

Julio Cesar Paro

**Sobre o número mínimo de geradores  
ideais em anéis noetherianos**



1910001082



**Universidade Estadual Paulista**  
Campus de São José do Rio Preto  
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

## **Sobre o número mínimo de geradores de ideais em anéis noetherianos**

**Julio Cesar Paro**

**Orientadora**  
**Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva**

**Dissertação a ser apresentada ao Departamento de Matemática / Ibilce /  
Unesp como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em  
Ciências Matemáticas - Área de Concentração: Matemática.**



São José do Rio Preto - SP  
Abril - 2002

T 1.082/02

Xerocado



512.71  
P257s

10101055

Universidade Estadual Paulista  
Campus de São José do Rio Preto  
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Sobre o número mínimo de geradores de  
ideais em anéis noetherianos

Paro, Julio Cesar.

Sobre o número mínimo de geradores de ideais em anéis  
noetherianos / Julio Cesar Paro. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2002  
76 p. ; 30 cm.

Orientador: Aparecida Francisco da Silva

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto  
de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Álgebra comutativa. 2. Variedades algébricas. 3. Dimensão. 4.  
Altura. 5. Geradores de ideais. I. Silva, Aparecida Francisco da. II.  
Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e  
Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 512.71



São José do Rio Preto - SP  
Abril - 2002



“Tudo o que temos de decidir  
é o que fazer com o tempo  
que nos é dado.”  
*J. R. R. Tolkien*



Aos meus pais,  
Maria e Eugênio  
dedico.



# Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

À Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, por toda dedicação, paciência e estímulo durante sua valiosa orientação.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Unesp - S. J. do Rio Preto, pela formação.

À minha família, pelo incentivo e segurança que me passaram durante todo esse período.

Aos amigos da Pós-graduação pelo agradável convívio.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A Deus, por tudo.



# Resumo

A questão do número de equações necessárias para se descrever uma variedade algébrica foi proposta por Kronecker em 1882. Este problema tem sido alvo de muitos estudos na geometria algébrica. O seu equivalente algébrico, ou seja, o de determinar um número mínimo de geradores para um ideal em um anel de polinômios em  $n$  variáveis sobre um corpo, ou em um anel noetheriano teve um grande avanço com cotas estabelecidas por Forster-Swan.

Neste trabalho, apresentamos, entre outros, o Teorema Generalizado de Krull e o Teorema de Forster-Swan que nos fornecem um limite superior para o número de geradores. Encerramos o mesmo, apresentando uma classe especial de anéis e módulos, os chamados anéis ou módulos de Cohen-Macaulay. A importância de tais classes de anéis é que ela inclui os anéis associados a classes interessantes de variedades singulares, para as quais muitos resultados sobre anéis regulares podem ser generalizados.

Palavras-chave: álgebra comutativa, variedades algébricas, dimensão, altura, geradores de um ideal.



# Abstract

The question concerning the necessary number of equations to describe an algebraic variety was raised by Kronecker in 1882. This problem has been deeply studied on the algebraic geometry field. Its algebraic equivalent, that is, to determine the smallest number of generators to an ideal over a polynomial ring in  $n$  variables over a field, or over a noetherian ring, had a big progress with results established by Forster and Swan.

In this work, we present the Generalized Krull Theorem and Forster-Swan's Theorem, which give us an upper limit to the number of generators. At the end, we finish this work presenting a special class of rings and modules, known as Cohen-Macaulay rings or modules. These rings are important because they include the associated rings to interesting classes of singular varieties, to which many results about regular rings can be generalized.

Keywords: commutative algebra, algebraic varieties, dimension, height, generators of an ideal.

## Lista de Símbolos

|                         |                                                       |
|-------------------------|-------------------------------------------------------|
| $A^n$                   | conjunto de todas as $n$ -uplas dos elementos de $A$  |
| $M \setminus N$         | conjunto complementar de $N$ em $M$                   |
| $M \circ N$             | composição das aplicações $M$ e $N$                   |
| $a \mapsto b$           | $a$ tem $b$ como imagem                               |
| $\mathbb{A}^n(K)$       | espaço afim $n$ dimensional sobre $K$                 |
| $\mathbb{P}^n(K)$       | espaço projetivo $n$ dimensional sobre $K$            |
| $K^*$                   | conjunto dos elementos não nulos do corpo $K$         |
| $\mathfrak{I}(V)$       | ideal anulador da variedade $V$                       |
| $\mathfrak{I}_V(W)$     | ideal anulador da subvariedade $W$ de $V$             |
| $\mathfrak{p}_x$        | ideal primo no ponto $x$                              |
| $\mathfrak{B}(I)$       | variedade do ideal $I$                                |
| $\mathfrak{B}_V(I)$     | variedade em $V$ do ideal $I$                         |
| $K[V]$                  | anel de coordenadas da $K$ -variedade $V$             |
| $\text{Rad}(I)$         | radical do ideal $I$                                  |
| $IS$                    | ideal extensão do ideal $I$ em $S$                    |
| $A_{\text{red}}$        | anel reduzido associado a $A$                         |
| $\text{Spec}(A)$        | spectro do anel $A$                                   |
| $J(A)$                  | $J$ -spectro no anel $A$                              |
| $\text{Max}(A)$         | spectro maximal do anel $A$                           |
| $\text{Proj}(G)$        | spectro homogêneo do anel graduado $G$                |
| $\overline{A}$          | fecho do conjunto $A$                                 |
| $\overline{A}$          | fecho inteiro do anel $A$                             |
| $M \oplus N$            | soma direta de $M$ e $N$                              |
| $\dim$                  | dimensão de Krull                                     |
| $\dim_x V$              | dimensão de $V$ em $x$                                |
| $\dim_K$                | dimensão como um $K$ -espaço vetorial                 |
| $\text{codim}$          | codimensão                                            |
| $\text{edim}$           | dimensão de imersão                                   |
| $J\text{-dim}$          | $J$ -dimensão                                         |
| $g\text{-dim}$          | $g$ -dimensão                                         |
| $ht(I)$                 | altura do ideal $I$                                   |
| $M_{\mathfrak{p}}$      | localização de $M$ em relação ao primo $\mathfrak{p}$ |
| $A_{\mathfrak{p}}$      | localização de $A$ em relação ao primo $\mathfrak{p}$ |
| $\mu(M)$                | número mínimo de geradores de $M$                     |
| $\mu_{\mathfrak{p}}(M)$ | número mínimo de geradores de $M_{\mathfrak{p}}$      |
| $M_S$                   | módulo de frações com conjunto denominador $S$        |
| $A_S$                   | anel de frações com conjunto denominador $S$          |



|                      |                                                      |
|----------------------|------------------------------------------------------|
| $Q(A)$               | anel completo de frações de $A$                      |
| $\text{Ann}(M)$      | anulador de $M$                                      |
| $\text{Ann}(m)$      | anulador do elemento $m$                             |
| $\text{Supp}(M)$     | suporte de $M$                                       |
| $\text{Ass}(M)$      | conjunto dos primos associados de $M$                |
| $\text{prof}_I M$    | $I$ -profundidade de $M$                             |
| $\text{prof} M$      | profundidade de $M$                                  |
| $\text{dp} M$        | dimensão projetiva de $M$                            |
| $\mathfrak{p}^{(i)}$ | $i$ -ésima potência de um ideal primo $\mathfrak{p}$ |
| $\text{gr}_I(A)$     | anel graduado de $A$ com relação a $I$               |



# Introdução

O objetivo de nosso trabalho é apresentar alguns conceitos e resultados relativos à geometria algébrica que servem de motivação para o estudo da álgebra comutativa subjacente.

Devido ao interesse geométrico em descrever, pelo menos localmente, uma variedade como intersecção de hipersuperfícies, é claro que haja interesse, também, no correspondente problema de determinar um número mínimo de geradores para um ideal  $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$  (anel de polinômios em  $n$  variáveis sobre um corpo) ou mais geralmente um ideal num anel noetheriano  $A$ .

Os casos em que  $A$  é domínio de ideais principais ou domínio de Dedekind são bem conhecidos. No primeiro,  $\mu(I) \leq 1$  para todo  $I$  ideal de  $A$  e no segundo  $\mu(I) \leq 2$ .

O Teorema do Ideal Principal de Krull e sua generalização nos dão estimativas inferiores para o número de geradores de ideais em um anel noetheriano e o correspondente problema de determinar o número mínimo de equações necessárias para descrever uma variedade algébrica.

No Capítulo 1 apresentamos esses resultados do ponto de vista da geometria algébrica e seus correspondentes em um anel noetheriano qualquer. Finalizamos o primeiro capítulo apresentando o Teorema do Ideal Principal de Krull, sua generalização e algumas aplicações geométricas desses resultados.

No segundo Capítulo apresentamos a resposta dada por Forster ao seguinte problema: Seja  $M$  um  $A$ -módulo e  $M_{\mathfrak{p}}$  a localização de  $M$  em relação ao ideal primo  $\mathfrak{p}$ . “Se  $M_{\mathfrak{p}}$  pode ser gerado por  $r$  elementos para todo  $\mathfrak{p}$  ideal primo de  $A$ , qual é um limite superior do número de geradores de  $M$  em termos de  $r$ ?” Como veremos, Forster mostrou que  $M$  pode ser gerado por  $r + n$  elementos onde  $n = \dim A$ .

Em muitos casos este resultado pode ser ainda melhorado como por exemplo se  $A$  é semi-local. Swan provou, em 1967, que nas condições dadas anteriormente,  $M$  pode ser gerado por  $r + d$  elementos, onde  $d = \dim \text{Max}(A)$ . Mais ainda, Swan mostrou em 1962, que este é o melhor limite possível dependendo apenas de  $r$  e  $d$ , no caso em que  $M$  é projetivo.

Apresentamos também neste capítulo o exemplo investigado por Herzog para



curvas em  $\mathbb{A}^3(L)$  parametrizadas por

$$\begin{cases} x_1 = t^{n_1} \\ x_2 = t^{n_2} \\ x_3 = t^{n_3}, \end{cases}$$

$t \in L$  e  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  com  $\text{mdc}(n_1, n_2, n_3) = 1$ .

No Capítulo 3 apresentamos condição suficiente para que um ideal seja gerado por uma  $A$ -seqüência regular, dada pelo Teorema de Ferrand & Vasconcelos, bem como a caracterização de intersecções completas em anéis regulares.

Para facilitar a leitura, definições e alguns resultados (sem demonstração) são apresentados no apêndice ao final do trabalho.

# Índice

|          |                                                 |           |
|----------|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> |                                                 | <b>1</b>  |
| 1.1      | Variedades Algébricas Afins . . . . .           | 1         |
| <b>2</b> |                                                 | <b>17</b> |
| 2.1      | Dimensão e número mínimo de geradores . . . . . | 17        |
| 2.2      | Lema da Esquiva . . . . .                       | 28        |
| <b>3</b> |                                                 | <b>36</b> |
| 3.1      | Módulo Conormal e Anel Graduado . . . . .       | 36        |
| 3.2      | Anéis de Cohen-Macaulay . . . . .               | 58        |

# Capítulo 1

Conforme enunciamos na introdução, neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados relativos à geometria algébrica com o objetivo de motivar o estudo da álgebra comutativa subjacente, em particular no que concerne à representação de variedades algébricas como intersecção do menor número possível de hipersuperfícies e o problema algébrico correspondente: qual o menor número possível de geradores de ideais em anéis noetherianos. Antes, porém, veremos alguns conceitos e resultados.

## 1.1 Variedades Algébricas Afins

Seja  $\mathbb{A}^n(L)$  um espaço afim  $n$ -dimensional sobre um corpo  $L$ ,  $K \subset L$  um subcorpo.

**Definição 1.1.1** *Um subconjunto  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  é chamado  $K$ -variedade algébrica afim se existem polinômios  $f_1, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n]$  tais que  $V$  é o conjunto solução do sistema de equações*

$$f_i(X_1, \dots, X_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.1)$$

em  $\mathbb{A}^n(L)$ .

O sistema de equações definido em (1.1) é denominado **sistema de equações de  $V$** ,  $K$  é denominado **corpo de definição de  $V$**  e  $L$  o **corpo coordenado**.

São exemplos de  $K$ -variedades:

- (1) As  $K$ -variedades lineares, que constituem o conjunto de soluções de um sistema linear de equações com coeficientes em  $K$ .
- (2) As  $K$ -hipersuperfícies, definidas por uma única equação  $f(X_1, \dots, X_n) = 0$  onde  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  é um polinômio não constante.



(3) Da forma como definimos uma variedade, temos ainda: Intersecções finitas e uniões quaisquer de variedades afins são variedades afins. Pois se  $V$  e  $V'$  são duas variedades definidas por  $f_i(X_1, \dots, X_n) = 0$  e  $g_j(X_1, \dots, X_n) = 0$ , respectivamente, para obtermos a intersecção das variedades, basta considerarmos os dois sistemas juntos. Já, para a união de variedades, basta tomarmos o sistema formado por:

$$f_i(X_1, \dots, X_n) \cdot g_j(X_1, \dots, X_n) = 0, \quad i = 1, \dots, l; \quad j = 1, \dots, m.$$

Neste último exemplo obtivemos uma variedade a partir da intersecção ou da união de outras duas. Veremos a seguir uma outra forma de obter  $K$ -variedades afins definidas a partir de outras duas.

(4) Se tomarmos  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  o conjunto solução de um sistema  $f_i(X_1, \dots, X_n) = 0$ , ( $i = 1, \dots, r$ ) e  $W \subset \mathbb{A}^m(L)$  o conjunto solução do sistema  $g_j(Y_1, \dots, Y_m) = 0$ , ( $j = 1, \dots, s$ ) o produto cartesiano  $V \times W \subset \mathbb{A}^{n+m}(L)$  é descrito pela união de dois sistemas de polinômios considerados como elementos de  $K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ .

#### Observações:

(i) Uma variedade definida por um sistema de polinômios homogêneos é chamada variedade homogênea.

(ii) No caso  $n = 3$  as hipersuperfícies são chamadas simplesmente de superfícies.

(iii) Pela definição, toda variedade afim é uma intersecção de hipersuperfícies.

(iv) Sobre um corpo qualquer uma hipersuperfície pode se constituir no conjunto vazio ou apenas num ponto. No entanto, sobre corpos algebricamente fechados, não temos variedades vazias. Por exemplo,  $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -1\} = \emptyset$ , se  $K = \mathbb{R}$ , o que não ocorre se  $K = \mathbb{C}$ .

(v) É fato conhecido que uma  $K$ -variedade linear num espaço  $n$ -dimensional que é descrita por um sistema linear de equações de posto  $r$  tem dimensão  $n - r$  e que toda variedade linear de dimensão  $d$  pode ser descrita por  $n - d$  equações. Para variedades quaisquer os fatos correspondentes são essencialmente mais difíceis de serem provados e ao invés de igualdades, obtemos muitas vezes, apenas estimativas.

(vi) Uma  $K$ -variedade  $V$  é também uma  $K'$ -variedade para todo  $K' \subset L$  que contém todos os coeficientes de um sistema de equações definindo  $V$ , por exemplo, se  $K \subset K'$ .

(vii) O conceito de  $K$ -variedade é invariante por transformações de coordenadas afim, isto é, por meio de mudanças de variáveis:



$$X_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} Y_k + b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

onde os coeficientes  $a_{ik}$  e  $b_i$  pertencem a  $K$ .

**Definição 1.1.2** *Seja  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  uma variedade. O conjunto  $\mathfrak{I}(V)$  definido por*

$$\mathfrak{I}(V) = \{F \in K[X_1, \dots, X_n] \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in V\}$$

*é chamado ideal anulador de  $V$  em  $K[X_1, \dots, X_n]$ .*

**Exemplo 1.1.3** *Para  $V = \{(x, y) \in L^2; x^2 = 0\}$ ,  $\mathfrak{I}(V) = (x)$ .*

**Proposição 1.1.4** *Seja  $L$  algebricamente fechado e  $n \geq 1$ . Seja  $H \subset \mathbb{A}^n(L)$  uma  $K$ -hipersuperfície definida por uma equação  $F = 0$  e  $F = cF_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot F_s^{\alpha_s}$  uma decomposição de  $F$  em produto de potência de polinômios irredutíveis  $F_i$ , dois a dois não associados e  $c \in K^*$ . Então  $\mathfrak{I}(H) = (F_1 \cdot \dots \cdot F_s)$ .*

*Demonstração:* Como  $F(x) = 0$  para todo  $x \in H$  temos que  $F \in \mathfrak{I}(H)$  e é claro que  $F_1 \cdot \dots \cdot F_s \in \mathfrak{I}(H)$ .

Mostremos então que qualquer  $G \in \mathfrak{I}(H)$  é divisível por todos os  $F_i$ 's para  $i = 1, \dots, s$ .

Suponhamos que para algum  $i = 1, \dots, s$ ,  $F_i$  não é um divisor de  $G$ , e que  $F_i$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$F_i = \varphi_0 + \varphi_1 X_n + \dots + \varphi_t X_n^t.$$

Como  $F_i$  e  $G$  são relativamente primos em  $K(X_1, \dots, X_{n-1})[X_n]$ , temos então dois polinômios  $a_1$  e  $a_2$  em  $K[X_1, \dots, X_n]$  e um polinômio  $d$  em  $K[X_1, \dots, X_{n-1}]$  com  $d \neq 0$  tais que

$$d = a_1 F_i + a_2 G.$$

Mas, fora de qualquer  $K$ -variedade  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  com  $V \neq \mathbb{A}^n(L)$  há infinitos pontos. Logo existe  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in L^{n-1}$  tal que  $d(x_1, \dots, x_{n-1})\varphi_t(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ .

Tomando  $x_n$  em  $L$  com  $F_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ , temos  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in H$ . Como  $G \in \mathfrak{I}(H)$ , temos que  $G(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ , o que gera uma contradição pois  $d(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ .

■



**Definição 1.1.5** O conjunto de zeros do ideal  $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$  é o conjunto dos pontos de  $\mathbb{A}^n(L)$  que anulam todos os polinômios em  $I$ . Tal conjunto será denotado por  $\mathfrak{B}(I)$  e será chamado a **variedade de  $I$** .

Para um ideal  $I$  de um anel de polinômios  $K[X_1, \dots, X_n]$  sobre um corpo  $K$  e uma extensão  $L|K$ , o conjunto  $\mathfrak{B}(I)$ , pode ser vazio. Entretanto o Teorema dos Zeros de Hilbert nos dá condições para  $\mathfrak{B}(I)$  ser não vazio, senão vejamos.

**Proposição 1.1.6** Se  $A|K$  é uma extensão de corpos e  $A$  é obtido a partir de  $K$  por adjunção com um número finito de elementos, então  $A|K$  é algébrica.

Demonstração: Vide [7], Proposição 1.3.2, página 16.

■

**Teorema 1.1.7 (Teorema dos Zeros de Hilbert)** Se  $L$  é algebricamente fechado e  $I \neq K[X_1, \dots, X_n]$ , então  $\mathfrak{B}(I)$  não é vazio.

Demonstração: Para um ideal  $I$  existe um ideal maximal  $M$  de  $K[X_1, \dots, X_n]$  com  $M \supset I$ .  $A := K[X_1, \dots, X_n]/M$  é portanto o corpo obtido a partir de  $K$  pela adjunção do anel das classes laterais  $\epsilon_i$  de  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Pela Proposição 1.1.6 a extensão  $A|K$  é algébrica, portanto existe um  $K$ -homomorfismo  $\phi : A \rightarrow L$ , desde que  $L$  seja algebricamente fechado. Então  $(\phi(\epsilon_1), \dots, \phi(\epsilon_n)) \in L^n$  é o zero de  $M$ , e portanto também é o zero de  $I$ .

■

Na verdade o Teorema 1.1.7 é equivalente à Proposição 1.1.6 como pode ser visto em [7].

**Corolário 1.1.8** Seja  $K$  um corpo e  $M$  um ideal maximal do anel de polinômios  $K[X_1, \dots, X_n]$ . As seguintes afirmações são verdadeiras

- (i)  $K[X_1, \dots, X_n]/M$  é uma extensão finita do corpo  $K$ .
- (ii) Para toda extensão  $L$  de  $K$  o ideal  $M$  tem um número finito de zeros em  $L^n$ .
- (iii) Se  $K$  é algebricamente fechado, então existem elementos  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in K$  tais que  $M = (X_1 - \epsilon_1, \dots, X_n - \epsilon_n)$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 1.3.6, página 17.

■

**Observação:** Sendo  $K[X_1, \dots, X_n]$  noetheriano, todo ideal  $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$  possui um sistema finito de geradores  $f_1, \dots, f_m$ . Segue que  $\mathfrak{B}(I)$  é uma  $K$ -variedade em  $\mathbb{A}^n(L)$ , definida pelo sistema de equações  $f_i = 0$  para  $i = 1, \dots, m$ .

**Proposição 1.1.9** *Com as notações anteriores temos:*

- (i)  $\mathfrak{I}(\mathbb{A}^n(L)) = (0)$  se  $L$  é infinito e  $\mathfrak{I}(0) = (1)$ .
- (ii) Para todo conjunto  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$ ,  $\mathfrak{I}(V) = \text{Rad}(\mathfrak{I}(V))$ .
- (iii) Para toda variedade  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$ ,  $\mathfrak{B}(\mathfrak{I}(V)) = V$ .
- (iv) Para duas variedades  $V_1$  e  $V_2$  temos  $V_1 \subset V_2$  se, e somente se,  $\mathfrak{I}(V_1) \supset \mathfrak{I}(V_2)$  e  $V_1 \subsetneq V_2$  se, e somente se,  $\mathfrak{I}(V_1) \supsetneq \mathfrak{I}(V_2)$ .
- (v) Para duas variedades  $V_1, V_2$  temos  $\mathfrak{I}(V_1 \cup V_2) = \mathfrak{I}(V_1) \cap \mathfrak{I}(V_2)$  e  $V_1 \cup V_2 = \mathfrak{B}(\mathfrak{I}(V_1) \cdot \mathfrak{I}(V_2))$ .
- (vi) Para toda família  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de variedades  $V_\lambda$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \mathfrak{B} \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{I}(V_\lambda) \right).$$

Demonstração: Vide [7], Proposição 1.1.8, página 7.

■

**Definição 1.1.10** *Seja  $V$  uma  $K$ -variedade. Dizemos que  $V$  é uma  $K$ -variedade irreduzível se para toda  $V_1, V_2$   $K$ -variedades com  $V = V_1 \cup V_2$  tem-se  $V = V_1$  ou  $V = V_2$ .*

O conceito de irreduzibilidade depende do corpo de definição  $K$ . Por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$  temos  $V(X^2 + Y^2) = \{(0, 0)\}$  ao passo que em  $\mathbb{C}^2$  esta variedade é composta por duas retas concorrentes.

**Proposição 1.1.11** *Uma  $K$ -variedade  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  é irreduzível se, e somente se, o ideal  $\mathfrak{I}(V)$  é primo.*

Demonstração: Sejam  $V$  uma variedade irreduzível e  $f_1, f_2 \in K[X_1, \dots, X_n]$  polinômios tais que  $f_1 \cdot f_2 \in \mathfrak{I}(V)$ . Para  $H_i = \mathfrak{B}(f_i)$ ;  $i = 1, 2$  temos  $V = (V \cap H_1) \cup (V \cap H_2)$  de onde segue que  $V = V \cap H_1$  ou  $V = V \cap H_2$ , ou seja,  $V \subset H_1$  ou  $V \subset H_2$ , isto é,  $f_1 \in \mathfrak{I}(V)$  ou  $f_2 \in \mathfrak{I}(V)$  pelo item (iv) da Proposição 1.1.9. Portanto  $\mathfrak{I}(V)$  é um ideal primo.

Mostremos agora a recíproca. Seja  $\mathfrak{I}(V)$  um ideal primo. Suponhamos que  $V_1$  e  $V_2$  são  $K$ -variedades tais que  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V \neq V_1$  e  $V \neq V_2$ . Deste modo  $\mathfrak{I}(V) =$

$= \mathfrak{I}(V_1) \cap \mathfrak{I}(V_2)$  com  $\mathfrak{I}(V) \neq \mathfrak{I}(V_1)$  e  $\mathfrak{I}(V) \neq \mathfrak{I}(V_2)$ . Portanto existem polinômios  $f_1 \in \mathfrak{I}(V_1)$  e  $f_2 \in \mathfrak{I}(V_2)$  tais que  $f_1 \cdot f_2 \notin \mathfrak{I}(V)$ , o que contradiz a hipótese. ■

**Corolário 1.1.12** *Considerando  $L$  algebricamente fechado, uma  $K$ -hipersuperfície  $H \subset \mathbb{A}^n(L)$  é irredutível se, e somente se,  $\mathfrak{I}(H)$  é primo, ou equivalentemente, se e somente se, o ideal  $\mathfrak{I}(H)$  for gerado por um polinômio irredutível.*

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 1.1.11. ■

**Corolário 1.1.13** *Uma  $K$ -hipersuperfície  $H$  pode ser representada na forma*

$$H = \bigcup_{i=1}^s H_i, \quad \text{com} \quad H_i \neq H_j \text{ para } i \neq j,$$

onde cada  $H_i$  é uma  $K$ -hipersuperfície irredutível. Esta representação é única a menos da ordem das  $K$ -hipersuperfícies.

Demonstração: Sejam  $\mathfrak{I}(H) = (F_1 \cdot \dots \cdot F_s)$  e  $H_i = \mathfrak{V}(F_i)$ . Então  $H = H_1 \cup \dots \cup H_s$  e pelo Corolário 1.1.12 cada  $H_i$  é uma  $K$ -hipersuperfície irredutível.

Se  $H = H'_1 \cup \dots \cup H'_t$  é outra representação onde  $\mathfrak{I}(H'_j) = (G_j)$  com  $G_j \in K[X_1, \dots, X_n]$  ( $j = 1, \dots, t$ ) então

$$\mathfrak{I}(H) = (F_1 \cdot \dots \cdot F_s) = (G_1 \cdot \dots \cdot G_t)$$

e portanto  $F_1 \cdot \dots \cdot F_s = a G_1 \cdot \dots \cdot G_t$  com  $a \in K^*$ . Pelo Teorema da Fatoração Única temos  $t = s$  e ordenando adequadamente os índices temos  $H'_i = H_i$  para  $i = 1, \dots, s$ . ■

**Corolário 1.1.14** *Se  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é uma família arbitrária de  $K$ -variedades em  $\mathbb{A}^n(L)$  então  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  é uma  $K$ -variedade.*

Demonstração: Vide [7], Corolário 1.2.7, página 12. ■

Sobre  $\mathbb{A}^n(L)$  temos, naturalmente, a definição de uma topologia cujos fechados são as  $K$ -variedades uma vez que a união finita e intersecções arbitrárias de  $K$ -variedades em  $\mathbb{A}^n(L)$  são  $K$ -variedades. Esta topologia é chamada  **$K$ -topologia** ou **Topologia de Zariski** sobre  $\mathbb{A}^n(L)$  com respeito a  $K$ . Se  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  é uma

$K$ -variedade,  $V$  é munida da topologia de Zariski induzida de  $\mathbb{A}^n(L)$ . Seus fechados são subvariedades  $W \subset V$ .

O Teorema dos Zeros de Hilbert, nos permite estabelecer uma correspondência bijetiva entre ideais radicais de  $K[X_1, \dots, X_n]$  e as variedades, para corpos algebricamente fechados.

**Proposição 1.1.15** *Seja  $L|K$  uma extensão de corpos, onde  $L$  é algebricamente fechado. A associação  $V \mapsto \mathfrak{I}(V)$  define uma bijeção do conjunto de todas as  $K$ -variedades  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  no conjunto de todos os ideais  $I$  de  $K[X_1, \dots, X_n]$  com  $\text{Rad}(I) = I$ . Para todo ideal  $I$  de  $K[X_1, \dots, X_n]$ ,*

$$\text{Rad}(I) = \mathfrak{I}(\mathfrak{B}(I)).$$

**Demonstração:** Pela Proposição 1.1.11 a associação  $V \mapsto \mathfrak{I}(V)$  é injetora. Provemos então a sobrejetividade da aplicação.

Para todo ideal  $I$  de  $K[X_1, \dots, X_n]$  temos que  $\text{Rad}(I) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{B}(I))$ . Agora seja  $F \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B}(I))$ ,  $F \neq 0$ . Mostraremos que  $F \in \text{Rad}(I)$ .

No anel de polinômios  $K[X_1, \dots, X_n, T]$  com uma indeterminada a mais  $T$ , formamos o ideal  $J$  gerado por  $I$  e  $F.T - 1$ . Se  $(x_1, \dots, x_n, t) \in L^{n+1}$  é um zero de  $J$ , então  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{B}(I)$ , portanto  $F(x_1, \dots, x_n).t - 1 = -1$ . Mas  $(x_1, \dots, x_n, t)$  também é um zero de  $F.T - 1$ , o que é uma contradição. Como  $J$  não tem zeros, pelo Teorema 1.1.7  $J = K[X_1, \dots, X_n, T]$ . Temos então uma equação

$$1 = \sum_{i=1}^s R_i F_i + S(F.T - 1)$$

com  $R_i, S \in K[X_1, \dots, X_n, T]$  e  $F_i \in I$  para  $i = 1, \dots, s$ . Seja

$$\varphi : K[X_1, \dots, X_n, T] \rightarrow K(X_1, \dots, X_n)$$

o  $K$ -homomorfismo com  $\varphi(X_i) = X_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) e  $\varphi(T) = \frac{1}{F}$ . Então

$$1 = \sum_{i=1}^s \varphi(R_i) F_i, \quad \varphi(R_i) = \frac{A_i}{F^{\rho_i}},$$

com  $A_i \in K[X_1, \dots, X_n]$ ,  $\rho \in \mathbb{N}$ . Se  $\rho := \max_{i=1, \dots, s} \{\rho_i\}$ , temos então que  $F^\rho \in (F_1, \dots, F_s)$ , portanto  $F \in \text{Rad}(I)$ . ■



**Corolário 1.1.16** (i) Para dois ideais  $I_1, I_2 \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ,  $\mathfrak{B}(I_1) = \mathfrak{B}(I_2)$  se, e somente se,  $\text{Rad}(I_1) = \text{Rad}(I_2)$ .

(ii) Dois sistemas de equações algébricas  $F_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $G_j = 0$  ( $j = 1, \dots, l$ ), tem o mesmo conjunto de soluções em  $\mathbb{A}^n(L)$  se, e somente se, para todo inteiro  $i$  entre 1 e  $m$  existe um  $\varphi_i \in \mathbb{N}$  com  $F_i^{\varphi_i} \in (G_1, \dots, G_l)$  e para todo  $j$  inteiro entre 1 e  $l$  existe um  $\sigma_j \in \mathbb{N}$  tal que  $G_j^{\sigma_j} \in (F_1, \dots, F_m)$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 1.3.8, página 18. ■

**Corolário 1.1.17** (i) Seja  $K'|K$  uma extensão de corpos com  $K' \subset L$ , e seja  $\mathfrak{I}(V)$  o ideal de uma  $K$ -variedade  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  em  $K[X_1, \dots, X_n]$ . Então o ideal de  $V$  em  $K'[X_1, \dots, X_n]$  é

$$\text{Rad}(\mathfrak{I}(V)K'[X_1, \dots, X_n]).$$

(ii) Sejam  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  e  $W \subset \mathbb{A}^m(L)$  duas  $K$ -variedades e  $\mathfrak{I}(V) \subset K[X_1, \dots, X_n]$  e  $\mathfrak{I}(W) \subset K[Y_1, \dots, Y_m]$  seus ideais correspondentes. A variedade produto denotada por  $V \times W$  no espaço  $\mathbb{A}^{n+m}(L)$  corresponde ao ideal  $\mathfrak{I}(V \times W) = \text{Rad}(\mathfrak{I}(V), \mathfrak{I}(W))$  em  $K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ .

Demonstração: Segue diretamente a Proposição 1.1.15. ■

**Definição 1.1.18** Consideraremos  $L|K$  uma extensão de corpos onde  $L$  é algebricamente fechado. Para toda  $K$ -variedade  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$ , definimos o **anel de coordenadas** de  $V$  como sendo

$$K[V] := K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{I}(V).$$

Para um subconjunto  $I$  (em particular um ideal) de  $K[V]$  podemos agora falar no conjunto de zeros  $\mathfrak{B}_V(I)$  de  $I$  em  $V$  (uma  $K$ -subvariedade de  $V$ ) e para um subconjunto  $W \subset V$  (em particular uma  $K$ -subvariedade de  $V$ ) podemos falar no ideal anulador  $\mathfrak{I}_V(W)$  em  $K[V]$ .

**Observações:** Os elementos  $\varphi$  do anel de coordenadas  $K[V]$  de uma  $K$ -variedade  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  podem ser considerados como funções  $\varphi : V \rightarrow L$ . Se  $\varphi = F + \mathfrak{I}(V)$  com  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  e se  $x = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in V$  temos  $\varphi(x) = F(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ .

Esta função está bem definida pois a igualdade não depende do representante  $F$  da classe lateral  $\varphi$ . Por exemplo, se  $x_i := X_i + \mathfrak{I}(V)$ , então  $x_i$  é a  $i$ -ésima função coordenada, que a cada  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in V$  associa a sua  $i$ -ésima coordenada  $\epsilon_i$ .



(ii)  $K[V]$  é um anel reduzido e  $V$  é irredutível se, e somente se,  $K[V]$  é domínio.

Segue, imediatamente das definições que  $\mathfrak{I}_V(W) = \mathfrak{I}(W)/\mathfrak{I}(V)$ . Temos, agora, uma versão mais abrangente para o Teorema dos Zeros de Hilbert:

**Proposição 1.1.19** *Seja  $V \subset \mathbb{A}^n(L)$  uma  $K$ -variedade. A aplicação  $W \mapsto \mathfrak{I}_V(W)$  que a cada  $K$ -variedade  $W \subset V$  associa seu ideal  $\mathfrak{I}_V$  em  $K[V]$  é uma aplicação bijetora do conjunto de todas as  $K$ -subvariedades de  $V$  no conjunto de todos os ideais  $I$  de  $K[V]$  com  $\text{Rad}(I) = I$ , que reverte a inclusão. Para cada ideal  $I$  em  $K[V]$  temos  $\text{Rad}(I) = \mathfrak{I}_V(\mathfrak{B}_V(I))$ .*

Demonstração: Vide [7], página 20. ■

Uma  $K$ -subvariedade  $W \subset V$  é irredutível se, e somente se,  $\mathfrak{I}_V(W)$  é um ideal primo de  $K[V]$ .

Estas proposições elucidam como o problema geométrico de procurar as subvariedades de uma  $K$ -variedade  $V$  se reduz do ponto de vista da álgebra comutativa, na procura dos ideais primos de  $K[V]$ .

As variedades projetivas são os conjuntos de soluções dos sistemas de equações algébricas que contém apenas polinômios homogêneos, ou seja:

**Definição 1.1.20**  *$V \subset \mathbb{P}^n(L)$  é chamado  $K$ -variedade algébrica projetiva se existem polinômios homogêneos  $F_1, \dots, F_m \in K[X_0, \dots, X_n]$  tais que  $V$  é o conjunto de todos os zeros comuns aos  $F_i$ 's.*

No caso em que  $V \subset \mathbb{P}^n(L)$ ,  $V$  é uma variedade projetiva e, analogamente ao caso algébrico, temos definidos conceitos tais como o ideal da variedade. Ocorre que, no caso projetivo  $\mathfrak{I}(V)$  é sempre um ideal homogêneo,  $\text{Rad}(\mathfrak{I}(V)) = \mathfrak{I}(V)$  e  $K[V]$  é chamado **anel de coordenadas projetivas** (ou homogêneas) de  $V$ . Neste caso  $K[V]$  é positivamente graduado e uma  $K$ -álgebra reduzida.

Consideradas as definições de dimensão de uma variedade, dimensão de Krull de um anel e a correspondência entre ideais primos de  $K[V]$  e as subvariedades irredutíveis de  $V$  temos que

$$\dim V = \dim K[V] \quad (\text{para variedades afins}). \quad (1.3)$$

e

$$\dim V = \text{g-dim } K[V] \quad (\text{para variedades projetivas}). \quad (1.4)$$

As igualdades (1.3) e (1.4) sugerem que o estudo da dimensão de variedades é equivalente ao estudo das cadeias maximais de ideais primos em álgebras finitamente geradas sobre corpos.

Segue do conceito de dimensão de Krull que  $\dim A^n(L) = n$ , e portanto as variedades projetivas e afim possuem dimensão finita.

Pelo exposto anteriormente temos, para o problema clássico proposto por Kronecker em 1882, duas versões:

- (1) **Versão algébrica:** Todo ideal radical num anel de polinômios com  $n$  variáveis sobre um corpo  $K$  é o radical de um ideal gerado por  $n + 1$  elementos.
- (2) **Versão geométrica:** Toda variedade num espaço  $n$ -dimensional é uma intersecção de  $n + 1$  hipersuperfícies.

A solução obtida por Eisenbud e Evans [5] é mais “apertada”: *Toda variedade algébrica em um espaço  $n$ -dimensional é a intersecção de  $n$ -hipersuperfícies.* Vale ressaltar que eles provaram primeiramente a versão algébrica que apresentamos a seguir:

**Teorema 1.1.21** *Seja  $A$  um anel noetheriano com  $\dim A = d < \infty$  e  $I \subset A[X]$  um ideal. Então existem  $f_1, \dots, f_{d+1} \in I$  com  $\text{Rad}(I) = \text{Rad}(f_1, \dots, f_{d+1})$ .*

Demonstração: Podemos assumir que  $A$  é reduzido, pois se  $\mathfrak{n}$  é nilradical de  $A$  e considerando o teorema verdadeiro para  $A_{\text{red}} := A/\mathfrak{n}$ , então na imagem  $\bar{I}$  de  $I$  em  $A_{\text{red}}[X]$  existem elementos  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{d+1}$  com  $\text{Rad}(\bar{I}) = \text{Rad}(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{d+1})$ .

Como  $\dim A_{\text{red}} = \dim A$  se para cada  $\bar{f}_i$  escolhemos um representante  $f_i \in I$  temos  $\text{Rad}(I) = \text{Rad}(f_1, \dots, f_{d+1})$ .

Agora consideremos  $A$  reduzido e  $d := \dim A$ . Demonstraremos o resultado por indução sobre  $d$ . Se  $d = -1$  então a afirmação do teorema é trivial. Sejam  $d \geq 0$  e  $S$  o conjunto de todos os elementos regulares de  $A$ .  $I_S$  é um ideal principal gerado por um elemento  $f_1 \in I$ . Se  $g_1 \dots g_t$  é qualquer sistema de geradores de  $I$  então temos

$$g_j = \frac{h_j}{r_j} f_1,$$

$r_j \in A$  regular e  $h_j \in A[X]$  para  $j = 1, \dots, t$ . Então, tomando  $r = \prod r_j$  tem-se  $rg_j = \tilde{h}_j f_1$  para todo  $j = 1, \dots, t$ ,  $\tilde{h}_j \in A[X]$  e  $r$  regular. Assim,

$$rI^\sigma \subset f_1 A[X] \subset I \tag{1.5}$$

para algum  $\sigma \in \mathbb{N}^+$  suficientemente grande e, portanto

$$\mathfrak{B}(I) \subset \mathfrak{B}(f_1) \subset \mathfrak{B}(rI) = \mathfrak{B}(r) \cup \mathfrak{B}(I). \tag{1.6}$$



Se  $r$  é uma unidade de  $A$ , então  $\mathfrak{B}(r) = \emptyset$  e o resultado segue. Caso contrário, tomando  $\bar{A} = A/(r)$ , como  $r$  é regular, temos  $\dim \bar{A} \leq \dim A - 1$ . Se  $\bar{I}$  é a imagem de  $I$  em  $\bar{A}[X]$ , então por hipótese de indução existem elementos  $\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{d+1} \in \bar{I}$  com  $\text{Rad}(\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{d+1}) = \text{Rad}(\bar{I})$ .

Escolhendo para cada  $\bar{f}_i$  um representante  $f_i \in I$  ( $i = 2, \dots, d+1$ ), tem-se

$$\text{Rad}(r, f_2, \dots, f_{d+1}) = \text{Rad}(A[X]r + I).$$

e portanto

$$\mathfrak{B}(r) \cap \mathfrak{B}(I) = \mathfrak{B}(A[X]r + I) = \mathfrak{B}(r, f_2, \dots, f_{d+1}). \quad (1.7)$$

Das igualdades (1.6) e (1.7) temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(f_1, \dots, f_{d+1}) &= \mathfrak{B}(f_1) \cap \mathfrak{B}(f_2, \dots, f_{d+1}) \stackrel{(1.6)}{\subset} (\mathfrak{B}(r) \cup \mathfrak{B}(I)) \cap \mathfrak{B}(f_2, \dots, f_{d+1}) \stackrel{(1.7)}{=} \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \mathfrak{B}(r, f_2, \dots, f_{d+1}) \cup \mathfrak{B}(I) \stackrel{(1.5)}{=} \mathfrak{B}(I). \end{aligned}$$

Como, também,  $\mathfrak{B}(I) \subset \mathfrak{B}(f_1, \dots, f_{d+1})$ , pois  $(f_1, \dots, f_{d+1}) \subset I$ , obtemos a igualdade  $\text{Rad}(I) = \text{Rad}(f_1, \dots, f_{d+1})$ . ■

Como corolário temos:

**Corolário 1.1.22** *Toda variedade algébrica em  $\mathbb{A}^n(L)$  é a intersecção de  $n$   $K$ -hipersuperfícies.*

Demonstração: Para obtermos tal resultado basta tomarmos  $A := K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ ,  $X = X_n$  e aplicarmos o Teorema 1.1.21. ■

No caso de variedades projetivas necessitamos da versão graduada do teorema:

**Teorema 1.1.23** *Seja  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$  um anel noetheriano positivamente graduado, onde  $A_0 := K$  é um corpo. Seja  $\text{g-dim } A = d < \infty$  e  $A[X]$  com  $X$  um elemento homogêneo de grau  $\alpha \in \mathbb{N}^+$ . Seja  $I \subset A[X]$  um ideal homogêneo com  $I \subset M A[X]$ , onde  $M := \bigoplus_{i > 0} A_i$ . Então existem elementos homogêneos  $f_1, \dots, f_{d+1} \in I$  com  $\text{Rad}(I) = \text{Rad}(f_1, \dots, f_{d+1})$ .*

Demonstração: Análoga à do Teorema 1.1.21. ■

Como consequência deste teorema temos o seguinte resultado para variedades projetivas:

**Corolário 1.1.24** *Se  $V \subset \mathbb{P}^n(L)$  é uma  $K$ -variedade projetiva que possui um ponto  $K$ -racional (isto é, um ponto  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  com  $x_i \in K$ ) então  $V$  é a intersecção de  $n$   $K$ -hipersuperfícies projetivas.*

Demonstração: Vide [7], Corolário 5.1.7, página 126. ■

**Observação:** No caso de  $K$  ser algebricamente fechado o Teorema dos Zeros de Hilbert nos garante a existência de ponto  $K$ -racional.

Dado o interesse geométrico em descrever, pelo menos localmente, uma variedade como intersecção de hipersuperfícies, é claro que haja interesse no correspondente problema de determinar o número mínimo de geradores para um ideal  $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$  (anel de polinômios em  $n$  variáveis sobre um corpo, ou mais geralmente, um ideal num anel noetheriano, que conforme sabemos é sempre finito).

Conforme apontamos na introdução, dois resultados bastante conhecidos nesta direção são:

(i) Se  $A$  é domínio de ideais principais e  $I$  é um ideal de  $A$  então  $\mu(I) \leq 1$ .

(ii) Se  $A$  é um domínio de Dedekind,  $\mu(I) \leq 2$  para todo  $I$  ideal de  $A$ .

O Teorema do Ideal Principal de Krull e sua generalização nos dão estimativas inferiores para o número de geradores de um ideal num anel noetheriano e o número mínimo de equações necessárias para descrever uma variedade algébrica. Uma estimativa superior para o número de geradores será apresentada no próximo capítulo.

A seguir, apresentamos um resultado importante que será utilizado não apenas na demonstração do Teorema do Ideal Principal de Krull, mas como em outros pontos deste trabalho.

**Lema 1.1.25** *Sejam  $I$  um ideal,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  ( $n \geq 1$ ) ideais primos de um anel  $A$ . Se  $I \not\subset \mathfrak{p}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), então existe um  $f \in I$  com  $f \notin \mathfrak{p}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Sejam  $A$  é um anel positivamente graduado e  $I$  um ideal homogêneo de  $A$ . Se  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \text{Proj}(A)$ , então  $f$  pode ser escolhido como sendo um elemento homogêneo de grau positivo.*

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre  $n$ . Tomemos  $n = 1$ . No caso graduado precisamos apenas encontrar um elemento homogêneo  $f \in I$  de grau



positivo tal que  $f \notin \mathfrak{p}_1$ . Como  $I$  é homogêneo, existe um elemento homogêneo  $a \in I$ ,  $a \notin \mathfrak{p}_1$ . Por outro lado, como  $\mathfrak{p}_1 \in \text{Proj}(A)$  existe um elemento homogêneo de grau positivo  $b \in A$  com  $b \notin \mathfrak{p}_1$ . Basta então tomarmos  $f := ab$ .

Seja  $n > 1$  e suponhamos que o resultado seja válido para  $n - 1$  ideais primos. Assumiremos que nenhum  $\mathfrak{p}_i$  está contido em  $\mathfrak{p}_j$  para  $i \neq j$ . Então  $I \cap \mathfrak{p}_j \not\subseteq \mathfrak{p}_i$  para  $i \neq j$ . Por hipótese de indução existe um  $x_j \in I \cap \mathfrak{p}_j$ ,  $x_j \notin \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ , onde  $x_j$  é homogêneo de grau positivo (no caso graduado). Se necessário elevamos  $x_j$  a uma potência adequada, para que possamos assumir que todos tem o mesmo grau.

Tomemos  $y := \prod_{i \neq j} x_i$  e  $f := \sum_{j=1}^n y_j$ . Temos que  $y_j \in \mathfrak{p}_j \cap I$  para  $i \neq j$ , mas  $y_j \notin \mathfrak{p}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), e no caso graduado, os  $y_j$  possuem o mesmo grau, e portanto  $f$  é homogêneo de grau positivo. Pela construção temos que  $f \in I$  mas,  $f \notin \mathfrak{p}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

■

**Teorema 1.1.26** (Teorema do Ideal Principal de Krull) *Seja  $A$  um anel noetheriano e  $\mathfrak{a} \neq A$  um ideal principal. Se  $\mathfrak{p}$  é um ideal primo minimal de  $\mathfrak{a}$  então  $ht(\mathfrak{p}) \leq 1$ . Mais ainda, se  $\mathfrak{a}$  é regular então  $ht(\mathfrak{p}) = 1$ .*

Demonstração: Se  $\mathfrak{p}$  é primo minimal de  $\mathfrak{a}$ ,  $ht(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$  e  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  é primo minimal de  $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ , ou seja,  $\text{Rad}(\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ .

Agora se  $A$  é um anel local com ideal maximal  $\mathfrak{p}$  e  $\text{Rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}$ , se não existir  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  tal que  $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$  então  $ht(\mathfrak{p}) = 0$  e não há nada a mostrar.

Podemos supor, então, que  $A$  é um anel local onde o ideal maximal  $\mathfrak{m}$  é um divisor primo minimal de  $\mathfrak{a}$ . Assim para todo  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ ,  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$  e  $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ , mostremos que  $ht(\mathfrak{q}) = 0$ , ou equivalentemente que  $\dim A_{\mathfrak{q}} = ht(\mathfrak{q}) = 0$ .

Se  $\mathfrak{q}^{(i)}$  é a imagem inversa de  $\mathfrak{q}^i A_{\mathfrak{q}}$  (a “ $i$ -ésima potência simbólica de  $\mathfrak{q}$ ”), temos

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(1)} \supseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(2)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(n)} \supseteq \dots$$

Tomando  $\overline{A} = A/\mathfrak{q}$  segue que  $\overline{A}$  é artiniano pois  $\text{Rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}$  é ideal maximal de  $A$  e assim a sequência

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(1)}/\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(2)}/\mathfrak{a} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{a} \supseteq \dots$$

é estacionária, ou seja, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{a} + \mathfrak{q}^{(n+1)}$ . Provemos então que  $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{a}\mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)}$ .

Sabemos que

$$\mathfrak{a}\mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}. \quad (1.8)$$

Se  $b \in \mathfrak{q}^{(n)}$  então  $b \in a\mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)}$ , ou seja,  $b = ar + x$  com  $r \in A$  e  $x \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ . Como  $\mathfrak{q}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$  temos  $ar \in \mathfrak{q}^{(n)}$ . Além disso,  $a \notin \mathfrak{q}$ , com  $\mathfrak{q}^{(n)}$   $\mathfrak{q}$ -primário temos que  $r \in \mathfrak{q}^{(n)}$ . Deste modo  $b \in a\mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)}$ , isto é,

$$\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq a\mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)}. \quad (1.9)$$

Logo de (1.8) e (1.9) temos verificada a igualdade.

Como  $A$  é local e  $a \in \mathfrak{m}$ , onde  $\mathfrak{m}$  é ideal maximal de  $A$ , pelo Lema de Nakayama temos  $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ , logo

$$\mathfrak{q}^{(n)}A_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{(n+1)}A_{\mathfrak{q}} \Rightarrow \mathfrak{q}^{(n)}A_{\mathfrak{q}} = (0)(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}).$$

Demonstremos então que  $A_{\mathfrak{q}}$  é um anel noetheriano local com ideal maximal nilpotente, portanto  $A_{\mathfrak{q}}$  é artiniano, ou seja,  $\dim A_{\mathfrak{q}} = 0 = ht(\mathfrak{q})$ . ■

Antes de passarmos à generalização do Teorema do Ideal Principal de Krull, vejamos um corolário do último teorema que será utilizado na demonstração do que segue.

**Corolário 1.1.27** *Sejam  $A$  um anel noetheriano,  $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s \in \text{Spec}(A)$  tais que  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  e  $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$ . Se existe  $\mathfrak{q}' \in \text{Spec}(A)$  tal que  $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{p}$  então existe  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  tal que  $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$  e  $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ .*

Demonstração: Como, por hipótese  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$  e  $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$  segue-se  $\mathfrak{p} \not\subseteq \left( \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{q}_i \right) \cup \mathfrak{p}'$ .

Assim, existe  $x \in \mathfrak{p}$  tal que  $x \notin \mathfrak{q}_i$  para todo  $i = 1, \dots, s$  e  $x \notin \mathfrak{p}'$ .

É sabido que todo divisor primo minimal de  $x A_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{p}' A_{\mathfrak{p}}$  é da forma  $\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$  para algum  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ ,  $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ .

Como  $ht(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}') = 1$  (pelo teorema anterior) e  $\dim A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}' A_{\mathfrak{p}} \geq 2$  (por hipótese) segue-se que  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ .

Mais ainda, como  $x \in \mathfrak{q}$ ,  $x \notin \mathfrak{q}_i$  e  $x \notin \mathfrak{p}'$  tem-se  $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$  e  $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{q}$ . Portanto  $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ . ■

**Teorema 1.1.28** (Generalização do Teorema do Ideal Principal de Krull) *Sejam  $A$  um anel noetheriano e  $I \neq A$  um ideal gerado por  $m$  elementos. Se  $\mathfrak{p}$  é ideal primo minimal de  $I$  então  $ht(\mathfrak{p}) \leq m$ .*

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre  $m$ .

Se  $m = 1$ , o resultado segue diretamente do Teorema 1.1.26.

Se  $m > 1$  e sejam  $I = (a_1, \dots, a_m)$  e  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$  os ideais divisores primos minimais de  $(a_1, \dots, a_{m-1})$ . Então, por hipótese de indução temos  $h(\mathfrak{q}_i) \leq m - 1$  ( $i = 1, \dots, s$ ).

Tomando  $\mathfrak{p}$  um divisor primo minimal de  $I$ , se existe  $i$  tal que  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_i$  então

$$ht(\mathfrak{p}) \leq ht(\mathfrak{q}_i) \leq m - 1$$

e nada mais temos a demonstrar. Supondo  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , consideremos  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_l$  uma cadeia de ideais primos de  $A$  com  $l \geq 2$ . Usando o corolário anterior, repetidas vezes, obtemos uma cadeia  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_l$  com  $\mathfrak{p}_{l-1} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$ .

Tomando  $\bar{A} = A/(a_1, \dots, a_{m-1})$ , como  $\mathfrak{p}$  é um ideal divisor primo minimal de  $(a_1, \dots, a_m)$  temos que  $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/(a_1, \dots, a_{m-1})$  é primo minimal de  $(\bar{a}_m)$ , logo  $ht(\bar{\mathfrak{p}}) \leq 1$ .

Observe que  $\mathfrak{p}_{l-1} + (a_1, \dots, a_{m-1}) \subsetneq \mathfrak{q}_i$ , para todo  $i$ , pois  $\mathfrak{p}_{l-1} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ . Portanto  $\bar{\mathfrak{p}}_{l-1} = \mathfrak{p}_{l-1} + (a_1, \dots, a_{m-1})/(a_1, \dots, a_{m-1})$  é um ideal de  $\bar{A}$  que não está contido em nenhum primo minimal de  $\bar{A}$ ;  $\mathfrak{p}_{l-1} + (a_1, \dots, a_{m-1}) \subseteq \mathfrak{p}$  e  $ht(\mathfrak{p}) = 1$ . Assim  $\mathfrak{p}$  é ideal primo minimal de  $\mathfrak{p}_{l-1} + (a_1, \dots, a_{m-1})$  e conseqüentemente  $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}$  é ideal primo minimal de  $\mathfrak{p}_{l-1} + (a_1, \dots, a_{m-1})/\mathfrak{p}_{l-1} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m-1})A/\mathfrak{p}_{l-1}$ . Temos então:

$$l - 1 \leq ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}) \leq m - 1 \Rightarrow l \leq m.$$

■

Algumas aplicações geométricas desses resultados são:

**Proposição 1.1.29** *Em um espaço  $n$ -dimensional, afim ou projetivo, seja  $V$  uma variedade  $d$ -dimensional e  $H$  uma hipersuperfície. Se  $V \cap H \neq \emptyset$  e  $V \not\subseteq H$  então toda componente irredutível de  $V \cap H$  tem dimensão  $d - 1$ .*

**Demonstração:** Como o espaço projetivo pode ser recoberto por espaços afim, é suficiente demonstrar o resultado para o caso afim.

No anel de coordenadas afim  $K[V]$  de  $V$ , um ideal principal  $(a)$  associado à hipersuperfície  $H$  é tal que  $(a) \neq K[V]$ , pois  $V \cap H \neq \emptyset$  e  $a \neq 0$ , pois  $V \not\subseteq H$ . Como  $K[V \cap H] \simeq (K[V]/(a))_{\text{red}}$ , pelo Teorema do Ideal Principal de Krull, todos os divisores primos minimais de  $(a)$  tem altura 1. Mas, então  $K[V \cap H]$  tem dimensão  $d - 1$ .

■

Este último resultado mostra que, em particular, se duas hipersuperfícies se intersectam no espaço  $n$ -dimensional sem ter qualquer componente irredutível em comum, então todas as componentes desta interseção tem dimensão  $n - 2$ . Tal fato não ocorre, em geral, se o corpo coordenado não é algebricamente fechado, como é o caso em  $\mathbb{R}^3$  de duas hipersuperfícies que se intersectam em apenas um ponto.

**Proposição 1.1.30** *Seja  $V$  uma variedade irredutível (afim ou projetiva). Sejam  $f_1, \dots, f_m \in K[V]$  elementos (homogêneos) do anel de coordenadas (homogêneas) de  $V$  cujo conjunto de zeros  $W := \mathfrak{Z}_V(f_1, \dots, f_m)$  em  $V$  é não vazio. Então para toda componente irredutível  $Z$  de  $W$  tem-se*

$$\dim Z \geq \dim V - m.$$

**Demonstração:** Apresentaremos a demonstração apenas para o caso afim, pois no caso projetivo a demonstração é análoga. Para cada  $\mathfrak{p}$  divisor primo minimal de  $(f_1, \dots, f_m)$ , pelo Teorema 1.1.28,

$$\dim K[V]/\mathfrak{p} = \dim K[V] - ht(\mathfrak{p}) \geq \dim V - m.$$

Como os anéis de coordenadas das componentes irredutíveis de  $W$  são da forma  $K[V]/\mathfrak{p}$  com  $\mathfrak{p}$  primo minimal de  $(f_1, \dots, f_m)$  temos demonstrado o resultado. ■

**Observações:** (i) As componentes irredutíveis de uma  $K$ -variedade definida pelas equações  $F_i(X_1, \dots, X_m) = 0$  tem dimensão maior ou igual a  $n - m$ .

(ii) Para descrever uma variedade algébrica  $V$  num espaço afim ou projetivo  $n$ -dimensional são necessárias  $n - \delta(V)$  equações, onde  $\delta(V)$  é o mínimo das dimensões das componentes irredutíveis de  $V$ . ( $\delta(V) \leq \dim V$ ).

(iii) Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -variedades irredutíveis de  $\mathbb{A}^n(L)$  com  $V \cap W \neq \emptyset$ . Então para cada componente irredutível  $Z$  de  $V \cap W$  tem-se

$$\dim Z \geq \dim V + \dim W - n.$$

(iv) Se  $V$  e  $W \subset \mathbb{P}^n(L)$  são variedades com  $\dim V + \dim W \geq n$  então  $V \cap W \neq \emptyset$ .



## Capítulo 2

Forster mostrou que se  $A$  é um anel noetheriano e  $M$  é um  $A$ -módulo finitamente gerado tal que todas as localizações  $M_{\mathfrak{p}}$  de  $M$ , com  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ , podem ser geradas por  $r$  elementos, então  $M$  pode ser gerado por  $r + n$  elementos onde  $n = \dim A$ . Em muitos casos, entretanto, este resultado pode ser melhorado. Por exemplo, se  $A$  é semilocal,  $M$  pode ser gerado por  $r$  elementos. Serre conjecturou que  $M$  pudesse ser gerado por  $r + d$  elementos onde  $d = \dim(\text{Max}(A))$ . Em 1967, Swan adaptando o argumento de Forster provou esta última afirmação. Aliás, em artigo de 1962, Swan havia exibido um exemplo no caso projetivo, em que  $r + d$  é o melhor limite possível dependendo apenas de  $r$  e  $d$ .

O principal objetivo deste capítulo é apresentar estes resultados e algumas aplicações.

### 2.1 Dimensão e número mínimo de geradores

Antes de iniciarmos esta seção apresentaremos algumas definições para o leitor que não esteja familiarizado com alguns conceitos aqui utilizados, ou que não se recorde destes conceitos.

**Definição 2.1.1** *Seja  $A$  um anel. O  $J$ -espectro de  $A$ , denotado  $J(A)$  é o conjunto de todos os ideais primos em  $\text{Spec}(A)$  que podem ser escritos como intersecção de ideais maximais.*

**Definição 2.1.2** *Um elemento  $m \in M$  é chamado **básico** em  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  se  $m \notin \mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$ .*

**Lema 2.1.3** *Se  $M$  é um  $A$ -módulo livre, então  $m \in M$  é básico para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$  se, e somente se,  $\langle m \rangle \neq \langle 0 \rangle$  é um somando direto de  $M$ .*

Demonstração: Vide [7], Lema 4.2.8, página 106.

■



Sejam  $A \neq \{0\}$  um anel noetheriano,  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado e  $X = J(A)$  o  $J$ -spectrum de  $A$ . Para um  $m \in M$  denotaremos por  $X(m)$  o conjunto formado por  $\mathfrak{p} \in X$  para os quais  $m$  é básico. Para  $I \subset A$  seja  $\mathfrak{B}(I)$ , o conjunto  $\{\mathfrak{p} \in X : \mathfrak{p} \supset I\}$ . Deste modo  $m$  é básico em  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}(I)$  se, e somente se, a imagem de  $m$ , representada por  $\overline{m}$ , no  $A$ -módulo  $M/IM$  é básica em  $\mathfrak{p}$  (o que equivale a dizer que  $\overline{m}$  é básico em  $\mathfrak{p}/I$ ). Feito isto temos:

**Lema 2.1.4** *Seja  $X$  noetheriano e  $d := \dim X < \infty$ . Para todo ideal  $I$  de  $A$ ,  $X(m) \cap \mathfrak{B}(I)$  possui um número finito de elementos minimais.*

Demonstração: Seja  $\overline{m}$  a imagem de  $m$  no  $A/I$ -módulo  $M/IM$ . Como  $\mathfrak{B}(I)$  pode ser identificado com  $J(A/I)$  e  $X(m) \cap \mathfrak{B}(I)$  identificado como  $X(\overline{m})$  basta mostrarmos que  $X(\overline{m})$  possui um número finito de elementos minimais. Podemos supor sem perda de generalidade  $I = (0)$ .

Se  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}$  são pontos genéricos das componentes irredutíveis de  $X$ , então

$$X(m) = \bigcup_{i=1}^t X(m_i),$$

onde  $m_i$  é a imagem de  $m$  em  $M/\mathfrak{p}_i M$  ( $i = 1, \dots, t$ ). Vamos assumir então que  $A$  é um domínio de integridade com  $(0) \in J(A)$ .

No que segue procederemos por indução sobre  $d := \dim X$ .

Se  $d = 0$ ,  $J(A)$  tem apenas um ponto e não há nada a fazer. Se  $d > 0$  e  $m$  é básico em  $(0)$ , então  $(0)$  é o único elemento minimal de  $X(m)$ .

Se  $m$  não é básico em  $(0)$ , então a imagem de  $m$  sobre o espaço vetorial  $M_S$ , onde  $S := A \setminus \{0\}$  é igual a 0, ou seja, existe um  $a \in A \setminus \{0\}$  com  $am = 0$ .  $X(m)$  pode ser identificado com  $X(\overline{m})$ , onde  $\overline{m}$  é a imagem de  $m$  no  $A/(a)$ -módulo  $M/aM$ . Como  $\dim J(A/(a)) < d$ , por hipótese de indução segue-se o resultado. ■

**Definição 2.1.5** *Sejam  $A \neq \{0\}$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. Por  $\mu(M)$  denotaremos o número mínimo de geradores de  $M$ . Se  $Ax_1 + \dots + Ax_n = M$  e  $n = \mu(M)$  dizemos que  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é um **sistema minimal de geradores**.*

**Definição 2.1.6** *Para  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  denotaremos por  $\mu_{\mathfrak{p}}(M)$  o número de elementos do menor sistema gerador do  $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo  $M_{\mathfrak{p}}$ .*

**Lema 2.1.7** *Para  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  temos  $\mu_{\mathfrak{p}}(M) \geq r + 1$  se, e somente se,  $\mathfrak{p} \supset I(M, r)$  para todo  $r \in \mathbb{N}$ , onde*

$$I(M, r) = \sum_{\{m_1, \dots, m_r\} \subset M} \text{Ann}(M / \langle m_1, \dots, m_r \rangle).$$

Demonstração: Vide [7], Lema 4.2.5, página 105. ■

**Corolário 2.1.8** (Semicontinuidade de  $\mu_{\mathfrak{p}}$ ) Para todo  $r \in \mathbb{N}$  o conjunto  $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mu_{\mathfrak{p}}(M) < r\}$  é aberto.

Demonstração: Segue diretamente do Lema. ■

**Lema 2.1.9** Sob as mesmas hipóteses do lema anterior, definamos

$$u_m := \text{Max}\{\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in X(m)\}.$$

Então existe um número finito de ideais  $\mathfrak{p} \in X(m)$  com  $\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = u_m$ .

Demonstração: Consideremos um  $\mathfrak{p} \in X(m)$  com  $\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = u_m$ . Seja  $\mu_{\mathfrak{p}}(M) := r$ .

Então  $r > 0$  e  $\mathfrak{p} \supset I(M, r-1)$ ,  $\mathfrak{p} \not\supset I(M, r)$ . Mais ainda,  $\mathfrak{p}$  é um elemento minimal de  $X(m) \cap \mathfrak{B}(I(M, r-1))$ , pois se houvesse um  $\mathfrak{q} \in X(m) \cap \mathfrak{B}(I(M, r-1))$  com  $\mathfrak{p} \supsetneq \mathfrak{q}$ , então teríamos  $\mu_{\mathfrak{q}}(M) = \mu_{\mathfrak{p}}(M) = r$  e  $u_m = \mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) < \mu_{\mathfrak{q}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{q}) \leq u_m$ , uma contradição.

Pelo Lema 2.1.4  $X(m) \cap \mathfrak{B}(I(M, r-1))$  possui um número finito de elementos, havendo portanto um número finito de ideais  $I(M, r)$ . ■

**Definição 2.1.10** Para  $k \in \mathbb{N}$ , um submódulo  $U \subset M$  é dito  $k$  vezes básico em  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  se

$$\mu_{\mathfrak{p}}(M) - \mu_{\mathfrak{p}}(M/U) \geq k.$$

**Lema 2.1.11** Sejam  $\{m_1, \dots, m_t\}$  um sistema dos elementos de  $M$  e  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$  ( $r > 0$ ) um conjunto finito contido em  $\text{Spec}(A)$ . Se  $N = \langle m_1, \dots, m_t \rangle$  é  $k_i$  vezes básico em  $\mathfrak{p}_i$  para algum  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $k_i < t$  ( $i = 1, \dots, r$ ), então existem elementos  $a_1, \dots, a_{t-1} \in A$  tais que  $\langle m_1 + a_1 m_t, \dots, m_{t-1} + a_{t-1} m_t \rangle$  é  $k_i$  vezes básico em  $\mathfrak{p}_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

Demonstração: Faremos a demonstração deste lema por indução sobre  $r$ . Para  $r = 1$  vamos supor que  $A$  é um anel local com ideal maximal  $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1$ . Seja  $U := \langle m_1, \dots, m_t \rangle$  e  $\overline{m}_i$  a imagem de  $m_i$  em  $M/\mathfrak{m}M$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Da seqüência exata

$$0 \rightarrow U + \mathfrak{m}M/\mathfrak{m}M \rightarrow M/\mathfrak{m}M \rightarrow M/U \rightarrow 0$$



e do Corolário 41(Apêndice):  $\mu(M) - \mu(M/U) = \dim_{A/\mathfrak{m}} \langle \overline{m_1}, \dots, \overline{m_t} \rangle \geq k_1$ . Assim, o resultado é válido tomando  $a_1 = \dots = a_{t-1} = 0$ .

Se  $\dim_{A/\mathfrak{m}} \langle \overline{m_1}, \dots, \overline{m_t} \rangle = k_1 - 1$ , então  $\overline{m_t}$  é linearmente independente sobre  $\{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_{t-1}}\}$ .

Como  $a_i = 0$  para  $i = 1, \dots, t-1$ ,  $i \neq k_1$ , temos que  $a_{k_1} = 1$ .

Suponhamos  $r > 1$  e que o lema já está demonstrado para  $r-1$  ideais primos. Tomemos uma ordenação tal que  $\mathfrak{p}_r$  é minimal no conjunto  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ . Então temos elementos  $a'_1, \dots, a'_{t-1} \in A$  tais que  $\langle m_1 + a'_1 m_t, \dots, m_{t-1} + a'_{t-1} m_t \rangle$  é  $k_i$  vezes básico em  $\mathfrak{p}_i$ , com  $i = 1, \dots, t-1$ .

Como  $\bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_r$ , existe um  $a \in \bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{p}_i$  com  $a \notin \mathfrak{p}_r$ . Então  $\langle m_1 + a'_1 m_t, \dots, m_{t-1} + a'_{t-1} m_t, a m_t \rangle$  também é  $k_r$  vezes básico em  $\mathfrak{p}_r$ , pois  $a$  equivale a unidade em  $A_{\mathfrak{p}_r}$ . Então existem elementos  $a''_1, \dots, a''_{t-1} \in A$  tais que  $U := \langle m_1 + a'_1 m_t + a''_1 a m_t, \dots, m_{t-1} + a'_{t-1} m_t + a''_{t-1} a m_t \rangle$  é  $k_r$  vezes básico em  $\mathfrak{p}_r$ . Como  $a \in \mathfrak{p}_i$  para  $i < r$ ,  $U$  também é  $k_i$  vezes básico em  $\mathfrak{p}_i$  com  $i < r$ , e portanto o resultado está demonstrado tomando-se  $a_i := a'_i + a''_i a$ , ( $i = 1, \dots, t-1$ ).

**Teorema 2.1.12** *Seja  $X := J(A)$  noetheriano e de dimensão finita. Seja  $M = \langle m_1, \dots, m_t \rangle$  e  $\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) < t$  para todo  $\mathfrak{p} \in X(m_t)$ . Então existem elementos  $a_1, \dots, a_{t-1} \in A$  tais que*

$$M = \langle m_1 + a_1 m_t, \dots, m_{t-1} + a_{t-1} m_t \rangle$$

**Demonstração:** Se  $X(m_t) = \emptyset$ , então  $M_{\mathfrak{p}} = \langle m_1, \dots, m_{t-1} \rangle A_{\mathfrak{p}}$  para todo  $\mathfrak{p} \in X$ , em particular para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Max}(A)$ . Como  $M_{\mathfrak{p}}$  e  $M$  possuem a mesma base de geradores, tomando  $a_1 = \dots = a_{t-1} = 0$  tem-se que,  $M = \langle m_1, \dots, m_{t-1} \rangle$ , o que demonstra o resultado.

Se  $X(m_t) \neq \emptyset$ , então

$$u := \text{Max}\{\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in X(m_t)\} > 0$$

e  $t > 2$ . Temos então um número finito de ideais  $\mathfrak{p} \in X(m_t)$  com  $\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = u$ . Podemos então encontrar  $a_1 \in A$  tal que  $m_1 + a_1 m_t$  é básico para todos esses  $\mathfrak{p}$ 's.

Tomemos  $M' := M / \langle m_1 + a_1 m_t \rangle$ .  $M'$  é gerado pelas imagens  $m'_2, \dots, m'_t$  de  $m_2, \dots, m_t$  respectivamente e  $X(m'_t) \subset X(m_t)$ . Para  $\mathfrak{p} \in X(m_t)$  com  $\mu_{\mathfrak{p}} + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) = u$  temos que  $\mu_{\mathfrak{p}}(M') < \mu_{\mathfrak{p}}(M)$ , pois  $m_1 + a_1 m_t$  é básico neste  $\mathfrak{p}$  e portanto

$$u' := \text{Max}\{\mu_{\mathfrak{p}}(M') + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in X(m'_t)\} < u,$$



ou seja,  $u' < t - 1$ .

Para  $t = 2$ , temos  $X(m'_t) = \emptyset$  e  $M' = \langle 0 \rangle$ , então  $M = \langle m_1 + a_1 m_t \rangle$ .

Se  $t > 2$ , utilizando a hipótese de indução existem elementos  $a_2, \dots, a_{t-1} \in A$  com  $M' = \langle m'_2 + a_2 m'_t, \dots, m'_{t-1} a'_{t-1} m_t \rangle$ . Portanto,  $M = \langle m_1 + a_1 m_t, \dots, m_{t-1} + a_{t-1} m_t \rangle$ . ■

**Corolário 2.1.13 (Forster-Swan)** *Sejam  $A$  um anel noetheriano,  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado e  $X := J(A)$  com dimensão de Krull finita. Então*

$$\mu(M) \leq u := \text{Max}\{\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in X \cap \text{Supp}(M)\}.$$

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema. ■

Se  $\text{Spec}(A)$  é noetheriano e de dimensão finita, então o mesmo acontece com  $J(A)$ . Com isso temos outra versão do Teorema de Forster-Swan onde

$$u' := \text{Max}\{\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \dim A/\mathfrak{p} | \mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)\}.$$

Esta é uma versão mais fraca do teorema, aplicável por exemplo para um anel semilocal  $A$ . Neste tipo de anel temos  $J(A) = \text{Max}(A)$ ,  $\dim J(A) = 0$ , por outro lado, podem existir elementos  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  para os quais  $\dim A/\mathfrak{p}$  é arbitrariamente grande.

De fato, no caso geral se  $X := \text{Max}(A)$  é noetheriano e de dimensão finita (o mesmo ocorrendo com  $J(A)$ ) então

$$u \leq \dim X + \text{Max}\{\mu_{\mathfrak{m}}(M) | \mathfrak{m} \in X \cap \text{Supp}(M)\}.$$

Portanto, se para cada  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$ ,  $M$  é localmente gerado por  $r$  elementos, então,  $M$  é globalmente gerado por  $r + \dim X$  elementos.

Se  $M = I$  um ideal de  $A$ , como  $I_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$  para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  com  $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ , obtemos uma versão do Teorema de Forster-Swan para ideais dada pelo corolário a seguir:

**Corolário 2.1.14** *Seja  $J(A)$  noetheriano de dimensão  $d$ . Seja  $I$  um ideal de  $A$  e*

$$u = \text{Max}\{\mu_{\mathfrak{p}}(I) + \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in \mathfrak{B}(I)\}.$$

*Então o número de geradores de  $I$  é dado por  $\text{Max}\{u, d + 1\}$ .*



**Exemplo 2.1.15** Um anel de Dedekind é um domínio de integridade noetheriano de dimensão 1, que localmente é um domínio de ideais principais. Pelo Corolário 2.1.14, neste anel, todo ideal pode ser gerado por no máximo 2 elementos. Assim se  $A$  é domínio de Dedekind mas não é domínio de ideais principais a cota é alcançada.

**Exemplo 2.1.16** Se, para um anel semilocal com ideais maximais  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$  os anéis locais  $A_{\mathfrak{m}_i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) são domínios, então  $A$  também é um domínio de ideais principais.

**Corolário 2.1.17** Sejam  $A$  um anel semilocal com ideais maximais  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ ,  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado e  $u := \max_{i=1, \dots, r} \{\mu_{\mathfrak{m}_i}(M)\}$ . Então  $M$  é gerado por  $u$  elementos.

Demonstração: Segue do Teorema 2.1.12. ■

Observemos que, pelo Teorema Generalizado de Krull, em um anel noetheriano, qualquer ideal  $I$  é tal que  $ht(I) \leq \mu(I)$ , então a situação é ótima no caso em que  $I$  pode ser gerado por  $ht(I)$  elementos. Isto motiva as seguintes definições:

**Definição 2.1.18** Seja  $I \neq A$  um ideal em um anel noetheriano  $A$ .

- (i)  $I$  é chamado de **intersecção completa** se  $ht(I) = \mu(I)$ .
- (ii)  $I$  é chamado “**set-theoretic**” **intersecção completa** se existem elementos  $a_1, \dots, a_m \in I$  tais que  $\text{Rad}(I) = \text{Rad}(a_1, \dots, a_m)$ , onde  $m = ht(I)$ .
- (iii) Dizemos que  $I$  é **localmente uma intersecção completa** se  $I_{\mathfrak{m}}$  é uma intersecção completa em  $A_{\mathfrak{m}}$  para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$  com  $I \subset \mathfrak{m}$ .

E as correspondentes versões geométricas que são:

**Definição 2.1.19** Seja  $V$  uma  $K$ -variedade  $d$ -dimensional em um espaço afim ou projetivo de dimensão  $n$  sobre  $L$ .

- (i)  $V$  é chamada “**ideal-theoretic**” **intersecção completa** se seu ideal anulador no anel polinomial sobre  $K$  pode ser gerado por  $n - d$  elementos.
- (ii)  $V$  é chamada “**set-theoretic**” **intersecção completa** se  $V$  for a intersecção de  $n - d$   $K$ -hipersuperfícies.
- (iii) Dizemos que  $V$  é **localmente “set-theoretic” intersecção completa** se para todo  $x \in V$  o ideal de  $V$  no anel local  $0_x$  (definido sobre  $K$ ) do espaço afim ou projetivo é uma intersecção completa.



Alguns exemplos são:

- (1)  $K$ -variedades afim de dimensão nula são “set-theoretic” intersecções completas e uma  $K$ -variedade projetiva de dimensão nula é uma “set-theoretic” intersecção completa se possuir um ponto  $K$ -racional.
- (2)  $K$ -variedades afim de dimensão 0 são intersecções completas.
- (3) Existem variedades projetivas de dimensão 0 que não são intersecções completas. De fato, para todo  $r \in \mathbb{N}^+$  existe um conjunto finito de pontos  $V$  em  $\mathbb{P}^2(L)$ , cujos ideais  $\mathfrak{I}(V)$  não podem ser gerados por  $r$  elementos.

Um polinômio homogêneo,  $\sum_{\nu_0+\nu_1+\nu_2=r-1} a_{\nu_0\nu_1\nu_2} Y_0^{\nu_0} Y_1^{\nu_1} Y_2^{\nu_2}$ , de grau  $r-1$  possui  $s := \binom{r+1}{s}$  coeficientes  $a_{\nu_0\nu_1\nu_2}$ . Podemos encontrar  $s$  pontos  $P_i = \langle y_{0i}^{\nu_0}, y_{1i}^{\nu_1}, y_{2i}^{\nu_2} \rangle \in \mathbb{P}^2(L)$  tais que nenhum polinômio homogêneo de grau  $r-1$  se anula em  $V := \{P_1, \dots, P_s\}$ . Estes pontos devem ser tomados de modo que o determinante cujas linhas consistem dos  $s$  produtos  $y_{i0}^{\nu_0} y_{i1}^{\nu_1} y_{i2}^{\nu_2}$  não se anula. Para  $y_{0i} = t_i^r$ ,  $y_{1i} = t_i$ ,  $y_{2i} = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$  o determinante tem a forma

$$\left( \det \{ t_i^{\nu_0 r + \nu_1} \}_{\substack{\nu_0 + \nu_1 = r-1 \\ i=1, \dots, s}} \right).$$

O determinante não se anula se os  $t_i$ 's são considerados com indeterminadas, basta expandir utilizando-se a linha  $i = 1$  e utilizar indução. Como existem infinitos pontos em uma variedade, é possível escolher um  $t_i \in L$  ( $i = 1, \dots, s$ ) especial de modo que o determinante não se anula caso as indeterminadas assumam estes valores especiais.

Um polinômio homogêneo  $F$  em  $L[Y_0, Y_1, Y_2]$  de grau  $r$  possui  $\binom{r+2}{2} = s + r + 1$  coeficientes. Se  $V$  é tomado como anteriormente, temos que os polinômios homogêneos de grau  $r$  que se anulam sobre  $V$  constituem um espaço vetorial sobre  $L$  de dimensão  $r+1$ , pois  $F(P_i) = 0$ , ( $i = 1, \dots, s$ ) atribui a  $s$  condições de independência linear com os coeficientes de  $F$ .

Para as componentes homogêneas de  $\mathfrak{I}(V)$  temos:  $\mathfrak{I}(V)_n = \langle 0 \rangle$  para  $n = 0, \dots, r-1$  e  $\dim_L(\mathfrak{I}(V)_r) = r+1$ . Portanto,  $\mathfrak{I}(V)$  não pode ser gerado por menos do que  $r+1$  polinômios.

- (4) Existe uma conjectura de que curvas algébricas afim são sempre “set-theoretic” intersecções completas. Este resultado já foi provado para:

- (a) curvas que são localmente intersecções completas.
- (b) curvas em espaços de dimensão 3. Este resultado foi mostrado primeiramente por Szpiro e depois generalizado por Mohan Kumar para curvas em espaços de dimensão arbitrária.

(c) curvas arbitrárias, se o corpo de coordenadas possui característica prima. Esta demonstração utiliza resultados de Szpiro e Mohan Kumar.

Apresentamos, a seguir o exemplo investigado por Herzog que determinou o número mínimo de geradores para o ideal  $I = \ker(\varphi)$  onde  $C = \{(t^{n_1}, t^{n_2}, t^{n_3}), t \in L\}$  com  $\text{mdc}\{n_1, n_2, n_3\} = 1$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  e

$$\varphi : K[X_1, X_2, X_3] \rightarrow K[T]$$

$$\varphi(X_i) \mapsto T^{n_i}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Inicialmente, atribuímos a  $K[X_1, X_2, X_3]$  uma graduação na qual  $\deg(X_i) = n_i$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  e a  $K[T]$  a graduação usual, ou seja,  $\deg(T) = 1$ . Assim  $I$  é o núcleo de um homomorfismo homogêneo e  $ht(I) = 2$ .

Determinemos um sistema minimal de geradores de  $I$

Se  $F = \sum a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} X_3^{\nu_3} \in I$  é homogêneo de grau  $d$ , então

$$F(T^{n_1}, T^{n_2}, T^{n_3}) = \left( \sum a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \right) T^d = 0 \quad \text{e portanto} \quad \sum a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} = 0.$$

Tomemos  $F = \sum a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} X_3^{\nu_3} - X_1^{\bar{\nu}_1} X_2^{\bar{\nu}_2} X_3^{\bar{\nu}_3})$  onde  $X_1^{\bar{\nu}_1} X_2^{\bar{\nu}_2} X_3^{\bar{\nu}_3}$  é um monômio fixo de grau  $d$  ( $\sum \bar{\nu}_i n_i = d$ ).

Como  $I$  é um ideal primo e  $X_i \notin I$  ( $i = 1, 2, 3$ ), temos:

$F$  é uma combinação linear com coeficientes em  $K[X_1, X_2, X_3]$  de polinômios homogêneos em  $I$  da forma:

$$\varphi_1 = X_1^{c_1} - X_2^{r_{12}} X_3^{r_{13}}$$

$$\varphi_2 = X_2^{c_2} - X_1^{r_{21}} X_3^{r_{23}}$$

$$\varphi_3 = X_3^{c_3} - X_1^{r_{31}} X_2^{r_{32}}.$$

Se  $F$  contém uma das variáveis  $X_j$  com uma potência no máximo  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , podemos assumir que os  $\varphi_j$ 's que ocorrem na combinação linear também possuem esta propriedade.

Como  $\text{mdc}(n_1, n_2, n_3) = 1$ , temos, que para cada índice  $i$ , existe  $c_i \in \mathbb{N}_+$  menor inteiro positivo com  $c_i n_i \in \mathbb{N} n_j + \mathbb{N} n_k$ . Possivelmente após uma re-ordenação das variáveis podemos supor que o polinômio de menor grau dentre os  $\varphi_j$ 's seja

$$F_1 = X_1^{c_1} - X_2^{r_{12}} X_3^{r_{13}}$$



onde o expoente de  $X_1$ , dado por  $c_1$ , satisfaz a definição anterior, pois caso contrário haveria outro polinômio de grau menor. Também, pela minimalidade do grau do polinômio, temos,  $r_{12} \leq c_2$ ,  $r_{13} \leq c_3$  e com as igualdades  $r_{13} = c_3$  e  $r_{12} = c_2$  ocorrendo respectivamente somente se  $r_{12} = 0$  e  $r_{13} = 0$ .

No último caso se alterarmos a numeração de modo que  $X_2$  se torne  $X_3$ , então há apenas duas possibilidades para  $F_1$ :

$$(a) \quad F_1 = X_1^{c_1} - X_3^{c_3} \quad \text{ou}$$

$$(b) \quad F_1 = X_1^{c_1} - X_2^{r_{12}} X_3^{r_{13}} \quad (0 < r_{12} < c_2, 0 < r_{13} < c_3).$$

Como  $F_1$  é mônico em  $X_1$ , podemos dividir qualquer  $F$  homogêneo,  $F \in I$  por  $F_1$ , obtendo um resto  $R$ .  $R$  também é homogêneo,  $\deg(R) = \deg(F)$  e a potência máxima de  $X_1$  em  $R$  é  $c_1 - 1$ .

Como  $R \in I$  e  $F$  é uma combinação linear,  $R$  também pode ser representado como uma combinação linear de polinômios do tipo  $\varphi_2, \varphi_3$ . Segundo Krull, estes polinômios existem desde que  $I$  não seja um ideal principal. Seja  $F_2$  um polinômio de menor grau.

**Caso (a)** Se tivermos neste caso  $F_2 = X_3^{c'_3} - X_1^{r'_{31}} X_2^{r'_{32}}$  então

$$F_2 + X_3^{c'_3 - c_3} F = X_3^{c'_3 - c_3} X_1^{c_1} + X_1^{r'_{31}} X_2^{r'_{32}} \in I$$

tem o mesmo grau que  $F_2$  e não é divisível por  $F_1$ . Então necessariamente  $r'_{31} = 0$ .

Podemos assumir portanto, que  $F_2 = X_2^{c'_2} - X_1^{r'_{21}} X_3^{r'_{23}}$ , onde  $r'_{21} < c_1$ . Aqui devemos ter  $c'_2 = c_2$  pois, caso contrário, estaríamos contrariando a minimalidade do grau de  $F$ . Mostremos que  $I = (F_1, F_2)$ .

Caso existisse um  $F \in I \setminus (F_1, F_2)$ , então haveria um polinômio do tipo  $\varphi_3$ ,  $F_3 = X_3^{c'_3} - X_1^{r'_{31}} X_2^{r'_{32}}$  com  $r'_{3i} < c_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $c'_3 \geq c_3$  onde operando-se módulo  $(F_1, F_2)$  qualquer polinômio homogêneo  $F \in I$  pode ser reduzido a um polinômio que é combinação linear de polinômios do tipo  $\varphi_3$  com  $r'_{3i} < c_i$  ( $i = 1, 2$ ). Então

$$X_3^{c'_3 - c_3} F_1 + F_3 = X_1^{c_1} X_3^{c'_3 - c_3} - X_1^{r'_{31}} X_2^{r'_{32}} \in I \Rightarrow X_1^{c_1 - r'_{31}} X_3^{c'_3 - c_3} - X_2^{r'_{32}} \in I$$

contradizendo  $r'_{32} < c_2$ .

**Caso (b)** Após uma possível re-ordenação de  $X_2$  e  $X_3$  podemos assumir que

$$F_2 = X_2^{c_2} - X_1^{r_{21}} X_3^{r_{23}} \quad (r_{21} < c_1).$$

Devemos ter  $r_{23} \leq c_3$ . A igualdade equivale a  $r_{21} = 0$ . Se  $r_{21} = 0$ , então  $I = (F_1, F_2)$  como no caso (a).



Agora faremos uma investigação do que ocorre caso  $F_2 = X_2^{c_2} - X_1^{r_{21}} X_3^{r_{23}}$ , com  $0 < r_{21} < c_1$  e  $0 < r_{23} < c_3$ .

Nenhum polinômio do tipo  $\varphi_3$  está contido em  $(F_1, F_2)$ , (para verificar tome  $X_1 = X_2 = 0$ ), logo existe um polinômio  $F_3 = X_3^{c_3} - X_1^{r_{31}} X_2^{r_{32}} \in I$  com  $r_{31} < c_1$ ,  $r_{32} < c_2$  e necessariamente  $r_{3i} > 0$  ( $i = 1, 2$ ) pois, caso contrário,  $F_3 = X_3^{c_3}$  que não está contido em  $(F_1, F_2)$ .

Cada polinômio  $F$  do tipo  $\varphi_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), pode ser reduzido via módulo  $F_i$  a um múltiplo de um polinômio do tipo  $\varphi_j$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), com grau menor do que  $F$ . Utilizando indução sobre o grau do polinômio segue que  $I = (F_1, F_2, F_3)$ .

Se considerarmos  $I \bmod (X_1^{c_1}, X_2^{c_2}, X_3^{c_3})$ , veremos que no caso (b)  $I$  não pode ser gerado por 2 elementos. Com a devida reordenação das variáveis apenas dois casos podem ocorrer:

(♣)  $I$  possui um sistema minimal de geradores com dois polinômios

$$F_1 = X_1^{c_1} - X_3^{c_3}$$

$$F_2 = X_2^{c_2} - X_1^{r_{21}} X_3^{r_{23}} \quad (0 \leq r_{21} \leq c_1).$$

(♠)  $I$  possui sistema minimal de geradores com três polinômios

$$F_1 = X_1^{c_1} - X_2^{r_{12}} X_3^{r_{13}}$$

$$F_2 = X_2^{c_2} - X_1^{r_{21}} X_3^{r_{23}}$$

$$F_3 = X_3^{c_3} - X_1^{r_{31}} X_2^{r_{32}}$$

com  $0 < r_{ji} < c_i$ , para  $j \neq i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Podemos determinar qual dos casos ocorre, lançando mão de alguns cálculos para determinar  $c_1, c_2$  e  $c_3$ .

**$I$  é sempre uma “set-theoretic” interseção completa**

Temos que considerar somente o caso (♠). Tomemos

$$v_1 := (-c_1, r_{12}, r_{13})$$

$$v_2 := (r_{21}, -c_2, r_{23})$$

$$v_3 := (r_{31}, r_{32}, -c_3)$$

$$v := \sum_{i=1}^3 v_i = (a_1, a_2, a_3).$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^3 a_i n_i = -c_1 n_1 + (r_{21} + r_{31}) n_1 - c_2 n_2 (r_{12} + r_{32}) n_2 - c_3 n_3 (r_{13} + r_{23}) n_3 = 0.$$



Lembremos que  $c_1 n_1 \in \mathbb{N} n_2 + \mathbb{N} n_3$ , com  $c_2$  e  $c_3$  definidos analogamente e que  $0 < r_{ji} < c_i$ , para  $i = 1, 2, 3$  e  $j \neq i$ .

Podemos assumir que  $a_2$  e  $a_3$  tem o mesmo sinal, então  $a_1 = 0$  ou  $|a_1| = |-c_1 + r_{21} + r_{31}| \leq c_1$  pela definição de  $c_1$ . Como,  $0 < r_{ji} < c_i$ , temos

$$|a_1| = |-c_1 + r_{21} + r_{31}| < |-c_1 + 2c_1| = |c_1| \Rightarrow |a_1| < |c_1|.$$

Como isto não pode ocorrer segue que  $a_1 = 0$  e da mesma maneira temos  $a_2 = a_3 = 0$ .

No caso estudado ainda obtemos a informação adicional de que:

$$c_1 = r_{21} + r_{31}$$

$$c_2 = r_{12} + r_{32}$$

$$c_3 = r_{13} + r_{23}$$

ou seja, obtemos uma combinação linear dos polinômios  $F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  tal que

$$X_2^{r_{32}} F_1 + X_3^{r_{13}} F_2 + X_1^{r_{21}} F_3 = 0. \quad (2.1)$$

Seja  $R := K[X_1, X_2, X_3]/(F_3)$ .  $R$  é um domínio de integridade pois  $F_3$  é irredutível e além disso  $F_3 \notin (F_1, F_2)$ . Se  $\xi$  é a classe lateral de  $X_3$  em  $R$  podemos escrever

$$R = K[X_1, X_2] \oplus K[X_1, X_2]\xi \oplus \dots \oplus K[X_1, X_2]\xi^{c_3-1} \quad (2.2)$$

$$\xi^{c_3} = X_1^{r_{31}} X_2^{r_{32}}.$$

De (2.1) temos

$$X_2^{r_{32}c_3} F_1^{c_3} \equiv (-1)^{c_3} X_3^{r_{13}c_3} F_2^{c_3} \pmod{F_3}$$

portanto

$$X_2^{r_{32}(r_{13}+r_{23})} F_1^{c_3} \equiv (-1)^{c_3} X_1^{r_{31}r_{13}} X_2^{r_{32}r_{12}} F_2^{c_3} \pmod{F_3}$$

e como  $X_2^{r_{32}r_{13}} \notin (F_3)$  temos

$$X_2^{r_{32}} F_1^{c_3} \equiv (-1)^{c_3} X_1^{r_{31}r_{13}} F_2^{c_3} \pmod{F_3}.$$

Utilizando (2.2) e o fato de  $K[X_1, X_2]$  ser um anel fatorial temos

$$F_1^{c_3} \equiv (-1)^{c_3} X_1^{r_{31}r_{13}} P \pmod{F_3}$$

$$F_2^{c_3} \equiv X_2^{r_{32}r_{23}} P \pmod{F_3}$$

para algum  $P \in K[X_1, X_2, X_3]$ .  $P \in I$ , pois  $X_1, X_2 \notin I$ . Portanto  $I = \text{Rad}(P, F_3)$ .

Deste modo as curvas  $(t^{n_1}, t^{n_2}, t^{n_3})$  são sempre intersecções de duas superfícies com equações (quasi-) homogêneas e uma das duas equações sempre pode ser escolhida arbitrariamente a partir do sistema minimal de geradores de  $I$  dado acima.



**Exemplo 2.1.20** Classificação das curvas  $(t^3, t^4, t^5)$  e  $(t^4, t^5, t^6)$ .

(i) Para  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  e  $n_3 = 5$  temos:

$$3n_1 = n_2 + n_3, \quad 2n_2 = n_1 + n_3 \quad \text{e} \quad 2n_3 = 2n_1 + n_2,$$

isto é,

$$F_1 = X_1^3 - X_2X_3 \quad F_2 = X_2^2 - X_1X_3 \quad \text{e} \quad F_3 = X_3^2 - X_1^2X_2.$$

Portanto a curva  $(t^3, t^4, t^5)$  não é ideal-theoretic intersecção completa.

(ii) Para  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 6$  temos:

$$3n_1 = 2n_3, \quad \text{e} \quad 2n_2 = n_1 + n_3,$$

ou seja,

$$F_1 = X_1^3 - X_3^2 \quad \text{e} \quad F_2 = X_2^2 - X_1X_3.$$

Podemos então dizer que  $I = (X_1^3 - X_3^2, X_2^2 - X_1X_3)$  é uma intersecção completa.

## 2.2 Lema da Esquiva

**Definição 2.2.1** Um ideal  $\mathfrak{q}$  de um anel  $A$  é chamado **primário** se todo divisor de zero de  $A/\mathfrak{q}$  é nilpotente, ou equivalentemente se  $a, b \in A$  com  $ab \in \mathfrak{q}$  e  $a \notin \mathfrak{q}$  são dados, então existe  $\rho \in \mathbb{N}$  tal que  $b^\rho \in \mathfrak{q}$ .

**Observação:**

(i) O radical de um ideal primário é primo.

(ii) Se  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$  então  $I$  é  $\mathfrak{m}$ -primário se, e somente se,  $\text{Rad}(Q) = \mathfrak{m}$  e neste caso  $V(Q) = V(\mathfrak{m})$ .

**Definição 2.2.2** Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel noetheriano local,  $\mathfrak{q}$  um ideal  $\mathfrak{m}$ -primário.  $\mu(\mathfrak{q}) \geq \dim A$ . Em particular,  $\mu(\mathfrak{m}) \geq \dim A$ . Como  $\mathfrak{m}$  é o único divisor primo minimal de  $\mathfrak{q}$ , então  $\mu(\mathfrak{q}) \geq \text{ht}(\mathfrak{m}) = \dim A$ . Por  $\mu(\mathfrak{m})$  denotaremos  $\text{edim } A$ , portanto  $\text{edim } A \geq \dim A$ .

**Lema 2.2.3** (Lema da Esquiva) Sejam  $A$  um anel noetheriano,  $J \subset I$  dois ideais de  $A$  com  $\mathfrak{B}(J) = \mathfrak{B}(I)$ ,  $\mu(I/J) = m$  e  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s \in \text{Spec}(A)$  tais que  $I \not\subset \bigcup_{j=1}^s \mathfrak{p}_j$ .

Então existem elementos  $a_1, \dots, a_m \in I$  tais que

(i)  $I = (a_1, \dots, a_m) + J$ .



$$(ii) a_i \in \bigcup_{j=1}^s \mathfrak{p}_j \quad i = 1, \dots, m.$$

(iii) Se  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_m)$ ,  $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{B}(I)$ , então  $ht(\mathfrak{p}) \geq m$ .

Demonstração: Para demonstrarmos este lema faremos a construção dos elementos  $a_1, \dots, a_m \in I \setminus \bigcup_{j=1}^m \mathfrak{p}_j$  cujas imagens  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  em  $I/J$  são parte do sistema minimal de geradores deste ideal e que possuem a seguinte propriedade: Se  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_r)$ ,  $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{B}(I)$ , então  $ht(\mathfrak{p}) \geq r$ .

Para  $r = 0$  nada temos a demonstrar. Se  $a_1, \dots, a_r$  já foram construídos satisfazendo as condições acima para algum  $r$  com  $0 \leq r \leq m$ , tomamos um  $a \in I$  tal que  $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r, \bar{a}\}$  também faz parte do sistema minimal de geradores de  $I/J$ .

Sejam  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$  os divisores primos minimais de  $(a_1, \dots, a_r)$  que não pertencem a  $\mathfrak{B}(I)$  e seja  $X$  o conjunto dos elementos maximais com relação a inclusão de  $\{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m\}$ . Então  $X = X_1 \cup X_2$ , onde  $X_1$  é formado pelos  $\mathfrak{p} \in X$  com  $a \in \mathfrak{p}$  e  $X_2$  pelos  $\mathfrak{p} \in X$  com  $a \notin \mathfrak{p}$ . Como  $\mathfrak{B}(I) = \mathfrak{B}(J)$ ,  $J \not\subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$ , existe  $b \in J$  tal

que  $b \notin \mathfrak{p}$ , para todo  $\mathfrak{p} \in X$ .

Então existe  $\lambda \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in X_2} \mathfrak{p}$  com  $\lambda \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in X_1} \mathfrak{p}$ .

Tomando  $a_{r+1} := a + \lambda b$  temos  $a_{r+1} \notin \mathfrak{p}$ , para todo  $\mathfrak{p} \in X$ , em particular,  $a_{r+1} \notin \mathfrak{p}_j$   $j = 1, \dots, m$ .

Como  $a_{r+1} \equiv a \pmod{J}$ , as imagens de  $a_1, \dots, a_{r+1}$  em  $I/J$  são parte de um sistema minimal de geradores deste ideal. Se  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_{r+1}) \setminus \mathfrak{B}(I)$ , então  $ht(\mathfrak{p}) \geq r + 1$  desde que  $\mathfrak{p}$  contenha um dos  $\mathfrak{q}_i$ 's ( $i = 1, \dots, t$ ) e por hipótese  $ht(\mathfrak{q}_i) \geq r$ , mas  $a_{r+1} \notin \mathfrak{q}_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ) demonstrando o resultado. ■

Com o Lema da Esquiva podemos obter uma recíproca do Teorema do Ideal Principal Generalizado de Krull:

**Proposição 2.2.4** *Seja  $A$  um anel noetheriano. Se  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  tem altura  $m$ , então existem elementos  $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{p}$  tais que  $\mathfrak{p}$  é um divisor primo minimal de  $(a_1, \dots, a_m)$ .*

Demonstração: Tomemos  $I := \mathfrak{p}$  e  $J := \mathfrak{p}^2$ . Como  $\mu(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \geq \mu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) = \text{edim } A \geq \dim A_{\mathfrak{p}} = ht(\mathfrak{p}) = m$ , pelo Lema da Esquiva, existem elementos  $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{p}$  tais que  $ht(\mathfrak{p}') \geq m$ , para todo  $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(A)$  com  $(a_1, \dots, a_m) \subset \mathfrak{p}'$ ,  $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{p}'$ . Assim,  $\mathfrak{p}$  é um divisor primo minimal de  $(a_1, \dots, a_m)$ . ■

**Corolário 2.2.5** *Em todo anel noetheriano local  $(A, \mathfrak{m})$  existe um ideal  $\mathfrak{m}$ -primário  $\mathfrak{q}$  que é uma intersecção completa, isto é, tal que  $\mu(\mathfrak{q}) = \dim A$ . Temos então*

$$\dim A = \min\{\mu(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \text{ é } \mathfrak{m}\text{-primário}\}.$$

**Demonstração:** Seja  $m := \dim A$ . Pela Proposição 2.2.4 existem elementos  $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{m}$  tais que  $\mathfrak{m}$  é o único divisor primo minimal de  $(a_1, \dots, a_m)$  (pois estamos em um anel local). Tomando  $\mathfrak{q} := (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\mathfrak{q}$  é  $\mathfrak{m}$ -primário e portanto, também é uma intersecção completa.

Como  $\mu(\mathfrak{q}') \geq \dim A$  para todo ideal  $\mathfrak{m}$ -primário  $\mathfrak{q}'$ , segue a igualdade. ■

A caracterização da  $\dim_{K\text{rull}} A$  para  $(A, \mathfrak{m})$  um anel local motiva a seguinte definição:

**Definição 2.2.6** *Um conjunto  $\{a_1, \dots, a_m\}$  de elementos de um anel local noetheriano  $d$ -dimensional  $(A, \mathfrak{m})$  é chamado **sistema de parâmetros** de  $A$  se este conjunto gera um ideal  $\mathfrak{m}$ -primário. A existência deste sistema é dada pelo Corolário 2.2.5.*

Temos, agora, o seguinte resultado para as interseções completas em anéis noetherianos locais:

**Teorema 2.2.7** *Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel noetheriano local e  $\{a_1, \dots, a_m\}$  um conjunto de elementos de  $\mathfrak{m}$ . Então:*

- (i)  $\dim A \geq \dim A/(a_1, \dots, a_m) \geq \dim A - m$ .
- (ii)  $\dim A/(a_1, \dots, a_m) = \dim A - m$  se, e somente se,  $\{a_1, \dots, a_m\}$  pode ser estendido a um sistema de parâmetros de  $A$ .

**Demonstração:** (i) Seja  $\delta := \dim A/(a_1, \dots, a_m)$  e seja  $\{b_1, \dots, b_\delta\}$  um sistema de elementos de  $\mathfrak{m}$  cujas imagens em  $A/(a_1, \dots, a_m)$  formam um sistema de parâmetros deste anel. Então  $\mathfrak{q} = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_\delta)$  é um ideal  $\mathfrak{m}$ -primário. Portanto  $\mu(\mathfrak{q}) \geq \dim A \Rightarrow m + \delta \geq \dim A$ .

(ii) Se  $m + \delta = \dim A$ , então  $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_\delta\}$  é um sistema de parâmetros de  $A$ . Reciprocamente, se  $\{a_1, \dots, a_m\}$  pode ser estendido a um sistema de parâmetros pela adição de elementos  $b_1, \dots, b_t \in \mathfrak{m}$ , então  $m + t = \dim A$  e as classes laterais de  $b_1, \dots, b_t$  em  $A/(a_1, \dots, a_m)$  geram um ideal primário contido no ideal maximal deste anel. Então  $t \geq \dim A/(a_1, \dots, a_m) \geq \dim A - m = t$  e, portanto,  $\dim A - m = \dim A/(a_1, \dots, a_m)$ . ■



**Corolário 2.2.8** *Seja o ideal  $I \subset \mathfrak{m}$  uma intersecção completa;  $I = (a_1, \dots, a_m)$  com  $ht(I) = m$ . Então  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é um subsistema de parâmetros de  $A$  e  $\dim A/I = \dim A - m$ . Em particular, se  $a \in \mathfrak{m}$  não é um divisor de zero de  $A$ , então  $\dim A/(a) = \dim A - 1$ .*

*Demonstração:* Para todo primo divisor minimal  $\mathfrak{p}$  de  $I$ , temos que  $ht(\mathfrak{p}) = m$ . Tomemos  $\mathfrak{p}$  de modo que  $\dim A/I = \dim A/\mathfrak{p}$ . Pelo Teorema 2.2.7 item (i) temos que  $\dim A - m \leq \dim A/I = \dim A/\mathfrak{p} \leq \dim A - ht(\mathfrak{p}) = \dim A - m$  e portanto  $\dim A/(a_1, \dots, a_m) = \dim A - m$ . Agora, pelo item (ii) do teorema,  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é um subsistema do sistema de parâmetros de  $A$ . Se  $a \in \mathfrak{m}$  é regular então  $ht(a) = 1$ . Portanto,  $(a)$  é uma intersecção completa e  $\dim A/(a) = \dim A - 1$ . ■

**Observação:** Nem sempre os primos minimais de um ideal  $J$  têm todos a mesma altura. Por exemplo, se  $I = (XZ, YZ)$ ,  $\mathfrak{p} = (X, Y)$  é primo minimal de  $I$  mas  $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1 < \dim(A/I)$ .

Uma caracterização de intersecções completas em anéis noetherianos pode ser dada em termos de sistemas independentes. Para isso precisaremos de alguns resultados, os quais apresentamos a seguir:

**Definição 2.2.9** *Um sistema de elementos  $\{a_1, \dots, a_m\}$  ( $m \geq 0$ ) de um anel  $A$  é chamado **independente** se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $(a_1, \dots, a_m) \neq A$ .
- (ii) Se  $F \in A[X_1, \dots, X_m]$  é um polinômio homogêneo com  $F(a_1, \dots, a_m) = 0$  então todos os coeficientes de  $F$  estão contidos em  $\text{Rad}(a_1, \dots, a_m)$ .

**Observação:** O item (ii) é equivalente ao seguinte: Se  $F \in A[X_1, \dots, X_m]$  é homogêneo de grau  $d$  e  $b := F(a_1, \dots, a_m) \in (a_1, \dots, a_m)^{d+1}$ , então todos os coeficientes de  $F$  pertencem a  $\text{Rad}(a_1, \dots, a_m)$ .

**Lema 2.2.10** *Seja  $A[X]$  um anel polinomial sobre um anel noetheriano  $A$ . Para todo ideal  $I$  de  $A$  com  $I \neq A$  temos*

$$ht(IA[X]) = ht(I); \quad ht((I, X)A[X]) = ht(I) + 1.$$

*Se  $\dim A < \infty$ , então*

$$\dim A[X] = \dim A + 1.$$

*Demonstração:* Para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ ,  $\mathfrak{p}A[X]$  é um ideal primo do anel  $A[X]$  pois  $A[X]/\mathfrak{p}A[X] \simeq (A/\mathfrak{p})[X]$ . Se  $\mathfrak{b} := (\mathfrak{p}, X)A[X] \in \text{Spec}(A[X])$ , temos,  $\mathfrak{p}A[X] \cap A = \mathfrak{p}$  e  $\mathfrak{b} \cap A = \mathfrak{p}$ .



Se  $\mathfrak{p}$  é um divisor primo minimal de  $I$ , então,  $\mathfrak{p}A[X]$  é um divisor primo minimal de  $IA[X]$  e  $\mathfrak{b}$  é um divisor primo minimal de  $(I, X)A[X]$ .

Reciprocamente, se  $\mathfrak{Q}$  é um divisor primo minimal de  $IA[X]$  e  $\mathfrak{q} := \mathfrak{Q} \cap A$ , então  $\mathfrak{q}$  é um divisor primo minimal de  $I$  e  $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}A[X]$ . Se  $\mathfrak{Q}$  é um divisor primo minimal de  $(I, X)A[X]$ , então,  $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}, X)A[X]$ . Logo, basta mostrarmos o resultado para ideais primos.

Para toda cadeia de ideais primos  $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_t = \mathfrak{p}$  em  $A$  temos

$$\mathfrak{p}_0A[X] \subset \dots \subset \mathfrak{p}_tA[X] = \mathfrak{p}A[X]$$

é uma cadeia de ideais primos em  $A[X]$  e, portanto,  $ht(\mathfrak{p}A[X]) \geq ht(\mathfrak{p})$ . (\*)

Além disso  $\mathfrak{p}A[X] \subsetneq \mathfrak{b} = (\mathfrak{p}, X)A[X]$ . Como  $X$  não é um divisor de zero de  $A[X]_{\mathfrak{b}}$ , pelo Corolário 2.2.8 segue que

$$ht(\mathfrak{b}) = \dim A[X]_{\mathfrak{b}} = \dim(A[X]_{\mathfrak{b}}/(X)) + 1 = \dim A_{\mathfrak{p}} + 1 = ht(\mathfrak{p}) + 1. (**)$$

Assim de (\*) e (\*\*) temos  $ht(\mathfrak{p}) \leq ht(\mathfrak{p}A[X]) < ht(\mathfrak{b}) = ht(\mathfrak{p}) + 1$ . Portanto  $ht(\mathfrak{p}A[X]) = ht(\mathfrak{p})$  e, assim,  $\dim A[X] \geq \dim A + 1$ . Agora sejam  $\mathfrak{b} \in \text{Spec}(A[X])$  e  $\mathfrak{p} := \mathfrak{b} \cap A$ . Então

$$A[X]_{\mathfrak{b}}/\mathfrak{p}A[X]_{\mathfrak{b}} \simeq (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})[X]_{\mathfrak{b}^*}$$

com algum  $\mathfrak{b}^* \in \text{Spec}((A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})[X])$ . Como este anel é um anel de ideais principais, existe  $f \in \mathfrak{b}$  tal que  $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}[X]_{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{p}, f)A_{\mathfrak{p}}[X]_{\mathfrak{b}}$ .

Sejam  $\dim A_{\mathfrak{p}} := d$  e  $\{a_1, \dots, a_d\}$  um sistema de parâmetros de  $A_{\mathfrak{p}}$ . Então  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \text{Rad}((a_1, \dots, a_d)A_{\mathfrak{p}})$  e  $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}[X]_{\mathfrak{b}} = \text{Rad}(a_1, \dots, a_d, f)$ . Isto implica que

$$ht(\mathfrak{b}) = \dim A_{\mathfrak{p}}[X]_{\mathfrak{b}} \leq d + 1 \leq \dim A + 1.$$

Como este resultado é válido para todo  $\mathfrak{b} \in \text{Spec}(A[X])$ , segue que  $\dim A[X] \leq \dim A + 1$  obtendo assim a igualdade. ■

**Lema 2.2.11** *Sejam  $A[X]$  o anel de polinômios sobre um anel noetheriano  $A$  e  $\{a_1, \dots, a_m\}$  um sistema de elementos de  $A$  com  $(a_1, \dots, a_m) \neq A$ .  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é um sistema independente em  $A$  se, e somente se,  $\{a_1, \dots, a_m, X\}$  é independente em  $A[X]$ .*

**Demonstração:** Se  $\{a_1, \dots, a_m, X\}$  é independente em  $A[X]$ , então  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente em  $A$ , pois

$$\text{Rad}((a_1, \dots, a_m, X)A[X]) \cap A = \text{Rad}(a_1, \dots, a_m).$$

Reciprocamente, seja  $F \in A[X][X_1, \dots, X_m, T]$  um polinômio homogêneo e  $a_1, \dots, a_m$  elementos independentes em  $A$  tais que  $F(a_1, \dots, a_m, X) = 0$ .

$$F = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_m + \nu = d} \rho_{\nu_1 \dots \nu_m \nu} X_1^{\nu_1} \dots X_m^{\nu_m} T^\nu$$

com  $d = \deg F$ ,  $\rho_{\nu_1 \dots \nu_m \nu} \in A[X]$ . Tomemos  $I := (a_1, \dots, a_m)$ ,  $J := (I, X)A[X]$ . Então

$$\sum_{\nu_1 + \dots + \nu_m + \nu = d} \rho_{\nu_1 \dots \nu_m \nu} a_1^{\nu_1} \dots a_m^{\nu_m} X^\nu \in J^{d+1}$$

e  $J^{d+1} = I^{d+1} + I^d X + \dots + I X^d + X^{d+1} A[X]$ .

Comparando os coeficientes temos que

$$\sum_{\nu_1 + \dots + \nu_m + \nu = d} \rho_{\nu_1 \dots \nu_m \nu} a_1^{\nu_1} \dots a_m^{\nu_m} \in I^{d-\nu+1}$$

com  $\nu = 0, \dots, d$ .

Como  $\text{Rad}(I) \subset \text{Rad}(J)$ , segue-se que  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente,  $\rho_{\nu_1 \dots \nu_m \nu} \in \text{Rad}(I)$  para todo  $(\nu_1, \dots, \nu_m, \nu)$  e  $\rho_{\nu_1 \dots \nu_m \nu} \in \text{Rad}(J)$ . ■

Sejam  $\{a_1, \dots, a_m\} \subset A$ ,  $A$  anel com  $(a_1, \dots, a_m) \neq A$  e  $a_1$  não divisor de zero de  $A$ . No anel de frações de  $A_{a_1}$  podemos obter o subanel

$$A' := A[a_2/a_1, \dots, a_m/a_1].$$

A passagem de  $A$  para  $A'$  é um exemplo de uma transformação “monoidal”, conceito este que não faremos uma investigação sistemática porém utilizaremos apenas algumas propriedades. Seja

$$\alpha : A[Y_2, \dots, Y_m] \rightarrow A[a_2/a_1, \dots, a_m/a_1]$$

o  $A$ -epimorfismo com  $\alpha(Y_i) = a_i/a_1$  ( $i = 2, \dots, m$ ). O kernel  $\mathfrak{a}$  contém  $\mathfrak{a}^* := (a_1 Y_2 - a_2, \dots, a_1 Y_m - a_m)$  e para qualquer  $F \in \mathfrak{a}$  existe um  $\rho \in \mathbb{N}$  com  $a_1^\rho F \in \mathfrak{a}^*$ , como pode ser visto passando-se para o anel de frações  $A_{a_1}$ .

Para um polinômio homogêneo  $F \in A[X_1, \dots, X_m]$   $F(a_1, \dots, a_m) = 0$  ocorre se, e somente se,  $F(1, Y_2, \dots, Y_m) \in \mathfrak{a}$ , o que nos dá um critério para a independência de  $\{a_1, \dots, a_m\}$ .

**Lema 2.2.12** *Seja  $A$  um anel noetheriano. O sistema  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente se, e somente se, para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  com  $(a_1, \dots, a_m) \subset \mathfrak{p}$  temos*

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}A[Y_2, \dots, Y_m].$$



Demonstração: Seja  $\{a_1, \dots, a_m\}$  independente e seja  $\varphi \in \mathfrak{a}$  dado. Seja  $F \in A[X_1, \dots, X_m]$  a homogeneização de  $\varphi$ . Como  $F(a_1, \dots, a_m) = 0$ , todos os coeficientes de  $F$  assim como os de  $\varphi$  pertencem a  $\text{Rad}(a_1, \dots, a_m)$  pertencendo portanto a cada  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  com  $(a_1, \dots, a_m) \subset \mathfrak{p}$ .

Se  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}A[Y_2, \dots, Y_m]$  para todo  $\mathfrak{p}$  e  $F(a_1, \dots, a_m) = 0$  para um polinômio homogêneo  $F \in A[X_1, \dots, X_m]$ , segue que todos os coeficientes de  $F$  pertencem a  $\text{Rad}(a_1, \dots, a_m)$ , portanto  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente. ■

**Corolário 2.2.13** *Se  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é um sistema independente em um anel noetheriano  $A$  e  $m \geq 2$  então  $\{a_1, a_3, \dots, a_m\}$  é independente em  $A_1 := A[a_2/a_1]$ .*

Demonstração: Vide [7], Corolário 5.4.18, página 147. ■

A seguir apresentamos a caracterização de intersecções completas em anéis noetherianos via sistemas independentes.

**Teorema 2.2.14** *Em um anel noetheriano, seja  $I = (a_1, \dots, a_m) \neq A$  um ideal dado. Então  $ht(I) = m$  (e portanto é uma intersecção completa) se, e somente se,  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente.*

Demonstração: Seja  $I = (a_1, \dots, a_m)$ . Para  $J := (I, X)A[X]$  temos pelo Lema 2.2.10 que  $ht(J) = ht(I) + 1$  e pelo Lema 2.2.11, que  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente se, e somente se,  $\{a_1, \dots, a_m, X\}$  é independente sobre  $A[X]$ . Podemos assumir que  $a_1$  não é divisor de zero em  $A$  pois se for necessário passa-se para  $A[X]$  fazendo a adição de  $X$  ao sistema de elementos.

(i) Seja  $ht(I) = m$  e  $\mathfrak{a}^* = (a_1Y_2 - a_2, \dots, a_1Y_m - a_m)$ . Para todo primo minimal  $\mathfrak{p}$  de  $I$  temos  $\mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{p}A[Y_2, \dots, Y_m]$ . Como  $\mathfrak{a}^*$  é gerado por  $m - 1$  elementos temos  $ht(\mathfrak{b}) \leq m - 1$  para todo divisor primo minimal  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{a}^*$  com  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}A[Y_2, \dots, Y_m]$ .

$a_1 \notin \mathfrak{b}$  pois caso contrário teríamos  $IA[Y_2, \dots, Y_m] \subset \mathfrak{b}$ , o que não é possível pois de acordo com o Lema 2.2.10

$$ht(IA[Y_2, \dots, Y_m]) = ht(I) = m.$$

Como  $a_1^\rho \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{b}$  para algum  $\rho \in \mathbb{N}$ , segue que  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}A[Y_2, \dots, Y_m]$ . Pelo Lema 2.2.12  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente sobre  $A$ .

(ii) Seja  $\{a_1, \dots, a_m\}$  independente em  $A$ . Para todo divisor primo minimal  $\mathfrak{p}$  de  $I$  temos  $ht(\mathfrak{p}) \leq m$ . Assim é suficiente mostrarmos que  $ht(\mathfrak{p}) \geq m$ . Para  $m = 1$

certamente  $ht(\mathfrak{p}) = 1$ , pois  $a_1$  não é divisor de zero em  $A$ . Podemos então assumir  $m > 1$  e que o resultado é válido para  $m - 1$  elementos independentes.

$\mathfrak{p}A[Y_2]$  é um divisor primo minimal de  $IA[Y_2]$  e pelo Lema 2.2.12,  $\mathfrak{p}A[Y_2]$  contém o kernel de  $\beta : A[Y_2] \rightarrow A_1$ , onde  $\beta(Y_2) = a_2/a_1$ . Logo  $\mathfrak{p}A_1$  é um divisor primo minimal de  $IA_1 = (a_1, a_3, \dots, a_m)A_1$ . Pelo Corolário 2.2.13  $\{a_1, a_3, \dots, a_m\}$  é independente em  $A_1$  e assim  $ht(\mathfrak{p}A_1) \geq m - 1$ .

Como  $a_1Y_2 - a_2 \in \ker(\beta)$  e este elemento não é divisor de zero de  $A[Y_2]$  segue que  $a_1$  não é divisor de zero de  $A$ . Portanto

$$ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}A[Y_2]) > ht(\mathfrak{p}A_1) \geq m - 1,$$

o que demonstra o teorema. ■

**Corolário 2.2.15** *Sejam  $\{a_1, \dots, a_d\} \subset \mathfrak{m}$ , onde  $(A, \mathfrak{m})$  é anel noetheriano local e  $\dim A = d$ . Então  $\{a_1, \dots, a_d\}$  é sistema de parâmetros de  $A$  se, e somente se,  $\{a_1, \dots, a_d\}$  é independente em  $A$ .*

Demonstração: Segue do imediatamente do Teorema. ■

Um caso particularmente interessante ocorre quando  $(A, \mathfrak{m})$  é um anel noetheriano local e  $\mathfrak{m}$  é intersecção completa, ou seja,  $\text{edim } A = \dim A$ .

**Definição 2.2.16** *Um anel local  $(A, \mathfrak{m})$  é chamado **regular** se  $\text{edim } A = \dim A$ .*

Notemos que se  $\dim A = 0$ , então,  $A$  é regular se, e somente se,  $A$  é um corpo. Outro exemplo de anel regular é  $K[X_1, \dots, X_n]$  com  $K$  corpo.



## Capítulo 3

No Capítulo 3 apresentamos condições suficientes para que um ideal seja gerado por uma  $A$ -seqüência regular, dada pelo Teorema de Ferrand e Vasconcelos, bem como a caracterização de intersecções completas em anéis regulares.

### 3.1 Módulo Conormal e Anel Graduado

**Definição 3.1.1** Para um ideal  $I$  de um anel  $A$  o  $A/I$ -módulo  $I/I^2$  é chamado **módulo conormal** de  $I$ .

Temos que  $\mu(I) \geq \mu(I/I^2)$ . Com o estudo do módulo conormal esperamos obter informações a respeito de  $I$ , em particular sobre  $\mu(I)$ .

Generalizando, para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos considerar os quocientes  $\text{gr}_I^n(A) := I^n/I^{n+1}$  onde  $\text{gr}_I^0(A) := A/I$ .

Tomando  $\text{gr}_I(A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{gr}_I^n(A)$  (soma direta dos  $A/I$ -módulos),  $\text{gr}_I(A)$  é um anel graduado com a seguinte graduação: Se  $x \in a + I^{m+1} \in \text{gr}_I^m(A)$  e  $y \in b + I^{n+1} \in \text{gr}_I^n(A)$  onde  $a \in I^m$  e  $b \in I^n$  então

$$xy := ab + I^{m+n+1} \in \text{gr}_I^{n+m}(A).$$

O conceito que apresentamos a seguir foi introduzido por Krull (entre outros) para que usando  $I \subset A$  as considerações sobre grau e comparações entre coeficientes fossem feitas como num anel de polinômios.

A partir de agora, por  $A$  denotaremos um anel e  $I \subset A$  um ideal de  $A$ .

**Definição 3.1.2**  $\text{gr}_I(A)$  é chamado **anel graduado associado** de  $I$ . Se  $a \in I^n$ ,  $a \notin I^{n+1}$ , então  $L_I(a) := a + I^{n+1} \in \text{gr}_I^n(A)$  é chamado **forma líder** de  $a$  para  $I$ . Para  $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n$  tome  $L_I(a) := 0$ . O grau  $v_I(a)$  de  $L_I(a)$  também é chamado **grau** de  $a$  com respeito a  $I$ .



**Lema 3.1.3** (i) Para  $a, b \in A$ ,  $L_I(a)L_I(b) = L_I(ab)$  ou  $L_I(a)L_I(b) = 0$ .

(ii) Se  $I = (a_1, \dots, a_m)$  e  $x_i := a_i + I^2$  ( $i = 1, \dots, m$ ), então

$$\text{gr}_I(A) = A/I[x_1, \dots, x_m].$$

Demonstração: Vide [7], Lema 5.5.2, página 149. ■

**Lema 3.1.4** Seja  $\epsilon : A \rightarrow S$  um homomorfismo de anéis sobrejetor tal que  $\epsilon(I) = J$ . Se  $\mathfrak{a} := (a)$  é um ideal principal e  $L_I(a)$  é regular em  $\text{gr}_I(A)$ , então  $\text{gr}_I((a)) = (L_I(a))$  é o ideal principal gerado pela forma líder de  $a$ .

Demonstração: Vide [7], Lema 5.5.3, página 150. ■

Se  $A = P[X_1, \dots, X_n]$  é o anel polinomial sobre um anel  $P$  e  $I := (X_1, \dots, X_n)$ , então  $\text{gr}_I(A) \cong A$  (como anéis graduados). Para  $F \in A \setminus \{0\}$ ,  $L_I(F)$  é a componente homogênea de  $F$  de menor grau, e o grau de  $F$  com respeito a  $I$  é o grau desta componente.

Se  $I = (a_1, \dots, a_m)$  é um ideal de um anel  $A$ , então existe um epimorfismo de  $A/I$ -álgebras graduadas

$$\begin{aligned} \alpha : A/I[X_1, \dots, X_m] &\rightarrow \text{gr}_I(A) \\ \alpha(X_i) &= a_i + I^2. \end{aligned}$$

Da definição de sistema independente temos, então, que  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente se, e somente se,  $I \neq A$  e  $\ker(\alpha) \subset \text{Rad}(I)A/I[X_1, \dots, X_m]$  e  $\text{Rad}(I) = I$ , então a independência de  $\{a_1, \dots, a_m\}$  equivale a  $I \neq A$  e  $\alpha$  ser um isomorfismo.

**Definição 3.1.5** Seja  $M$  um  $A$ -módulo.  $a \in A$  é chamado **elemento  $M$ -regular** (ou não divisor de zero de  $M$ ) se é válida a seguinte condição:  $ax = 0$  com  $x \in M$  então  $x = 0$ . Uma sequência  $\{a_1, \dots, a_m\}$  ( $m \geq 0$ ) de elementos de  $A$  é chamada  **$M$ -seqüência regular** se

(i)  $M \neq (a_1, \dots, a_m)M$

(ii) Para  $i = 0, \dots, m-1$ ;  $a_{i+1}$  é regular em  $M/(a_1, \dots, a_i)M$ .

**Observação:**

(i) Se tomarmos  $M_i := M/(a_1, \dots, a_i)M$ , então o item (ii) da definição equivale a condição da aplicação produto

$$\begin{array}{ccc} \mu_{a_{i+1}} : M_i & \rightarrow & M_i \\ x & \mapsto & a_{i+1}x \end{array}$$

ser injetora para  $i = 0, \dots, m-1$ . Em particular  $a_1$  é regular em  $M_0 = M$ .

(ii) Se  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é  $M$ -seqüência regular e  $M$  é finitamente gerado, então  $\{a_1/1, \dots, a_m/1\}$  é  $M_{\mathfrak{p}}$ -seqüência regular para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M) \cap V(I)$ ,  $\{a_1^{\nu_1}, \dots, a_m^{\nu_m}\}$  é  $M$ -seqüência regular para todo  $\nu_i \in \mathbb{N}^+$  e  $\{a_{i+1}, \dots, a_m\}$  é  $M_i$ -seqüência regular.

**Exemplo 3.1.6** No anel polinomial  $K[X, Y, Z]$  sobre um corpo  $K$ , temos:

(i)  $\{X(X-1), XY-1, XZ\}$  é uma seqüência regular.

(ii)  $\{X(X-1), XZ, XY-1\}$  não é uma seqüência regular.

Primeiramente mostremos que  $\{X(X-1), XZ, XY-1\}$  não é uma seqüência regular em  $K[X, Y, Z]$ .

De fato,  $\bar{f} = \overline{X-1} \neq \bar{0}$  em  $K[X, Y, Z]/(X(X-1))$ , entretanto,  $\bar{f} \cdot \overline{XZ} = \overline{fXZ} = \bar{0}$ . Portanto,  $XZ$  é um divisor de zero em  $K[X, Y, Z]/(X(X-1))$ .

Mostremos que  $\{X(X-1), XY-1, XZ\}$  é uma seqüência regular em  $K[X, Y, Z]$ .

Tomemos  $K_1 := K[X, Y, Z]/(X(X-1))$ .  $\overline{f \cdot (XY-1)} = \bar{0}$  se, e somente se, existe  $g \in K[X, Y, Z]$  tal que  $f(XY-1) = gX(X-1)$ . Temos então que  $X$  e  $X-1$  dividem  $f$ , mas como  $X$  e  $X-1$  são primos entre si,  $\bar{f} = \bar{0}$  em  $K_1$ . Portanto  $XY-1$  não é divisor de zero em  $K_1$ .

Seja  $K_2 := K[X, Y, Z]/(X(X-1), XY-1)$ . Mostremos que  $XZ$  não é divisor de zero em  $K_2$ , ou seja, se

$$hXZ = gX(X-1) + f(XY-1) \quad (3.1)$$

então  $\bar{h} = \bar{0}$ .

Como  $X$  divide  $f$  então existe  $f_1 \in K[X, Y, Z]$  tal que  $f = Xf_1$ . Substituindo em (3.1) temos,

$$hXZ = gX(X-1) + f_1X(XY-1) \Rightarrow hZ = g(X-1) + f_1(XY-1). \quad (3.2)$$

Temos agora que  $Z$  divide  $g$  e  $f_1$ , daí existem  $f_2$  e  $g_1 \in K[X, Y, Z]$  tais que  $f_1 = Zf_2$  e  $g = Zg_1$ . Assim

$$\begin{aligned} hZ = g_1Z(X-1) + f_2Z(XY-1) &\Rightarrow h = g_1(X-1) + f_2(XY-1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow h - g_1(X-1) = f_2(XY-1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Temos duas possibilidades:  $h = g_1(X - 1)$  ou  $(XY - 1)$  divide  $h - g_1(X - 1)$ .

Se  $(XY - 1)$  divide  $h - g_1(X - 1)$ , então  $XY - 1$  divide  $h$ . Portanto  $\bar{h} = \bar{0}$ .

Se  $h = g_1(X - 1)$ , tem-se  $\bar{h} = \bar{0}$  pois  $X - 1 = (XY - 1) - Y(X(X - 1))$ . Assim podemos concluir que  $\{X(X - 1), XY - 1, XZ\}$  é uma seqüência regular em  $K[X, Y, Z]$ .

**Proposição 3.1.7** *Sejam  $A$  um anel,  $\{a_0, \dots, a_m\}$  ( $m \geq 0$ ) uma  $A$ -seqüência regular e  $I := (a_0, \dots, a_m)$ . Então:*

(i) *O  $A/I$  epimorfismo de  $A/I$ -módulos  $\alpha : A/I[X_0, \dots, X_m] \rightarrow \text{gr}_I(A)$  tal que  $X_i \mapsto a_i + I^2$  é um isomorfismo (em particular  $\{a_0, \dots, a_m\}$  é um sistema independente).*

(ii) *O epimorfismo de  $A$ -módulos*

$$\begin{aligned} \beta : A[Y_1, \dots, Y_m] &\rightarrow A[a_1/a_0, \dots, a_m/a_0] \\ Y_i &\mapsto a_i/a_0 \end{aligned}$$

*tem kernel  $(a_0Y_1 - a_1, \dots, a_0Y_m - a_m)$  onde os  $a_i/a_0$ 's são elementos de  $Q(A)$ .*

Demonstração: (i) Para demonstrar a outra parte observe que a afirmação em (i) equivale a dizer que para qualquer polinômio  $F \in A[X_0, \dots, X_m]$  de grau  $d$  com  $F(a_0, \dots, a_m) \in I^{d+1}$  temos  $F \in IA[X_0, \dots, X_m]$ . Agora, este é o caso se, e somente se, para cada polinômio homogêneo  $F$  com  $F(a_0, \dots, a_m) = 0$ ,  $F \in IA[X_0, \dots, X_m]$ . Então vejamos, se  $F$  com  $\deg F := d$  é dado, então

$$F(1, a_1/a_0, \dots, a_m/a_0) = (1/a_0)^d F(a_0, \dots, a_m) = 0$$

e, portanto,  $F(a_0, \dots, a_m) \in \ker(\beta)$ . De (ii) segue que todos os coeficientes de  $F$  pertencem a  $I$  pois  $a_0Y_i - a_i$  possui esta propriedade, para todo  $i = 1, \dots, m$ .

(ii) Temos que  $a_0Y_i - a_i \in J := \ker(\beta)$  para  $i = 1, \dots, m$ . Procederemos por indução sobre  $m$ . Consideremos  $m = 1$ . Para  $F(Y_1) \in J$ , usando o algoritmo da divisão, existem  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(Y_1) \in A[Y_1]$ ,  $r \in A$  tais que

$$a_0^d F(Y_1) = \varphi(Y_1)(a_0Y_1 - a_1) + r.$$

Sendo  $\{a_0, a_1\}$  uma  $A$ -seqüência regular o mesmo ocorre com  $\{a_0^d, a_1\}$ . Assim, ao tomarmos  $a_0^d F(Y_1) = \varphi(Y_1)(a_0Y_1 - a_1)$ , módulo  $a_0^d$  podemos concluir que todos os coeficientes de  $\varphi$  são divisíveis por  $a_0^d$ . Mas, então,  $F \in (a_0Y_1 - a_1)$ .

Para  $m > 1$ ,  $\beta$  é a composição

$$A[Y_1, \dots, Y_m] \xrightarrow{\beta_1} A[a_1/a_0][Y_2, \dots, Y_m] \xrightarrow{\beta_2} A[a_1/a_0, \dots, a_m/a_0]$$

onde  $\ker(\beta_1) = (a_0Y_1 - a_1)A[Y_2, \dots, Y_m]$ . Considerando  $A' := A[a_1/a_0]$  então  $A'/a_0A' = A'/(a_0, a_1)A' \cong A/(a_0, a_1)[Y_1]$  e assim  $\{a_0, \dots, a_m\}$  também é uma  $A'$ -seqüência regular pois  $\{a_2, \dots, a_m\}$  é uma  $A/(a_0, a_1)$  seqüência regular. Assim por hipótese de indução  $\ker(\beta_2) = (a_0Y_2 - a_2, \dots, a_0Y_m - a_m)$  de onde segue-se o resultado (ii). ■

Como corolário temos:

**Corolário 3.1.8** *Se  $I \subset A$  é um ideal gerado por uma  $A$ -seqüência, então os  $A/I$ -módulos  $I^n/I^{n+1}$  são livres e mais, se  $A$  é noetheriano  $I$  é intersecção completa em  $A$ .*

Demonstração: Vide [7], Corolário 5.5.11, página 153. ■

Como recíproca parcial da Proposição 3.1.7 temos:

**Proposição 3.1.9** *Seja  $\{a_1, \dots, a_m\}$  um sistema de geradores de um ideal  $I$  em um anel  $A$ . Seja  $A/I \neq (0)$  e para  $A_i := A/(a_0, \dots, a_i)$  suponhamos  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n A_i = (0)$ ,*

*$i = 1, \dots, m$ . Nestas condições temos:*

(i) *Se o epimorfismo*

$$\begin{aligned} \alpha : A/I[X_1, \dots, X_m] &\rightarrow \text{gr}_I(A) \\ X_i &\mapsto a_i + I^2 \end{aligned}$$

*é um isomorfismo, então  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $A$ -seqüência regular.*

(ii) *Se  $A$  é noetheriano e  $I$  é um ideal primo, então  $A$  é domínio de integridade e  $A_I$  é integralmente fechado em seu corpo de frações.*

Demonstração: (i) Vejamos, primeiramente que  $a_1$  é regular em  $A$ . Suponhamos  $ra_1 = 0$  para algum  $r \in A \setminus \{0\}$ . Se existisse  $n \in \mathbb{N}$  com  $r \in I^n \setminus I^{n+1}$  então  $L_I(r) \neq 0$ .

Se  $L_I(a_1) = a_1 + I^2$  é regular em  $\text{gr}_I(A)$  tem-se  $L_I(ra_1) = L_I(r)L_I(a_1)$ , contradizendo  $ra_1 = 0$ .

Se tomarmos  $I_1 := I/(a_1)$  então pelo Lema 3.1.4 temos

$$\text{gr}_I(A_1) \cong \text{gr}_I(A)/(L_I(a_1)) \cong A_1/I_1[X_2, \dots, X_m].$$

Por hipótese de indução,  $\{a_2, \dots, a_m\}$  é uma  $A_1$ -seqüência regular. Logo  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $A$ -seqüência regular.

(ii) Para  $r, s \in A \setminus \{0\}$  temos  $L_I(r), L_I(s) \neq (0)$ . Se  $\text{gr}_I(A)$  é um domínio de integridade, pelo Lema 3.1.3,  $L_I(rs) \neq 0$  e portanto  $rs \neq 0$ .

Tomemos agora  $S := A_1$  e  $M = IA_I$ . Então

$$\text{gr}_M(S) \cong \text{gr}_I(A)_I \cong S/M[X_1, \dots, X_m]$$

é um anel polinomial sobre o corpo  $S/M$ .

Seja  $x \in Q(A)$  inteiro sobre  $S$ ,  $x = r/s$  com  $r, s \in S$ . Então existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $S[x] = S + Sx + \dots + Sx^{n-1}$  e portanto  $s^{n-1}x^m \in S$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Para  $m \geq n$  segue que  $r^m \in s^{m-n+1}S$ , e então  $L_M(r)^m \in L_M(s)^{m-n+1}\text{gr}_M(S)$ . Como  $\text{gr}_M(S)$  é um anel fatorial,  $L_M(s)$  deve ser um divisor de  $L_M(r)$ . Então existe  $r_0 \in S$  com  $v_M(r - r_0s) > v_M(r)$ .  $x_1 := (r - r_0s)/s = x - r_0$  também é inteiro sobre  $S$ . Logo, existe  $r_1 \in S$  com  $v_M(r - r_1s) > v_M(r - r_0s)$ . Daí,

$$r \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((s) + M^n) = (s)$$

e portanto  $x = r/s \in S$ . ■

A condição  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n A_i = \langle 0 \rangle$ , ( $i = 0, \dots, m$ ) é satisfeita no caso em que  $A$  é noetheriano e  $I \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)} \mathfrak{m}_i$ , assim, em particular temos:

**Corolário 3.1.10** *Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel noetheriano local,  $\{a_1, \dots, a_m\}$  ( $m \geq 0$ ) uma seqüência de elementos em  $\mathfrak{m}$ ,  $I := (a_1, \dots, a_m)$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $A$ -seqüência regular.
  - (ii)  $\alpha : A/I[X_1, \dots, X_m] \rightarrow \text{gr}_I(A)$  onde  $\alpha(X_i) = a_i + I^2$  é um isomorfismo.
- Se  $\text{Rad}(I) = I$ , então (i) e (ii) são equivalentes a
- (iii)  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente em  $A$ , ou seja,  $I$  é uma intersecção completa.

Demonstração: Vide [7], Corolário 5.5.13, página 154. ■

Como vimos anteriormente uma seqüência pode ser regular ou não dependendo da ordem em que os elementos aparecem, no entanto, se  $(A, \mathfrak{m})$  for local temos:

**Corolário 3.1.11** *Nas mesmas hipóteses do corolário anterior, se  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $A$ -seqüência regular, o mesmo ocorre com  $\{a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(m)}\}$  para toda permutação  $\pi$  de  $\{1, \dots, m\}$ .*

Demonstração: Segue da Proposição 3.1.9. ■

Como vimos anteriormente, este resultado não é sempre válido em anéis noetherianos quaisquer. Aqui estamos considerando um anel noetheriano local, onde os elementos  $\{a_1, \dots, a_m\}$  em  $\mathfrak{m}$  constituem uma seqüência regular.

**Lema 3.1.12** *Se  $\{a, b\}$  é uma  $M$ -seqüência regular e  $b$  não é divisor de zero de  $M$ , então  $\{b, a\}$  também é uma  $M$ -seqüência regular.*

Demonstração: Se  $a$  fosse um divisor de zero de  $M/bM$ , haveria um  $m \in M$ ,  $m \notin bM$  com  $am = bm'$  ( $m' \in mM$ ). Como  $\{a, b\}$  é regular devemos ter  $m' \in aM$ , ou seja,  $m' = am''$  com  $m'' \in M$ , então  $m = bm'$  (pois  $a$  não é divisor de zero em  $M$ ) entretanto  $m \notin bM$ , o que é uma contradição. ■

**Proposição 3.1.13** *Quaisquer duas  $M$ -seqüências regulares maximais em  $I$  tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Dentre todas as  $M$ -seqüências regulares maximais em  $I$  existe uma com o menor número de elementos  $n$ . Procederemos por indução sobre  $n$ .

Se  $n = 0$ , então  $I$  contém apenas os divisores de zero de  $M$  e não há nada a ser mostrado.

Consideremos  $n > 0$  e sejam  $\{a_1, \dots, a_n\}$  uma  $M$ -seqüência regular maximal em  $I$  e  $\{b_1, \dots, b_n\}$  outra seqüência regular em  $I$ . Nestas condições veremos que  $I$  é formado pelos divisores de zero de  $M/(b_1, \dots, b_n)M$ .

Se  $n = 1$ ,  $I$  possui os divisores de zero de  $M/a_1M$ . Então existe  $m \in M$ ,  $m \notin a_1M$  com  $Im \subset a_1M$ . Em particular  $b_1m = a_1m'$  com algum  $m' \in M$ . Se tivéssemos  $m' \in b_1M$  então teríamos  $m \in a_1M$  entretanto,  $m' \notin b_1M$ .

Como  $a_1Im' = Ib_1m \subset a_1b_1M$  segue que  $Im' \subset b_1M$  e portanto  $I$  é formado pelos divisores de zero de  $M/b_1M$ .

Se  $n > 1$ , tomemos  $M_i := M/(a_1, \dots, a_i)M$ ;  $M'_i := (b_1, \dots, b_i)M$  para  $i = 0, \dots, n-1$  e tomemos  $c \in I$  que não é divisor de zero de  $M_i$  e  $M'_i$  para todo

$i = 0, \dots, n-1$ . Isto é possível pois os conjuntos dos divisores de zero de  $M_i$  e  $M'_i$  são uniões finitas de ideais primos e  $I$  não está contido em nenhum desses conjuntos.

Aplicando o Lema 3.1.12, repetidamente,  $\{c, a_1, \dots, a_{n-1}\}$  e  $\{c, b_1, \dots, b_{n-1}\}$  são  $M$ -seqüências regulares em  $I$  onde  $\{c, a_1, \dots, a_{n-1}\}$  é maximal pois  $\{a_1, \dots, a_{n-1}, c\}$  é maximal para o caso  $n = 1$  aplicado a  $M_{n-1}$ . Então  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  e  $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$  são  $M/cM$  seqüências regulares em  $I$  onde a primeira é regular e por hipótese de indução a segunda também é regular. Mas se  $\{b_1, \dots, b_{n-1}, c\}$  é uma  $M$ -seqüência regular, então  $\{b_1, \dots, b_n\}$  também é regular, novamente pelo caso  $n = 1$ , o que finaliza a demonstração. ■

**Corolário 3.1.14** *Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel noetheriano local e  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  uma intersecção completa, ou seja,  $\mathfrak{p} = (a_1, \dots, a_m)$  com  $\text{ht}(\mathfrak{p}) = m$ . Então:*

- (i)  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $A$ -seqüência regular.
- (ii)  $A$  é um domínio de integridade e  $A_{\mathfrak{p}}$  é integralmente fechado em  $Q(A)$ .
- (iii) Para qualquer suconjunto  $\{i_1, \dots, i_t\}$  de  $\{1, \dots, m\}$ ,  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_t})$  é um ideal primo e uma intersecção completa.

Demonstração: (i) Nas hipóteses acima e utilizando o Teorema 2.2.14 temos  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é independente em  $A$ . Como  $\text{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$  (pois  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ ) temos que  $\alpha : A/\mathfrak{p}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{p}}(A)$ , é um isomorfismo, e portanto  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma seqüência regular pelo Corolário 3.1.10.

(ii) Usando a Proposição 3.1.9 temos que  $A$  é domínio de integridade e  $A_{\mathfrak{p}}$  é integralmente fechado em seu corpo de frações.

Para demonstrar (iii) usaremos indução sobre  $m$ . Em  $A/(a_1)$ ,  $\mathfrak{p}/(a_1)$  é um ideal primo de altura  $m-1$  gerado por  $m-1$  elementos e portanto uma intersecção completa. Então  $A/(a_1)$  é domínio de integridade e portanto  $(a_1)$  é ideal primo de  $A$ . Aplicando hipótese de indução e o Corolário 3.1.11 segue o resultado. ■

**Lema 3.1.15** *Para um ideal  $I$  de um anel noetheriano  $A$  as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $I = I^n$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (ii)  $\text{gr}_I^n(A) = \langle 0 \rangle$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (iii)  $I$  é um ideal principal gerado por um elemento idempotente de  $A$ .



Demonstração: Obviamente  $(i) \Leftrightarrow (ii)$  e  $(i) \Rightarrow (iii)$ . Vejamos, então, que  $(iii) \Rightarrow (i)$ .

Tomemos um sistema de geradores  $a_1, \dots, a_m$  de  $I$  e  $a_i = \sum_{k=1}^m r_{ik} a_k$  com  $k = 1, \dots, m$  e  $r_{ik} \in I$ , o que é possível pois  $I = I^2$ . Então

$$\det(E - (r_{ik}))a_k = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \quad (*)$$

onde  $E$  é matriz unidade  $m \times m$ . Expandindo o determinante temos  $\det(E - (r_{ik})) = 1 - a$  com  $a \in I$ . Como  $a$  é combinação linear dos  $a_k$ 's, de  $(*)$  temos  $(1 - a)a = 0$ , ou seja,  $a^2 = a$ .

De  $(1 - a)a_k = 0$  temos  $a_k = a_k a$ , para  $k = 1, \dots, m$  e portanto  $I = (a)$ . ■

**Proposição 3.1.16** *Sejam  $A$  um anel noetheriano e  $I \subset A$  um ideal. Então*

$$ht(I) \leq \mu(I/I^2) \leq \mu(I) \leq \mu(I/I^2) + 1.$$

*E mais, se  $\mu(I/I^2) > \dim A$  então  $\mu(I) = \mu(I/I^2)$ .*

Demonstração: Como  $\mu(I_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}}^2) = \mu(I_{\mathfrak{p}})$  para todo  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}(I)$ , pelo Lema de Nakayama,  $ht(I_{\mathfrak{p}}) \leq \mu(I_{\mathfrak{p}})$  e daí pelo Lema de Krull temos  $ht(I) \leq \mu(I/I^2)$ .

Para mostrarmos que  $\mu(I) \leq \mu(I/I^2) + 1$  consideremos  $a_1, \dots, a_m \in I$  cujas classes laterais em  $I/I^2$  formam um sistema minimal de geradores do  $A/I$ -módulo. Tomando  $\bar{A} := A/(a_1, \dots, a_m)$  e  $\bar{I} := I/(a_1, \dots, a_m)$ , então  $I = I^2$ . Pelo Lema 3.1.15,  $\bar{I}$  é um ideal principal e  $I$  é gerado por  $m + 1$  elementos. Vejamos agora a última afirmação.

Seja  $m := \mu(I/I^2) > \dim A$ . Pelo Lema da Esquiva podemos tomar  $a_1, \dots, a_m \in I$  tais que todo  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_m)$  com  $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{B}(I)$  tem altura maior ou igual a  $m$ . Em nosso caso, como  $(a_1, \dots, a_m) \subset I$  temos  $\mathfrak{B}(I) \subset \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_m)$  e portanto  $\mathfrak{B}(a_1, \dots, a_m) \setminus \mathfrak{B}(I) = \emptyset$ . Assim  $\bar{I} = I/(a_1, \dots, a_m)$  é um ideal nilpotente de  $\bar{A} := A/(a_1, \dots, a_m)$ . Como  $I$  é gerado por um elemento idempotente,  $\bar{I} = \langle 0 \rangle$  e portanto  $\mu(I) = \mu(I/I^2)$ . ■

Antes de prosseguirmos, precisamos de alguns conceitos que serão utilizados daqui por diante.

**Definição 3.1.17** *Seja  $A$  um anel. Um  $A$ -módulo  $M$  é livre se possui uma base, ou seja, um sistema linearmente independente de geradores.  $M$  é um  $A$ -módulo projetivo se existe um  $A$ -módulo  $M'$  tal que,  $M \oplus M'$  é livre.*



**Lema 3.1.18** *Sejam  $A$  um anel e  $I$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. Dados  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $f$  e  $g \in A$  tais que:*

- (i)  $D(f) \cup D(g) = \text{Spec}(A)$ ,
- (ii)  $I_g$  é um  $A_g$ -módulo livre de posto menor ou igual a  $m$ .
- (iii) *Existe uma sequência exata de  $A_f$ -módulos  $0 \rightarrow K \rightarrow A_f^m \rightarrow I_f \rightarrow 0$  onde  $K_g$  é um  $A_{fg}$ -módulo livre.*

*Então  $I$  é a imagem homomorfa de um  $A$ -módulo projetivo de posto  $m$ .*

Demonstração: Vide [7], Lema 5.5.19, página 158. ■

Para um anel polinomial  $A = S[X]$  com  $S$  noetheriano de dimensão finita temos, particularmente o seguinte:

**Teorema 3.1.19** (Mohan Kumar) *Seja  $A = P[X]$  o anel de polinômios sobre um anel noetheriano  $P$  de dimensão de Krull finita. Sejam  $I$  um ideal de  $A$  contendo um polinômio mônico e  $m := \mu(I/I^2) \geq \dim A/I + 2$ . Então existe um  $P$ -módulo  $M$  finitamente gerado de posto  $m$  tal que  $I$  é a imagem homomorfa do módulo  $M[X]$ . Em particular, se todos os  $P$ -módulos projetivos finitamente gerados são livres, então*

$$\mu(I) = \mu(I/I^2).$$

Demonstração: Denotando por  $D(f)$  o conjunto dos ideais  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  com  $f \notin \mathfrak{p}$ , mostraremos primeiramente que existem elementos  $f, g \in P$  com  $D(f) \cup D(g) = \text{Spec}(A)$  tais que  $I_f$  é gerado como um  $A_f$ -módulo por  $m$  elementos e  $I_g = A_g$ .

Seja  $a_1 \in I$  um elemento tal que sua classe lateral em  $I/I^2$  está contida em um sistema minimal de geradores do  $A/I$ -módulo  $I/I^2$ . Podemos assumir que  $a_1$  é um polinômio mônico pois, se necessário, podemos adicionar a  $a_1$  uma potência suficientemente grande de um polinômio mônico em  $I$  e assim obtemos um elemento da forma desejada. Assim  $S := A/(a_1)$  é um  $P$ -módulo finitamente gerado. Se  $J = I \cap P$  e  $I^*$  é a imagem de  $I$  em  $S$ , então  $I^* \cap P = J = JS \cap P$  e  $S/I^*$  e  $S/JS$  são extensões inteiras de  $P/J$ , portanto, pelo Corolário 37, temos

$$\dim A/I = \dim S/I^* = \dim P/J = \dim S/JS = \dim S/J^2S.$$

Se  $\bar{I}$  é a imagem de  $I$  em  $S/J^2S$ , então, pelo Lema 3.1.15

$$\mu(\bar{I}/\bar{I}^2) = \mu(I/I^2) - 1 > \dim A/I = \dim S/J^2S$$

de onde podemos concluir que  $\bar{I}$  é gerado por  $m - 1$  elementos. Deste modo também existem elementos  $a_2^*, \dots, a_m^* \in I$  com



$$I^* = (a_2^*, \dots, a_m^*) + JS. \quad (3.4)$$

Localizaremos agora  $S$  em  $N := 1 + J$  para utilizarmos o Lema de Nakayama. Para mostrarmos que  $JS_N$  está contido em todos os ideais maximais de  $S_N$  é suficiente mostrar que  $JP_N$  está contido em todos os ideais maximais de  $P_N$ , pois  $S_N$  é inteira sobre  $P_N$ .

Vejamos que  $1 + JP_N$  possui apenas unidades de  $P_N$ . De fato, se para algum  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(P_N)$  houvesse algum  $x \in JP_N$ ,  $x \notin \mathfrak{m}$  então teríamos uma equação  $1 = \rho_1 x + \rho_2$  com  $\rho_1 \in P_N$ ,  $\rho_2 \in \mathfrak{m}$  e teríamos  $\rho_2 = 1 - \rho_1 x \in \mathfrak{m} \cap (1 + JP_N)$ , uma contradição.

De (3.4) e do Lema de Nakayama segue que  $I_N^* = (a_2^*, \dots, a_m^*)S_N$ . Se  $a_2, \dots, a_m \in I$  são representantes de  $a_i^*$ , então  $I_N = (a_1, \dots, a_m)A_N$ . Portanto também existe um  $f \in N$  com  $I_f = (a_1, \dots, a_m)A_f$ .

Se tomarmos  $g = 1 - f$ , então  $g \in J$  e assim  $I_g = A_g$ . Mais ainda, como  $1 = f + g$  temos  $D(f) \cup D(g) = \text{Spec}(A)$ .

Agora, para construirmos o  $P$ -módulo  $M$  procurado consideramos a apresentação do  $A_f$ -módulo  $I_f$  dada por  $\{a_1, \dots, a_m\}$

$$0 \rightarrow K \rightarrow A_f^m \rightarrow I_f \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Como  $I_g$  é um  $A_g$ -módulo livre, localizando em  $g$  mostramos que  $K_g$  é um módulo projetivo sobre  $A_{fg} = P_{fg}[X]$  pois após a localização a sequência em (3.5) cinde. Da sequência exata

$$0 \rightarrow (K_g)_{a_1} \rightarrow (A_{fg})_{a_1}^m \rightarrow (I_{fg})_{a_1} \rightarrow 0,$$

temos que  $(K_g)_{a_1}$  é um módulo livre sobre  $(A_{fg})_{a_1} = P_{fg}[X]_{a_1}$  pois  $(I_{fg})_{a_1} = (A_{fg})_{a_1} \cdot a_1$ .

Como  $a_1$  é mônico, segue do Teorema de Quillen e Suslin (Vide [7], Teorema 4.3.14, página 116) que  $K_g$  é um  $A_{fg}$ -módulo livre. Assim temos:

- (i)  $D(f) \cup D(g) = \text{Spec}(A)$ .
- (ii)  $I_g$  é um  $A_g$ -módulo livre de posto menor ou igual a  $m$  e
- (iii) existe a sequência exata de  $A_f$ -módulos (3.5).

Usando fibrados produto, como em [7], página 158, podemos concluir a demonstração. ■

**Corolário 3.1.20** *Sejam  $K$  um corpo e  $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$  um ideal com  $\mu(I/I^2) \geq \dim K[X_1, \dots, X_n]/I + 2$ . Então*

$$\mu(I) = \mu(I/I^2).$$



Demonstração: Como  $I \neq (0)$  podemos, possivelmente após reordenação das variáveis supor que  $I$  contém um polinômio mônico em  $X_n$  com coeficientes em  $P = [X_1, \dots, X_{n-1}]$ . Mas, como todos os módulos projetivos finitamente gerados são livres em  $P$ ,  $\mu(I) = \mu(I/I^2)$ . ■

Sejam  $M$  um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano  $A$  e  $I$  um ideal de  $A$  com  $IM \neq M$ . Para toda  $M$ -seqüência regular  $\{a_1, \dots, a_m\}$  temos  $(a_1, \dots, a_i)M \neq (a_1, \dots, a_{i+1})M$  para  $i = 0, \dots, m-1$ . Como  $M$  é um módulo noetheriano, temos que toda seqüência regular  $\{a_1, \dots, a_m\}$  com  $a_i \in I$  pode ser estendida a uma  $M$ -seqüência regular  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset I$  ( $n \geq m$ ) tal que todo  $a \in I$  é um divisor de zero de  $M/(a_1, \dots, a_n)M$  (uma  $M$ -seqüência maximal).

Observe, entretanto que,  $A$ -seqüências maximais podem ter comprimentos distintos, por exemplo para  $A = K[[X]][Y]$  com  $K$  corpo,  $X$ ,  $Y$  e  $1 - XY$  são ambas  $A$ -seqüências maximais.

Mas, no caso específico em que  $IM \neq M$ , temos o Teorema de Rees, enunciado abaixo. Faremos uso de uma ferramenta muito poderosa cuja teoria não apresentamos aqui. Para outra forma de tratamento, o leitor poderá consultar [7].

**Teorema 3.1.21** (Teorema de Rees) *Sejam  $A$  um anel noetheriano,  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado e  $I \subset A$  um ideal com  $IM \neq M$ . Então todas as  $M$ -seqüências regulares maximais em  $I$  têm o mesmo comprimento  $n$  dado por*

$$n = \min\{i \in \mathbb{N} : \text{Ext}^i(A/I, M) \neq 0\}.$$

Para demonstrarmos este resultado utilizaremos o seguinte lema:

**Lema 3.1.22** *Sejam  $A$  um anel,  $M$  e  $N$   $A$ -módulos,  $\text{Hom}_A(M, N)$  o conjunto de todos os homomorfismos de  $A$ -módulos  $f : M \rightarrow N$  e  $(x_1, \dots, x_n)$  uma  $M$ -seqüência em  $\text{Ann}(N)$ . Então*

$$\text{Hom}_A(N, M/(x_1, \dots, x_n)M) \cong \text{Ext}_A^n(N, M).$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre  $n$ . Para  $n = 0$  não há nada a demonstrar. Seja  $n \geq 1$ . Por hipótese de indução temos  $\text{Ext}_A^{n-1}(N, M) \cong \text{Hom}_A(N, M/(x_1, \dots, x_{n-1})M)$ .

Como  $x_n$  é  $(M/(x_1, \dots, x_{n-1})M)$ -regular,  $\text{Ext}_A^{n-1}(N, M) = 0$ . Assim, a partir da seqüência exata

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x_1} M \rightarrow M/x_1M \rightarrow 0$$



obtemos a seqüência exata

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^{n-1}(N, M/x_1M) \xrightarrow{\psi} \text{Ext}_A^n(N, M) \xrightarrow{\varphi} \text{Ext}_A^n(N, M).$$

A aplicação  $\varphi$  é a multiplicação por  $x_1$  herdada de  $M$ , mas a multiplicação por  $x_1$  sobre  $N$  também induz  $\varphi$ . Como  $x_1 \in \text{Ann}(N)$ , temos que  $\varphi = 0$ . Portanto  $\psi$  é um isomorfismo, e aplicando mais uma vez a hipótese de indução provamos o resultado. ■

*Demonstração do teorema 3.1.21:* Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  uma  $M$ -seqüência maximal em  $I$ . Do Lema 3.1.22 temos que  $I$  contém um elemento  $(M/(x_1, \dots, x_{i-1})M)$ -regular para  $i = 1, \dots, n$ , ou seja,  $\text{Ext}_A^{i-1}(A/I, M) \cong \text{Hom}_A(A/I, M/(x_1, \dots, x_{i-1})M) = 0$ .

Por outro lado, como  $IM \neq M$  e  $(x_1, \dots, x_n)$  é uma  $M$ -seqüência maximal em  $I$ , então  $I$  é formado pelos divisores de zero de  $M/(x_1, \dots, x_n)M$  e assim

$$\text{Ext}_A^n(A/I, M) \cong \text{Hom}_A(A/I, M/(x_1, \dots, x_n)M) \neq 0.$$

**Definição 3.1.23** *Sejam  $A$  um anel noetheriano,  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado e  $I \subset A$  um ideal com  $IM \neq M$ . O comprimento comum a todas as  $M$ -seqüências regulares maximais em  $I$  é chamado de  **$I$ -profundidade de  $M$** . Notação:  $\text{prof}_I M$ .*

**Observação:** (i) Se  $A$  é local e  $I$  é o ideal maximal de  $A$ , então dizemos que  $\text{prof}_I M$  é simplesmente a profundidade de  $M$  e denotamos por  $\text{prof} M$ . Em particular isto também define  $\text{prof} A$ .

(ii) A igualdade  $\text{prof}_I M = 0$  é válida se, e somente se, todos os elementos de  $I$  são divisores de zero de  $M$ . Mais ainda, se  $(A, \mathfrak{m})$  é um anel noetheriano local, então  $\text{prof} M = 0$  é equivalente a  $\mathfrak{m} \in \text{Ass}(M)$ .

(iii) No caso  $(A, \mathfrak{m})$  localmente noetheriano e  $K = A/\mathfrak{m}$  temos

$$\text{prof}_{\mathfrak{m}} M = \min\{i \in \mathbb{N} : \text{Ext}^i(K, M) \neq \emptyset\}.$$

**Corolário 3.1.24** *Se  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $M$ -seqüência regular qualquer em  $I$ , então*

$$\text{prof}_I M/(a_1, \dots, a_m)M = \text{prof}_I M - m.$$

*Demonstração:* Vide [7], Corolário 6.3.4, página 184. ■



**Proposição 3.1.25** Ainda considerando-se as hipóteses da Proposição 3.1.13, seja  $I$  o ideal gerado por  $n$  elementos e  $\text{prof}_I M = m$ . Então  $m \leq n$  e existe um sistema gerador  $\{a_1, \dots, a_n\}$  de  $I$  para o qual  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $M$ -seqüência regular.

Demonstração: Sejam  $\{a_1, \dots, a_n\}$  um sistema gerador qualquer de  $I$  e  $(a_1, \dots, a_k) \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p}$ ,  $(a_1, \dots, a_{k-1}) \not\subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p}$  para algum  $k = 0, \dots, n$ . Se  $K = n$  então  $\text{prof}_I M = 0$  e não há nada a provar.

Se  $k < n$ , mostraremos que existe  $b$  não divisor de zero de  $M$  tal que  $(a_1, \dots, a_{k+1}) = (b, a_1, \dots, a_k)$ . Passando de  $M/bM$  para  $I/(b)$  a proposição segue por indução.

Seja  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$  o conjunto dos elementos maximais de  $\text{Ass}(M)$  com respeito à inclusão. Por hipótese existe um elemento da forma  $a + ra_{k+1}$  com  $a \in (a_1, \dots, a_k)$ ,  $r \in A$ , que não está contido em  $\mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_s$ . Se  $a_{k+1} \in \mathfrak{p}_i$ , para  $i = 1, \dots, \sigma$  e  $a_{k+1} \notin \mathfrak{p}_j$  para  $j = \sigma + 1, \dots, s$ , então escolhemos  $t \in \bigcap_{j=\sigma+1}^s \mathfrak{p}_j$ ,  $t \notin \bigcap_{i=1}^{\sigma} \mathfrak{p}_i$  e tomamos  $b := ta + a_{k+1}$ . Então  $b \notin \mathfrak{p}_i$ , ( $i = 1, \dots, s$ ), ou seja,  $b$  não é divisor de zero de  $M$ . Assim  $(a_1, \dots, a_{k+1}) = (b, a_1, \dots, a_k)$ . ■

**Proposição 3.1.26** Sejam  $A$  um anel noetheriano e  $I \neq A$  um ideal gerado por  $a_1, \dots, a_n$  para os quais a aplicação  $\alpha : A/I[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \text{gr}_I(A)$ , onde  $\alpha(X_i) = a_i + I^2$ , é um isomorfismo. Então,  $I$  também é gerado por uma  $A$ -seqüência regular de comprimento  $n$ .

Demonstração: Mostremos que se  $n > 0$ , então  $I$  contém um elemento não divisor de zero. Caso isso não ocorresse haveria um  $r \in A \setminus \{0\}$  com  $Ir = (0)$ . Assim  $ra_1 = 0$  e pelo Lema 3.1.3  $L_i(r) = 0$ . Portanto  $r \in \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} I^\nu = \tilde{I}$ . Pelo Teorema da Intersecção

de Krull (Vide [7], Teorema 5.5.5, página 150),  $\tilde{I} = I\tilde{I}$ . Se  $(b_1, \dots, b_s)$  é um sistema gerador de  $\tilde{I}$  então  $b_i = \sum_{k=1}^s r_{ik}b_k$  ( $i = 1, \dots, s$ ) com  $r_{ik} \in I$ , para todo  $i$  e  $k$ . Pela

Regra de Cramer temos um elemento da forma  $i + 1$ , ( $i \in I$ ) com  $(1 + i)\tilde{I} = (0)$ .

Então  $r = -ri = 0$  pois  $Ir = (0)$ , contradizendo  $r \neq 0$ . Portanto  $I$  contém um elemento não divisor de zero  $c$ , então podemos assumir que  $I = (c, a_2, \dots, a_n)$ . Como  $\alpha$  é um isomorfismo, o mesmo ocorre com a aplicação  $A/I[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \text{gr}_I(A)$  tal que  $X_1 \rightarrow c + I^2$  e  $X_i \rightarrow a_i + I^2$  ( $i = 2, \dots, n$ ). Se tomarmos  $A' := A/(c)$ ,  $a'_i := a_i + (c)$  e  $I' := I/(c)$  então a aplicação  $A'/I'[X_2, \dots, X_n] \rightarrow \text{gr}_{I'}(A')$  tal



que  $X_i \rightarrow a'_i + I^2$  também é um isomorfismo e a validade da proposição segue por indução. ■

**Corolário 3.1.27** *Sejam  $A$  um anel noetheriano e  $I \neq A$  um ideal com  $\text{Rad}(I) = I$ .  $I$  é uma intersecção completa em  $A$  se, e somente se,  $I$  é gerado por uma  $A$ -seqüência regular. Em particular, uma variedade afim é uma “set-theoretic” intersecção completa se, e somente se, seu ideal do anel de polinômios é gerado por uma seqüência regular.*

Demonstração: Vide [7], Corolário 6.3.7, página 185. ■

O conceito de  $I$ -profundidade de módulos é particularmente interessante no estudo dos módulos projetivos e há resultados interessantes estabelecendo relações entre profundidade e dimensão projetiva de um  $\mathfrak{p}$  módulo, dentre eles os de Auslander & Buchsbaum e Ferrand & Vasconcelos que veremos em 3.1.34 e 3.1.36 respectivamente.

Uma seqüência exata de  $A$ -módulos

$$\cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

onde os  $F_i$ 's são módulos projetivos é uma **resolução projetiva** do  $A$ -módulo  $M$ .

**Definição 3.1.28** *Seja  $M$  um  $A$ -módulo. A **dimensão homológica ou projetiva** de  $M$  é o comprimento de uma resolução livre finita de  $M$  de menor comprimento possível, a qual denotamos por  $\text{dp}_A M$  ou simplesmente por  $\text{dp} M$  caso  $A$  esteja fixado. Caso não exista uma resolução de comprimento finito dizemos que  $\text{dp} M = \infty$ .*

**Exemplo 3.1.29** *Se  $x$  é um elemento regular,*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow A/(x) \rightarrow 0,$$

onde  $\varphi(a) = ax$ , para todo  $a \in A$  é uma resolução projetiva de  $A/(x)$ , e portanto  $\text{dp} A/(x) = 1$ .

**Exemplo 3.1.30** *Se  $(x_1, x_2)$  é uma  $A$ -seqüência regular*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{M} A^2 \rightarrow A \xrightarrow{N} A/(x_1, x_2) \rightarrow 0,$$

onde  $M = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  e  $N = (x_1 \ x_2)$  representam o homomorfismo na forma matricial, é resolução projetiva para  $A/(x_1, x_2)$  e portanto  $\text{dp} A/(x_1, x_2) = 2$ .



Mais geralmente, se  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é uma  $A$ -seqüência, então  $\text{dp}A/(x_1, \dots, x_n) = n$ .

**Exemplo 3.1.31** Se  $A = K[X, Y]/(X, Y) = K[x, y]$  e  $I = (x, y)$ , então  $\text{dp}I = \infty$ . A resolução projetiva é:

$$\dots A^2 \xrightarrow{M} A^2 \xrightarrow{N} A^2 \xrightarrow{M} A^2 \rightarrow I \rightarrow 0,$$

onde  $M$  e  $N$  são homomorfismos cujas formas matriciais correspondem respectivamente a  $M = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ , e  $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ .

**Observação:** Em geral a  $\text{dp}M$  pode ser considerada uma medida de “quão longe” um módulo está de ser projetivo.

Considerando a seqüência exata  $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$  como fizemos para o Lema 50 faremos a seguir a generalização do mesmo.

**Lema 3.1.32** Se  $x$  não é divisor de zero de  $A$  e  $M$ , então

$$\text{dp}_A M = \text{dp}_{A/(x)}(M/xM).$$

**Demonstração:** Antes de iniciarmos a demonstração façamos alguns preparativos. Tomemos uma seqüência exata  $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$  onde  $F$  é um  $A$ -módulo livre de posto finito e para  $x \in \mathfrak{m}$  consideremos o diagrama comutativo onde as linhas e colunas são seqüências exatas.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & K' & & F' & & M' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & F & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi_x & & \downarrow \psi_x & & \downarrow \psi_x \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & F & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & K/xK & & F/xF & & M/xM \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

onde  $M' := \{m \in M | xm = 0\} = \ker(\psi_x)$  e  $F'$  e  $K'$  são definidos da mesma forma. Utilizando o Lema da Serpente (Vide [7], Lema 7.1.9, página 200) obtemos uma seqüência exata dada por

$$0 \rightarrow K' \rightarrow F' \rightarrow M' \rightarrow K/xK \rightarrow F/xF \rightarrow M/xM \rightarrow 0. \quad (3.6)$$



De (3.6) obtemos uma seqüência exata

$$0 \rightarrow K/xK \rightarrow F/xF \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

onde caso  $F' = \langle 0 \rangle$  então  $K' = \langle 0 \rangle$  e deste modo  $x$  é um divisor de zero de  $K$ . Se ambas as dimensões projetivas são infinitas, então não há nada a demonstrar. O mesmo ocorre caso uma delas tenha dimensão projetiva nula. (Ver Lema 50)

Seja  $\text{dp}M = m$  e  $0 < m < \infty$ . Então  $\text{dp}K = m - 1$  e por indução podemos assumir que  $\text{dp}_{A/(x)}K/xK = \text{dp}K$ . Como  $\text{dp}_{A/(x)}M/xM \neq 0$  temos

$$\text{dp}_{A/(x)}M/xM = \text{dp}_{A/(x)}K/xK + 1 = \text{dp}_A K + 1 = \text{dp}_A M.$$

Obtemos o mesmo resultado supondo  $\text{dp}_{A/(x)}M/xM = m$  com  $0 < m < \infty$ . ■

**Lema 3.1.33** *Considerando ainda a seqüência exata  $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ , temos que se  $\text{prof}A > 0$ ,  $\text{prof}M = 0$ , então  $\text{prof}K = 1$ .*

Demonstração: Seja  $x \in \mathfrak{m}$  não divisor de zero de  $A$ . Neste caso de (3.6) obtemos uma seqüência

$$0 \rightarrow M' \rightarrow K/xK \rightarrow F/xF \rightarrow M/xM \rightarrow 0.$$

Como  $\text{prof}M = 0$  existe  $m \in M \setminus \langle 0 \rangle$  com  $\mathfrak{m}m = 0$ . Então  $m \in M'$ ,  $\mathfrak{m} \in \text{Ass}(M')$ , ou seja,  $\mathfrak{m} \in \text{Ass}(M/xM)$  e portanto  $\text{prof}K/xK = 0$ . Como  $x$  não é divisor de zero de  $K$  ( $K' = \langle 0 \rangle$ ), temos que  $\text{prof}K = 1$ . ■

Estabeleceremos agora uma relação entre a profundidade e a dimensão projetiva de um módulo  $M$ .

**Teorema 3.1.34** (Auslander-Buchsbaum) *Seja  $M$  um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano local  $(A, \mathfrak{m})$ . Se  $\text{dp}M < \infty$  então*

$$\text{dp}M + \text{prof}M = \text{prof}A$$

Demonstração: Seja  $\text{dp}M = n$  e

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

uma resolução livre minimal de  $M$ ,  $K_i := \text{Im}(\alpha_{i-1})$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Para provarmos o resultado, utilizaremos indução sobre  $d := \text{dp}A$ . Se  $d = 0$  existe um  $x \in A$  tal que  $\mathfrak{m}x = 0$ ,  $x \neq 0$ . Se tivéssemos  $n > 0$ , então de  $F_n \subset \mathfrak{m}F_{n-1}$



teríamos  $x F_n \subset x \mathfrak{m} F_{n-1} = \langle 0 \rangle$ , e portanto  $F_n = \langle 0 \rangle$ , uma contradição. Portanto  $n = 0$ ,  $M$  é livre e  $\text{prof} M = \text{prof} A = 0$ .

Seja  $d > 0$  e suponhamos que o resultado seja válido para anéis locais de profundidade menor. Se  $\text{dp} M > 0$ , existe um  $x \in \mathfrak{m}$  que não é divisor de zero de  $A$  ou  $M$ , pois  $\mathfrak{m} \not\subset \cup \mathfrak{p}$  se  $\mathfrak{p}$  está variando em  $\text{Ass}(A) \cup \text{Ass}(M)$ . Então  $\text{prof} A/(x) = d-1$  e  $\text{prof} M/xM = \text{prof} M - 1$ , e pelo Lema 3.1.32  $\text{dp}_{A/(x)} M/xM = \text{dp} M$  seguindo o resultado por hipótese de indução.

Se  $d > 0$  e  $\text{prof} M = 0$ , então  $\text{prof} K_i = 1$  pelo Lema 3.1.33,  $\text{dp} K_1 = \text{dp} M - 1$  e como provado

$$\text{dp} K - 1 + \text{prof} K_1 = \text{prof} A,$$

de onde temos que  $\text{dp} M = \text{prof} A$ .

■

**Lema 3.1.35** *Seja  $M$  um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano  $A \neq \{0\}$  e que tenha resolução livre*

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

onde os  $F_i$ 's possuem posto  $r(F_i)$ ,  $(i = 0, \dots, n)$  finito. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i)  $\text{Ann}(M) \neq 0$ .

(ii)  $\sum_{i=0}^k (-1)^i r(F_i) = 0$ .

(iii)  $\text{Ann}(M)$  contém um elemento não divisor de zero de  $A$ .

Demonstração: Para  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$ , temos que  $\text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) < \infty$  e  $\text{prof} A_{\mathfrak{p}} = 0$  e portanto  $\text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = 0$ , logo  $M_{\mathfrak{p}}$  é um  $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo livre. Considerando a sequência exata

$$0 \rightarrow (F_n)_{\mathfrak{p}} \rightarrow (F_{n-1})_{\mathfrak{p}} \rightarrow \cdots \rightarrow (F_0)_{\mathfrak{p}} \rightarrow M_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0$$

por argumento de indução, análogo ao feito para espaços vetoriais tem-se que

$$r(M_{\mathfrak{p}}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i r(F_i). \quad (3.7)$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $\mathfrak{a} := \text{Ann}(M) \neq (0)$ , mostremos que existe  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$  com  $M_{\mathfrak{p}} = (0)$ . Caso não existisse tal  $\mathfrak{p}$ , como  $M_{\mathfrak{p}}$  é livre, teríamos  $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}} = (0)$  para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$ , assim  $\text{Ann}(\mathfrak{a}) \not\subset \mathfrak{p}$  para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$ . Então em  $\text{Ann}(\mathfrak{a})$  estaria



contido  $x$ , um divisor de zero de  $A$ . Como  $x\mathfrak{a} = (0)$  teríamos  $\mathfrak{a} = (0)$ , contradizendo o modo como  $\mathfrak{a}$  foi tomado.

Se tomarmos  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$  com  $M_{\mathfrak{p}} = \langle 0 \rangle$ , então de (3.7) obtemos (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) De (ii) e da equação (3.7) segue que  $M_{\mathfrak{p}} = \langle 0 \rangle$ , e também que  $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$  para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$ . Então  $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$  para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$ , ou seja,  $\mathfrak{a}$  contém um elemento não divisor de zero de  $A$ .

■

**Teorema 3.1.36** (Ferrand e Vasconcelos) *Sejam  $A$  um anel noetheriano e  $I \neq A$  um ideal de  $A$ .*

(i) *Se  $I$  é gerado por uma  $A$ -seqüência, então  $I/I^2$  é um  $A/I$ -módulo livre e  $\text{dp}_A A/I < \infty$ .*

(ii) *Caso  $A$  seja um anel local, a recíproca é verdadeira.*

Demonstração: (i) Seja  $I$  gerado pela  $A$ -seqüência regular  $\{x_1, \dots, x_t\}$ . Já sabemos que  $I/I^2$  é um  $A/I$ -módulo livre de acordo com o Corolário 3.1.8. Mostremos agora que  $\text{dp}_A A/I = t$  por indução sobre  $t$ .

Se  $t = 0$  não há nada a provar. Tomemos  $t > 0$ . Analisando a seqüência exata

$$0 \rightarrow A/(x_1, \dots, x_t) \xrightarrow{\mu_{x_t}} A/(x_1, \dots, x_{t-1}) \rightarrow A/(x_1, \dots, x_t) \rightarrow 0,$$

temos que se  $\text{dp}_A(A/(x_1, \dots, x_{t-1})) = t - 1$  por hipótese de indução, então  $\text{dp}_A(A/(x_1, \dots, x_t)) \leq t$ . Agora, para  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ ,  $\mathfrak{p} \supset I$ ,  $\{x_1, \dots, x_t\}$  também é uma  $A_{\mathfrak{p}}$ -seqüência regular, assim  $\text{prof}(A_{\mathfrak{p}}) - \text{prof}(A_{\mathfrak{p}}/(x_1, \dots, x_t)A_{\mathfrak{p}}) = t$ . Do Corolário 46 e do Teorema 3.1.34 segue que

$$\begin{aligned} t &= \text{prof}(A_{\mathfrak{p}}) - \text{prof}(A_{\mathfrak{p}}/(x_1, \dots, x_t)A_{\mathfrak{p}}) = \\ &= \text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/(x_1, \dots, x_t)A_{\mathfrak{p}}) \leq \text{dp}_A(A/(x_1, \dots, x_t)) \end{aligned}$$

e portanto  $\text{dp}_A(A/I) = t$ .

(ii) Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel noetheriano local. Para o ideal  $I \neq A$  suponhamos que  $I/I^2$  é um  $A/I$ -módulo livre de posto  $t$  e  $\text{dp}_A(A/I) < \infty$ . Mostremos que  $I$  é gerado por uma  $A$ -seqüência regular de comprimento  $t$ . Se  $t = 0$  temos que  $I = I^2$  e pelo Lema de Nakayama  $I = (0)$ . Consideremos  $t > 0$  e que o teorema é verdadeiro para postos menores que  $t$ .

Aplicando o Lema 3.1.35 a  $M := A/I$ , temos que  $I$  contém um elemento não divisor de zero de  $A$ . Sejam  $x_1, \dots, x_t \in I$  elementos cujas imagens  $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_t}$  em  $I/I^2$  formam uma base do  $A/I$ -módulo. Tomemos  $J := (x_2, \dots, x_t) + I^2$ . Então

$\mathfrak{B}(J) = \mathfrak{B}(I)$  e  $\mu(I/J) = 1$ . Seja  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$  o conjunto maximal dos elementos de  $\text{Ass}(A)$ . Então  $I \not\subseteq \bigcup_{j=1}^s \mathfrak{p}_j$  pois  $I$  contém um não divisor de zero de  $A$  ( $t > 0$ ). Logo existe  $a \in I$ ,  $a \notin \bigcup_{j=1}^s \mathfrak{p}_j$  com  $I/J = A\bar{a}$ , onde  $\bar{a}$  é a imagem de  $a$ . Isto significa que, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $x_1$  não é um divisor de zero de  $A$ .

Sejam  $S := A/(x_1)$  e  $I' := I/(x_1)$ . Mostremos que  $I'$  satisfaz as mesmas hipóteses que  $I$ . De fato, como

$$\begin{aligned} I'/I'^2 &\cong I/(x_1) + I^2 \cong I/I^2/(x_1) + I^2/I^2 \cong \\ &\cong A/I\bar{x}_2 \oplus \dots \oplus A/I\bar{x}_t = S/I'\bar{x}_2 \oplus \dots \oplus S/I'\bar{x}_t. \end{aligned}$$

e  $I'/I'^2$  é um  $S/I'$ -módulo livre de posto  $t - 1$ , se identificarmos  $A/I$  com  $S/I'$ .

Como  $I = Ax_1 + J$  segue que  $I/x_1I = Ax_1/Ix_1 + J/x_1I$ . Aqui  $Ax_1/Ix_1 \cong A/I$ , pois  $x_1$  não é divisor de zero de  $A$ ,  $J \cap Ax_1 = x_1I$  e  $x_1$  é um elemento da base do  $A/I$ -módulo  $I/J$ .

Temos então  $J/x_1I \cong J/J \cap Ax_1 \cong I/Ax_1 = I'$  e  $Ax_1/Ix_1 \cap J/x_1I = \langle 0 \rangle$ . Portanto  $I/x_1I \cong A/I \oplus I'$ .

Como  $\text{dp}_A A/I < \infty$ , do Lema 3.1.32, temos que  $\text{dp}_S I/x_1I = \text{dp}_A I < \infty$ . Sendo  $I'$  um somando direto de  $I/x_1I$  temos também  $\text{dp}_A I' < \infty$ . Tomando-se a seqüência exata  $0 \rightarrow I' \rightarrow S \rightarrow S/I' \rightarrow 0$  segue que  $\text{dp}_S S/I' < \infty$ . Por hipótese de indução  $I'$  é gerado por uma  $S$ -seqüência regular de comprimento  $t - 1$ , logo  $I$  é gerado por uma  $A$  seqüência regular de comprimento  $t$ .

■

Em anéis locais temos, então, a seguinte caracterização para anéis locais.

**Corolário 3.1.37** *Para um anel noetheriano local  $(A, \mathfrak{m})$  as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $A$  é regular

(ii)  $\text{dp}_A A/\mathfrak{m} < \infty$ .

Se (i) ou (ii) é satisfeita então  $\text{dp}_A A/\mathfrak{m} = \dim A$ .

Demonstração: Como  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  é  $A/\mathfrak{m}$ -módulo livre,  $\text{dp}_A A/\mathfrak{m} < \infty$  se, e somente se,  $\mathfrak{m}$  é gerado por  $A$ -seqüência regular, ou seja,  $A$  é regular. Por outro lado, se  $\dim A := d$  e  $A$  é regular,  $\mathfrak{m}$  é gerado por  $A$ -seqüência regular de comprimento  $d$  e  $\text{dp}_A A/\mathfrak{m} = d < \infty$ .

■

Lembrando que um anel noetheriano  $A$  é regular se  $A_{\mathfrak{m}}$  é regular para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$  temos a seguinte caracterização homológica para um anel regular.

**Proposição 3.1.38** *Seja  $A$  um anel noetheriano tal que  $\dim A = d < \infty$ . Então são equivalentes:*

- (i)  $A$  é regular
- (ii) Todo  $A$ -módulo  $M$  finitamente gerado é tal que  $\text{dp} M$  é menor ou igual a  $d$ .
- (iii) Todo  $A$ -módulo finitamente gerado tem dimensão projetiva finita.

Demonstração: (i)  $\Rightarrow$  (ii) Seja  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. Necessitamos apenas provar que  $\text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \leq d$ , para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Max}(A)$ . Se  $\dim A_{\mathfrak{p}} = 0$ , então  $A_{\mathfrak{p}}$  é um corpo, e a afirmação está correta. Seja então  $\dim A_{\mathfrak{p}} > 0$  e  $x \in \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}^2 A_{\mathfrak{p}}$ . Então  $A_{\mathfrak{p}}/x A_{\mathfrak{p}}$  também é um anel local regular e  $\dim A_{\mathfrak{p}}/x A_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}} - 1$ .

Consideremos a seqüência exata

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0$$

onde  $F$  é um  $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo livre de posto finito. Como  $x$  não é divisor de zero de  $K$ , por hipótese de indução temos que  $\text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} K = \text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}/x A_{\mathfrak{p}}} K/xK \leq \dim A_{\mathfrak{p}} - 1$  e portanto  $\text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} \leq \dim A_{\mathfrak{p}}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Max}(A)$  temos  $\text{dp}_A A/\mathfrak{p} < \infty$  e conseqüentemente temos  $\text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} < \infty$ . Assim,  $A_{\mathfrak{p}}$  é regular. ■

Como conseqüência destes resultados temos:

**Teorema 3.1.39** *Se  $K$  é um corpo, então todo módulo finitamente gerado sobre o anel de polinômios  $K[X_1, \dots, X_n]$  tem resolução livre de dimensão menor ou igual a  $n$ .*

Demonstração: Vide [7], Corolário 7.2.5 (a), página 208. ■

**Corolário 3.1.40** *Se  $K$  é um domínio de ideais principais então todo  $K[X_1, \dots, X_n]$ -módulo finitamente gerado tem uma resolução livre de comprimento menor ou igual a  $n + 1$ .*

Demonstração: Vide [7], Corolário 7.2.5 (b), página 208. ■



**Corolário 3.1.41** *Se um anel noetheriano  $A$  é regular (respectivamente uma intersecção completa) o mesmo ocorre com o anel de frações  $A_S$ .*

Demonstração: É suficiente mostrar que  $A_{\mathfrak{p}}$  é regular (respectivamente intersecção completa) para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ . Seja  $\mathfrak{m}$  um ideal maximal de  $A$  contendo  $\mathfrak{p}$ . Se  $A$  é regular então

$$\text{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \leq \text{dp}_{A_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}} < \infty,$$

e portanto  $A_{\mathfrak{p}}$  é regular.

Se  $A$  é localmente uma intersecção completa, então  $A_{\mathfrak{m}} \cong A/I$ , onde  $A$  é um anel local regular e  $I \subset A$  o ideal gerado por uma  $A$ -seqüência regular. Além disso  $A_{\mathfrak{p}} \cong (A_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}} \cong A_{\mathfrak{b}}/IA_{\mathfrak{b}}$ , se  $\mathfrak{b}$  é a imagem inversa de  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$  em  $A$ . Como já mostrado  $A_{\mathfrak{b}}$  é regular. Como  $\mathfrak{b} \supset I$ ,  $IA_{\mathfrak{b}}$  é gerado por uma  $A_{\mathfrak{b}}$ -seqüência regular, logo  $A_{\mathfrak{p}}$  é uma intersecção completa. ■

**Corolário 3.1.42** *Se um anel noetheriano  $A$  é regular (resp. intersecção completa), o mesmo acontece com  $A[X_1, \dots, X_n]$ .*

Demonstração: Seja  $\mathfrak{b} \in \text{Spec}(A[X_1, \dots, X_n])$  e  $\mathfrak{p} := \mathfrak{b} \cap A$ . Então  $A[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{b}} = A_{\mathfrak{p}}[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{b}}$  e o ideal maximal deste anel intersecta  $A_{\mathfrak{p}}$  no ideal maximal  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ . Se  $A_{\mathfrak{p}}$  é regular, então o mesmo acontece com  $A[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{b}}$ .

Se  $A_{\mathfrak{p}} \cong A/I$  com  $A$  anel local regular e  $I$  gerado por uma  $A$ -seqüência regular, então  $A_{\mathfrak{p}}[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{b}} \cong A[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{Q}}/IA[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{Q}}$ , onde  $\mathfrak{Q}$  é a pré-imagem de  $\mathfrak{b}$  em  $A[X_1, \dots, X_n]$ . Como já mostrado  $A[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{Q}}$  é regular. É claro que  $IA[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{Q}}$  é gerado por uma  $A[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{Q}}$ -seqüência regular, de fato,  $I$  é gerado por uma  $A$ -seqüência regular que é  $A[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{Q}}$  regular. Portanto  $A[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{b}}$  é uma intersecção completa. ■

A seguir temos, como consequência dos resultados desenvolvidos nesta seção, a caracterização das intersecções completas em anéis regulares.

**Corolário 3.1.43** *Para um ideal  $I \neq A$  de um anel noetheriano local  $A$  são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i)  $I$  é localmente uma intersecção completa em  $A$ .
- (ii) O módulo conormal  $I/I^2$  é um  $A/I$ -módulo projetivo.

Demonstração: Vide [7], Corolário 7.2.8, página 209. ■



Se  $I/I^2$  é  $A/I$ -livre podemos em muitos casos concluir que  $I$  é globalmente intersecção completa. Mais precisamente temos:

**Corolário 3.1.44** *Seja  $I$  um ideal de um anel de polinômios  $A = K[X_1, \dots, X_n]$  sobre um corpo  $K$ . Se  $I/I^2$  é um  $A/I$ -módulo livre e  $2 \cdot \dim A/I + 2 \leq n$ , então  $I$  é uma intersecção completa em  $A$ .*

Demonstração: Seja  $r$  o posto de  $I/I^2$ . Pelo Corolário 3.1.43  $I$  é localmente uma intersecção completa em  $A$ , e  $r = ht(I) = n - \dim A/I$ .

Como  $\mu(I/I^2) = n - \dim A/I \geq \dim A/I + 2$  segue que  $\mu(I) = \mu(I/I^2) = r$ . Portanto  $I$  é globalmente uma intersecção completa. ■

## 3.2 Anéis de Cohen-Macaulay

Veremos, no que segue, uma classe especial de módulos. Antes, porém, algumas definições:

**Definição 3.2.1** *Sejam  $A$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo.*

(i) Chamamos de **anulador de  $M$**  e denotaremos por  $\text{Ann}(M)$ , o conjunto dado por

$$\text{Ann}(M) = \{a \in A \mid am = 0, \text{ para todo } m \in M\}.$$

(ii) Um ideal  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  é denominado **associado a  $M$** , se existe um  $m \in M$  tal que  $\mathfrak{p} = \text{Ann}(m)$ . O conjunto dos ideais primos associados de  $M$  denotaremos por  $\text{Ass}(M)$ .

(iii) Por **suporte de  $M$**  chamaremos o conjunto

$$\text{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

**Definição 3.2.2** *A dimensão de um módulo  $M$  sobre um anel  $A$  é a dimensão de Krull de  $A/\text{Ann}(M)$ .*

Claro que se  $M = A$  não há nada novo. Se  $M$  é um módulo finitamente gerado sobre um anel  $A$ , então os primos divisores minimais de  $\text{Ann}(M)$  são também elementos minimais de  $\text{Ass}(M)$  e de  $\text{Supp}(M)$ . Temos então:

$$\dim M = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\} = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\}. \quad (3.8)$$

**Proposição 3.2.3** *Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel noetheriano local,  $M \neq \langle 0 \rangle$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. Então*

$$\text{prof} M \leq \min_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\} \leq \dim M.$$

Demonstração: Apenas a desigualdade esquerda precisa ser demonstrada. Faremos isso utilizando indução sobre  $n := \text{prof} M$ . Como para  $n = 0$  não há nada a ser feito, assumiremos que  $\mathfrak{m}$  contém um não divisor de zero  $a$  de  $M$  e que a proposição já foi verificada para módulos de profundidade  $n - 1$ .

Como  $\text{prof} M/aM = \text{prof} M - 1$ , tem-se  $\text{prof} M/aM \leq \min_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/aM)} \{\dim A/\mathfrak{p}\}$  e, assim é suficiente mostrarmos que para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ , existe um  $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}(M/aM)$  com  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ ;  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ . De onde poderemos, então, concluir que

$$\min_{\mathfrak{p}' \in \text{Ass}(M/aM)} \{\dim A/\mathfrak{p}'\} < \min_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\}$$

seguindo daí a proposição.

Para  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$  temos  $a \notin \mathfrak{p}$ . Mostremos que  $M/aM$  tem um submódulo  $U \neq \langle 0 \rangle$  com  $\mathfrak{p}U = 0$ . Como  $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}(U)$  então  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$  e  $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$  pois  $a \in \mathfrak{p}'$ . Assim,  $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}(M/aM)$  e então a proposição está provada.

Como  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ ,  $N' := \{m \mid \mathfrak{p}m = \langle 0 \rangle\}$  é um submódulo de  $M$  diferente de  $\langle 0 \rangle$ . Assim  $N' \subset N := \{m \mid \mathfrak{p}m \in aM\}$ . Se tivéssemos  $N = aM$  então para todo  $n' \in N'$ ,  $n' = am$  com  $m \in M$  e como  $\mathfrak{p}n' = \langle 0 \rangle$ ,  $m \in N'$ , pois  $a$  não é divisor de zero em  $M$ . Então  $N' = aN'$  e pelo Lema de Nakayama  $N' = \langle 0 \rangle$ . Assim  $N \neq aM$  e  $U := N/aM$  é o submódulo de  $M$  diferente de  $\langle 0 \rangle$  que satisfaz a condição  $\mathfrak{p}U = \langle 0 \rangle$ . ■

Um caso particularmente interessante (aliás o mais importante) ocorre quando  $\text{prof} M = \dim M$  e neste caso temos:

**Definição 3.2.4** *Seja  $M$  um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano  $A$ . Se  $A$  é local, dizemos que  $M$  é um **módulo Cohen-Macaulay** (ou simplesmente um  $C - M$ -módulo) se  $M \neq \langle 0 \rangle$  ou se  $\dim M = \text{prof} M$ . No caso geral  $M$  é um módulo Cohen-Macaulay se  $M_{\mathfrak{m}}$  (considerado como um  $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo) é Cohen-Macaulay para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$  e  $A$  é um **anel Cohen-Macaulay** se, visto como um  $A$ -módulo,  $A$  é Cohen-Macaulay.*

Antes de apresentarmos alguns exemplos vejamos algumas conseqüências imediatas dos resultados anteriores envolvendo módulos e anéis  $C - M$ .



**Proposição 3.2.5** *Se  $(A, \mathfrak{m})$  é um anel noetheriano local,  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado e  $\{a_1, \dots, a_m\}$  uma  $M$ -seqüência regular em  $\mathfrak{m}$ , então  $M$  é um módulo  $C - M$  se, e somente se,  $M/(a_1, \dots, a_m)M$  visto como um  $A/(a_1, \dots, a_m)$ -módulo é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Consideremos o caso  $m = 1$ . Como  $\text{prof} M/a_1 M = \text{prof} M - 1$ , apenas temos que mostrar que  $\dim M/a_1 M = \dim M - 1$ . Pelas definições de profundidade e de dimensão não há diferença em considerarmos  $M/a_1 M$  como um  $A$ -módulo ou um  $A/(a_1)$ -módulo.

Agora,

$$\dim M/a_1 M = \max_{\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M/a_1 M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\}.$$

Além disso,

$$\text{Supp}(M/a_1 M) = \text{Supp}(M) \cap \mathfrak{B}(a_1).$$

Como  $a_1 \notin \mathfrak{p}$  para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$  e  $\dim M = \max_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\}$ , segue que  $\dim M/a_1 M < \dim M$ . Tomemos  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$  com  $\dim M = \dim A/\mathfrak{p}$  e um divisor primo  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{p} + (a_1)$  tal que  $\dim A/\mathfrak{b} = \dim A/\mathfrak{p} + (a_1)$ . Então  $\mathfrak{b} \in \text{Ass}(M/a_1 M)$  e pelo Teorema 2.2.7 temos que  $\dim A/\mathfrak{b} = \dim A/\mathfrak{p} - 1$ . Assim  $\dim M/a_1 M \geq \dim M - 1$  e portanto  $\dim M/a_1 M = \dim M - 1$ . ■

Em particular se  $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathfrak{m}$  é uma  $A$ -seqüência regular, então  $A$  é um anel  $C - M$  se, e somente se,  $A/(a_1, \dots, a_m)$  é  $C - M$ .

**Corolário 3.2.6** *Considerando as hipóteses anteriores e seja  $M$  um  $C - M$  módulo. Então*

$$\dim A/\mathfrak{p} = \dim M - m, \quad \forall \mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/(a_1, \dots, a_m)M).$$

Demonstração: Da Proposição 3.2.3 temos

$$\begin{aligned} \text{prof} M - m = \text{prof} M/(a_1, \dots, a_m)M &\leq \min_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/(a_1, \dots, a_m)M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\} \leq \\ &\leq \max_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/(a_1, \dots, a_m)M)} \{\dim A/\mathfrak{p}\} = \\ &= \dim M/(a_1, \dots, a_m)M = \dim M - m. \end{aligned}$$

e a igualdade é válida pois  $\text{prof} M = \dim M$ . ■

**Corolário 3.2.7** *Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel  $C - M$  local e  $\{a_1, \dots, a_m\}$  um sistema de elementos em  $\mathfrak{m}$ . Então  $\{a_1, \dots, a_m\}$  é uma  $A$ -seqüência regular se, e somente se,  $\{a_1, \dots, a_m\}$  pode ser estendido a um sistema de parâmetros de  $A$ . Em particular o sistema de parâmetros de  $A$  são as  $A$ -seqüências regulares maximais em  $\mathfrak{m}$ .*

**Demonstração:** Do Corolário 3.2.6 sabemos que  $\text{Ass}(A)$  é formado pelos ideais primos minimais de  $A$ . Para  $a \in \mathfrak{m}$  temos  $\dim A/(a) = \dim A - 1$ , se e somente se,  $a$  é um divisor de zero de  $A$ . Assim  $A/(a)$  é um anel  $C - M$  e utilizando a caracterização de sistemas de parâmetros apresentada no Corolário 2.2.8 e indução sobre  $m$ , demonstramos o resultado. ■

**Exemplo 3.2.8** *Aqui apresentamos alguns exemplos de anéis Cohen-Macaulay.*

(i) *Todo módulo finitamente gerado de dimensão zero sobre um anel noetheriano é Cohen-Macaulay. Em particular todo anel noetheriano de dimensão zero é Cohen-Macaulay.*

(ii) *Um anel noetheriano reduzido de dimensão 1 é Cohen-Macaulay.*

Para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  é um corpo ou  $\dim A_{\mathfrak{m}} = 1$ . No segundo caso  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \notin \text{Ass}(A_{\mathfrak{m}})$  pois em um anel reduzido apenas os ideais primos minimais são associados. Portanto  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  contém um elemento não divisor de zero. Assim  $\text{prof} A_{\mathfrak{m}} = 1$ .

(iii) *Todo anel noetheriano regular é Cohen-Macaulay.*

De fato, para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$ ,  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  é gerado por uma  $A_{\mathfrak{m}}$ -seqüência regular de comprimento  $\dim A_{\mathfrak{m}}$ , portanto  $\text{prof} A_{\mathfrak{m}} = \dim A_{\mathfrak{m}}$ .

(iv) *Dados inteiros  $0 \leq r \leq d$ , existe um anel local de dimensão  $d$  e profundidade  $r$ .*

De fato, tomemos  $A = K[X_1, \dots, X_r, \dots, X_d]/(X_r^2, X_r X_{r+1}, \dots, X_r X_d)$ . Assim existem anéis que são arbitrariamente não Cohen-Macaulay. Em particular, tomando  $r = 1$  e  $d = 2$ , temos que  $A = K[X_1, X_2]/(X_1^2, X_1 X_2)$  não é Cohen-Macaulay. De fato, se  $\mathfrak{m}$  é o ideal em  $A$  gerado pelas imagens de  $X_1$  e  $X_2$ , então  $\dim A_{\mathfrak{m}} = 1$ , mas  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  possui apenas divisores de zero.

**Observação:** O fato de um ideal ser gerado por divisores de zero não é suficiente para concluirmos que o ideal todo é constituído apenas por divisores de zero. Por exemplo, seja  $I = (XY, XZ, YZ) \subset K[X, Y, Z]$ .  $X, Y, Z$  são divisores de zero em  $K[X, Y, Z]/I$  o que não ocorre com  $X + Y + Z$  e  $X + Y + Z \in (X, Y, Z)$ .

O teorema que apresentamos a seguir foi primeiramente demonstrado por Macaulay no caso de anéis polinomiais e serviu de base para toda a teoria que viria a seguir:

**Teorema 3.2.9** *Sejam  $A$  um anel Cohen-Macaulay (não necessariamente local) e  $I \neq A$  um ideal de  $A$  com  $ht(I) = n$ . Então*

(i)  $\text{prof}_I A = n$ .

(ii)  $I$  é uma intersecção completa em  $A$  se, e somente se,  $I$  é gerado por uma  $A$ -seqüência regular. Neste caso todos os ideais primos em  $\text{Ass}(A/I)$  tem a mesma altura  $n$ .

Demonstração: Provaremos primeiramente (ii). Seja  $\{a_1, \dots, a_m\}$  uma  $A$ -seqüência regular e  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A/(a_1, \dots, a_m))$ . Tomemos  $\mathfrak{m}$  um ideal maximal de  $A$  contendo  $\mathfrak{p}$ . As imagens dos  $a_i$ 's formam uma  $A_{\mathfrak{m}}$  seqüência regular em  $A_{\mathfrak{m}}$  e

$$\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}} \in \text{Ass}(A_{\mathfrak{m}}/(a_1, \dots, a_m)A_{\mathfrak{m}}).$$

Logo, pelo Corolário 3.2.6,  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$  é um primo divisor minimal de  $(a_1, \dots, a_m)A_{\mathfrak{m}}$  e portanto  $\mathfrak{p}$  é um primo divisor minimal de  $(a_1, \dots, a_m)$ . Como as seqüências regulares sempre geram intersecções completas, segue que  $ht(\mathfrak{p}) = m$ .

(i) Consideremos agora  $\{a_1, \dots, a_v\}$  uma seqüência regular maximal em  $I$ . Então  $I$  consiste apenas de divisores de zero do  $A$ -módulo  $A/(a_1, \dots, a_v)$  e portanto está contido em algum ideal primo associado  $\mathfrak{p}$  deste módulo. Como já vimos,  $ht(\mathfrak{p}) = v$  e  $n \leq v$ . Por outro lado se  $\mathfrak{q}$  é um primo divisor minimal de  $I$  com  $ht(\mathfrak{q}) = ht(I)$ , segue de  $(a_1, \dots, a_v) \subset \mathfrak{q}$  que  $ht(\mathfrak{q}) \geq v$  e portanto  $v = n$  e assim  $\text{prof}_I A = n$ .

Se  $I$  é uma intersecção completa, então  $I$  é gerado por  $n$  elementos e pela Proposição 3.1.25 podemos tomar estes elementos para formarmos uma  $A$ -seqüência regular, provando assim o teorema. ■

**Corolário 3.2.10** *Seja  $A$  um anel  $C - M$ . São válidas as seguintes afirmações:*

(i) *Para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  também é um anel  $C - M$ .*

(ii) *Para todo  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  com  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ , temos*

$$\dim A_{\mathfrak{q}} = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}.$$

*Em um anel  $C - M$  local  $A$ ,  $\dim A = \dim A/I + ht(I)$ , para todo ideal  $I \neq A$ .*

Demonstração: (i) Se  $ht(I) = n$ , então  $\mathfrak{p}$  contém uma  $A$ -seqüência regular de comprimento  $n$ , que também é uma seqüência regular em  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ , logo  $\text{prof}A_{\mathfrak{p}} \geq n = ht(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}}$ . Como a igualdade  $\text{prof}A_{\mathfrak{p}} \leq \dim A_{\mathfrak{p}}$  é sempre válida, segue que  $A_{\mathfrak{p}}$  é um anel  $C - M$ .

(ii) Tomemos uma seqüência regular  $\{a_1, \dots, a_n\}$  em  $\mathfrak{p}$  com  $n = \dim A_{\mathfrak{p}}$ . Esta seqüência também é  $A_{\mathfrak{q}}$ -regular em  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$  e  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$  é um primo divisor minimal de  $(a_1, \dots, a_n)A_{\mathfrak{q}}$ . Portanto  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} \in \text{Ass}(A_{\mathfrak{q}}/(a_1, \dots, a_n)A_{\mathfrak{q}})$ . Como  $A_{\mathfrak{q}}$  é um anel  $C - M$ , temos

$$\dim A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} = \dim A_{\mathfrak{q}} - n = \dim A_{\mathfrak{q}} - \dim A_{\mathfrak{p}}.$$

Se  $I$  é um anel  $C - M$  local, temos que  $\dim A = \dim A/\mathfrak{p}$ , para todos os ideais primos minimais  $\mathfrak{p}$  de  $A$ . Mas então todas as cadeias maximais de ideais primos de  $A$  tem comprimento igual a  $\dim A$ , e das definições de altura e dimensão temos que  $\dim A = \dim A/I + ht(I)$ , para todo ideal  $I \neq A$  de  $A$ .

■

Temos, para anéis regulares locais  $A$ , que:

- (i)  $A$  é domínio.
- (ii)  $A$  é  $C - M$ .
- (iii)  $A$  é integralmente fechado em seu corpo de frações.
- (iv)  $A/I$  é regular se, e somente se,  $I$  for gerado por um subconjunto de um sistema de parâmetros.

## Apêndice

Neste apêndice apresentamos a notação, definições da teoria geral bem como resultados que foram utilizados no trabalho. Os resultados são apresentados sem demonstração.

**Definição 1** O radical de um ideal  $I$  é o conjunto de todos os elementos  $a \in A$  tais que  $a^n \in I$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Denotaremos este conjunto por  $\text{Rad}(I)$ .

Da definição de radical segue que  $\text{Rad}(I)$  também é um ideal.  $\text{Rad}(0)$  é chamado de **nilradical** de  $A$ .

Um anel é chamado **reduzido** se  $\text{Rad}(0) = 0$ . Para todo anel  $A$ , indicaremos  $A_{\text{red}} := A/\text{Rad}(0)$ .  $A_{\text{red}}$  é chamado **anel reduzido** em  $A$ .

**Definição 2** Para um ideal qualquer  $I$  chamaremos de **ideal divisor primo de  $I$**  a todo ideal primo de  $A$  que contém  $I$  e um ideal primo  $B$  é chamado **divisor primo minimal de  $I$**  se  $B' = B$  para todo divisor primo  $B'$  de  $I$ , com  $B' \subset B$ .

**Observação:** Da definição de ideal primo, temos que um ideal primo que contém a intersecção (ou produto) de dois ideais, contém um dos dois ideais, além disso  $\text{Rad}(B) = B$  para todo ideal primo  $B$ .

**Definição 3** Seja  $A \subset S$  um subanel e  $I \subset A$  um ideal. A **extensão do ideal  $I$  em  $S$**  é o ideal gerado por  $I$  em  $S$  que denotaremos por  $IS$ . Se  $\varphi : S \rightarrow A$  é um homomorfismo de anéis,  $IS$  denota o ideal de  $S$  gerado por  $\varphi(I)$ .

**Definição 4** Seja  $A$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo.  $M$  é dito **finitamente gerado** se  $M = m_1A + \dots + m_nA$  para algum  $n \in \mathbb{N}$  e  $m_i \in M$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .  $M$  é **cíclico** (ou **homogêneo**) se é gerado por um único elemento.

**Definição 5** Um anel  $A$  é chamado **noetheriano** se todo ideal de  $A$  tem um sistema finito de geradores.



Os domínios de ideais principais, em particular todos os corpos, bem como  $\mathbb{Z}$  e  $K[X]$ , onde  $K$  é um corpo, são exemplos de anéis noetherianos. Além disso qualquer imagem por um homomorfismo de um anel noetheriano é noetheriana.

**Teorema 6** (*Teorema da Base de Hilbert*) Se  $A$  é um anel noetheriano então  $A[X]$  também é noetheriano.

Demonstração: Vide [7], Proposição 1.2.3, página 11. ■

**Definição 7** Um espaço topológico é chamado **irredutível** se para toda decomposição  $X = A_1 \cup A_2$ , com  $A_i \subset X$  ( $i = 1, 2$ ) fechado, tem-se  $X = A_1$  ou  $X = A_2$ . Um subconjunto  $X'$  de um espaço topológico é chamado irredutível se  $X'$  é irredutível com a topologia induzida.

**Lema 8** Para um espaço topológico  $X$  as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $X$  é irredutível.
- (ii) Se  $U_1$  e  $U_2$  são subconjuntos abertos de  $X$  e se  $U_i \neq \emptyset$  ( $i = 1, 2$ ) então  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .
- (iii) Todo subconjunto aberto não vazio de  $X$  é denso em  $X$ .

Demonstração: Vide [7], Lema 1.2.9, página 12. ■

**Definição 9** Uma **componente irredutível** de um espaço topológico  $X$  é um subconjunto irredutível maximal de  $X$ .

**Proposição 10** (i) Todo subconjunto irredutível de um espaço topológico está contido em alguma componente irredutível.

(ii) Todo espaço topológico é união de suas componentes irredutíveis.

Demonstração: Vide [7], Proposição 1.2.12, página 12. ■

**Definição 11** Um espaço topológico  $X$  é dito **noetheriano** se toda cadeia descendente  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  de subconjuntos fechados  $A_i \subset X$  é estacionária.

**Proposição 12** Um espaço topológico noetheriano possui somente componentes irredutíveis. Nenhuma componente está contida na união das demais.



Demonstração: Vide [7], Proposição 1.2.14, página 13. ■

**Definição 13** Um  $A$ -módulo  $M$  é chamado **módulo noetheriano** se todo submódulo  $N$  de  $M$  é finitamente gerado.

**Proposição 14** Se  $A$  é um anel noetheriano e  $M$  é um  $A$ -módulo finitamente gerado então  $M$  é um  $A$ -módulo noetheriano.

Demonstração: Vide [7], Proposição 1.2.17, página 14. ■

**Definição 15** Um polinômio  $f$  é dito **homogêneo** de grau  $d$ , se todos os monômios de  $f$  tem grau  $d$ , ou seja, se escrevemos

$$f(X) = \sum a_{(\nu)} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}$$

e  $a_{(\nu)} \neq 0$ , então  $\nu_1 + \dots + \nu_n = d$ .

Um polinômio

$$f = \sum a_{\nu_1, \dots, \nu_n} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n} \in K[X_1, \dots, X_n]$$

é chamado **quasehomogêneo** do tipo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$  e grau  $d \in \mathbb{Z}$  se  $a_{\nu_1, \dots, \nu_n} = 0$ , para todo  $\nu_1, \dots, \nu_n$  com  $\sum \alpha_i \nu_i \neq d$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Deste modo, uma variedade é chamada **homogênea** se está definida por um sistema de polinômios homogêneos e **quasehomogênea** se está definida por polinômios quasehomogêneos  $f_i$  de um tipo fixo  $\alpha$ .

**Definição 16** Uma **graduação** de um anel  $G$  é uma família  $\{G_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de subgrupos  $G_k$  do grupo aditivo de  $G$  tal que

- (i)  $G = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} G_k$ ,
- (ii)  $G_i \cdot G_j \subset G_{i+j}$  para todo  $i, j \in \mathbb{Z}$ .

$G$  é dito um **anel graduado** se possui uma graduação. Se  $G_k = 0$  para  $k < 0$ ,  $G$  é denominado **positivamente graduado**. Os elementos de  $G_k$  são os elementos homogêneos de grau  $k$  de  $G$ . Se  $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k$  ( $g_k \in G_k$ ),  $g_k$  é chamada **componente homogênea** de grau  $k$  de  $g$ .

No anel  $G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$  positivamente graduado,  $G_+ = \bigoplus_{i > 0} G_i$  é chamado **ideal irrelevante** de  $G$ .



**Definição 17** Um ideal de um anel graduado é dito **homogêneo** se é gerado por elementos homogêneos.

Para um anel  $A$  denotamos:

- (i)  $\text{Spec}(A)$  o conjunto de todos os ideais primos  $\mathfrak{p}$  de  $A$ ,  $\mathfrak{p} \neq A$ .
- (ii)  $J(A)$  o conjunto de todos os ideais primos em  $\text{Spec}(A)$  que podem ser escritos como intersecção de ideais maximais.
- (iii)  $\text{Max}(A)$  o conjunto de todos os ideais maximais de  $A$ .

Além disso para  $G$  anel graduado,  $\text{Proj}(G)$  denota o conjunto de todos os ideais primos homogêneos  $\mathfrak{B}$  de  $G$  com  $G_+ \not\subset \mathfrak{B}$ .  $\text{Proj}(G)$  é chamado **spectro homogêneo** de  $G$ .

**Lema 18** Para um ideal  $I$  de um anel graduado  $G$  as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $I$  é homogêneo.
- (ii) Para todo  $a \in I$  as componentes homogêneas  $a_k$  de  $a$  também pertencem a  $I$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- (iii)  $G/I$  é um anel graduado com a graduação  $\{(G/I)_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , onde

$$(G/I)_k := (G_k + I)/I$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Demonstração: Vide [7], Lema 1.5.5, página 32. ■

**Lema 19** Se  $\mathfrak{B}$  é um ideal primo de um anel graduado  $G$  e  $\mathfrak{B}^*$  é o ideal gerado pelos elementos homogêneos de  $\mathfrak{B}$ , então  $\mathfrak{B}^*$  também é um ideal primo de  $G$ .

Demonstração: Vide [7], Lema 1.5.12, página 34. ■

**Observação:** Se  $\mathfrak{B}$  é um primo minimal divisor de  $I$ , então  $I \subset \mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$  e do lema segue que  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$  é homogêneo.

Utilizando o Lema 19 temos o seguinte resultado:

**Proposição 20** Seja  $G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} G_i$  um anel graduado,  $I$  um ideal homogêneo de  $G$ . Então todos os primos minimais divisores de  $I$  são homogêneos.



Demonstração: Vide [7], Proposição 1.5.11, página 34.

■

**Definição 21** *Seja  $X$  um espaço topológico,  $Y \subset X$  um subconjunto fechado e irredutível. Se  $X \neq \emptyset$ , a **dimensão de Krull** de  $X$ , que denotaremos  $\dim X$  é o supremo dos comprimentos  $n$  de todas as cadeias*

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \quad (X_{i+1} \neq X_i) \quad (0.9)$$

*de subconjuntos  $X_i$  irredutíveis, fechados e não vazios de  $X$ .*

Se  $Y \neq \emptyset$ , a **codimensão** de  $Y$  em  $X$ , denotada por  $\text{codim}_X Y$ , é definida como o supremo de todas as cadeias em (0.9) com  $X_0 = Y$ . A codimensão de um subconjunto fechado  $A$  é o ínfimo das codimensões das componentes irredutíveis de  $A$ . Por conveniência o espaço vazio tem dimensão de Krull  $-1$ , e um subconjunto vazio de  $X$  tem codimensão infinita (por definição).

Para um anel positivamente graduado  $G$ , seja  $\text{g-dim}(G) := \dim(\text{Proj}(G))$ . Se  $\text{Proj}(G) \neq \emptyset$ ,  $\text{g-dim}(G)$  é igual ao supremo do comprimento de todas as cadeias

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n \quad (\mathfrak{p}_{i+1} \neq \mathfrak{p}_i)$$

formadas somente por ideais primos relevantes de  $G$ .

**Definição 22** *A dimensão de Krull de um anel  $A$ , é a dimensão do  $\text{Spec}(A)$ ; logo para  $A \neq \{\emptyset\}$ ,  $\dim A$  é o supremo dos comprimentos  $n$  de todas as cadeias de ideais primos*

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n \quad (\mathfrak{p}_{i+1} \neq \mathfrak{p}_i) \quad (0.10)$$

*em  $\text{Spec}(A)$ .*

A **altura**  $ht(\mathfrak{p})$  de  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  é o supremo dos comprimentos de todas as cadeias em (0.10) com  $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ .

Para um ideal arbitrário  $I \neq A$  a altura  $ht(I)$  é definida como o mínimo das alturas dos divisores primos de  $I$ . Também  $\dim(I)$  é por definição a dimensão (ou coaltura) do ideal  $I$  em relação a  $A$  e  $\dim J(A)$  é chamada  **$J$ -dimensão de  $A$** .

**Proposição 23** *Para todo anel  $A$*

- (i)  $\text{Max}(A)$  é noetheriano se, e somente se,  $J(A)$  é noetheriano.
- (ii)  $\dim \text{Max}(A) = \dim J(A) \leq \dim \text{Spec}(A)$ .

Demonstração: Vide [7], Proposição 2.1.8, página 42.



**Proposição 24** Para um anel reduzido  $A$  com um número finito de ideais primos minimais as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $\dim A = 0$ .
- (ii)  $A$  é isomorfo ao produto direto de um número finito de corpos.

Demonstração: Vide [7], Proposição 2.1.5, página 41.

**Definição 25** Um anel  $A \neq \{0\}$  é chamado *local (semilocal)* se  $\text{Max}(A)$  possui apenas um elemento (somente um número finito de elementos).

**Definição 26** Um elemento  $x \in S$  é chamado **inteiro** sobre  $I$  se existe um polinômio  $f$  em  $A[X]$  da forma  $f = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$  para  $n > 0$ ,  $a_i \in I$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que  $f(x) = 0$ .

Dizemos que uma extensão  $S$  de  $A$  é inteira se todo  $x \in S$  é inteiro sobre  $A$ .

**Proposição 27** Para  $x \in S$  são equivalentes as seguintes afirmações:

- (i)  $x$  é inteiro sobre  $I$ .
- (ii)  $A[x]$  é finitamente gerado como um  $A$ -módulo e  $x \in \text{Rad}(IA[x])$ .
- (iii) Existe um subanel  $S'$  de  $S$  com  $A[X] \subset S'$  tal que  $S'$  é finitamente gerado como um  $A$ -módulo e  $x \in \text{Rad}(IS')$ .

Demonstração: Vide [7], Proposição 2.2.2, página 44.

**Corolário 28** Se  $S$  é finitamente gerado como  $A$ -módulo então  $S$  é inteira sobre  $A$ . Neste caso  $x \in S$  é inteiro sobre  $I$  se, e somente se,  $x \in \text{Rad}(IS)$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 2.2.3, página 44.

**Corolário 29** Se  $x_1, \dots, x_n \in S$  são inteiros sobre  $I$  então  $A[x_1, \dots, x_n]$  é um  $A$ -módulo finitamente gerado e  $x_i \in \text{Rad}(IA[x_1, \dots, x_n])$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 2.2.4, página 44.



**Corolário 30** Se  $S|A$  e  $T|S$  são extensões inteiras de anéis então  $T|A$  também é uma extensão inteira.

Demonstração: Vide [7], Corolário 2.2.5, página 45. ■

**Corolário 31** O conjunto  $\overline{A}$  dos elementos de  $S$  que são inteiros sobre  $A$  é um subanel de  $S$ .  $\text{Rad}(I\overline{A})$  é o conjunto de todos os elementos de  $S$  que são integrais sobre  $I$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 2.2.6, página 45. ■

**Definição 32**  $\overline{A}$  é chamado **fecho inteiro** de  $A$  em  $S$ .  $A$  é **integralmente fechado** em  $S$  se  $\overline{A} = A$ . Um domínio de integridade que é integralmente fechado em seu corpo de frações é chamado **normal**.

**Lema 33** Seja  $S|A$  uma extensão inteira de anéis,  $J$  um ideal de  $S$ ;  $I := J \cap A$ . Então:

- (i)  $S/J$  é inteira sobre  $A/I$
- (ii) Se  $J$  contém um elemento regular (não divisor de zero) de  $S$ , então  $I \neq (0)$ .

Demonstração: Vide [7], Lema 2.2.9, página 46. ■

**Proposição 34** Sejam  $S$  uma extensão inteira do anel  $A$  e  $\varphi : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(A)$ , tal que,  $\varphi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cap A$  uma aplicação contínua. Então:

- (i)  $\varphi : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(A)$  é sobrejetora (a um ideal primo de  $A$  está relacionado um ideal primo de  $S$ ).
- (ii)  $\varphi$  é fechada (a imagem de todo subconjunto fechado de  $\text{Spec}(S)$  é fechada em  $\text{Spec}(A)$ ).
- (iii) Se  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \text{Spec}(S)$  com  $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2$  e  $\varphi(\mathfrak{b}_1) = \varphi(\mathfrak{b}_2)$  então  $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$ .
- (iv)  $\varphi$  associa  $\text{Max}(S)$  ao  $\text{Max}(A)$  e  $\varphi^{-1}(\text{Max}(A)) = \text{Max}(S)$ . ( $\mathfrak{b} \in \text{Spec}(S)$  é maximal se, e somente se,  $\mathfrak{b} \cap A$  é maximal).

Demonstração: Vide [7], Proposição 2.2.10, página 46. ■

No que segue, quando falamos em uma “cadeia de ideais primos”  $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{b}_n$  de um anel  $S$ , os ideais  $\mathfrak{b}_i$ ’s pertencem ao  $\text{Spec}(S)$  e as inclusões são próprias.

**Corolário 35** Se  $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{b}_n$  é uma cadeia de ideais primos de  $S$  e  $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{b}_i \cap A$ , então  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$  é uma cadeia de ideais primos em  $A$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 2.2.12, página 47. ■

**Corolário 36** Se  $\text{Spec}(S)$  é noetheriano, então  $\varphi$  é uma aplicação finita, ou seja, sobre todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  está relacionado um número finito de ideais  $\mathfrak{b} \in \text{Spec}(S)$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 2.2.14, página 47. ■

**Corolário 37** Seja  $S$  uma extensão inteira do anel  $A$  com  $A \neq \{0\}$ . Temos:

(i)  $\dim A = \dim S$ .

(ii) Para todo  $\mathfrak{b} \in \text{Spec}(S)$

$$ht(\mathfrak{b}) \leq ht(\mathfrak{b} \cap A); \dim \mathfrak{b} = \dim(\mathfrak{b} \cap A).$$

Demonstração: Vide [7], Corolário 2.2.13, página 47. ■

**Proposição 38** Seja  $A \neq \{0\}$  um anel com um número finito de ideais primos  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ . Então  $\text{Rad}(0) = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$ . Além disso  $\bigcup_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$  contém apenas divisores de

zero. Se  $A$  é reduzido, então  $\bigcup_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$  é o conjunto de todos os divisores de zero de  $A$ .

Demonstração: Vide [7], Proposição 1.4.10, página 26. ■

**Lema 39** (Lema de Nakayama) Sejam  $I$  um ideal de  $A$  contido na interseção de todos os ideais maximais de  $A$ ,  $M$  um  $A$ -módulo arbitrário e  $N \subset M$  um submódulo tal que  $M/N$  é finitamente gerada. Se  $M = N + IM$ , então  $M = N$ .



Demonstração: Vide [7], Lema 4.2.2, página 104. ■

**Corolário 40** *Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel local onde  $\mathfrak{m}$  é o ideal maximal de  $A$ ,  $k := A/\mathfrak{m}$  o corpo residual e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. Para os elementos  $m_1, \dots, m_t \in M$  as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i)  $M = \langle m_1, \dots, m_t \rangle$ .

(ii) *As classes laterais  $\overline{m_1}, \dots, \overline{m_t} \in M/\mathfrak{m}M$  de  $m_i$  são um sistema de geradores do  $k$ -espaço vetorial  $M/\mathfrak{m}M$ .*

Demonstração: Vide [7], Corolário 4.2.3, página 104. ■

**Corolário 41** *Sob as mesmas hipóteses do Corolário anterior temos:*

(i)  $\mu(M) = \dim_k(M/\mathfrak{m}M)$ , onde  $\dim_k$  é a dimensão do  $k$ -espaço vetorial.

(ii)  $m_1, \dots, m_t \in M$  é um sistema minimal de geradores de  $M$  se, e somente se, suas respectivas classes laterais  $\overline{m_1}, \dots, \overline{m_t} \in M/\mathfrak{m}M$  formam uma base.

(iii) Se  $\{m_1, \dots, m_t\}$  é um sistema minimal de geradores de  $M$  e se

$$\sum_{i=1}^t a_i m_i = 0 \quad (a_i \in A)$$

então  $a_i \in \mathfrak{m}$  para  $i = 1, \dots, t$ .

(iv) *Todo sistema gerador de  $M$  contém um sistema minimal de geradores.*

(v) *O conjunto  $\{m_1, \dots, m_t \in M\}$  pode ser estendido a um sistema minimal de geradores de  $M$  se, e somente se, as classes  $\overline{m_1}, \dots, \overline{m_t}$  em  $M/\mathfrak{m}M$  são linearmente independentes sobre  $k$ .*

Demonstração: Vide [7], Corolário 4.2.4, página 105. ■

**Teorema 42 (Quillen-Suslin)** *Se  $M$  é um  $A[X]$ -módulo projetivo finitamente gerado e  $f \in A[X]$  é um polinômio mônico tal que  $M_f$  é um  $A[X]_f$ -módulo livre, então  $M$  é um  $A[X]$ -módulo livre.*

Demonstração: Vide [7], Teorema 4.3.14, página 116. ■



**Definição 43** Seja  $M$  um  $A$ -módulo. A **dimensão homológica ou projetiva** de  $M$  é o comprimento de uma resolução livre finita de  $M$  de menor comprimento possível, a qual denotamos por  $\text{dp}_A M$  ou simplesmente por  $\text{dp} M$  caso  $A$  esteja fixado. Caso não exista uma resolução de comprimento finito dizemos que  $\text{dp} M = \infty$ .

**Observações:**

- (i) Um módulo  $M$  é projetivo se, e somente se,  $\text{dp} M = 0$ .
- (ii)  $\text{dp} M$ , em geral, pode ser considerada como uma medida do quão longe um módulo está de ser projetivo.

É claro que um módulo possui muitas resoluções projetivas entretanto:

**Proposição 44** Dadas duas seqüências exatas de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow K_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \dots \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow K'_n \xrightarrow{\alpha'_{n-1}} F'_{n-1} \xrightarrow{\alpha'_{n-2}} \dots \xrightarrow{\alpha'_0} F'_0 \xrightarrow{\epsilon'} M \rightarrow 0$$

tais que  $n \geq 1$ ,  $F_i$  e  $F'_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) são  $A$ -módulos projetivos, temos:

- (i)  $K_n \oplus F'_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus \dots \cong K'_n \oplus F_{n-1} \oplus F'_{n-2} \oplus \dots$ .
- (ii)  $K_n$  é projetivo se, e somente se,  $K'_n$  é projetivo.

Demonstração: Vide [7], Proposição 7.1.4, página 198. ■

**Corolário 45** Seja  $0 \rightarrow K_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  uma seqüência exata de módulos projetivos  $F_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ). Temos então:

- (i)  $\text{dp} M \leq n$  se, e somente se,  $K_n$  é projetivo.
- (ii) Se  $\text{dp} M \geq n$ , então  $\text{dp} K_n = \text{dp} M - n$ .

Demonstração: Vide [7], Corolário 7.1.5, página 198. ■

**Corolário 46** Se  $A$  é um anel noetheriano,  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado, então

$$\text{dp}_A M = \sup_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)} \{\text{dp}_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}}\}.$$



Demonstração: Vide [7], Corolário 7.1.6, página 199. ■

**Proposição 47** *Seja  $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\beta_1} M_2 \xrightarrow{\beta_2} M_3 \rightarrow 0$  uma seqüência exata de  $A$ -módulos. Então*

(i) *Se dois módulos na seqüência tem dimensão projetiva finita, então o mesmo ocorre com o terceiro.*

(ii) *Caso os módulos tenham dimensão projetiva finita então  $\text{dp}M_2 \leq \max\{\text{dp}M_1, \text{dp}M_3\}$ . Se  $\text{dp}M_2 < \max\{\text{dp}M_1, \text{dp}M_3\}$ , então  $\text{dp}M_3 = \text{dp}M_1 + 1$ .*

Demonstração: Vide [7], Proposition 7.1.8, página 199. ■

**Corolário 48** *Para  $A$ -módulos arbitrários  $M_1$  e  $M_2$  temos*

$$\text{dp}(M_1 \oplus M_2) = \sup\{\text{dp}M_1, \text{dp}M_2\}.$$

Demonstração: Vide [7], Corolário 7.1.7, página 199. ■

Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel noetheriano local e  $M$  um módulo finitamente gerado. Uma resolução livre de  $M$

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_n} F_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0 \quad (0.11)$$

é chamada **minimal** se  $\text{Im}(\alpha_n) \subset \mathfrak{m}F_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então se  $K_n := \text{Im}(\alpha_{n-1})$  ( $n \geq 1$ ), segue do Lema de Nakayama que  $\mu(F_0) = \mu(M)$  e  $\mu(F_n) = \mu(K_n)$  ( $n > 0$ ).

É claro que  $M$  admite resolução livre minimal: Tome  $F_0$  tal que  $\mu(F_0) = \mu(M)$ . Então  $K_1 := \ker(\epsilon) \subset \mathfrak{m}F_0$  depois tome  $F_1$  tal que  $\mu(F_1) = \mu(K_1)$ .

**Proposição 49** *Se duas resoluções livres de  $M$  são dadas*

$$\cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

$$\cdots \rightarrow F'_n \xrightarrow{\alpha'_{n-1}} F'_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha'_0} F'_0 \xrightarrow{\epsilon'} M \rightarrow 0$$

então  $\mu(F_n) = \mu(F'_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Demonstração: Vide [7], Proposição 7.1.10, página 202. ■



Os invariantes  $\beta_i := \mu(F_i)$  são chamados **números de Betti** do módulo  $M$ . Por definição os números de Betti de  $A$  são os números de Betti do  $A$ -módulo  $A/\mathfrak{m}$ .

**Lema 50** *Se  $x$  não é um divisor de zero de  $M$ , então  $M$  é livre se, e somente se,  $M/xM$  é um  $A/(x)$  módulo livre.*

Demonstração: Vide [7], Lema 7.1.13, página 203.

■



## Bibliografia

- [1] Andrade, J. F.; Simis, A., *Tópicos de Álgebra Comutativa*. 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1981.
- [2] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [3] Bresinsky, H. *On prime ideals with generic zero  $x_i = t^{n_i}$* . Proceedings of the American Mathematical Society 47, número 2 (1975), 329- 332.
- [4] Bruns, W.; Herzog, J., *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1993.
- [5] Eisenbud, D. and E. G. Evans, Jr., *Every Algebraic Set in  $n$ -Space is the Intersection of  $n$  Hypersurfaces*. Inv. Math. 19 (1973), 107-112.
- [6] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag, Nova Iorque , E.U.A., 1996.
- [7] Kunz, E., *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, 1985.



