IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.007/07

Estrutura Algébrica dos Modelos Integráveis

Guilherme Starvaggi França

Orientador

Prof. Dr. José Francisco Gomes

Março de 2007

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Prof. J. F. Gomes, cuja compreensão e tranqüilidade de sua supervisão me acompanharam nestes dois anos de estudo.

Agradeço ao Prof. A. H. Zimerman, cujo bom humor e profundo conhecimento sobre física e matemática fui enormemente beneficiado.

Agradeço aos meus pais, Luiz e Anna Gina, e ao meu irmão Gustavo. Não tenho palavras para expressar minha gratidão por estarmos juntos nesta breve caminhada.

Agradeço minha avó Alice, meu tio Roberto e sua esposa Irene. A presença de vocês jamais será esquecida.

Agradeço ao CNPQ pelo suporte financeiro e todos os professores e funcionários do IFT.

Resumo

A estrutura das álgebras de Kac-Moody e suas representações constituem o ingrediente básico para a construção de hierarquias integráveis e de suas respectivas soluções solitônicas (obtidas através do método de dressing). Diversos modelos contidos nas hierarquias mKdV e AKNS são discutidos em detalhe e uma nova classe de equações integráveis, correspondente a graus negativos pares da hierarquia mKdV, é proposta. Diferentes soluções e operadores de recursão são construídos para ambas as hierarquias.

Palavras Chaves: Álgebras de Kac-Moody; sistemas integráveis; sólitons; equações diferenciais.

Áreas do conhecimento: Física matemática; teoria de campos; dinâmica não linear.

Abstract

The structure of Kac-Moody algebras and its representations constitute a basic ingredient for the construction of integrable hierarchies and its soliton solutions (obtained from the dressing method). Several models within the mKdV and AKNS hierarchies are discussed in detail and some new integrable equations, corresponding to negative even grades of the mKdV hierarchy, are proposed. Different solutions and recursion operators are constructed for both hierarchies.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Muitos fenômenos físicos da natureza são descritos matematicamente, por equações diferenciais parciais não lineares. Entretanto, a matemática atual não fornece soluções analíticas para um grande número destas equações.

Dentro da classe de modelos que possuem soluções exatas, encontram-se os modelos integráveis. O critério de integrabilidade pode ser baseado no teorema de Liouville, que afirma que um sistema hamiltoniano cujo espaço de fase é $2N$ dimensional, possui soluções analíticas se e somente se existem exatamente N quantidades conservadas, independentes em involução, i.e, seus parênteses de Poisson se anulam [9].

Um dos problemas em teoria de sistemas integráveis é construir e classificar tais modelos. A maneira mais óbvia de construí-los é partir de uma condição, cuja integrabilidade seja automaticamente garantida. Uma forma de se fazer isso é considerar a conhecida equação de curvatura nula para potenciais de gauge, o que garante a integrabilidade, e propor potenciais cujas equações resultantes não sejam triviais. Isso não é um problema simples, porém pode ser sistematicamente resolvido em 1+1 dimensões [1, 2, 4, 5], utilizando como estrutura matemática fundamental álgebras de Kac-Moody graduadas [12], que são álgebras de Lie de dimensão infinita. Estes modelos são contínuos, e portanto possuem infinitos graus de liberdade. Uma vez escolhida esta estrutura algébrica, obtemos não só um modelo integrável, mas uma classe de infinitos modelos, cujas equações estão todas relacionadas entre si, constituindo o que se chama de hierarquia integrável. A classificação destas hierarquias é conseqüência direta da classificação das álgebras de Kac-Moody e suas graduações, o que é bem conhecido. Desta maneira, resolve-se algébricamente ambos os problemas.

O alto grau de simetria das equações é inerente à própria natureza desta construção. Pode-se mostrar que esta estrutura possui infinitas quantidades conservadas, em involução, conseqüentemente satisfaz o teorema de Liouville. Isso permite a possibilidade de soluções muito particulares e interessantes, chamadas sólitons. Um sóliton é uma onda não linear, de comportamento corpuscular, que mantém sua forma localizada durante toda sua evolução, até mesmo depois de sofrer espalhamento. Este comportamento deve-se a infinitas leis de conservação, tornando o sistema infinitamente restrito. Se não bastasse o interesse teórico, tanto do ponto de vista físico quanto matemático, este comportamento peculiar ocorre em áreas tão diversas como [14] mecânica dos fluidos, física de plasmas, ótica não linear, teoria clássica e quântica de campos, física da matéria condensada, sistemas biológicos, ... com aplicações práticas promissoras.

Devido a graduação da álgebra de Kac-Moody, as hierarquias integráveis se dividem numa parte de graus positivos, e outra de graus negativos. A parte positiva dá origem a equações diferenciais não relativísticas, enquanto a parte negativa dá origem a equações integrais também não relativísticas, exceto o caso de grau -1, que para todas as hierarquia integráveis construidas neste formalismo, corresponde a um modelo relativístico local, que é equivalente a uma redução hamiltoniana do modelo Wess-Zumino-Witten (WZW) [6]. Historicamente, a construção relativística de curvatura nula foi proposta por Leznov-Saveliev [7], e só depois foi obtida a conexão com teoria de campos através do modelo WZW [8].

Matematicamente, a relação entre modelos diferentes pertencentes a uma mesma hierarquia, pode ser expressa através de um operador de recursão. Dada uma equação, através da ação de potências deste operador, é possível obter outras equações da hierarquia. A existência deste operador é justificada por condições de simetria entre as equações.

Mesmo o sistema sendo integrável, o teorema de Liouville só garante a existência de soluções. A construção explícita envolve vários procedimentos engenhosos. Contudo, utilizando o mesmo ferramental algébrico da construção destes modelos, existe um método geral e sistemático [15, 17], chamado de método de dressing, onde são obtidas soluções explícitas da equação de curvatura nula. O ponto chave para a construção destas soluções, é a existência de uma ou mais soluções triviais, denominadas vácuo, tal que o grupo das transformações de dressing agindo sobre o vácuo nos fornece uma órbita de soluções não triviais, especificadas pelas diferentes escolhas de um elemento de grupo arbitrário. As soluções do tipo sóliton correspondem àquelas onde os elementos de grupo são representados por operadores de vértice [20, 21], e portanto são pontos específicos desta órbita. Considerando o produto de um ou mais vértices, é possível construir soluções de um único sóliton ou multi-sólitons.

Portanto, o formalismo de curvatura nula construído com base numa álgebra de Kac-Moody graduada, consiste num poderoso e unificado método de construir e classificar hierarquias integráveis, bem como encontrar suas soluções explícitas. Isso fecha uma abordagem completa para modelos integráveis em 1+1 dimensões.

Ao longo desta dissertação desenvolvemos, de forma não rigorosa, a teoria matemática referente ao conteúdo discutido acima. Alguns resultados novos também são obtidos.

Um breve resumo sobre os conceitos algébricos envolvidos pode ser encontrado no apêndice A, e convidamos o leitor a abordá-lo antes do conteúdo principal, pois os resultados citados não serão repetidos ao longo do desenvolvimento desta dissertação.

No capítulo 2 consideramos os aspectos teóricos gerais sobre a construção de curvatura nula e integrabilidade. A conexão relativística com o modelo WZW é discutida. Uma vez sedimentado estes conceitos gerais, consideramos dois exemplos concretos nos capítulos 3 e 4, que são a hierarquia mKdV e AKNS, respectivamente.

Obtemos diversos modelos de ambas as hierarquias, alguns dos quais ainda não foram encontrados na literatura usual, mas já são esperados. Entretanto, no caso da hierarquia mKdV obtemos um novo resultado, que é uma sub-hierarquia completa de graus negativos pares, que até agora não foi considerada. Como caso específico, obtemos explicitamente uma nova equação integrável correspondente ao grau -2.

No capítulo 5 conectamos as equações pertencentes a uma mesma hierarquia, mKdV e AKNS neste caso, construindo seus respectivos operadores de recursão. Os resultados coincidem com trabalhos anteriores [23, 14], que foram obtidos por outros métodos.

No capítulo 6 obtemos soluções solitônicas de um e dois vértices para as duas hierarquias, mKdV e AKNS, onde os cálculos mais trabalhosos são apresentados no apêndice B.

Finalmente, no capítulo 7 apresentamos uma breve e resumida conclusão.

Capítulo 2

Condição de curvatura nula

Vários modelos não lineares possuem representação na forma de uma equação de curvatura nula, o que implica automaticamente na sua integrabilidade. Através de uma álgebra de Kac-Moody graduada, é possível construir, sistematicamente, uma classe de infinitas equações diferenciais parciais, não lineares, todas relacionadas entre si. Isso constitui uma hierarquia integrável. Uma das equações desta hierarquia consiste num modelo relativístico e está relacionado com uma redução hamiltoniana do modelo Wess-Zumino-Witten.

2.1 Integrabilidade e leis de conservação

Seja um potencial bidimensional $A = A_\mu dx^\mu$ ($\mu = 0, 1$) e considere um modelo não linear que pode ser formulado em termos de um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu + A_\mu)\,\Psi &= 0 \\ (\partial_\nu + A_\nu)\,\Psi &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

A condição de integrabilidade deste sistema é

$$\partial_\mu \partial_\nu \Psi = \partial_\nu \partial_\mu \Psi \tag{2.2}$$

o que será garantida se os potenciais satisfizerem a equação:

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0 \tag{2.3}$$

Essa é a conhecida equação de curvatura nula. Um modelo cujas equações de movimento podem ser escritas nesta forma é automaticamente integrável por construção.

Um dos problemas em teoria de sistemas integráveis é justamente encontrar potencias A_μ e A_ν que satisfaçam esta equação. Geralmente, para potenciais arbitrários a equação (2.3) não admite solução, ou somente solução trivial. Desenvolveremos um método onde estes potenciais são construidos através de uma estrutura algébrica, o que nos permitirá obter uma hierarquia de infinitas equações diferenciais não lineares e integráveis. Este formalismo, desenvolvido recentemente, é um importante avanço nesta direção [1, 2, 3, 4].

Agora, vamos nos concentrar na questão da integrabilidade destes modelos. Escrevendo em termos de variáveis físicas, $x_0 = t$ (tempo) e $x_1 = x$ (espaço), definimos a exponencial ordenada [9]

$$U_\gamma(x_2, t_2; x_1, t_1) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_{(x_1,t_1)}^{(x_2,t_2)} dx^\mu A_\mu \right) \tag{2.4}$$

onde $\mathcal{P}$ denota um ordenamento dos pontos ao longo do caminho de integração γ, de tal forma que os pontos mais próximos de (x_2, t_2) estejam sempre à esquerda dos mais próximos de (x_1, t_1). Se considerarmos o produto

$$U_{\gamma_1}(x_2, t_2; x_1, t_1) U_{\gamma_2}(x_1, t_1; x_2, t_2) \tag{2.5}$$

podemos usar a expansão de Baker-Campbell-Hausdorf para expandir as exponenciais e ao utilizar o teorema de Stokes, é possível transformar esta integral de caminho numa integral de superfície:

$$\exp \left(-\frac{1}{2} \int_\Omega dx^\mu \wedge dx^\nu \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \right) \right) \tag{2.6}$$

A integração é feita sobre a área Ω cuja borda é o caminho fechado $\gamma_1 + \gamma_2$. Portanto, vemos que se a curvatura é nula (2.3), o produto (2.5) é igual à identidade e a exponencial ordenada (2.4) independe do caminho entre os pontos (x_1, t_1) e (x_2, t_2):

$$\begin{aligned} U_{\gamma_1}(x_2, t_2; x_1, t_1) &= U_{\gamma_2}^{-1}(x_1, t_1; x_2, t_2) \\ &= U_{\gamma_2}(x_2, t_2; x_1, t_1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vamos considerar o espaço (x, t) delimitado à seguinte região [4]: $-L \leq x \leq L$ e $0 \leq t \leq \tau$. Para ir do ponto $(-L, 0)$ até (L, τ) podemos ir por dois caminhos diferentes: $(-L, 0) \to (L, 0) \to (L, \tau)$ ou $(-L, 0) \to (-L, \tau) \to (L, \tau)$. De acordo com o resultado anterior ambos os caminhos são equivalentes logo:

$$\mathcal{P}e^{-\int_{-L}^{L} dx A_1(x,0)} \mathcal{P}e^{-\int_0^\tau dt A_0(L,t)} = \mathcal{P}e^{-\int_0^\tau dt A_0(-L,t)} \mathcal{P}e^{-\int_{-L}^{L} dx A_1(x,\tau)}$$

$$\mathcal{P}e^{-\int_{-L}^{L} dx A_1(x,0)} = \mathcal{P}e^{-\int_0^\tau dt A_0(-L,t)} \mathcal{P}e^{-\int_{-L}^{L} dx A_1(x,\tau)} \mathcal{P}e^{\int_0^\tau dt A_0(L,t)} \tag{2.8}$$

Assumindo condições de contorno periódicas $A_0(-L, t) = A_0(L, t)$ e tomando o traço desta última equação obtemos:

$$tr \left[\mathcal{P}e^{-\int_{-L}^{L} dx A_1(x,0)} \right] = tr \left[\mathcal{P}e^{-\int_{-L}^{L} dx A_1(x,\tau)} \right] \tag{2.9}$$

Como τ é arbitrário, segue que a quantidade

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}e^{-\int_{-L}^{L}dxA_1(x,t)}\right] \tag{2.10}$$

é uma constante, e portanto, pode vir a ser uma quantidade física que será conservada no modelo construído.

Vamos construir modelos onde A_μ pertence a uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ (veja o apêndice A para os conceitos algébricos envolvidos) [12]. Uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ é uma álgebra de dimensão infinita, construida a partir de uma loop-álgebra $L(\mathcal{G})$ que nada mais é do que uma expansão em série de Laurent no parâmetro espectral λ da álgebra de Lie finita correspondente $\mathcal{G}$:

$$L(\mathcal{G}) = \left\{ X(\lambda) \mid X(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n\lambda^n, \text{ onde } X_n \in \mathcal{G} \text{ e } \lambda^n \in \mathbb{C} \right\}$$

Desta maneira, (2.10) define uma infinidade de quantidades conservadas, uma para cada potência de λ. Para uma álgebra infinita, como a de Kac-Moody, essas quantidades conservadas são todas independentes.

Ainda, é possível mostrar que estas quantidades estão em involução [9], i.e, seus parênteses de Poisson se anulam. Os sistemas que vamos considerar são hamiltonianos e portanto satisfazem o teorema de Liouville, que afirma que para um sistema hamiltoniano com $2N$ graus de liberdade, se existem exatamente N quantidades conservadas independentes que estão em involução, então as trajetórias de movimento possuem soluções explícitas. Vemos que os modelos construidos a partir da equação de curvatura nula (2.3), onde os potenciais pertencem a uma álgebra de Kac-Moody, de dimensão infinita, satisfazem o teorema de Liouville e a princípio suas soluções podem ser obtidas.

Contudo, o teorema de Liouville só implica na existência de soluções. Não temos garantia de que seremos capazes de escrevê-las explicitamente. Mais adiante mostraremos como algumas soluções podem ser explicitamente construidas utilizando o método de dressing, que baseia-se nesta mesma estrutura algébrica.

Salientamos que a existência de infinitas quantidades conservadas é uma exigência de uma solução do tipo sóliton. Um sóliton é uma onda não linear que mantém a sua forma mesmo depois de sofrer espalhamento. Isso só é possível se existem infinitas leis de conservação para que a função de onda mantenha sua forma ponto a ponto. Vemos portanto, que dentro de uma estrutura algébrica, só é possível conceber modelos que possuem solução do tipo sóliton utilizando uma álgebra de dimensão infinita, como a de Kac-Moody. Existem sistemas integráveis realizados em termos da equação de curvatura nula com uma álgebra de Lie finita, porém, estes sistemas não apresentam soluções do tipo sóliton.

2.2 Hierarquia positiva e construção não relativística

Seguindo as idéias de [1, 2, 3, 5], vamos desenvolver um método geral que permite construir hierarquias integráveis partindo da equação de curvatura nula (2.3).

Consideramos a equação bidimensional (2.3) onde $\mu = x$ e $\nu = t_N$. A variável t_N representa o fluxo de tempo de uma dada equação, indexada pelo número N. A variável x é simplesmente a componente espacial do modelo. Assim, nosso ponto de partida é a equação:

$$[\partial_x + A_x, \partial_{t_N} + A_N] = 0 \tag{2.11}$$

Como mostrado em [1] e [2], vamos considerar que A_{t_N} e A_x pertençam a uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$, e que seja dado um operador de graduação Q_s, que define a seguinte decomposição da álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ em subespaços graduados:

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s), \qquad \left[\hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s), \hat{\mathcal{G}}^{(m)}(s)\right] \subset \hat{\mathcal{G}}^{(n+m)}(s) \tag{2.12}$$

onde $\hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s)$ é um subespaço de grau n definido por:

$$\left[Q_s, \hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s)\right] = n\hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s) \tag{2.13}$$

O vetor $s = (s_0, s_1, \ldots, s_r)$, composto de números inteiros positivos, especifica as diferentes $\mathbb{Z}$-graduações de $\hat{\mathcal{G}}$ e $r = \mathrm{rank}(\hat{\mathcal{G}})$.

Suponha também que seja dado um elemento constante E, que por simplicidade vamos supor que possui grau 1*: $E \in \hat{\mathcal{G}}^{(1)}$. Este operador E permite uma decomposição da álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ nos seguinte subespaços:

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K}(E) \oplus \mathcal{M}(E) \tag{2.14}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(E) &= \left\{X \in \hat{\mathcal{G}} \mid [X, E] = 0\right\} \\ \mathcal{M}(E) &= \left\{[X, E] \mid X \in \hat{\mathcal{G}}\right\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Das definições (2.15) e da identidade de Jacobi encontramos as seguintes relações algébricas:

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K} \quad \text{e} \quad [\mathcal{K}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M} \tag{2.16}$$

Agora definimos que os potenciais A_x e A_{t_N} são dados por:

$$\begin{aligned} A_x &= A_0 + E \\ A_{t_N} &= D_N^{(N)} + D_N^{(N-1)} + \ldots + D_N^{(0)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

*Poderíamos considerar operadores de graus mais altos o que nos levaria a equações mais complicadas, embora a idéia seja essencialmente a mesma.

onde $A_0 \in \hat{\mathcal{G}}^{(0)} \cap \mathcal{M}(E)$ e $D_N^{(k)} \in \hat{\mathcal{G}}^{(k)}$. As componentes do elemento A_0 serão os campos físicos da teoria. Portanto, a equação de curvatura nula (2.11) assume a forma:

$$\left[\partial_x + A_0 + E, \partial_{t_N} + D_N^{(N)} + D_N^{(N-1)} + \ldots + D_N^{(0)}\right] = 0 \tag{2.18}$$

De (2.14) vemos que cada $D_N^{(k)}$ pode ser projetado nos subespaços (2.15), e portanto podem ser escritos como a soma de duas componentes: $D_N^{(k)} = D_{N\mathcal{K}}^{(k)} + D_{N\mathcal{M}}^{(k)}$. Como cada subespaço graduado é independente, a projeção de (2.18) em cada um desses subespaços deve se anular independentemente. Assim, a equação (2.18) é decomposta em $N+2$ equações, cada uma dentro de um subespaço graduado, constituindo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\left[E, D_N^{(N)}\right] &= 0 \\
\partial_x D_N^{(N)} + \left[A_0, D_N^{(N)}\right] + \left[E, D_N^{(N-1)}\right] &= 0 \\
\partial_x D_N^{(N-1)} + \left[A_0, D_N^{(N-1)}\right] + \left[E, D_N^{(N-2)}\right] &= 0 \\
\vdots &= \vdots \\
\partial_x D_N^{(1)} + \left[A_0, D_N^{(1)}\right] + \left[E, D_N^{(0)}\right] &= 0 \\
\partial_x D_N^{(0)} - \partial_{t_N} A_0 + \left[A_0, D_N^{(0)}\right] &= 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde fizemos uso da relação (2.12) para agrupar os termos de mesmo grau.

Devido às definições (2.15) decompomos cada uma das equações de (2.19) em uma componente $\mathcal{K}(E)$ e outra $\mathcal{M}(E)$. A primeira equação de (2.19) nos diz que $D_N^{(N)} \in \mathcal{K}(E)$, ou seja $D_N^{(N)} = D_{N\mathcal{K}}^{(N)}$ e $D_{N\mathcal{M}}^{(N)} = 0$. Substituindo este resultado na segunda equação, e usando as relações (2.16), vemos que $D_{N\mathcal{K}}^{(N)}$ é uma constante e obtemos a componente de $D_{N\mathcal{M}}^{(N-1)}$ como função de A_0 e de $D_{N\mathcal{K}}^{(N)}$. Substituindo estes novos resultados na terceira equação, determinamos as componentes $D_{N\mathcal{K}}^{(N-1)}$ e $D_{N\mathcal{M}}^{(N-2)}$. Este processo é continuado até que a penúltima equação determinará $D_{N\mathcal{M}}^{(0)}$ e finalmente a última equação determinará $D_{N\mathcal{K}}^{(0)}$. Com estes dados obtidos, a projeção desta última equação de (2.19) em $\mathcal{M}(E)$ será a equação de evolução no tempo t_N dos campos contidos em A_0, i.e, obtemos a equação de movimento do modelo.

Podemos escolher qualquer N inteiro e positivo, e portanto, temos infinitas equações diferenciais todas relacionadas entre si e integráveis por construção. Geramos assim uma hierarquia integrável. Quando discutirmos as soluções pelo método de dressing, mostraremos que as soluções solitônicas de cada equação da hierarquia também estão relacionadas.

O fato das equações dessas hierarquias não serem invariantes por transformações de Lorentz pode ser visto facilmente analisando a forma das equações de movimento. Note que aparece apenas uma derivada temporal ∂_{t_N} na última equação de (2.19), enquanto podem aparecer uma ou mais derivadas espaciais ∂_x nos outros termos da equação, dependendo do índice N, indicando que não é possível escrever essas equações covariantemente.

Dentro deste contexto, mostramos não só como construir hierarquias integráveis, mas também que qualquer hierarquia que possa ser construida neste formalismo pode ser classificada de acordo com a tripla $< \hat{\mathcal{G}}, Q_s, E >$.

2.3 Hierarquia negativa e construção relativística

Na seção anterior consideramos o caso onde N é um número inteiro e positivo. Vamos estender essa situação para o caso de N ser um inteiro negativo [1], e em especial, veremos que o caso $N = -1$ corresponde a um modelo relativístico que pode ser obtido através de uma redução do modelo WZW [6].

A única mudança que vamos fazer em relação a seção anterior é definir A_{t_N} para tempos negativos da seguinte forma:

$$A_{t_{-N}} = D_{-N}^{(-N)} + D_{-N}^{(-N+1)} + \ldots + D_{-N}^{(-1)} \qquad N > 0 \tag{2.20}$$

Com isso, a equação de curvatura nula fica:

$$\left[\partial_x + A_0 + E, \partial_{t_{-N}} + D_{-N}^{(-N)} + D_{-N}^{(-N+1)} + \ldots + D_{-N}^{(-1)}\right] = 0 \tag{2.21}$$

Note que em (2.20) o elemento de maior grau é $D_{-N}^{(-1)}$ e não $D_{-N}^{(0)}$. Caso incluíssemos $D_{-N}^{(0)}$ a equação de grau mais alto de (2.21) teria grau um e não zero como queremos.

Novamente, pela independência dos subespaços graduados, projetamos a equação (2.21) em cada um destes subespaços e obtemos um sistema de $N+1$ equações que devem anular-se independente:

$$\begin{aligned}
\partial_x D_{-N}^{(-N)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-N)}\right] &= 0 \\
\partial_x D_{-N}^{(-N+1)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-N+1)}\right] + \left[E, D_{-N}^{(-N)}\right] &= 0 \\
\partial_x D_{-N}^{(-N+2)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-N+2)}\right] + \left[E, D_{-N}^{(-N+1)}\right] &= 0 \\
\vdots &= \vdots \\
\partial_x D_{-N}^{(-1)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-1)}\right] + \left[E, D_{-N}^{(-2)}\right] &= 0 \\
-\partial_{t_{-N}} A_0 + \left[E, D_{-N}^{(-1)}\right] &= 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Como $D^{(k)}_{-N} = D^{(k)}_{-N\mathcal{K}} + D^{(k)}_{-N\mathcal{M}}$, cada uma dessas equações também se decompõe em duas componentes, mas a situação não é tão simples quanto no caso de N positivo. Comparando a primeira equação de (2.22) com a primeira de (2.19), vemos que $D^{(-N)}_{-N}$ possui componentes em ambos os subespaços, $\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$, e será necessário integrar esta primeira equação para obter $D^{(-N)}_{-N}$ como um funcional não local dos campos contidos em A_0. Contudo, novamente este sistema de equações pode ser resolvido recursivamente, mas agora aparecem novas integrais, ao contrário de derivadas no caso positivo, à medida que vamos resolvendo cada uma das equações de (2.22). A última equação, de grau zero, só possui componente em $\mathcal{M}(E)$ e é a equação de movimento do modelo.

Observe que (2.22) possui $N+1$ equações enquanto (2.19) possui $N+2$. A primeira equação de (2.19) pode ser considerada como um vínculo adicional em relação ao caso de N negativo, e ela é a responsável por eliminar a não localidade. Apesar do caráter não local das equações da parte negativa da hierarquia, existe um caso particular, $N=-1$ (ou $N=1$ em (2.22)), cuja equação de movimento pode ser escrita numa forma local. Fora este caso particular, não sabemos de nenhum argumento geral que permita afirmar que as outras equações da hierarquia negativa, possam de alguma maneira, ser transformadas numa equação diferencial.

2.3.1 Caso relativístico

Vamos considerar o caso especial discutido anteriormente que corresponde a $N=-1$ na parte negativa das hierarquias integráveis, ou seja, $N=1$ em (2.21):

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_{-1}} + D^{(-1)}_{-1}\right] = 0 \tag{2.23}$$

Para obter consistência com resultados já conhecidos [1, 7], vamos fazer as seguintes identificações: $x=-\bar{z}$, $t_{-1}=z$ e $E^{(\pm1)} = \epsilon_\pm$. Agora, vamos propor como solução de (2.23) os seguintes potenciais:

$$A_0 = \bar{\partial} B B^{-1} \quad \text{e} \quad D^{(-1)}_{-1} = B\epsilon_- B^{-1} \tag{2.24}$$

Nestas relações z e $\bar{z}$ podem ser imaginadas como coordenadas do cone de luz, $z=t+x$ e $\bar{z}=t-x$, o que facilita a identificação relativística. O operador B é um elemento pertencente ao grupo $\hat{G}$ associado à álgebra de Lie $\hat{\mathcal{G}}$ e de grau zero, $B \in \hat{G}^{(0)}$. Substituindo (2.24) em (2.23) obtemos a equação de movimento para B:

$$\partial\left(\bar{\partial} B B^{-1}\right) - \left[\epsilon_+, B\epsilon_- B^{-1}\right] = 0 \tag{2.25}$$

Esta equação também pode ser escrita numa forma alternativa conjugando à esquerda por B^{-1} e à direita por B, e utilizando $\bar{\partial}\left(BB^{-1}\right)=0$:

$$\bar{\partial}\left(B^{-1}\partial B\right) + \left[\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B\right] = 0 \tag{2.26}$$

Ambas as equações, (2.25) e (2.26), foram propostas por Leznov-Saveliev [7] e a partir delas pode-se construir modelos relativísticos integráveis, fazendo escolhas apropriadas de $< \hat{\mathcal{G}}, Q_s, \epsilon_\pm >$.

Note que (2.25) e (2.26) possuem duas derivadas nas variáveis do cone de luz, o que indica que são invariantes por transformação de Lorentz. De acordo com os resultados desta seção, concluimos que a construção algébrica da equação de curvatura nula contém modelos relativísticos para o tempo t_{-1}. Para outros tempos negativos, as equações voltam a ser não relativísticas.

A construção apresentada, que consiste na equação de curvatura nula com a estrutura de $< \hat{\mathcal{G}}, Q_s, E >$, fornece um método sistemático e unificado de construir e classificar hierarquias integráveis, contendo modelos relativísticos e não relativísticos. Apenas comentamos que pode-se construir hierarquias integráveis supersimétricas neste mesmo contexto considerando N semi-inteiro, para detalhes veja [1] e suas respectivas referências.

2.4 O modelo WZW

O modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) [6] é descrito pela ação

$$S_{\mathrm{WZW}} = \frac{k}{16\pi}\int_{\mathcal{R}^2} d^2x \,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}\right) + \frac{k}{24\pi}\int_{\mathcal{R}^3} d^3x \epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\gamma g\right) \tag{2.27}$$

onde $\mathcal{R}^2$ denota um espaço bi-dimensional onde estão os campos e $\mathcal{R}^3$ é um espaço tri-dimensional cuja borda é $\mathcal{R}^2$. A ação (2.27) é um funcional de um elemento de grupo g.

Para obter as equações de movimento variamos $g \to g + \delta g$. Desprezando termos da ordem de $(\delta g)^2$, o primeiro termo de (2.27) varia como:

$$\frac{k}{16\pi}\int_{\mathcal{R}^2} d^2x \,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu \delta g \partial^\mu g^{-1} + \partial_\mu g \partial^\mu\left(\delta g^{-1}\right)\right)$$

Usando $\partial_\mu\left(gg^{-1}\right) = 0$ e $\delta\left(gg^{-1}\right) = 0$ temos:

$$\frac{k}{16\pi}\int_{\mathcal{R}^2} d^2x \,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu \delta g \partial^\mu g^{-1} - \partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}\delta g g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1}\partial^\mu \delta g g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1}\delta g \partial^\mu g^{-1}\right)$$

Note que o terceiro termo é igual ao primeiro e o quarto igual ao segundo:

$$\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial^\mu \delta g g^{-1}\right) = Tr\left(\partial^\mu \delta g g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\right) = -Tr\left(\partial^\mu \delta g \partial_\mu g^{-1}\right)$$
$$Tr\left(\partial_\mu g g^{-1}\delta g \partial^\mu g^{-1}\right) = Tr\left(\partial^\mu g^{-1}\delta g g^{-1}\partial_\mu g\right) = Tr\left(\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}\delta g g^{-1}\right)$$

Combinando tudo isso em um único termo:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu \delta g \partial^\mu g^{-1} - \partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}\delta g g^{-1}\right) &= -2\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial^\mu \delta g g^{-1}\partial_\mu g + \partial^\mu g^{-1}\delta g g^{-1}\partial_\mu g\right) \\ &= -2\,\mathrm{Tr}\left(\partial^\mu\left(g^{-1}\delta g\right)g^{-1}\partial_\mu g\right) \end{aligned}$$

Portanto, obtemos:

$$-\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^2} d^2x\,\mathrm{Tr}\left(\partial^\mu\left(g^{-1}\delta g\right)g^{-1}\partial_\mu g\right)$$

Agora integramos por partes e desprezamos o termo de superfície pois assumimos que δg seja zero na fronteira, pois g é mantido fixo nos limites de integração. Então, a variação do primeiro termo da ação (2.27) é dada por:

$$\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^2} d^2x\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\delta g\partial^\mu\left(g^{-1}\partial_\mu g\right)\right) \tag{2.28}$$

Considerando a variação do segundo termo de (2.27) temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^3} d^3x\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g\delta\left[g^{-1}\partial_\gamma g\right]\right) &(2.29)\\
=&\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^3} d^3x\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\gamma\left[\delta g g^{-1}\right]\right) &(2.30)\\
=&\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^3} d^3x\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\gamma\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\delta g\right)\right) &(2.31)
\end{aligned}$$

Alguns pontos merecem esclarecimentos. A passagem de (2.29) para (2.30) é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g\delta\left[g^{-1}\partial_\gamma g\right]\right) &= \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g\left[g^{-1}\delta\partial_\gamma g - g^{-1}\delta g g^{-1}\partial_\gamma g\right]g^{-1}\right)\\
&= \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\left[\delta\partial_\gamma g g^{-1} + \delta g\partial_\gamma g^{-1}\right]\right)\\
&= \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\gamma\left[\delta g g^{-1}\right]\right)
\end{aligned}$$

enquanto a igualdade entre (2.30) e (2.31) pode ser vista expandindo a derivada em (2.31) e usando a propriedade cíclica do traço:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\gamma\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\delta g\right)\right) &= \epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\gamma\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\delta g g^{-1}\right)\right)\\
&= \epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\gamma\left[\delta g g^{-1}\right]+\right.\\
&+ \partial_\mu g g^{-1}\partial_\gamma\left(\partial_\nu g g^{-1}\right)\delta g g^{-1} +\\
&+ \left.\partial_\gamma\left(\partial_\mu g g^{-1}\right)\partial_\nu g g^{-1}\delta g g^{-1}\right) \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Agora mostramos que os dois últimos termos de (2.32) se cancelam, restando somente o primeiro que é o resultado procurado. Expandindo as derivadas e considerando somente os dois últimos termos de (2.32) temos:

$$\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\left[\partial_\mu g g^{-1}\left(\partial_\gamma\partial_\nu g g^{-1} + \partial_\nu g\partial_\gamma g^{-1}\right) + \left(\partial_\gamma\partial_\mu g + \partial_\mu g\partial_\gamma g^{-1}\right)\partial_\nu g g^{-1}\right]\delta g g^{-1}\right)$$

os termos com duas derivadas se anulam pois são simétricos e $\epsilon^{\mu\nu\gamma}$ é anti-simétrico. Note também que

$$\partial_\mu g\partial_\gamma g^{-1}\partial_\nu g g^{-1} = -\partial_\mu g g^{-1}\partial_\gamma g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1} = \partial_\mu g g^{-1}\partial_\gamma g\partial_\nu g^{-1}$$

então, os dois últimos termos de (2.32) são:

$$\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\left(\partial_\nu g\partial_\gamma g^{-1}+\partial_\gamma g\partial_\nu g^{-1}\right)\delta g g^{-1}\right)=0$$

e obtemos o resultado procurado:

$$\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\gamma\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\delta g\right)\right)=\epsilon^{\mu\nu\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\gamma\left[\delta g g^{-1}\right]\right)$$

A integral (2.31), sobre $\mathcal{R}^3$, pode ser transformada numa integral de superfície sobre $\mathcal{R}^2$:

$$-\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^2}d^2x\epsilon^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\delta g\right)=-\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^2}d^2x\epsilon^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\delta g\partial_\mu\left(g^{-1}\partial_\nu g\right)\right) \tag{2.33}$$

Portanto, a variação total na ação (2.27), devido a $g\to g+\delta g$ é dada pela soma de (2.28) e (2.33):

$$\delta S_{\mathrm{WZW}}=\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{R}^2}d^2x\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\delta g\left[\partial^\mu\left(g^{-1}\partial_\mu g\right)-\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\left(g^{-1}\partial_\nu g\right)\right]\right) \tag{2.34}$$

o que implica na equação de movimento:

$$\partial^\mu\left(g^{-1}\partial_\mu g\right)-\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\left(g^{-1}\partial_\nu g\right)=0$$

Expandindo essa equação nas variáveis x e t:

$$\partial^t\left(g^{-1}\partial^t g+g^{-1}\partial^x g\right)-\partial^x\left(g^{-1}\partial^t g+g^{-1}\partial^x g\right)=0 \tag{2.35}$$

Introduzindo as variáveis no cone de luz, $z=t+x$ e $\bar{z}=t-x$, obtemos:

$$\bar{\partial}\left(g^{-1}\partial g\right)=0 \tag{2.36}$$

onde $\partial\equiv\partial^z$ e $\bar{\partial}\equiv\partial^{\bar{z}}$. Também podemos escrever uma equação dual a (2.36) conjugando à esquerda por g e à direita por g^{-1}:

$$\partial\left(\bar{\partial}g g^{-1}\right)=0 \tag{2.37}$$

Definindo a corrente J e sua dual $\bar{J}$:

$$J=g^{-1}\partial g \quad \text{e} \quad \bar{J}=\bar{\partial}g g^{-1} \tag{2.38}$$

concluimos que a equação de movimento da ação de WZW, nada mais é do que a conservação dessas correntes:

$$\bar{\partial}J=0 \quad \text{e} \quad \partial\bar{J}=0 \tag{2.39}$$

2.4.1 Redução hamiltoniana

Agora vamos impor vínculos sobre as correntes do modelo WZW. O tratamento que segue pressupõe uma estrutura Lie algébrica $\hat{\mathcal{G}}$, que pode ser uma álgebra finita ou infinita, bem como um operador de graduação como definido em (2.12) e (2.13).

Supomos que o elemento de grupo g possui uma decomposição de Gauss:

$$g = NBM \tag{2.40}$$

onde B é uma exponencial de geradores de grau zero, N é uma exponencial de geradores de grau negativo e M é uma exponencial de geradores de grau positivo, i.e, $NBM \in \hat{G}_< \hat{G}_0 \hat{G}_>$. Assim, as correntes (2.38) ficam:

$$\begin{aligned} J &= g^{-1}\partial g = M^{-1}\left(B^{-1}N^{-1}\partial N B + B^{-1}\partial B + \partial M M^{-1}\right) M \\ \bar{J} &= \bar{\partial} g g^{-1} = N\left(N^{-1}\bar{\partial} N + \bar{\partial} B B^{-1} + B\bar{\partial} M M^{-1} B^{-1}\right) N^{-1} \end{aligned} \tag{2.41}$$

A maneira como essas equações foram fatoradas é muito importante. Note que os termos entre parênteses em ambas as equações possuem graus bem definidos, sendo que o primeiro deles pertence a $\hat{G}_<$, o segundo a $\hat{G}_0$ e o terceiro a $\hat{G}_>$. Devido a este fato definimos:

$$\begin{aligned} K &= \partial M M^{-1} + B^{-1}\partial B + B^{-1}N^{-1}\partial N B \\ \bar{K} &= N^{-1}\bar{\partial} N + \bar{\partial} B B^{-1} + B\bar{\partial} M M^{-1} B^{-1} \end{aligned} \tag{2.42}$$

Substituindo as correntes (2.41) escritas por meio de (2.42) nas equações (2.39), obtemos equações de movimento em termos de K e $\bar{K}$:

$$\begin{aligned} \bar{\partial} J = M^{-1}\left(\bar{\partial} K + \left[K, \bar{\partial} M M^{-1}\right]\right) M = 0 \\ \partial \bar{J} = N\left(\partial \bar{K} + \left[N^{-1}\partial N, \bar{K}\right]\right) N^{-1} = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Até este ponto essas equações não possuem nenhuma restrição e são inteiramente equivalentes às equações de movimento do modelo de WZW. Agora vamos introduzir um vínculo nestas correntes. Impomos que de todos os termos de grau negativo em J, só exista um termo de grau -1 e constante, denotado por ϵ_-. Impomos o análogo a $\bar{J}$, mas desta vez, de todos os termos de grau positivo, só existe o termo constante de grau 1 denotado por ϵ_+ †:

$$\begin{aligned} J &= \epsilon_- + J_0 + J_> \\ \bar{J} &= \epsilon_+ + \bar{J}_0 + \bar{J}_< \end{aligned} \tag{2.44}$$

† Note a analogia com a construção de curvatura nula, onde tinhamos o elemento $E \in \hat{\mathcal{G}}^{(1)}$ constante. Aqui também poderíamos fixar elementos de graus mais altos. As equações de movimento seriam mais complicadas mas a idéia é essencialmente a mesma.

Queremos saber quais condições os vínculos sobre as correntes (2.44) impõe sobre K e $\bar{K}$. Para isso usamos o fato de que $M = e^{\hat{\mathcal{G}}_>}$ e $N = e^{\hat{\mathcal{G}}_<}$, e expandimos:

$$\begin{aligned} K = MJM^{-1} &= J + [\hat{\mathcal{G}}_>, J] + \frac{1}{2!}[\hat{\mathcal{G}}_>, [\hat{\mathcal{G}}_>, J]] + \dots \qquad (2.45) \\ &= \partial MM^{-1} + B^{-1}\partial B + B^{-1}N^{-1}\partial NB \qquad (2.46) \\ \bar{K} = N^{-1}\bar{J}N &= \bar{J} - [\hat{\mathcal{G}}_<, \bar{J}] + \frac{1}{2!}[\hat{\mathcal{G}}_<, [\hat{\mathcal{G}}_<, \bar{J}]] + \dots \qquad (2.47) \\ &= N^{-1}\bar{\partial}N + \bar{\partial}BB^{-1} + B\bar{\partial}MM^{-1}B^{-1} \qquad (2.48) \end{aligned}$$

O único termo de grau negativo em (2.46) é $B^{-1}N^{-1}\partial NB$, e em (2.45), $[\hat{\mathcal{G}}_>, J]$ tem grau no mínimo zero pois o menor grau de J é -1 de acordo com (2.44). Todos os outros comutadores tem graus ainda mais altos. Análise análoga se aplica a (2.47) e (2.48) e somos levados a concluir que:

$$\begin{aligned} \epsilon_- &= B^{-1}N^{-1}\partial NB \\ \epsilon_+ &= B\bar{\partial}MM^{-1}B^{-1} \qquad (2.49) \end{aligned}$$

Como cada subespaço graduado é independente, podemos projetar as equações (2.43) no subespaço de grau zero. Separando os termos que estão neste subespaço, para a primeira equação obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\left(B^{-1}\partial B\right) + \left[B^{-1}N^{-1}\partial NB, \bar{\partial}MM^{-1}\right] = 0 \\ \bar{\partial}\left(B^{-1}\partial B\right) + \left[\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B\right] = 0 \qquad (2.50) \end{aligned}$$

e para a segunda:

$$\begin{aligned} \partial\left(\bar{\partial}BB^{-1}\right) + \left[N^{-1}\partial N, B\bar{\partial}MM^{-1}B^{-1}\right] = 0 \\ \partial\left(\bar{\partial}BB^{-1}\right) - \left[\epsilon_+, B\epsilon_- B^{-1}\right] = 0 \qquad (2.51) \end{aligned}$$

As equações (2.50) e (2.51) são as equações de Leznov-Saveliev obtidas pelo método de curvatura nula em (2.26) e (2.25).

Portanto, mostramos que esta redução do modelo de WZW corresponde exatamente ao modelo relativístico contido na construção algébrica da equação de curvatura nula.

Podemos admirar a simplicidade e generalidade da construção de curvatura nula em termos uma álgebra de Kac-Moody graduada, que contém uma hierarquia de infinitas equações diferenciais, sendo que dentre elas uma em especial consiste no modelo relativístico correspondente a uma redução hamiltoniana do modelo WZW.

Capítulo 3

Hierarquia mKdV

Utilizando os conceitos gerais introduzidos no capítulo anterior, consideramos um caso específico que é a hierarquia mKdV. A projeção em graus positivos desta hierarquia nos fornece modelos não relativísticos, dentre eles, a conhecida equação mKdV. Também obtemos outros modelos de ordem mais alta. A parte negativa da hierarquia fornece o modelo de sinh-Gordon como caso relativístico. Obtemos uma equação integral de terceira ordem, e propomos uma sub-hierarquia de graus negativos pares, que são equações locais. Um exemplo deste caso é considerado.

3.1 Definição da hierarquia

Dentro do formalismo do capítulo anterior, definimos a hierarquia mKdV através da seguinte estrutura algébrica:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} &= A_1^{(1)} \\ Q_s &= \frac{1}{2}H^{(0)} + 2d \\ E &= E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Na equação de curvatura nula, vamos construir os operadores graduados com os seguinte geradores de $A_1^{(1)}$:

$$\left\{ E_\alpha^{(n)}, E_{-\alpha}^{(n)}, H^{(n)} \right\}$$

Não vamos incluir o elemento central $\hat{c}$ nem a derivada em relação ao parâmetro espectral da loop álgebra d.

Das relações fundamentais de comutação obtemos:

$$\begin{aligned} \left[Q_s, E_{\pm\alpha}^{(n)} \right] &= (2n \pm 1) E_{\pm\alpha}^{(n)} \\ \left[Q_s, H^{(n)} \right] &= 2n H^{(n)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

De acordo com a definição de subespaço graduado, $[Q_s, \hat{\mathcal{G}}^{(n)}] = n\hat{\mathcal{G}}^{(n)}$, vemos que $A_1^{(1)}$ se decompõe nos seguintes subespaços:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^{(2m)} &= \left\{H^{(m)}\right\} \\ \hat{\mathcal{G}}^{(2m+1)} &= \left\{E_{\alpha}^{(m)}, E_{-\alpha}^{(m+1)}\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nestas expressões $m \in \mathbb{Z}$.

Sabemos que $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K}(E) \oplus \mathcal{M}(E)$ e de acordo com as definições (2.15) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(E) &= \left\{E_{\alpha}^{(m)} + E_{-\alpha}^{(m+1)}\right\} \\ \mathcal{M}(E) &= \left\{E_{\alpha}^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)}, H^{(m)}\right\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

As relações (3.4) podem ser facilmente verificadas notando que os elementos de $\mathcal{K}(E)$ comutam com E, logo todos os elementos restantes devem estar em $\mathcal{M}(E)$. Note que de acordo com (3.3) o subespaço $\mathcal{K}(E)$ só possui geradores de grau ímpar enquanto $\mathcal{M}(E)$ possui geradores de grau par e ímpar.

O campo A_0 deve pertencer a $\hat{\mathcal{G}}^{(0)} \cap \mathcal{M}(E)$ e portanto, das relações (3.3) e (3.4):

$$A_0 = v(x, t_N)H^{(0)} \tag{3.5}$$

A componente $v(x, t_N)$ é o campo físico do modelo e o índice N fixa uma das equações da hierarquia.

3.2 Hierarquia positiva

As equações de movimentos são obtidas da equação de curvatura nula em termos de operadores graduados:

$$\left[\partial_x + A_0 + E, \partial_{t_N} + D_N^{(N)} + D_N^{(N-1)} + \ldots + D_N^{(0)}\right] = 0 \tag{3.6}$$

A decomposição desta equação nos subespaços graduados nos fornece o sistema de equações (2.19). A primeira dessas equações,

$$\left[E, D_N^{(N)}\right] = 0$$

nos diz que $D_N^{(N)} \in \mathcal{K}(E)$. Como vimos em (3.4), $\mathcal{K}(E)$ possui grau ímpar, e portanto concluimos que só existem fluxos de tempo associados a índices N ímpares na parte positiva da hierarquia mKdV.

Como $N = 2m + 1$, onde agora $m = \mathbb{Z}_+$, utilizamos as relações (3.3) e (3.4) para construir os seguintes operadores graduados, com suas respectivas componentes em

$\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$:

$$\begin{aligned}
D_N^{(2m+1)} &= a_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} + E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) + b_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) \\
D_N^{(2m)} &= c_{2m}H^{(m)} \\
D_N^{(2m-1)} &= a_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} + E_{-\alpha}^{(m)}\right) + b_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} - E_{-\alpha}^{(m)}\right) \\
D_N^{(2m-2)} &= c_{2m-2}H^{(m-1)} \\
\vdots &= \vdots \\
D_N^{(1)} &= a_1\left(E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}\right) + b_1\left(E_\alpha^{(0)} - E_{-\alpha}^{(1)}\right) \\
D_N^{(0)} &= c_0H^{(0)}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde todos os coeficientes são funções das variáveis x e t.

Prosseguimos calculando a projeção de (3.6) em cada subespaço graduado e utilizamos as definições (3.7) para obter equações para estes coeficientes.

A primeira equação, de grau $N+1$, é:

$$\begin{gathered}
\left[E, D_N^{(2m+1)}\right] = 0 \\
\left[E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}, a_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} + E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) + b_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)}\right)\right] = 0 \\
-2b_{2m+1}H^{(m+1)} = 0
\end{gathered} \tag{3.8}$$

onde fizemos uso das relações de comutação (A.43). Portanto, $b_{2m+1} = 0$ e a única componente de $D_N^{(2m+1)}$, pertencente a $\mathcal{K}(E)$, é a_{2m+1} e será determinada pela próxima equação.

Considerando a equação de grau N:

$$\partial_x D_N^{(2m+1)} + \left[A_0, D_N^{(2m+1)}\right] + \left[E, D_N^{(2m)}\right] = 0$$

substituimos os operadores (3.7):

$$\begin{aligned}
\partial_x a_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} + E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) + \partial_x b_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) &+ \\
+\left[vH^{(0)}, a_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} + E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) + b_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)}\right)\right] &+ \\
+\left[E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}, c_{2m}H^{(m)}\right] &= 0
\end{aligned}$$

e após calcular estes comutadores obtemos:

$$\partial_x a_{2m+1}\left(E_\alpha^{(m)} + E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) + (2va_{2m+1} - 2c_{2m})\left(E_\alpha^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)}\right) = 0 \tag{3.9}$$

Note como as equações se separam em componentes de $\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$. A componente $\mathcal{K}(E)$ da equação (3.9) determina que a_{2m+1} é uma constante e a componente $\mathcal{M}(E)$ nos fornece $c_{2m} = a_{2m+1}v$.

A próxima equação, de grau $N-1$, é:

$$\partial_x D_N^{(2m)} + \left[A_0, D_N^{(2m)}\right] + \left[E, D_N^{(2m-1)}\right] = 0$$

explicitando os operadores:

$$\begin{aligned} \partial_x c_{2m} H^{(m)} + \left[vH^{(0)}, c_{2m} H^{(m)}\right] &\quad + \\ + \left[E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}, a_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} + E_{-\alpha}^{(m)}\right) + b_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} - E_{-\alpha}^{(m)}\right)\right] &\quad = \quad 0 \end{aligned}$$

e calculando os comutadores:

$$\left(\partial_x c_{2m} - 2b_{2m-1}\right) H^{(m)} = 0 \tag{3.10}$$

Sem intenção de sermos repetitivos, vamos considerar mais uma equação, a de grau $N-2$, pois ela contém termos que não aparecem em (3.9) mas que estão presentes em todas as outras equações de grau ímpar. Assim temos:

$$\partial_x D_N^{(2m-1)} + \left[A_0, D_N^{(2m-1)}\right] + \left[E, D_N^{(2m-2)}\right] = 0$$

ou explicitamente:

$$\begin{aligned} \partial_x a_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} + E_{-\alpha}^{(m)}\right) + \partial_x b_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} - E_{-\alpha}^{(m)}\right) &\quad + \\ + \left[vH^{(0)}, a_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} + E_{-\alpha}^{(m)}\right) + b_{2m-1}\left(E_\alpha^{(m-1)} - E_{-\alpha}^{(m)}\right)\right] &\quad + \\ + \left[E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}, c_{2m-2} H^{(m-1)}\right] &\quad = \quad 0 \end{aligned}$$

e obtemos as equações:

$$\begin{aligned} \left(\partial_x a_{2m-1} + 2v b_{2m-1}\right)\left(E_\alpha^{(m-1)} + E_{-\alpha}^{(m)}\right) &\quad + \\ \left(\partial_x b_{2m-1} + 2v a_{2m-1} - 2c_{2m-2}\right)\left(E_\alpha^{(m-1)} + E_{-\alpha}^{(m)}\right) &\quad = \quad 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

As equações de grau ímpar subseqüentes são todas semelhantes à (3.11), enquanto as de grau par semelhantes à (3.10).

Podemos continuar dessa maneira obtendo todas as equações até atingir grau 1, onde encontramos:

$$\left(\partial_x a_1 + 2v b_1\right)\left(E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}\right) + \left(\partial_x b_1 + 2v a_1 - 2c_0\right)\left(E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}\right) = 0 \tag{3.12}$$

E finalmente obtemos a equação que descreve a dinâmica do campo v através da projeção no subespaço de grau zero:

$$\partial_x D_N^{(0)} - \partial_{t_N} A_0 + \left[A_0, D_N^{(0)}\right] = 0$$

ou seja:

$$(\partial_{t_N} v - \partial_x c_0)\, H^{(0)} = 0 \tag{3.13}$$

Note que esta equação já está inteiramente contida em $\mathcal{M}(E)$.

Condensamos os resultados obtidos em (3.8)–(3.13) da seguinte maneira. Seja $N = 1, 3, 5, \ldots$ um número previamente fixado, e dessa maneira os valores que j pode assumir são $j = 1, \ldots, N-1$. A resolução recursiva do sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned}
a_N &= \text{constante} \\
c_{N-1}(x,t_N) &= a_N v(x,t_N) \\
\partial_x c_{N-j}(x,t_N) - 2b_{N-1-j}(x,t_N) &= 0 && (j \text{ ímpar}) \\
\partial_x a_{N-j}(x,t_N) + 2v(x,t_N) b_{N-j}(x,t_N) &= 0 && (j \text{ par}) \\
\partial_x b_{N-j}(x,t_N) + 2v(x,t_N) a_{N-j}(x,t_N) - 2c_{N-1-j}(x,t_N) &= 0 && (j \text{ par})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

que após terem seus coeficientes substituidos na equação:

$$\partial_{t_N} v(x,t_N) - \partial_x c_0(x,t_N) = 0 \tag{3.15}$$

determina a equação diferencial, não linear, para campo $v(x,t_N)$. O índice N fixa uma dentre as infinitas equações da parte positiva da hierarquia mKdV.

Dessa forma, diversos modelos podem ser considerados fixando um número $N \in \mathbb{Z}_+$ ímpar. Após encontrar cada um dos coeficientes do sistema (3.14) variando j, a equação (3.15) será a equação diferencial procurada. A seguir consideraremos alguns exemplos.

3.2.1 $N = 1$

Para $N = 1$ em (3.14) temos que a_1 é uma constante e $c_1 = a_1 v$. Escolhendo $c_1 = 1$ a equação (3.15) nos fornece a simples equação:

$$v_{t_1} = v_x \tag{3.16}$$

que não diz nada além de $t_1 = x$.

3.2.2 $N = 3$

Para o caso $N = 3$ em (3.14) obtemos:

$$\begin{aligned}
a_3 &= \text{constante} \\
c_2 &= a_3 v \\
\partial_x c_2 - 2b_1 &= 0 \qquad (j = 1) \\
\partial_x a_1 + 2vb_1 &= 0 \qquad (j = 2) \\
\partial_x b_1 + 2va_1 - 2c_0 &= 0 \qquad (j = 2)
\end{aligned}$$

A resolução deste sistema é trivial e direta:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{2} a_3 v_x \\
a_1 &= -\frac{1}{2} a_3 v^2 \\
c_0 &= \frac{1}{4} a_3 v_{xx} - \frac{1}{2} a_3 v^3
\end{aligned}$$

onde ignoramos uma constante de integração na segunda destas equações.

Fixando $a_3 = 1$, da equação de movimento (3.15) obtemos [18]:

$$4v_{t_3} = v_{3x} - 6v^2 v_x \tag{3.17}$$

Esta é a famosa equação mKdV*. Pode-se sempre eliminar esta constante arbitrária, mediante uma mudança de escala: $v \to \alpha v$, $t_N \to \beta t_N$ e $x \to \gamma x$. Todas essas possíveis equações com diferentes coeficientes são equivalentes.

3.2.3 $N = 5$

Procurando por equações de ordem mais alta, consideramos $N = 5$ em (3.14):

$$\begin{aligned}
\partial_x c_4 - 2b_3 &= 0 \qquad (j = 1) \\
\partial_x a_3 + 2vb_3 &= 0 \qquad (j = 2) \\
\partial_x b_3 + 2va_3 - 2c_2 &= 0 \qquad (j = 2) \\
\partial_x c_2 - 2b_1 &= 0 \qquad (j = 3) \\
\partial_x a_1 + 2vb_1 &= 0 \qquad (j = 4) \\
\partial_x b_1 + 2va_1 - 2c_0 &= 0 \qquad (j = 4)
\end{aligned}$$

*A equação mKdV (modified KdV), está relacionada com a sua precursora equação KdV (Korteweg-de Vries): $4u_t = u_{3x} - 6uu_x$, através da transformação de Miura: $u = v^2 + v_x$. Na verdade, para toda equação da hierarquia mKdV positiva, corresponde uma equação da hierarquia KdV, e elas estão relacionadas pela transformação de Miura.

onde a_5 é uma constante e $c_4 = a_5 v$. Análogo ao caso $N = 3$ obtemos:

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{2}a_5 v_x \\ a_3 &= -\frac{1}{2}a_5 v^2 \\ c_2 &= \frac{1}{4}a_5 v_{2x} - \frac{1}{2}a_5 v^3 \end{aligned}$$

Os outros termos também são obtidos sem dificuldade:

$$b_1 = \frac{1}{8}a_5 v_{3x} - \frac{3}{4}a_5 v^2 v_x$$

$$\begin{aligned} \partial_x a_1 &= -\frac{1}{4}a_5 v v_{3x} + \frac{3}{2}a_5 v^3 v_x \\ &= -\frac{1}{4}a_5 \left((v v_{2x}) - \frac{1}{2}(v_x^2) \right)_x + \frac{3}{8}a_5 (v^4)_x \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{4}a_5 v v_{2x} + \frac{1}{8}a_5 v_x^2 + \frac{3}{8}a_5 v^4 \\ c_0 &= a_5 \left(\frac{1}{16}v_{4x} - \frac{5}{8}v^2 v_{2x} - \frac{5}{8}v(v_x)^2 + \frac{3}{8}v^5 \right) \end{aligned}$$

Fixando $a_5 = 1$, a equação de movimento obtida de (3.15) é uma equação diferencial de quinta ordem da hierarquia mKdV†:

$$16 v_{t_5} = v_{5x} - 10 v^2 v_{3x} - 40 v v_x v_{2x} - 10 v_x^3 + 30 v^4 v_x \tag{3.18}$$

3.2.4 $N = 7, 9, \ldots$

Fica claro que podemos obter equações diferenciais da hierarquia mKdV de ordem tão alta quanto se queira (apesar de ser um dispendioso, e provavelmente inútil, trabalho). A título de referência citamos mais duas dessas equações que podem ser obtidas como nos casos anteriores.

Para $N = 7$ é possível obter a equação:

$$\begin{aligned} 64 v_{t_7} &= v_{7x} - 182 v_x v_{2x}^2 - 126 v_x^2 v_{3x} - 140 v v_{2x} v_{3x} - 84 v v_x v_{4x} \\ &- 14 v^2 v_{5x} + 420 v^2 v_x^3 + 560 v^3 v_x v_{2x} + 70 v^4 v_{3x} - 140 v^6 v_x \end{aligned} \tag{3.19}$$

†Esta equação não é usualmente encontrada, mas aparece no exercício 1.2 de [19] onde alguém pode obtê-la de uma forma bem mais trabalhosa por condição de simetria.

e para $N = 9$:

$$
\begin{aligned}
256 v_{t_9} &= v_{9x} + 630 v^8 v_x + 2520 v^3 v_{2x} v_{3x} - 6300 v^4 v_x^3 - 1302 v_{2x}^2 v_{3x} + \\
&+ 9408 v v_x^3 v_{2x} + 6132 v^2 v_x^2 v_{3x} - 894 v_x v_{3x}^2 - 504 v v_{3x} v_{4x} - \\
&- 1404 v_x v_{2x} v_{4x} - 336 v v_{2x} v_{5x} - 144 v v_x v_{6x} + 1512 v^3 v_x v_{4x} - \\
&- 5040 v^5 v_x v_{2x} + 8484 v^2 v_x v_{2x}^2 - 318 v_x^2 v_{5x} - 18 v^2 v_{7x} + \\
&+ 798 v_x^5 + 126 v^4 v_{5x} - 420 v^6 v_{3x}
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Todas as equações obtidas até agora possuem uma generalidade em comum.

3.2.5 Polinômios diferenciais

As equações diferenciais obtidas de (3.16)–(3.20), possuem a forma do que chamamos de polinômio diferencial. Um polinômio diferencial de uma função v é uma soma de termos envolvendo produtos de potências de v e potências de suas derivadas.

Definimos uma propriedade do campo v da hierarquia mKdV, chamada de dimensão tal que v possui dimensão 1 e a cada potência de v, ou a cada derivada, a dimensão é acrescida de 1. Por exemplo, v^2 e v_x possuem dimensão 2. O termo $v^2 v_x$ possui dimensão 4 e assim por diante.

Agora podemos ver que todas as equações da parte positiva da hierarquia mKdV são polinômios diferenciais, homogêneos, de uma determinada dimensão. A equação (3.17) é um polinômio diferencial de dimensão 4, (3.18) é um polinômio diferencial de dimensão 6, (3.19) de dimensão 8... por conseguinte, a equação associada a t_N terá dimensão $N + 1$.

Na realidade, é possível obter todas as equações da parte positiva da hierarquia mKdV, partindo de uma das equações e propondo que a equação procurada seja um polinômio diferencial de uma determinada dimensão. Impondo uma condição de simetria entre essas duas equações, obtém-se todos os coeficientes deste polinômio diferencial [19], e a equação é assim determinada.

3.3 Hierarquia negativa ímpar

Vamos agora considerar a equação de curvatura nula em termos de operadores de graus negativos:

$$
\left[\partial_x + A_0 + E, \partial_{t_{-N}} + D_{-N}^{(-N)} + D_{-N}^{(-N+1)} + \ldots + D_{-N}^{(-1)}\right] = 0 \tag{3.21}
$$

A projeção desta equação em cada subespaço resulta no sistema de equações (2.22), que será o objeto de estudo desta seção. Considere as definições (3.1), (3.3) e (3.4) na argumentação a seguir.

A equação de grau mais baixo em (3.21) é a de grau $-N$. Ao contrário do caso positivo, esta equação possui componentes tanto em $\mathcal{K}(E)$ quanto em $\mathcal{M}(E)$ e o argumento de que só existem índices N ímpares não é mais válido, pois $\mathcal{M}(E)$ possui operadores de grau par e ímpar.

Portanto, vamos assumir que $-N$ seja um número ímpar o que implica que os operadores possuem a forma:

$$
\begin{aligned}
D_{-N}^{(-2m-1)} &= a_{-2m-1}\left(E_{\alpha}^{(-m-1)} + E_{-\alpha}^{(-m)}\right) + b_{-2m-1}\left(E_{\alpha}^{(-m-1)} - E_{-\alpha}^{(-m)}\right) \\
D_{-N}^{(-2m)} &= c_{-2m}H^{(-m)} \\
D_{-N}^{(-2m+1)} &= a_{-2m+1}\left(E_{\alpha}^{(-m)} + E_{-\alpha}^{(-m+1)}\right) + b_{-2m+1}\left(E_{\alpha}^{(-m)} - E_{-\alpha}^{(-m+1)}\right) \\
\vdots &= \vdots \\
D_{-N}^{(-2)} &= c_{-2}H^{(-1)} \\
D_{-N}^{(-1)} &= a_{-1}\left(E_{\alpha}^{(-1)} + E_{-\alpha}^{(0)}\right) + b_{-1}\left(E_{\alpha}^{(-1)} - E_{-\alpha}^{(0)}\right)
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Tomando a equação de grau $-N$:

$$\partial_x D_{-N}^{(-2m-1)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-2m-1)}\right] = 0$$

após substituir o operador $D_{-N}^{(-2m-1)}$ de (3.22) torna-se:

$$
\begin{aligned}
(\partial_x a_{-2m-1} + 2vb_{-2m-1})\left(E_{\alpha}^{(-m-1)} + E_{-\alpha}^{(-m)}\right) &\quad + \\
+\ (\partial_x b_{-2m-1} + 2va_{-2m-1})\left(E_{\alpha}^{(-m-1)} - E_{-\alpha}^{(-m)}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Note a presença de componentes em $\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$, ao contrário da equação (3.8). Essa é a origem da não localidade das equações de movimento encontrada na parte negativa da hierarquia.

Dando continuidade, temos a equação de grau $-N+1$:

$$
\begin{aligned}
\partial_x D_{-N}^{(-2m)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-2m)}\right] + \left[E, D_{-N}^{(-2m-1)}\right] &= 0 \\
(\partial_x c_{-2m} - 2b_{-2m-1})\, H^{(-m)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

A equação de grau $-N+2$ fica:

$$
\begin{aligned}
\partial_x D_{-N}^{(-2m+1)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-2m+1)}\right] + \left[E, D_{-N}^{(-2m)}\right] &= 0 \\
(\partial_x a_{-2m+1} + 2vb_{-2m+1})\left(E_{\alpha}^{(-m)} + E_{-\alpha}^{(-m+1)}\right) &\quad + \\
+\ (\partial_x b_{-2m+1} + 2va_{-2m+1} - 2c_{-2m})\left(E_{\alpha}^{(-m)} - E_{-\alpha}^{(-m+1)}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

e a equação de grau $-N+3$:

$$\begin{aligned}
\partial_x D^{(-2m+2)}_{-N} + \left[A_0, D^{(-2m+2)}_{-N}\right] + \left[E, D^{(-2m+1)}_{-N}\right] &= 0 \\
\left(\partial_x c_{-2m+2} - 2b_{-2m+1}\right) H^{(-m+1)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Já é possível inferir o comportamento geral. Todas as equações de grau ímpar serão semelhantes à (3.25) e as de grau par semelhantes à (3.26). Por exemplo, a equação de grau -1 é:

$$\begin{aligned}
\left(\partial_x a_{-1} + 2vb_{-1}\right)\left(E^{(-1)}_{\alpha} + E^{(0)}_{-\alpha}\right) &+ \\
+ \left(\partial_x b_{-1} + 2va_{-1} - 2c_{-2}\right)\left(E^{(-1)}_{\alpha} - E^{(0)}_{-\alpha}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A equação de grau zero já está contida em $\mathcal{M}(E)$ e é a equação de movimento do modelo:

$$\begin{aligned}
\left[E, D^{(-1)}_{-N}\right] - \partial_{t_{-N}} A_0 &= 0 \\
\left(\partial_{t_{-N}} v + 2b_{-1}\right) H^{(0)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Resumimos estes resultados da seguinte forma. Escolhendo um número positivo ímpar $N = 1, 3, 5, \ldots$ o número j deverá assumir os valores $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Após encontrar todos os coeficientes do sistema abaixo:

$$\begin{aligned}
c_{-N-1} &= 0 \\
\partial_x a_{-N+j}(x, t_{-N}) + 2v(x, t_{-N}) b_{-N+j}(x, t_{-N}) &= 0 && (j \text{ par}) \\
\partial_x b_{-N+j}(x, t_{-N}) + 2v(x, t_{-N}) a_{-N+j}(x, t_{-N}) - 2c_{-N-1+j}(x, t_{-N}) &= 0 && (j \text{ par}) \\
\partial_x c_{-N+j}(x, t_{-N}) - 2b_{-N-1+j}(x, t_{-N}) &= 0 && (j \text{ ímpar})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

e substituir o resultado na equação de movimento:

$$\partial_{t_{-N}} v(x, t_{-N}) + 2b_{-1}(x, t_{-N}) = 0 \tag{3.30}$$

a equação de movimento, não local, de um dado t_{-N} da hierarquia mKdV negativa é obtida.

3.3.1 $N = -1$

Como exemplo, vamos considerar o caso relativístico da hierarquia mKdV. Considere $N = 1$ nas equações (3.29):

$$\begin{aligned}
\partial_x a_{-1} + 2vb_{-1} &= 0 \\
\partial_x b_{-1} + 2va_{-1} &= 0
\end{aligned}$$

Conseguimos resolver este sistema se somarmos e subtrairmos ambas as equações:

$$\partial_x (a_{-1} + b_{-1}) + 2v (a_{-1} + b_{-1}) = 0$$
$$\partial_x (a_{-1} - b_{-1}) - 2v (a_{-1} - b_{-1}) = 0$$

Integramos diretamente e ignorando a constante de integração obtemos:

$$a_{-1} + b_{-1} = \exp\left(-2\int v dx\right) \quad \text{e} \quad a_{-1} - b_{-1} = \exp\left(2\int v dx\right)$$

A equação de movimento não local para o campo $v(x, t_{-1})$, obtida de (3.30) é:

$$\begin{aligned} \partial_{t_{-1}} v &= \exp\left(2\int v dx\right) - \exp\left(-2\int v dx\right) \\ &= 2\sinh\left(2\int v dx\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Neste caso fica fácil ver que podemos obter uma equação local se introduzirmos o ansatz:

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{3.32}$$

Desta maneira a equação (3.31) pode ser transformada na conhecida equação de sinh-Gordon [23]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_{-1} \partial x} = 2\sinh 2\phi \tag{3.33}$$

Também poderiamos ter escolhido $v = i\phi_x$, onde $i^2 = -1$, de forma que (3.31) se transforma na equação de sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_{-1} \partial x} = 2\sin 2\phi \tag{3.34}$$

Como já sabemos, o caso $N = -1$ das hierarquias integráveis corresponde a um modelo relativístico, que pode ser obtido através de uma redução hamiltoniana do modelo WZW.

3.3.2 $N = -3$

Vamos considerar equações mais baixas na hierarquia negativa. A primeira delas, depois do modelo de sinh-Gordon, correponde ao caso $N = 3$ em (3.29). Assim temos as seguintes equações:

$$\partial_x a_{-3} + 2v b_{-3} = 0 \tag{3.35}$$
$$\partial_x b_{-3} + 2v a_{-3} = 0 \tag{3.36}$$
$$\partial_x c_{-2} - 2b_{-3} = 0 \tag{3.37}$$
$$\partial_x a_{-1} + 2v b_{-1} = 0 \tag{3.38}$$
$$\partial_x b_{-1} + 2v a_{-1} - 2c_{-2} = 0 \tag{3.39}$$

As duas primeiras, (3.35) e (3.36), nós já sabemos como resolver pois são as mesmas do caso anterior:

$$a_{-3} + b_{-3} = \exp\left(-2\int v dx\right) \quad \text{e} \quad a_{-3} - b_{-3} = \exp\left(2\int v dx\right) \tag{3.40}$$

Substituindo este resultado em (3.37):

$$c_{-2} = \int \left[\exp\left(-2\int^x v dx'\right) - \exp\left(2\int^x v dx'\right)\right] dx \tag{3.41}$$

Repetindo o truque, somamos e subtraimos as duas últimas equações, (3.38) e (3.39):

$$\partial_x (a_{-1} + b_{-1}) + 2v (a_{-1} + b_{-1}) - 2c_{-2} = 0$$
$$\partial_x (a_{-1} - b_{-1}) - 2v (a_{-1} - b_{-1}) + 2c_{-2} = 0$$

Como só aparece derivada em x nestas equações, podemos considerá-las como equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Utilizando a solução usual deste tipo de equação:

$$\begin{aligned} a_{-1} + b_{-1} &= 2\exp\left(-2\int v dx\right)\int \exp\left(2\int^x v dx'\right) c_{-2}(x) dx \\ a_{-1} - b_{-1} &= -2\exp\left(2\int v dx\right)\int \exp\left(-2\int^x v dx'\right) c_{-2}(x) dx \end{aligned} \tag{3.42}$$

onde c_{-2} é dado por (3.41).

Desta maneira, de (3.30) obtemos uma equação de movimento não local, que na sua forma explícita fica:

$$\begin{aligned} v_{t_{-3}} &= 2e^{-2\int v dx}\int e^{2\int^x v dx'}\int^x \left[e^{2\int^{x''} v dx'} - e^{-2\int^{x''} v dx'}\right] dx'' dx + \\ &+ 2e^{2\int v dx}\int e^{-2\int^x v dx'}\int^x \left[e^{2\int^{x''} v dx'} - e^{-2\int^{x''} v dx'}\right] dx'' dx \end{aligned} \tag{3.43}$$

Novamente introduzimos (3.32) de forma que esta equação se escreve:

$$\begin{aligned} \phi_{xt_{-3}} &= 2e^{-2\phi(x)}\int e^{2\phi(x)}\int^x \left[e^{2\phi(x')} - e^{-2\phi(x')}\right] dx' dx + \\ &+ 2e^{2\phi(x)}\int e^{-2\phi(x)}\int^x \left[e^{2\phi(x')} - e^{-2\phi(x')}\right] dx' dx \end{aligned} \tag{3.44}$$

Essa é a equação não local, correspondente ao tempo t_{-3} da parte negativa da hierarquia mKdV. Vamos tentar eliminar a não localidade desta equação e para isso derivamos (3.44) em relação a x:

$$\begin{aligned} \phi_{2xt_{-3}} &= 4\int \left(e^{2\phi} - e^{-2\phi}\right) dx + 4e^{2\phi}\phi_x \int e^{-2\phi}\int^x \left(e^{2\phi(x')} - e^{-2\phi(x')}\right) dx' dx - \\ &- 4e^{-2\phi}\phi_x \int e^{2\phi}\int^x \left(e^{2\phi(x')} - e^{-2\phi(x')}\right) dx' dx \end{aligned} \tag{3.45}$$

Derivando novamente (3.45) em relação a x e usando (3.44) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\phi_{3xt_{-3}} &= 4\left(e^{2\phi}-e^{-2\phi}\right)+4\phi_x^2\phi_{xt_{-3}} \\
&+4\phi_{xx}\left\{e^{2\phi}\int e^{-2\phi}\int^x\left(e^{2\phi(x')}-e^{-2\phi(x')}\right)dx'dx-\right. \\
&-\left. e^{-2\phi}\int^x e^{2\phi}\int^x\left(e^{2\phi(x')}-e^{-2\phi(x')}\right)dx'dx\right\}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Usando (3.45) podemos manipular o termo entre chaves de (3.46) e reescrever essa equação como:

$$
\begin{aligned}
\phi_{3xt_{-3}} &= 4\left(e^{2\phi}-e^{-2\phi}\right)+4(\phi_x)^2\phi_{xt_{-3}}+\phi_x^{-1}\phi_{2x}\phi_{2xt_{-3}}- \\
&-4\phi_x^{-1}\phi_{2x}D^{-1}\left(e^{2\phi}-e^{-2\phi}\right)
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

onde introduzimos a notação freqüentemente utilizada $D=\partial_x$ e D^{-1} é o operador inverso.

A equação (3.47) deixa de ser local devido ao último termo. Essa equação não possui nenhuma restrição em relação a (3.44) e portanto ambas são equivalentes. Contudo, fica claro que a medida que consideramos fluxos de tempo negativos da hierarquia, ao invés de derivadas aparecem integrais, reforçando o caráter não local das equações. A origem deste comportamento está no fato de que a projeção da equação de curvatura nula no grau mais baixo (3.23), possui componentes em ambos os subespaços $\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$. Isso deve ser comparado com (3.8) que possui somente componente em $\mathcal{K}(E)$.

Como no caso da hierarquia positiva, as equações continuam sendo um polinômio diferencial (ou melhor, integral) homogêneo de uma dada dimensão. Neste caso, onde v tem dimensão 1, (3.43) tem dimensão -2, se considerarmos que cada integral contribui com um decréscimo de uma unidade na dimensão.

3.4 Hierarquia negativa par

Ocorre algo curioso com a hierarquia mKdV. Como vimos em (3.4) e (3.3), $\mathcal{K}(E)$ tem grau ímpar, e na parte positiva da hierarquia o operador de maior grau $D_N^{(N)}$, pertence somente a $\mathcal{K}(E)$. Portanto, só podem existir tempos ímpares na parte positiva da hierarquia mKdV, $N=1,3,5,\ldots$

Na seção anterior consideramos a parte negativa da hierarquia mKdV, supondo que N fosse ímpar, e vimos que $D_{-N}^{(-N)}$ possui componentes tanto em $\mathcal{K}(E)$ quanto em $\mathcal{M}(E)$, que por sua vez possui operadores de grau par e ímpar (3.4). Portanto, dentro deste contexto, não temos nenhum argumento para rejeitar N's pares na parte negativa da hierarquia mKdV. Porém, até onde sabemos, parece que essa consideração tem passado despercebida.

Vamos investigar este caso, partindo da equação de curvatura nula:

$$\left[\partial_x + A_0 + E, \partial_{t-N} + D_{-N}^{(-N)} + \ldots + D_{-N}^{(-1)}\right] = 0 \tag{3.48}$$

onde agora supomos que $N = 2m$ para $m \in \mathbb{Z}_+$. Temos também os seguintes operadores graduados com suas componentes em $\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$:

$$\begin{aligned}
D_{-N}^{(-N)} &= c_{-2m} H^{(-m)} \\
D_{-N}^{(-N+1)} &= a_{-2m+1}\left(E_{\alpha}^{(-m)} + E_{-\alpha}^{(-m+1)}\right) + b_{-2m+1}\left(E_{\alpha}^{(-m)} - E_{-\alpha}^{(-m+1)}\right) \\
D_{-N}^{(-N+2)} &= c_{-2m+2} H^{(-m+1)} \\
\vdots &= \vdots \\
D_{-N}^{(-2)} &= c_{-2} H^{(-1)} \\
D_{-N}^{(-1)} &= a_{-1}\left(E_{\alpha}^{(-1)} + E_{-\alpha}^{(0)}\right) + b_{-1}\left(E_{\alpha}^{(-1)} - E_{-\alpha}^{(0)}\right)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Uma observação importante é que na parte positiva da hierarquia o operador de maior grau, $D_{N}^{(N)}$, está inteiramente contido em $\mathcal{K}(E)$ como explicitado em (3.7). Já na parte negativa ímpar, o operador de menor grau $D_{-N}^{(-N)}$ possui componentes em ambos os subespaços $\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$ conforme (3.22). Agora, para a parte negativa par, o operador $D_{-N}^{(-N)}$ volta a estar inteiramente contido em um dos subespaços, mas desta vez $D_{-N}^{(-N)} \in \mathcal{M}(E)$ conforme manifesto em (3.49).

No caso positivo obtemos equações locais. Para o caso negativo ímpar somente a equação relativística pode ser escrita localmente. A princípio todas as outras são não locais. Para o caso negativo par, veremos que as equações voltam a ser locais. Este comportamento está relacionado com o fato de $D_{-N}^{(-N)}$ ou $D_{N}^{(N)}$, estar inteiramente contido em um único subespaço.

Como o leitor já deve estar familiarizado com o procedimento, tomamos grau a grau em (3.48) e substituimos os operadores (3.49). Assim, encontramos as seguinte equações:

$$\begin{aligned}
c_{-N} &= \text{constante} \\
\partial_x a_{-N+j}(x,t_{-N}) + 2v(x,t_{-N}) b_{-N+j}(x,t_{-N}) &= 0 \qquad (j \text{ ímpar}) \\
\partial_x b_{-N+j}(x,t_{-N}) + 2v(x,t_{-N}) a_{-N+j}(x,t_{-N}) - 2c_{-N-1+j}(x,t_{-N}) &= 0 \qquad (j \text{ ímpar}) \\
\partial_x c_{-N+j}(x,t_{-N}) - 2b_{-N-1+j}(x,t_{-N}) &= 0 \qquad (j \text{ par})
\end{aligned} \tag{3.50}$$

bem como a equação de movimento:

$$\partial_{t_{-N}} v(x,t_{-N}) + 2b_{-1}(x,t_{-N}) = 0 \tag{3.51}$$

Nestas equações $N = 2, 4, 6, \ldots$ e $j = 1, \ldots, N-1$ para um dado N.

3.4.1 $N = -2$

Como exemplo, vamos considerar o modelo descrito por $N = 2$ no sistema (3.50). Temos as seguintes equações:

$$c_{-2} = \text{constante}$$
$$\partial_x a_{-1} + 2vb_{-1} = 0$$
$$\partial_x b_{-1} + 2va_{-1} - 2c_{-2} = 0$$

Podemos resolver este sistema somando e subtraindo essas equações:

$$\partial_x (a_{-1} + b_{-1}) + 2v(a_{-1} + b_{-1}) - 2c_{-2} = 0$$
$$\partial_x (a_{-1} - b_{-1}) - 2v(a_{-1} - b_{-1}) + 2c_{-2} = 0$$

Essas duas equações são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para a variável x, e os coeficientes podem ser obtidos como função de v. Integrando estas equações:

$$\begin{aligned} a_{-1} + b_{-1} &= 2c_{-2} \exp\left(-2\int vdx\right) \int \exp\left(2\int^x vdx'\right) dx \\ a_{-1} - b_{-1} &= -2c_{-2} \exp\left(2\int vdx\right) \int \exp\left(-2\int^x vdx'\right) dx \end{aligned} \tag{3.52}$$

Portanto, a equação de movimento para o campo v, obtida de (3.51) é:

$$\partial_{t_{-2}} v + 2c_{-2} e^{-2\int vdx} \int e^{2\int^x vdx'} dx + 2c_{-2} e^{2\int vdx} \int e^{-2\int^x vdx'} dx = 0 \tag{3.53}$$

Por economia de notação‡, introduzimos $v = \phi_x$ de forma que (3.53) fica:

$$\phi_{xt_{-2}} + 2c_{-2} e^{-2\phi} \int e^{2\phi} dx + 2c_{-2} e^{2\phi} \int e^{-2\phi} dx = 0 \tag{3.54}$$

Vamos tentar eliminar as integrais desta equação. Derivando (3.54) em relação a x obtemos:

$$\phi_{2xt_{-2}} + 4c_{-2} + 4c_{-2}\phi_x \left(e^{2\phi} \int e^{-2\phi} dx - e^{-2\phi} \int e^{2\phi} dx\right) = 0 \tag{3.55}$$

Derivando (3.55) novamente:

$$\begin{aligned} &\phi_{3xt_{-2}} + 8c_{-2}\phi_x^2 \left(e^{2\phi} \int e^{-2\phi} dx + e^{-2\phi} \int e^{2\phi} dx\right) + \\ &+4c_{-2}\phi_{2x} \left(e^{2\phi} \int e^{-2\phi} dx - e^{-2\phi} \int e^{2\phi} dx\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.56}$$

‡Veremos a seguir que não precisamos do campo ϕ neste caso, pois a equação será local para v.

No primeiro parênteses de (3.56) substituimos (3.54) e no segundo parênteses substituimos (3.55). Assim obtemos:

$$\phi_{3xt_{-2}} - 4\phi_x^2\phi_{xt_{-2}} - (\phi_x)^{-1}\phi_{2x}\phi_{2xt_{-2}} - 4c_{-2}(\phi_x)^{-1}\phi_{2x} = 0 \tag{3.57}$$

Note que podemos voltar para o campo v e curiosamente obtemos uma equação local:

$$v_{2xt_{-2}} - 4v^2v_{t_{-2}} - v^{-1}v_xv_{xt_{-2}} - 4v^{-1}v_x = 0 \tag{3.58}$$

onde fizemos $c_{-2} = 1$.

A equação (3.58) é uma nova equação integrável e só foi obtida em [22], resolvendo o problema de autovalores de Lenard, o que envolve operadores de recursão e seus operadores inversos, que não são facilmente construidos. Além disso em [22] não fica claro que esta equação corresponde a projeção em graus negativos pares da hierarquia mKdV, e equações associadas a graus negativos ímpares não são consideradas.

Apesar de só considerarmos este exemplo, fica claro que as outras equações contidas na hierarquia mKdV, com graus negativos pares, podem ser obtidas da mesma maneira e este comportamento se repete.

Capítulo 4

Hierarquia AKNS

A hierarquia AKNS possui a mesma álgebra da hierarquia mKdV, porém operadores E e Q_s diferentes. Este segundo exemplo ilustra como uma mesma estrutura algébrica pode nos levar a modelos bem diferentes. A hierarquia AKNS possui dois campos e a mais conhecida de suas equações constitui o modelo de Schröedinger não linear, não relativístico. Consideramos modelos de ordem mais alta. Outro caso conhecido é o modelo relativístico da hierarquia, chamado modelo de Lund-Regge.

4.1 Definição da hierarquia

Definimos a hierarquia AKNS através da seguinte estrutura algébrica:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} &= A_1^{(1)} \\ Q_s &= d \\ E &= H^{(1)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Das relações fundamentais de comutação obtemos:

$$\begin{aligned} \left[Q_s, E_{\pm\alpha}^{(n)}\right] &= nE_{\pm\alpha}^{(n)} \\ \left[Q_s, H^{(n)}\right] &= nH^{(n)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Portanto, a álgebra é decomposta nos seguintes subespaços:

$$\hat{\mathcal{G}}^{(m)} = \left\{E_{\alpha}^{(m)}, E_{-\alpha}^{(m)}, H^{(m)}\right\} \tag{4.3}$$

onde $m \in \mathbb{Z}$. Das definições (2.15) e das relações fundamentais de comutação é fácil verificar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(E) &= \left\{H^{(m)}\right\} \\ \mathcal{M}(E) &= \left\{E_{\alpha}^{(m)}, E_{-\alpha}^{(m)}\right\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note que ao contrário da hierarquia mKdV, não existe uma separação entre graus pares e ímpares pois $\mathcal{K}(E)$ possui operadores de ambos os graus.

Como $A_0 \in \hat{\mathcal{G}}^{(0)} \cap \mathcal{M}(E)$ as relações (4.3) e (4.4) implicam que:

$$A_0 = q(x, t_N) E_{\alpha}^{(0)} + r(x, t_N) E_{-\alpha}^{(0)} \tag{4.5}$$

As componentes $q(x, t_N)$ e $r(x, t_N)$ são os campos físicos do modelo e t_N é o tempo de uma das equações da hierarquia, fixada pelo índice N. Vemos que ao contrário de (3.5) temos dois campos neste caso, e que a escolha dos operadores E e Q_s é que determinam os campos físicos do modelo.

4.2 Hierarquia positiva

O ponto de partida é a equação de curvatura nula na forma:

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_N} + D_N^{(N)} + D_N^{(N-1)} + \ldots + D_N^{(0)}\right] = 0 \tag{4.6}$$

Dos subespaços (4.3) e (4.4) vemos que todos os operadores $D_N^{(N)}$ são constituídos de componentes pertencentes a $\mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{M}(E)$, e sua forma geral é:

$$D_N^{(N-j)} = a_{N-j} E_{\alpha}^{(N-j)} + b_{N-j} E_{-\alpha}^{(N-j)} + c_{N-j} H^{(N-j)} \tag{4.7}$$

onde as componentes desses geradores são funções de x e t_N, e $j \in \mathbb{Z}_+$.

Agora projetamos a equação (4.6) em cada subespaço graduado e utilizamos a forma explícita dos operadores em (4.7). A equação de grau $N+1$ é:

$$\begin{aligned} \left[E, D_N^{(N)}\right] &= 0 \\ 2a_N E_{\alpha}^{(N+1)} - 2b_N E_{-\alpha}^{(N+1)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ambos os geradores pertencem a $\mathcal{M}(E)$ mas são independentes. Então concluímos que $a_N = 0$ e $b_N = 0$.

A equação (4.6) no subespaço de grau N é:

$$\begin{aligned} \partial_x D_N^{(N)} + \left[A_0, D_N^{(N)}\right] + \left[E, D_N^{(N-1)}\right] &= 0 \\ 2\left(a_{N-1} - q c_N\right) E_{\alpha}^{(N)} + 2\left(r c_N - b_{N-1}\right) E_{-\alpha}^{(N)} + \partial_x c_N H^{(N)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Note como (4.8) determina as componentes $\mathcal{M}(E)$ de $D_N^{(N)}$ enquanto (4.9) determina a componente $\mathcal{K}(E)$, além das componentes $\mathcal{M}(E)$ de $D_N^{(N-1)}$. Esse comportamento é repetitivo.

A próxima equação é a de grau $N-1$:

$$\begin{aligned}
\partial_x D_N^{(N-1)} + \left[A_0, D_N^{(N-1)}\right] + \left[E, D_N^{(N-2)}\right] &= 0 \\
\left(\partial_x a_{N-1} - 2qc_{N-1} + 2a_{N-2}\right) E_\alpha^{(N-1)} &+ \\
+ \left(\partial_x b_{N-1} + 2rc_{N-1} - 2b_{N-2}\right) E_{-\alpha}^{(N-1)} &+ \\
+ \left(\partial_x c_{N-1} + qb_{N-1} - rb_{N-1}\right) H^{(N-1)} &= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Fica fácil ver que a equação de grau $N-2$ terá a forma:

$$\begin{aligned}
\left(\partial_x a_{N-2} - 2qc_{N-2} + 2a_{N-3}\right) E_\alpha^{(N-2)} + \left(\partial_x b_{N-2} + 2rc_{N-2} - 2b_{N-3}\right) E_{-\alpha}^{(N-2)} + \\
+ \left(\partial_x c_{N-2} + qb_{N-2} - rb_{N-2}\right) H^{(N-2)} = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e assim por diante.

Para a equação de grau 1 temos:

$$\begin{aligned}
\partial_x D_N^{(1)} + \left[A_0, D_N^{(1)}\right] + \left[E, D_N^{(0)}\right] &= 0 \\
\left(\partial_x a_1 - 2qc_1 + 2a_0\right) E_\alpha^{(1)} + \left(\partial_x b_1 + 2rc_1 - 2b_0\right) E_{-\alpha}^{(1)} &+ \\
+ \left(\partial_x c_1 + qb_1 - rb_1\right) H^{(1)} &= 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

E por último a equação de grau zero fornece:

$$\begin{aligned}
\partial_x D_N^{(0)} + \left[A_0, D_N^{(0)}\right] - \partial_{t_N} A_0 &= 0 \\
\left(\partial_x a_0 - 2qc_0 - \partial_{t_N} q\right) E_\alpha^{(0)} + \left(\partial_x b_0 + 2rc_0 - \partial_{t_N} r\right) E_{-\alpha}^{(0)} &+ \\
+ \left(\partial_x c_0 + qb_0 - rb_0\right) H^{(0)} &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Note que o último termo de (4.13), pertencente a $\mathcal{K}(E)$, determina c_0 em termos de r e q. As componentes $\mathcal{M}(E)$ desta equação, que são os dois primeiros termos, são as equações de movimento. Observe que são equações não lineares acopladas.

Resumimos os resultados (4.8)–(4.13). A parte positiva, não relativística, da hierarquia AKNS é gerada pela resolução recursiva das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
a_N(x,t_N) = b_N(x,t_N) = 0 \\
\partial_x a_{N-j}(x,t_N) - 2q(x,t_N)c_{N-j}(x,t_N) + 2a_{N-1-j}(x,t_N) = 0 \\
\partial_x b_{N-j}(x,t_N) + 2r(x,t_N)c_{N-j}(x,t_N) - 2b_{N-1-j}(x,t_N) = 0 \\
\partial_x c_{N-j}(x,t_N) + q(x,t_N)b_{N-j}(x,t_N) - r(x,t_N)a_{N-j}(x,t_N) = 0 \\
\partial_x c_0(x,t_N) + q(x,t_N)b_0(x,t_N) - r(x,t_N)a_0(x,t_N) = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $N \in \mathbb{Z}_+$ é um número dado, e j assume os valores $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Após obter todos esses coeficientes as equações de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned}
\partial_{t_N} q(x,t_N) - \partial_x a_0(x,t_N) + 2qc_0(x,t_N) = 0 \\
\partial_{t_N} r(x,t_N) - \partial_x b_0(x,t_N) - 2rc_0(x,t_N) = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim todos os modelos da hierarquia AKNS são construidos.

4.2.1 $N = 1$

Considerando $N = 1$ em (4.14) e (4.15) temos:

$$\begin{aligned} a_1 = b_1 &= 0 \\ -2qc_1 + 2a_0 &= 0 \\ 2rc_1 - 2b_0 &= 0 \\ \partial_x c_1 &= 0 \\ \partial_x c_0 &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo nas equações de movimento (4.15):

$$\begin{aligned} &q_{t_1} - c_1 q_x + 2c_0 q = 0 \\ &r_{t_1} - c_1 r_x - 2rc_0 = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

As constantes arbitárias podem ser eliminadas por mudança de escala ou por escolha. Fazendo $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos:

$$q_{t_1} = q_x, \quad r_{t_1} = r_x \tag{4.17}$$

Para ficar claro que os coeficientes c_0 e c_1 da equação (4.16) podem ser absorvidos por mudança de escala apropriada, considere a transformação $q \to uq$ e $x \to c_1 x$, onde $u = u(x, t_1)$ é uma função arbitrária. Assim, a primeira equação de (4.16) fica:

$$u\left(q_{t_1} - q_x\right) + \left(u_{t_1} - u_x + 2c_0\right) q = 0 \tag{4.18}$$

Basta escolher u como solução da equação contida no segundo parênteses de (4.18) que obtemos a primeira equação de (4.17). Raciocínio análogo se aplica para a segunda equação de (4.16), assim como para os exemplos seguintes. A transformação mais geral possível destas equações consiste em transformações de Galileu e redimensão das variáveis x e t_1.

4.2.2 $N = 2$

Para $N = 2$ em (4.14) obtemos:

$$\begin{aligned} -2qc_2 + 2a_1 &= 0 \qquad & \partial_x a_1 - 2qc_1 + 2a_0 &= 0 \\ 2rc_2 - 2b_1 &= 0 \qquad & \partial_x b_1 + 2rc_1 - 2b_0 &= 0 \\ \partial_x c_2 &= 0 \qquad & \partial_x c_1 + qb_1 - ra_1 &= 0 \\ & & \partial_x c_0 + qb_0 - ra_0 &= 0 \end{aligned}$$

As primeiras três equações são idênticas ao caso anterior, e não há nada a ser resolvido. Substituindo estes coeficientes nas outras equações:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{2}c_2\partial_x q + c_1 q \\
b_0 &= \frac{1}{2}c_2\partial_x r + c_1 r \\
\partial_x c_1 &= 0
\end{aligned}$$

E a última delas fica:

$$\partial_x c_0 = c_1 r q - \frac{1}{2}c_2 r\partial_x q - c_1 q r - \frac{1}{2}c_2 q\partial_x r = -\frac{1}{2}\partial_x(qr)$$

Logo, ignorando a constante de integração desta última relação, as equações de movimento (4.15) nos dão:

$$\begin{aligned}
q_{t_2} - c_1 q_x + \frac{1}{2}q_{2x} - c_2 q^2 r = 0 \\
r_{t_2} - c_1 q_x - \frac{1}{2}r_{2x} + c_2 q r^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Com as escolhas usuais das constantes, $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, as equações de movimento assumem a forma do famoso modelo de Schrödinger não linear [3, 14]:

$$\begin{aligned}
q_{t_2} + \frac{1}{2}q_{2x} - q^2 r = 0 \\
r_{t_2} - \frac{1}{2}r_{2x} + q r^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Novamente lembramos que a escolha das constantes é compatível com mudanças de escala das variáveis.

4.2.3 $N = 3$

Para o caso $N = 3$ devemos resolver:

$$\begin{array}{rrr}
-2qc_3 + 2a_2 = 0 & \partial_x a_2 - 2qc_2 + 2a_1 = 0 & \partial_x a_1 - 2qc_1 + 2a_0 = 0 \\
2c_3 r - 2b_2 = 0 & \partial_x b_2 + 2rc_2 - 2b_1 = 0 & \partial_x b_1 + 2rc_1 - 2b_0 = 0 \\
\partial_x c_3 = 0 & \partial_x c_2 + qb_2 - ra_2 = 0 & \partial_x c_1 + qb_1 - ra_1 = 0 \\
 & & \partial_x c_0 + qb_0 - ra_0 = 0
\end{array}$$

Nas primeiras três equações não a nada a ser feito e as próximas três são idênticas ao caso anterior:

$$\begin{aligned}
a_1 &= qc_2 - \frac{1}{2}c_3\partial_x q \\
b_1 &= rc_2 + \frac{1}{2}c_3\partial_x r \\
\partial_x c_2 &= 0
\end{aligned}$$

Substituindo estes resultados nas três primeiras equação da última coluna obtemos facilmente:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{1}{2}c_3qr \\
a_0 &= -\frac{1}{2}c_3q^2r - \frac{1}{2}c_2\partial_x q + \frac{1}{4}c_3\partial_x^2 q \\
b_0 &= -\frac{1}{2}c_3qr^2 + \frac{1}{2}c_2\partial_x r + \frac{1}{4}c_3\partial_x^2 r
\end{aligned}$$

Para encontrar c_0 é necessário integrar a última equação. Isso é feito sem problemas e o resultado é:

$$c_0 = -\frac{1}{2}c_2qr - \frac{1}{4}c_3\left(q\partial_x r - r\partial_x q\right)$$

Desta maneira, as equações de movimento (4.15) assumem a forma:

$$\begin{aligned}
q_{t_3} - c_2q^2r + \frac{3}{2}c_3qrq_x + \frac{1}{2}c_2q_{xx} - \frac{1}{4}c_3q_{xxx} = 0 \\
r_{t_3} + c_2qr^2 + \frac{3}{2}c_3qrr_x - \frac{1}{2}c_2r_{xx} - \frac{1}{4}c_3r_{xxx} = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Com as escolhas usuais, $c_2 = 0$ e $c_3 = 1$, as equações de movimento para $N = 3$ da hierarquia AKNS são:

$$\begin{aligned}
q_{t_3} - \frac{1}{4}q_{3x} + \frac{3}{2}qrq_x = 0 \\
r_{t_3} - \frac{1}{4}r_{3x} + \frac{3}{2}qrr_x = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Esse modelo, assim como os anteriores, foi obtido em [14] utilizando o operador de recursão.

4.2.4 $N = 4$

Antes de considerar a projeção negativa da hierarquia, vamos mais um passo adiante e considerar o caso $N = 4$, onde devemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
-2qc_4 + 2a_3 &= 0 & \partial_x c_3 + qb_3 - ra_3 &= 0 \\
2rc_4 - 2b_3 &= 0 & \partial_x b_3 + 2rc_3 - 2b_2 &= 0 \\
\partial_x c_4 &= 0 & \partial_x c_3 + qb_3 - ra_3 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x a_2 - 2qc_2 + 2a_1 &= 0 & \partial_x a_1 - 2qc_1 + 2a_0 &= 0 \\
\partial_x b_2 + 2rc_2 - 2b_1 &= 0 & \partial_x b_1 + 2rc_1 - 2b_0 &= 0 \\
\partial_x c_2 + qb_2 - ra_2 &= 0 & \partial_x c_1 + qb_1 - ra_1 &= 0 \\
& & \partial_x c_0 + qb_0 - ra_0 &= 0
\end{aligned}$$

Seguindo procedimento análogo aos outros casos estas equações podem ser resolvidas recursivamente. Os cálculos são diretos embora um pouco mais trabalhosos. Os termos podem ser arranjados de forma que os integrandos sejam diferenciais exatas, e o resultado disso é:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= c_3 q - \frac{1}{2} c_4 \partial_x q \\
b_2 &= c_3 r + \frac{1}{2} c_4 \partial_x r \\
c_2 &= -\frac{1}{2} c_4 q r \\
a_1 &= -\frac{1}{2} c_4 q^2 r - \frac{1}{2} c_3 \partial_x q + \frac{1}{4} c_4 \partial_x^2 q \\
b_1 &= -\frac{1}{2} c_4 q r^2 + \frac{1}{2} c_3 \partial_x r + \frac{1}{4} c_4 \partial_x^2 r \\
c_1 &= -\frac{1}{2} c_3 q r - \frac{1}{4} c_4 q \partial_x r + \frac{1}{4} c_4 r \partial_x q \\
a_0 &= -\frac{1}{2} c_3 q^2 r + \frac{3}{4} c_4 q r \partial_x q + \frac{1}{4} \partial_x^2 q - \frac{1}{8} c_4 \partial_x^3 q \\
b_0 &= -\frac{1}{2} c_3 q r^2 - \frac{3}{4} c_4 q r \partial_x r + \frac{1}{4} c_3 \partial_x^2 r + \frac{1}{8} c_4 \partial_x^3 r \\
c_0 &= \frac{1}{4} r \partial_x q - \frac{1}{4} q \partial_x r + \frac{3}{8} c_4 q^2 r^2 + \frac{3}{8} c_4 \partial_x r \partial_x q - \frac{1}{8} c_4 \partial_x^2 (rq)
\end{aligned}
$$

onde c_3 e c_4 são constantes. Assim, as equações de movimento (4.15) nos fornecem:

$$
\begin{aligned}
q_{t_4} + \frac{1}{2}(c_3 - 1) q^2 r_x + \left(\frac{1}{2} + c_3\right) q r q_x + \frac{3}{4} c_4 q^3 r^2 - \frac{1}{4} c_4 q (rq)_{2x} - \\
- \frac{3}{4} c_4 q r q_{2x} - \frac{3}{4} c_4 r (q_x)^2 - \frac{1}{4} c_3 q_{3x} + \frac{1}{8} c_4 q_{4x} = 0 \qquad (4.23) \\
r_{t_4} + \frac{1}{2}(c_3 - 1) r^2 q_x + \left(\frac{1}{2} + c_3\right) q r r_x - \frac{3}{4} c_4 q^2 r^3 + \frac{1}{4} c_4 r (rq)_{2x} + \\
+ \frac{3}{4} c_4 q r r_{2x} + \frac{3}{4} c_4 q (r_x)^2 - \frac{1}{4} c_3 r_{3x} - \frac{1}{8} c_4 r_{4x} = 0 \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Novamente escolhemos as constantes arbitrárias, $c_3 = 0$ e $c_4 = 1$, e obtemos as equações do modelo de quarta ordem da hierarquia AKNS:

$$
\begin{aligned}
q_{t_4} - \frac{1}{2} q^2 r_x + \frac{1}{2} q r q_x + \frac{3}{4} q^3 r^2 - \frac{1}{4} q (rq)_{2x} - \frac{3}{4} q r q_{2x} - \frac{3}{4} r q_x^2 + \frac{1}{8} q_{4x} = 0 \\
r_{t_4} - \frac{1}{2} r^2 q_x + \frac{1}{2} q r r_x - \frac{3}{4} q^2 r^3 + \frac{1}{4} r (rq)_{2x} + \frac{3}{4} q r r_{2x} + \frac{3}{4} q r_x^2 - \frac{1}{8} r_{4x} = 0 \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Fica claro que podemos considerar ordens mais altas e todas as equações, não relativísticas, da hierarquia AKNS positiva são equações diferenciais não lineares e acopladas nos campos $q(x, t_N)$ e $r(x, t_N)$.

4.3 Hierarquia negativa

Como sabemos, a equação de curvatura nula em termos de operadores de graus negativos possui a forma:

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_{-N}} + D_{-N}^{(-N)} + D_{-N}^{(-N+1)} + \ldots + D_{-N}^{(-1)}\right] = 0 \tag{4.26}$$

De acordo com (4.3) e (4.4) os operadores de grau $-N+j$ são dados por:

$$D_{-N}^{(-N+j)} = a_{-N+j}E_{\alpha}^{(-N+j)} + b_{-N+j}E_{-\alpha}^{(-N+j)} + c_{-N+j}H^{(-N+j)} \tag{4.27}$$

A equação de grau $-N$ em (4.26) é:

$$\begin{aligned} \partial_x D_{-N}^{(-N)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-N)}\right] &= 0 \\ \left(\partial_x a_{-N} - 2qc_{-N}\right) E_{\alpha}^{(-N)} + \left(\partial_x b_{-N} + 2rc_{-N}\right) E_{-\alpha}^{(-N)} &+ \\ + \left(\partial_x c_{-N} + qb_{-N} - ra_{-N}\right) H^{(-N)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

A de grau $-N+1$ é:

$$\begin{aligned} \partial_x D_{-N}^{(-N+1)} + \left[A_0, D_{-N}^{(-N+1)}\right] + \left[E, D_{-N}^{(-N)}\right] &= 0 \\ \left(\partial_x a_{-N+1} - 2qc_{-N+1} + 2a_{-N}\right) E_{\alpha}^{(-N+1)} &+ \\ + \left(\partial_x b_{-N+1} + 2rc_{-N+1} - 2b_{-N}\right) E_{-\alpha}^{(-N+1)} &+ \\ + \left(\partial_x c_{-N+1} + qb_{-N+1} - ra_{-N+1}\right) H^{(-N+1)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Continuamos desta maneira até a equação de grau -1. Para a equação de movimento, de grau zero, temos:

$$\begin{aligned} \left[E, D_{-N}^{(-1)}\right] - \partial_{t_{-N}} A_0 &= 0 \\ \left(2a_{-1} - \partial_{t_{-N}} q\right) E_{\alpha}^{(0)} - \left(2b_{-1} + \partial_{t-N} r\right) E_{-\alpha}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Então, as equações de movimento da parte negativa da hierarquia AKNS são obtidas resolvendo-se recursivamente o sistema de equações:

$$\begin{gathered} a_{-N+1}(x,t_{-N}) = b_{-N+1}(x,t_{-N}) = 0 \\ \partial a_{-N+j}(x,t_{-N}) - 2q(x,t_{-N})c_{-N+j}(x,t_{-N}) + 2a_{-N+1+j}(x,t_{-N}) = 0 \\ \partial b_{-N+j}(x,t_{-N}) + 2r(x,t_{-N})c_{-N+j}(x,t_{-N}) - 2b_{-N+1+j}(x,t_{-N}) = 0 \\ \partial c_{-N+j}(x,t_{-N}) + q(x,t_{-N})b_{-N+j}(x,t_{-N}) - r(x,t_{-N})a_{-N+j}(x,t_{-N}) = 0 \end{gathered} \tag{4.31}$$

onde $N = 1, 2, 3, \ldots$ e $j = 0, 1, \ldots, N-1$. As equações de movimento são dadas por:

$$\begin{gathered} \partial_{t_{-N}} q(x,t_{-N}) - 2a_{-1}(x,t_{-N}) = 0 \\ \partial_{t_{-N}} r(x,t_{-N}) + 2b_{-1}(x,t_{-N}) = 0 \end{gathered} \tag{4.32}$$

4.3.1 $N = -1$

Consideramos o modelo relativístico da hierarquia AKNS, correspondente a $N = 1$ nas equações (4.31):

$$\begin{aligned} \partial a_{-1} - 2qc_{-1} &= 0 \\ \partial b_{-1} + 2rc_{-1} &= 0 \\ \partial c_{-1} + qb_{-1} - ra_{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Ao contrário da hierarquia mKdV, encontrar a_{-1}, b_{-1} e c_{-1} que resolvam este sistema não é tão óbvio. Poderíamos integrar as duas primeiras equações obtendo a_{-1} e b_{-1} como função de r, q e c_{-1}, e substituindo estes resultados na terceira equação teríamos que resolver uma equação integral para c_{-1}. Depois de resolvida obteríamos todos os coeficientes como função de r e q. Ao invés disso, vamos contornar este problema por uma abordagem mais fácil. Vimos anteriormente que a equação de curvatura nula correspondente ao caso relativístico (2.23), possui solução na forma (2.24). Utilizando as variáveis x e t_{-1} temos:

$$A_0 = -\partial_x B B^{-1} \quad \text{e} \quad D_{-1}^{(-1)} = B\epsilon_- B^{-1} \tag{4.33}$$

onde $\epsilon_- = E^\dagger = H^{(-1)}$. O operador B é um elemento de grupo e possui grau zero, portanto é uma exponencial de geradores de $\hat{\mathcal{G}}^{(0)}$:

$$B = \exp\left(\chi E_{-\alpha}^{(0)}\right) \exp\left(\phi H^{(0)}\right) \exp\left(\psi E_\alpha^{(0)}\right) \tag{4.34}$$

onde χ, ϕ e ψ são os campos físicos do modelo. A idéia é escrever A_0 em (4.33) como função destes campos, e comparando com $A_0 = qE_\alpha^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}$ de (4.5), obtemos q e r como função de χ, ϕ e ψ.

Substituindo (4.34) em (4.33):

$$\begin{aligned} A_0 &= -\Big(e^{\chi E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\psi E_\alpha^{(0)}} \partial_x \psi E_\alpha^{(0)} + e^{\chi E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} \partial_x \phi H^{(0)} e^{\psi E_\alpha^{(0)}} + \\ &+ e^{\chi E_{-\alpha}^{(0)}} \partial_x \chi E_{-\alpha}^{(0)} e^{\phi H^{(0)}} e^{\psi E_\alpha^{(0)}} \Big) e^{-\psi E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\chi E_{-\alpha}^{(0)}} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Calculamos termo a termo de (4.35) usando a expansão

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots \tag{4.36}$$

e as relações fundamentais de comutação de $A_1^{(1)}$. Após fazer estes cálculos, encontramos:

$$\begin{aligned} A_0 &= -e^{2\phi} \partial_x \psi E_\alpha^{(0)} + \left(e^{2\phi}\chi^2 \partial_x \psi - 2\chi \partial_x \phi - \partial_x \chi\right) E_{-\alpha}^{(0)} + \\ &+ \left(e^{2\phi} \chi \partial_x \psi - \partial_x \phi\right) H^{(0)} \end{aligned} \tag{4.37}$$

Comparando com $A_0 = qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_x \phi &= e^{2\phi}\chi\partial_x\psi \\ q &= -e^{2\phi}\partial_x\psi \\ r &= e^{2\phi}\chi^2\partial_x\psi - 2\chi\partial_x\phi - \partial_x\chi \end{aligned} \tag{4.38}$$

Note que os três campos relativísticos não são independentes. Usualmente elimina-se ϕ em função dos outros dois. Isto é um resultado esperado pois na construção de curvatura nula só temos dois campos, q e r, e não três como em (4.34).

Fazemos o análogo com $D_{-1}^{(-1)}$ em (4.33):

$$D_{-1}^{(-1)} = \left(e^{\chi E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\psi E_{\alpha}^{(0)}}\right) H^{(-1)} \left(e^{-\psi E_{\alpha}^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\chi E_{-\alpha}^{(0)}}\right) \tag{4.39}$$

Usamos novamente (4.36) e as relações de comutação para obter:

$$D_{-1}^{(-1)} = -2\psi e^{2\phi} E_{\alpha}^{(-1)} + \left(2\chi + 2\psi\chi^2 e^{2\phi}\right) E_{-\alpha}^{(-1)} + \left(1 + 2\psi\chi e^{2\phi}\right) H^{(-1)} \tag{4.40}$$

Comparando (4.40) com $D_{-1}^{(-1)} = a_{-1}E_{\alpha}^{(-1)} + b_{-1}E_{-\alpha}^{(-1)} + c_{-1}H^{(-1)}$ obtemos os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -2\psi e^{2\phi} \\ b_{-1} &= 2\chi + 2\psi\chi^2 e^{2\phi} \\ c_{-1} &= 1 + 2\psi\chi e^{2\phi} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Com estes resultados, poderíamos obter as equações de movimento em termos dos campos ψ e χ, onde tentariamos eliminar o campo ϕ em função dos outros dois. Entretanto, as equações de movimento possuem uma forma mais simétrica e simplificada se introduzirmos novos campos, definidos por:

$$\tilde{\psi} = \psi e^{\phi} \quad \text{e} \quad \tilde{\chi} = \chi e^{\phi} \tag{4.42}$$

Escrevendo (4.38) e (4.41) em termos dos novos campos (4.42) obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_x \phi &= \frac{\tilde{\chi}\partial_x\tilde{\psi}}{\Delta} \\ q &= -\frac{e^{\phi}\partial_x\tilde{\psi}}{\Delta} \\ r &= -e^{-\phi}\partial_x\tilde{\chi} \\ a_{-1} &= -2\tilde{\psi}e^{\phi} \\ b_{-1} &= 2\tilde{\chi}e^{-\phi} + 2\tilde{\psi}\tilde{\chi}^2 e^{-\phi} \\ c_{-1} &= 1 + 2\tilde{\psi}\tilde{\chi} \end{aligned} \tag{4.43}$$

onde

$$\Delta = 1 + \tilde{\chi}\tilde{\psi} \tag{4.44}$$

Com os resultados (4.43), substituimos estes dados em (4.32) e obtemos as equações:

$$\begin{aligned}
\partial_{t_{-1}}\left(\frac{\partial_x \tilde{\psi} e^{\phi}}{\Delta}\right) - 4\tilde{\psi}e^{\phi} &= 0 \\
\partial_{t_{-1}}\left(\partial_x \tilde{\chi} e^{-\phi}\right) - 4\tilde{\chi}e^{-\phi} - 4\tilde{\psi}\tilde{\chi}^2 e^{-\phi} &= 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Esta equação ainda não está na sua forma final. É preciso eliminar o campo ϕ. Note que para fazer isso, é necessário abrir a primeira derivada nas equações (4.45) e devemos ser capazes de escrever $\partial_{t_{-1}}\phi$ como função de $\tilde{\chi}$ e $\tilde{\psi}$.

Para fazer isso lembramos alguns resultados. Substituindo os potenciais (4.33) na equação de curvatura nula, obtemos a equação (2.25). Conjugando esta equação podemos obter a equação (2.26) que é equivalente. Veja que poderíamos ter escolhido potenciais de acordo com (2.26) e obter diretamente esta equação. O ponto que queremos argumentar é que $B^{-1}\partial_{t_{-1}}B$ contém a mesma informação que A_0 em (4.33) e portanto só pode ter componentes em $\mathcal{M}(E)$. Substituindo a forma explícita de B e impondo que a componente de $H^{(0)}$, que pertence a $\mathcal{K}(E)$, seja nula, obtemos $\partial_{t_{-1}}\phi$ como função dos outros dois campos. Explicitamente:

$$B^{-1}\partial_{t_{-1}}B = e^{-\psi E_{\alpha}^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\chi E_{-\alpha}^{(0)}} \partial_{t_{-1}}\left(e^{\chi E_{\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\psi E_{\alpha}^{(0)}}\right)$$

utilizando a expansão (4.36) e as relações de comutação podemos obter:

$$\begin{aligned}
B^{-1}\partial_{t_{-1}}B &= \left(-2\psi^2 \partial_{t_{-1}}\chi e^{2\phi} + 2\psi\partial_{t_{-1}}\phi + \partial_{t_{-1}}\psi\right) E_{\alpha}^{(0)} + \\
&\quad + \partial_{t_{-1}}\chi e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(0)} + \left(\partial_{t_{-1}}\phi - \psi\partial_{t_{-1}}\chi e^{2\phi}\right) H^{(0)}
\end{aligned}$$

e portanto, o coeficiente do último termo deve se anular. Já escrevendo este resultado em termos dos campos (4.42):

$$\partial_{t_{-1}}\phi = \frac{\tilde{\psi}\partial_{t_{-1}}\tilde{\chi}}{\Delta} \tag{4.46}$$

Então, a primeira equação de (4.45) fica:

$$\partial_{t_{-1}}\left(\frac{\partial_x \tilde{\psi}}{\Delta}\right) + \frac{\tilde{\psi}\partial_x \tilde{\psi}\partial_{t_{-1}}\tilde{\chi}}{\Delta^2} - 4\tilde{\psi} = 0 \tag{4.47}$$

e a segunda equação:

$$\partial_{t_{-1}}\partial_x \tilde{\chi} - \frac{\tilde{\psi}}{\partial_{t_{-1}}\tilde{\chi}\partial_x \tilde{\chi}} - 4\tilde{\chi} - 4\tilde{\psi}\tilde{\chi}^2 = 0 \tag{4.48}$$

Um truque algébrico permite escrevê-la numa forma melhor. Note que

$$\partial_{t_{-1}}\left(\frac{\partial_x\tilde{\chi}}{\Delta}\right)=\frac{1}{\Delta}\partial_{t_{-1}}\partial_x\tilde{\chi}-\frac{1}{\Delta^2}\partial_x\tilde{\chi}\left(\tilde{\psi}\partial_{t_{-1}}\tilde{\chi}+\partial_{t_{-1}}\tilde{\psi}\tilde{\chi}\right) \tag{4.49}$$

Dividindo (4.48) por Δ e usando (4.49) bem como a definição de Δ em (4.44) encontramos:

$$\partial_{t_{-1}}\left(\frac{\partial_x\tilde{\chi}}{\Delta}\right)+\frac{\tilde{\chi}\partial_x\tilde{\chi}\partial_{t_{-1}}\tilde{\psi}}{\Delta^2}-4\tilde{\chi}=0 \tag{4.50}$$

As equações (4.47) e (4.50) são as equações de movimento do modelo na sua forma final [3]. Observe que elas são simétricas pela troca $\tilde{\psi}\leftrightarrow\tilde{\chi}$. Essas são as equações de movimento relativísticas da hierarquia AKNS, e são conhecidas como o modelo de Lund-Regge.

Capítulo 5

Operadores de recursão

Considerando ambas as hierarquias anteriores, mKdV e AKNS, mostramos como as equações de uma mesma hierarquia estão relacionadas através do operador de recursão. O operador de recursão conecta essas equações e sua existência é devido a condições de simetria das equações.

5.1 Operador de recursão da hierarquia mKdV

No capítulo sobre a hierarquia mKdV consideramos a construção de diversas equações diferenciais, partindo do sistema (3.14). É intuitivo que a equação correspondente ao tempo t_{N+2} possa ser relacionada com a equação para o tempo t_N, pois a solução do sistema (3.14) em ambos os casos é muito semelhante.

O mesmo é verdadeiro se considerarmos o sistema de equações (3.29), correspondente à parte negativa da hierarquia. A equação para o tempo t_{-N-2} deve estar relacionada com a do tempo t_{-N}. Vamos considerar estas relações explicitamente e construir essa conexão, que se manifesta através do chamado operador de recursão.

5.1.1 Parte positiva

Para tornar clara a argumentação acima, vamos escrever as equações correspondentes ao tempo t_N e t_{N+2} dadas por (3.14):

$$\begin{array}{rl}
\boxed{N} & \boxed{N+2} \\
a_N \equiv 1 & a_{N+2} \equiv 1 \\
c_{N-1} = v & c_{N+1} = v \\
\partial_x c_{N-1} - 2b_{N-2} = 0 & \partial_x c_{N+1} - 2b_N = 0 \\
\partial_x a_{N-2} + 2vb_{N-2} = 0 & \partial_x a_N + 2vb_N = 0 \\
\partial_x b_{N-2} + 2va_{N-2} - 2c_{N-3} = 0 & \partial_x b_N + 2va_N - 2c_{N-1} = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
\boxed{N} & \boxed{N+2} \\
\vdots & \vdots \\
\partial_x c_2 - 2b_1 = 0 & \partial_x c_4 - 2b_3 = 0 \\
\partial_x a_1 + 2vb_1 = 0 & \partial_x a_3 + 2vb_3 = 0 \\
\partial_x b_1 + 2va_1 - 2c_0 = 0 & \partial_x b_3 + 2va_3 - 2c_2 = 0 \\
& \partial_x c_2 - 2b_1 = 0 \\
& \partial_x a_1 + 2vb_1 = 0 \\
& \partial_x b_1 + 2va_1 - 2c_0 = 0
\end{array} \tag{5.1}
$$

$$
\partial_{t_N} v = \partial_x c_0 \qquad \partial_{t_{N+2}} v = \partial_x c_0 \tag{5.2}
$$

As equações alinhadas possuem a mesma forma e solução. No caso $N+2$ existem três equações adicionais que podem ser escritas com base nos dados das equações de N, e isso nos permitirá relacionar a equação de movimento de $N+2$ com a equação de movimento de N.

As equações são exatamente as mesmas desde o começo até a equação (5.1), onde podemos fazer a seguinte identificação:

$$
c_2\Big|_{N+2} = c_0\Big|_N \tag{5.3}
$$

Como $\partial_{t_N} v = \partial_x c_0$, da equação logo abaixo de (5.1) e da identificação (5.3) temos:

$$
b_1\Big|_{N+2} = \frac{1}{2}\partial_x c_2\Big|_{N+2} = \frac{1}{2}\partial_{t_N} v \tag{5.4}
$$

Das duas equações seguintes concluimos que:

$$
\begin{aligned}
a_1\Big|_{N+2} &= -\int v\partial_{t_N} dx \\
c_0\Big|_{N+2} &= \frac{1}{4}\partial_x\partial_{t_N} v - v\int v\partial_{t_N} v dx
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

Portanto, a equação de movimento (5.2) para $N+2$ pode ser escrita como função de $\partial_{t_N} v$:

$$
\begin{aligned}
\partial_{t_{N+2}} v &= \partial_x c_0\Big|_{N+2} \\
&= \frac{1}{4}\partial_x^2\left(\partial_{t_N} v\right) - v^2\left(\partial_{t_N} v\right) - v_x\int v\left(\partial_{t_N} v\right) dx
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Assim, acabamos de mostrar que:

$$
\frac{\partial v}{\partial t_{N+2}} = R\frac{\partial v}{\partial t_N} \tag{5.7}
$$

onde

$$R = \frac{1}{4}D^2 - DvD^{-1}v = \frac{1}{4}D^2 - v^2 - v_x D^{-1}v \tag{5.8}$$

é o chamado operador de recursão [14]. Introduzimos a notação $\partial_x = D$ e D^{-1} é seu operador inverso.

Também podemos escrever essas relações em uma forma interessante para o campo $v = \phi_x$. Considere:

$$D\frac{\partial \phi}{\partial t_{N+2}} = \left(\frac{1}{4}D^2 - D\frac{\partial \phi}{\partial x}D^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) D\frac{\partial \phi}{\partial t_N} = D\left(\frac{1}{4}D^2 - \frac{\partial \phi}{\partial x}D^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}D\right)\frac{\partial \phi}{\partial t_N}$$

ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_{N+2}} = \left(\frac{1}{4}D^2 - \frac{\partial \phi}{\partial x}D^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}D\right)\frac{\partial \phi}{\partial t_N} \tag{5.9}$$

E ainda, podemos obter todas as equações partindo da primeira equação da hierarquia positiva. Como só ocorrem tempos de índice ímpar, temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_{2m+1}} = \tilde{R}^m \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \tag{5.10}$$

onde

$$\tilde{R} = \frac{1}{4}D^2 - \frac{\partial \phi}{\partial x}D^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}D \tag{5.11}$$

A equação (5.10) com o operador de recursão (5.11) é a mesma obtida por Tracy/Widom em [23], utilizando um outro método.

5.1.2 Parte negativa

Apesar de não desejarmos ser repetitivos, vamos considerar explicitamente as relações de recorrência para a parte negativa da hierarquia mKdV, pois o operador de recursão obtido é na verdade o operador inverso de (5.8), ou (5.11), e geralmente, tentar inverter diretamente operadores deste tipo não é uma tarefa das mais fáceis.

Do sistema de equações (3.29) temos:

$$\begin{array}{rl}
\boxed{-N} & \boxed{-N-2} \\
\partial_x a_{-N} + 2vb_{-N} = 0 & \partial_x a_{-N-2} + 2vb_{-N-2} = 0 \\
\partial_x b_{-N} + 2va_{-N} = 0 & \partial_x b_{-N-2} + 2va_{-N-2} - 2c_{N-1} = 0 \\
\partial_x c_{-N+1} - 2b_{-N} = 0 & \partial_x c_{-N-1} - 2b_{-N-2} = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
\boxed{-N} & \boxed{-N-2} \\
\vdots & \vdots \\
\partial_x c_{-2} - 2b_{-3} = 0 & \partial_x c_{-4} - 2b_{-5} = 0 \\
\partial_x a_{-1} + 2v b_{-1} = 0 & \partial_x a_{-3} + 2v b_{-3} = 0 \\
\partial_x b_{-1} + 2v a_{-1} - 2c_{-2} = 0 & \partial_x b_{-3} + 2v a_{-3} - 2c_{-4} = 0 \\
 & \partial_x c_{-2} - 2b_{-3} = 0 \\
 & \partial_x a_{-1} + 2v b_{-1} = 0 \\
 & \partial_x b_{-1} + 2v a_{-1} - 2c_{-2} = 0
\end{array}
\tag{5.12}
$$

$$
\partial_{t_{-N}} v = -2b_{-1} \qquad \partial_{t_{-N-2}} v = -2b_{-1} \tag{5.13}
$$

Então, das equações (5.12) e da equação de movimento para t_{-N}, (5.13), podemos fazer a identificação:

$$
b_{-3}\Big|_{-N-2} = b_{-1}\Big|_{-N} = -\frac{1}{2}\partial_{t_{-N}} v \tag{5.14}
$$

Portanto:

$$
c_{-2} = -\int \partial_{t_{-N}} v dx \tag{5.15}
$$

Os outros coeficientes são obtidos de:

$$
\begin{aligned}
\partial_x (a_{-1} + b_{-1}) + 2v (a_{-1} + b_{-1}) - 2c_{-2} = 0 \\
\partial_x (a_{-1} - b_{-1}) - 2v (a_{-1} + b_{-1}) + 2c_{-2} = 0
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Integrando as equações (5.16) e utilizando a relação (5.15), após substituir os resultados na equação de movimento (5.13) para t_{-N-2}, obtemos:

$$
\frac{\partial v}{\partial t_{-N-2}} = \left(2e^{2D^{-1}v} D^{-1} e^{-2D^{-1}v} D^{-1} + 2e^{-2D^{-1}v} D^{-1} e^{2D^{-1}v} D^{-1}\right) \frac{\partial v}{\partial t_{-N}} \tag{5.17}
$$

ou seja:

$$
\frac{\partial v}{\partial t_{-N-2}} = S \frac{\partial v}{\partial t_{-N}} \tag{5.18}
$$

onde

$$
S = 2e^{2D^{-1}v} D^{-1} e^{-2D^{-1}v} D^{-1} + 2e^{-2D^{-1}v} D^{-1} e^{2D^{-1}v} D^{-1} \tag{5.19}
$$

Pode-se mostrar que o operador S é o inverso de R definido em (5.8).

Introduzindo $v = \phi_x$ podemos transformar a relação (5.17) em:

$$
\begin{aligned}
D\frac{\partial \phi}{\partial t_{-N-2}} &= \left(2e^{2\phi} D^{-1} e^{-2\phi} D^{-1} + 2e^{-2\phi} D^{-1} e^{2\phi} D^{-1}\right) D \frac{\partial \phi}{\partial t_{-N}} \\
\frac{\partial \phi}{\partial t_{-N-2}} &= \left(2D^{-1} e^{2\phi} D^{-1} e^{-2\phi} + 2D^{-1} e^{-2\phi} D^{-1} e^{2\phi}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t_{-N}}
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

ou ainda:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t_{-2m-1}} = \tilde{S}^m \frac{\partial\phi}{\partial t_1} \tag{5.21}$$

onde:

$$\tilde{S} = 2D^{-1}e^{2\phi}D^{-1}e^{-2\phi} + 2D^{-1}e^{-2\phi}D^{-1}e^{2\phi} \tag{5.22}$$

A equação (5.21) com o operador de recursão (5.22) também foi obtida em [23]. Além disso [23] prova que $\tilde{S} = \tilde{R}^{-1}$ como haviamos mencionado. Note que a equação (5.21) só vale para os tempos ímpares da parte negativa da hierarquia mKdV.

Utilizando o sistema (3.50) obtemos o mesmo operador de recursão obtido em (5.21) para os N's negativos pares, porém, estas equações não estão conectadas com os N ímpares, de modo que o ponto de partida é a equação $N = -2$ obtida em (3.58).

5.1.3 Equação de sinh-Gordon

Como exemplo vamos obter a equação de sinh-Gordon, já obtida em (3.33) pelo método de curvatura nula, mas desta vez utilizando o operador de recursão (5.22).

Da equação (5.21), e de $\phi_{t_1} = \phi_x$, temos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t_{-1}\partial x} = \left(2e^{2\phi}D^{-1}e^{-2\phi} + 2e^{-2\phi}D^{-1}e^{2\phi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{5.23}$$

Calculando um dos termos, ou outro é análogo:

$$\begin{aligned}
2e^{2\phi}D^{-1}e^{-2\phi}D\phi &= 2e^{2\phi}\int_{-\infty}^{x} e^{-2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x'}dx' \\
&= 2e^{2\phi}\int_0^{\phi} e^{-2u}du \\
&= -e^{2\phi}\left(e^{-2u}\right)\Big|_0^{\phi} = e^{2\phi} - 1
\end{aligned} \tag{5.24}$$

onde supomos que $\phi(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$. Então (5.23) fica:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t_{-1}\partial x} = e^{2\phi} - 1 + 1 - e^{-2\phi} = 2\sinh 2\phi \tag{5.25}$$

que é a equação de sinh-Gordon:

Todas as equações da hierarquia mKdV, tanto para a parte positiva da hierarquia quanto para a parte negativa, podem ser obtidas usando os operadores de recursão. Porém, para as equações de tempo negativo par, a equação de partida deve ser a de tempo t_{-2}. Todas as equações apresentadas nesta dissertação foram obtidas pelo método de curvatura nula e também através dos operadores de recursão. Os resultados são idênticos.

5.2 Operador de recursão da hierarquia AKNS

Da mesma forma que na seção anterior, construimos o operador de recursão para a parte positiva da hierarquia AKNS.

5.2.1 Parte positiva

Utilizando o sistema de equações (4.14) temos:

$$
\begin{array}{rl}
\boxed{N} & \boxed{N+1} \\
-2qc_N + 2a_{N-1} = 0 & -2qc_{N+1} + 2a_N = 0 \\
2rc_N - 2b_{N-1} = 0 & 2rc_{N+1} - 2b_N = 0 \\
\partial_x c_N = 0 & \partial_x c_{N+1} = 0 \\
\vdots & \vdots \\
\partial_x a_1 - 2qc_1 + 2a_0 = 0 & \partial_x a_2 - 2qc_2 + 2a_1 = 0 \\
\partial_x b_1 + 2rc_1 - 2b_0 = 0 & \partial_x b_2 + 2rc_2 - 2b_1 = 0 \\
\partial_x c_1 + qb_1 - ra_1 = 0 & \partial_x c_2 + qb_2 - ra_2 = 0 \\
\partial_x c_0 + qb_0 - ra_0 = 0 & \partial_x c_1 + qb_1 - ra_1 = 0 \\
 & \partial_x a_1 - 2qc_1 + 2a_0 = 0 \\
 & \partial_x b_1 + 2rc_1 - 2b_0 = 0 \\
 & \partial_x c_0 + qb_0 - ra_0 = 0 \\
\partial_{t_N} q - \partial_x a_0 + 2qc_0 = 0 & \partial_{t_{N+1}} q - \partial_x a_0 + 2qc_0 = 0 \\
\partial_{t_N} r - \partial_x b_0 - 2rc_0 = 0 & \partial_{t_{N+1}} r - \partial_x b_0 - 2rc_0 = 0
\end{array}
\tag{5.26}
$$

Então podemos fazer as seguintes identificações:

$$
\begin{aligned}
a_1\Big|_{N+1} &= a_0\Big|_N \\
b_1\Big|_{N+1} &= b_0\Big|_N \\
c_1\Big|_{N+1} &= c_0\Big|_N
\end{aligned}
$$

E portanto:

$$
\begin{aligned}
a_0\Big|_{N+1} &= -\frac{1}{2}\partial_{t_N} q \\
b_0\Big|_{N+1} &= \frac{1}{2}\partial_{t_N} r \\
c_0\Big|_{N+1} &= -\frac{1}{2}\int (q\partial_{t_N} r + r\partial_{t_N} q)\, dx
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

Substituindo estes resultados nas equações de movimento do lado $N+1$ em (5.26) obtemos o operador de recursão procurado:

$$\frac{\partial}{\partial t_{N+1}}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D + qD^{-1}r & qD^{-1}q \\ -rD^{-1}q & \frac{1}{2}D - rD^{-1}q \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_N}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Ou ainda, podemos obter todas as equações da parte positiva da hierarquia AKNS a partir da equação de t_1:

$$\frac{\partial}{\partial t_{N+1}}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = R^N \frac{\partial}{\partial t_1}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

onde [14, 24]:

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D + qD^{-1}r & qD^{-1}q \\ -rD^{-1}q & \frac{1}{2}D - rD^{-1}q \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

5.2.2 Schrödinger não linear

Como um teste de consistência, vamos considerar a equação para t_2, obtida de (5.29). Fazendo uso de (4.17) temos:

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D + qD^{-1}r & qD^{-1}q \\ -rD^{-1}q & \frac{1}{2}D - rD^{-1}q \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

Resolvendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q_{xx} + qD^{-1}\left(rq_x + qr_x\right) \\ -rD^{-1}\left(rq_x + qr_x\right) + \frac{1}{2}r_{xx} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q_{xx} + q^2 r \\ -r^2 q + \frac{1}{2}r_{xx} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.32}$$

que é a equação NLS obtida em (4.20).

Pode-se obter equações de ordem tão alta quanto se queira aplicando o operador de recursão.

A existência destes operadores de recursão deve-se ao alto grau de simetria presente nas equações de hierarquias integráveis.

Capítulo 6

Soluções

Já estudamos a construção de hierarquias integráveis partindo da equação de curvatura nula com uma álgebra de Kac-Moody. Agora desenvolveremos um método para obter soluções destas hierarquias, utilizando a mesma estrutura algébrica. Obteremos uma órbita de soluções a partir de uma solução trivial de vácuo. As soluções multi-solitônicas corresponderão a pontos especiais desta órbita.

6.1 Método de dressing

Vamos utilizar o método desenvolvido em [17], e suas respectivas referências, que consiste numa generalização de trabalhos anteriores*. Este método utiliza a estrutura de uma álgebra de Kac-Moody graduada, e nos permite obter soluções de todas as equações de uma hierarquia integrável, partindo de uma solução (trivial) conhecida. O método é suficientemente geral e sistemático, não envolvendo certos ansatz's como no método de Hirota [18, 19], por exemplo. As soluções multi-solitônicas correspondem a casos especiais destas soluções gerais.

Uma consequência direta da equação de curvatura nula

$$[\partial_N + A_N, \partial_M + A_M] = 0 \tag{6.1}$$

é a sua integrabilidade. Essa equação possui solução na forma puro gauge:

$$A_N = -\partial_N \Psi \Psi^{-1} \tag{6.2}$$

o que pode ser facilmente verificado. Aqui Ψ é um elemento do grupo de Kac-Moody $\hat{G}$, associado à álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$.

Supomos que os potenciais A_N são decompostos em graus da seguinte forma:

$$A_N = \sum_{i=N_-}^{N_+} A_N^{(i)}, \qquad A_N^{(i)} \in \hat{\mathcal{G}}^{(i)} \tag{6.3}$$

*Esta abordagem foi originalmente proposta em [15].

Nesta expressão, N_- e N_+ denotam números inteiros não positivos e não negativos, respectivamente.

Vamos exigir que exista uma solução denominada vácuo na forma:

$$A_N^{(\mathrm{vac})} = -\sum_{i=N_-}^{N_+} c_N^i b_i - \rho_N(t)\hat{c} \equiv -\varepsilon_N - \rho_N(t)\hat{c} \tag{6.4}$$

onde b_i são os geradores de uma subálgebra de osciladores de $\hat{\mathcal{G}}$:

$$[b_k, b_l] = k\delta_{k+l,0}\hat{c}, \qquad b_k \in \hat{\mathcal{G}}^{(k)} \tag{6.5}$$

O operador $\hat{c}$ é o elemento central de $\hat{\mathcal{G}}$, $c_N^i \in \mathbb{C}$ e $\rho_N(t)$ é uma função dos tempos t_N da hierarquia. Substituindo (6.4) em (6.1) determinamos que as funções $\rho_N(t)$ devem satisfazer:

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t_N} - \frac{\partial \rho_N}{\partial t_M} - \sum_{i=N_-}^{N_+} i c_N^i c_M^{-i} = 0 \tag{6.6}$$

Da equação (6.2) concluímos que $\Psi^{(\mathrm{vac})}$ deve ter a forma:

$$\Psi^{(\mathrm{vac})} = \exp\left(\sum_N \varepsilon_N t_N + \gamma(t)\hat{c}\right) \tag{6.7}$$

A função $\gamma(t)$ é determinada substituindo (6.7) em (6.2):

$$\begin{aligned} A_N^{(\mathrm{vac})} &= -e^{\sum \varepsilon_M t_M} \varepsilon_N e^{-\sum \varepsilon_M t_M} - \partial_{t_N}\gamma(t)\hat{c} \\ &= -\varepsilon_N - \sum_{M,i} i c_M^i c_N^{-i} t_M \hat{c} - \partial_{t_N}\gamma(t)\hat{c} \end{aligned} \tag{6.8}$$

A relação (6.8) deve ser igual (6.4), portanto a função $\gamma(t)$ é obtida como solução da equação:

$$\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t_N} + \sum_{M,i} i c_M^i c_N^{-i} t_M = \rho_N(t) \tag{6.9}$$

Mostramos que a equação de curvatura nula (6.1) possui solução de vácuo na forma (6.4) para os potênciais, e que pode ser obtida de (6.7) através de (6.2).

Agora que já sabemos como obter soluções de vácuo, vamos introduzir o método de dressing. Dada uma solução qualquer A_N de (6.1), as transformações de dressing nos permite obter outras soluções a partir desta. Para isso escolhemos um elemento constante h do grupo $\hat{G}$, e supomos que ele possua uma decomposição de Gauss: $h = h_< \ h_0 \ h_>$, onde $h_< = e^{\hat{\mathcal{G}}_<}$, $h_0 = e^{\hat{\mathcal{G}}_0}$ e $h_> = e^{\hat{\mathcal{G}}_>}$[†]. Supomos também que o seguinte elemento possui decomposição de Gauss:

$$\Psi h \Psi^{-1} = (\Psi h \Psi^{-1})_<(\Psi h \Psi^{-1})_0(\Psi h \Psi^{-1})_> \tag{6.10}$$

[†]Os símbolos $\hat{\mathcal{G}}_>$, $\hat{\mathcal{G}}_<$ e $\hat{\mathcal{G}}_0$ indicam geradores de graus positivo, negativo e zero.

Definimos o elemento de grupo:

$$\Psi^h = \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_<^{-1} \Psi \tag{6.11}$$

que devido a (6.10) também pode ser escrito como:

$$\Psi^h = \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_0 \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_> \Psi h^{-1} \tag{6.12}$$

Agora mostramos que a definição (6.11), ou equivalentemente (6.12), implica numa solução da equação de curvatura nula (6.1), que possui a forma exigida em (6.3). De (6.11) temos:

$$\begin{aligned} A_N^h &= -\,\partial_N \Psi^h \left(\Psi^h\right)^{-1} \\ &= -(\Psi h \Psi^{-1})_<^{-1} \partial_N \Psi \Psi^{-1} \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_<^{-1} - \partial_N \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_<^{-1} \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_< \\ &= -(\Psi h \Psi^{-1})_<^{-1} \partial_N \Psi \Psi^{-1} \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_<^{-1} + \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_<^{-1} \partial_N \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_< \end{aligned} \tag{6.13}$$

e se considerarmos (6.12):

$$\begin{aligned} A_N^h &= -\partial_N \Psi^h \left(\Psi^h\right)^{-1} \\ &= -\,\partial_N \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_0 \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_0^{-1} - \\ &\quad - \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_0 \partial_N \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_> \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_>^{-1} \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_0^{-1} - \\ &\quad - \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_0 \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_> \partial_N \Psi \Psi^{-1} \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_>^{-1} \left(\Psi h \Psi^{-1}\right)_0^{-1} \end{aligned} \tag{6.14}$$

A identidade (6.13) implica que $A_N^h \in \bigoplus_{i \leqslant N_+} \hat{\mathcal{G}}^{(i)}$, e a identidade (6.14) implica que $A_N^h \in \bigoplus_{i \geqslant N_-} \hat{\mathcal{G}}^{(i)}$, portanto:

$$A_N^h = -\partial_N \Psi^h \left(\Psi^h\right)^{-1} \;\in\; \bigoplus_{i=N_-}^{i=N_+} \hat{\mathcal{G}}^{(i)} \tag{6.15}$$

que é a forma exigida em (6.3). Isso mostra que A_N e A_N^h possuem a mesma estrutura, e pelo fato de A_N^h ser um puro gauge, satisfaz a equação de curvatura nula.

Segue da lei de composição do grupo $\hat{G}$ que $D_h : \Psi \mapsto \Psi^h$ possui a lei de composição $D_{gh} = D_g \circ D_h$, e portanto forma um grupo de transformações, que chamamos de transformações de dressing.

As transformações de dressing nos levam de uma solução conhecida a uma órbita de soluções, dependendo das diferentes escolhas de h. Vamos obter soluções não triviais a partir do vácuo, e por simplicidade de notação definimos os seguintes operadores:

$$
\begin{aligned}
\Theta_- &= \left(\Psi^{(\text{vac})} h \Psi^{(\text{vac})^{-1}}\right)^{-1}_{<} \\
B &= \left(\Psi^{(\text{vac})} h \Psi^{(\text{vac})^{-1}}\right)_{0} \\
\Upsilon &= \left(\Psi^{(\text{vac})} h \Psi^{(\text{vac})^{-1}}\right)_{>} \\
\Theta_+ &= B\Upsilon
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Com estas definições Θ_- e Θ_+ estão relacionados por:

$$\Theta_-^{-1}\Theta_+ = \Psi^{(\text{vac})} h \Psi^{(\text{vac})^{-1}} \tag{6.17}$$

e o elemento de grupo Ψ^h se escreve:

$$\Psi^h = \Theta_- \Psi^{(\text{vac})} = \Theta_+ \Psi^{(\text{vac})} h^{-1} \tag{6.18}$$

Desta forma, a equação (6.2) nos mostra que A_N^h está relacionado com $A_N^{(\text{vac})}$ da seguinte maneira:

$$A_N^h = \Theta_\pm A_N^{(\text{vac})} \Theta_\pm - \partial_N \Theta_\pm \Theta_\pm^{-1} \tag{6.19}$$

Concluimos que existem duas transformações de dressing, Θ_- e Θ_+, relacionadas por (6.17), e a transformação (6.19) corresponde a uma mudança de variáveis entre as componentes do potencial $A_N^{(\text{vac})}$ e as componentes dos elementos de grupo Θ_- e Θ_+.

As soluções explícitas são construidas fazendo uso da relação (6.17) e da solução de vácuo (6.7). Projetando entre estados quaisquer, temos o seguinte elemento de matriz:

$$< \mu|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\mu' > = < \mu| e^{\sum_N \varepsilon_N t_N} h e^{-\sum_N \varepsilon_N t_N} |\mu' > \tag{6.20}$$

Esta relação é independente de qualquer representação. Note que o lado esquerdo de (6.20) contém somente os campos físicos, que estão contidos nas exponenciais de Θ_- e Θ_+, como componentes dos geradores de $\hat{\mathcal{G}}^{(i)}$. Já o lado direito de (6.20) é função somente do espaço-tempo, ou seja, a relação (6.20) é a solução procurada. Sua forma explícita, entretanto, depende de uma particular representação. O conjunto de vetores $|\mu >$ e $|\mu' >$ são escolhidos apropriadamente, de forma que os elementos desejados de Θ_- e Θ_+ possam ser escritos como elementos de matriz, que é um funcional de h. Desta maneira, escolhendo o elemento de grupo h, obtemos as soluções explícitas.

6.1.1 Sólitons

Conjecturamos que a importante classe de soluções do tipo sóliton é obtida de (6.20) quando elemento de grupo h possui a forma

$$h = e^{V_1(\xi_1)} e^{V_2(\xi_2)} \dots e^{V_n(\xi_n)} \tag{6.21}$$

onde $V_i(\xi_i)$ é um operadore de vértice e ξ_i é um parâmetro. Os operadores de vértice são definidos pela equação de autovalor em relação ao comutador:

$$[\varepsilon_N, V_i(\xi_i)] = w_N^{(i)}(\xi_i)\, V_i(\xi_i) \tag{6.22}$$

Assim, o termo do lado direito de (6.20), que aparece entre os vetores, assume a forma[‡]:

$$\begin{aligned} e^{\sum_N \varepsilon_N t_N} h e^{-\sum_N \varepsilon_N t_N} &= e^{\sum_N \varepsilon_N t_N} e^{V_1} \dots e^{V_n} e^{-\sum_N \varepsilon_N t_N} \\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{\sum_N \varepsilon_N t_N} e^{V_k} e^{-\sum_N \varepsilon_N t_N} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \exp\left(e^{\sum_N \varepsilon_N t_N} V_k e^{-\sum_N \varepsilon_N t_N}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \exp\left(e^{\sum_N w_N^{(k)} t_N} V_k\right) \end{aligned} \tag{6.23}$$

Portanto, a forma geral da solução solitônica, independente de qualquer representação é:

$$< \mu|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\mu' > = < \mu| \prod_{k=1}^{n} \exp\left(e^{\sum_N w_N^{(k)}(\xi_k) t_N} V_k(\xi_k)\right) |\mu' > \tag{6.24}$$

Geralmente, as soluções multi-solitônicas são obtidas numa representação onde os operadores de vértice são nilpotentes, i.e, $(V_k)^n$ é não nulo somente quando $n \leqslant M$ para algum $M \in \mathbb{Z}_+$. Assim, a série da exponencial em (6.24) é truncada e a expressão é simplificada.

6.1.2 Relação entre soluções da mesma hierarquia

Vamos supor que os autovalores em (6.22) sejam alguma potência de ξ_i, por exemplo:

$$[\varepsilon_N, V_i(\xi_i)] = a^{(i)} \xi_i^N V_i(\xi_i) \tag{6.25}$$

[‡]Da segunda para a terceira igualdade usamos: $Be^A B^{-1} = B\left(1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots\right) B^{-1} = 1 + BAB^{-1} + \frac{1}{2!}\left(BAB^{-1}\right)^2 + \dots = e^{BAB^{-1}}$, e da terceira para quarta: $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots$ junto com (6.22).

onde $a^{(i)}$ é um número qualquer. Veremos explicitamente que este é o caso para todos os modelos considerados.

Nas hierarquias que estamos considerando t_1 corresponde à componente espacial, denotada por x nos capítulos anteriores, e t_N representa o tempo de uma dada equação da hierarquia. A equação (6.24) nos fornece a solução para esta equação de tempo t_N, e se (6.25) for válida, possui a forma:

$$< \mu|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\mu' >=< \mu|\prod_{k=1}^{n}\exp\left(e^{a^{(k)}\xi_k t_1+a^{(k)}\xi_k^N t_N}V_k\left(\xi_k\right)\right)|\mu' > \tag{6.26}$$

Agora, considere a equação de curvatura nula para a parte positiva da hierarquia:

$$\left[\partial_{t_1}+E+A_0,\partial_{t_N}+D_N^{(N)}+\ldots+D_N^{(0)}\right]=0 \tag{6.27}$$

Como vimos em (2.19), $D_N^{(N)}$ é um elemento constante de grau N e pertence a $\mathcal{K}(E)$. Todos os outros operadores possuem dependência nos campos de A_0. A solução de vácuo correponde a tomar o limite $A_0 \to 0$, de forma que a equação de curvatura nula assume a forma:

$$\left[\partial_{t_1}+E,\partial_{t_N}+D_N^{(N)}\right]=0 \tag{6.28}$$

Se compararmos (6.28) com (6.1) e a solução de vácuo (6.4), concluimos que:

$$\epsilon_1=-E, \quad \epsilon_N=-D_N^{(N)}, \quad \rho_1(t)=0, \quad \rho_N(t)=0 \tag{6.29}$$

Os autovalores que acompanham a variável espacial t_1 na solução (6.26), são provenientes da equação (6.25) para ϵ_1. Da mesma forma, os autovalores que acompanham t_N estão relacionados com ϵ_N, e possuem potências diferentes para cada equação de tempo t_N. Sendo ϵ_1 fixo para toda a hierarquia, somos levados a concluir que as soluções das diferentes equações de uma mesma hierarquia, possuem a mesma forma funcional, e somente diferem pelas potências de ξ_k^N que acompanham a variável t_N em (6.26).

Argumento análogo vale para a parte negativa da hierarquia, onde $D_{-N}^{(-N)} \in \mathcal{K}(E)$ quando $A_0 \to 0$, e é um elemento constante. Temos $\epsilon_{-N}=D_{-N}^{(-N)}$ e teremos potências negativas, ξ_k^{-N}, no parâmetro que acompanha a variável t_N em (6.26).

6.2 Soluções da hierarquia mKdV

De acordo com as definições (3.1) e da discussão da seção anterior, o fluxo na direção espacial está associado ao operador:

$$\epsilon_1=-E=-E_\alpha^{(0)}-E_{-\alpha}^{(1)} \tag{6.30}$$

e o fluxo associado ao tempo t_N, onde $N = 2m + 1$, está associado ao operador:

$$\epsilon_N = -D_N^{(2m+1)} = -E_\alpha^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)} \tag{6.31}$$

Vamos utilizar uma representação para os operadores de vértice, tal que a propriedade de nilpotência é $V_i^2(\xi_i) = 0$. Este operador de vértice é definido por [20, 21]:

$$V(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(H^{(n)} - \frac{1}{2}\hat{c}\delta_{n,0} \right) \xi^{-2n} + \left(E_\alpha^{(n)} - E_{-\alpha}^{(n+1)} \right) \xi^{-2n-1} \tag{6.32}$$

É fácil verificar a equação de auto-valores:

$$[\epsilon_1, V(\xi)] = \left[-E_\alpha^{(0)} - E_{-\alpha}^{(1)}, V(\xi) \right] = 2\xi V(\xi) \tag{6.33}$$

bem como

$$[\epsilon_N, V(\xi)] = \left[-E_\alpha^{(m)} - E_{-\alpha}^{(m+1)}, V(\xi) \right] = 2\xi^N V(\xi) \tag{6.34}$$

Nesta última equação $N = 2m+1$ pode ser tanto positivo quanto negativo. Portanto, a nossa hipótese (6.25) é confirmada neste caso, e sabemos que todas as soluções da hierarquia mKdV estão relacionadas e possuem a forma mostrada em (6.26).

6.2.1 Solução de 1 vértice

Vamos considerar a solução de apenas 1 vértice em (6.26), ou seja $n = 1$:

$$\begin{aligned} < \mu|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\mu' > &= < \mu| \exp\left(e^{2\xi x + 2\xi^N t_N} V(\xi) \right) |\mu' > \\ &= < \mu|\mu' > + e^{2\xi x + 2\xi^N t_N} < \mu|V(\xi)|\mu' > \end{aligned} \tag{6.35}$$

Agora devemos escolher os vetores $|\mu >$ e $|\mu' >$ apropriadamente. Na representação de peso mais alto da álgebra de Kac-Moody $A_1^{(1)}$ (veja apêndice A) podemos projetar a equação entre os estados $|\lambda_0 >$ e $|\lambda_1 >$. Desta forma mantemos somente as componentes de grau zero em $\Theta_-^{-1}\Theta_+$ que são o elemento central $\hat{c}$ e $H^{(0)}$, i.e, $B = \exp(\phi H^{(0)} + \nu\hat{c})$. Portanto:

$$\begin{aligned} < \lambda_0|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\lambda_0 > &= e^\nu = 1 + e^{2\xi x + 2\xi^N t_N} < \lambda_0|V(\xi)|\lambda_0 > \\ < \lambda_1|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\lambda_1 > &= e^{\phi+\nu} = 1 + e^{2\xi x + 2\xi^N t_N} < \lambda_1|V(\xi)|\lambda_1 > \end{aligned} \tag{6.36}$$

Estes elementos de matriz são calculados no apêndice B e possuem o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} < \lambda_0|V(\xi)|\lambda_0 > &= -\frac{1}{2} \\ < \lambda_1|V(\xi)|\lambda_1 > &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{6.37}$$

Substituindo estes dados em (6.36) a solução de um vértice, para o campo ϕ da hierarquia mKdV é:

$$\phi\left(x,t_N\right)=\ln\left[\frac{1+\frac{1}{2}\exp\left(2\xi x+2\xi^N t_N\right)}{1-\frac{1}{2}\exp\left(2\xi x+2\xi^N t_N\right)}\right] \tag{6.38}$$

A solução para os campos não relativísticos, que aparecem nas equações da parte positiva da hierarquia mKdV, podem ser obtidas através da relação $v=\phi_x$[§].

Portanto, trocando os parâmetros $\xi^N t_N$ em (6.38) de acordo com cada equação de índice N, e derivando em relação a x se desejarmos obter v ao invés de ϕ, obtemos a solução de 1 vértice de qualquer equação da hierarquia mKdV para N ímpar.

Para todas as equações da hierarquia mKdV obtidas anteriormente, que correspondem a $N=1,3,5,7,9,-1,-3$ a solução (6.38) foi verificada explicitamente.

Um ponto importante relacionado com as equações da parte negativa de índices pares da hierarquia mKdV, como por exemplo (3.58), é que as soluções não podem ser obtidas dos resultados anteriores pois a solução de vácuo destas equações é diferente da considerada aqui. De qualquer forma, estes casos estão sendo investigados [25].

6.2.2 Solução de 2 vértices

Consideramos a solução de dois vértices, $n=2$, obtida de (6.26): $V_1=V(\xi_1)$ e $V_2=V(\xi_2)$. As soluções apresentarão dois parâmetros. Temos:

$$\begin{aligned}
<\mu|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\mu'> &= <\mu|\exp\left(e^{2\xi_1 x+2\xi_1^N t_N}V(\xi_1)\right)\exp\left(e^{2\xi_2 x+2\xi_2^N t_N}V(\xi_2)\right)|\mu'> \\
&= <\mu|\left(1+e^{2\xi_1 x+2\xi_1^N t_N}V(\xi_1)\right)\left(1+e^{2\xi_2 x+2\xi_2^N t_N}V(\xi_2)\right)|\mu'> \\
&= <\mu|\mu'>+e^{2\xi_1 x+2\xi_1^N t_N}<\mu|V\left(\xi_1\right)|\mu'>+ \\
&+ e^{2\xi_2 x+2\xi_2^N t_N}<\mu|V\left(\xi_2\right)|\mu'>+ \\
&+ e^{2\xi_1 x+2\xi_1^N t_N+2\xi_2 x+2\xi_2^N t_N}<\mu|V\left(\xi_1\right)V\left(\xi_2\right)|\mu'>
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Vamos utilizar as mesmas representações de peso mais alto do que no caso de 1 vértice. Novamente esses elementos de matriz são calculados no apêndice B, e além dos resultados (6.37) obtemos o termo de 2 vértices:

$$<\lambda_{0,1}|V\left(\xi_1\right)V\left(\xi_2\right)|\lambda_{0,1}>=\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\right)^2 \tag{6.40}$$

[§]Note que o campo v aparece por que ao derivar as equações da hierarquia mKdV utilizamos $A_0=vH^{(0)}$. Poderiamos começar diretamente com $A_0=\partial_x\phi H^{(0)}$ e obter todas as equações para o campo ϕ somente. Assim não haveria necessidade de introduzir o ansatz (3.32), já obtendo diretamente a equação local de sinh-Gordon.

para ambos os estados de peso mais alto $|\lambda_0>$ e $|\lambda_1>$.

Portanto, a solução de dois vértices para o campo ϕ da equação correspondente ao tempo t_N da hierarquia mKdV é:

$$\phi\left(x,t_N\right)=\ln\left[\frac{1+\frac{1}{2}\rho_1(x,t_N)+\frac{1}{2}\rho_2(x,t_N)+\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\right)^2\rho_1(x,t_N)\rho_2(x,t_N)}{1-\frac{1}{2}\rho_1(x,t_N)-\frac{1}{2}\rho_2(x,t_N)+\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\right)^2\rho_1(x,t_N)\rho_2(x,t_N)}\right] \tag{6.41}$$

onde

$$\rho_i\left(x,t_N\right)=\exp\left(2\xi_i+2\xi_i^N t_N\right) \tag{6.42}$$

Esta solução também foi verificada explicitamente para cada uma das equações da hierarquia mKdV obtidas anteriormente.

Apesar de ser muito difícil calcular estes elementos de matriz para produtos de três ou mais vértices, o método de dressing é suficientemente geral e sistemático. A solução (6.38) é a solução de 1-sóliton enquanto (6.41) é uma solução de 2-sólitons. Estes resultados são os mesmos dos obtidos pelo método de Hirota [18], porém o método de dressing é muito mais geral, e pode-se definir as funções Tau de Hirota em termos dos elementos de matriz (6.20) [17], o que elimina a necessidade de um ansatz nada motivador. Lembramos também que pode haver outros tipos de soluções contidas em (6.20), dependendo da escolha do elemento de grupo h. Os casos que consideramos restringem-se a soluções solitônicas.

6.3 Soluções da hierarquia AKNS

Com as definições algébricas da hierarquia AKNS (4.1) temos:

$$\epsilon_1=-H^{(1)} \quad \text{e} \quad \epsilon_N=-H^{(N)} \tag{6.43}$$

A solução mais simples da hierarquia AKNS é obtida com dois operadores de vértice nilpotentes, $V_i^2\left(\xi_i\right)=0$, definidos por [20, 21]:

$$V_{\pm}(\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}E_{\pm\alpha}^{(n)}\xi^{-n} \tag{6.44}$$

Verifica-se facilmente as equações de auto-valor:

$$\begin{aligned}\left[\epsilon_1,V_{\pm}(\xi)\right] &= \mp 2\xi V_{\pm}(\xi)\\ \left[\epsilon_N,V_{\pm}(\xi)\right] &= \mp 2\xi^N V_{\pm}(\xi)\end{aligned} \tag{6.45}$$

que são da forma (6.25), e portanto as soluções que vamos encontrar possuem a estrutura discutida em (6.26).

Então, temos o seguinte elemento de matriz:

$$< \mu|\Theta_-^{-1}\Theta_+|\mu' >=< \mu|\left(1+\rho_1 V_-\left(\xi_1\right)\right)\left(1+\rho_2 V_+\left(\xi_2\right)\right)|\mu' > \tag{6.46}$$

Vamos utilizar a representação de peso mais alto, de forma que somente os termos de $\hat{\mathcal{G}}^{(0)}$ sobrevivem em (6.46) e são dados por:

$$B = e^{\chi E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\psi E_{\alpha}^{(0)}} e^{\nu \hat{c}} \tag{6.47}$$

Agora projetamos a equação (6.46) nos seguintes estados de peso mais alto, de forma a obter cada uma das componentes de (6.47):

$$\begin{aligned} < \lambda_0|B|\lambda_0 > &= e^{\nu} \\ < \lambda_1|B|\lambda_1 > &= e^{\phi+\nu} \\ < \lambda_1|BE_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1 > &= \psi e^{\phi+\nu} \\ < \lambda_1|E_{\alpha}^{(0)}B|\lambda_1 > &= \chi e^{\phi+\nu} \end{aligned} \tag{6.48}$$

Nos resta calcular cada um dos elementos de matriz de (6.46). Os cálculos encontram-se no apêndice B, onde obtemos:

$$\begin{aligned} < \lambda_a|V_{\pm}(\xi)|\lambda_a > &= 0 \\ < \lambda_1|V_-(\xi)E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1 > &= 0 \\ < \lambda_1|V_+(\xi)E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1 > &= 1 \\ < \lambda_1|E_{\alpha}^{(0)}V_-(\xi)|\lambda_1 > &= 1 \\ < \lambda_1|E_{\alpha}^{(0)}V_+(\xi)|\lambda_1 > &= 0 \\ < \lambda_1|V_-\left(\xi_1\right)V_+\left(\xi_2\right)E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1 > &= 0 \\ < \lambda_1|E_{\alpha}^{(0)}V_-\left(\xi_1\right)V_+\left(\xi_2\right)|\lambda_1 > &= 0 \\ < \lambda_0|V_-\left(\xi_1\right)V_+\left(\xi_2\right)|\lambda_0 > &= \frac{\xi_1\xi_2}{\left(\xi_1-\xi_2\right)^2} \\ < \lambda_1|V_-\left(\xi_1\right)V_+\left(\xi_2\right)|\lambda_1 > &= \frac{\xi_2^2}{\left(\xi_1-\xi_2\right)^2} \end{aligned} \tag{6.49}$$

Portanto, de (6.46), (6.48) e (6.49) obtemos a seguinte solução [3]:

$$\begin{aligned} \phi\left(x,t_N\right) &= \ln\left[\frac{1+\frac{\xi_2^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}\rho_1\left(x,t_N\right)\rho_2\left(x,t_N\right)}{1+\frac{\xi_1\xi_2}{(\xi_1-\xi_2)^2}\rho_1\left(x,t_N\right)\rho_2\left(x,t_N\right)}\right] \\ \psi\left(x,t_N\right) &= \frac{\rho_2}{1+\frac{\xi_2^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}\rho_1\left(x,t_N\right)\rho_2\left(x,t_N\right)} \\ \chi\left(x,t_N\right) &= \frac{\rho_1}{1+\frac{\xi_2^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}\rho_1\left(x,t_N\right)\rho_2\left(x,t_N\right)} \end{aligned} \tag{6.50}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\rho_1(x, t_N) &= \exp\left(-2\xi_1 x - 2\xi_1^N t_N\right) \\
\rho_2(x, t_N) &= \exp\left(2\xi_2 x + 2\xi_2^N t_N\right)
\end{aligned} \tag{6.51}
$$

Note que o campo ϕ pode ser expresso em termos de ψ e χ e não é um grau de liberdade do modelo.

Também é possível expressar r e q como função de ϕ, ψ e χ através das relações (4.38) e assim obtemos todas as soluções da hierarquia AKNS positiva. Os campos dos modelos de Lund-Regge, equações (4.47) e (4.50), são obtidos substituindo as soluções (6.50) em (4.42).

Esta solução contendo dois vértices corresponde a 1-sóliton, pois temos dois campos na hierarquia AKNS. É possível construir soluções de mais vértices, seguindo a mesma linha de raciocínio aqui apresentada.

As soluções das duas hierarquias, mKdV e AKNS, ilustram a generalidade do método de dressing. Obtivemos toda a hierarquia de equações, bem como suas soluções, baseadas numa construção Lie algébrica de dimensão infinita. Estes resultados são gerais, e podem ser estendidos a outras álgebras, onde diversos modelos podem ser construidos e suas soluções obtidas.

Capítulo 7

Conclusões

Abordamos o método de curvatura nula para a construção de hierarquias integráveis, e o método de dressing para encontrar suas soluções. Ambos possuem a estrutura matemática de uma álgebra de Kac-Moody.

Com base nesta construção, concluimos que uma hierarquia integrável se divide numa parte de graus positivos e outra de graus negativos. O modelo correspondente ao grau $N = -1$ corresponde a um modelo relativístico local, que é equivalente a uma redução hamiltoniana do modelo WZW. Os outros casos correspondem a modelos não relativísticos, sendo que os pertencentes à parte positiva da hierarquia fornecem equações diferenciais, enquanto os da parte negativa, equações integrais.

Construimos as hierarquias mKdV e AKNS, baseadas na mesma álgebra $A_1^{(1)}$ mas com diferentes graduações. Obtivemos diversos modelos, muitos deles conhecidos: sinh-Gordon, equação mKdV, Schröedinger não linear e Lund-Regge, e outros não usualmente encontrados na literatura.

Foram obtidas soluções do tipo sóliton, de 1 e 2 vértices, para ambas as hierarquias. Concluimos que não só as equações das hierarquias estão relacionadas, mas também suas soluções solitônicas.

Construimos o operador de recursão para as hierarquias mKdV e AKNS, que ligam suas respectivas equações.

Uma nova sub-hierarquia de graus negativos pares da hierarquia mKdV foi proposta, e como exemplo específico consideramos o modelo de grau -2, de onde surge uma nova equação integrável.

As bases teóricas apresentadas constituem-se de resultados gerais e sistemáticos, permitindo uma aboradagem completa para sistemas integráveis em 1+1 dimensões. Só foi possível considerar os dois exemplos, mKdV e AKNS, mas obviamente estes resultados se estendem a outras álgebras.

Apêndice A

Álgebras de Lie

Neste apêndice fazemos uma breve revisão sobre álgebras de Lie de dimensão finita e álgebras de Kac-Moody (de dimensão infinita). Somente os principais resultados, necessários nesta dissertação, serão abordados. O leitor interessado, deve consultar alguns dos excelentes livros sobre o assunto, como por exemplo [11], [12] e [16], ou o artigo [13].

A.1 Álgebras de Lie semi-simples

Uma *álgebra de Lie* $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial munido de um produto bilinear $[\ ,\ ]$: $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, chamado de *comutador*, tal que:

$$\begin{aligned} [X,Y] + [Y,X] &= 0 \qquad\qquad \text{(anti-simetria)} \\ [X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] &= 0 \qquad\qquad \text{(Jacobi)} \end{aligned} \tag{A.1}$$

A *dimensão* da álgebra de Lie é a dimensão de seu espaço vetorial base.

Os elementos do grupo G associado à álgebra de Lie $\mathcal{G}$, numa região em torno da identidade, são obtidos exponenciando-se os geradores da álgebra, i.e, $\forall X \in \mathcal{G} \Rightarrow e^X \in G$.

Uma *representação* de $\mathcal{G}$, é uma associação de cada elemento de $\mathcal{G}$ com um operador agindo sobre um espaço vetorial, de forma que as relações de comutação sejam preservadas, i.e, se $D(X)$ é uma representação de $\mathcal{G}$, então $\forall X, Y \in \mathcal{G}$ temos $D([X,Y]) = [D(X), D(Y)]$. A dimensão da representação é a dimensão do espaço vetorial sobre o qual os operadores agem. Uma representação matricial é dita *irredutível* quando as matrizes não podem ser escritas na forma diagonal por blocos.

Uma representação particularmente útil é a *representação adjunta*, onde $\mathcal{G}$ atua sobre seu próprio espaço vetorial. Esta representação é obtida da seguinte forma:

$$X \to \mathrm{ad}_X \qquad \forall X \in \mathcal{G} \tag{A.2}$$

onde $\mathrm{ad}_X Y \equiv [X, Y]$. Esta representação permite definir uma *forma bilinear simétrica* sobre $\mathcal{G}$, chamada de forma de Killing:

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) \tag{A.3}$$

Esta forma bilinear é invariante no seguinte sentido:

$$([X, Y], Z) = (X, [Y, Z]) \tag{A.4}$$

Um *ideal* de $\mathcal{G}$ é um subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$ tal que $[\mathcal{I}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{I}$. Uma álgebra de Lie é *simples* se não possui nenhum ideal próprio*. Uma álgebra de Lie é *semi-simples* se não possui nenhum ideal abeliano† próprio.

A álgebra $\mathcal{G}$ é completamente definida especificando um conjunto de geradores $\{J_a\}$ e suas relações de comutação:

$$[J_a, J_b] = i f_{ab}{}^c J_c \tag{A.5}$$

onde $f_{ab}{}^c$ são os chamados coeficientes de estrutura, e caracteriazam completamente $\mathcal{G}$. Na representação adjunta, os elementos de matriz são dados por $(\mathrm{ad}_{J_a})_b{}^c = f_{ab}{}^c$.

Um elemento $X \in \mathcal{G}$ é chamado de semi-simples se ad_X é uma matriz diagonalizável na representação adjunta. Assim, a *subálgebra de Cartan* é definida pelos elementos hermitianos independentes em (A.5), que são semi-simples e que expandem uma subálgebra abeliana máxima. A subálgebra de Cartan é denotada por $\mathcal{H}$, e seus geradores, $\{H_i\}$ $i = 1, \ldots, r$, podem ser todos diagonalizados simultâneamente. Pode-se mostrar que todas as possíveis subálgebras de Cartan são isomórficas e a sua dimensão é denotada por $r = \mathrm{rank}(\mathcal{G})$.

Seja $H \in \mathcal{H}$ e $E_\alpha \in \mathcal{G}$ os auto-vetores de ad_H na representação adjunta, i.e:

$$\mathrm{ad}_H E_\alpha = \alpha(H) E_\alpha \tag{A.6}$$

O mapeamento

$$\alpha : H \in \mathcal{H} \to \alpha(H) \in \mathbb{R} \tag{A.7}$$

é uma função linear sobre $\mathcal{H}$. As funções α pertencem ao espaço dual a $\mathcal{H}$: $\alpha \in \mathcal{H}^*$. Essas funções α são chamadas de *raízes*, e o conjunto de todas as raízes de $\mathcal{G}$ é denotado por Δ. As raízes sempre ocorrem em pares, pois se α é uma raiz então $-\alpha$ também é, e como só existe um $E_\alpha \in \mathcal{G}$ associado a α, as raízes são não degeneradas. Além disso, nenhum múltiplo de uma raiz $c\alpha$ para $c \in \mathbb{C}$ é uma raiz, exceto $c = \pm 1$.

---

*Próprio significa um subconjunto diferente de $\mathcal{G}$ e de $\emptyset$.

†Um subconjunto é abeliano se todos seus elementos comutam entre si.

Então, $\{H_i, E_\alpha\}$ forma uma uma base da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ e utilizando a invariância (A.4) e (A.6), pode-se mostrar que:

$$(H_i, E_\alpha) = 0, \quad (E_\alpha, E_\beta) = 0 \quad \text{se} \quad \alpha + \beta \neq 0 \tag{A.8}$$

Podemos introduzir um isomorfismo entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ através da forma de Killing:

$$\alpha \in \mathcal{H}^* \rightarrow H_\alpha \in \mathcal{H} \tag{A.9}$$

onde

$$\alpha(H) = (H_\alpha, H), \quad \forall H \in \mathcal{H} \tag{A.10}$$

A forma de Killing também induz um produto interno entre as raízes de $\mathcal{H}^*$:

$$(\alpha, \beta) = (H_\alpha, H_\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathcal{H}^* \tag{A.11}$$

Para cada raiz α exitem três geradores associados $\{H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$, que forma uma subálgebra $s\ell(2)$ de $\mathcal{G}$. Como as raízes ocorrem em pares, e os geradores de $\mathcal{H}$ são hermitianos, temos as seguintes relações de hermiticidade:

$$H_i^\dagger = H_i, \quad E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \tag{A.12}$$

As raízes expandem $\mathcal{H}^*$, porém, elas não são todas independentes. Pode-se escolher um subconjunto de raizes de Δ, $\{\alpha_i\}$ $i = 1, \ldots, r$, tal que qualquer raiz pode ser obtida como uma combinação linear $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$, onde n_i são números inteiros de mesmo sinal. Os elementos desta base, α_i, são chamados de *raizes simples*. Se $n_i > 0$ α é uma *raiz positiva*, caso contrário *negativa*. Existe uma raiz $\theta = \sum_i n_i \alpha_i$ formada pelo conjunto máximo de $n_i \geq 0$ chamada de *raiz de peso mais alto*.

Da identidade de Jacobi (A.1) temos:

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha(H_i) + \beta(H_i))\,[E_\alpha, E_\beta] \tag{A.13}$$

Então temos três situações: (1) se $\alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow [E_\alpha, E_\beta] \sim E_{\alpha+\beta}$. (2) se $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow [E_\alpha, E_\beta] \in \mathcal{H}$, e das relações (A.4) e (A.10), $(H, [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = ([H, E_\alpha], E_{-\alpha}) = \alpha(H)(E_\alpha, E_{-\alpha}) = (H, (E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha)$, logo $[E_\alpha, E_\beta] = (E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha$. (3) se $\alpha + \beta \notin \Delta \Rightarrow [E_\alpha, E_\beta] = 0$.

Portanto, na base $\{H_i, E_\alpha\}$ temos as seguintes relações de comutação:

$$\begin{array}{rcl} [H_i, H_j] & = & 0 \\ [H_i, E_\alpha] & = & \alpha(H_i) E_\alpha \\ [E_\alpha, E_\beta] & = & \left\{ \begin{array}{ll} N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ (E_\alpha, E_{-\alpha}) H_\alpha & (\alpha + \beta = 0) \\ 0 & (\alpha + \beta \notin \Delta) \end{array} \right. \end{array} \tag{A.14}$$

onde $N_{\alpha,\beta}$ é uma constante. Nesta base, a álgebra $\mathcal{G}$ é decomposta da seguinte maneira:

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha} \mathcal{G}_\alpha = \mathcal{H} \oplus \Delta_+ \oplus \Delta_- \tag{A.15}$$

É a chamada decomposição de raizes e $\Delta_\pm$ denota o espaço de raizes positivas e negativas, respectivamente.

Dado o espaço de raizes Δ toda a informação sobre as relações de comutação entre os geradores pode ser reconstruida, e portanto Δ especifica completamente a álgebra $\mathcal{G}$. Também podemos codificar toda essa informação na *matriz de Cartan* $A = (a_{ij})$, que é definida em termos de raizes simples:

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad i, j = 1, \ldots, r \tag{A.16}$$

A matriz de Cartan satisfaz $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leq 0$ e $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$ para $i \neq j$. Na verdade, essa é a definição da matriz de Cartan, e poderiamos ter partido daqui e definir todas as propriedades de $\mathcal{G}$ com base na matriz de Cartan. A matriz de Cartan para álgebras semi-simples também satisfaz $\det(A) \neq 0$, o que deixa de ser verdade no caso de álgebras de Kac-Moody. Também vemos que $0 \leq a_{ij}a_{j_i} \leq 4$, sendo que 4 é excluído pela independência linear das raízes simples. A matriz de Cartan pode ser representada graficamente pelo diagrama de Dynkin, que é construido associando um ponto à cada raiz simples α_i, e ligando os pontos relacionados a α_i e α_j por $a_{ij}a_{ji}$ linhas. Se $\alpha_i^2 > \alpha_j^2$ coloca-se uma flecha apontando para o ponto referente a α_j. Dessa forma todas as álgebras de Lie simples são classificadas com base na matriz de Cartan, e só existem 9 tipos: $A_r \sim s\ell(r+1), B_r \sim so(2r+1), C_r \sim sp(2r), D_r \sim so(2r)$ e também as chamadas álgebras excepcionais E_6, E_7, E_8 e F_4, G_2.

Como os geradores da subálgebra de Cartan podem ser todos diagonalizados simultâneamente, podemos usar uma representação qualquer sobre um espaço vetorial V onde os vetores $|\mu>$ são autoestados de $H \in \mathcal{H}$:

$$H|\mu>= \mu(H)|\mu> \tag{A.17}$$

Os autovalores $\mu(H) \in \mathcal{H}^*$ são chamados *pesos*. Na representação adjunta os pesos são chamados de raizes. Podemos utilizar uma base de *pesos fundamentais* denotados por $\{\lambda_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, definidos por:

$$\frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij} \tag{A.18}$$

Das relações de comutação, vemos que:

$$HE_\alpha|\mu>= (\mu(H) + \alpha(H))\, E_\alpha|\mu> \tag{A.19}$$

e portanto $E_\alpha|\mu >\sim|\mu+\alpha>$ também é um vetor peso. Como o espaço vetorial é finito, deve existir um estado $|\lambda>$ que seja aniquiliado pelos operadores E_α:

$$E_\alpha|\lambda>=0 \tag{A.20}$$

O vetor $|\lambda>$ é chamado de *estado de peso mais alto* e o seu autovalor λ é o *peso mais alto*, e pode ser escrito como uma soma de números inteiros positivos $\lambda=\sum_i m_i\lambda_i$. Para uma representação irredutível, pode-se mostrar que este estado é único.

A.2 Álgebras de Kac-Moody afim

É possível construir uma álgebra de dimensão infinita a partir de $\mathcal{G}$ através de uma série de Laurent nos parâmetros espectrais $\lambda\in\mathbb{C}$ da seguinte maneira:

$$L(\mathcal{G})=\mathcal{G}\otimes\mathbb{C}(\lambda,\lambda^{-1})=\{X\otimes\lambda^n \mid X\in\mathcal{G},n\in\mathbb{Z}\} \tag{A.21}$$

$L(\mathcal{G})$ é conhecida como loop-álgebra.

Desta forma as relações de comutação da loop-álgebra são definidas por:

$$[X\otimes\lambda^n,Y\otimes\lambda^m]=[X,Y]\otimes\lambda^{n+m} \tag{A.22}$$

Agora fazemos a chamada extensão central de $L(\mathcal{G})$. É necessário encontrar um operador $\hat{c}$ de $\mathcal{G}$ que comute com todos os outros geradores:

$$[\hat{c},X\otimes\lambda^n]=0,\quad \forall X\otimes\lambda^n\in L(\mathcal{G}) \tag{A.23}$$

e assim, redefinimos o comutador (A.22) por:

$$[X\otimes\lambda^n,Y\otimes\lambda^m]=[X,Y]\otimes\lambda^{n+m}+\frac{1}{2}\hat{c}n\delta_{n+m,0}(X,Y) \tag{A.24}$$

Onde (X,Y) é a forma de Killing sobre $\mathcal{G}$. Pode-se mostrar que esta extenção central é única, e que (A.24) satisfaz as propriedades de anti-simetria e identidade de Jacobi. Das relações de comutação (A.14), vemos que a segunda dessas relações implica que a raiz α é infinitamente degenerada para todos os operadores $E_\alpha\otimes\lambda^n$. Para eliminar essa degenerescência, é necessário introduzir um novo operador, cujos autovalores dependam de n. Isto é feito definindo o operador derivada:

$$d=\lambda\frac{d}{d\lambda} \tag{A.25}$$

que só atua sobre os parâmetros λ da loop-álgebra:

$$\begin{aligned}[d,X\otimes\lambda^n] &= nX\otimes\lambda^n,\quad \forall X\otimes\lambda^n\in L(\mathcal{G})\\ [d,\hat{c}] &= 0\end{aligned} \tag{A.26}$$

O operador d "mede" o *grau* n dos geradores. Assim, a álgebra de Kac-Moody afim é definida por:

$$\hat{\mathcal{G}} = L(\mathcal{G}) \oplus \mathbb{C}\hat{c} \oplus \mathbb{C}d \tag{A.27}$$

Vemos que d induz uma graduação natural em $\mathcal{G}$, que é decomposta em $\hat{\mathcal{G}} = \sum_n \hat{\mathcal{G}}^{(n)}$, onde os supespaços graduados $\hat{\mathcal{G}}^{(n)}$ são definidos por $[d, \hat{\mathcal{G}}^{(n)}] = n\hat{\mathcal{G}}^{(n)}$ e satisfazem $[\hat{\mathcal{G}}^{(n)}, \hat{\mathcal{G}}^{(m)}] \subset \hat{\mathcal{G}}^{(n+m)}$.

A forma de Killing sobre $\hat{\mathcal{G}}$ também é redefinida:

$$\begin{aligned} (X \otimes \lambda^n, Y \otimes \lambda^m) = (X, Y)\delta_{n+m,0}, \quad (\hat{c}, \hat{c}) = (d, d) = 0 \\ (\hat{c}, d) = 1, \quad (d, X \otimes \lambda^n) = (\hat{c}, X \otimes \lambda^n) = 0 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Portanto, as relações de comutação de $\hat{\mathcal{G}}$ na base $\{H_i^{(n)}, E_\alpha^{(n)}\}$ são:

$$\begin{aligned} \left[H_i^{(n)}, H_j^{(m)}\right] &= \frac{1}{2}\hat{c}n\delta_{n+m,0}(H_i, H_j) \\ \left[H_i^{(n)}, E_\alpha^{(m)}\right] &= \alpha(H_i)E_\alpha^{(n+m)} \\ \left[E_\alpha^{(n)}, E_\beta^{(m)}\right] &= \begin{cases} N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}^{(n+m)} & (\alpha+\beta \in \Delta) \\ (E_\alpha, E_{-\alpha})\left(H_\alpha^{(n+m)} + \frac{1}{2}\hat{c}n\delta_{n+m,0}\right) & (\alpha+\beta = 0) \\ 0 & (\alpha+\beta \notin \Delta) \end{cases} \end{aligned} \tag{A.29}$$

A subálgebra de Cartan é expandida por $\{H_1^{(0)}, \ldots, H_r^{(0)}; \hat{c}; d\}$ e a raiz associada aos operadores $E_\alpha^{(n)}$ é:

$$\hat{\alpha} = (\alpha; 0; n) \tag{A.30}$$

e a raiz associada a $H_i^{(n)}$ é:

$$n\delta = (0, 0, n) \quad \text{onde} \quad \delta = (0, 0, 1) \tag{A.31}$$

Em (A.30) α é a raiz da álgebra finita correspondente $\mathcal{G}$. Note que os operadores de $\mathcal{G}$ correpondem ao modo $n = 0$. Além disso temos as relações de hermiticidade:

$$H_i^{(n)\dagger} = H_i^{(-n)}, \quad E_\alpha^{(n)\dagger} = E_{-\alpha}^{(-n)}, \quad \hat{c}^\dagger = \hat{c}, \quad d^\dagger = d \tag{A.32}$$

Da mesma forma que para a álgebra de dimensão finita, é possível encontrar estados de peso mais alto $\{|\lambda_a >\}, a = 1, \ldots, r$ que são aniquilados por todos os geradores de grau positivo, i.e:

$$\begin{aligned} E_\alpha^{(0)}|\lambda_a > &= 0, \quad \alpha > 0 \\ E_{\pm\alpha}^{(n)}|\lambda_a > &= 0, \quad n > 0 \\ H_i^{(n)}|\lambda_a > &= 0, \quad n > 0,\ i = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{A.33}$$

além disso

$$\begin{aligned} H_i^{(0)}|\lambda_a> &= \lambda_a(H_i)|\lambda_a> \\ \hat{c}|\lambda_a> &= c|\lambda_a> \qquad a=1,\ldots,r \end{aligned} \tag{A.34}$$

onde c é um número, e o peso fundamental $\lambda_a(H_i) = (\lambda_a)_i$ é uma componente do vetor $\lambda_a = ((\lambda_a)_1, \ldots, (\lambda_a)_r)$. Também existe um estado de peso mais alto, denotado por $|\lambda_0>$, que é aniquilado por todos os geradores, exceto pelo termo central:

$$\hat{c}|\lambda_0>= c|\lambda_0> \tag{A.35}$$

Note que os estados $E_\alpha|\lambda_a>$ também são estados de peso mais alto pois::

$$H_i^{(0)}E_\alpha^{(n)}|\lambda_a>= (\lambda_a(H_i)+\alpha(H_i))\,E_\alpha^{(n)}|\lambda_a> \tag{A.36}$$

e portanto

$$E_\alpha^{(n)}|\lambda_a>\sim|\alpha+\lambda_a> \tag{A.37}$$

Até agora fizemos questão de não fixar nenhuma base para os geradores, tanto de $\mathcal{G}$ quanto de $\hat{\mathcal{G}}$, mas fica claro que é necessário fixar uma normalização para a forma de Killing entre os geradores, e isso define completamente as relações de comutação. Sem entrar em detalhes algébricos, vamos utilizar a *base de Chevalley*, que para a álgebra afim $\hat{\mathcal{G}}$ fica definida por:

$$\begin{aligned} \left[H_i^{(n)}, H_j^{(m)}\right] &= \frac{4}{\alpha_i^2}\hat{c}n\delta_{ij}\delta_{n+m,0} \\ \left[H_i^{(n)}, E_{\pm\alpha}^{(m)}\right] &= \pm\frac{2\alpha\cdot\alpha_i}{\alpha_i^2}E_{\pm\alpha}^{(n+m)} \\ \left[E_\alpha^{(n)}, E_\beta^{(m)}\right] &= \begin{cases} N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}^{(n+m)} & (\alpha+\beta\in\Delta) \\ \ell_i\cdot H_i^{(n+m)} + \frac{2}{\alpha^2}\hat{c}n\delta_{n+m,0} & (\alpha+\beta=0) \\ 0 & (\alpha+\beta\notin\Delta) \end{cases} \end{aligned} \tag{A.38}$$

onde $N_{\alpha,\beta}$ é uma constante, $a_{ij} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ é a matriz de Cartan de $\mathcal{G}$, α e β são raízes quaisquer, e.g, $\alpha = \sum_i n_i\alpha_i$, α_i são as raizes simples de $\mathcal{G}$ e ℓ_i são inteiros definidos pela expansão $\alpha/\alpha^2 = \sum_i \ell_i\alpha_i/\alpha_i^2$.

A.2.1 Graduação

Seja $\hat{\mathcal{G}}$ uma álgebra de Kac-Moody afim e $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie finita correspondente. Uma $\mathbb{Z}-$ graduação decompõe a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ nos seguintes subespaços:

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s), \quad \left[\hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s), \hat{\mathcal{G}}^{(m)}(s)\right] \subset \hat{\mathcal{G}}^{(n+m)}(s) \tag{A.39}$$

onde $\hat{\mathcal{G}}^{(n+m)}(s)$ é um subespaço de grau n definido por:

$$\left[Q_s, \hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s)\right] = n\hat{\mathcal{G}}^{(n)}(s) \tag{A.40}$$

onde o operador de graduação Q_s é dado por:

$$Q_s \equiv \sum_{a=1}^{r} s_a \frac{2\lambda_a \cdot H^{(0)}}{\alpha_a^2} + N_s d \tag{A.41}$$

Nesta definição o vetor $s = (s_1, \ldots, s_r)$ é composto de números inteiros positivos e λ_a são os pesos fundamentais satisfazendo (A.18). Também temos $N_s = \sum_{i=0}^{r} s_i m_i$, onde $\theta = \sum_{a=1}^{r} m_a \alpha_a$ é a raiz de peso mais alto de $\mathcal{G}$ e $m_0 = 1$. As graduações importantes que vamos considerar são a graduação homogênea e a principal, definidas por:

$$\begin{aligned} s_{\text{hom}} &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ s_{\text{prin}} &= (1, 1, 1, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{A.42}$$

existem graduações intermediárias entre essas duas, mas não vamos considerá-las nesta dissertação.

A.2.2 Álgebra afim $A_1^{(1)}$

A álgebra $A_1^{(1)}$ é isomórfica à álgebra de matrizes $\hat{s\ell}(2)$ e A_1 possui somente uma raiz α. Seus geradores são $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H\}$, e vamos escolher a normalização $\alpha^2 = 2$. Dessa forma, as relações de comutação para $A_1^{(1)}$ na base de Chevalley são:

$$\begin{aligned} \left[H^{(n)}, H^{(m)}\right] &= 2\hat{c}n\delta_{n+m,0} \\ \left[H^{(n)}, E_{\pm\alpha}^{(m)}\right] &= \pm 2E_{\pm\alpha}^{(n+m)} \\ \left[E_\alpha^{(n)}, E_\beta^{(m)}\right] &= \begin{cases} H^{(n+m)} + \hat{c}n\delta_{n+m,0} & (\alpha+\beta=0) \\ 0 & (\text{caso contrário}) \end{cases} \\ \left[\hat{c}, E_{\pm\alpha}^{(n)}\right] &= \left[\hat{c}, H^{(n)}\right] = [\hat{c}, d] = 0 \\ \left[d, E_{\pm\alpha}^{(n)}\right] &= nE_{\pm\alpha}^{(n)}, \qquad \left[d, H^{(n)}\right] = nH^{(n)} \end{aligned} \tag{A.43}$$

Uma observação importante, é que a construção dos modelos integráveis pelo método de curvatura nula, apresentado nesta dissertação, não envolve a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ completa, mas somente a loop-álgebra $L(\mathcal{G})$, que é obtida fazendo $\hat{c} = 0$ nas relações (A.43). Entretanto, para obter soluções destes modelos pelo método de Dressing, é necessário utilizar toda a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$, pois utilizamos os estados de peso mais alto, que não existem para a loop-álgebra.

As graduações, principal e homogênea, obtidas de (A.41) são:

$$\begin{aligned} Q_{\text{hom}} &= d \\ Q_{\text{prin}} &= \frac{1}{2}H^{(0)} + 2d \end{aligned} \tag{A.44}$$

A representação de peso mais alto corresponde as expressões (A.33)-(A.35) onde o número c é fixado como sendo $c = 1$.

Essas relações permitem acompanhar os cálculos envolvidos nesta dissertação, onde somente a álgebra $A_1^{(1)}$ será utilizada.

Apêndice B

Elementos de Matriz

Apresentamos os cálculos dos elementos de matriz encontrados nas soluções das hierarquias mKdV e AKNS.

Vamos utilizar os comutadores e as definições de estado de peso mais alto, discutidas no apêndice anterior.

B.1 Elementos de matriz da hierarquia mKdV

O operador de vértice de $A_1^{(1)}$ com a graduação principal é definido por [20]:

$$V(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(H^{(n)} - \frac{1}{2}\hat{c}\delta_{n,0} \right) \xi^{-2n} + \left(E_{\alpha}^{(n)} - E_{-\alpha}^{(n+1)} \right) \xi^{-2n-1} \tag{B.1}$$

Também faremos uso de algumas séries de potência. A primeira delas é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{B.2}$$

e se multiplicarmos (B.2) por x obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \tag{B.3}$$

Derivando (B.2) em relação a x, ainda obtemos uma outra série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{B.4}$$

Por economia de notação nas expressões que virão a seguir, definimos o elemento:

$$\xi_{2,1} \equiv \frac{\xi_2}{\xi_1} \tag{B.5}$$

Com estes dados, calculamos separadamente os elementos de matriz de um e dois vértices.

B.1.1 1 vértice

Utilizando um estado de peso mais alto genérico $|\lambda_a>$, definido no apêndice anterior, o elemento de 1 vértice é trivialmente calculado:

$$\begin{aligned} <\lambda_a|V(\xi)|\lambda_a> &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} <\lambda_a|\left(H^{(n)}-\frac{1}{2}\hat{c}\delta_{n,0}\right)\xi^{-2n}+\left(E_{\alpha}^{(n)}-E_{-\alpha}^{(n+1)}\right)\xi^{-2n-1}|\lambda_a> \\ &= <\lambda_a|H^{(0)}-\frac{1}{2}\hat{c}|\lambda_a> \\ &= (\lambda_a)_1-\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Portanto, como $(\lambda_0)_1=0$ e $(\lambda_1)_1=1$ temos:

$$\begin{aligned} <\lambda_0|V(\xi)|\lambda_0> &= -\frac{1}{2} \\ <\lambda_1|V(\xi)|\lambda_1> &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.1.2 2 vértices

Os elementos contendo dois vértices não são tão fáceis de calcular. Vamos mostrar este cálculo em detalhe. Seja $|\lambda_a>$ um estado de peso mais alto qualquer, então:

$$\begin{aligned} <\lambda_a|V(\xi_1)V(\xi_2)|\lambda_a>=\sum_{m,m\in\mathbb{Z}} <\lambda_a|\left[\left(H^{(n)}-\frac{1}{2}\hat{c}\delta_{n,0}\right)\xi^{-2n}+\left(E_{\alpha}^{(n)}-\right.\right. \\ \left.\left.-E_{-\alpha}^{(n+1)}\right)\xi^{-2n-1}\right]\left[\left(H^{(m)}-\frac{1}{2}\hat{c}\delta_{m,0}\right)\xi^{-2m}+\left(E_{\alpha}^{(m)}-E_{-\alpha}^{(m+1)}\right)\xi^{-2m-1}\right]|\lambda_a> \end{aligned} \tag{B.8}$$

Esta expressão possui 4 termos, que serão calculados separadamente. A estratégia é eliminar a parte da soma que se anula devido a ação dos operadores sobre o estado de peso mais alto, e então usar as relações fundamentais de comutação para inverter a ordem dos operadores. Feito isso, novamente usamos a propriedade de que alguns destes operadores quando atuados sobre os vetores dão resultado nulo.

O primeiro termo a ser considerado é:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m,m\in\mathbb{Z}} <\lambda_a|\left(H^{(n)}-\frac{1}{2}\hat{c}\delta_{n,0}\right)\left(H^{(m)}-\frac{1}{2}\hat{c}\delta_{m,0}\right)|\lambda_a> \xi_1^{-2n}\xi_2^{-2m} \\
=&\sum_{n\geq 0}\sum_{m\leq 0} <\lambda_a|H^{(n)}H^{(m)}|\lambda_a> \xi_1^{-2n}\xi_2^{-2m} - <\lambda_a|H^{(0)}|\lambda_a> + \frac{1}{4} \\
=&\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} <\lambda_a|H^{(-m)}H^{(n)}+2\hat{c}n\delta_{n,m}|\lambda_a> \xi_1^{-2n}\xi_2^{2m} - (\lambda_a)_1 + \frac{1}{4} \\
=&\ (\lambda_a)_1^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\xi_{2,1}\right)^{2n} - (\lambda_a)_1 + \frac{1}{4} \\
=&\left((\lambda_a)_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{\xi_{2,1}^2}{\left(1-\xi_{2,1}^2\right)^2}
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

Outro termo que aparece na expressão (B.8) é:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \Bigg(<\lambda_a|H^{(n)}E_{\alpha}^{(m)} - H^{(n)}E_{-\alpha}^{(m+1)} - \\
&-\frac{1}{2}\hat{c}\delta_{n,0}E_{\alpha}^{(m)} + \frac{1}{2}\hat{c}\delta_{n,0}E_{-\alpha}^{(m+1)}|\lambda_a> \xi_1^{-2n}\xi_2^{-2m-1}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

Cada $E_{\pm\alpha}^{(i)}$ que aparece sozinho se anula quando atua à direita ou à esquerda. O comutador $\left[H^{(n)}, E_{\pm\alpha}^{(m)}\right] = \pm E_{\pm\alpha}^{(n+m)}$ nos mostra que os dois primeiros termos contribuem com resultado nulo. Portanto:

$$
(B.10) = 0 \tag{B.11}
$$

O análogo acontece para o outro termo cruzado:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \Bigg(<\lambda_a|E_{\alpha}^{(n)}H^{(m)} - E_{-\alpha}^{(n+1)}H^{(m)} - \\
&-\frac{1}{2}\hat{c}\delta_{m,0}E_{\alpha}^{(n)} + \frac{1}{2}\hat{c}\delta_{m,0}E_{-\alpha}^{(n+1)}|\lambda_a> \xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m}\Bigg) = 0
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

O quarto e último termo de (B.8) é:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \Bigg(<\lambda_a|E_{\alpha}^{(n)}E_{\alpha}^{(m)} - E_{\alpha}^{(n)}E_{-\alpha}^{(m+1)} - E_{-\alpha}^{(n+1)}E_{\alpha}^{(m)} + \\
&+E_{-\alpha}^{(n+1)}E_{-\alpha}^{(m+1)}|\lambda_a> \xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m-1}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

O primeiro e o último termo de (B.13) não contribuem pois eles comutam e aniquilam à direita ou à esquerda. Eliminando os resultados nulos, os termos restantes são:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n\geq 0}\sum_{m+1\leq 0} < \lambda_a|E_{\alpha}^{(n)}E_{-\alpha}^{(m+1)}|\lambda_a > \xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m-1} - \\ & - \sum_{n+1>0}\sum_{m<0} < \lambda_a|E_{-\alpha}^{(n+1)}E_{\alpha}^{(m)}|\lambda_a > \xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m-1} \end{aligned} \tag{B.14}$$

Depois de usar as relações de comutação, todos os termos contendo pares $E_{\alpha}^{(i)}E_{-\alpha}^{(j)}$ aniquilam os estados e o que sobra é:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n\geq 0}\sum_{m+1\leq 0} < \lambda_a|H^{(n+m+1)}|\lambda_a > \xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m-1} - \\ & - \sum_{n\geq 0}\sum_{m+1\leq 0} n\delta_{n+m+1,0}\xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m-1} + \\ & + \sum_{n+1>0}\sum_{m<0} < \lambda_a|H^{(n+m+1)}|\lambda_a > \xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m-1} + \\ & + \sum_{n+1>0}\sum_{m<0} m\delta_{n+m+1,0}\xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m-1} \end{aligned} \tag{B.15}$$

O primeiro e o terceiro termo de (B.15) se cancelam. O segundo fica:

$$\begin{aligned} -\sum_{n\geq 0}\sum_{m\leq 0} n\delta_{n+m,0}\xi_1^{-2n-1}\xi_2^{-2m+1} &= -\sum_{n\geq 0} n\xi_1^{-2n-1}\xi_2^{2n+1} \\ &= -\xi_{2,1}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\xi_{2,1}\right)^{2n} \\ &= -\frac{\xi_{2,1}^3}{\left(1-\xi_{2,1}^2\right)^2} \end{aligned} \tag{B.16}$$

Já o último termo de (B.15) resulta em:

$$\begin{aligned} \sum_{n>0}\sum_{m<0} m\delta_{n+m,0}\xi_1^{-2n+1}\xi_2^{-2m-1} &= \sum_{n>0}(-n)\xi_1^{-2n+1}\xi_2^{2n-1} \\ &= -\xi_{1,2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\xi_{2,1}\right)^{2n} \\ &= -\frac{\xi_{2,1}}{\left(1-\xi_{2,1}^2\right)^2} \end{aligned} \tag{B.17}$$

Portanto, levando em conta todos estes resultados a expressão (B.8) se reduz à seguinte forma fechada:

$$\begin{aligned} < \lambda_a|V\left(\xi_1\right)V\left(\xi_2\right)|\lambda_a > &= \left(\left(\lambda_a\right)_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{\xi_{2,1}^2}{\left(1-\xi_{2,1}^2\right)^2} - \\ & - \frac{\xi_{2,1}^3}{\left(1-\xi_{2,1}^2\right)^2} - \frac{\xi_{2,1}}{\left(1-\xi_{2,1}^2\right)^2} \end{aligned} \tag{B.18}$$

Tanto para $|\lambda_a >= |\lambda_0 >$ quanto para $|\lambda_a >= |\lambda_1 >$, a igualdade (B.18) possui o mesmo resultado. Ainda é possível escrevê-lo numa forma mais condensada. Introduzindo $x = \xi_{2,1}$, a equação (B.18) pode ser simplificada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + 2\frac{x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{x^3}{(1-x^2)^2} - \frac{x}{(1-x^2)^2} &= \frac{1-2x^2+x^4+8x^2-4x^3-4x}{4(1-x^2)^2} \\ &= \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{4(1-x^2)^2} \\ &= \frac{(x-1)^4}{4(1-x)^2(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \end{aligned} \tag{B.19}$$

E finalmente obtemos o resultado procurado:

$$< \lambda_{0,1}|V(\xi_1)V(\xi_2)|\lambda_{0,1} >= \frac{1}{4}\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\right)^2 \tag{B.20}$$

B.2 Elementos de matriz da hierarquia AKNS

Para a álgebra $A_1^{(1)}$ com graduação homogênea temos os operadores de vértice [20]:

$$V_\pm(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} E_{\pm\alpha}^{(n)}\xi^{-n} \tag{B.21}$$

Análogo ao que foi feito na seção anterior, precisamos calcular elementos de matriz de um e dois vértices entre os estados $|\lambda_0 >$, $|\lambda_1 >$ e $E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1 >$. A seguir calculamos os elementos de interesse que aparecem na solução de dois vértices da hierarquia AKNS.

B.2.1 1 vértice

Os elementos de matriz contendo 1 vértice são facilmente calculados, como mostramos a seguir:

$$\begin{aligned} < \lambda_a|V_\pm(\xi)|\lambda_a > &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < \lambda_a|E_{\pm\alpha}^{(n)}|\lambda_a > \xi^{-n} = 0 \\ < \lambda_1|V_-(\xi)E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1 > &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < \lambda_1|E_{-\alpha}^{(n)}E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1 > \xi^{-n} = 0 \\ < \lambda_1|E_\alpha^{(0)}V_+(\xi)|\lambda_1 > &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < \lambda_1|E_\alpha^{(0)}E_\alpha^{(n)}|\lambda_1 > \xi^{-n} = 0 \end{aligned} \tag{B.22}$$

O primeiro termo contém somente um operador $E_{\pm\alpha}^{(n)}$ que pode aniquilar à esquerda ou à direita. Os outros dois termos possuem operadores comutantes, e portanto podemos trocar a ordem arbitrariamente e aniquilar em um dos lados.

Os outros elementos não nulos são:

$$\begin{aligned}
<\lambda_1|V_+(\xi)E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1> &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} <\lambda_1|E_\alpha^{(n)}E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1> \xi^{-n} \\
&= \sum_{n\geq 0} <\lambda_1|E_{-\alpha}^{(0)}E_\alpha^{(n)} + H^{(n)}|\lambda_1> \\
&= <\lambda_1|H^{(0)}|\lambda_1> = 1 \qquad \text{(B.23)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\lambda_1|E_\alpha^{(0)}V_-(\xi)|\lambda_1> &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} <\lambda_1|E_\alpha^{(0)}E_{-\alpha}^{(n)}|\lambda_1> \xi^{-n} \\
&= \sum_{n\leq 0} <\lambda_1|E_{-\alpha}^{(n)}E_\alpha^{(0)} + H^{(n)}|\lambda_1> \\
&= <\lambda_1|H^{(0)}|\lambda_1> = 1 \qquad \text{(B.24)}
\end{aligned}$$

B.2.2 2 vértices

Agora calculamos os elementos envolvendo 2 vértices. A idéia é a mesma, separar a soma e usar as relações de comutação para aniquilar os vetores sobre ação dos operadores. Então temos:

$$\begin{aligned}
<\lambda_0|V_-(\xi_1)V_+(\xi_2)|\lambda_0> &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} <\lambda_0|E_{-\alpha}^{(n)}E_\alpha^{(m)}|\lambda_0> \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= \sum_{n>0}\sum_{m<0} <\lambda_0| - H^{(n+m)} - m\hat{c}\delta_{n+m,0}|\lambda_0> \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= \sum_{n>0}\sum_{m<0}(-m)\delta_{n+m,0}\xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\xi_{2,1}\right)^n = \frac{\xi_{2,1}}{\left(1-\xi_{2,1}\right)^2} \qquad \text{(B.25)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\lambda_1|V_-(\xi_1)V_+(\xi_2)|\lambda_1> &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} <\lambda_1|E_{-\alpha}^{(n)}E_\alpha^{(m)}|\lambda_1> \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= \sum_{n>0}\sum_{m<0} <\lambda_1| - H^{(n+m)} - m\hat{c}\delta_{n+m,0}|\lambda_1> \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= -\sum_{n>0} <\lambda_1|H^{(0)}|\lambda_1> \left(\xi_{2,1}\right)^n + \sum_{n>0} n\left(\xi_{2,1}\right)^n \\
&= -\frac{\xi_{2,1}}{1-\xi_{2,1}} + \frac{\xi_{2,1}}{\left(1-\xi_{2,1}\right)^2} = \frac{\xi_{2,1}^2}{\left(1-\xi_{2,1}\right)^2} \qquad \text{(B.26)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\lambda_1|V_-(\xi_1)V_+(\xi_2)E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1> &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} <\lambda_1|E_{-\alpha}^{(n)}E_\alpha^{(m)}E_{-\alpha}^{(0)}|\lambda_1> \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= \sum_{n>0}\sum_{m\in\mathbb{Z}} <\lambda_1|E_{-\alpha}^{(n)}\left(E_{-\alpha}^{(0)}E_\alpha^{(m)} + H^{(m)}\right)|\lambda_1> \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= 0 \qquad \text{(B.27)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< \lambda_1|E_{\alpha}^{(0)}V_-\left(\xi_1\right)V_+\left(\xi_2\right)|\lambda_1 > &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} < \lambda_1|E_{\alpha}^{(0)}E_{-\alpha}^{(n)}E_{\alpha}^{(m)}|\lambda_1 > \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m<0} < \lambda_1|\left(E_{-\alpha}^{(n)}E_{\alpha}^{(0)} + H^{(n)}\right)E_{\alpha}^{(m)}|\lambda_1 > \xi_1^{-n}\xi_2^{-m} \\
&= 0 \qquad \text{(B.28)}
\end{aligned}
$$

Nestas duas últimas expressões, note que no segundo termo de (B.27) e no segundo termo de (B.28) só sobra $H^{(0)}$ que atua nos vetores fornecendo um número e depois $E_{\pm\alpha}^{(i)}$ fica sozinho e portanto aniquila em um dos lados. Já o primeiro termo dessas expressões possuem elementos que comutam, são os que tem a raiz de mesmo sinal, e portanto sua ordem pode ser trocada de forma a aniquilar em um dos lados.

Referências

[1] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *Supersymmetry and the KdV equations for integrable hierarchies with a half integer gradation*, Nuclear Physics B 676 (2004) 537-571.

[2] J. F. Gomes, A. H. Zimerman, E. Nissimov, H. Aratyn, S. Pacheva, *Symmetry flows, conservation laws and dressing approach to integrable hierarchies*, H. Aratyn and A. Sorin. (Org.). Integrable Hierarchies in Modern Physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (2001), nlin.SI/0012042.

[3] I.Cabrera-Carnero, J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlanian, G. M. Sotkov, A. H. Zimerman, *Non abelian Toda models and constrained KP hierarchies*, Proc. of the VII International Wigner Symposium (2001), hep-th/0109117.

[4] J. F. Gomes, *A Estrutura algébrica dos modelos integráveis*, Tese de Livre Docência, UNESP (2002).

[5] J. F. Gomes, H. Aratyn, A. H. Zimerman, *Affine origin of constrained KP hierarchies*, Journal of Mathematical Physics, v. 36, p. 3419-3442 (1995), hep-th/9408104.

[6] E. Witten, Commun. Math. Phys. 92, 455 (1984).

[7] A. N. Leznov, M. V. Saveliev, Commun. Math. Phys. 89 (1983) 59.

[8] J. Balog, L. Fehér, L. O'Raifeartaigh, P. Forgács, A. Wipf, *Toda theory and W-algebras from gauged WZNW point of view*, Ann. Phys. 203 (1990) 76-136.

[9] A. Das, *Integrable Models*, World Scientific.

[10] A. Das, *Selected topics in integrable models*, hep-th/0110125.

[11] J. E. Humphreys, *An introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer Verlag (1972).

[12] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridege University Press (1990).

[13] P. Goddard, D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics*, Int. J. Modern Physics A vol. 1 No. 2 (1986) 303-414.

[14] Gu Chaohao, *Soliton theory and its applications*, Springer (1995).

[15] O. Babelon, D. Bernard, *Dressing Symmetries*, Commun.Math.Phys. 149 (1992) 279-306.

[16] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge University Press (2003).

[17] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, J. S. Guillén, *Tau-functions and dressing transformations for zero-curvature affine integrable equations*, Journal of Mathematical Physics, USA, v. 38, p. 882-901 (1997), hep-th/9606066.

[18] M. Toda, *Nonlinear Waves and Solitons*, Kluwer Academic Publishers (1989).

[19] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, Cambridge University Press (2000).

[20] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *Vertex operators and solitons of constrained KP hierarchies*, Supersymmetry and integrable models workshop, USA Springer-Verlag (1997) p. 197-210, solv-int/9711011.

[21] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *Solitons from dressing in an algebraic approach to the constrained KP hierarchy*, Journal of Physics A, v. A31, p. 9483-9492 (1998).

[22] Zh. Qiao, W. Strampp, *Negative order mKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system*, Physica A 313 (2002) 365380.

[23] C. A. Tracy, H. Widom, *Fredholm determinants and the mKdV/sinh-Gordon hierarchies*, Commun. Math. Phys. 179, 1-10 (1996), solv-int/9506006.

[24] H. Aratyn, J. F. Gomes, G. M. de Castro, M. B. Silka, A. H. Zimerman, *Supersymmetry for integrable hierarchies on loop superalgebras*, J. Phys. A (2005) 9341-9357.

[25] J. F. Gomes, A. H. Zimerman, G. S. França, *Em preparação.*