⁻²³⁾, o modelo *bouncer*⁽²³⁾, modelos de bilhares bidimensionais com fronteira dependentes do tempo⁽²⁴⁻²⁷⁾, entre outros.

O modelo Fermi-Ulam⁽²²⁻²³⁾ consiste de uma partícula clássica confinada entre duas paredes, uma fixa e a outra móvel, em que a parede móvel é regida por uma função temporal periódica suave¹ e a partícula pode vir a colidir ganhando ou perdendo energia

¹funções que tenham no mínimo até derivada segunda contínua⁽³¹⁾.

a cada colisão. O fenômeno de aceleração de *Fermi* não é verificado para este modelo. Isso ocorre devido ao fato de existirem curvas invariantes no espaço de fases que limitam o crescimento de energia da partícula. Entretanto, a introdução de potenciais⁽²⁸⁻²⁹⁾ ou termos relativísticos⁽³⁰⁾ nas equações de movimento do modelo, pode levar o sistema a apresentar aceleração de *Fermi*.

O modelo *bouncer*⁽²³⁾, consiste de uma partícula de massa m sujeita a um campo constante g e uma parede móvel limitando a partícula. Basicamente, pode ser visto como o modelo *Fermi-Ulam* na qual o mecanismo de retorno (parede fixa) foi trocado pelo campo gravitacional constante g . Assim, a partícula colide com a parede móvel ganhando ou perdendo energia e retorna novamente pela ação do campo para zona de colisão com a parede móvel. Para este modelo a aceleração de Fermi é verificada para alguns valores dos parâmetros de controle que definem o sistema.

A questão fundamental a ser respondida é a maneira como a aceleração de *Fermi* ocorre, ou seja, quais as propriedades que o bilhar deve apresentar para que ela seja observada, seja pela forma da fronteira ou o tipo de oscilação para a fronteira que deve ser escolhida. Isso implica que sabendo as leis que regem o bilhar, possa-se determinar se este apresentará ou não crescimento ilimitado de energia.

Ainda não existe uma resposta rigorosa que possibilite saber, *a priori*, se o sistema apresentará ou não aceleração de *Fermi*. Nesse sentido, recentemente uma conjectura chamada de *LRA* (Loskutov-Ryabov-Akinshin) foi proposta⁽³²⁾. A conjectura *LRA* afirma que uma condição suficiente para que se tenha aceleração de *Fermi* em bilhares com fronteira móvel é que em sua forma estática exista dinâmica caótica. Diversos modelos foram construídos mostrando a concordância com a conjectura *LRA*, porém um trabalho recente mostra que o bilhar elíptico, mesmo sendo totalmente integrável para o caso estático, pode apresentar aceleração de *Fermi* para alguns parâmetros de controle⁽³³⁾.

A descrição matemática utilizada para modelagem de bilhares clássicos é feita normalmente através de mapeamentos que descrevem uma situação posterior através da anterior à colisão da partícula com a fronteira. O estudo dos bilhares proporciona diversas questões ainda não compreendidas e muitas outras a serem investigadas do ponto de vista físico e matemático.

Neste trabalho será considerado um bilhar com fronteira oscilante regida por oscilações não-lineares. Será utilizado o oscilador de *van der Pol* para movimento da fronteira. Primeiramente, são apresentadas algumas propriedades dinâmicas do oscilador de *van der Pol*, como estabilidade, bifurcação de Hopf e a investigação numérica por meio da integração das equações diferenciais. Após essa etapa será apresentada a construção de um modelo para um bilhar unidimensional com a fronteira dependente do tempo regida pelo

oscilador de *van der Pol*. Então apresentaremos a construção de um modelo para um bilhar bidimensional com a fronteira fixa e com a fronteira móvel, regida pelo oscilador de *van der Pol*. A descrição matemática utilizada será feita através de mapeamento discreto para ambos casos dos modelos apresentados, unidimensional e bidimensional.

Para o caso do modelo unidimensional serão apresentados todos os passos necessários para obtenção do mapa que descreve a dinâmica da partícula. Vamos analisar dois casos distintos: (i) quando a massa da partícula é muito menor do que a da parede móvel do bilhar, expresso pelo parâmetro $\mu = 0$; e (ii) quando a massa da partícula for apreciável frente a massa da parede móvel, $\mu \neq 0$. Para o caso (i) $\mu = 0$ vamos apresentar o espaço de fases da partícula, exibindo as consequências da mudança dos parâmetros que controlam o oscilador de *van der Pol* nas propriedades dinâmicas da partícula. Ainda para $\mu = 0$ será mostrada a invariância de escala que o modelo apresenta para a velocidade média final da partícula frente aos parâmetros de controle que regem o oscilador de *van der Pol*. Também descrevemos um método assim como o cálculo do expoente de Lyapunov caracterizando o comportamento caótico que o modelo pode apresentar. Para o caso (ii) $\mu \neq 0$ a partícula e a fronteira trocam energia, deste modo o sistema se torna dissipativo. Portanto construímos a bacia de atração das condições iniciais, mostrando os pontos fixos e seus períodos que o conjunto dessas condições iniciais convergem.

Para o modelo bidimensional vamos analisar o bilhar conhecido como elíptico-ovoide⁽³⁴⁻³⁵⁾ para o caso estático e o ovoide para o caso da fronteira móvel. Primeiro descrevemos os passos necessários para construção dos mapas e analisamos as propriedades do modelo construído por meio do espaço de fases e propriedades estatísticas analisando a velocidade média da partícula. O bilhar elíptico-ovoide é descrito por três parâmetros que controlam a forma da fronteira ε , e e p . A partir da escolha desses parâmetros podemos obter o bilhar circular, elíptico, ovoide e o elíptico-ovoide. Mostramos as fronteiras que podem ser geradas e o tipo de trajetória que a partícula pode percorrer comparando a trajetória no bilhar com a trajetória no espaço de fases. Para a forma em que a fronteira é móvel regida pelo oscilador de *van der Pol*, analisamos a velocidade média da partícula frente ao parâmetro de controle que rege o oscilador de *van der Pol*.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos fundamentais do estudo de sistemas dinâmicos; no Capítulo 3 apresentamos alguns aspectos e propriedades do oscilador de *van der Pol*; no Capítulo 4 apresentamos a construção e algumas propriedades do bilhar unidimensional com parede regida pelo oscilador de *van der Pol*; no Capítulo 5 apresentamos os passos necessários para construção do modelo bidimensional elíptico-ovoide com fronteira estática e o ovoide com fronteira dependente do tempo regida pelo o oscilador de *van der Pol* discutindo algumas propriedades dinâmicas e estatísticas.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos fundamentais para o estudo de sistemas dinâmicos. Fazemos primeiramente uma breve introdução histórica dos sistemas dinâmicos, em seguida mostramos a definição de um sistema dinâmico por equações diferenciais e mapas. Depois apresentamos o teorema de Liouville para sistemas Hamiltonianos e sistema geral de equações diferenciais e o teorema de recorrência de Poincaré.

2.1 Sistemas Dinâmicos

2.1.1 Aspectos históricos

Nesta subseção apresentamos alguns aspectos históricos de uma forma breve. Uma leitura mais profunda e ampla, para a elucidação e novas motivações ao estudo de sistemas dinâmicos, é sugerida na referências⁽³⁶⁻³⁷⁾.

O estudo de sistemas dinâmicos tem origem na mecânica celeste, através de Aristóteles com as primeiras questões qualitativas e a formulação de diversas questões relacionadas com o movimento dos corpos, depois Ptolomeu(85-165) com o modelo geocêntrico que afirmava que a terra estava no centro do Universo. Somente depois das observações de T. Brahe (1546-1601) que o modelo heliocêntrico proposto por N. Copérnico (1473-1543) foi consolidado por J. Kepler (1571-1630) com a mudança das órbitas dos planetas de circulares para elípticas.

Então Galileu Galilei (1564-1642) desenvolve diversas pesquisas no campo das observações astronômicas e no movimento dos corpos, criando uma nova metodologia na qual verificava proposições teóricas feitas. Os conceitos básicos de Dinâmica que tratam as causas dos movimentos foram introduzidas por ele, como a ideia de inércia, a aceleração constante que os corpos apresentam ao caírem, entre outras. Através da experimentação Galileu refutou algumas ideias de Aristóteles que permaneciam até aquela época.

As ideias de Galileu influenciaram a geração seguinte de cientistas como Isaac Newton(1642-1727) que nasce no ano da morte de Galileu. Newton é considerado um dos maiores cientistas que já existiram. Seu livro sobre mecânica intitulado *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* é considerado a maior contribuição feita por uma única pessoa. Contribuiu em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, a concepção do cálculo diferencial e integral, na ótica, nas leis da mecânica clássica entre outras. Com seus trabalhos em mecânica celeste, Newton calculou como forças proporcionais ao inverso do quadrado geravam órbitas elípticas. Com seus cálculos deduziu analiticamente a terceira lei de Kepler que afirma $T^2/R^3 = C$, ou seja, a razão entre o quadrado do período de translação e a distância do semi-eixo maior elevada ao cubo é igual a uma constante igual para todos os planetas. As leis do movimento de Newton possibilitaram as soluções e previsões de diversos problemas. Os cientistas da época chegaram a acreditar que os pilares fundamentais da mecânica estavam completos e que o conhecimento das condições iniciais e das leis que regiam o movimento eram condições suficientes para uma descrição completa da evolução do fenômeno estudado.

A partir dessas ideias estabelecidas por Newton, passou-se a acreditar num caráter determinístico da natureza, ou seja, as equações resultariam na previsibilidade da evolução do sistema investigado. Essa crença no determinismo pode ser expressa pela frase do famoso matemático e físico francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) que diz: *“Nós podemos tomar o estado presente do universo como o efeito do seu passado e a causa do seu futuro. Um intelecto que, em dado momento, conhecesse todas as forças que dirigem a natureza e todas as posições de todos os itens dos quais a natureza é composta, se este intelecto também fosse vasto o suficiente para analisar essas informações, compreenderia numa única fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os do menor átomo; para tal intelecto nada seria incerto e o futuro, assim como o passado, seria presente perante seus olhos”*. Uma das questões em que Laplace envolveu-se foi a da estabilidade do sistema solar. Entretanto, apenas com o trabalho de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), foram estabelecidos critérios para estabilidade de sistemas. Basicamente, diz que uma trajetória é estável se uma trajetória próxima em determinado instante continuar próxima à primeira para um tempo suficientemente longo.

A ideia determinista começa a ser abandonada no início do século XX devido ao

surgimento da mecânica quântica e a teoria do caos. A mecânica quântica estabeleceu um limite finito para a precisão de certas grandezas físicas. E a teoria do caos que surgiu no estudo de equações diferenciais não lineares mostrou a imprevisibilidade da solução⁽³⁸⁾, apesar de serem deterministas, variações infinitesimais das condições iniciais trazem consequências significativas na solução para tempo suficientemente grande.

2.1.2 Equações diferenciais e mapas

Um sistema dinâmico pode ser definido como um conjunto de entes que sofrem algum tipo de interação seja externa, entre si, ou ambas. Sua evolução ocorre em função do tempo que faz o papel de variável livre, independe da evolução do sistema, também chamada de variável independente. As descrições matemáticas utilizadas para modelar sistemas dinâmicos são as mais variadas como, por exemplo, mapas⁽²⁵⁾, equações diferenciais⁽³⁸⁾, autômato celular⁽³⁹⁾, entre outras.

No caso de o tempo variar de forma contínua o tratamento matemático utilizado pode ser feito por meio de um sistema de equações diferenciais, estabelecendo as relações entre as grandezas que descrevem o sistema.

Para o caso em que o tempo é contínuo um sistema dinâmico pode ser definido como um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem com n variáveis dado por

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

em que \mathbf{x} é um vetor (x_1, x_2, \dots, x_n) e $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ é um vetor de cada variável derivada em relação ao tempo t . Quando $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ não dependente do tempo o sistema é dito autônomo. O sistema também pode ser classificado como linear se $\mathbf{f}(x)$ só contenha termos em x com grau um ou como não-linear quando existem termos não-lineares em $\mathbf{f}(x)$. Para sistemas lineares o sistema de equações é de simples resolução, entretanto para sistemas de equações diferenciais não-lineares normalmente não existe uma solução analítica.

Para o caso em que o tempo pode ser tratado como discreto, uma abordagem matemática que é muito usada é a construção do mapeamento para o modelo. Uma mapa estabelece o estado posterior do sistema a partir do anterior através de um conjunto de equações que o definem. Podemos definir um mapeamento da seguinte forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n, t_n) \quad (2.2)$$

em que \mathbf{x}_{n+1} é um vetor das variáveis que definem o sistema, t_n o tempo discreto e \mathbf{T} é um vetor de equações que definem as relações entre as variáveis. Um mapeamento pode ser classificado como linear ou não-linear tal da mesma forma que sistemas de equações

diferenciais. Podemos também a partir de um sistema de equações diferenciais obter mapas, discretizando o conjunto de equações diferenciais através do método conhecido como diferenças finitas, ou usando seções de Poincaré. Seções de Poincaré basicamente reduz o fluxo contínuo de dimensão N do espaço de fases para um mapa de dimensão $N - 1$ que intercepta um plano que é perpendicular ao fluxo. Esse plano é chamado de seção de Poincaré.

As soluções do sistema dinâmico devem satisfazer as relações estabelecidas pelas equações que o descrevem e a uma condição inicial. A evolução de uma condição inicial no tempo gera uma órbita e o conjunto de todas as órbitas possíveis geram o espaço de fases do sistema. Para soluções em que o campo vetorial se anula, $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0}$ para sistemas de equações diferenciais e $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}}_n)$ para mapas, o valor de $\bar{\mathbf{x}}$ não altera-se pela dinâmica do sistema e a este ponto $\bar{\mathbf{x}}$ é dado o nome de ponto fixo. Os pontos fixos são de fundamental importância no estudo de sistemas dinâmicos. A partir do conhecimento dos pontos fixos de um determinado sistema podemos traçar um esboço do espaço de fases, por meio da expansão em série de Taylor do conjunto de equações que modelam (\mathbf{F} no exemplo das equações diferenciais e \mathbf{T} para mapas). Alguns dos tipos de órbitas que podem ser encontradas no espaço de fase são: periódicas, quase-periódicas e caóticas. As órbitas periódicas se repetem em determinados intervalos de tempo que definem seu período. As órbitas quase-periódicas nunca se repetem, entretanto traçam uma curva no espaço de fases densamente preenchida. Para órbitas caóticas não existe um período definido e duas condições iniciais próximas divergem de forma exponencial.

2.2 O teorema de Liouville

O teorema de Liouville tem fundamental importância nas áreas de física estatística⁽⁴⁰⁾ e sistemas dinâmicos. Este diz respeito à preservação do elemento de volume no espaço de fases frente à evolução temporal. Para sistemas hamiltonianos sempre há preservação do elemento de volume do espaço de fases. Já para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, em geral devem satisfazer certas condições, como veremos.

Consideremos uma região D que limita um volume V dado por

$$V = \int_D d\eta, \quad (2.3)$$

em que $d\eta = dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Seja essa região propagada através das equações (2.1), ou seja, que leva $\eta \rightarrow \xi$ mapeando uma região $D(t)$ que encerra o volume $V(t)$ dado por

$$V(t) = \int_{D(t)} d\xi, \quad (2.4)$$

onde $d\xi = dy_1 dy_2 \dots dy_n$. Portanto, utilizando o teorema de mudança de variáveis em uma integral de múltiplas variáveis obtemos

$$V(t) = \int_{D(t)} \det(M) d\eta, \quad (2.5)$$

em que M é a matriz jacobiana da transformação que leva x para y . Portanto dependendo do valor do determinante do Jacobiano o volume pode: (i) contrair se $|\det(M)| < 1$; (ii) aumentar se $|\det(M)| > 1$; (iii) não mudar caso em que $|\det(M)| = 1$.

Para o caso de sistemas Hamiltonianos a matriz M é simplética, ou seja, $MJM^T = J$. Em que J é a matriz

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

e I é a matriz unidade. O determinante é dado por

$$\det(MJM^T) = (\det M)^2 \det J = \det J, \quad (2.7)$$

e desta forma chegamos a $\det M = \pm 1$ e $|\det M| = 1$. Visto que uma evolução temporal em sistemas Hamiltonianos é dado por transformações canônicas temos que o volume do espaço de fases é preservado pela evolução temporal, conhecida como teorema de *Liouville*⁽⁴⁰⁻⁴¹⁾.

Para o caso de equações diferenciais podemos resolver as equações para t muito pequeno de forma que a solução gerada seja da forma

$$x_i(t) = x_{i0} + t f_i(x_0) + O^2(t). \quad (2.8)$$

Da equação (2.8) acima, vemos que quando t se torna infinitesimal os termos maiores ou iguais a t^2 vão para zero. Em seguida, faremos uma transformação de variável definida como $y_i = x_i - t f_i(t)$ na qual leva $y_i = x_0$ para $x_i = x_i(t)$, que é uma evolução temporal infinitesimal. Para que ocorra preservação de volume do espaço de fases calculamos a matriz Jacobiana M desta transformação e seu determinante $\det(M)$ que será dado por

$$\det[M(y,t)] = \det \frac{\partial X}{\partial Y} = \det \left[1 + t \frac{\partial f}{\partial Y} \right], \quad (2.9)$$

em que $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Calculando o determinante pelo método de Laplace⁽⁴⁰⁻⁴¹⁾

$$\det \left[1 + t \frac{\partial f}{\partial Y} \right] = 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i}, \quad (2.10)$$

que pode ser reescrito como

$$1 + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = 1 + t \nabla f, \quad (2.11)$$

Substituindo o resultado do determinante, equação (2.11), na equação (2.5) obtemos

$$V(t) = \int_{D(0)} (1 + t \nabla f) dy, \quad (2.12)$$

em que $D(0)$ é a região inicial escolhida no tempo $t = 0$, o que leva a

$$V(t) = V(0) + t \int_{D(0)} \nabla f dy, \quad (2.13)$$

portanto para que o volume seja preservado temos que ter $\nabla f = 0$.

Para o caso do sistema ser descrito por mapeamentos temos uma relação de recorrência que pode ser expressa como

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n), \quad (2.14)$$

portanto a matriz jacobiana M é

$$M = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}, \quad (2.15)$$

e para haver preservação de volume temos que ter $\det(M) = \pm 1$.

2.3 O teorema de recorrência de Poincaré

Uma consequência imediata do Teorema de Liouville, preservação de volume no espaço de fases, é o teorema de recorrência de Poincaré⁽⁴⁰⁻⁴¹⁾ para sistemas em que estão limitados em uma região do espaço de fases, em outras palavras, que mapeiam uma região limitada sobre si mesma. O Teorema de recorrência de Poincaré afirma que sistemas que preservam alguma medida (volume no espaço de fases para sistemas Hamiltonianos) a evolução de uma condição inicial sempre retorna arbitrariamente próximo de uma região definida em torno dessa condição. Dada uma condição inicial descrita no espaço de fases pelo ponto P e uma região vizinha de P dada por u , existe um tempo finito na evolução do sistema em que a órbita volta arbitrariamente próxima ao ponto P interseccionando a região u .

Sendo g um propagador das equações que definem a evolução do sistema¹, temos portanto que a evolução de uma condição inicial qualquer será dada por $x_{t+1} = g(x_t)$. Em seguida, considere uma região D em que $g : D \rightarrow D$. Dado um ponto qualquer $x \in D$ e uma vizinhança $u \supset x$ (u que contenha x). Assim um aplicação $g(u)$ mapeia outra região de D e sucessivas aplicações $g(u)$, $g(g(u)) = g^2(u)$, $g^3(u)$, ..., $g^n(u)$, como g preserva medida e D é finito, em algum momento as regiões obtidas da iterações feitas sobre a região u terão

¹um conjunto de equações diferenciais ou um conjunto de equações que definem um mapeamento.

que apresentar intersecções entre si, assim para algum $k > m$ temos

$$g^k(u) \cap g^m(u) \neq \emptyset, \quad (2.16)$$

ou seja, a intersecção entre $g^k(u)$ com $g^m(u)$ é diferente de conjunto vazio. Podemos reescrever a equação (2.16) de forma

$$g^{(k-m)}(u) \cap u \neq \emptyset, \quad (2.17)$$

mostrando que dada uma condição inicial x existem condições iniciais arbitrariamente próximas de x que retornam à vizinhança de x .

CAPÍTULO 3

OSCILADOR DE *VAN DER POL*

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos do oscilador de *van der Pol*. É feita a análise de sua equação linearizada e deste modo é mostrada a existência de uma bifurcação de *Hopf*. Algumas simulações numéricas são feitas para integração da equação que rege o oscilador de *van der Pol* e seu comportamento é discutido.

3.1 Conceitos históricos e o modelo

O oscilador de *van der Pol* foi introduzido por Balthasar van der Pol⁽⁴²⁾ quando trabalhava pela empresa Phillips com válvulas. Estudando circuitos elétricos com tubos de vácuo notou que estes apresentavam oscilações que convergiam para regimes estáveis, esse tipo de atrator é conhecido atualmente como ciclo limite. Hoje estes sistemas são conhecidos como osciladores de relaxação. Um fato interessante é apresentado no trabalho de B. van der Pol e J. van der Mark em 1927 publicado na *Nature*⁽⁴³⁾, trata sobre a natureza ruidosa que o oscilador de *van der Pol* apresenta quando forçado em certas frequências, sendo essa uma das primeiras evidências registrada de caos determinístico.

O oscilador de *van der Pol* pode ser visto como uma generalização do oscilador harmônico pela introdução de um termo dissipativo não linear. Esse termo dissipativo é negativo para baixas amplitudes, fornecendo energia ao oscilador e se torna positivo para grandes amplitudes. A forma geral da equação diferencial para o oscilador de *van der Pol*

forçado pode ser escrito como

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + b(x^2 - x_0^2) \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\omega_f t), \quad (3.1)$$

em que M é massa, b a constante de amortecimento, x_0 esta relacionada a amplitude de oscilação, k a constante de Hook, F_0 amplitude de oscilação da força externa e ω_f frequências de oscilação da força externa. Definindo $\omega_0^2 = k/M$ chegamos a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M}(x^2 - x_0^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \sin(\omega_f t),$$

introduzindo uma transformação linear na coordenada igual a $x = \alpha y$ e temporal da forma $t = \beta \tau$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\alpha^3 b}{\beta M} (y^2 - \frac{x_0^2}{\alpha^2}) \frac{dy}{d\tau} + \alpha \omega_0^2 y &= \frac{F_0}{M} \sin(\omega_f \beta \tau), \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + \alpha^2 \beta \frac{b}{M} (y^2 - \frac{x_0^2}{\alpha^2}) \frac{dy}{d\tau} + \beta^2 \omega_0^2 y &= \frac{\beta^2 F_0}{\alpha M} \sin(\omega_f \beta \tau). \end{aligned}$$

Agora fazendo $\alpha = x_0$ e $\beta = 1/\omega_0$ temos

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{bx_0^2}{M\omega_0} (y^2 - 1) \frac{dy}{d\tau} + y = \frac{F_0}{M\omega_0^2 x_0} \sin\left(\frac{\omega_f}{\omega_0} \tau\right),$$

desta maneira definimos apenas três parâmetros para a equação diferencial, $\chi' = bx_0^2/M\omega_0$, $A = F_0/M\omega_0^2 x_0$ e $\omega = \omega_f/\omega_0$, obtendo

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \chi'(y^2 - 1) \frac{dy}{d\tau} + y = A \sin(\omega \tau). \quad (3.2)$$

Essa equação diferencial pertence a classe de equações diferenciais de Liénard⁽⁴⁵⁾. Para o caso em que a força externa for nula, ou seja $A = 0$, a equação se torna

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \chi'(y^2 - 1) \frac{dy}{d\tau} + y = 0. \quad (3.3)$$

Usaremos na construção dos modelos a equação do oscilador de *van der Pol* não forçada, equação (3.3). O termo $(y^2 - 1)$ cria uma competição de ganho e perda de energia no oscilador. Quando $|y| > 1$ existe uma força dissipativa ao passo que para $|y| < 1$ tem-se um termo que fornece energia para o oscilador. Pode existir um balanço dessa competição de energia, na qual, a ganhos e perdas de energia se equilibram. Deste modo pode-se esperar a presença de um ciclo limite.

3.2 Linearizando o oscilador de *van der Pol*

Uma análise de grande utilidade é a linearização das equações diferenciais. Isso pode ser feito para descrever o comportamento de sistemas não-lineares nas proximidades de pontos fixos e assim classificá-los. Para isso, expandimos as equações do sistema em série de Taylor retendo os termos lineares. Visto que obtida a solução da equação linearizada podemos analisar o comportamento da região em torno do ponto. Quando há uma convergência da região próxima para o ponto fixo esse é dito assintoticamente estável e quando há afastamento da região próxima o ponto é dito instável.

Vamos empregar a técnica de linearização para equação diferencial do oscilador de *van der Pol*, que pode ser escrita como duas equações de primeira ordem

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &= \xi, \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= -\chi'(y^2 - 1)\xi - y,\end{aligned}\tag{3.4}$$

que apresenta um ponto fixo em $P^*(y=0, \xi=0)$. Desenvolvendo a expansão em torno no ponto fixo $P^*(0,0)$, chegamos em

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &\cong \xi, \\ \frac{d\xi}{d\tau} &\cong \chi'\xi - y.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Escrevendo a matriz para o sistema

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \chi' \end{pmatrix},\tag{3.6}$$

a matriz M é igual a matriz Jacobina para este sistema. Para analisar o comportamento da equação linearizada devemos encontrar os autovalores associados a matriz M , da seguinte forma $\det(M - \lambda I) = 0$, o que leva a equação $\lambda^2 - \chi' + 1 = 0$. Resolvendo essa equação encontramos $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\chi' \pm \sqrt{\chi'^2 - 4})$. Podemos agora classificar qual é a estabilidade do ponto fixo $P^*(0,0)$ em função do parâmetro χ . Dessa maneira temos os seguintes casos⁽⁴⁴⁾: (i) $\chi' = 0$ temos que $Re(\lambda) = 0$ e $Im(\lambda) \neq 0$ classificado como caso elíptico ou degenerado; (ii) $0 < \chi' < 2$ para este caso temos um foco hiperbólico instável; (iii) $\chi' = 2$ temos nó impróprio instável; (iv) $0 > \chi' > -2$ temos foco hiperbólico assintoticamente estável; (v) $\chi' = -2$ temos nó impróprio assintoticamente estável; (vi) $\chi' < -2$ temos nó impróprio assintoticamente estável.

3.3 Bifurcação de *Hopf*

O oscilador de *van der Pol* apresenta um ponto de equilíbrio P em $(0, 0)$. Para $\chi' < 0$ o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, quando $\chi' > 0$ o ponto de equilíbrio é instável. Deste modo um ponto de equilíbrio em função do parâmetro χ' passa de estável para instável. Essa perda de estabilidade acontece em $\chi' = 0$ em que os autovalores associados da matrix Jacobiana do sistema são imaginários puro.

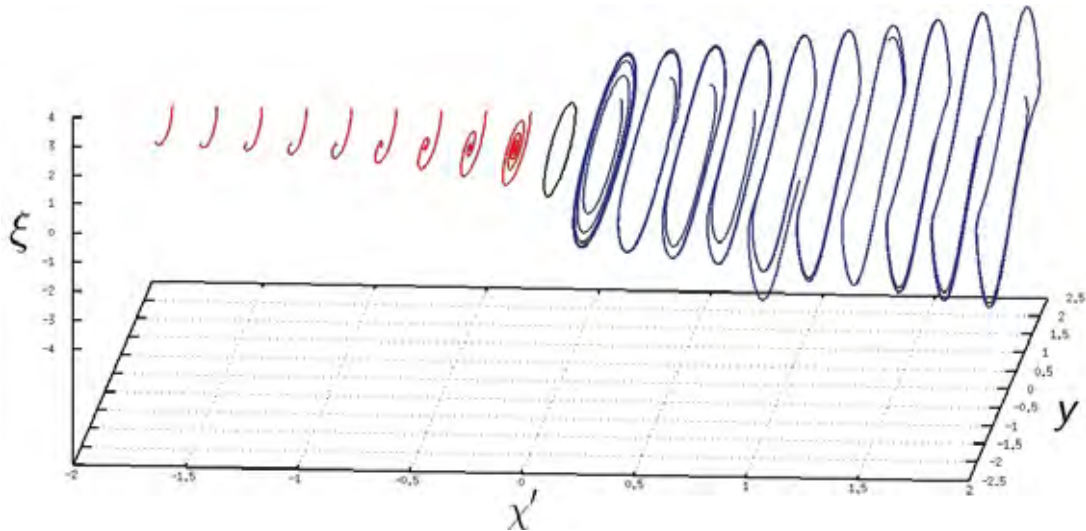


Figura 3.1: Algumas órbitas do espaço de fases para o oscilador de *van der Pol* em função do parâmetro de controle χ' . Bifurcação de *Hopf* ocorre a partir de $\chi' = 0$.

Sistemas que apresentam esse tipo de estabilidade em função do parâmetro de controle e é verificada a existência de um ciclo limite, exibem um tipo bifurcação em que um ponto de equilíbrio estável de dimensão zero passa para um ciclo de oscilação periódica de dimensão um. Esse tipo de bifurcação é chamada de *Hopf*⁽⁴⁶⁾.

Uma característica da bifurcação de *Hopf* é que os autovalores da matriz Jacobiana associada do sistema no ponto em que ocorre a bifurcação são números imaginários puros. A bifurcação de *Hopf* leva um ponto de equilíbrio a um ciclo de movimento periódico.

No caso do oscilador de *van der Pol* verificamos que ocorre a bifurcação de *Hopf*. Deste modo fazemos a análise numérica de algumas órbitas no espaço de fases em função do parâmetro de controle χ' , como é apresentado na figura 3.1.

3.4 Simulações Numéricas

Nesta seção apresentamos os resultados da integração numérica para as equações que modelam o oscilador de *van der Pol* sem força externa. A equação diferencial do oscilador de *van der Pol* não apresenta solução analítica, assim faz-se necessário a integração

numérica de suas trajetórias. Uma questão fundamental investigada está relacionada ao erro numérico cometido ao se integrar essas equações numericamente. Para certos valores de parâmetro de controle as trajetórias divergem rapidamente quando usamos por exemplo método de *Euler*⁽⁴⁷⁾ ou mesmo *Runge-Kutta*⁽⁴⁷⁾ de quarta ordem. Então fez-se necessário a utilização de um método mais robusto. Utilizaremos o integrador *Gauss-Radau*⁽⁴⁸⁾, muito usado por pesquisadores da área de mecânica celeste entre outros. O método de *Gauss-Radau* tem uma grande vantagem de manter o erro de integração abaixo de um limite pré-estabelecido, mudando o passo de integração quando necessário para que esse limite seja sempre satisfeito.

A partir das equações (3.4), e escolher as condições iniciais $(y, \xi) \rightarrow (y_0, \xi_0)$, utilizando o integrador Gauss-Radau obtemos a órbita do sistema. Com a investigação numérica, podemos estudar o comportamento do oscilador de *van der Pol* para diversos valores do parâmetro de controle χ' . Para o caso em que $\chi' \simeq 0$ temos que o oscilador de *van der Pol* apresenta um ciclo limite no espaço de fases com comportamento semelhante ao do oscilador harmônico, ou seja, as órbitas no ciclo limite são elipses no espaço de fases, figura 3.2. O tempo de relaxação, tempo que as órbitas relaxam para para o ciclo limite, é longo em que diversas oscilações ocorrem antes de atingir o regime de oscilação periódica. Quando χ' aumenta, a forma da oscilação do ciclo limite muda não sendo mais uma elipse

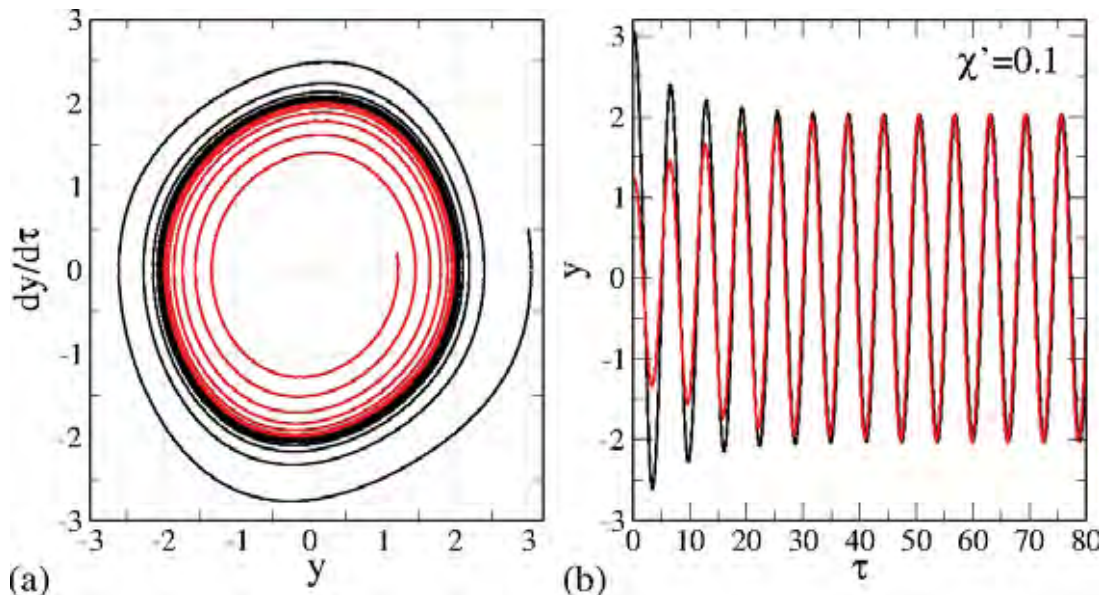


Figura 3.2: (a) Espaço de fases para oscilador de *van der Pol*; (b) y versus τ . Ambos os gráficos para o parâmetro $\chi' = 0.1$.

no espaço de fases e o tempo de relaxação para o ciclo limite diminui. O espaço de fases no caso em que $\chi' = 0.5$ pode ser visto na figura 3.3. Para valores ainda maiores de χ' o tempo de relaxação do oscilador é extremamente pequeno e a forma de oscilação é mais abrupta. A amplitude de oscilação de $dy/d\tau$ é maior, como pode ser visto na figura 3.4.

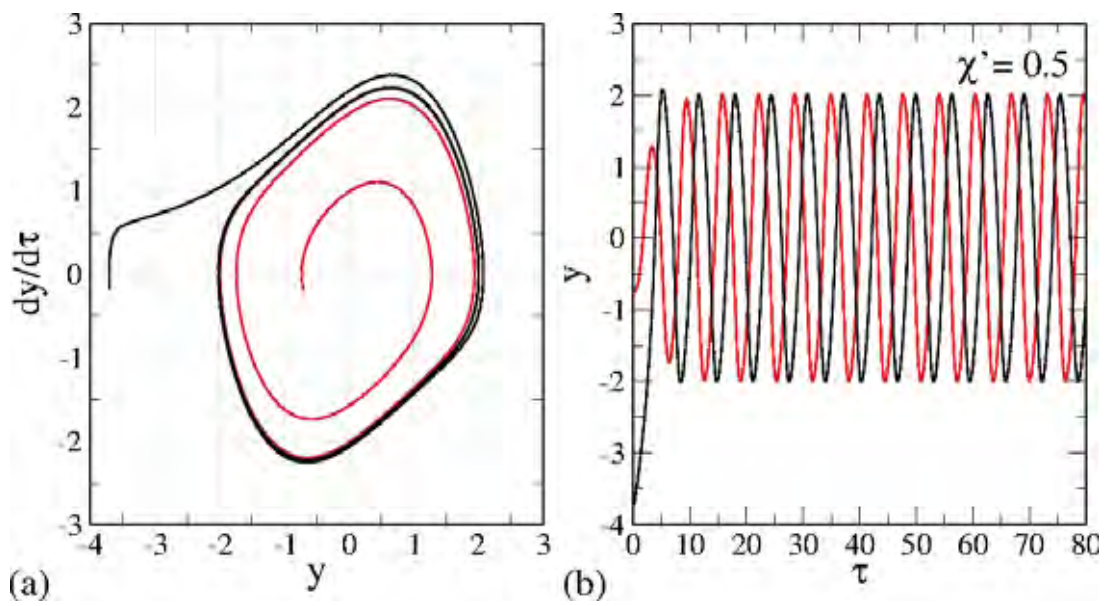


Figura 3.3: (a) Espaço de fases para oscilador de van der Pol; (b) y versus τ . Ambos os gráficos para o parâmetro $\chi' = 0.5$.

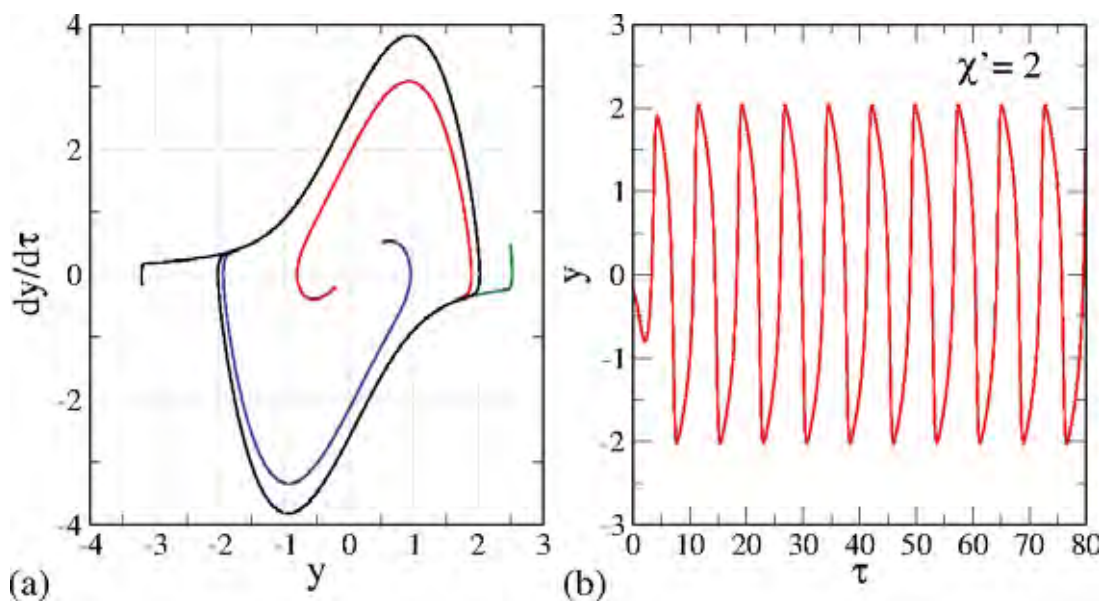


Figura 3.4: (a) Espaço de fases para oscilador de van der Pol; (b) y versus τ . Ambos os gráficos para o parâmetro $\chi' = 2$.

CAPÍTULO 4

BILHAR UNIDIMENSIONAL COM FRONTEIRA DEPENDENTE DO TEMPO REGIDA PELO OSCILADOR DE *VAN DER POL*

Neste capítulo vamos apresentar os passos necessários para construção de um modelo para um bilhar unidimensional no qual o movimento da parede móvel é regida pelo oscilador de *van der Pol*.

4.1 Conceitos básicos

O bilhar que consideramos consiste de duas paredes rígidas. Uma delas é fixa na posição L e a outra móvel centrada na origem, e seu movimento é regido pela equação de *van der Pol*. Um esquema do bilhar é mostrado na figura 4.1 na qual y é a posição e w a velocidade, ambos para parede móvel.

É interessante tornar o sistema adimensional para reduzir o número de variáveis. Escolhemos aqui tornar a distância entre as paredes adimensional igual a 1. Fazendo algumas transformações lineares nas coordenadas do sistema, partindo da equação (3.2)

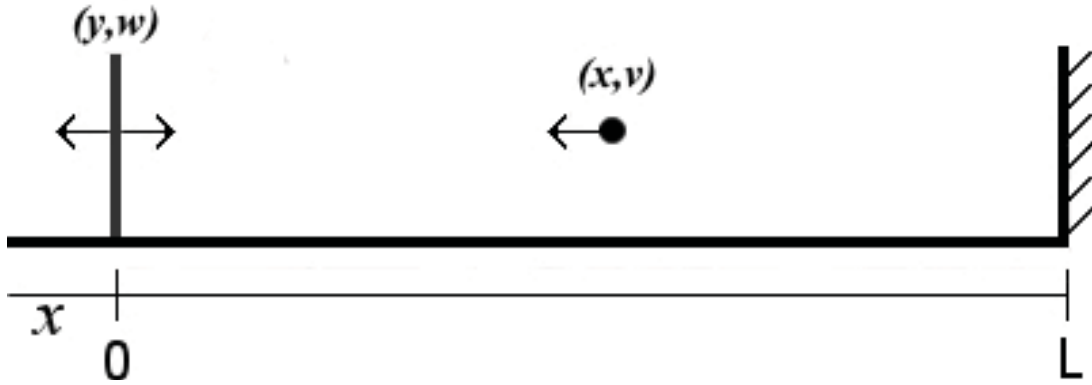


Figura 4.1: *Bilhar unidimensional, parede móvel centrada em $x=0$ e a parede fixa em $x=L$.*

temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M}(x^2 - x_0^2) \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_0}{M} \sin(\omega_f t). \quad (4.1)$$

Introduzindo uma transformação linear na coordenada igual a $x = \alpha y$ e temporal da forma $t = \beta \tau$ e procedendo de maneira semelhante ao secção 3.1 com a escolha de $\alpha = L$ e $\beta = 1/\omega_0$, obtemos

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{bL^2}{M\omega_0}(y^2 - y_0^2) \frac{dy}{d\tau} + y = \frac{F_0}{M\omega_0^2 L} \sin\left(\frac{\omega_f}{\omega_0} \tau\right), \quad (4.2)$$

desta maneira definimos apenas quatro parâmetros para a equação diferencial, $\chi = bL^2/M\omega_0$, $A = F_0/M\omega_0^2 L$, $\omega = \omega_f/\omega_0$ e $y_0 = \frac{x_0}{L}$,

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \chi(y^2 - y_0^2) \frac{dy}{d\tau} + y = A \sin(\omega \tau). \quad (4.3)$$

Vamos considerar o caso em que não há força externa atuando sobre o oscilador de *van der Pol*, ou seja, $A = 0$, assim obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \chi(y^2 - y_0^2) \frac{dy}{d\tau} + y = 0. \quad (4.4)$$

Depois das transformações, o bilhar apresenta dois parâmetros de controle, que são χ e y_0 , de maneira que todos os outros parâmetros são reduzidos apenas dois quando $A = 0$.

Com este modelo podemos estudar as consequências que a alteração do movimento da parede móvel, que é feita pela mudança dos parâmetro y_0 e χ , causam na dinâmica do modelo. Quando o parâmetro $\chi \simeq 0$ o modelo *Fermi-Ulam*⁽⁴⁴⁾ é recuperado o que corresponde ao oscilador de *van der Pol* com sua dinâmica no ciclo limite.

4.2 Instante da colisão

Vamos considerar que as colisões que ocorrem entre a partícula e a fronteira que define o bilhar são do tipo elásticas, basicamente uma colisão unidimensional. No momento da colisão a energia e o momento do sistema se conserva. A conservação de ambas quantidades podem ser expressas pelas seguintes equações

$$p_p^i + p_w^i = p_p^f + p_w^f, \quad (4.5)$$

$$m_p v_p^i + m_w v_w^i = m_p v_p^f + m_w v_w^f,$$

$$T_p^i + T_w^i = T_p^f + T_w^f, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^{i2} + \frac{1}{2} m_w v_w^{i2} = \frac{1}{2} m_p v_p^{f2} + \frac{1}{2} m_w v_w^{f2},$$

em que o índice i representa o instante antes da colisão e o índice f após a colisão, e os índices p e w são os índices que representam as propriedades da partícula e da parede respectivamente. Mudando o referencial das coordenadas para o referencial da parede móvel no instante da colisão temos $v_p^{i'} = v_p^i - v_w^i$, $v_p^{f'} = v_p^f - v_w^f$, $v_w^{i'} = 0$, $v_w^{f'} = v_w^f - v_w^i$, reescrevendo as equações no novo referencial e definindo $\mu = m_p/m_w$, temos

$$\mu v_p^{i'} = \mu v_p^{f'} + v_w^{f'}, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{2} \mu v_p^{i'2} = \frac{1}{2} \mu v_p^{f'2} + \frac{1}{2} v_w^{f'2}. \quad (4.8)$$

Resolvendo este sistema de equações para $v_w^{f'}$ e $v_p^{f'}$ obtemos

$$v_p^{f'} = \frac{\mu - 1}{1 + \mu} v_p^{i'}, \quad (4.9)$$

$$v_w^{f'} = \frac{2\mu v_p^{i'}}{1 + \mu}. \quad (4.10)$$

$$(4.11)$$

Voltando ao sistema de coordenada original temos

$$v_p^f = \frac{\mu - 1}{1 + \mu} (v_p^i - v_w^i) + v_w^i, \quad (4.12)$$

$$v_w^f = \frac{2\mu}{1 + \mu} (v_p^i - v_w^i) + v_w^i. \quad (4.13)$$

4.2.1 Casos

A partir da equação (4.13), de acordo com os valores atribuídos para μ , a dinâmica da colisão apresenta certas características. Apresentamos alguns destes casos para diferentes valores de μ :

1. $\mu \cong 0$ ($m_w \gg m_p$ ou $m_p = 0$)

$$\begin{aligned} v_p^f &= 2v_w^i - v_p^i, \\ v_w^f &= v_w^i, \end{aligned} \quad (4.14)$$

nesse caso a partícula tem a massa muito menor comparada com a massa da parede, uma característica importante a se notar é que após a colisão a velocidade da parede não é alterada;

2. $\mu \rightarrow \infty$ ($m_w \ll m_p$ ou $m_w = 0$)

$$\begin{aligned} v_p^f &= v_p^i, \\ v_w^f &= 2v_p^i - v_w^i, \end{aligned} \quad (4.15)$$

esse é o mesmo que o Caso (1) encontrado anteriormente, apenas trocando o índice p por w ;

3. $\mu = 1$ ($m_w = m_p$)

$$\begin{aligned} v_p^f &= v_w^i, \\ v_w^f &= v_p^i, \end{aligned} \quad (4.16)$$

nesse caso a massa da partícula e da parede são iguais, trocando momento linear e energia entre si;

4. $\mu > 1$ ($m_w < m_p$)

Quando $\mu > 1$ temos que $0 < \frac{\mu-1}{1+\mu} < 1$ e $\frac{2\mu}{1+\mu} > 1$ e

$$\begin{aligned} v_p^f &= a^2(v_p^i - v_w^i) + v_w^i, \\ v_w^f &= b^2(v_p^i - v_w^i) + v_w^i, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 < 1$ e $b^2 > 1$;

5. $\mu < 1$ ($m_w > m_p$)

Quando $\mu < 1$ temos que $-1 < \frac{\mu-1}{1+\mu} < 0$ e $\frac{2\mu}{1+\mu} < 1$ e

$$\begin{aligned} v_p^f &= -a^2(v_p^i - v_w^i) + v_w^i, \\ v_w^f &= c^2(v_p^i - v_w^i) + v_w^i, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 < 1$ e $c^2 < 1$.

Para haver colisão da partícula com a parede móvel temos que ter $v_p - v_w < 0$. Outro fato relevante para o controle das simulações é a condição que $x_w \leq x_p$, ou seja, a partícula

está sempre confinada entre as duas paredes.

4.3 Mapa para o caso em que $\mu = 0$

A descrição matemática mais utilizada no tratamento de bilhares é via mapeamentos. Tais mapeamentos descrevem o instante posterior da colisão da partícula com a parede a partir do instante anterior da dinâmica. Para o caso em que a parede móvel tem massa muito maior do que a partícula, ou seja, $\mu = 0$, o movimento da parede não é afetado pela colisão. Considerando que o movimento da parede móvel não saia do regime estabelecido pelo ciclo limite do oscilador de *van der Pol* podemos definir o mapa utilizando o caso (1) da seção 4.2 como

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= [\phi_n + \Delta\tau_{n+1}] \text{ mod } T, \\ v_{n+1} &= 2v_w(\phi_{n+1}) \pm v_n,\end{aligned}\tag{4.19}$$

em que ϕ_{n+1} é a fase em que a partícula atinge a parede móvel, v_{n+1} é a velocidade da partícula após a colisão, T é o período de oscilação da parede móvel, $v_w(\phi_{n+1})$ é a velocidade da fronteira no instante da colisão e $\Delta\tau_{n+1}$ é o intervalo de tempo entre a n -ésima e a $(n+1)$ -ésima colisão. Os sinal $-$ é usado para colisões sucessivas ou diretas em que a partícula atinge a parede móvel sem antes atingir a parede fixa. O sinal $+$ é usado para colisões não sucessivas ou indiretas em que a partícula colide com a parede móvel partindo de uma colisão com a parede fixa. Para encontrar o valor de $\Delta\tau_{n+1}$ é preciso integrar a equação diferencial (4.4) e encontrar o tempo no instante em que a posição da partícula é igual à posição da parede. Fazemos isso pelo acompanhamento da trajetória da partícula e da parede até que a distância entre as duas seja menor ou igual a um valor muito pequeno definindo o critério de colisão, que usamos 10^{-10} .

A escolha da função temporal para a parede móvel gera diferentes propriedades dinâmicas para a partícula confinada. Considerando as variáveis v_{n+1} , velocidade da partícula logo após a colisão, e ϕ_{n+1} , fase com que a partícula atinge a parede móvel, podemos construir o espaço de fases do bilhar. Normalmente o espaço de fases pode apresentar órbitas integráveis, como toros ou curvas invariantes e ilhas *KAM*, e órbitas caóticas, construindo no espaço de fases o mar de caos, figura 4.2 (a).

Para o caso do bilhar unidimensional muitas vezes não é fácil interpretar fisicamente o que acontece com a partícula apenas pela análise do espaço de fases de v versus ϕ . Devido a isto, para ter uma visão mais clara podemos observar a posição da partícula, das paredes fixa e móvel em função do tempo e compará-las com as órbitas no espaço de fases.

Para órbitas que percorrem uma curva invariante, a trajetória, y versus τ , da par-

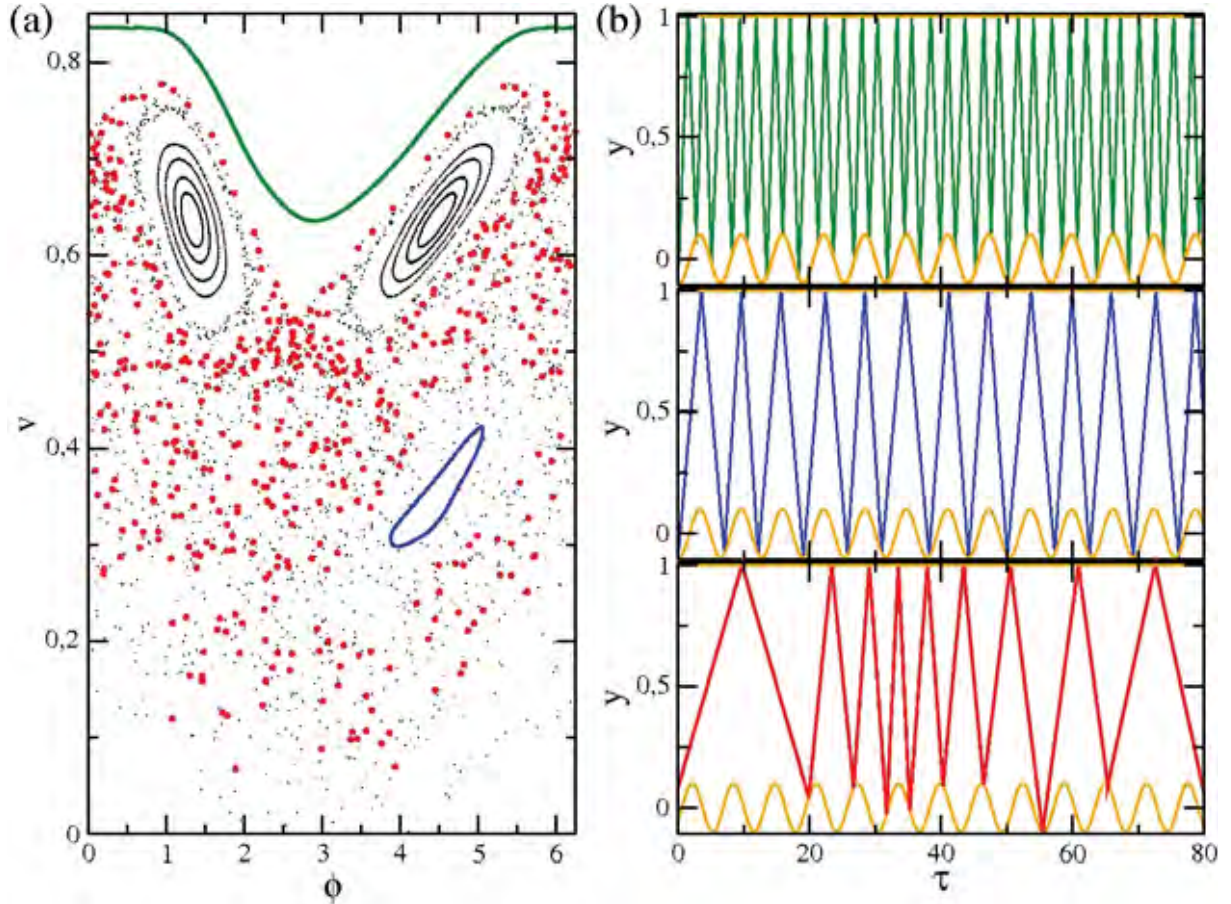


Figura 4.2: Comparação entre o espaço de fases e trajetória da partícula. Pontos vermelhos para órbita caótica, azuis órbitas em ilha KAM e verdes para órbitas em curva invariante. (a) Espaço de fases para o modelo de Fermi-Ulam, fronteira oscilando com $0,1 \cos(t + \theta)$; (b) Trajetória da partícula com as mesmas cores da sua órbita no espaço de fases, parede móvel e fixa representadas em linhas amarelas.

tícula segue um padrão com pequenas variações da velocidade entre as colisões, colidindo com todas as fases possíveis do movimento da parede móvel formando uma linha fechada para todos valores de ϕ^1 . Por outro lado, para as órbitas nas ilhas KAM a partícula fica restrita a colidir sempre em uma mesma região de fase do movimento da parede móvel e sua velocidade varia de maneira a sempre atingir essa mesma região de fase formando órbitas fechadas no espaço de fase ². Já para órbitas no mar de caos, a fase do movimento da parede em que ocorre a colisão e a velocidade da partícula variam a cada colisão de forma aparentemente caótica formando uma série de pontos no espaço de fase ³. As órbitas no espaço de fases e em y versus τ podem ser vistas na figura 4.2.

Vamos agora analisar o espaço de fases de v versus ϕ para um série de parâmetros de controle χ . O aumento do parâmetro χ modifica continuamente a forma de oscilação da parede móvel, de forma que quanto menor o valor de y_0 maior terá que ser o valor de χ para

¹compare a figura 4.2 (a) com a 4.2 (b) para as órbitas na cor verde

²compare a figura 4.2 (a) com a 4.2 (b) para as órbitas na cor azul

³compare a figura 4.2 (a) com a 4.2 (b) para as órbitas na cor vermelha

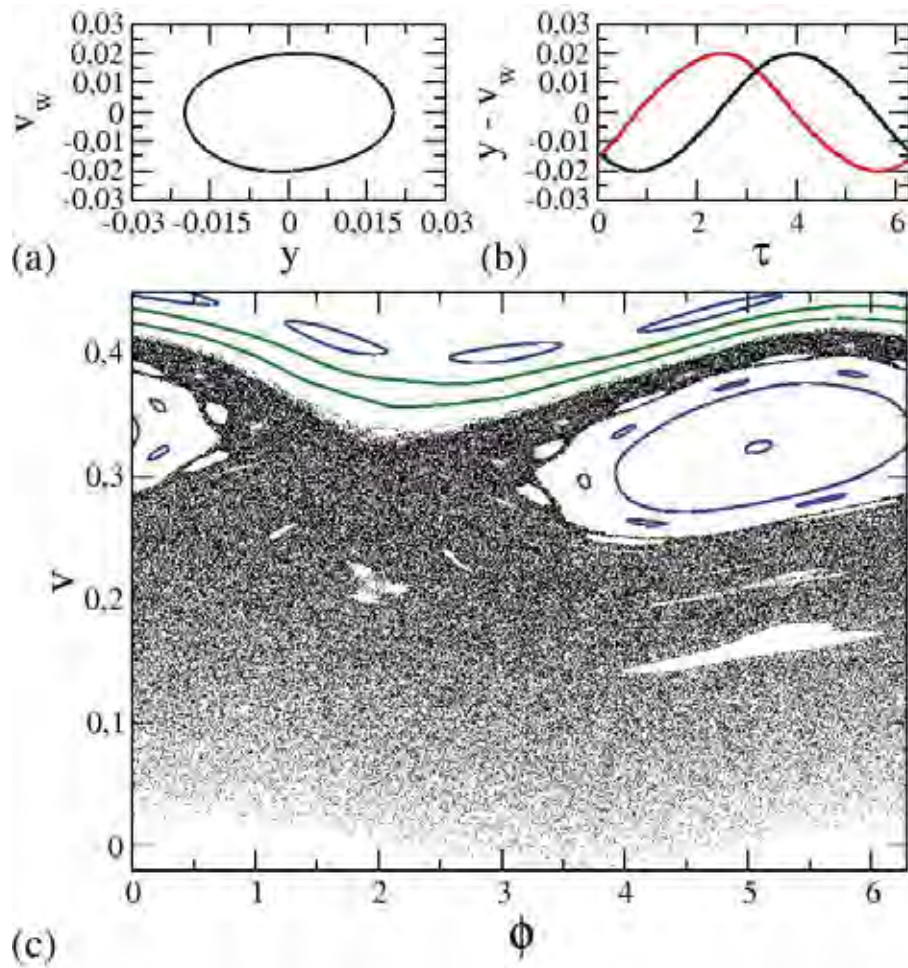


Figura 4.3: (a) Espaço de fases do movimento da parede móvel, v_w versus y ; (b) Curva na cor vermelha v_w versus τ , curva na cor preta y versus τ ; (c) Espaço de fases v versus ϕ . Os parâmetros de controle usados em todos os gráficos foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^3$. Representação das órbitas: linhas azuis ilhas KAM, verdes curvas invariantes e pontos pretos mar de caos.

que a perturbação seja a mesma comparada a outro valor de y_0 maior. Podemos portanto estudar o comportamento dessa modificação nas propriedades dinâmicas e estatísticas da partícula confinada frente à modificação da oscilação que rege a parede móvel.

Para o caso em que o parâmetro χ é pequeno, o modelo desenvolvido recupera o modelo *Fermi-Ulam*, figura 4.3, com o mesmo comportamento dinâmico e estatístico. Isso ocorre devido ao termo não linear agir como uma perturbação na equação diferencial do oscilador harmônico, esse tipo de perturbação não altera as propriedades dinâmicas quando χ está próximo de zero.

Com o acréscimo do parâmetro χ a forma da oscilação vai alterando-se, figura 4.4 (a) e (b), e o espaço de fases é modificado, ver figura 4.4. O limite máximo na coordenada v que o mar de caos de mais baixa energia pode atingir aumenta devido à destruição de curvas invariantes do tipo *spanning*⁽⁴⁹⁾. Isso ocorre devido à velocidade máxima que a parede móvel pode alcançar se torna maior, figura 4.4 (b), permitindo que a partícula adquira mais energia para dadas colisões com a parede móvel. Podemos então esperar

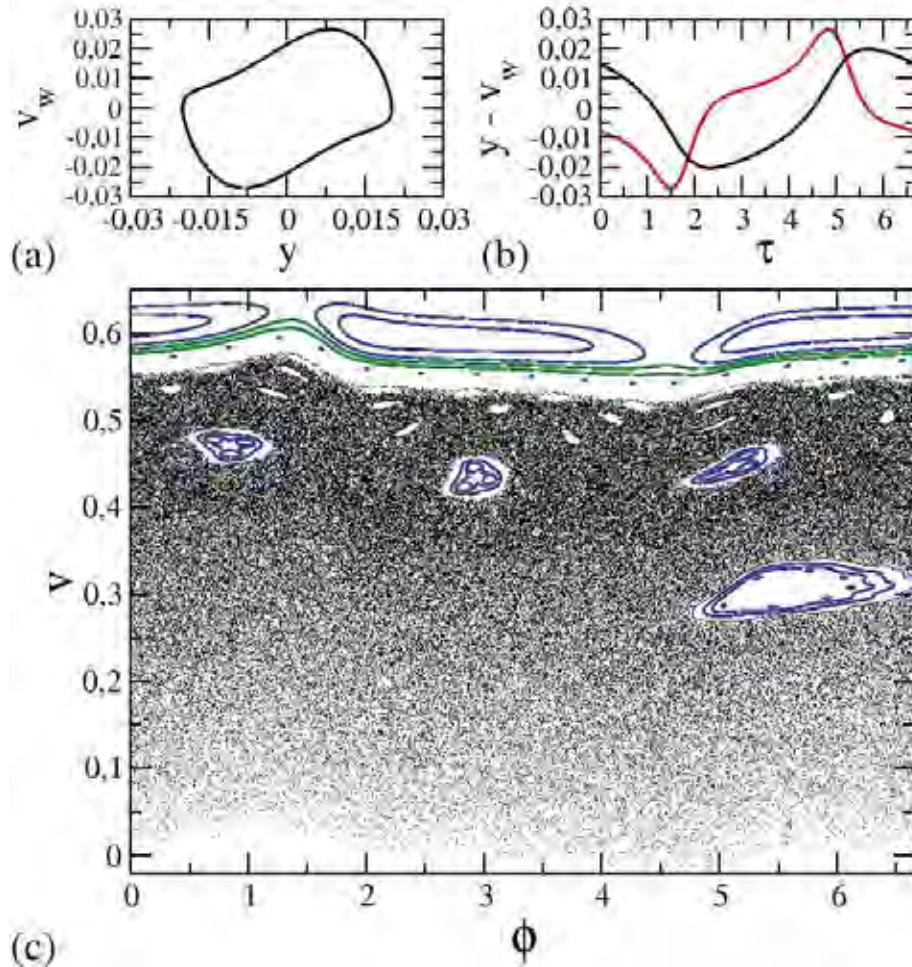


Figura 4.4: (a) Espaço de fases do movimento da parede móvel, v_w versus y ; (b) Curva na cor vermelha v_w versus τ , curva na cor preta y versus τ ; (c) Espaço de fases v versus ϕ . Os parâmetros de controle usados em todos os gráficos foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^4$. Representação das órbitas: linhas azuis ilhas KAM, verdes curvas invariantes e pontos pretos mar de caos.

que exista um valor de parâmetro específico para essa mudança de comportamento.

Para valores elevados do parâmetro χ , o espaço de fases (v versus ϕ) torna-se difícil de ser interpretado, aparentemente sem estruturas definidas, ver figura 4.5 (c). Uma análise mais detalhada mostra entretanto que ainda são verificadas estruturas conhecidas, como ilhas KAM, curvas invariantes e mar de caos, como pode ser visto na figura 4.6 (a), (b) e (c). À medida em que a velocidade v aumenta, o espaço de fases torna-se mais regular, no sentido de apresentar um número maior de ilhas KAM, e para velocidades mais altas surgem as primeiras curvas invariantes, figura 4.6. Essa regularidade (aumento do número de ilhas KAM) que encontramos para velocidades mais altas no mar de caos dificulta o aumento de energia da partícula do mar de caos de menor energia.

Por meio da análise do espaço de fases de v versus ϕ conseguimos verificar o tipo de mudança que o parâmetro de controle χ causa ao modelo. A perturbação causada pelo acréscimo de χ começa a fazer efeito quando seu valor se torna suficientemente alto.

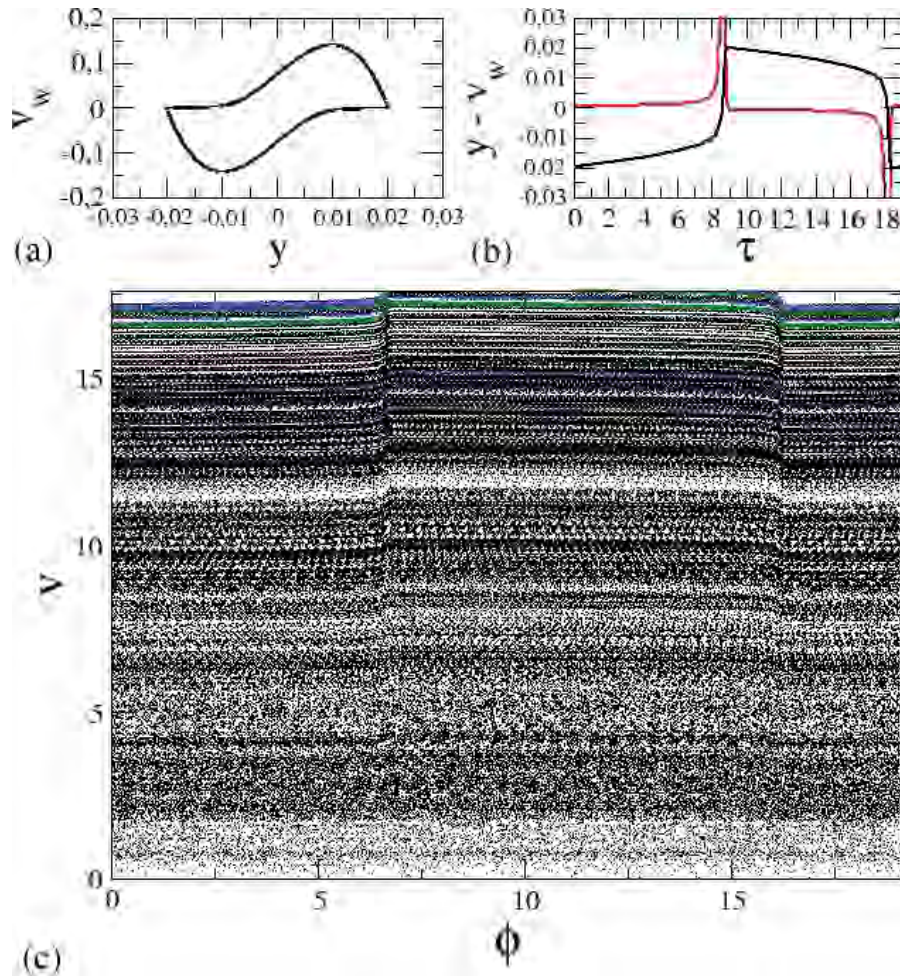


Figura 4.5: (a) Espaço de fase do movimento da parede móvel, v_w versus y ; (b) Curva na cor vermelha v_w versus τ , curva na cor preta y versus τ ; (c) Espaço de fases v versus ϕ . Os parâmetros de controle usados em todos os gráficos foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^5$. Representação das órbitas: linhas azuis ilhas KAM, verdes curvas invariantes e pontos pretos mar de caos.

Um estudo das propriedades estatísticas da velocidade pode auxiliar na investigação dessa mudança de comportamento.

4.3.1 Cálculo da matriz Jacobiana

O cálculo da matriz Jacobiana é importante, pois traz informações sobre a evolução do elemento de volume do espaço de fases. Também podemos encontrar a possível existência de alguma medida que é preservada pela evolução do sistema.

Vamos calcular para caso em que $\mu = 0$, tomamos o mapa (4.19):

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= [\phi_n + \Delta\tau_{n+1}] \text{ mod } T, \\ v_{n+1} &= 2v_w(\phi_{n+1}) \pm v_n,\end{aligned}$$

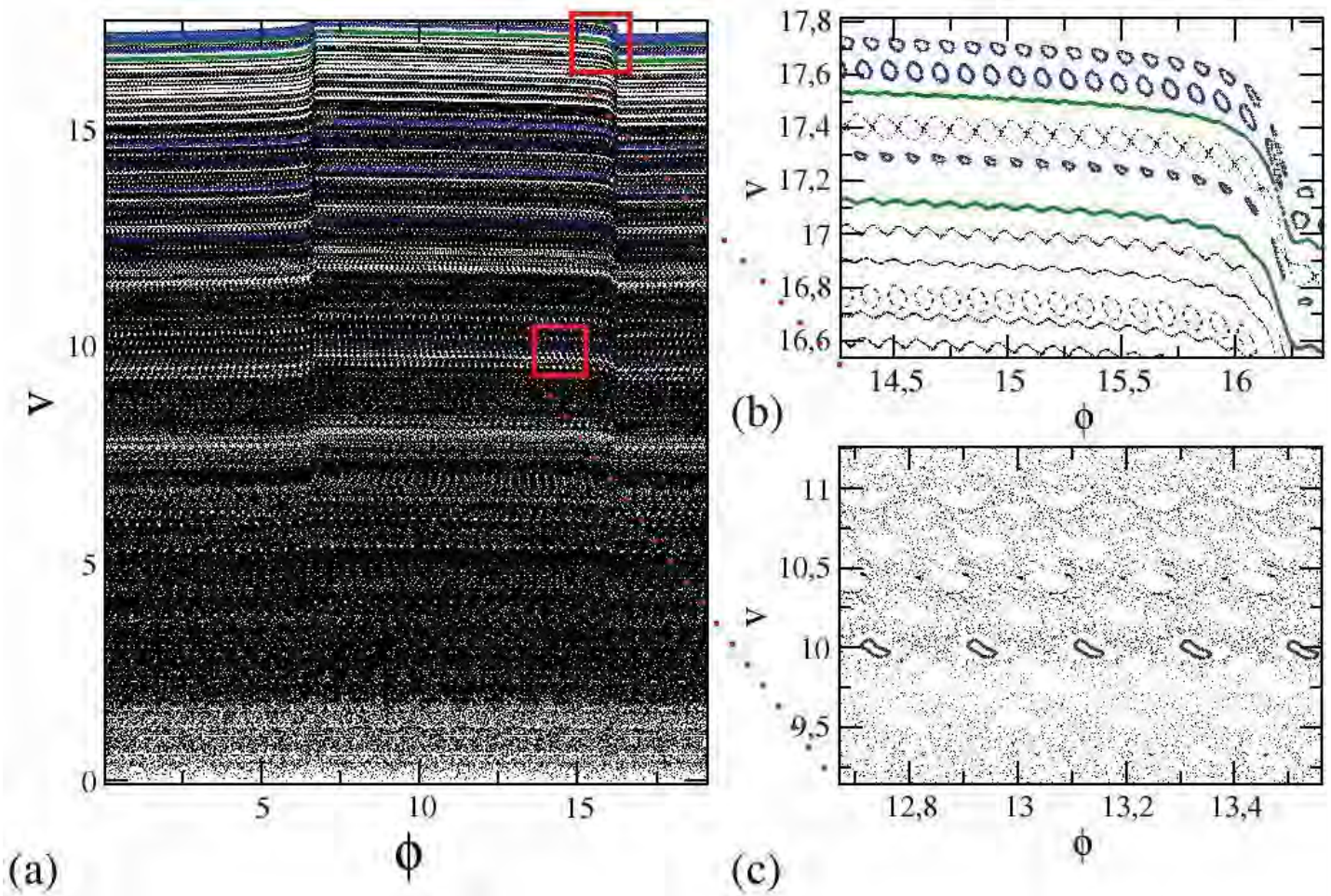


Figura 4.6: (a) Espaço de fases de v versus ϕ ; (b) Zoom para região no espaço de fases que surgem as primeiras curvas invariantes; (c) Zoom para região no espaço de fases que existem ilhas KAM. Os parâmetros de controle usados foram $y_0 = 0,01$ e $\chi = 10^5$;

onde na segunda equação o sinal $-$ é usado para colisões sucessivas e o sinal $+$ para colisões não sucessivas. Para colisões não sucessivas temos que

$$\Delta \tau_{n+1} = \frac{2 - y_w(\phi_n) - y_w(\phi_{n+1})}{v_n}, \quad (4.20)$$

em que y_w é a posição da parede móvel. Para colisões sucessivas temos

$$\Delta \tau_{n+1} = \frac{y_w(\phi_{n+1}) - y_w(\phi_n)}{v_n}. \quad (4.21)$$

Calculando os termos necessários para o cálculo da matriz jacobiana temos

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \Delta \tau_{n+1}}{\partial \phi_n}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} = \frac{\partial \Delta \tau_{n+1}}{\partial v_n}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial v_{n+1}}{\partial \phi_n} = 2 \frac{\partial v_w(\phi_{n+1})}{\partial \phi_{n+1}} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_n} = 2 \frac{\partial v_w(\phi_{n+1})}{\partial \phi_{n+1}} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} \pm 1, \quad (4.25)$$

em que v_w é a velocidade da parede móvel. As derivadas de $\Delta \tau_{n+1}$ em relação às variáveis para o caso em que as colisões são não sucessivas são

$$\frac{\partial \Delta \tau_{n+1}}{\partial \phi_n} = -\frac{1}{v_n} [v_w(\phi_n) + v_w(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}], \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \Delta \tau_{n+1}}{\partial v_n} = \frac{1}{v_n^2} [-v_n v_w(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} - 2 + y_w(\phi_n) + y_w(\phi_{n+1})], \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

e para colisões sucessivas temos

$$\frac{\partial \Delta \tau_{n+1}}{\partial \phi_n} = \frac{v_w(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - v_w(\phi_n)}{v_n}, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \Delta \tau_{n+1}}{\partial v_n} = \frac{1}{v_n^2} [-v_n v_w(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} - y_w(\phi_{n+1}) + y_w(\phi_n)]. \quad (4.30)$$

Calculando os termos derivados de ϕ_{n+1} em relação a ϕ_n obtemos para colisões não sucessivas

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = \frac{v_n - v_w(\phi_n)}{v_n + v_w(\phi_{n+1})}, \quad (4.31)$$

e para colisões sucessivas

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = \frac{v_n - v_w(\phi_n)}{v_n - v_w(\phi_{n+1})}, \quad (4.32)$$

Agora calculando os termos de ϕ_{n+1} em relação a v_n obtemos para colisões não sucessivas

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} = \frac{y_w(\phi_{n+1}) + y_w(\phi_n) - 2}{v_n [v_n + v_w(\phi_{n+1})]}, \quad (4.33)$$

e colisões sucessivas

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} = \frac{y_w(\phi_n) - y_w(\phi_{n+1})}{v_n [v_n + v_w(\phi_{n+1})]}, \quad (4.34)$$

ambos podem ser reescritos:

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} = -\frac{\Delta \tau_{n+1}}{v_n + v_w(\phi_{n+1})}. \quad (4.35)$$

Agora calculando o determinante da matriz Jacobiana chegamos em:

$$\det(J) = \frac{v_n - v_w(\phi_n)}{v_{n+1} - v_w(\phi_{n+1})}, \quad (4.36)$$

podemos portanto obter uma medida que é preservada neste mapa manipulando a equação (4.36) encontramos a seguinte medida que é dada por $du = [v - v_w(\phi)]d\phi dv$. A medida u é constante pela evolução do mapa.

4.3.2 Expoente de *Lyapunov*

A definição de caos não é única, mas em geral todos concordam na sensibilidade com as condições iniciais que os sistemas caóticos devem apresentar. Um dos critérios mais utilizados para classificação de sistemas dinâmicos quanto a sua caoticidade é feita através do cálculo do expoente de *Lyapunov*, método desenvolvido pelo matemático russo Alexandre M. Lyapunov (1875-1918).

Neste método são consideradas que condições iniciais próximas se distanciam exponencialmente com a evolução temporal do sistema, ou seja, dada uma condição inicial e uma outra na qual é uma pequena perturbação δ_0 desta condição inicial, a distância entre as trajetórias em função do tempo é dada por $\delta(t)$. A suposição que as duas condições iniciais se distanciam exponencialmente pode ser expressa como $\delta(t) \simeq e^{\lambda t}$ na qual t é a variável independente e λ é chamado de expoente característico ou expoente de *Lyapunov*. Se $\lambda > 0$ a distância entre as trajetórias $\delta(t)$ aumenta com o passar do tempo e o sistema pode ser classificado como caótico. Se $\lambda = 0$ a distância $\delta(t)$ permanece constante e o sistema não é caótico. Se $\lambda < 0$ a distância $\delta(t)$ diminui e as duas trajetórias se aproximam a medida que o tempo passa, o que caracteriza regularidade.

Para o caso de um mapa unidimensional podemos proceder da seguinte maneira para o cálculo do expoente de *Lyapunov*. Seja uma condição inicial x_0 e uma variação infinitesimal desta condição $x_0 + \delta_0$. Assim após n iterações do mapa $x_{n+1} = F(x_n)$ temos que a diferença entre as duas trajetórias δ_n será

$$\delta_n = F^n(x_0 + \delta_0) - F^n(x_0). \quad (4.37)$$

em que $F^n(x_0)$ é a n -ésima aplicação do mapa em x_0 , ou seja, $F^n(x_0) = F(F(F \cdots F(F(x_0)) \cdots))$. Fazendo a suposição de distanciamento exponencial entre as duas trajetórias, na n -ésima iteração do mapa, a distância será $\delta_n \simeq \delta_0 \exp(\lambda n)$ em que λ é o expoente de *Lyapunov* quando $n \rightarrow \infty$. Isolando λ obtemos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \right). \quad (4.38)$$

Como consideramos a diferença inicial entre as trajetórias, δ_0 , infinitesimal podemos reescrever o termo δ_n/δ_0 da seguinte forma

$$\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{F^n(x_0 + \delta_0) - F^n(x_0)}{\delta_0} = \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} \quad (4.39)$$

na qual foi substituído o valor de δ_n pelo obtido na equação (4.37). Substituindo na equação (4.38) o resultado da equação (4.39) obtemos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} \right| \right), \quad (4.40)$$

agora efetuando a derivada $dF^n(x_0)/dx_0$ utilizando a regra da cadeia podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \left(\left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_j} \right), \quad (4.41)$$

Para o caso em que a dimensão do mapeamento é maior do que um podemos generalizar o cálculo do expoente de *Lyapunov* a partir da seguinte expansão⁽⁵⁰⁾

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_i| \quad (4.42)$$

em que Λ_i é o autovalor do produto das matrizes Jacobianas do mapa até a i -ésima iteração $M = \prod_{i=0}^{n-1} J_i$. Uma maneira de encontrar os autovalores da matriz M é utilizando o algoritmo de triangulação, que consiste em rescrever a i -ésima matriz J_i como uma multiplicação de uma matriz triangular superior Γ e uma matriz ortogonal Θ , ou seja $J_i = \Theta_i \Gamma_i$. Desta forma $M = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_3 J_2 J_1 = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_3 J_2 \Theta_1 \Gamma_1$, fazendo $J'_2 = J_2 \Theta_1$ obtemos $M = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_3 J'_2 \Gamma_1$ e repetindo esse procedimentos até obter $M = \Gamma_{n-1} \Gamma_{n-2} \dots \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_1$. Deste modo os autovalores da matriz triangular superior Γ_i são simplesmente dados pela diagonal de Γ_i , ou seja os elementos Γ_i^{jj} . Então podemos obter o valor do expoente de *Lyapunov* a partir de

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln |\Gamma_i^{jj}| \quad (4.43)$$

em que Γ_i^j é o elemento da matriz triangular. Uma descrição mais detalhada do algoritmo de triangulação pode ser encontrado em⁽³⁵⁾.

A partir do procedimento descrito, calculamos o expoente de *Lyapunov* numericamente para um conjunto de 5 condições iniciais (este numero de condições iniciais é suficiente para que o valor desvio médio seja baixo) para um série de valores do parâmetros de controle de χ fixando $y_0 = 10^{-2}$. As séries foram calculadas para $n = 10^8$ na qual o expoente obtido segue um regime de convergência tornando-se constante depois de passar por um transiente inicial, como pode ser visto na figura 4.7. O expoente de

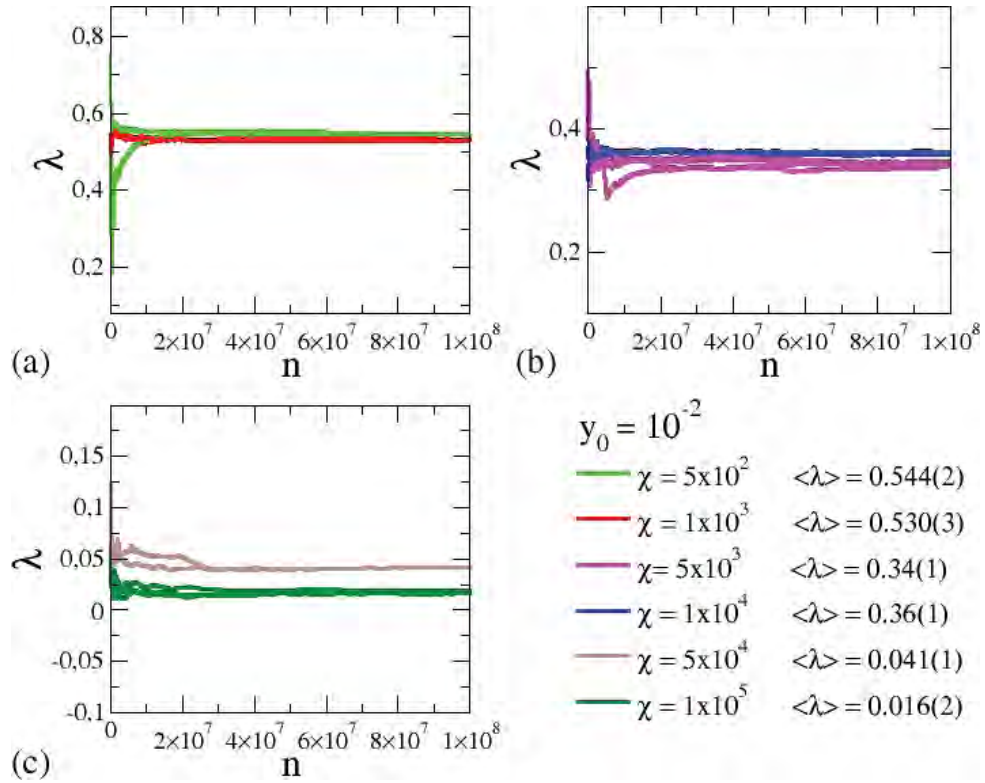


Figura 4.7: Expoente de Lyapunov em função do número de colisões com o parâmetro de controle $y_0 = 10^{-2}$.

Lyapunov calculado diminui com o incremento do parâmetro de controle χ . Para valores de $\chi \simeq 0$ o sistema apresenta um expoente médio $\langle \lambda \rangle \simeq 0,5$, ao passo que o valor do expoente de Lyapunov para valores maiores de χ diminuem, com $\langle \lambda \rangle = 0,016(2)$ para $\chi = 10^5$. Esse comportamento pode parecer controverso para uma análise inicial devido ao fato de o parâmetro χ controlar o termo da não linearidade da equação de *van der Pol*. Normalmente seria esperado que o expoente de Lyapunov aumentasse pelo incremento do termo que controla a não linearidade do sistema. Porém analisando o expoente de Lyapunov e o movimento da parede móvel com a mudança do parâmetro de controle χ podemos notar que ao passo que o parâmetro χ é aumentado o movimento da parede móvel torna-se muito lento em determinadas regiões da fase ϕ , com velocidades próximas de zero. Deste modo quando duas trajetórias da partícula próximas colidem com a parede móvel na faixa de fase em que a velocidade da parede é baixa, a velocidade de saída é alterada em uma pequena quantidade causando um distanciamento pequeno entre trajetórias próximas. Isso acarreta em uma quase-regularidade, produzindo uma diminuição do expoente de Lyapunov. Uma comparação entre trajetórias para dois parâmetros χ distintos pode ser visto na figura 4.8. Este comportamento é evidenciado no espaço de fases como foi colocado anteriormente. Com o aumento do parâmetro de controle χ , o número de ilhas KAM aumenta, confinando órbitas do mar de caos. Entretanto, mesmo o valor do expoente de Lyapunov diminuindo frente ao aumento do parâmetro χ vemos um crescimento na velocidade da partícula para condições iniciais no mar de caos de mais

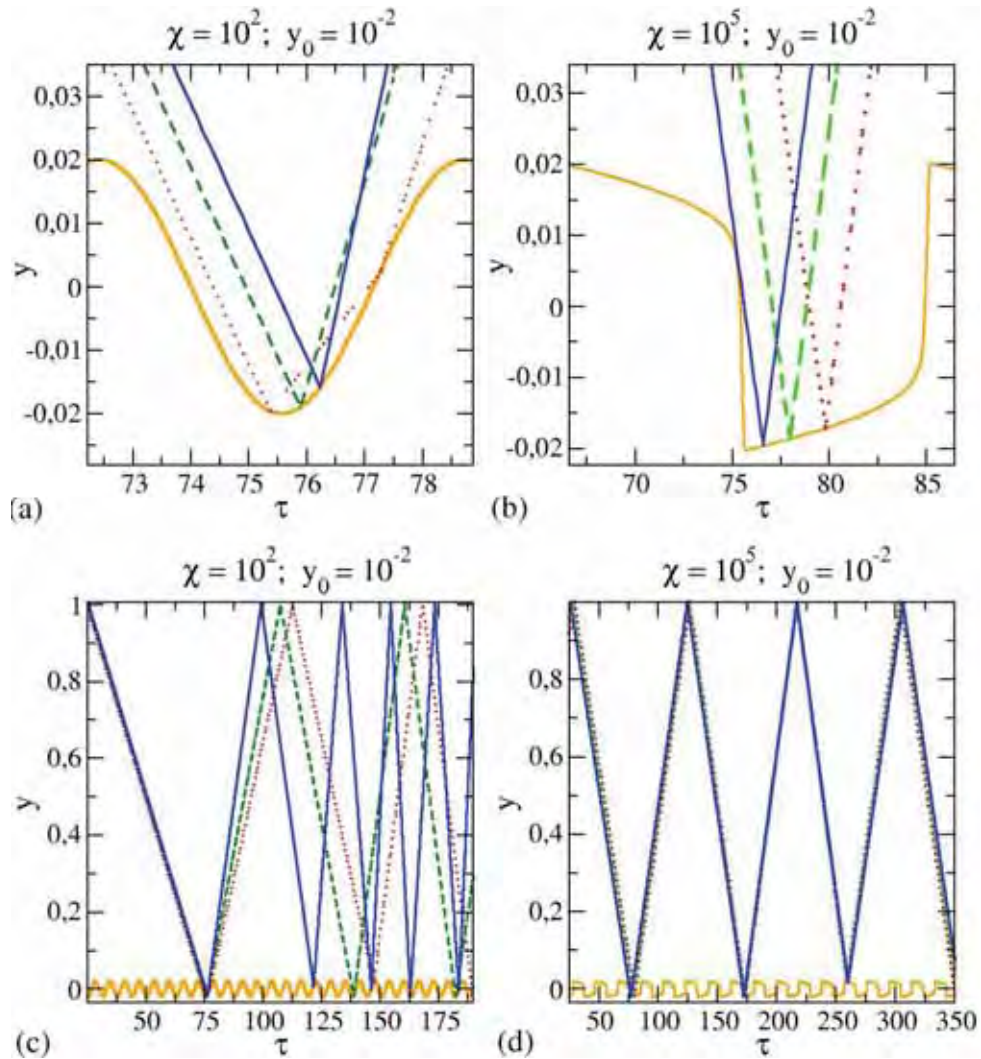


Figura 4.8: Comparação entre 3 trajetórias próximas com $y_0 = 10^{-2}$ para distintos valores de parâmetro de controle χ . Linha amarela corresponde a parede móvel. (a) e (c) y versus τ para $\chi = 10^2$; (b) e (d) y versus τ para $\chi = 10^5$.

baixa energia do espaço de fases.

4.3.3 Análise da Velocidade Média

Nessa seção vamos apresentar as propriedades estatísticas da velocidade média para o modelo do bilhar unidimensional para o caso em que $\mu = 0$. Vamos analisar a velocidade média em função do número de colisões com a parede móvel de um conjunto de condições iniciais. Vale ressaltar que isto equivale à análise estatística da velocidade média de um conjunto de partículas não interagentes confinadas entre as duas paredes.

Método utilizado

A velocidade média de um conjunto de condições iniciais ou partículas não interagentes K em função do número de colisões com a parede móvel pode ser calculada através de

$$\langle v \rangle (n) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K v_i(n) \quad (4.44)$$

sendo $v_i(n)$ definido como

$$v_i(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} v(j) \quad (4.45)$$

em que substituímos v_j por $v(j)$ na definição feita no mapa, equação (4.19). A escolha do conjunto de condições iniciais K é feita para baixas velocidades da região do mar de caos de menor energia, próxima à velocidade máxima da parede móvel. Com esta escolha específica podemos analisar o acréscimo de energia do sistema ao longo do número de colisões com a parede móvel.

O cálculo para um conjunto de condições iniciais considerável, K entre 500 e 1000, em que obtemos uma média com desvio baixo pode se tornar demasiadamente custoso ou até mesmo proibitivo do ponto de vista computacional. Para o caso do modelo desenvolvido isso ocorre, devido ao fato de não haver uma expressão analítica para a função que rege a parede móvel, ou seja, não existir uma solução analítica para o oscilador de *van der Pol* (equação 4.4). Isso exige que ao mesmo tempo que resolvemos as equações referentes ao mapa temos que integrar a equação (4.4) numericamente o que torna a simulação extremamente lenta. Para resolver este problema vamos introduzir um método equivalente ao normalmente usado para cálculo da velocidade média. Consiste basicamente em utilizar uma transformação a baixos valores da variável em que se deseja fazer a medida, que no nosso caso é a velocidade da partícula.

Dada uma série temporal discreta $v(n)$, em que $n = 1, 2, 3, \dots, N$ e definindo um valor v_m que representa o valor máximo de uma região de baixa energia, na qual escolhemos valores próximo do máximo valor da velocidade em que a parede móvel pode alcançar. Então podemos construir uma série $k(i)$ de n em que $v(n) < v_m$. Com isso definindo a transformação como

$$v_i(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} v(j - k(i)), \quad (4.46)$$

e

$$\langle v \rangle (n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_i(n), \quad (4.47)$$

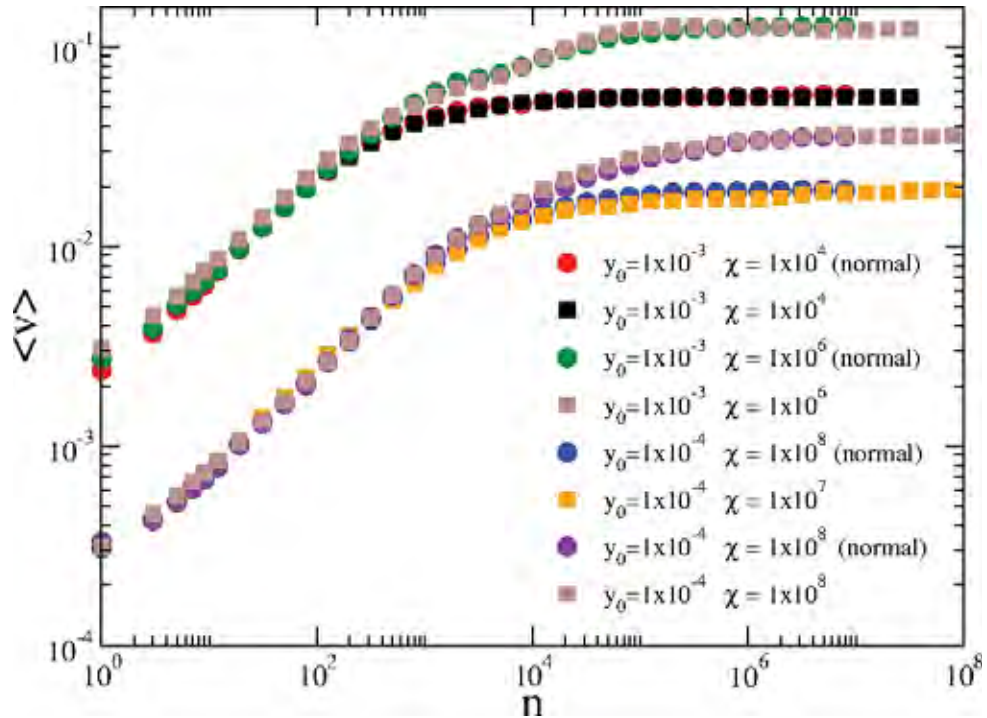


Figura 4.9: Comparação entre os diferentes métodos utilizados. Quadrados são calculados utilizando o método de transformada a baixa velocidade proposto e os círculos são calculados pelo método descrito pela equação (5.24).

em que $M = \dim(k)$, dimensão do vetor k , e quando n vai para infinito $\dim(k)$ também, assim como M . Deste modo utilizamos apenas uma série $v(n)$ para construir a média.

Para verificar a equivalência com a velocidade média podemos fazer uma analogia, substituindo $v_i(n)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} v_1(n) &= v(n - k(1) + 1), \\ v_2(n) &= v(n - k(2) + 1), \\ &\vdots \\ v_M(n) &= v_1(n - k(M) + 1), \end{aligned}$$

deste modo as condições iniciais são substituídas por valores em que $v(n)$ visita a região de baixa velocidade do mar de caos de mais baixa energia. A comparação desse método com o calculado da maneira habitual mostra grande concordância, conforme mostrado na figura 4.9. Isso poderia ser explicado da seguinte maneira: como o mapa (4.19) preserva uma medida no espaço de fases, como foi obtido no cálculo da matriz Jacobiana (4.36), podemos fazer transformações dadas pelo mapa de forma a preservar esta medida. Então uma região mapeada no espaço de fases evolui no tempo preservando esta medida. Como em sistemas que preservam algum tipo de medida o teorema de recorrência de Poincaré⁽⁴⁰⁻⁴¹⁾ é válido. Portanto temos que a evolução temporal no subespaço que delimita o mar de caos no espaço de fases será amplamente visitada não havendo contrações ou expansões. Isso dá

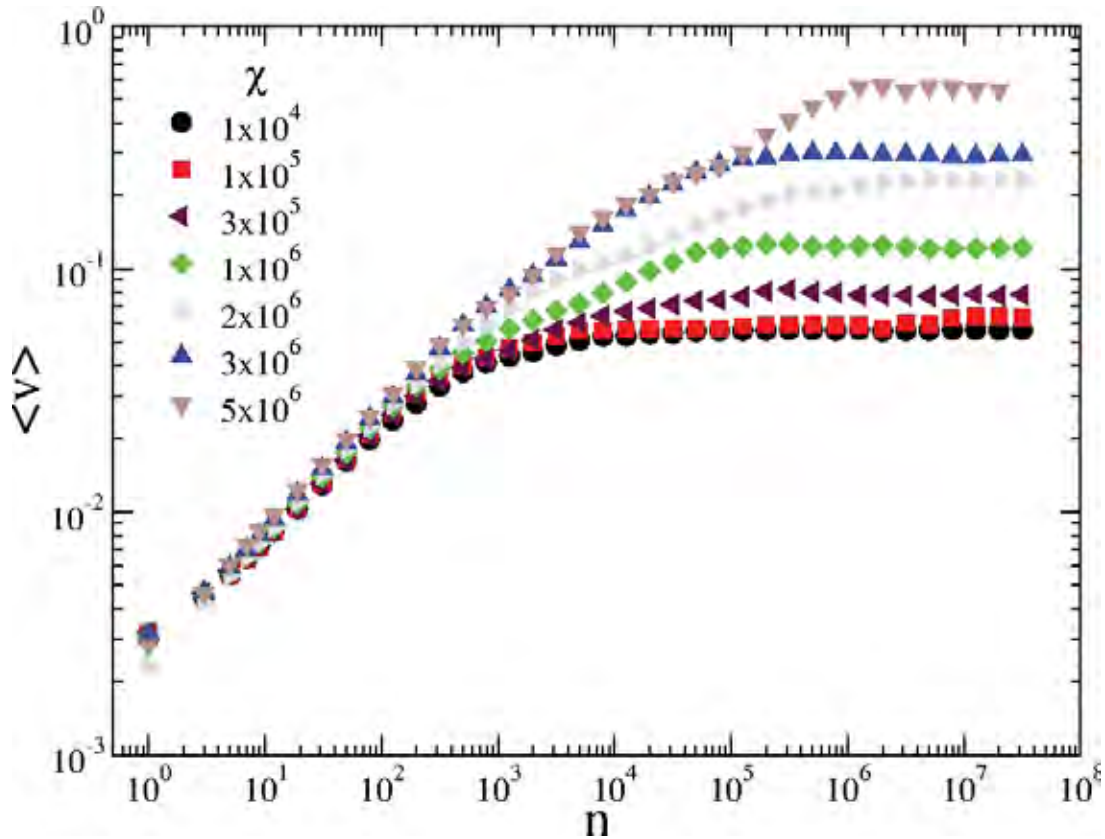


Figura 4.10: Velocidade média para $y_0 = 0,001$ e diversos valores do parâmetro de controle χ .

evidências da relação entre a medida feita através da média de um conjunto de condições iniciais e a medida feita através da transformada a baixa velocidade.

A grande vantagem da transformada a baixa velocidade é o tempo de simulação, que mostra-se extremamente rápido comparado ao método usual. Para o modelo desenvolvido, o tempo computacional para os cálculos numéricos é extremamente longo, portanto este método torna-se uma ótima opção. Entretanto, a convergência deste método pode ser lenta para alguns casos, como por exemplo, quando a condição inicial escolhida evoluir por um regime dinâmico de *stickiness*⁽⁵¹⁾. Durante o *stickiness*, a partícula passa perto de uma região de periodicidade e fica ali presa durante um longo período. Caso este processo dinâmico ocorra, a condição inicial é trocada e uma nova simulação é feita. Também pode haver dificuldades quando o sub-espaco acessível do mar de caos em questão seja muito grande, fazendo com que o retorno para região de baixa energia seja muito longo.

Resultados

Analisando as propriedades da velocidade média do modelo, podemos dividir o comportamento de $\langle v \rangle$ versus n em dois tipos: (i) há um crescimento de $\langle v \rangle$ em lei de potência até um ponto de *crossover*, que ocorre em $n = n_x$; (ii) quando $\langle v \rangle$ entra em

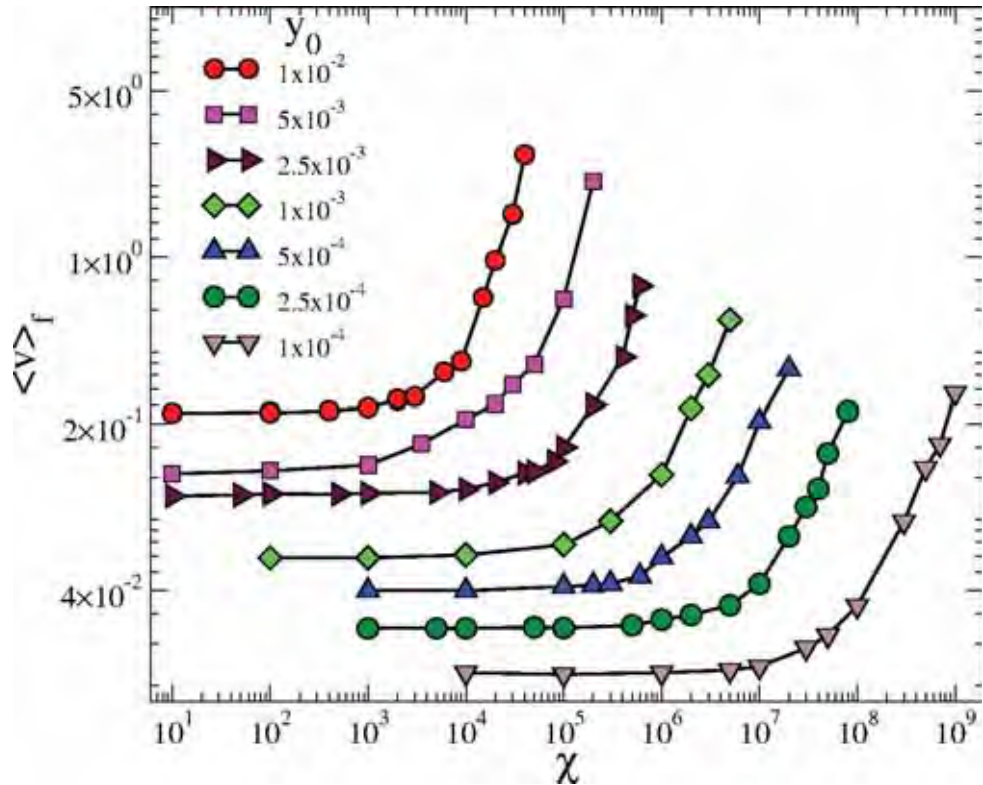


Figura 4.11: Velocidade média final $\langle v \rangle_f$ obtida da extrapolação da velocidade média $\langle v \rangle$ quando $n \rightarrow \infty$.

um regime constante para região em que $n \gg n_x$, como é mostrado na figura 4.10.

Quando $n \gg n_x$, $\langle v \rangle$ permanece constante, por meio de uma extrapolação para $n \rightarrow \infty$ obtemos o valor de $\langle v \rangle_f$ em função do parâmetro de controle χ , $\langle v \rangle_f$ versus χ , como mostrado na figura 4.11.

O comportamento de $\langle v \rangle_f$ versus χ para valores baixos de χ fica constante até um ponto $\chi = \chi_c$ em que $\langle v \rangle_f$ começa a crescer. O comportamento constante de $\langle v \rangle_f$ recupera os resultados do modelo *Fermi-Ulam*⁽⁵²⁾. Quando χ atinge um valor crítico $\chi = \chi_c$ o termo não-linear da equação que descreve o oscilador de *van der Pol* começa a modificar as propriedades do modelo. O crescimento de $\langle v \rangle_f$ ocorre devido à destruição de curvas invariantes no espaço de fases da partícula. Para valores muito grandes de χ a dificuldade numérica aumenta, pois a integração da equação (4.4) se torna difícil.

Baseado no comportamento da velocidade média final $\langle v \rangle_f$, figura 4.11, podemos demonstrar o comportamento invariante de escala que $\langle v \rangle_f$ apresenta frente aos parâmetros de controle y_0 e χ . Diversos modelos foram analisados utilizando o formalismo de lei de escala⁽¹⁴⁻⁵²⁻⁵⁴⁾, classificando em classes de universalidade e o comportamento médio de sistemas caóticos. Antes, devemos fazer uma transformação na variável χ da forma $\chi \rightarrow \chi y_0^{2.5}$. Depois dessa transformação utilizando os argumentos que seguem encontramos as relações de escala.

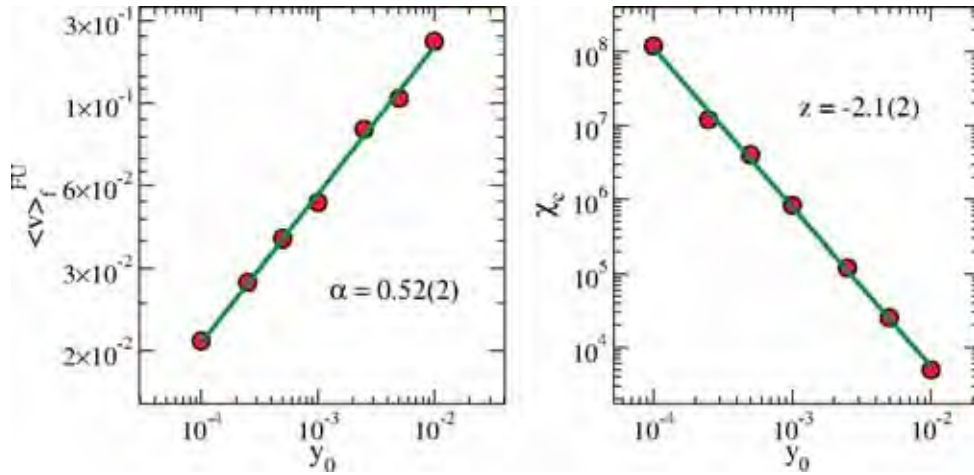


Figura 4.12: (a) Comportamento de $\langle v \rangle_f^{FU}$ versus y_0 e o valor do expoente α ; (b) Comportamento de χ_c versus y_0 e o expoente z .

1. Para $\chi \ll \chi_c$, $\langle v \rangle_f$ comporta como as

$$\langle v \rangle_f(\chi) \propto y_0^\alpha, \quad (4.48)$$

em que α é um expoente crítico;

2. Quando $\chi \gg \chi_c$ temos

$$\langle v \rangle_f(\chi) \propto \chi^\beta, \quad (4.49)$$

em que β também é um expoente crítico;

3. O ponto χ_c que marca a mudança de comportamento em que $\langle v \rangle_f$ é constante e passa para um regime de crescimento é chamado de *crossover* e é expresso através de

$$\chi_c \propto y_0^{z-2.5}, \quad (4.50)$$

na qual z é um expoente dinâmico que caracteriza o expoente da lei de potência do parâmetro χ_c na qual ocorre a diferenciação do comportamento do modelo *Fermi-Ulam* para o modelo com oscilador de *van der Pol*.

Utilizando uma função de escala do tipo

$$\langle v \rangle_f(\chi, y_0) = l \langle v \rangle_f(l^a \chi, l^b y_0), \quad (4.51)$$

em que l é um fator de escala, a e b são os expoentes de escala, podemos encontrar as relações de a e b com os expoentes críticos α , β e o expoente dinâmico z como se segue.

Escolhendo o fator de escala l como $l = \chi^{-1/a}$ e reescrevendo a equação (4.51) como

$$\langle v \rangle_f(\chi, y_0) = \chi^{-1/a} \langle v \rangle_f(1, \chi^{-b/a} y_0). \quad (4.52)$$

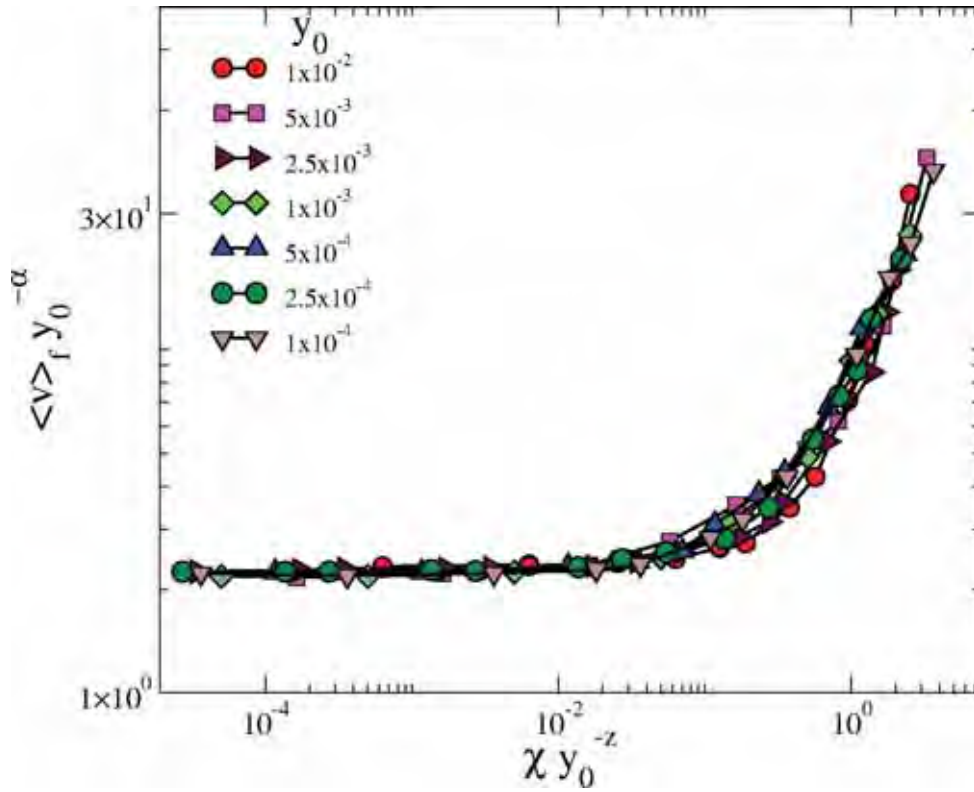


Figura 4.13: Colapso das curvas de $\langle v \rangle_f$ versus χ quando reescaladas, eixo horizontal como $\chi \rightarrow \chi y_0^{-z}$ e o eixo vertical como $\langle v \rangle_f \rightarrow \langle v \rangle_f y_0^{-\alpha}$.

e agora comparando esta com a equação (4.49), obtemos $\beta = -1/a$.

Com a escolha de $l = y_0^{-1/b}$ reescrevemos a equação (4.51) como

$$\langle v \rangle_f(\chi, y_0) = y_0^{-1/b} \langle v \rangle_f(y_0^{-a/b} \chi, 1). \quad (4.53)$$

agora comparando esta com a equação (4.48) obtemos que $\alpha = -1/b$. Com estas duas relações $\beta = -1/a$ e $\alpha = -1/b$ obtemos que

$$z + 2.5 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.54)$$

Obtemos então os expoentes α , β e z utilizando os cálculos de $\langle v \rangle$ numericamente como descrito anteriormente. Para o regime constante de $\langle v \rangle_f$ quando $\chi \ll \chi_c$ iremos chamar de $\langle v \rangle_f^{FU}$, pois remete o comportamento do modelo *Fermi-Ulam*. Utilizando um ajuste por lei de potência de $\langle v \rangle_f^{FU}$ versus y_0 obtendo $\alpha = 0,52(2)$. Para o regime de crescimento de $\langle v \rangle_f$ versus χ quando $\chi \gg \chi_c$, fazendo novamente o ajuste por lei de potência obtendo $\beta = 1,2(2)$. E para χ_c versus y_0 com ajuste por lei de potência obtemos $z = 2,1(2)$. O comportamento de $\langle v \rangle_f^{FU}$ versus y_0 e χ_c versus y_0 , pode ser visto na figura 4.12 (a) e (b) respectivamente. Desta forma reescalando adequadamente os eixos das curvas mostradas na figura 4.11 e utilizando os expoentes obtidos podemos confirmar o comportamento invariante de escala que pode ser visto na figura 4.13.

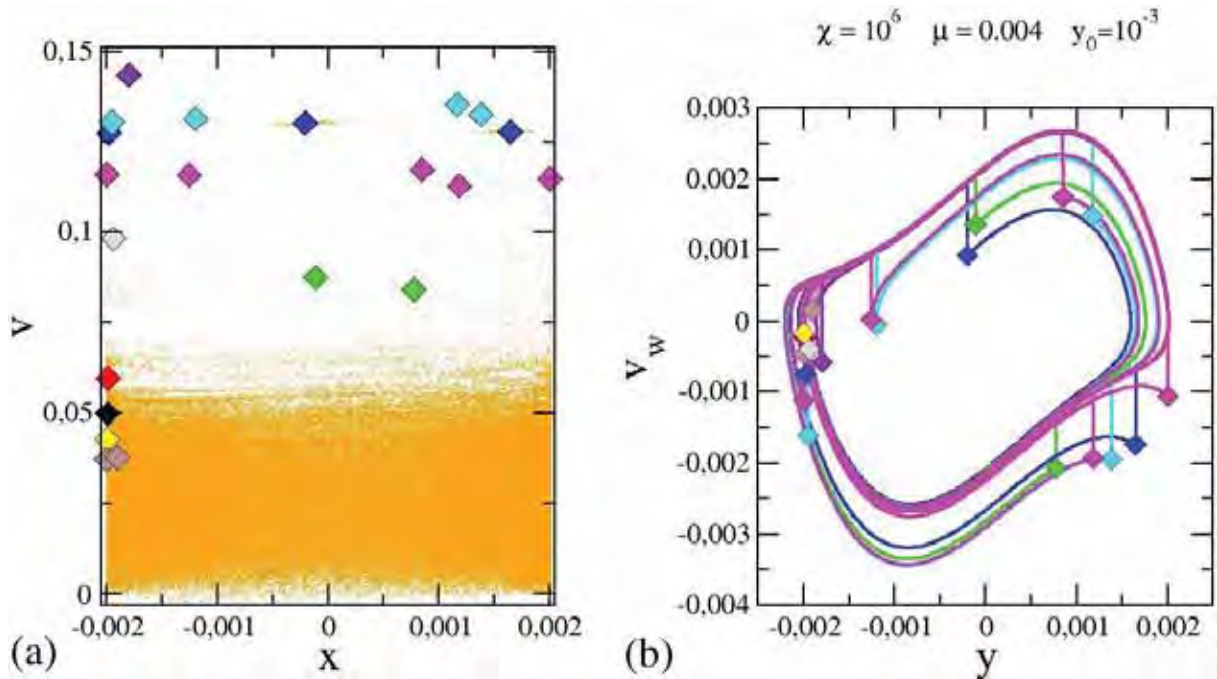


Figura 4.14: (a) v versus x , pontos amarelos representam o transiente inicial; (b) Espaço de fases para o oscilador de van der Pol quando é perturbado pelas colisões com a partícula, mapa (4.55). Os parâmetros de controle utilizados foram $y_0 = 10^{-3}$, $\mu = 0,004$ e $\chi = 10^6$. Quadrados são pontos no instante da colisão com a partícula.

4.4 Mapa para o caso em que $\mu \neq 0$

Para o caso em que consideramos que a massa da partícula não é desprezível $\mu \neq 0$, utilizando a equação (4.13) podemos definir o mapa da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 v_p(\tau_{n+1}) &= \frac{\mu - 1}{1 + \mu} [v_p(t_n) - v_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1})] + v_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1}), \\
 v_w^d(\tau_{n+1}) &= \frac{2\mu}{1 + \mu} [v_p(t_n) - v_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1})] + v_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1}), \\
 \tau_{n+1} &= \tau_n + \Delta\tau_{n+1}, \\
 x(\tau_{n+1}) &= y(\tau_{n+1}),
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

em que $\mu = m_p/m_w$ é a fração entre a massa da partícula e massa da parede, v_p é velocidade da partícula, v_w^d é a velocidade da parede após a colisão, v_w^a é a velocidade da parede antes da colisão, τ é o tempo, x é a posição da partícula e y é a posição da parede. O valor de $v_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1})$ é encontrado através da propagação (integração) das equações do oscilador de *van der Pol* com as condições da velocidade e posição da parede na colisão anterior, $(y(\tau_n), v_w^d(\tau_n))$.

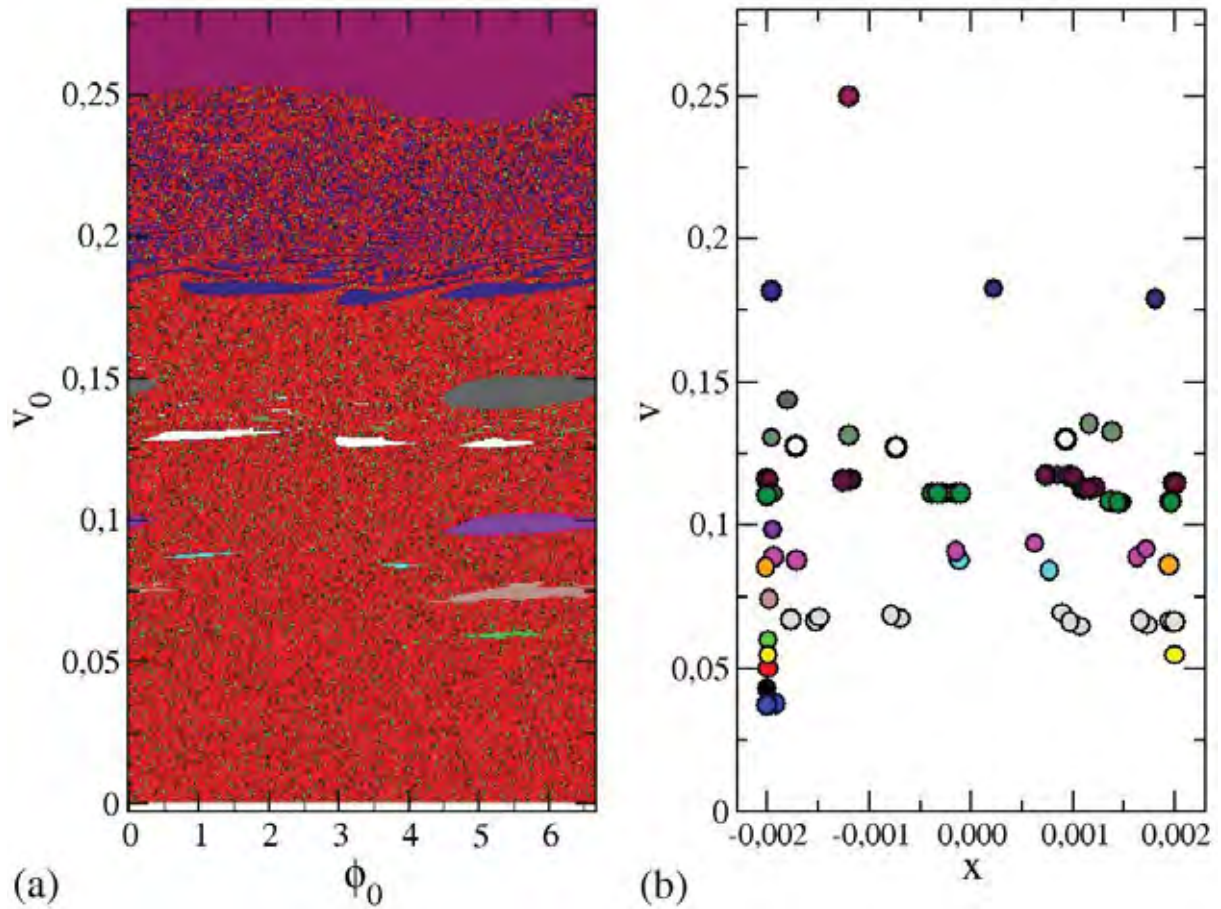


Figura 4.15: (a) Bacia de atração v_0 versus ϕ_0 ; (b) Pontos fixos v versus x . Os parâmetros de controle usados foram $y_0 = 10^{-3}$, $\mu = 0,004$ e $\chi = 10^6$.

Dessa forma o movimento da parede móvel é afetado pela colisão com a partícula, fazendo com que a oscilação que rege o movimento da parede saia do ciclo limite. Dependendo do instante da colisão a parede móvel pode ser levada a uma dinâmica externa ao ciclo limite e com o passar do tempo relaxa voltando ao ciclo limite dissipando energia. Entretanto se a parede móvel é levada a uma dinâmica interna ao ciclo limite, o sistema ganha energia quando a parede retorna novamente para o ciclo limite.

Devido ao fato da dinâmica da parede móvel não estar mais fixa no ciclo limite as variáveis (v, ϕ) não são mais adequadas para descrição do sistema, pois o período de oscilação da parede não é mais definido como no caso em que $\mu = 0$. Vamos portanto analisar as variáveis (v_p, v_w, y_p) que estão diretamente relacionadas com variáveis canônicas.

O espaço de fases, v versus x , é obtido para o caso na qual $\mu = 0,004$. Alguns dos pontos fixos presentes no espaço fases da partícula quando $\mu = 0$ tornam-se assintoticamente estáveis, de forma que condições iniciais próximas a estes pontos convergem para os pontos fixos, conforme mostrado na figura 4.14. Dependendo da condição inicial escolhida (v_0, x_0) o sistema passa por um transiente e converge para pontos fixos com períodos que podem ser 1, 3, 5, etc. Quando o sistema está na dinâmica estabelecida pelos pontos

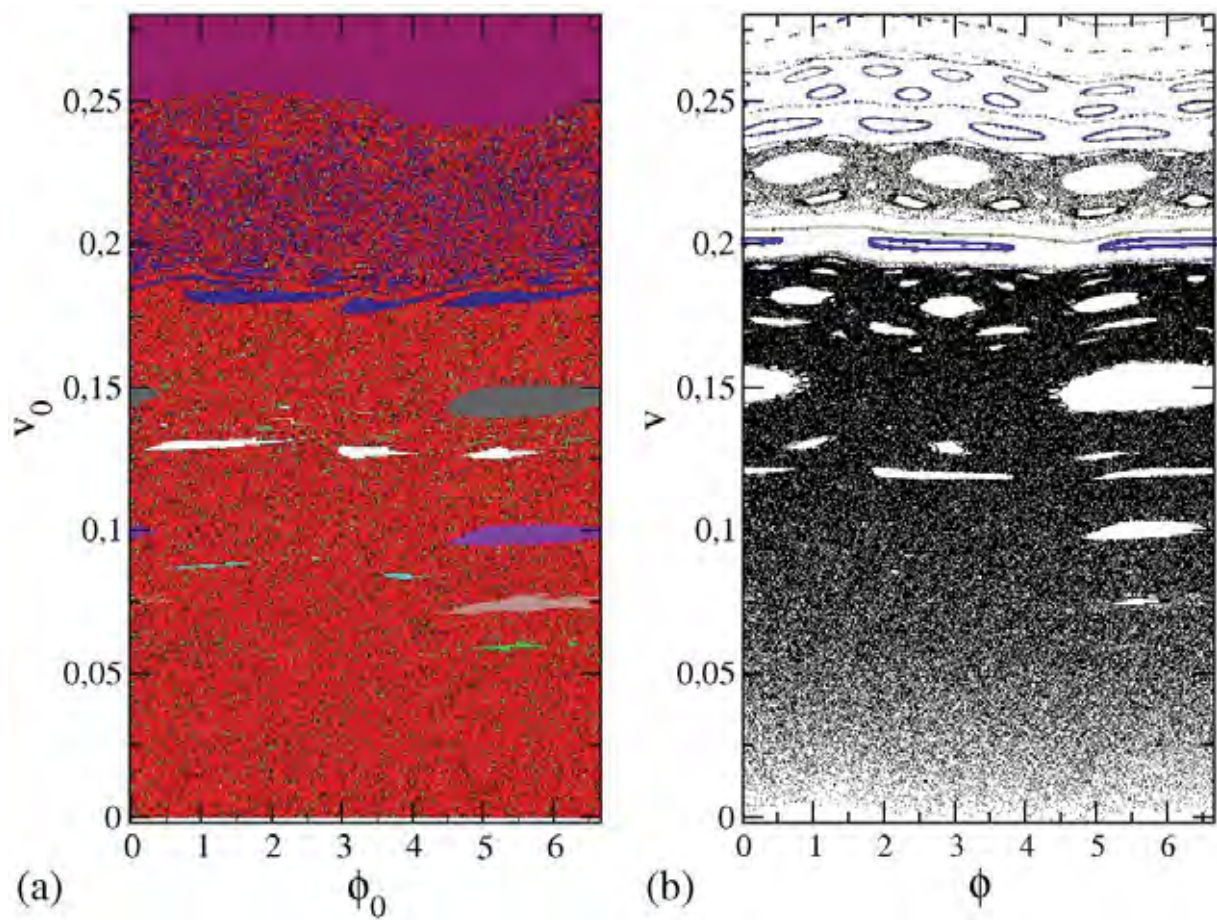


Figura 4.16: (a) Bacia de atração v_0 versus ϕ_0 ; (b) Espaço de fases quando $\mu = 0$. Os parâmetros de controle usados foram $\gamma_0 = 10^{-3}$, $\mu = 0,004$ e $\chi = 10^6$.

fixos, o espaço de fases do oscilador de *van der Pol* muda assim como o seu estado de equilíbrio. Deste modo seu ciclo limite é alterado para uma forma distinta. O transiente das condições iniciais e os pontos fixos podem ser observados na figura 4.14 (a) e o espaço de fases para o oscilador de *van der Pol* no estado de equilíbrio pode ser visto na figura 4.14 (b).

Para investigar o comportamento do caso em que $\mu \neq 0$ construímos a bacia de atração para um conjunto de condições iniciais na qual o oscilador de *van der Pol* está em princípio no seu ciclo limite, ou seja, as condições iniciais são definidas por (v_0, ϕ_0) . Deste modo o conjunto de condições iniciais evolui até convergir para um dos conjuntos de pontos fixos. Analisando a bacia de atração podemos detectar a existência de uma variedade de atratores com períodos diferentes, como pode ser visto na figura 4.15 (a) e (b) para os parâmetros de controle $\chi = 10^6$, $y_0 = 0,001$ e $\mu = 0,004$. Para determinadas regiões na bacia de atração, existe um conjunto diversificado de condições que levam a atratores distintos. Já para outras regiões as condições iniciais convergem para um único conjunto de pontos fixos. Para condições iniciais em que v_0 é muito grande, $v_0 > 0,25$, detectamos a existência de um único atrator de período 1.

Comparando a bacia de atração com o espaço de fases quando $\mu = 0$, para os mesmos parâmetros de controle χ e y_0 , podemos perceber uma semelhança topológica de algumas regiões do espaço de fases das ilhas *KAM* se transformam em regiões na bacia de atração que atraem para apenas um conjunto de pontos fixos. A comparação da bacia de atração com o espaço de fase para os parâmetros de controle $\mu = 0,004$, $y_0 = 10^{-3}$ e $\chi = 10^6$ pode ser observados na figura 4.16 (a) e (b). Outra análise que efetuamos para o caso

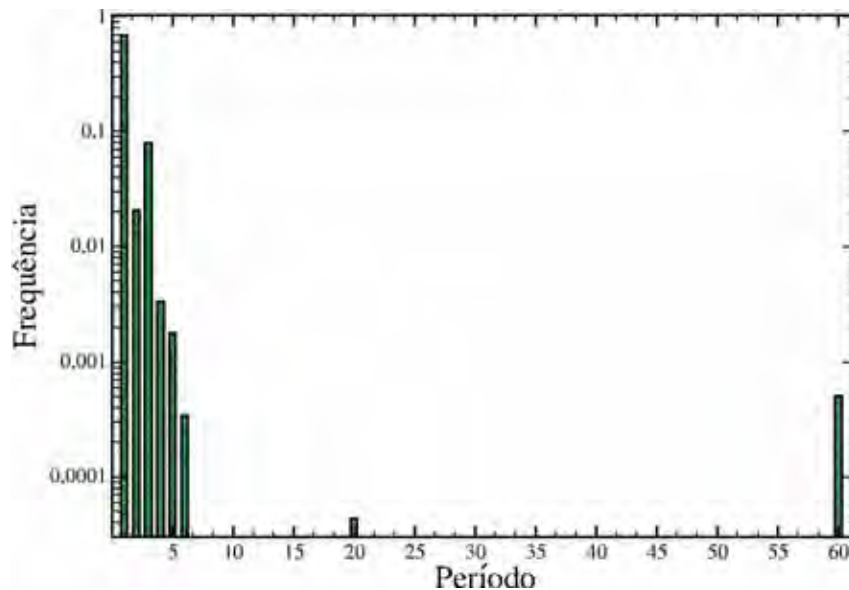


Figura 4.17: Fração entre a frequência do número de períodos dos pontos fixos e o número de condições iniciais total. Os parâmetros controle usados foram $\mu = 0,004$, $\chi = 10^6$ e $y_0 = 10^{-3}$.

$\mu \neq 0$ foi a construção de um histograma de frequências do número de períodos dos pontos

fixos da bacia de atração. As condições iniciais resultam em diversos períodos de pontos fixos, em sua grande maioria levam a períodos baixos. Pontos fixos de período 1 são os mais observados com o valor percentual de aproximadamente 70%, depois são observados períodos de 2, 3, 4, 5, 6, com valor percentual entre 1% e 10%, e algumas poucas condições iniciais levam a períodos 20 e 60, como pode ser visto na figura 4.17.

O modelo para o caso em que $\mu \neq 0$ apresenta um comportamento interessante para as propriedades da partícula ou mesmo se analisarmos o comportamento do oscilador de *van der Pol*. A investigação de outros parâmetros de controle pode revelar diversos outros aspectos ainda não explorados para o modelo. Além disso seria interessante a introdução de mais uma partícula para este modelo. No caso em que duas partículas simultâneas não interagentes confinadas entre as paredes poderão sentir a perturbação que a outra causou no movimento da parede móvel, de forma a criarem uma interação entre si mediada pela parede móvel e pela dinâmica do oscilador de *van der Pol*.

4.5 Conclusões

Investigamos o comportamento do oscilador de *van der Pol*, através da linearização das equação que descrevem o oscilador de *van der Pol* e de métodos numéricos de integração. Então construímos um bilhar unidimensional com fronteira dependente do tempo regida pelo oscilador de *van der Pol*. A investigação numérica do espaço de fases e de propriedades estatísticas deixou evidente que para valores pequenos do parâmetro de controle χ recupera-se o modelo *Fermi-Ulam*, até o ponto em que a perturbação causada se torna suficiente para modificar as propriedades dinâmicas e estatísticas. Essa transição ocorre em um valor bem determinado, caracterizando um transição no modelo. É interessante notar que o aumento do parâmetro de controle χ muda a forma do oscilador continuamente e a partir de um determinado valor altera as propriedades dinâmicas e estatísticas da partícula.

Para o caso onde a massa da partícula não é desprezada, $\mu \neq 0$, os pontos fixos do espaço de fase da partícula quando $\mu = 0$ tornam-se assintoticamente estáveis. Uma investigação da bacia de atração mostra que algumas regiões em que são observadas ilhas *KAM* no espaço de fases quando $\mu = 0$, convergem para um único conjunto de pontos fixos quando $\mu \neq 0$.

CAPÍTULO 5

BILHAR ELÍPTICO OVOIDE

Neste capítulo vamos apresentar a modelagem de um bilhar bidimensional conhecido como elíptico-ovoide na qual a fronteira na forma estática é dada na coordenada radial pela equação $R(\theta, p, e, \varepsilon) = (1 - e^2)/(1 + e \cos(\theta)) + \varepsilon \cos(p\theta)$. Na primeira parte vamos explorar algumas propriedades da versão estática analisando o espaço de fases. Então, apresentamos a construção de um modelo na versão móvel, com a fronteira dependente do tempo regida pelo oscilador de *van der Pol* e exploramos as propriedades dinâmicas e estatísticas. As propriedades estatística serão analisadas utilizando a série temporal da velocidade média. Faremos esta análise variando os parâmetros de controle do sistema.

5.1 Forma estática

Vamos considerar uma partícula clássica confinada no interior de uma região D que sofre colisões com a fronteira de forma especular e o módulo da velocidade permanece constante após a colisão. A fronteira é dada na coordenada radial por

$$R(\theta, p, e, \varepsilon) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta)} + \varepsilon \cos(p\theta) \quad (5.1)$$

em que $\theta \in [0, 2\pi)$ é o ângulo medido no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo, $p \in \mathbb{N}$, $e \in [0, 1)$ que é o parâmetro que controla a deformação da fronteira para elipsoide e $\varepsilon \in [0, 1)$ que controla a deformação da fronteira para ovoide.

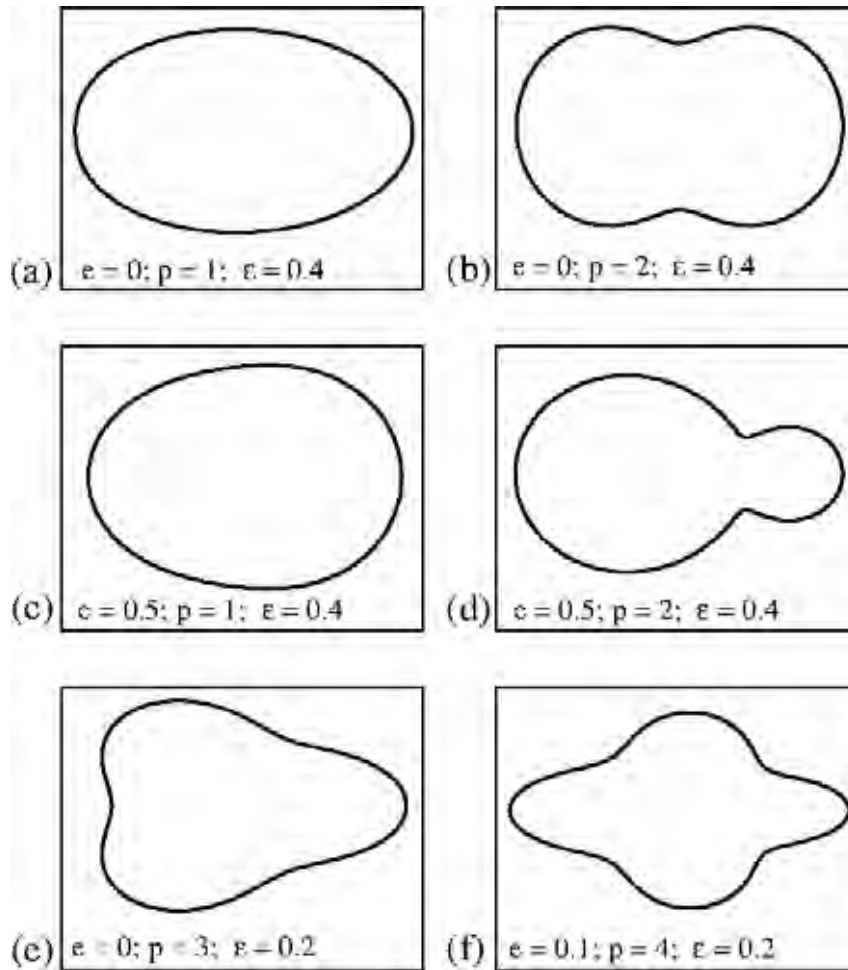


Figura 5.1: *Exemplo de fronteiras do bilhar bidimensional.*

Portanto quando o parâmetro $\varepsilon = e = 0$ é recuperada a versão em que a fronteira é circular. Se por outro lado $\varepsilon = 0$ e $e \neq 0$ a fronteira é uma elipse sendo o parâmetro e a excentricidade da elipse. Para $\varepsilon \neq 0$ e $e = 0$ temos o caso em que a fronteira é ovoide, como pode ser visto na figura 5.1 (a) e (b). Com a mudança de p , surgem regiões convexas na fronteira (figura 5.1 (b) e (e)). Quando o parâmetro $\varepsilon \neq 0$ e $e \neq 0$ temos o caso elíptico-ovoide, como pode ser visto na figura 5.1 (c), (d) e (f).

A dinâmica da partícula é descrita normalmente pelas variáveis θ_n e α_n , em que θ_n é a posição angular e α_n é o ângulo que a trajetória da partícula faz com a tangente da fronteira, ambos calculados no ponto da fronteira que ocorreu a colisão. Portanto, podemos construir um mapa onde dados os valores de (θ_n, α_n) obtemos os valores de $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$. Sendo T um mapeamento bidimensional que estabelece as relações do bilhar podemos obter $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}) = T(\theta_n, \alpha_n)$, cujo esquema pode ser observado na figura 5.2.

Para construção do mapeamento T podemos prosseguir da seguinte forma. A partir de um dado valor de θ_n obtemos o valor do ângulo que a reta tangente da fronteira faz com o eixo x positivo calculado no ponto em que ocorreu a colisão, na qual chamamos de

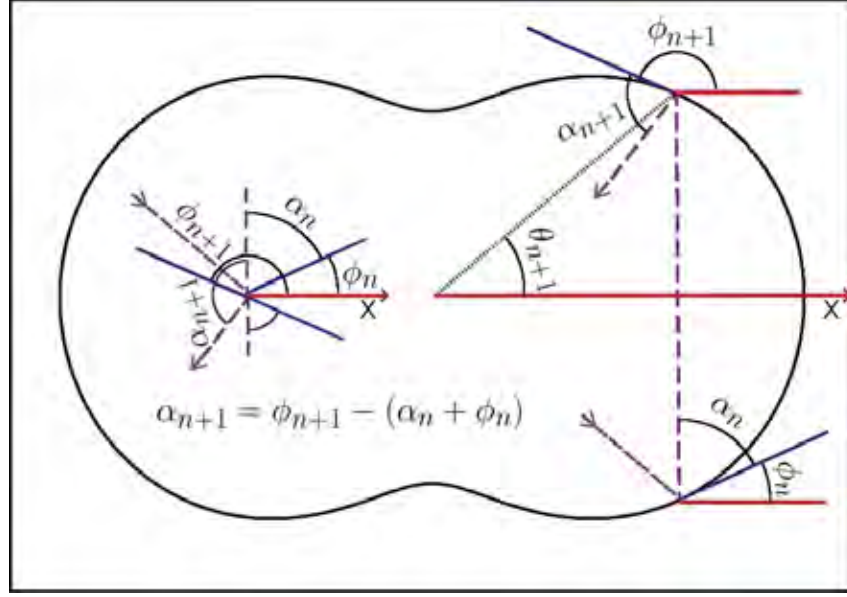


Figura 5.2: Ilustração de uma trajetória e os ângulos θ , α e ϕ para uma partícula confinada em um bilhar bidimensional.

ϕ_n , dado por

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{\frac{dY(\theta_n)}{d\theta_n}}{\frac{dX(\theta_n)}{d\theta_n}} \right] \quad (5.2)$$

em que $X(\theta) = R(\theta) \cos(\theta)$ e $Y(\theta) = R(\theta) \sin(\theta)$. Sendo

$$\frac{dX(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} \cos(\theta_n) - R(\theta_n) \sin(\theta_n), \quad (5.3)$$

$$\frac{dY(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} \sin(\theta_n) + R(\theta_n) \cos(\theta_n), \quad (5.4)$$

e

$$\frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{e(1-e^2) \sin(\theta_n)}{[1+e \cos(\theta_n)]^2} - \epsilon p \sin(p\theta_n). \quad (5.5)$$

Com o conhecimento de α_n , θ_n e ϕ_n podemos encontrar o valor de θ_{n+1} construindo a trajetória da partícula. O valor de θ_{n+1} será encontrado resolvendo o instante em que a trajetória cruza com a fronteira, determinando a posição da próxima colisão. A trajetória é construída a partir da equação da reta que é dada por

$$Y(\theta_{n+1}) = \tan(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] + Y(\theta_n) \quad (5.6)$$

em que $X(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1})$ e $Y(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1})$. Desta forma resolvendo para θ_{n+1} , então, podemos encontrar o valor de ϕ_{n+1} através da equação (5.2) calculado para $n+1$. Sabendo que o ângulo de incidência e reflexão são o mesmo e usando a regra do ângulo oposto pelo vértice encontramos α_{n+1} através de

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n), \quad (5.7)$$

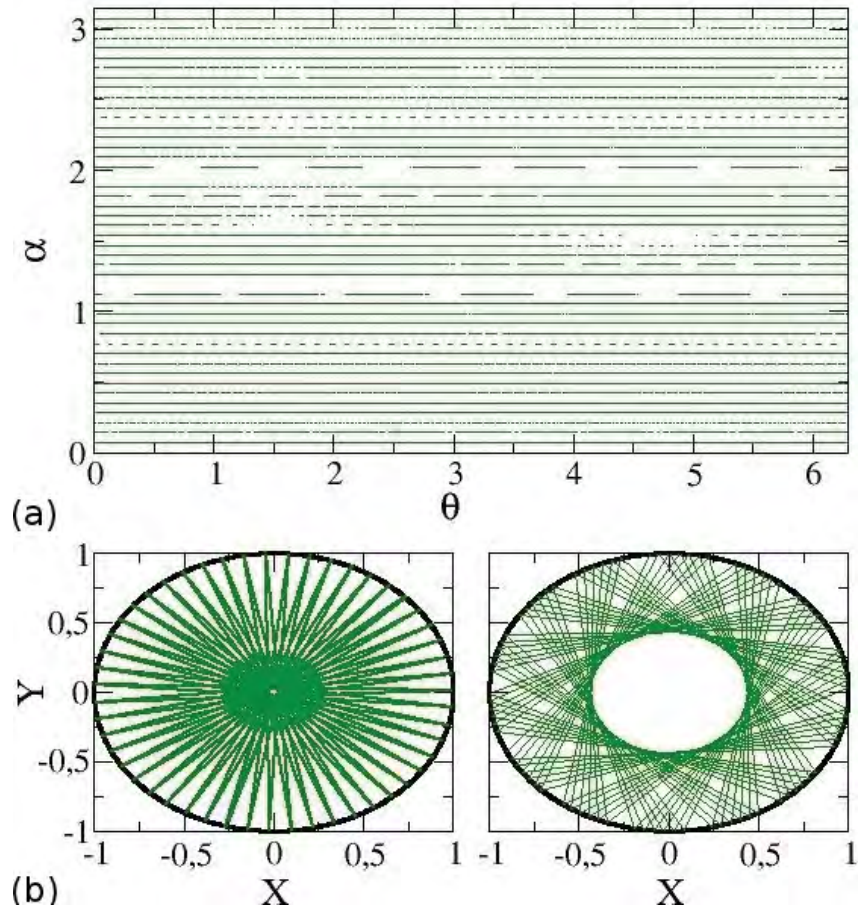


Figura 5.3: (a) Espaço de fases para o bilhar circular; (b) Duas trajetórias para o bilhar circular.

como pode ser visto na figura 5.2.

Deste modo o mapeamento pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 F(\theta_n) &= R(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) \\
 &\quad - \tan(\alpha_n + \phi_n) [R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \\
 \alpha_{n+1} &= \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n),
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

em que θ_{n+1} é encontrado resolvendo $F(\theta_{n+1}) = 0$ e ϕ_{n+1} é obtido através da equação (5.2). A partir do mapeamento (5.8) podemos construir o espaço de fases para o bilhar elíptico-ovoide e analisar as propriedades dinâmicas frente a mudança dos parâmetros de controle e , ε e p que controlam a mudança na fronteira do bilhar. Para o caso em que a fronteira é circular, $\varepsilon = 0$ e $e = 0$, o sistema é totalmente integrável, na figura 5.3 (a) pode ser visto o espaço de fases da partícula e 5.3 (b) órbitas para duas condições inicial distintas.

Quando a fronteira do bilhar é elíptica, caso em que $\varepsilon = 0$ e $e \neq 0$, a dinâmica ainda é integrável. Entretanto, diferente do bilhar circular, o elíptico apresenta uma trajetória que separa dois tipos de dinâmica no espaço de fases, chamada separatriz⁽²⁶⁻³³⁾. A separatriz

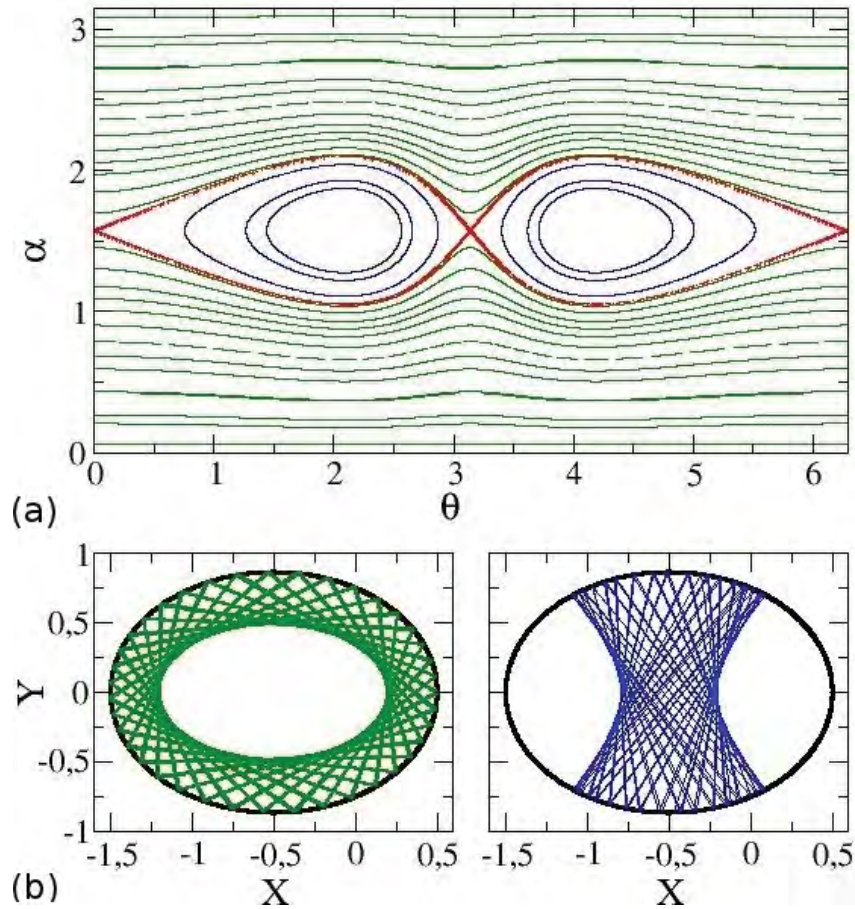


Figura 5.4: Órbitas em azul rotores, órbitas em verde libradores e órbitas em vermelho separatriz. (a) Espaço de fases para o bilhar elíptico; (b) Duas trajetórias para o bilhar elíptico.

separa a dinâmica em curvas invariantes e ilhas. As órbitas nas curvas invariantes são chamadas de rotores e podem acessar todos os valores de θ . Já as órbitas das ilhas são conhecidas como órbitas de libração em que a dinâmica da partícula está confinada entre os dois focos da elipse. O espaço de fases assim como as trajetórias no bilhar elíptico podem ser observados na figura 5.4 (a) e (b).

Para os parâmetros $e = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ a fronteira recuperada é a oval e o sistema deixa de ser integrável, ao passo que podemos observar caos no espaço para algumas condições iniciais. Entretanto, órbitas integráveis podem ser encontradas, como rotores e libradores, que podem estar rodeadas por órbitas caóticas, como pode ser visto na figura 5.5. Quando ε ultrapassa um valor crítico definido por $\varepsilon_c = 1/(1+p^2)$ ⁽³⁵⁻⁵⁵⁾, todas as curvas invariantes do tipo rotores são destruídas.

A análise do expoente de *Lyapunov* para o caso em que o bilhar é estático foi feita recentemente em⁽³⁵⁻⁵⁵⁾, mostrando o aumento do expoente de Lyapunov frente ao acréscimo do parâmetro ε . Entretanto, não foi verificada nenhuma mudança brusca quando o valor de ε ultrapassa o seu valor crítico ε_c .

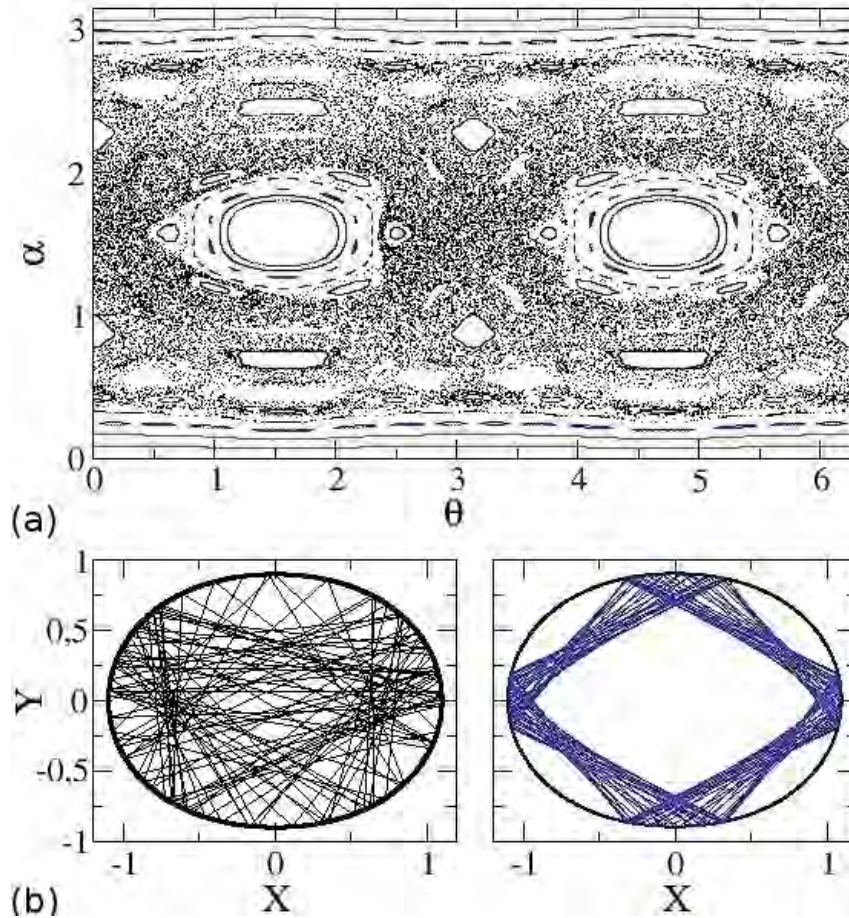


Figura 5.5: Órbitas em azul rotores, órbitas em verde libradores e órbitas em preto movimento caótico. (a) Espaço de fases para o bilhar ovoide; (b) Duas trajetórias para o bilhar ovoide.

5.2 Fronteira móvel regida pelo oscilador de *van der Pol*, caso $\mu = 0$

Nesta seção vamos apresentar o modelo do bilhar bidimensional para o caso da fronteira móvel dependente do tempo na qual uma partícula de massa muito menor que a fronteira, representada pelo parâmetro $\mu = 0$, está confinada. O movimento da fronteira é regido pelo oscilador de *van der Pol*. Para este caso o movimento da fronteira não é afetado pela colisão com a partícula confinada.

A equação que modela o oscilador de *van der Pol* é expressa como

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \chi(y^2 - y_0^2) \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (5.9)$$

em que y_0 e χ são os parâmetros que controlam a modificação da oscilação. Uma descrição do comportamento do oscilador de *van der Pol* é encontrado no Capítulo 3. Integrando numericamente a equação (5.9), podemos obter a posição $y(\tau)$ e sua velocidade $dy(\tau)/d\tau$.

Vamos considerar para construção desse modelo a fronteira do tipo ovoide, $e = 0$ e $\varepsilon \neq 0$, que pode ser facilmente generalizada para o bilhar elíptico-ovoide. A dependência temporal altera a fronteira em função do tempo da seguinte forma

$$R_w(\theta) = [1 + y(\tau)][1 + \varepsilon \cos(p\theta)] \quad (5.10)$$

em que $y(\tau)$ é a função temporal da posição e sua amplitude de oscilação é escolhida através do parâmetro y_0 da equação (5.9). O tipo de dependência temporal para fronteira estabelecida pela equação (5.10) é conhecido na literatura como *breathing*⁽²⁵⁻³⁵⁾ (respiração em português), devido a fronteira expandir e contrair por igual, lembrando a respiração. É importante ressaltar que escolhemos a oscilação da fronteira regida pela dinâmica estabelecida pelo ciclo limite do oscilador de *van der Pol*. Nas simulações efetuadas é esperado um tempo suficiente para que a dinâmica alcance o ciclo limite.

Para descrever o caso em que o bilhar é dependente do tempo, usamos um mapeamento quadridimensional Υ , em que $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, \tau_{n+1}) = \Upsilon(\theta_n, \alpha_n, V_n, \tau_n)$. Sendo θ a posição angular da partícula, α o ângulo que a trajetória da partícula faz com a reta tangente determinada no ponto da colisão, V o módulo da velocidade da partícula e τ o tempo. Vamos agora demonstrar os procedimentos necessários para construção do ma-

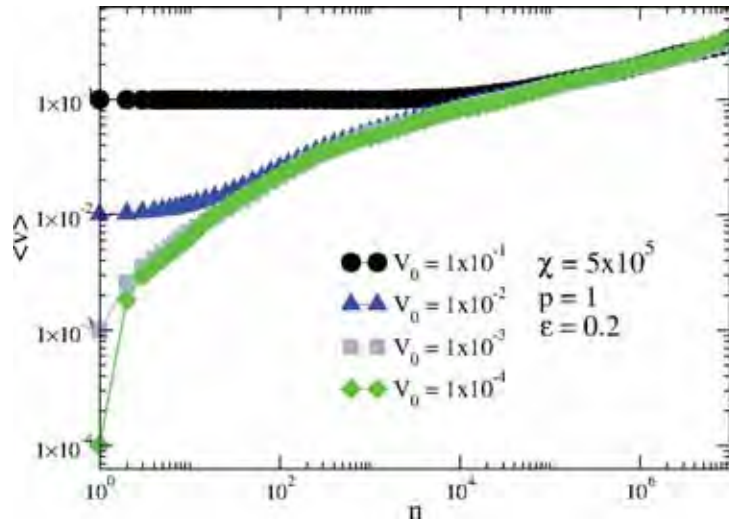


Figura 5.6: Comportamento da velocidade média da partícula $\langle V \rangle$ versus n para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $y_0 = 0.001$ e diversos valores de V_0 .

peamento Υ . Partindo da seguinte condição inicial $(\theta_n, \alpha_n, V_n, \tau_n)$, podemos encontrar a posição em que a n -ésima colisão ocorreu com a fronteira, ou seja, em $\vec{R}(\theta_n, \tau_n) = \vec{R}_w(\theta_n, \tau_n)$, sendo $\vec{R}(\theta_n, \tau_n)$ a posição da partícula e $\vec{R}_w(\theta_n, \tau_n)$ a posição da fronteira. Deste modo o ângulo em que a reta tangente faz com o eixo x positivo, ϕ_n , no ponto da colisão pode ser

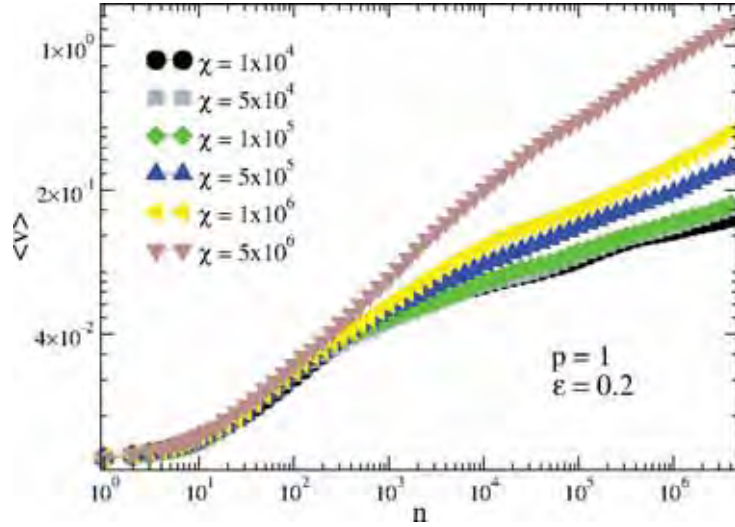


Figura 5.7: Comportamento da velocidade média $\langle V \rangle$ versus n para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $y_0 = 0.001$ e diversos valores de χ .

determinado através da seguinte relação

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{\frac{dY_w(\theta_n, \tau_n)}{d\theta_n}}{\frac{dX_w(\theta_n, \tau_n)}{d\theta_n}} \right] \quad (5.11)$$

em que $X_w(\theta_n, \tau_n) = R_w(\theta_n, \tau_n) \cos(\theta_n)$, $Y(\theta_n, \tau_n) = R_w(\theta_n, \tau_n) \sin(\theta_n)$,

$$\begin{aligned} \frac{dX_w(\theta_n, \tau_n)}{d\theta_n} &= \frac{dR_w(\theta_n, \tau_n)}{d\theta_n} \cos(\theta_n) - R_w(\theta_n, \tau_n) \sin(\theta_n) \\ \frac{dY_w(\theta_n, \tau_n)}{d\theta_n} &= \frac{dR_w(\theta_n, \tau_n)}{d\theta_n} \sin(\theta_n) + R_w(\theta_n, \tau_n) \cos(\theta_n) \end{aligned}$$

e

$$\frac{dR_w(\theta_n, \tau_n)}{d\theta_n} = -\varepsilon p [1 + y(\tau_n)] \sin(p\theta_n). \quad (5.12)$$

A velocidade vetorial \vec{V}_n pode ser determinada por meio do conhecimento de ϕ_n , α_n e seu módulo V_n . Como a inclinação da trajetória da partícula em relação ao eixo x positivo é dada por $\tan(\phi + \alpha)$, o vetor velocidade da n -ésima colisão pode ser escrito como

$$\vec{V}_n = V_n [\cos(\phi_n + \alpha_n) \hat{x} + \sin(\phi_n + \alpha_n) \hat{y}] \quad (5.13)$$

em que \hat{x} é o versor na direção x e \hat{y} é o versor na direção y .

Conhecido o vetor velocidade \vec{V}_n , podemos determinar a trajetória que a partícula percorrerá após a n -ésima colisão. Assim, quando novamente a partícula atinge a fronteira móvel, condição em que $\vec{R}(\theta_{n+1}, \tau_n) = \vec{R}_w(\theta_{n+1}, \tau_{n+1})$, determinamos o ângulo θ_{n+1} e o tempo τ_{n+1} na $(n+1)$ -ésima colisão. Para encontrar V_{n+1} e α_{n+1} devemos calcular a quantidade de momento trocada entre a partícula e a fronteira móvel.

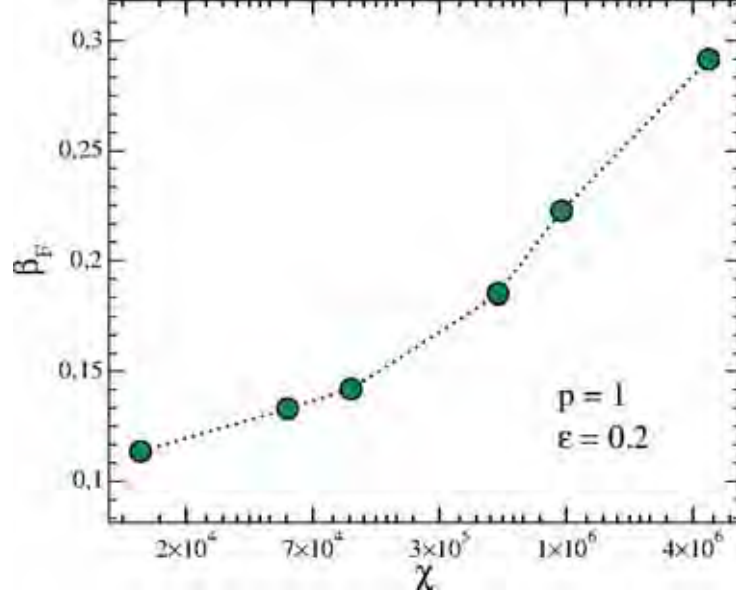


Figura 5.8: *Comportamento do expoente da lei de potência final da velocidade média β_f versus χ para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.2$ e $y_0 = 0.001$.*

Vamos considerar que no instante da colisão o momento trocado entre a partícula e a fronteira móvel será ao longo da componente normal da fronteira. Assumimos que não haverá troca de momento na componente tangencial. Deste modo, as componentes normal e tangencial da velocidade da partícula após a colisão podem ser obtidas através

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1} = [2\vec{V}_w(\tau_{n+1}) - \vec{V}_n] \cdot \hat{N}_{n+1}, \quad (5.14)$$

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{T}_{n+1} = \vec{V}_n \cdot \hat{T}_{n+1}, \quad (5.15)$$

em que \hat{T}_{n+1} e \hat{N}_{n+1} são os versores tangencial e normal da fronteira, calculados como

$$\hat{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1})\hat{x} + \sin(\phi_{n+1})\hat{y}, \quad (5.16)$$

$$\hat{N}_{n+1} = -\sin(\phi_{n+1})\hat{x} + \cos(\phi_{n+1})\hat{y}, \quad (5.17)$$

onde ϕ_{n+1} fica determinado usando a relação dada pela equação (5.11). O valor da velocidade da parede $V_w(\tau_{n+1})$ é calculado a partir da derivada temporal de $R_w(\theta_{n+1}, \tau_{n+1})$ dada por

$$\vec{V}_w(\tau_{n+1}) = \frac{dR_w(\theta_{n+1}, \tau_{n+1})}{d\tau_{n+1}} [\cos(\theta_{n+1})\hat{x} + \sin(\theta_{n+1})\hat{y}] \quad (5.18)$$

em que

$$\frac{dR_w(\theta_{n+1}, \tau_{n+1})}{d\tau_{n+1}} = \frac{dy(\tau_{n+1})}{d\tau_{n+1}} [1 + \varepsilon] \cos(p\theta_n) \quad (5.19)$$

e $dy/d\tau$ fica determinado através da solução numérica no instante τ_{n+1} da equação diferencial (5.9). Em seguida obtemos a componente normal da velocidade da partícula

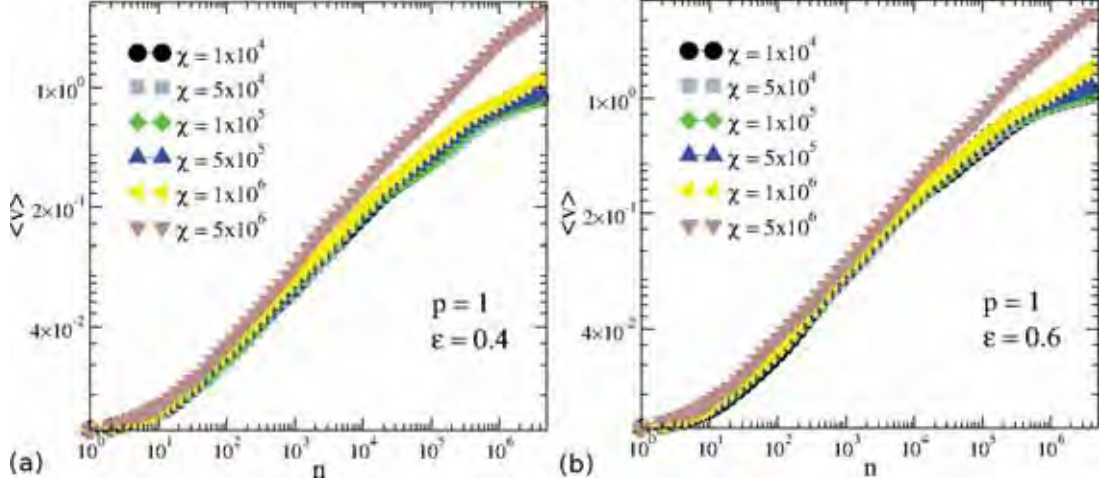


Figura 5.9: Comportamento da velocidade média $\langle V \rangle$ versus n . (a) para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$; (b) para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.6$, $y_0 = 0.001$.

utilizando os procedimentos descritos no Capítulo 4, Seção 2, dada por

$$\begin{aligned} \vec{V}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1} = & V_n [\cos(\phi_n + \alpha_n) \sin(\phi_{n+1}) - \sin(\phi_n + \alpha_n) \cos(\phi_{n+1})] + \\ & 2 \left\{ \frac{dR_w(\theta_{n+1}, \tau_{n+1})}{d\tau_{n+1}} [\sin(\theta_{n+1}) \cos(\phi_{n+1}) - \cos(\theta_{n+1}) \sin(\phi_{n+1})] \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

e a componente tangencial da velocidade da partícula por

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{T}_{n+1} = V_n [\cos(\phi_n + \alpha_n) \cos(\phi_{n+1}) + \sin(\phi_n + \alpha_n) \sin(\phi_{n+1})]. \quad (5.21)$$

O valor de α_{n+1} fica determinado através de

$$\alpha_{n+1} = \arctan \left[\frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{T}_{n+1}} \right] \quad (5.22)$$

e o módulo de \vec{V}_{n+1} pode ser calculado através de

$$V_{n+1} = \sqrt{[\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{T}_{n+1}]^2 + [\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1}]^2}. \quad (5.23)$$

Deste modo encontramos todas as relações necessárias para determinar, partindo da n -ésima colisão determinada por $(\theta_n, \alpha_n, V_n, \tau_n)$, o instante da $(n+1)$ -ésima colisão dado por $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, \tau_{n+1})$.

5.2.1 Análise da Velocidade Média

Nesta seção vamos apresentar as propriedades estatísticas para o modelo do bilhar bidimensional com fronteira regida pelo oscilador de *van der Pol*, equação (5.9). Partindo de um conjunto de condições iniciais vamos apresentar o cálculo da velocidade média em

função do número de colisões com a fronteira. Esse conjunto de condições iniciais equivale a média calculada de um conjunto de partículas não interagentes confinadas no bilhar.

Método Utilizado

A média da velocidade para um conjunto de condições iniciais K em função do número de colisões pode ser calculada através de

$$\langle V \rangle (n) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K V_i(n) \quad (5.24)$$

em que $V_i(n)$ é

$$V_i(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} V(j) \quad (5.25)$$

na qual mudamos a nomenclatura de V_j para $V(j)$ na definição feita na equação (5.23). Dependendo da escolha do conjunto de condições iniciais K o comportamento inicial da velocidade média muda. Vamos escolher um conjunto K na qual a energia da partícula é próxima da velocidade máxima da fronteira. Deste modo podemos acompanhar o crescimento da energia em função do número de colisões da partícula com a fronteira do bilhar.

Resultados

Analisamos o comportamento da velocidade média da partícula $\langle V \rangle$ variando os parâmetros que controlam a forma da fronteira, p e ε , e o parâmetro que controla a forma de oscilação, parâmetro χ .

Através da conjectura LRA ⁽³²⁾ é esperado encontrarmos para este modelo o fenômeno de aceleração de *Fermi*. A conjectura LRA afirma que se o bilhar com a fronteira estática apresentar componentes caóticas, isso é condição suficiente para que se observe aceleração de *Fermi* quando sua fronteira for móvel. Como mostrado na Seção 5.1 deste capítulo, o bilhar ovoide apresenta componentes caóticas no espaço de fases (figura 5.5), desta forma, e de acordo com a conjectura LRA , deve apresentar aceleração de *Fermi*.

Com a análise da velocidade média da partícula vemos que $\langle V \rangle$ cresce indefinidamente em função de n em acordo com a conjectura LRA , de acordo com a figura 5.6. A dependência no comportamento da velocidade média $\langle V \rangle$ como função da velocidade inicial V_0 fica evidente, como mostra a figura 5.6. Entretanto, à medida que o número de colisões com a fronteira aumenta todas as curvas de diferentes valores de V_0 convergem

para um único regime de crescimento. O comportamento geral da velocidade média $\langle V \rangle$ pode ser descrito da seguinte forma: (i) um regime constante para valores baixos de n ; (ii) para valores maiores de n há uma mudança no comportamento de $\langle V \rangle$, que começa crescer em lei de potência; e (iii) outra mudança no comportamento de $\langle V \rangle$ em que o expoente de crescimento da lei de potência diminui.

Agora, fixamos a velocidade inicial como $V_0 = 10^{-2}$. Desta forma analisamos o comportamento da velocidade média $\langle V \rangle$ versus n frente à mudança do parâmetro de controle χ , e podemos notar a mudança no regime de crescimento da energia, conforme pode ser visto na figura 5.7. Por um ajuste de lei de potência em função do parâmetro χ considerando o regime final do comportamento de $\langle V \rangle$, obtemos o expoente de crescimento, que chamamos por β_F . O valor β_F cresce frente ao aumento do parâmetro de controle χ . Aparentemente há uma mudança nesse crescimento passando por um ponto de inflexão. Entretanto a investigação numérica feita não foi suficiente para encontrar este ponto, como pode ser visto na figura 5.8. Para outros valores dos parâmetros p e ε ,

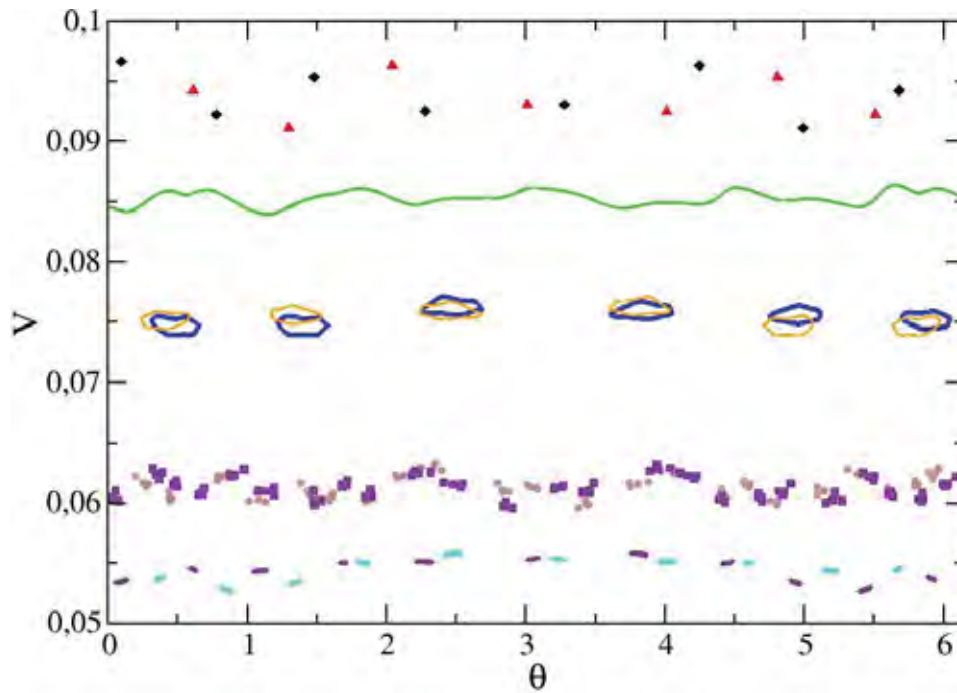


Figura 5.10: *Projeção do espaço de fases no plano formado por V e θ para os parâmetros de controle $\mu = 0.001$, $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$ e $\chi = 10^6$.*

o comportamento da velocidade média $\langle V \rangle$ observado é semelhante ao descrito anteriormente. Observamos uma região em que $\langle V \rangle$ permanece constante até um ponto que começa a crescer e depois o expoente de crescimento diminui, como pode ser observado nas figuras 5.9 (a) e (b).

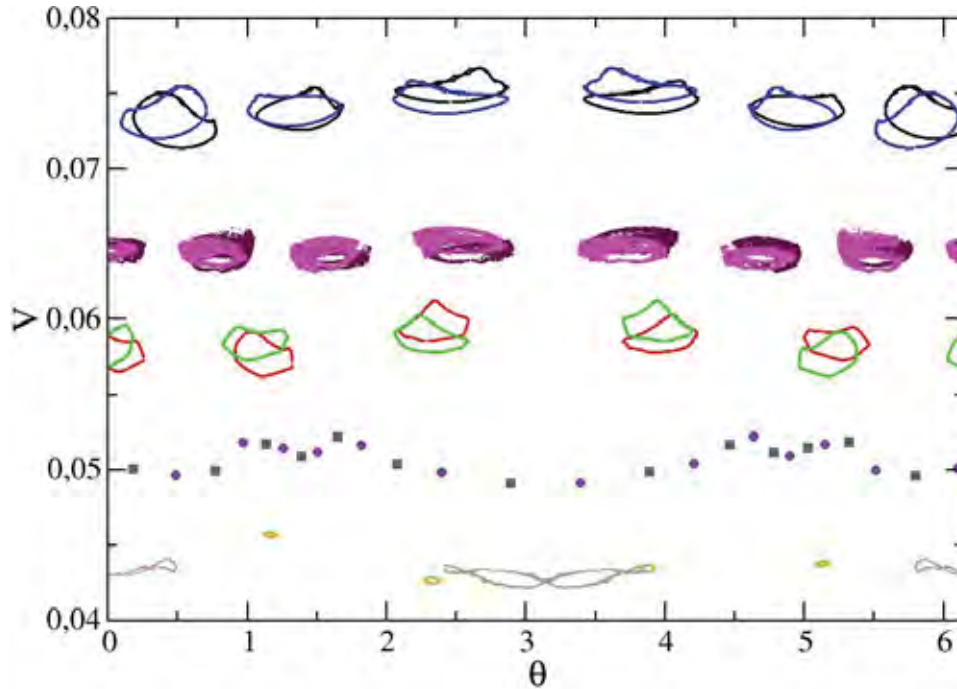


Figura 5.11: *Projeção do espaço de fases no plano formado por V e θ para os parâmetros de controle $\mu = 0.008$, $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$ e $\chi = 10^6$.*

5.3 Caso em que $\mu \neq 0$

Para o caso em que a massa da partícula é significativa quando comparada com a massa da fronteira, $\mu \neq 0$, devemos considerar a perturbação sobre a fronteira causada pela partícula. Quando ocorre uma colisão, tanto o momento da partícula como o da fronteira são alterados, de modo que o movimento da fronteira pode ser levado para fora ou dentro do ciclo limite estabelecido pelo o oscilador de *van der Pol*. Quando o movimento da fronteira sai da dinâmica estabelecida pelo ciclo limite, o sistema pode dissipar ou ganhar energia voltando novamente para o ciclo limite.

O mapeamento para este caso é obtido através de uma generalização do caso em que $\mu = 0$ definido na seção (5.2). Reaproveitando os cálculos para o caso $\mu = 0$ todas as grandezas que descrevem o modelo são definidos na seção (5.2) com a modificação da regra de atualização da componente normal da velocidade da partícula e da velocidade da fronteira após a colisão. Assim o mapeamento fica definido pelas variáveis V velocidade da partícula, V_w velocidade da fronteira, R_w posição do oscilador, θ posição angular e ϕ ângulo com que a partícula é refletida da fronteira. Uma explicação mais detalhada dos ângulos θ e ϕ pode ser visto na seção (5.1).

Neste caso a componente normal da velocidade da partícula após a colisão deve ser

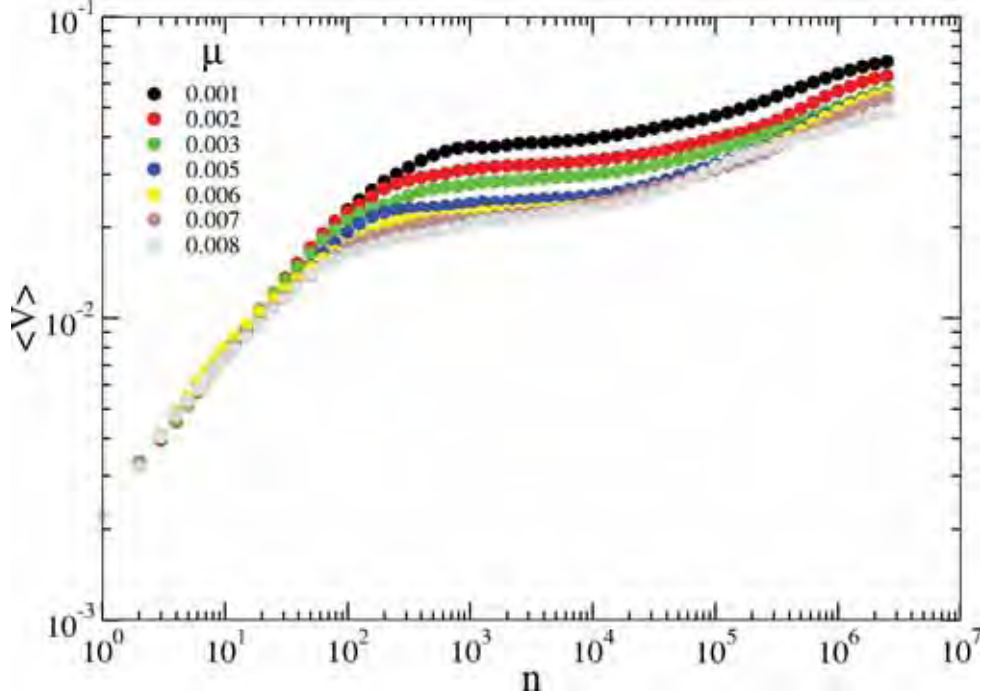


Figura 5.12: Velocidade média de um conjunto de 125 condições iniciais para os parâmetros de controle $p = 1$, $\varepsilon = 0.4$, $y_0 = 0.001$ e $\chi = 10^6$.

calculada como

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \hat{N}_{n+1} = \frac{\mu - 1}{1 + \mu} [\vec{V}_n - \vec{V}_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1})] \cdot \hat{N}_{n+1} + \vec{V}_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1}) \cdot \hat{N}_{n+1} \quad (5.26)$$

em que, $\mu = m_p/m_w$, τ_n é o tempo na qual ocorreu a n -ésima colisão, $\Delta\tau_{n+1}$ é o intervalo entre a n -ésima e a $(n+1)$ -ésima colisão, $\vec{V}_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1})$ é a velocidade da fronteira no ponto em que ocorre a colisão obtida da integração numérica partindo do tempo τ_n até o tempo $\tau_n + \Delta\tau_{n+1}$ da equação (5.9), utilizando como condição inicial $y(\tau_n)$ e $V_w^d(\tau_n)$. A velocidade da fronteira após a colisão deve ser calculada como

$$V_w^d(\tau_{n+1}) = \frac{2\mu}{1 + \mu} [V_n \cdot \hat{N}_{n+1} - V_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1})] + V_w^a(\tau_n + \Delta\tau_{n+1}). \quad (5.27)$$

O comportamento dinâmico para o caso em que $\mu \neq 0$ muda, de forma que o fenômeno de aceleração de *Fermi* que é observado quando $\mu = 0$ não é mais verificado para o caso em que $\mu \neq 0$. Este resultado está de acordo com a conjectura estabelecida em⁽²⁴⁾, que afirma que sistemas que apresentam aceleração de *Fermi* não são estruturalmente estáveis.

A dinâmica da partícula tende para atratores distintos que dependem da escolha da condição inicial. Os atratores encontrados são de vários tipos, a dinâmica pode convergir para: (i) atratores quase periódicos, em que os pontos que formam a órbita no espaço de fases geram uma linha preenchida densamente, mas que nunca se repetem; (ii) atratores

do tipo pontos fixos que são periódicos; e (iii) atratores estranhos, que são não periódicos e nem quase periódicos. Para o caso em que $\mu = 0.001$ encontramos atratores periódicos, e quase periódicos. Uma projeção do espaço de fases no plano formado por V e θ pode ser vista na figura 5.10. Para o caso de $\mu = 0.008$ além dos atratores periódicos e quase periódicos encontramos atratores estranhos, aparentemente caóticos. Um projeção do espaço de fases no plano formado por V^p e θ pode ser visto na figura 5.11.

A velocidade média para este caso mostra uma convergência para média de todos os atratores ponderando a convergência de cada condição inicial. O comportamento inicial da velocidade média é o mesmo para todos os parâmetros μ analisados, crescendo em lei de potência com expoente igual 0.5. Esse comportamento inicial é característico ao transiente inicial que o sistema passa antes de convergir para a dinâmica estabelecida pelos atratores. Crescimento em lei de potência com expoente 0.5 é característico de processos difusivos aleatórios evidenciando que apesar de o nosso sistema ser determinista apresenta um transiente com comportamento difusivo. A média da velocidade pode ser vista na figura 5.12.

5.4 Conclusões

Neste capítulo foi construído um modelo bidimensional para o bilhar elíptico-ovoide para o caso estático, apresentando os cálculos necessários para obtenção do mapa. Mostramos o que a mudança no formato da fronteira feita por meio dos parâmetro de controle p , e e ε acarretam nas propriedades dinâmicas do modelo. Para os casos em que o bilhar é circular, ovoide, elíptico e elíptico-ovoide mostramos suas propriedades dinâmicas por meio da análise da trajetória da partícula no interior do bilhar e do espaço de fases.

Na segunda parte do capítulo construímos um modelo para o bilhar elíptico-ovoide com fronteira móvel regida pelo oscilador de *van der Pol* para o parâmetro de controle $\mu = 0$. Este modelo remete ao caso em que a massa da partícula é desprezível comparada com a massa da fronteira. Analisando as propriedades estatísticas através da velocidade média, mostramos a dependência da escolha da velocidade inicial assim como a mudança no comportamento de crescimento frente à mudança do parâmetro de controle χ que controla a não-linearidade do oscilador de *van der Pol*.

Para caso quando $\mu \neq 0$ construímos o modelo obtendo as equações necessárias para o mapa. Neste caso, as colisões entre a partícula e a fronteira alteram o movimento desempenhado pela fronteira. Essa perturbação faz com que as oscilações da fronteira sejam não periódicas. O modelo agora se torna dissipativo, podendo receber ou perder energia devido à dinâmica imposta pelo oscilador de *van der Pol*. O fenômeno de aceleração de

Fermi não é mais observado, estando em acordo com a conjectura estabelecida em⁽²⁴⁾, na qual afirma que o fenômeno de aceleração não é estruturalmente estável deixando de ser exibido quando tem-se dissipação no sistema.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Apresentamos nessa dissertação a construção de um bilhar com fronteira móvel dependente do tempo regida pelo oscilador de *van der Pol*. Consideramos dois tipos de bilhares, um unidimensional que consiste do modelo *Fermi-Ulam* na qual o movimento da parede móvel é regido pelo oscilador *van der Pol* e o segundo um bilhar bidimensional ovoide na qual o movimento da sua fronteira é regida pelo oscilador de *van der Pol*.

No segundo capítulo expusemos algumas ideias introdutórias ao estudo de sistemas dinâmicos. Uma breve revisão histórica foi feita e mostramos algumas abordagens matemáticas que são utilizadas no estudo de sistemas dinâmicos. Apresentamos o teorema de Liouville e o teorema de recorrência de Poincaré.

No terceiro capítulo demonstramos algumas propriedades dinâmicas do oscilador de *van der Pol*. Mostramos o ciclo limite de oscilações periódicas que a dinâmica desse sistema converge. Discutimos a dificuldade que a integração numérica das equações diferenciais que modelam o oscilador de *van der Pol* podem apresentar e os cuidados que devem ser tomados.

No quarto capítulo descrevemos todos os passos para a construção do bilhar unidimensional regido pelo oscilador de *van der Pol*, onde o termo não linear do oscilador é controlado pelo parâmetro χ e a amplitude de oscilação pelo parâmetro y_0 . Basicamente, o modelo estudado é uma modificação do modelo *Fermi-Ulam*, na qual a parede móvel é regida pelo oscilador de *van der Pol*. Estudamos dois casos distintos, o primeiro quando a massa da parede móvel é muito maior do que a massa da partícula confinada, represen-

tado pelo parâmetro $\mu = m_p/m_w = 0$. O segundo caso ocorre quando a massa da partícula é considerável comparada com a massa da parede móvel, representado pelo parâmetro $\mu = m_p/m_w \neq 0$.

No primeiro caso, $\mu = 0$, o movimento da parede móvel não é perturbado pelas colisões com a partícula e permanece na dinâmica estabelecida pelo ciclo limite do oscilador de *van der Pol*. Assim analisamos as propriedades dinâmicas através do espaço de fases e da velocidade média da partícula em função dos parâmetros χ e y_0 .

Introduzimos um método alternativo para o cálculo da velocidade média. Basicamente, o método consiste em uma transformação a baixos valores de velocidades da partícula e com apenas uma órbita pode-se obter o comportamento da velocidade média. Mostramos numericamente que o método de transformação a baixas velocidades chega ao mesmo resultado da velocidade média calculada pelo método usual, a menos um erro estatístico. Esse método, para alguns casos, mostra grande superioridade de desempenho comparado com o método usual. Simulações que poderiam levar meses passam a levar alguns dias para serem completadas, por exemplo. Utilizamos o método de transformação a baixas velocidades obtendo a velocidade média da partícula para o caso em que $\mu = 0$. Assim demonstramos o comportamento invariante de escala que a velocidade média final apresenta em função dos parâmetros χ e y_0 .

Para o caso em que $\mu \neq 0$, o movimento da fronteira é alterado pelas colisões com a partícula e a dinâmica da partícula converge para atratores do tipo ponto fixo com diversos períodos, porém em sua maioria de período 1. Construímos um diagrama de condições iniciais comparando com o espaço de fases do caso que $\mu = 0$, evidenciando numericamente que alguns dos pontos fixos do caso $\mu = 0$ se tornam assintoticamente estáveis quando $\mu \neq 0$. Analisamos também a dinâmica do oscilador de *van der Pol* que quando perturbado pelas colisões com a partícula tende para um ciclo limite de forma distinta comparada quando não há perturbação.

No quinto capítulo demonstramos os passos necessários para construção do bilhar bidimensional com fronteira móvel regida pelo oscilador de *van der Pol*. Os parâmetros que controlam o oscilador de *van der Pol* são os mesmos do caso unidimensional, χ e y_0 . Escolhemos o bilhar bidimensional conhecido como elíptico-ovoide, construindo primeiro sua versão estática e depois a versão móvel para o bilhar ovoide puro. Analisamos o caso em que a massa da partícula não perturba o movimento da fronteira móvel, $\mu = 0$, demonstrando assim o fenômeno de aceleração de *Fermi*. Para o caso em que $\mu \neq 0$ o fenômeno de aceleração de Fermi é suprimido, estando em acordo com uma conjectura estabelecida recentemente em⁽²⁴⁾. Mostramos também que para este caso dependendo da escolha da condição inicial, a dinâmica da partícula pode convergir para atratores quase-periódicos, periódicos ou estranhos.

Nesta dissertação construímos e analisamos bilhares com fronteira regida por osciladores não lineares, na qual escolhemos o oscilador de *van der Pol*. A dinâmica dos modelos construídos são extremamente ricas do ponto de vista dinâmico. Diversos estudos ainda podem ser desenvolvidos para os modelos apresentados nesta dissertação, como por exemplo a investigação de uma quantidade maior dos parâmetros de controle. Em especial, uma análise extremamente interessante seria a introdução de duas ou mais partículas não interagentes para o caso em que $\mu \neq 0$. Isso devido a uma dessas partículas interagir com a fronteira, o movimento da fronteira é perturbado. Essa perturbação é sentida pelas outras partículas, criando um sistema de partícula não interagentes entre si, mas que na verdade interagem através da fronteira móvel. Ainda, analisando o número de aplicações que o oscilador de *van der Pol* e que os bilhares têm, podemos estudar comportamentos de outros fenômenos através desses modelos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ya. G. Sinai, "Dynamical Systems with Elastic Reflections", Russian Math. Surveys, 25, 137-191, (1970).
- [2] L. Bunimovich, "The ergodic properties of certain billiards", Funct. Anal. and Appl., 8 (1974), 254.
- [3] M. V. Berry, "Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard", European Journal of Physics, 2, 91-102, 1981.
- [4] M. C. Gutzwiller, "Chaos in Classical and Quantum Mechanics", Springer-Verlag, New York, (1990).
- [5] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H.A. Weidenmuller, "Random Matrix Theories in Quantum", Physics Reports, 299, 189-428, (1998).
- [6] O. Bohigas, "Random matrix theory and chaotic dynamics", Chaos and Quantum Physics, Amsterdam, 87, (1991).
- [7] E. J. Heller, "Wavepacket dynamics in quantum chaology", Chaos and Quantum Physics, Amsterdam, 547, (1991).
- [8] Bohigas O., Boosé D., E. R. de Carvalho, "Quantum tunneling and caotic dynamics", Nucl. Phys. A, 560, 197, (1993).
- [9] M. F. Andersen, A. Kaplan, T. Gr e N. Davidson, "Decay of Quantum Correlations in Atom Optics Billiards with Chaotic and Mixed Dynamics", Phys. Rev. Lett. 97, 104102, (2006).
- [10] Pierre Gaspard e Stuart A. Rice, "Scattering from a classically chaotic repellor", J. Chem. Phys., 90, 2225 (1989).
- [11] G. Casati and Baowen Li, "Heat conduction in one dimensional systems: Fourier law, chaos, and heat control", Non-Linear Dynamics and Fundamental Interactions, NATO Science Series II, 213, (2006).
- [12] H. Lehtihet and B. N. Miller, "Numerical Study of a Billiard in a Gravitational Field", Physica D., 21, 93, (1986).

- [13] H. D. Graf, H. Lengeler, C. H. Lewenkopf, C. Rangacharyulu, A. Richter, P. Schardt, e H. A. Weidenmüller, “Distribution of eigenmodes in a superconducting stadium billiard with chaotic dynamics”, *Phys. Rev. Lett.*, 69, 1296, (1992).
- [14] Leonel, E. D., “Corrugated waveguide under scaling investigation”, *Phys. Rev. Lett.*, 98, (2007).
- [15] E. Persson, I. Rotter, H. J. Stockmann, e M. Barth, “Observation of Resonance Trapping in an Open Microwave Cavity”, *Phys. Rev. Lett.*, 85, 2478-2481, (2000).
- [16] K. Nakamura e T. Harayama, “Quantum Chaos and Quantum”, Dots Oxford University Press, Oxford, (2004).
- [17] L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing, and S. Tarucha, “Few-electron quantum dots”, *Rep. Prog. Phys.*, 64, 701, (2001).
- [18] C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins, e A. C. Gossard, “Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures”, *Phys. Rev. Lett.*, 69, 506-509, (1992).
- [19] Y. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections”, *Russian Mathematical Surveys*, 5 25, 137-189, (1970).
- [20] L. E. Reichl, “The Transition to Chaos: In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations”, Springer-Verlag, New York, (1992).
- [21] Fermi, E., “On the Origin of the Cosmic Radiation”, *Physical Review*, 75, 1169, (1949).
- [22] M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg, “Stochastic and Adiabatic Behavior of Particles Accelerated by Periodic Forces”, *Phys. Rev. A*, 5, 1852, (1972).
- [23] L. D. Pustyl'nikov, “On Ulam Problem”, *Theor. Math. Phys.*, 57, 1035-1038, (1983).
- [24] E. D. Leonel e L. A. Bunimovich, *Phy. Rev. Lett.*, 82, 016202 (2010).
- [25] E. D. Leonel, D. F. M. Oliveira e A. Loskutov, “Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard”, *Chaos*, 19, 033142, (2009).
- [26] F. Lenz, F. K. Diakonov e P. Schmelcher, “Classical dynamics of th time-dependent elliptical billiard”*Phys. Rev. E*, 76, 066213, (2007).
- [27] R. E. de Carvalho, F. C. de Souza e E. D. Leonel, “Fermi acceleration on the annular billiard: a simplified version”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 3561-3573, (2006).
- [28] L. D. Pustyl'nikov, “Stable and oscillating motions in nonatonous dynamical systems”, *Proc. Moscow Math. Soc.*, 34, 3-103, (1977).
- [29] D. Dolgopyat, “Bouncing balls in nonlinear potentials”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 22, 165, (2008).
- [30] L. D. Pustyl'nikov, “A mechanism of irreversibility and unbounded growth of the energy in a model of statistical mechanics”, *Theor. Math. Phys.*, 86, 120-129, (1991).

- [31] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman and R. H. Cohen, “Fermi acceleration revisited”, *Physica D*, 1, 291, (1980).
- [32] A. Loskutov, A. B. Ryabov, e L. G. Akinshin, “Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries” *J. Phys. A*, 33, 7973, (2000).
- [33] F. Lenz, F. K. Diakonov e P. Schmelcher, “Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard”, *Phys. Rev. Lett.*, 100, 014103, (2008).
- [34] E. D. Leonel, “Propriedades Caóticas de Alguns Sistemas Hamiltonianos Dependentes do Tempo”. Tese (Doutorado em Física), Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2003).
- [35] Diego Fregolente Mendes de Oliveira, “Bilhares Dependentes do Tempo: Um Mecanismo para Suprimir Aceleração de Fermi”. Dissertação (Mestrado em Física), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, (2009).
- [36] L. H. A. Monteiro, “Sistemas Dinâmicos”, Livraria da Física, 3 ed., São Paulo, (2011).
- [37] J. Gleick, “Caos: A criação de uma nova ciência”, Campos, Rio de Janeiro, (1990).
- [38] Lorenz, Edward N., “Deterministic non-periodic flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130-141, (1963).
- [39] T. Botari, E. D. Leonel, “Explaining the high number of infected people by dengue in Rio de Janeiro in 2008 using a susceptible-infective-recovered model”, *Physical Review E*, 83, 037101, (2011).
- [40] V. I. Arnold, “Mathematical Methods of Classical Mechanics”. Springer, (1989).
- [41] M. A. M. de Aguiar, “Tópicos de Mecânica Clássica”, Editora Livraria da Física, (2011).
- [42] B. van der Pol, “A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations”, *Radio. Rev.*, 1, (1920).
- [43] B. van der Pol e M. J. van der Mark, “Frequency demultiplication”, *Nature*, 120, (1927).
- [44] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, “Regular and Chaotic Dynamics”, *Applied Mathematical Sciences*, 38, Springer, (1992).
- [45] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, “Nonlinear Oscillation”, Wiley-Interscience Publication, New York, (1979).
- [46] J. E. Marsden e M. McCracken, “The Hopf Bifurcation and Its Applications”, Springer-Verlag: New York, Heidelberg e Berlin, (1976).
- [47] Leônidas Conceição Barroso et al, “Cálculo Numérico (com aplicações)”, Editora Harbra Ltda, São Paulo, (1987).
- [48] E. Everhart, “An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In Dynamics of comets: Their origin and evolution”, Publishing Company, (1985).

-
- [49] A.D. Pustyl'nikov, "Construction of periodic-solutions in an infinite system of Fermi-Pasta-Ulam ordinary differential-equations, stability, and KAM Theory", *Russ. Math. Surv.*, 50, 449-450, (1995).
- [50] J. P. Eckmann, D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Rev. Mod. Phys.*, 57, 617-655, 1985.
- [51] G. M. Zaslavsky, "Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics", Oxford, (2006).
- [52] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, J. K. L. Silva, "Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis" *Phys. Rev. Lett.*, 93, 14101-14104, 2004.
- [53] D. F. M. Oliveira, R. A. Bizão, E. D. Leonel, "Scaling properties of a hybrid Fermi-Ulam-bouncer model", *Mathematical Problems in Engineering*, 2009, (2009).
- [54] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, "A hybrid Fermi-Ulam-bouncer model", *Journal of Physics A*, 38, (2005).
- [55] Diego F. M. Oliveira, E. D Leonel, "On the dynamical properties of an elliptical oval billiard with static boundary", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 15, 1092-1102, (2010).