

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

THALIS OTÁVIO SIQUEIRA DE OLIVEIRA

**Estudo de produtividade na utilização de injeção de polímeros para recuperação avançada de
reservatórios de petróleo**

Guaratinguetá

2023

Thalis Otávio Siqueira de Oliveira

Estudo de produtividade na utilização de injeção de polímeros para recuperação avançada de reservatórios de petróleo

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica .

Orientador: Dr. Amanda H. L. Mattos Charin

Coorientador: Profº Dr. Alex Mendonça Bimbato

Guaratinguetá

2023

O48e	Oliveira, Thalís Otávio Siqueira de Estudo de produtividade na utilização de injeção de polímeros para recuperação avançada de reservatórios de petróleo / Thalís Otávio Siqueira de Oliveira. – Guaratinguetá, 2023. 109f : il. Bibliografia: f. 106-109 Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023. Orientadora: Dr. Amanda H. L. Mattos Charin Coorientador: Prof^o Dr. Alex Mendonça Bimbato 1. Polímeros. 2. Fluidodinâmica computacional. 3. Poliacrilâmida 4. Materiais porosos. 5. Recuperação secundária do petróleo I. Título. CDU 541.6
------	---

Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária CRB-8: 9203

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

THALIS OTÁVIO SIQUEIRA DE OLIVEIRA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM ENGENHARIA
MECÂNICA "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA



Profº Dr. CELSO EDUARDO TUNA
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

DocuSigned by:
Amanda HLM Charin
E0DDBD84C3C04DD...

Dr. Amanda H. L. Mattos Charin
Orientadora



Prof. Dr. Celso Eduardo Tuna
UNESP-FEG



Engº. Manuel Anthony Toribio Pacherrres Uchalin
Membro Externo

Janeiro , 2023

DADOS CURRICULARES

THALIS OTÁVIO SIQUEIRA DE OLIVEIRA

NASCIMENTO 19.12.1996 - Cruzeiro / SP

FILIAÇÃO Carlos Otávio de Oliveira
Silvia Helena de Siqueira

2018 / 2023 Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Campus de Guaratinguetá

Dedico este trabalho aos meus pais, que são minha inspiração e motivação.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Carlos e Silvia, por nunca terem medido esforços para me proporcionar um ensino de qualidade durante todo o meu período escolar. Todos os conselhos, as broncas e atitudes moldaram minha personalidade. Acima de tudo sou grato por ser filho de vocês, por todo amor que recebi, por toda confiança e por todo sacrifício.

Se eu consegui obter o título de Engenheiro, foi pelos esforços de meu Tio Celso, e por todos os conselhos e ajudas fornecidos pelo Dr. Falcão, amigo da família e querido por todos que o conhecem. Sou grato por acreditarem no meu futuro, por terem insistido no meus estudos

Sou grato pelos belos laços que criei durante a faculdade. São tantos nomes, e aprendi tanto com cada um. Todos colaboraram com minha formação técnica e pessoal, e agradeço do fundo do coração.

Agradeço à minha amiga Maria Teresa Martins, um exemplo de inteligência emocional. Nossas conversas me ajudaram diversas vezes, e foram essenciais para o meu crescimento. Agradeço por me possibilitar morar em São José dos Campos por um mês para estudos, eu tenho certeza que a partir disso que consegui as melhores oportunidades para me desenvolver.

Além destes, preciso agradecer a todos os meus amigos que me apoiam e estão sempre comigo. Eu não imagino melhores companheiros de vida, e por isso agradeço à Alycia, Jeferson, Maycon, Rudy, Cláudio, Vitória, Eloy e Joice, minha prima, que amo como minha irmã.

Agradeço ao meu orientador de iniciação científica Maurício Guimarães, por toda dedicação em minha formação e pela indicação que me possibilitou trabalhar na WIKKI Brasil. Agradeço à minha orientadora, exemplo de liderança e amiga Amanda Mattos Charin, por toda motivação e atenção. Agradeço sobretudo ao professor Dr. Alex Mendonça Bimbato, o qual contribuiu com a minha formação acadêmica na disciplina Mecânica dos Fluidos, com um avançado senso de observação, visão técnica e visão analítica, consegue com muito profissionalismo transmitir conhecimento.

Por fim agradeço a todos da WIKKI Brasil, empresa que me acolheu e dedicou na minha formação. Sou extremamente grato pela formação pessoal e técnica, não imagino ambiente melhor para trabalhar. Agradeço especialmente aos meus amigos do núcleo Core, que confiam diariamente na minha capacidade e buscam sempre o meu melhor. Por fim agradeço aos meus queridos amigos e parceiros Fernando, Bernardo e Matheus, que estiveram ao meu lado desde o primeiro dia que entrei na empresa. Cada um de uma forma diferente me inspira a dar meu melhor.

“Eu nunca cheguei a pensar que algum dia eu ia querer ficar mais forte por alguém.”
(Nico Robin - One Piece)

RESUMO

Técnicas de recuperação avançada de petróleo são extremamente importantes para a indústria de Óleo Gás. Se destacam injeção de água e injeção de polímero para o deslocamento do óleo remanescente do reservatório, onde o polímero é modelado como fluido não newtoniano. Nesta tese é feita a validação de modelos de escoamentos não newtonianos, bifásicos e incompressíveis em meios porosos implementados em um simulador de fluidodinâmica computacional. O processo envolve deduzir expressões para modelar o termo viscoso levando-se em conta meio poroso e viscosidade variável, validando com a solução analítica de Bulkley-Leverett modificada para escoamento bifásico de fluidos não newtonianos, simulando casos aumentando a complexidade que culminam em um reservatório tridimensional, heterogêneo e isotrópico idealizado. Assim, o modelo foi validado e é evidenciado um aumento do fator de recuperação de óleo ao utilizar de solução polimérica como fluido de injeção.

PALAVRAS-CHAVE: injeção de polímero. OpenFOAM. fluidodinâmica computacional. meio poroso. recuperação avançada. poliacrilamida.

ABSTRACT

Oil recovery techniques are extremely important for the Oil and Gas industry. Water injection and polymer injection stand out for the displacement of the remaining oil in the reservoir, where the polymer is modeled as a non-newtonian fluid. This thesis validates models of non-Newtonian, two-phase and incompressible flows in porous medium implemented in a computational fluid dynamics simulator. The process involves deducing expressions to model the viscous term taking into account the porous medium and variable viscosity, validating with the modified Bulkley-Leverett analytical solution for two-phase flow of non-newtonian fluids, simulating cases increasing the complexity that culminate in a three-dimensional idealized reservoir , heterogeneous and isotropic. Thus, the model was validated and an increase in the oil recovery factor is evidenced when using polymer solution as injection fluid.

KEYWORDS: polymer flooding. OpenFOAM. computational fluid dynamics. porous media. oil recovery. polyacrylamide

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Esquema original do experimento de Darcy para escoamento de água em meio poroso (leito de areia filtrante)	23
Figura 2	Caminho preferencial no meio poroso.	27
Figura 3	Esquema de porosidade	29
Figura 4	Representação da molhabilidade.	31
Figura 5	Diferentes escalas	32
Figura 6	Variações espaciais observáveis	33
Figura 7	Decomposição do campo de análise em média e desvio	34
Figura 8	Diferença no deslocamento esperado ao usar injeção de polímero.	40
Figura 9	Perfil de velocidade entre duas placas planas infinitas.	40
Figura 10	Representação dos fluidos não newtonianos.	42
Figura 11	Massas de trigo, queijos e gelatinas são exemplos de materiais viscoelásticos, assim como líquidos poliméricos, biopolímeros e plasma sanguíneo.	42
Figura 12	Ketchup, tintas, soluções concentradas e petróleo são exemplos de fluidos tixotrópicos. Argila Bentonita é um exemplo de fluido reopético.	43
Figura 13	Diferentes tipos de fluidos não newtonianos independentes do tempo.	43
Figura 14	Polpas de frutas muitas vezes são fluidos pseudoplásticos, enquanto suspensões de amido são fluidos dilatantes e a maionese pode ser citada como um exemplo de plástico de Bingham.	44
Figura 15	Características de fluidos independentes do tempo.	44
Figura 16	Suspensão de amido em um auto-falante	45
Figura 17	Características de fluidos com tensão inicial.	46
Figura 18	Representação de um elemento tridimensional	46
Figura 19	Elemento fluido para dedução do perfil de velocidades do fluido plástico de Bingham.	47
Figura 20	Representação do escoamento com Plástico de Bingham.	48
Figura 21	Modelo Carreau-Yasuda para um Pseudoplástico.	50
Figura 22	Comparação entre modelos <i>power law</i> e Carreau-Yasuda para um Pseudoplástico.	51
Figura 23	Poro placas planas.	52
Figura 24	Cenário de placas planas	54
Figura 25	Cenário poro cilíndrico.	58
Figura 26	Passos para solução CFD.	63
Figura 27	Parâmetros em uma discretização espacial.	64
Figura 28	Frente de saturação em caso Buckley-Leverett variando esquema do divergente.	66
Figura 29	Ampliação do começo do perfil de saturação em caso Bulckley-Leverett variando esquema do divergente.	67

Figura 30 Perfis de saturação mostrando a variação do maxCo nas simulações em Buckley-Leverett.	68
Figura 31 Fluxograma de solução do simulador.	72
Figura 32 Malha caso Buckley-Leverett.	75
Figura 33 Campo de saturação de água.	76
Figura 34 Gráfico do avanço da frente de saturação.	77
Figura 35 Discretização espacial do caso plugue 3D.	77
Figura 36 Campo de porosidade do plugue 3D.	78
Figura 37 Campo de permeabilidade absoluta em miliDarcy do plugue 3D.	78
Figura 38 Produtividade de óleo em função do tempo.	79
Figura 39 Malha Buckley-Leverett com 50 elementos.	80
Figura 40 Malha Buckley-Leverett com 100 elementos.	80
Figura 41 Malha Buckley-Leverett com 200 elementos.	81
Figura 42 Malha Buckley-Leverett com 400 elementos.	81
Figura 43 Condições de contorno utilizados.	83
Figura 44 Resultados de queda de pressão em escoamento newtoniano e monofásico de óleo variando viscosidade.	84
Figura 45 Resultados de queda de pressão em escoamento monofásico não newtoniano variando índice de potência.	85
Figura 46 Resultados da característica pseudoplástica.	85
Figura 47 Resultados da característica dilatante.	86
Figura 48 Resultados para $n=1.0$ - newtoniano.	86
Figura 49 Resultados da variação do índice de consistência.	87
Figura 50 Resultados da característica pseudoplástica.	87
Figura 51 Resultados da característica dilatante.	88
Figura 52 Campo de porosidade da amostra sintética analisada.	89
Figura 53 Resultados $n = 0.5$ e $H = 0.01Pa.s^n$	90
Figura 54 Resultados $n = 1.5$ e $H = 0.01Pa.s^n$	90
Figura 55 Produtividade para $H = 0.01Pa.s^n$	91
Figura 56 Resultados $n = 0.5$ e $H = 0.001Pa.s^n$	92
Figura 57 Resultados $n = 1.5$ e $H = 0.001Pa.s^n$	92
Figura 58 Produtividade para $H = 0.001Pa.s^n$	93
Figura 59 Viscosidade em função da taxa de cisalhamento para diferentes concentrações de FP3630.	94
Figura 60 Fator de resistência em função da vazão do polímero para diferentes concentrações.	95
Figura 61 Gráfico logarítmico da viscosidade em função da taxa de cisalhamento para FP36030 - 1500ppm.	96
Figura 62 Campos de saturação para FP3630 com vazão de $1.2cm^3/min$	97
Figura 63 Curvas de saturação para FP3630 com vazão de $1.2cm^3/min$	98
Figura 64 Curvas de saturação para FP3630 com vazão de $3cm^3/min$	98

Figura 65	Volume acumulado em função do tempo para $Q = 4.8cm^3/min.$	99
Figura 66	Volume acumulado em função do tempo para diferentes injeções de fluidos com $Q = 4.8cm^3/min.$	100
Figura 67	Comparação dos fatores de recuperação para cada tipo de injeção com $Q = 4.8cm^3/min.$	100
Figura 68	Ganho no fator de recuperação ao utilizar polímero ou mistura, com $Q = 4.8cm^3/min.$	101
Figura 69	Domínio do reservatório e discretização espacial utilizados na simulação.	101
Figura 70	Campos de saturação em 2.5 anos e 5.0 anos, a esquerda injetado água e a direita injetado polímero.	102
Figura 71	Campos de saturação em 10.0 anos e 15.0 anos, a esquerda injetado água e a direita injetado polímero.	103
Figura 72	Volume acumulado em função do tempo ao injetar água ou polímero.	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Expressões para o termo de interação entre fase sólida e fase fluida para os modelos	
analizados	61
Tabela 2 – Expressões para o termo de interação entre fase sólida e fase fluida para os modelos	
analizados	61
Tabela 3 – Discretização dos Operadores Matemáticos.	74
Tabela 4 – Parâmetros do algoritmo para acoplamento pressão-velocidade.	74
Tabela 5 – Parâmetros do algoritmo para solução de sistemas lineares.	74
Tabela 6 – Características dos fluidos.	75
Tabela 7 – Condições de Contorno para o caso Buckley-Leverett.	76
Tabela 8 – Condições de Contorno para o caso plugue 3D.	78
Tabela 9 – Tabela de propriedades da rocha e fluidos	83
Tabela 10 – Tabela viscosidade em função da taxa de cisalhamento para diferentes concentra-	
ções do polímero	95
Tabela 11 – Tabela viscosidade em função da taxa de cisalhamento para diferentes concentra-	
ções do polímero	97

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD	Fluidodinâmica Computacional
IPB	Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás
EOR	Recuperação Avançada de Petróleo
REV	Volume Elementar Representativo
FVM	Método dos Volumes Finitos
FR	Fator de Recuperação

LISTA DE SÍMBOLOS

q	Vazão volumétrica de água
K	Condutividade hidráulica
A	Área da seção transversal
L	Comprimento do meio filtrante
h	Altura de coluna de água na entrada do meio filtrante
h_0	Altura de coluna de água na saída do meio filtrante
$\vec{u}$	Velocidade média aparente
k	Constante de permeabilidade
ρ	Massa específica
μ	Viscosidade dinâmica do fluido
$\nabla\varphi$	Gradiente potencial
u_s	Velocidade média superficial
q_s	Vazão volumétrica que atravessa a fronteira de A_s
A_s	Área total que inclui regiões sólidas e vazios
v_s	Velocidade média intersticial
ϕ	Porosidade
p	Campo de pressões
g	Componente vertical da aceleração gravitacional
z	Distância vertical
$P(\mathbf{x})$	Pressão piezométrica do ponto $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}$	Coordenadas do ponto de análise da pressão piezométrica
$\mathbf{x}_{REF}$	Coordenadas do ponto referencial
∇P	Gradiente de pressão
$\mathbf{K}$	Tensor permeabilidade absoluta
λ	Mobilidade

M	Taxa de mobilidade
k_o	Permeabilidade relativa da fase óleo
k_w	Permeabilidade relativa da fase água
d_m	Coefficiente de difusão sem presença do meio poroso
d'_m	Coefficiente de difusão com presença do meio poroso
τ	Tortuosidade
D_g	Diâmetro de grãos
K_{max}	Permeabilidade absoluta máxima do modelo de Winland
n	Expoente do modelo de Winland
$S_{w,N}$	Saturação da água normalizada
S_w	Saturação de água
$S_{w,ir}$	Saturação irreduzível de água
$S_{n,ir}$	Saturação irreduzível de óleo
n	Expoente do modelo de Brooks Corey
krn	Permeabilidade relativa do fluido em análise
L	Constante do modelo LET referente a parte inferior da curva
E	Constante do modelo LET referente a parte superior da curva
T	Constante do modelo LET referente a elevação da curva
$S_{w,ef}$	Saturação efetiva da água
β	Fase fluida genérica
σ	Fase sólida genérica
$\langle \rangle$	Média superficial
$\langle \rangle^\beta$	Média intrínseca
V	Volume total
V_β	Volume ocupado pela fase fluida β
ψ	Propriedade genérica
$\tilde{\psi}$	Flutuações da propriedade genérica

A_i	Área intersticial sólido-fluido
$\mathbf{n}$	Normal orientada para fora do fluido em direção à fase sólida
t	Tempo
$\widetilde{\mathbf{u}}_\beta$	Flutuações do vetor velocidade da fase β
$\widetilde{\rho}_\beta$	Flutuações da massa específica da fase β
$\widetilde{p}$	Flutuações da pressão
τ''	Forças viscosas devido à compressão
τ''	Forças viscosas de cisalhamento
$\mathbf{K}^{-1}$	Inverso do tensor permeabilidade absoluta
$\mathbf{M}_\beta$	Termo de interação entre fase sólida e fase fluida
α_β	Fração de fase da fase fluida β
$\mathbf{K}_{eff}$	Permeabilidade efetiva
H	Índice de consistência do modelo power law
n	Índice de potência do modelo power law
Γ_ϕ	Constante de difusão da quantidade ϕ
C	Número de Courant
Δx	Espaçamento da célula da malha
Δt	Passo de tempo
$\mathbf{U}_P$	Vetor velocidade na célula P
$\mathbf{U}_P$	Vetor velocidade na célula N
a_P	Coeficientes da diagonal da célula P da matriz de quantidade de movimento
a_{Pt}	Coeficientes da diagonal da discretização do termo temporal
a_{Pc}	Coeficientes da diagonal da discretização do termo convectivo
a_{Pd}	Coeficientes da diagonal da discretização do termo difusivo
a_N	Coeficientes da linha P na coluna da matriz de quantidade de movimento
$\mathbf{b}^0$	Contribuição do sistema linear que não estão na diagonal principal
$\mathbf{b}^t$	Componentes não-diagonal da discretização do termo temporal

$\mathbf{b}^c$	Componentes não-diagonal da discretização do termo convectivo
$\mathbf{b}^d$	Componentes não-diagonal da discretização do termo difusivo
F	Fluxo na face f
p^*	Componente não física do campo de pressão
p^{**}	Relaxação do campo de pressão
u^{**}	Relaxação do campo de velocidade
V_d	Volume deslocado
PV	Volume poroso
μ_{ne}	Viscosidade do fluido newtoniano
q_t	Taxa de injeção
$k_{rne,max}$	Permeabilidade relativa máxima do fluido newtoniano do modelo de Brooks Corey
$k_{rnn,max}$	Permeabilidade relativa máxima do fluido não newtoniano do modelo de Brooks Corey
n_{ne}	Expoente da permeabilidade relativa do modelo Brooks Corey do fluido newtoniano
n_{nn}	Expoente da permeabilidade relativa do modelo Brooks Corey do fluido não newtoniano
ρ_{ne}	Massa específica do fluido newtoniano
ρ_{nn}	Massa específica do fluido não newtoniano

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	OBJETIVO	21
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	22
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	23
2.1	A LEI DE DARCY PARA ESCOAMENTOS MONOFÁSICOS	23
2.2	A LEI DE DARCY PARA ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS	26
2.3	MOBILIDADE	26
2.4	TORTUOSIDADE	27
2.5	POROSIDADE E PERMEABILIDADE ABSOLUTA	28
2.6	PERMEABILIDADE RELATIVA	29
2.7	MOLHABILIDADE	31
2.8	TEORIA DA MÉDIA	31
2.8.1	Teoremas Utilizados na Teoria da Média	34
2.8.2	Teoria da Média na Equação do Balanço de Massa	35
2.8.3	Teoria da Média na Equação do Balanço de Momentum	36
2.9	MODELAGEM DE FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO NEWTONIANOS	39
2.9.1	Introdução a Fluidos Não Newtonianos	40
2.9.2	Tipos de Fluidos Não Newtonianos	41
2.9.3	Sem Tensão Inicial	44
2.9.3.1	Pseudoplásticos	45
2.9.3.2	Dilatantes	45
2.9.4	Com Tensão Inicial	45
2.9.4.1	Plástico de Bingham	46
2.9.4.2	Fluido de Herschel-Bulkley	49
2.9.5	Fluidos Newtonianos Generalizados	49
2.9.6	Modelagem Newtoniano	51
2.9.7	Modelagem <i>power law</i> por Poros de Placas Planas	54
2.9.8	Modelagem <i>power law</i> por Poros Cilíndricos	57
2.9.9	Modelagem <i>power law</i> Proposta de Wu (1990)	59
2.10	FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL	61
2.10.1	Método dos Volumes Finitos	62
2.10.2	Discretizações das Equações de Transporte	63
2.10.2.1	Termo Temporal	64
2.10.2.2	Termo Convectivo	65
2.10.2.3	Termo Gradiente	65
2.10.2.4	Termo Fonte	65

2.10.2.5	Termo Laplaciano	65
2.10.3	Controle do Passo de Tempo	67
2.10.4	Algoritmos do Acoplamento Pressão-Velocidade	68
2.10.4.1	Cálculo do Fluxo Conservativo	69
2.10.4.2	Algoritmo SIMPLE	70
2.10.4.3	Algoritmo PISO	71
2.10.4.4	Algoritmo PIMPLE	72
3	ESTUDO DE CASO	74
3.1	CASO BUCKLEY-LEVERETT	75
3.2	CASO PLUGUE 3D	77
3.3	CONVERGÊNCIA DE MALHA	79
3.4	RESULTADOS E VERIFICAÇÕES	82
3.4.1	Resultados Buckley-Leverett	82
3.4.2	Resultados Plugue	88
3.5	RESULTADOS COM POLÍMEROS REAIS	93
3.6	RESULTADOS EM ESCALA DE RESERVATÓRIO	101
4	CONCLUSÃO	105
	REFERÊNCIAS	106

1 INTRODUÇÃO

De acordo com o Anuário Estatístico Brasileiro do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis do ano de 2021, em 2020 foram provadas que existem mais de 1.7 trilhões de barris de petróleo em reservas espalhadas pelo mundo. A região de maior concentração de reservas é o Oriente Médio, contando com mais de 835.9 bilhões de barris provados, aproximadamente 48% do petróleo do mundo, enquanto o Brasil continua na décima sexta posição no *ranking* mundial de reservas provadas de petróleo, com um volume total de 11.8 bilhões de barris (PETRÓLEO, 2021).

Pensando em produção, Estados Unidos lidera o *ranking* mundial com mais de 16.5 milhões de barris por dia enquanto o Brasil, em nona posição, produz aproximadamente 3 milhões de barris por dia. De acordo com o Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás (IPB), há uma produção mundial totalizando 89.8 milhões de barris por dia Gás (2022).

Diante do volume total de óleo existente nas reservas e sabendo a produção por dia, ao considerar imutável a produção mundial de petróleo, em aproximadamente 50 anos irão esgotar as reservas de petróleo do mundo. Mas em toda depleção natural de poços de petróleo a queda de pressão decai com o tempo de produtividade chegando ao ponto de um poço ser abandonado devido aos custos superarem os lucros da extração.

E neste contexto novas tecnologias e estudos são empregados para redução de custos e eficiência operacional, e já utilizados por algumas empresas como a PetroRio (2021), cujos negócios têm como foco recuperação e re-desenvolvimento desse tipo de ativo. Um dos métodos utilizados é injeção de água, que é um método de recuperação avançada de petróleo e tem como objetivo principal a injeção de água no reservatório para aumentar a pressão e desse modo estimular a produção. Poços de injeção de água podem ser encontrados tanto em terra (*onshore*) quanto em plataformas petrolíferas (*offshore*). Porém outro método EOR utilizado em campos de petróleo há mais de 50 anos é o que utiliza solução polimérica (*polymer flooding*) em vez de água. A proposta de utilizar polímero consiste na redução da razão de mobilidades água-óleo, resultando em uma melhor eficiência de varrido do reservatório podendo aumentar a recuperação de petróleo.

Como um exemplo na utilização de EOR, no campo de Ekofisk, no mar do Norte, o uso da injeção de água foi capaz de aumentar o aproveitamento do reservatório de 17% no cenário de depleção natural para mais de 50%, quando foi utilizada a injeção de água (GARCIA, 2021 apud WATER..., 2020, p.).¹

O aumento do fator de recuperação na utilização de soluções poliméricas é consequência do meio poroso e característica do fluido não newtoniano em alterar sua viscosidade de acordo com a taxa de cisalhamento. Em relação ao meio poroso, quando um fluido escoar e encontra um objeto sólido como uma rocha, é comum imaginar este objeto sendo impermeável ou impenetrável. De acordo com Dias (2017), a impermeabilidade de um material é, na verdade, uma hipótese. Dependendo da escala em

¹ Garcia, F. A. S. ANÁLISE DA ROBUSTEZ DE UM SIMULADOR DE FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO E COMPRESSÍVEL EM MEIOS POROSOS. 2021. Disponível em: <<http://www.repositorio.poli.ufrj.br/monografias/projpoli10035256.pdf>> apud Norwegian Petroleum Directorate, **Water Injection**. Stavanger, Noruega

que o observador analise o problema, os poros através da estrutura rochosa, dita impermeável, podem ser considerados meios para o fluido escoar, e não necessariamente apenas rochas constituem meios porosos, mas também madeira, solo, tecido biológicos como pele, os ossos, membranas, e materiais feitos pelo homem como cimentos, cerâmicas e polímeros podem ser considerados meios porosos.

Já em relação a mudança da viscosidade, os fluidos não newtonianos podem apresentar características de dilatantes (*shear thickening*) ou pseudoplásticos (*shear thinning*) no que diz respeito quanto a variação da viscosidade em relação a taxa de cisalhamento. Isso significa que para locais de grandes velocidades o fluido tenderá a aumentar sua viscosidade e locais com baixas viscosidades tenderá a diminuir sua viscosidade, ambos para um exemplo dilatante enquanto pseudoplástico a lógica é inversa. Porém existem fluidos não newtonianos, como algumas soluções poliméricas, que de acordo com [Sun, Saleh e Bai \(2012\)](#) podem apresentar ambas características como o polímero FP3630. Isso significa que tanto para baixas quanto altas velocidades o fluido tende a aumentar sua viscosidade criando uma frente de saturação mais homogênea e aumentando o fator de recuperação de óleo.

Um modelo matemático que utilize desta dupla característica parte de duas possíveis equações, como a Lei de Darcy e Teoria da Média. A Lei de Darcy é a escolha mais comum para estudo do escoamento de fluidos em meios porosos, e o grande sucesso do uso desta equação, infelizmente, levou sua aplicação para fora do âmbito dos problemas para os quais esta se aplica. A equação de Darcy apresentada neste trabalho prevê resultados não satisfatórios para alguns casos na área de simulação de reservatório de petróleo, como por exemplo anisotropia, efeitos de adsorção, efeitos capilares, e modelos de poros por meio de distribuições de seus raios, de acordo com [Dias \(2017\)](#) e [Barboza Júnior \(2022\)](#).

Já a Teoria da Média parte da obtenção da equação completa de quantidade de movimento linear para o movimento do fluido, podendo ser incluído efeitos nos quais a Lei de Darcy negligencia. Para o atual trabalho será utilizado da Teoria da Média por trazer uma equação mais completa e assim mais apropriada para modelagem do escoamento no meio poroso. As equações de quantidade de movimento linear e continuidade pela teoria da média foram implementadas em um novo simulador chamado *upstreamFoam* no *software OpenFOAM*, sendo resolvidas através do método dos volumes finitos.

1.1 OBJETIVO

O estudo visa implementar modelos de escoamentos de fluido não newtoniano em meios porosos no simulador *upstreamFoam* derivado do *OpenFOAM*, que é um *software* de fluidodinâmica computacional (CFD).

Sendo mais preciso, serão deduzidas expressões para escoamentos bifásicos não newtoniano em meio poroso onde o poro é modelado com geometrias idealizadas como placas planas e cilindros. Esses modelos serão implementados no simulador com linguagem de programação C++ juntamente com um modelo analítico encontrado na literatura. Após implementados os modelos serão testados para verificar a robustez e acurácia no resultados, com propósito de validação.

O objetivo após a validação é verificar o aumento da produtividade ao utilizar fluidos não newtonianos em diferentes domínios, aumentando a complexidade. Primeiro com o caso Buckley-Leverett

que é o mais simplificado e com resultado analítico e posteriormente com o caso de Plugue 3D com campos heterogêneos e malha tridimensional

O último objetivo é simular casos com polímero real, ou seja, a partir de gráficos de viscosidade em função da taxa de cisalhamento serão encontrados as constantes dos modelos implementados, onde os resultados serão comparados com injeção de água. Por fim, utilizando uma das concentrações de polímero real serão apresentados resultados de produtividade em escala de reservatório, mostrando portanto que independente da escala do problema a utilização de solução polimérica aumenta a produtividade de óleo em campos maduros.

Em resumo:

- Deduzir modelos não newtonianos para escoamentos bifásicos em meios porosos;
- Implementar os modelos no simulador *upstreamFoam* com linguagem de programação C++;
- Validar os modelos com o proposto na literatura;
- Verificar a robustez dos modelos em diferentes escalas, desde plugue até reservatório;
- Simular polímeros reais com constantes dos modelos adequadas;
- Provar que o uso de soluções poliméricas aumenta a produtividade quando comparado à injeção de água no cenário de plugue e reservatórios.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O capítulo 2 trata de uma revisão bibliográfica inicial apresentando a Lei de Darcy para escoamentos monofásicos e sua generalização para escoamentos multifásicos, além de trazer conceitos como mobilidade, tortuosidade, porosidade, permeabilidade absoluta e permeabilidade relativa. Além disso é apresentado a teoria da média, que busca modelar a física do escoamento em meios porosos considerando um referencial maior, que seria o Volume Elementar Representativo (REV).

Abordando a parte de fluidos não newtonianos, são apresentados modelos *power law* generalizados deduzidos a partir de geometria de poro com placas planas ou cilindros, o modelo *power law* de uma proposta encontrada na literatura, e em todas elas são apresentadas as devidas equações que representam a viscosidade aparente e taxa de cisalhamento, ambos variando no espaço.

Na parte numérica, são abordadas as discretizações das equações de transporte, como o termo temporal, convectivo, gradiente, fonte e laplaciano, discretizações estas que são utilizadas no simulador de fluidodinâmica computacional. São apresentados modelos de controle do passo de tempo como Courant e algoritmos de acoplamento pressão-velocidade

Por fim, no capítulo 3, são apresentados em detalhes os casos gerados para análise das implementações, começando com a menor complexidade sendo o caso de Buckley-Leverett até o de maior complexidade sendo em escala de reservatório. Com os casos descritos, são simulados diversos casos variando diversos parâmetros que serão analisados no tópico seguinte de resultados, onde são apresentados os testes de viscosidade aparente, utilizando polímeros reais e testes em escala de reservatório.

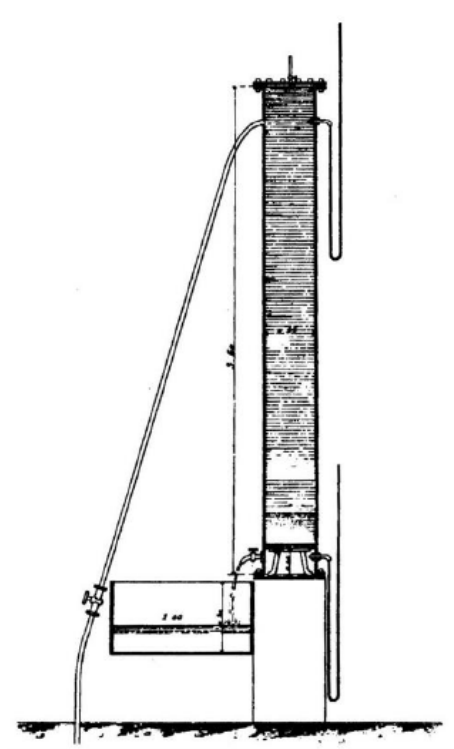
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nessa seção são discutidos os modelos e as equações usados para descrever o escoamento no meio poroso, desde a lei de Darcy, formulada empiricamente para escoamentos de água em leitos porosos, mas adequada posteriormente para escoamentos multifásicos com o conceito da permeabilidade relativa, passando pelas equações que modelam o comportamento da pressão no escoamento monofásico em reservatórios, a equação da difusividade e as equações usadas na simulação de escoamentos multifásicos em reservatórios.

2.1 A LEI DE DARCY PARA ESCOAMENTOS MONOFÁSICOS

O escoamento monofásico em meios porosos pode ser descrito pela equação de Navier-Stokes, no entanto, neste caso o problema teria que ser solucionado na escala de poros, o que é inviável para a avaliação de reservatórios.

Figura 1 – Esquema original do experimento de Darcy para escoamento de água em meio poroso (leito de areia filtrante)



Fonte: Freeze (1994).

De acordo com Fancher (1956), Henry Darcy formulou uma correlação empírica para o balanço de quantidade de movimento de água escoando em um leito poroso vertical, como apresentado na Figura 1, por:

$$q = \frac{KA}{L} (h + L - h_0), \quad (1)$$

onde q é a vazão volumétrica de água, A é a área da seção transversal, L é o comprimento do meio filtrante, h e h_0 são, respectivamente, a altura de coluna de água (pressão) na entrada e saída do meio filtrante e K é uma constante de proporcionalidade denominada condutividade hidráulica que foi introduzida por [Correia \(2006\)](#), dependente do fluido e do meio poroso.

Posteriormente, [Honarpour, Koederitz e Herbert \(1986\)](#) verificou que esta correlação poderia modelar o escoamento monofásico de outros fluidos, em função da viscosidade destes. Outra generalização importante da correlação apresentada por Darcy é o equacionamento que foi apresentado por [Bear \(1988\)](#) de forma a modelar escoamentos em direções quaisquer, sendo:

$$\vec{u} = -\frac{k\rho}{\mu} \nabla \varphi, \quad (2)$$

onde k é a constante de permeabilidade, agora independente do fluido e dependente apenas do meio poroso, ρ é a massa específica e μ a viscosidade dinâmica do fluido, que escoar a uma velocidade média aparente $\vec{u}$. O efeito Klinkenberg pode ser descrito como "A permeabilidade ser influenciada pelo fluido se este for capaz de alterar o meio poroso ou se o fluido for capaz de influenciar no escoamento em função do movimento intrínseco de suas moléculas, caso de fases gasosas a baixa pressão [...]" ([JONES, 1972](#)). No caso do gás, cunhou-se o termo permeabilidade aparente para diferenciar a permeabilidade que é afetada pela pressão média do fluido, da permeabilidade absoluta, só dependente do meio poroso. O sinal negativo na equação generalizada de Darcy indica que a velocidade $\vec{u}$ tem sentido oposto ao gradiente do potencial φ .

A velocidade é denominada aparente pois a lei de Darcy considera a área total da região porosa, incluindo sólidos, não apenas a área aberta ao fluxo. A componente da velocidade aparente $\vec{u}$ na direção s e dada por:

$$u_s = \frac{q_s}{A_s}, \quad (3)$$

onde q_s é a vazão volumétrica que atravessa a fronteira de área total A_s incluindo regiões sólidas e vazios da matriz porosa. A velocidade aparente se relaciona com a velocidade média intersticial dos fluidos que atravessam a mesma fronteira, v_s , por:

$$v_s = \phi u_s, \quad (4)$$

onde ϕ representa a proporção de espaço vazio no meio poroso, conhecida em hidrologia como porosidade. O termo φ na equação (2) designa um potencial escalar definido por [Hubbert \(1940\)](#) como:

$$\varphi \equiv \frac{p}{\rho} + gz, \quad (5)$$

onde p é o campo de pressões, g é componente vertical da aceleração gravitacional e z é a distância vertical. Outra forma bastante conhecida da lei de Darcy utiliza a pressão piezométrica P , definida por:

$$P(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + \oint_{\mathbf{x}_{REF}}^{\mathbf{x}} \rho g ds, \quad (6)$$

A definição da pressão piezométrica, dada pela equação (7), a torna função da posição do ponto de referência, no entanto, a equação de Darcy utiliza o gradiente da pressão piezométrica e, portanto, não é afetado por esta questão.

No caso de fluidos incompressíveis a pressão piezométrica assume uma forma mais simples, dada por

$$P(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + \rho \mathbf{g} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{REF}). \quad (7)$$

Ainda, caso a única força de corpo seja a força gravitacional, que só tem componente vertical,

$$P(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) - \rho g \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{REF}) = p(\mathbf{x}) + \rho g (z_g(\mathbf{x}) - z_g(\mathbf{x}_{REF})). \quad (8)$$

Utilizando a pressão piezométrica, a equação de Darcy toma a seguinte forma:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla P. \quad (9)$$

A equação generalizada de Darcy (equação (2)) considera o meio poroso isotrópico e, portanto, passível de ser caracterizado por um escalar k . No entanto, o meio poroso é geralmente anisotrópico e assim tem permeabilidades distintas em função da direção. Neste cenário, o meio poroso deve ser caracterizado por um tensor $\mathbf{K}$, e a lei de Darcy assume a forma

$$\mathbf{u} = -\frac{\rho}{\mu} \mathbf{K} \nabla \varphi. \quad (10)$$

Neuman (1977) mostrou que o tensor $\mathbf{K}$ é simétrico contendo as permeabilidades nas diversas direções (onde os subscritos indicam as direções ortogonais):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_y & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_z \end{bmatrix}. \quad (11)$$

No tensor $\mathbf{K}$, os termos fora da diagonal modelam a interferência do meio poroso sobre a direção do escoamento. Mesmo sob ação de um gradiente do potencial em uma certa direção, o escoamento resultante pode ter uma direção distinta em função da anisotropia do meio poroso. A lei de Darcy, apesar de ter sido obtida empiricamente, pode ser derivada da equação de Navier-Stokes por um processo formal de cálculo de médias. Em relação ao escoamento em meio poroso, a equação de Darcy seria uma representação global (macro) e a equação de Navier-Stokes uma representação local (micro). Batchelor, Batchelor e Batchelor (1967) também exibem a lei de Darcy como sendo um caso especial da equação de Navier-Stokes para condições de escoamento lento, com baixo número de Reynolds ($Re \ll 1$) e meio poroso isotrópico.. Lembrando que o número de Reynolds, apresentado na equação (12) pode ser interpretado como a razão entre forças inerciais e forças viscosas

$$Re \equiv \frac{\rho \delta v}{\mu} \quad (12)$$

Neuman (1977) realizou a sua dedução sem considerar a condição de isotropia; prova na sua dedução que o tensor de permeabilidades é simétrico. Na definição utilizada para o número de Reynolds, δ é um comprimento característico intersticial do meio poroso e ν a velocidade intersticial. Massarini (2002) apresentou uma dedução da lei de Darcy a partir da equação de Navier-Stokes, compatibilizando a representação mesoscópica (lei de Darcy) onde as interações intrínsecas do meio poroso são modeladas pela constante de permeabilidade (k) e a visão microscópica (Navier-Stokes) onde todas as interações entre o meio poroso e os fluidos devem ser modeladas no contorno.

2.2 A LEI DE DARCY PARA ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS

Em reservatórios de petróleo geralmente existem pelo menos dois fluidos saturando o meio poroso (água e óleo, água e gás ou água, óleo e gás). Neste contexto é necessário definir uma propriedade que relacione constitutivamente forças e deslocamentos dos fluidos neste contínuo. Esta propriedade é a permeabilidade efetiva (associada à viscosidade do fluido). A equação constitutiva é uma extensão da Lei de Darcy Generalizada da equação (2) que pode ser escrita como

$$\mathbf{u} = -\frac{k_f}{\mu_f} \nabla (p_f + \rho_f g z), \quad (13)$$

onde o índice f é relacionado a cada um dos fluidos presentes no meio poroso e k_f é denominada permeabilidade efetiva ao fluido f , que na sua forma adimensional é denominada permeabilidade relativa kr_f , definida pela expressão

$$kr_f = \frac{k_f}{k_{REF}}, \quad (14)$$

onde a permeabilidade de referência, k_{REF} , pode ser qualquer permeabilidade relacionada ao meio poroso em questão. Em geral, utiliza-se a permeabilidade absoluta ou a permeabilidade efetiva ao óleo na saturação mínima de água, que geralmente é a permeabilidade efetiva máxima do meio poroso.

A extensão da Lei de Darcy para escoamentos multifásicos, mostrada na equação (13), que daqui em diante será chamada de Lei de Darcy Multifásica ou apenas Lei de Darcy, também é essencialmente empírica, mas também pode ser deduzida da equação de conservação de quantidade de movimento, de modo similar ao apresentado para o escoamento monofásico (MASSARINI, 2002).

2.3 MOBILIDADE

A mobilidade de um fluido é definida como a razão entre a permeabilidade efetiva desse fluido e sua viscosidade nas condições de reservatório, de acordo com a equação (15).

$$\lambda_f = \frac{k_f}{\mu_f} \quad (15)$$

onde o subíndice f da equação (15) ao fluido em análise do escoamento multifásico.

Já a razão de mobilidade é a razão entre a mobilidade do fluido deslocante (w) atrás da frente de avanço e a mobilidade do fluido deslocado (o), cuja expressão apresentada na equação (16).

$$M = \frac{\lambda_w}{\lambda_o} = \frac{k_{efw} \times \mu_o}{k_{efo} \times \mu_w} \quad (16)$$

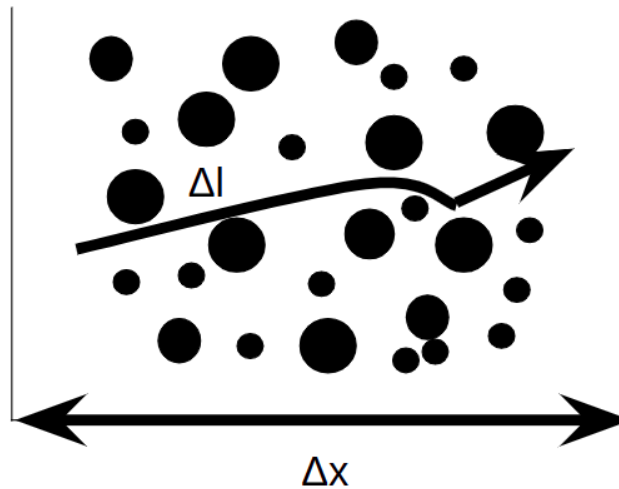
A razão de mobilidade é diretamente relacionada à eficiência de varrido de um reservatório. Razões de mobilidade favoráveis ($M \approx 1$) implicam em melhores eficiências de varrido, já que a interface entre as fases torna-se mais uniforme. Já razões de mobilidades muito altas levam a frentes não uniformes diminuindo a área varrida do reservatório e, conseqüentemente, a eficiência do método de recuperação.

Soluções poliméricas são eficazes na redução da mobilidade quando comparado a água; redução esta ocorre tanto pelo aumento da viscosidade quando pela diminuição da permeabilidade em campos heterogêneos (GOGARTY, 1967)

2.4 TORTUOSIDADE

Em qualquer sistema poroso, a presença de partículas sólidas causam um caminho preferencial para difusão conforme Figura 2.

Figura 2 – Caminho preferencial no meio poroso.



Fonte: Produção do próprio autor.

Conseqüentemente, os coeficientes das espécies devem ser corrigidos levando em conta a tortuosidade. E estudos sugerem que o coeficiente de difusão na presença de meio poroso seja dimensionado com tortuosidade τ da seguinte forma:

$$d'_m = \frac{d_m}{\tau^2} \quad (17)$$

onde d_m é agora o coeficiente de difusão das espécies em questão no fluido (por exemplo água) sem a presença do meio poroso.

Existem algumas relações teóricas envolvendo a tortuosidade τ . Primeiramente:

$$\tau^2 \geq 1 \quad (18)$$

que significa simplesmente que o caminho real (médio) percorrido pela espécie enquanto se difunde no fluido intersticial em um meio poroso é mais longo do que na ausência do sólido. Em segundo:

$$\lim_{\phi \rightarrow 1} \tau = 1 \quad (19)$$

ou seja, não há impedimento à difusão na ausência de qualquer sólido. Finalmente $\tau \rightarrow \infty$ se e somente se $\phi \rightarrow 0$, ou seja, a tortuosidade é finita para todos os valores diferentes de zero de porosidade, então o impedimento está completo apenas se o espaço poroso desaparecer [Boudreau \(1996\)](#)

Fisicamente, tortuosidade é definida como a taxa da distância atual Δl percorrida pela espécie por unidade de comprimento Δx do meio poroso conforme equação [\(20\)](#).

$$\tau = \frac{\Delta l}{\Delta x} \quad (20)$$

Quando há uma distribuição de tamanhos de esferas (poros), são formados complexos arranjos que podem resultar em tortuosidade composta por micro e macro tortuosidades, relacionadas aos diversos diâmetros. [Dias et al. \(2017\)](#) afirma que quantificar esse parâmetro não é trivial, nem sempre os poros estão conectados, por isso existem trabalhos que sugerem valores de tortuosidade que variam entre $\tau = 2$ e $\tau = 3$

2.5 POROSIDADE E PERMEABILIDADE ABSOLUTA

Porosidade é a fração de espaços vazios na rocha, que podem ser isolados ou interconectados. Em outras palavras, poros são lacunas entre os componentes que compõem o meio, que podem ser classificados como micro ou macro poros, dependendo da sua escala de tamanho.

A permeabilidade é a capacidade de conduzir fluido. De acordo com [\(DIAS et al., 2017\)](#) ela é uma propriedade que caracteriza um meio e esta relacionado ao arranjo da sua composição. Esse parâmetro está diretamente associado a porosidade do material. Meios permeáveis são meios porosos que possuem alguma conectividade entre os poros. É possível estimar a permeabilidade absoluta utilizando modelos que analisam o fluxo que passa por um corpo de prova. O fluxo, para escoamentos laminares, pode ser descrito pela lei de Darcy que relaciona a permeabilidade de um meio poroso através da correlação de Kozeny-Carman, apresentada na equação [\(21\)](#)

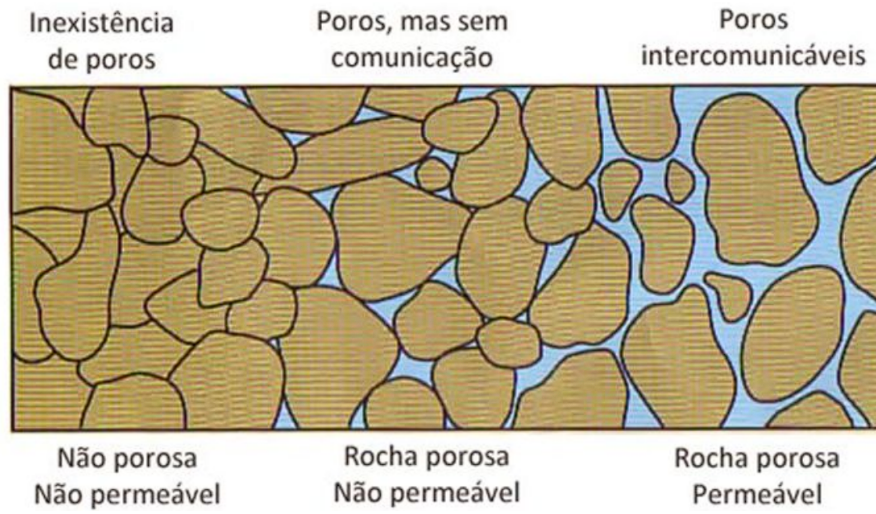
$$K = \frac{D_g^2 \phi^3}{72\tau(1 - \phi)^2} \quad (21)$$

onde D_g é o diâmetro dos grãos; τ a tortuosidade e portanto a razão entre a distância que um elemento de fluido tem que percorrer na amostra rochosa e sua projeção na direção do escoamento e ϕ é o valor da porosidade.

Assim como apresentado na [Figura 3](#), permeabilidade é a capacidade da rocha de conduzir fluidos por seus poros interconectados. Uma rocha pode ser considerada não permeável e sem porosidade, ou

apresenta porosidade mas com poros não interconectados (logo não permeável) ou apresenta poros e estes permeáveis.

Figura 3 – Esquema de porosidade



Fonte: Castro (2022).

Permeabilidade absoluta K pode variar no espaço e depender da direção do escoamento, sendo representada por tensor de segunda ordem (3×3). Será considerado nesse trabalho a hipótese de isotropia, que gera tensor diagonal tal que:

$$K_{ij, i \neq j} = 0; \quad K_{ii} = K \quad (22)$$

Como apresentado na equação (21), em muitos sistemas há uma relação próxima entre permeabilidade e porosidade. Em alguns casos não são conhecidos os valores de tortuosidade ou diâmetro de grãos, são modelos simplificados já que não apresentam essas informações. Um exemplo é a correlação de Winland para permeabilidade absoluta, calculada sendo:

$$K = K_{\max} \frac{\phi^n}{\phi_m^n} \quad (23)$$

onde $K_{\max}$ é um valor médio para a permeabilidade absoluta, ϕ o valor de porosidade na célula, ϕ_m a porosidade média do domínio e n o índice de potência do modelo. Perceba que é um modelo já aplicável em CFD e permite uma saída vetorial e isotrópica para a permeabilidade absoluta. De forma geral quanto maior a porosidade, maior a permeabilidade

2.6 PERMEABILIDADE RELATIVA

Permeabilidade relativa é uma característica que diz respeito a interação entre as fases com as paredes do poro. Cada fase pode se comportar diferente na presença de paredes e existem diferentes modelos que podem ser utilizados para adequar curvas de saturação por permeabilidade relativa vindo de dados experimentais. Alguns conceitos são importantes neste momento:

- Molhabilidade: mede a preferência da superfície da rocha a interagir com uma fase em particular (*water-wet*, *oil-wet* ou intermediária)
- Saturação crítica e residual: é a quantidade da fase nos poros que está presa ou é irreduzível, em tal ponto a permeabilidade da fase é nula. Por exemplo, após muitos volumes porosos de água deslocando óleo no reservatório, o óleo residual S_{or} é atingido; o nível irreduzível de água é chamado de conata S_{wc} .

As permeabilidades relativas devem ser determinadas empiricamente ou experimentalmente para cada meio poroso particular de interesse. No entanto, a literatura é rica em expressões analíticas para a relação entre permeabilidades relativas e a saturação da fase de molhante. Essas expressões são geralmente obtidas a partir de modelos de meios porosos simplificados, por exemplo feixe de tubos capilares e redes de tubos capilares) (BROOKS; COREY, 1966; NAAR; HENDERSON, 1961).

Permeabilidade relativa é uma medida para escoamentos bifásicos, na aplicação do simulador *upstreamFoam* é considerado valor 1 para qualquer fase em escoamento monofásico e varia entre $0 < k < 1$ para escoamentos bifásicos. O valor S_w que água começa a escoar é chamado de saturação crítica S_{wc} , enquanto o valor que óleo para de escoar é saturação residual S_{nc} . Alguns modelos de permeabilidade relativa serão apresentados, e em todos é utilizado a normalização da saturação, calculada como:

$$S_{w,N} = \frac{S_w - S_{w,ir}}{1 - S_{n,ir} - S_{w,ir}} \quad (24)$$

- Modelo de Brooks Corey: Modelo de potência para permeabilidade relativa, necessita de uma permeabilidade relativa máxima que varia entre 0 a 1 e de índices de potência n e m , para óleo e água respectivamente.

$$k_{rn} = k_{rn,max}(1 - S_{w,N})^m k_{rw} = k_{rw,max}(S_{w,N})^n \quad (25)$$

- Modelo LET: Modelo com 4 coeficientes de ajuste: L , E e T e a permeabilidade relativa máxima

$$k_{rn} = k_{rn}^x \frac{(1 - S_{w,N})^{L_n}}{(1 - S_{w,N})^{L_n} + E_n S_{w,N}^{T_n}} k_{rw} = k_{rw}^n \frac{S_{w,N}^{L_w}}{S_{w,N}^{L_w} + E_w (1 - S_{w,N})^{T_w}} \quad (26)$$

- Modelo de Van Genuchten

$$k_{rn} = k_{rn,max}(1 - S_{w,ef}^{1/2}) \left(1 - S_{w,ef}^{1/m}\right)^{2m} k_{rw} = k_{rw,max} S_{w,ef}^{1/2} \left[1 - (1 - S_{w,ef}^{1/m})^m\right]^2 \quad (27)$$

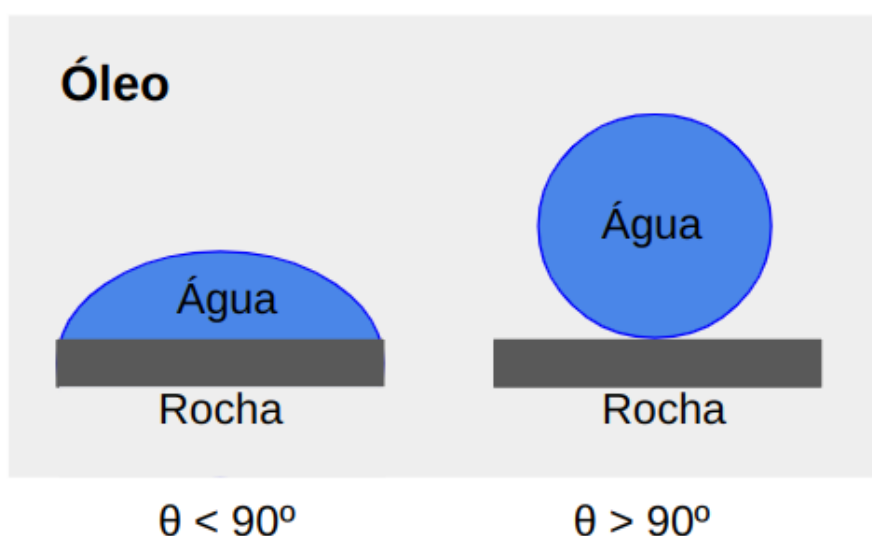
sendo m parâmetro do modelo. Permeabilidade relativa máxima $k_{ri,max}$ é a permeabilidade relativa quando a saturação da outra fase é mínima

2.7 MOLHABILIDADE

Quando existem vários fluidos imiscíveis em um meio poroso sob condições de reservatório, um fluido (água ou óleo) molha preferencialmente a superfície da rocha, e essa preferência é quantificada como molhabilidade. Esta propriedade é a capacidade, resultante de interações intermoleculares, de um fluido manter contato com uma superfície sólida quando os dois estão em contato na presença de outros fluidos imiscíveis.

O grau de molhabilidade é determinado por um equilíbrio de forças adesivas e coesivas, estimadas em termos de ângulos de contato, como mostrado na [Figura 4](#). Portanto, a molhabilidade é determinada pelos minerais da rocha, composição do fluido e histórico de saturação. A molhabilidade tem impacto significativo na distribuição da saturação do fluido, bem como na recuperação de óleo nos reservatórios.

Figura 4 – Representação da molhabilidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

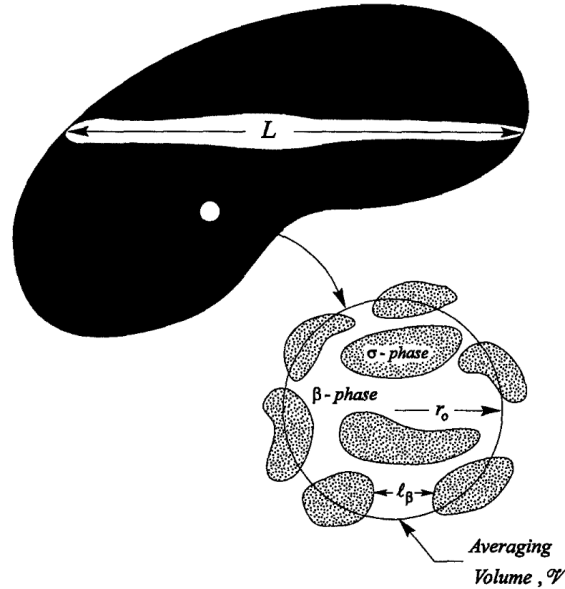
2.8 TEORIA DA MÉDIA

De acordo com [Promentilla e Sugiyama \(2010\)](#), poro consiste de uma geometria complexa de uma rocha permeável que consistem de diferentes estruturas dependendo da rocha. Esta porosidade é irregular e para meios de modelar geometria do poro para simulação CFD é necessário simplificar considerando geometria de poro uniforme no domínio com formato de placas planas ou cilindros. Existem trabalhos relacionados a distribuição de poro e variação do raio de poro, como apresentado por [You et al. \(2018\)](#), porém não será contexto deste trabalho.

O intuito de avaliar propriedades em escala de plugue deve-se a uma redução de custo computacional porém o objetivo geralmente é em escala maior como por exemplo no contexto deste trabalho, escala de reservatório de petróleo. Na equação [\(28\)](#) a escala de interesse é L , que consiste do domínio completo em escala macro para ser utilizado nas simulações CFD, porém a escala característica do poro, por onde o fluido escoar é l_β e o problema de modelar meios porosos consiste na diferença de ordem de grandeza das duas escalas, apresentada na [Figura 5](#).

$$\underbrace{l_\beta}_{\text{Escala de poros}} \lll \underbrace{r_0}_{\text{REV}} \lll \underbrace{L}_{\text{Escala de análise}} \quad (28)$$

Figura 5 – Diferentes escalas



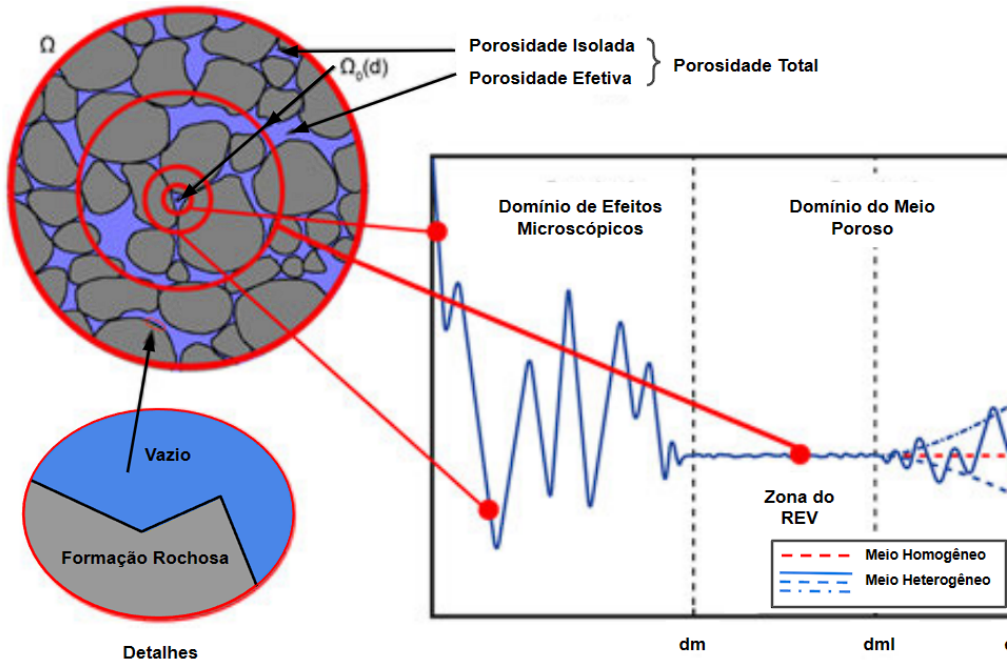
Fonte: Dias (2017).

Para a escala de interesse, L , a magnitude é de quilômetros enquanto a escala característica l_β tem magnitude de milímetros. Imagine uma discretização espacial de uma malha de reservatório com limites em quilômetros e com elementos que necessitam ter milímetros ou até menos: a quantidade de elementos traria a inviabilidade de resolver problemas em meios porosos devido ao custo computacional, e é neste contexto que a Teoria de Média aparece para criar um vínculo entre fenômenos microscópicos e macroscópicos.

A diferença que existe na ordem de grandeza das dimensões características da macro e micro escalas do meio poroso que permite introduzir simplificações na modelagem do meio por meio das equações de conservação. E para análise de meios porosos com Teoria da Média é necessário apresentar no contexto o Volume Elementar Representativo (REV).

De acordo com Dias (2017) a escolha de um elemento de volume representativo do meio poroso é essencial para o processo de média, o qual deve ser específico para a geometria do meio e os fenômenos que querem ser estudados. Consiste de um volume de elemento tal qual que aumentar o seu tamanho não altera a porosidade do meio em análise, eliminando oscilações da medida micro, e ao mesmo tempo é suficiente para representar variações espaciais observáveis na escala de análise como mostrado na Figura 6. Todo REV consiste em um meio poroso com uma fase fluida β e uma fase sólida σ .

Figura 6 – Variações espaciais observáveis



Fonte: [Druetta \(2018\)](#).

Todas as equações obtidas pela Teoria de Média para definir o problema em escala de reservatório foram obtidas a partir das médias das variáveis de campo no REV. Para chegar à essas equações para escala maior, primeiro precisa-se definir como se comportam as médias.

[Garcia \(2021\)](#) apresentou uma forma de obter as equações em escala maior, considerando ψ um campo tensorial com ordem m de uma variável física associado à fase β (fase fluida), pode-se definir dois tipos de médias:

- Média superficial, denotada por $\langle \psi \rangle$, corresponde ao valor médio de ψ se todo o volume fosse ocupado pela fase β , como apresentado na equação (29).

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \psi dV \quad (29)$$

- Média intrínseca, denotada por $\langle \psi \rangle^\beta$, corresponde ao valor médio de ψ , ponderado pelo volume ocupado pela fase β no REV, de acordo com a equação (30).

$$\langle \psi \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} \psi dV \quad (30)$$

Ambas as integrais são feitas no volume ocupado pelo fluido β e portanto V_β . E existe uma relação entre as duas formulações dada pela equação (31).

$$\langle \psi \rangle = \phi \langle \psi \rangle^\beta \quad (31)$$

Segundo [Dias \(2017\)](#), como parte do procedimento de aplicação da média volumétrica um campo tensorial de qualquer ordem ψ pode ser decomposto em um valor médio e um desvio, denotado por $\tilde{\psi}$.

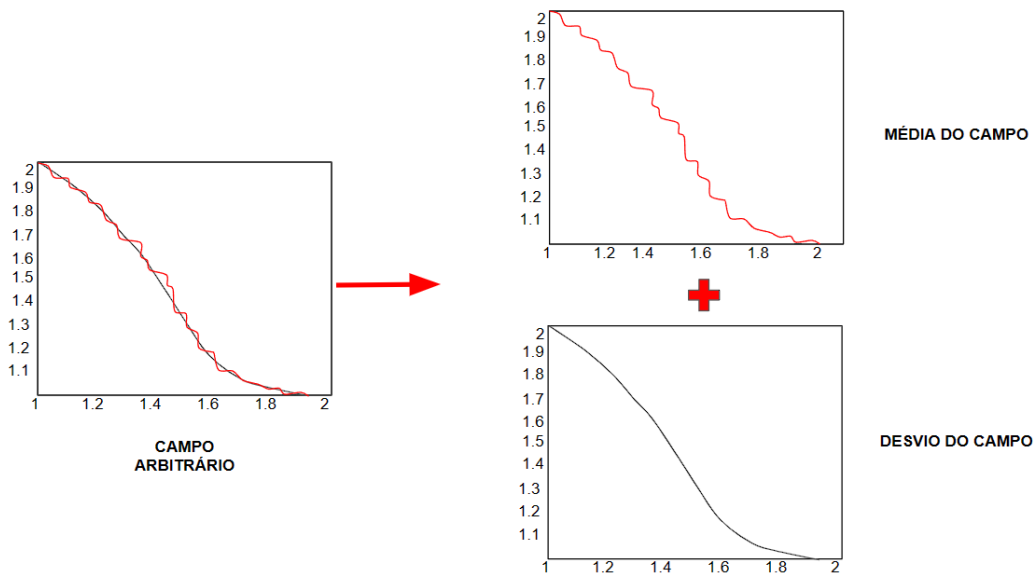
Algo parecido é abordado na análise de escoamentos turbulentos onde uma variável é decomposta em uma média e uma flutuação no tempo.

$$\psi = \langle \psi \rangle^\beta + \tilde{\psi} \quad (32)$$

Para a decomposição da equação (32) seja consistente a seguinte aproximação deve ser satisfeita (WHITAKER, 1967)

$$\langle \tilde{\psi} \rangle^\beta = 0 \quad (33)$$

Figura 7 – Decomposição do campo de análise em média e desvio



Fonte: Dias (2017).

2.8.1 Teoremas Utilizados na Teoria da Média

Nessa seção será explicado como as médias se comportam quando aplicadas em operadores derivada temporal, divergente e gradiente.

- Teorema temporal: Como a interface do meio poroso não se move, a média da variável de campo pode simplesmente entrar na derivada temporal.

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} \quad (34)$$

- Teorema espacial: Para os operadores divergente e gradiente é necessário considerar os efeitos do fluido com a matriz sólida do meio poroso.

$$\langle \nabla \psi \rangle = \nabla \langle \psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \psi \mathbf{n} dA \quad (35)$$

$$\langle \nabla \cdot \psi \rangle = \nabla \cdot \langle \psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \psi \cdot \mathbf{n} dA \quad (36)$$

Nas expressões acima, A_i é a área interfacial sólido-fluido e $\mathbf{n}$ é o vetor normal orientado para fora do fluido em direção à fase sólida. Percebe-se que a média do gradiente/divergente de ψ é o próprio gradiente/divergente da média de ψ somado à uma contribuição do fluxo pela interface sólido-fluido. Posteriormente será visto que em muitos termos das equações essa contribuição pode ser zerada, pois essa interface é impermeável. Uma prova extensa desses teoremas pode ser encontrada em [Howes e Whitaker \(1985\)](#), [Quintard \(2015\)](#).

O gradiente da porosidade pode ser obtido por meio do teorema espacial, e da relação entre as médias intrínseca e superficial. Esse gradiente é não nulo.

$$\nabla \phi = -\frac{1}{V} \int_{A_i} \mathbf{n} dA \quad (37)$$

Abaixo há outras relações matemáticas desses operadores, para λ também sendo um campo tensorial de ordem m . Nota-se que a média do produto não é o produto das médias, há um termo referente às oscilações que precisa ser contabilizado [\(DIAS, 2017\)](#).

$$\langle \langle \psi \rangle \langle \lambda \rangle \rangle = \langle \langle \psi \rangle \rangle \langle \langle \lambda \rangle \rangle = \langle \psi \rangle \langle \lambda \rangle \quad (38)$$

$$\langle \langle \psi \rangle \tilde{\lambda} \rangle = \langle \langle \psi \rangle \rangle \langle \tilde{\lambda} \rangle = 0 \quad (39)$$

$$\langle \psi \lambda \rangle = \langle (\langle \psi \rangle + \tilde{\psi})(\langle \lambda \rangle + \tilde{\lambda}) \rangle \quad (40)$$

$$= \langle \langle \psi \rangle \langle \lambda \rangle \rangle + \langle \langle \psi \rangle \rangle \langle \tilde{\lambda} \rangle + \langle \tilde{\psi} \rangle \langle \langle \lambda \rangle \rangle + \langle \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \rangle \quad (41)$$

$$= \langle \psi \rangle \langle \lambda \rangle + \langle \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \rangle \quad (42)$$

2.8.2 Teoria da Média na Equação do Balanço de Massa

Agora pode-se iniciar a aplicar o operador média superficial nas equações obtidas na forma diferencial.

Para a equação [43](#), o balanço da massa :

$$\left\langle \frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho_\beta \mathbf{u}_\beta) \rangle = \frac{\partial \langle \rho_\beta \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_\beta \mathbf{u}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \mathbf{u}_\beta \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (43)$$

O último termo da equação acima pode ser considerado nulo, pois, como dito anteriormente, a fase sólida é considerada impermeável:

$$\mathbf{u}_\beta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (44)$$

A partir desta relação, obtém-se a média superficial da equação do balanço da massa. Agora pode-se obter a média intrínseca desta.

$$\frac{\partial \langle \rho_\beta \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_\beta \mathbf{u}_\beta \rangle = 0 \quad (45)$$

O termo dentro do divergente pode ser decomposto, como feito na equação 46:

$$\rho_\beta \mathbf{u}_\beta = \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta + \langle \rho_\beta \rangle^\beta \widetilde{\mathbf{u}}_\beta + \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \widetilde{\rho}_\beta + \widetilde{\rho}_\beta \widetilde{\mathbf{u}}_\beta \quad (46)$$

Após aplicar a média, dois dos termos são zerados, pois $\langle \widetilde{\psi} \rangle = 0$. Agora pode-se aplicar o operador média no termo decomposto:

$$\langle \rho_\beta \mathbf{u}_\beta \rangle = \langle \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \rangle + \langle \widetilde{\rho}_\beta \widetilde{\mathbf{u}}_\beta \rangle = \phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta + \langle \widetilde{\rho}_\beta \widetilde{\mathbf{u}}_\beta \rangle \quad (47)$$

No primeiro termo, é aplicada a relação $\langle \psi \rangle = \phi \langle \psi \rangle^\beta$. Substituindo de volta no balanço da massa:

$$\frac{\partial(\phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot [\phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta] + \nabla \cdot [\langle \widetilde{\rho}_\beta \widetilde{\mathbf{u}}_\beta \rangle] = 0 \quad (48)$$

Pela hipótese de escoamento levemente compressível, as flutuações na massa específica são muito pequenas quando comparado à massa específica em si:

$$\widetilde{\rho}_\beta \ll \langle \rho_\beta \rangle^\beta \quad (49)$$

Assim, o terceiro termo da equação 48 pode ser desconsiderado. Por fim, tem-se a equação do balanço da massa, que é similar à microscópica (equação 43), mas agora contém operadores média intrínseca e está ponderada pela porosidade (DIAS, 2017).

$$\frac{\partial(\phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot [\phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta] = 0 \quad (50)$$

2.8.3 Teoria da Média na Equação do Balanço de Momentum

Na equação do balanço de momentum, cada um dos termos pode ser tratado separadamente:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_\beta \mathbf{u}_\beta}{\partial t}}_1 + \underbrace{\nabla \cdot (\rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta)}_2 = \underbrace{-\nabla p}_3 + \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'}_4 + \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}''}_5 + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_6 \quad (51)$$

- Primeiro termo - parcela transiente:

Aproveitando da relação obtida anteriormente

$$\left\langle \frac{\partial (\rho_\beta \mathbf{u}_\beta)}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial (\langle \rho_\beta \rangle \langle \mathbf{u}_\beta \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial \langle \widetilde{\rho}_\beta \widetilde{\mathbf{u}}_\beta \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta}{\partial t} \quad (52)$$

O termo referente à derivada temporal do produto das flutuações é desprezível (DIAS, 2017).

- Segundo termo - parcela advectiva:

$$\langle \nabla \cdot (\rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta) \rangle = \nabla \cdot \langle \rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta \cdot \mathbf{n} dA \quad (53)$$

O último termo do lado direito equação pode ser zerado pela mesma condição de parede impermeável vista anteriormente na equação 44. O termo que sobra, $\nabla \cdot \langle \rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta \rangle$, pode ser decomposto em outros três:

$$\nabla \cdot \langle \rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta \rangle = \nabla \cdot \left(\phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \right) + \nabla \cdot [\langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \widetilde{\mathbf{u}_\beta} \widetilde{\mathbf{u}_\beta} \rangle] + \nabla \cdot [\langle \widetilde{\rho}_\beta \mathbf{u}_\beta \widetilde{\mathbf{u}_\beta} \rangle] \quad (54)$$

O segundo e terceiro termos obtidos são provenientes da aplicação da média no produto triplo $\rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta$, e podem ser desconsiderados por serem de ordem menor que $\nabla \cdot \left(\phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \right)$. Uma explicação mais detalhada pode ser encontrada em Dias (2017). Logo:

$$\langle \nabla \cdot (\rho_\beta \mathbf{u}_\beta \mathbf{u}_\beta) \rangle = \nabla \cdot \left(\phi \langle \rho_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \right) \quad (55)$$

- Terceiro termo - gradiente da pressão:

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \nabla \left(\phi \langle p \rangle^\beta \right) + \frac{1}{V} \int_{A_i} p \mathbf{n} dA = \phi \nabla \langle p \rangle^\beta + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{A_i} p \mathbf{n} dA}_{\text{}} \quad (56)$$

O termo assinalado pode ser decomposto, já que $p = \langle p \rangle^\beta + \tilde{p}$. O termo referente à $\langle p \rangle^\beta$ pode ser cancelado, pois $\langle p \rangle^\beta$ é constante na superfície do REV. O último termo, referente à integral da flutuação na pressão $\tilde{p}$ não pode ser desconsiderado, já que a ordem de grandeza desse termo é o mesmo do que de $\phi \nabla \langle p \rangle^\beta$ (DIAS, 2017).

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} p \mathbf{n} dA = \frac{1}{V} \int_{A_i} \langle p \rangle^\beta \mathbf{n} dA + \frac{1}{V} \int_{A_i} \tilde{p} \mathbf{n} dA \quad (57)$$

Logo:

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \phi \nabla \langle p \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{A_i} \tilde{p} \mathbf{n} dA \quad (58)$$

- Quarto termo - forças viscosas de cisalhamento:

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'_\beta \rangle = \nabla \cdot \left(\phi \langle \boldsymbol{\tau}'_\beta \rangle^\beta \right) + \frac{1}{V} \int_{A_i} \mathbf{n}_f \cdot \boldsymbol{\tau}'_\beta dA \quad (59)$$

Como visto na equação 59, ele pode ser decomposto, para fluidos levemente compressíveis e newtonianos.

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \mu_\beta (\nabla \mathbf{u}_\beta + \nabla \mathbf{u}_\beta^T) \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \mathbf{n} \cdot [\mu_\beta (\nabla \mathbf{u}_\beta + \nabla \mathbf{u}_\beta^T)] dA \quad (60)$$

Após diversas simplificações, em que há manipulação algébrica e termos são desconsiderados por serem de ordem de grandeza menor (DIAS, 2017). Considerando essa simplificação, chega-se a:

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'_\beta \rangle = \phi \nabla \cdot \left[\langle \mu_\beta \rangle^\beta \left(\nabla \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta + (\nabla \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta)^T \right) \right] + \frac{1}{V} \int_{A_i} \left[\langle \mu_\beta \rangle^\beta \left(\nabla \widetilde{\mathbf{u}_\beta} + \nabla \widetilde{\mathbf{u}_\beta}^T \right) \right] \mathbf{n} dA \quad (61)$$

- Quinto termo - forças viscosas devido à compressão:

$$\langle \nabla \boldsymbol{\tau}''_{\beta} \rangle = \nabla (\phi \langle \boldsymbol{\tau}''_{\beta} \rangle^{\beta}) + \frac{1}{V} \int_{A_i} \mathbf{n}_f \boldsymbol{\tau}''_{\beta} dA \quad (62)$$

Este termo pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\langle \nabla \boldsymbol{\tau}''_{\beta} \rangle = \nabla \cdot \left\langle -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\beta}) \right\rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \left[-\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\beta}) \right] \mathbf{n} dA \quad (63)$$

Após diversas simplificações (DIAS, 2017):

$$\langle \nabla \boldsymbol{\tau}''_{\beta} \rangle = -\phi \nabla \left[\frac{2}{3} \langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_{\beta} \rangle^{\beta} \right] - \frac{1}{V} \int_{A_i} \left[\frac{2}{3} \langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_{\beta} \right] \mathbf{n} dA \quad (64)$$

- Sexto termo - forças de campo:

Considerando que a única força de campo é devido à aceleração da gravidade, e esta é constante:

$$\langle \rho_{\beta} \mathbf{f}_m \rangle = \langle \rho_{\beta} \rangle \mathbf{g} = \phi \langle \rho_{\beta} \rangle^{\beta} \mathbf{g} \quad (65)$$

- Todos termos unidos:

Dessa forma, unindo todos os termos obtidos, chega-se à forma final da equação do balanço do *momentum*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi \left(\langle \rho_{\beta} \rangle^{\beta} \langle \mathbf{u}_{\beta} \rangle^{\beta} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\phi \langle \rho_{\beta} \rangle^{\beta} \langle \mathbf{u}_{\beta} \rangle^{\beta} \langle \mathbf{u}_{\beta} \rangle^{\beta} \right) = & -\phi \nabla \langle p \rangle^{\beta} \\ & - \frac{1}{V} \int_{A_i} \widetilde{p} \mathbf{n} dA \\ & + \phi \nabla \cdot \left[\langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \left(\nabla \langle \mathbf{u}_{\beta} \rangle^{\beta} + (\nabla \langle \mathbf{u}_{\beta} \rangle^{\beta})^T \right) \right] \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_i} \left[\langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \left(\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_{\beta} + \nabla \widetilde{\mathbf{u}}_{\beta}^T \right) \right] \mathbf{n} dA \\ & - \phi \nabla \left[\frac{2}{3} \langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_{\beta} \rangle^{\beta} \right] \\ & - \frac{1}{V} \int_{A_i} \left[\frac{2}{3} \langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_{\beta} \right] \mathbf{n} dA \\ & + \phi \langle \rho_{\beta} \rangle^{\beta} \mathbf{g} \end{aligned} \quad (66)$$

Unindo os três termos que são integrais na área:

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} \left[-\widetilde{p} \mathbf{I} \langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \left(\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_{\beta} + \nabla \widetilde{\mathbf{u}}_{\beta}^T \right) - \frac{2}{3} \langle \mu_{\beta} \rangle^{\beta} \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_{\beta} \right] \mathbf{n} dA \quad (67)$$

Grande parte da equação obtida é similar à equação do balanço do *momentum* no caso diferencial, visto anteriormente. No entanto, o termo da integral na área não está totalmente definido, nele há

flutuações que precisam ser determinadas para resolver o problema na escala do REV. Esse termo de fechamento pode ser modelado segundo a equação 68 (EDWARDS et al., 1988).

Na próxima seção será visto a derivação deste, com todas as hipóteses necessárias para tal.

$$\mathbf{M}_\beta = -\mu_\beta \phi^2 \mathbf{K}^{-1} \cdot \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \quad (68)$$

Na equação acima, $\mathbf{K}$ é o tensor permeabilidade absoluta do meio. Esse tensor indica a capacidade de um meio poroso de conduzir um fluido. Em casos reais, este tensor é anisotrópico, ou seja, a permeabilidade em cada direção pode ser diferente.

Toda dedução utilizando Teoria da Média se baseou em escoamento monofásico, porém procedimento parecido pode ser feito considerando as equações para escoamento bifásico, resultando na equação 69.

$$\mathbf{M}_\beta = -\frac{\mu_\beta \alpha_\beta^2}{k_{rel}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \quad (69)$$

onde k_{rel} é a permeabilidade relativa das fases fluidas com o meio poroso e α a fração de fase do fluido β . Este termo de interação entre fase sólida e fase fluida obtido depende do fluido em questão e da geometria do poro, e ambas as situações serão analisadas nas próximas seções.

2.9 MODELAGEM DE FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO NEWTONIANOS

Neste próximo tópico serão abordados de forma geral as características dos fluidos não newtonianos, alguns modelos generalizados e exemplos que são possíveis de encontrar na realidade. Além disso, serão apresentadas as modelagens monofásica e bifásica de escoamentos em meios porosos. Em ambas serão apresentadas equações para o termo de interação sólido fluido a partir de uma dedução proposta por Barboza Júnior (2022) e de uma proposta feita por Wu (1990).

O termo fonte da equação de balanço de quantidade de movimento $\mathbf{M}$ refere-se a transferência de momento entre as fases sólido e fluido. Este depende principalmente da reologia do fluido e da geometria do poro, e pode ser determinado de maneira analítica para os seguintes cenários:

- Fluido newtoniano e poro placas planas.
- Fluido newtoniano e poro cilíndrico.
- Fluido *power law* e poro placas planas.
- Fluido *power law* e poro cilíndrico.

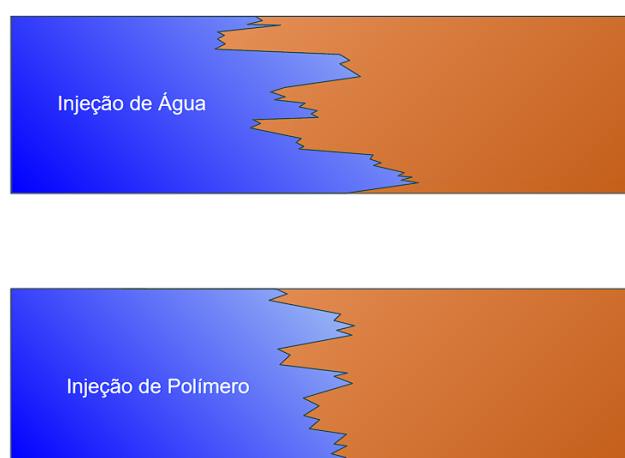
Serão apresentadas as deduções dos termos de interação entre fase sólida e fase fluida para newtoniano com poro de placas planas, *power law* com poro de placas planas e também de poro cilíndricos.

2.9.1 Introdução a Fluidos Não Newtonianos

Injeção de polímeros é uma técnica de Recuperação Avançada de Petróleo que utiliza de soluções de polímero para aumentar a recuperação de óleo ao aumentar a viscosidade do fluido injetado. Esta técnica é utilizada em reservatórios onde injeção de água é ineficiente por causa de fraturas ou regiões de alta permeabilidade que redirecionam o fluxo de água injetada.

A solução polimérica deve ser um fluido não newtoniano que pode ser do tipo pseudoplástica, tal que a viscosidade diminui com o aumento da taxa de cisalhamento. Portanto, em locais de altas permeabilidades é esperado uma desaceleração do fluido que desloca devido ao aumento da viscosidade, como mostrado na [Figura 8](#), diminuindo assim o tempo onde começa a produção do fluido injetado possibilitando uma produção mais uniforme de óleo por mais tempo.

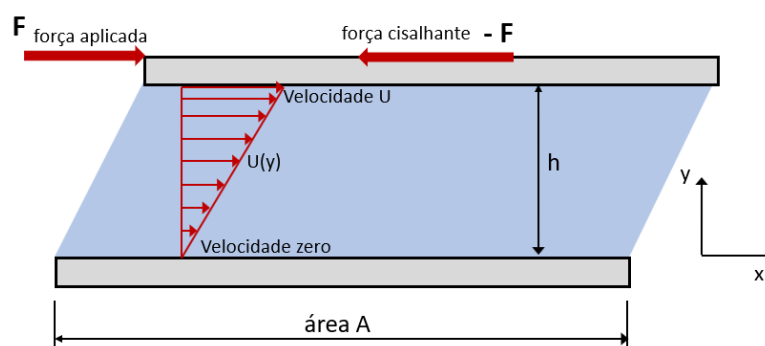
Figura 8 – Diferença no deslocamento esperado ao usar injeção de polímero.



Fonte: Produção do próprio autor.

Primeiramente pensando nos conceitos dos efeitos viscosos, considere duas placas planas infinitas com uma aplicação de uma força em uma delas, conforme mostrado na [Figura 9](#).

Figura 9 – Perfil de velocidade entre duas placas planas infinitas.



Fonte: Produção do próprio autor.

A força aplicada cria uma deformação no fluido, que por sua vez cria tensões de cisalhamento, τ_{xy} , na qual, para este plano de referência mostrado, é definido pela equação [\(70\)](#):

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dU_x}{dy} \quad (70)$$

No escoamento de fluidos newtonianos, existe uma relação linear entre τ_{yx} e dU_x/dt , taxa de deformação, porque a viscosidade absoluta μ é uma propriedade de fluido, independente da tensão de cisalhamento aplicada ou da resultante taxa de deformação.

A viscosidade para gases aumenta com o aumento da temperatura, e para líquidos diminui com o aumento da temperatura. Mas de maneira geral, os gases e a maioria dos líquidos pouco viscosos são fluidos newtonianos, para os quais a representação cartesiana de τ_{yx} com dU_x/dy fornece uma reta que passa pela origem (COIMBRA, 2015).

E a reologia é a ciência envolvida neste área, que estuda a deformação e o escoamento de substâncias que podem se situar entre os sólidos, que seguem a teoria da elasticidade de Hooke, e os fluidos newtonianos, que se deformam continuamente quando sujeitos a tensões de cisalhamento, por menores que elas sejam (COIMBRA, 2015).

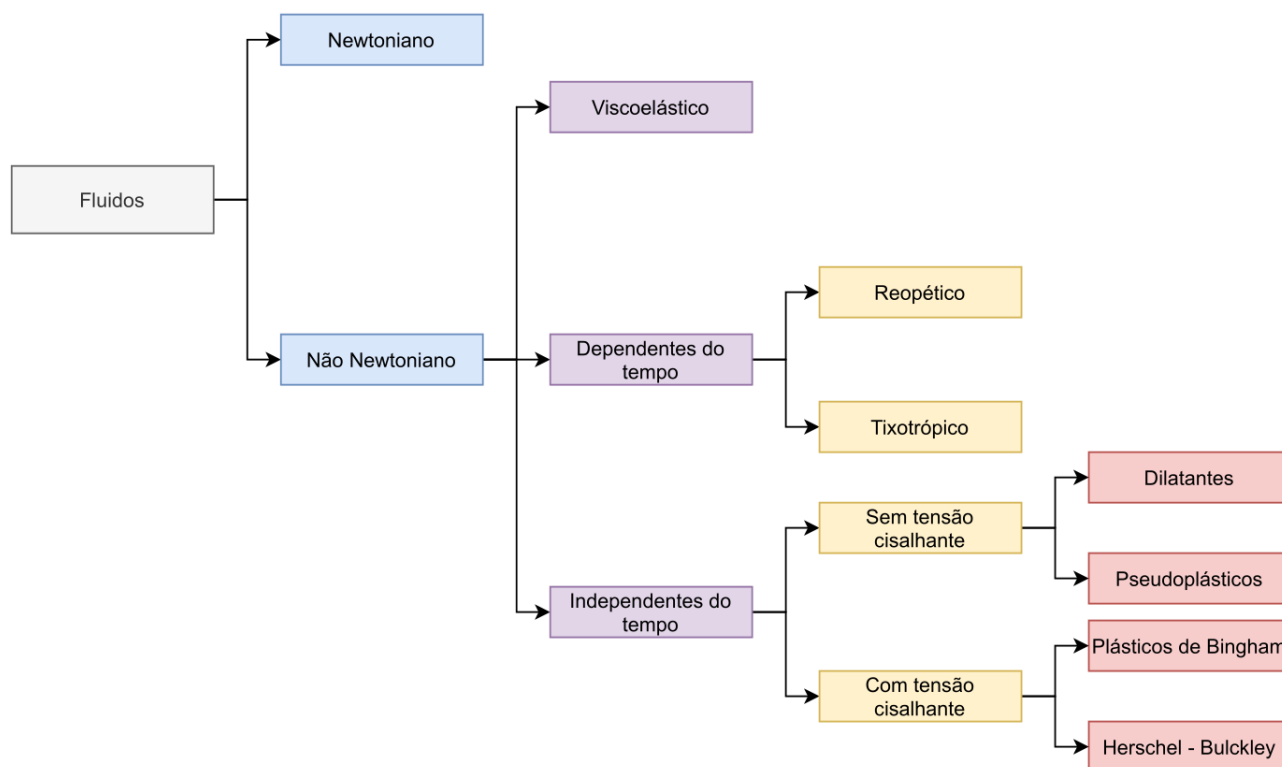
2.9.2 Tipos de Fluidos Não Newtonianos

Na Figura 10 é apresentado um diagrama que representa superficialmente os fluidos não newtonianos. É falado assim pois este diagrama é constantemente encontrado na literatura porém não representa todos os fluidos não newtonianos

Um fluido pode ter características diferentes dos tipos apresentados. Em vez de classificar os fluidos não newtonianos é mais correto falar sobre manifestações não newtonianas em um determinado fluido. Nas teses de verificações, pode ser que o fluido em análise tenha manifestado um comportamento específico não newtoniano enquanto outro comportamento não é verificado, por exemplo.

Outro detalhe não apresentado no diagrama é a possibilidade de um fluido ser reversível ou irreversível (tixotrópicos e reopéticos são reversíveis).

Figura 10 – Representação dos fluidos não newtonianos.



Fonte: Produção do próprio autor.

Os fluidos viscoelásticos possuem um comportamento intermediário entre um líquido viscoso, que não possui forma geométrica definida e escoar irreversivelmente ao ser submetido a uma força externa, e um sólido elástico, que possui forma geométrica definida e assumem uma configuração geométrica de equilíbrio após serem deformados. As características viscosas e elásticas de um fluido viscoelástico fazem com que este se deforme, ao ser submetido a uma tensão, e se recupere, em parte, da deformação sofrida, após o fim da tensão cisalhante. Estas características podem ser encontradas em casas domésticas ao sovar massa pão, comer gelatina e outros, conforme [Figura 11](#)

Figura 11 – Massas de trigo, queijos e gelatinas são exemplos de materiais viscoelásticos, assim como líquidos poliméricos, biopolímeros e plasma sanguíneo.



Fonte: [Christensen](#) (2009)

Os fluidos não newtonianos dependentes do tempo apresentam propriedades que variam com o tempo de aplicação do tensor das tensões τ , para uma taxa de deformação por cisalhamento constante. Em alguns desses fluidos, mostrados na [Figura 12](#), chamados de tixotrópicos, a viscosidade diminui com o tempo quando a pressão é aumentada. A pressão destrutura o material, e dessa maneira

a viscosidade diminui. No caso reopético é o contrário, quando é feito claras em neve de ovo, por exemplo, é criado uma estrutura.

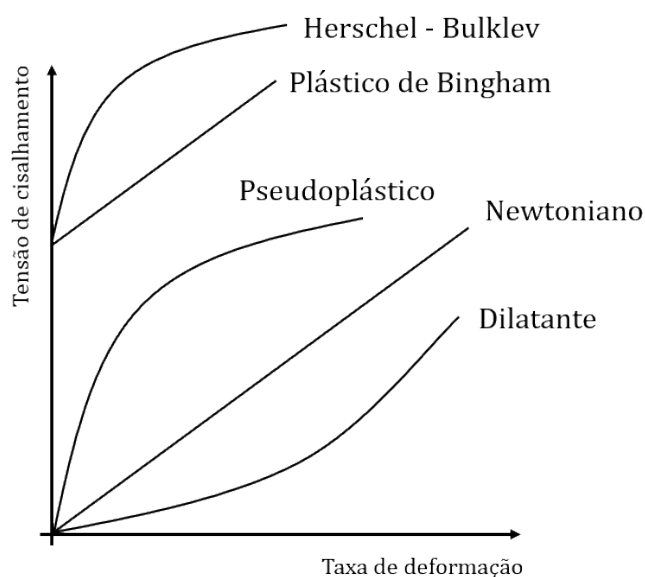
Figura 12 – Ketchup, tintas, soluções concentradas e petróleo são exemplos de fluidos tixotrópicos. Argila Bentonita é um exemplo de fluido reopético.



Fonte: Christensen (2009)

Os fluidos newtonianos independentes do tempo são aqueles cujas propriedades reológicas independem do tempo de aplicação da tensão de cisalhamento. Podem ser agrupados em duas categorias, dependendo se requerem, ou não, uma tensão de cisalhamento mínima para escoar, também chamada de tensão inicial. Na Figura 13 apresenta os diferentes tipos de fluidos independentes do tempo.

Figura 13 – Diferentes tipos de fluidos não newtonianos independentes do tempo.



Fonte: Christensen (2009)

Outras classificações ainda podem ser feitas de acordo com a maneira com que a viscosidade aparente, η , varia com a taxa de deformação por cisalhamento, $\dot{\gamma}$. Se η diminui com o aumento de $\dot{\gamma}$, o fluido é dito *shear-thinning*, i.e., que "afina" com o cisalhamento. Caso contrário, diz-se que o fluido é *shear-thickening*, ou seja, que "engrossa" com o cisalhamento.

Os fluidos que independem do tempo e não possuem tensão inicial, podem ser classificados como **dilatantes**, que são *shear-thickening*, ou **pseudoplásticos**, que são *shear-thinning*. Ambas características são encontradas em polpas de frutas e suspensões de amido, como mostrados na Figura 14.

Já os fluidos que independem do tempo e possuem tensão inicial podem apresentar relação linear entre tensão e velocidade, sendo denominados **plásticos de Bingham**, ou apresentarem comportamento *shear-thinning*, chamados de **fluidos de Herschel-Buklev**.

Figura 14 – Polpas de frutas muitas vezes são fluidos pseudoplásticos, enquanto suspensões de amido são fluidos dilatantes e a maionese pode ser citada como um exemplo de plástico de Bingham.



Fonte: Christensen (2009)

2.9.3 Sem Tensão Inicial

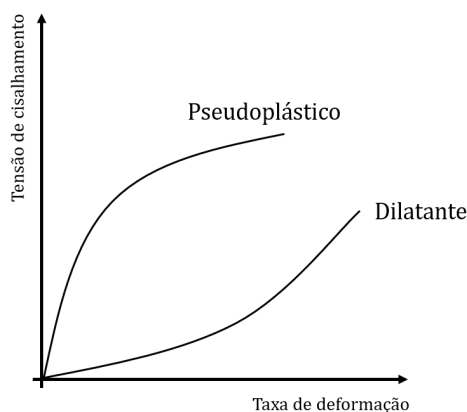
Com maior detalhamento, fluidos não newtonianos independentes do tempo que não requerem tensão inicial, são aqueles no qual não existe um limite de tensão para ocorrer o escoamento do fluido, podendo ser por exemplo as tintas a base de latex. Para aqueles que precisam, como por exemplo a pasta de dente, serão detalhados posteriormente.

Em outras palavras, esta categoria de fluidos são aqueles que não necessitam de uma tensão de cisalhamento inicial para começarem a escoar. Dentro desta categoria destacam-se:

- Pseudoplásticos;
- Dilatantes.

Os fluidos newtonianos são independentes do tempo e sem tensão cisalhante inicial para ocorrer o escoamento, portanto também são válidos na utilização do modelo *power law*, mas com $n = 1$.

Figura 15 – Características de fluidos independentes do tempo.



Fonte: Produção do próprio autor

2.9.3.1 Pseudoplásticos

São aquelas substâncias que, inicialmente em repouso, apresentam suas moléculas em um estado desordenado e quando aplicado uma tensão de cisalhamento, passa a existir uma ordenação destas moléculas, com consequência de diminuir a viscosidade aparente quanto maior for esta tensão. Estas substâncias podem ser modeladas pelo modelo *power law*, representado pela equação (71):

$$\tau_{yx} = -k \left| \frac{dU_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dU_x}{dy} \quad (71)$$

Na qual k é o índice de consistência; n é a inclinação da curva, onde $n < 1$. Podem ser encontrados exemplos como polpa de frutas, caldos de fermentação, melaço de cana.

Esta equação pode ser apresentada de outra maneira:

$$\eta = k \left| \frac{dU_x}{dy} \right|^{n-1} \quad (72)$$

onde η é a viscosidade aparente de um fluido não newtoniano, e portanto:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dU_x}{dy} \quad (73)$$

2.9.3.2 Dilatantes

Seguem a mesma lógica apresentada no tópico anterior, porém com um detalhe: São substâncias que apresentam um aumento de viscosidade aparente com a tensão de cisalhamento. Estas substâncias também podem ser descritas pelo modelo *power law* apresentado antes.

Para dilatantes n é maior que a unidade ($n > 1$). Alguns casos como suspensões de amido como na Figura 16, soluções de farinha de milho e açúcar, silicato de potássio e areia, podem ser usados como exemplo.

Figura 16 – Suspensão de amido em um auto-falante



Fonte: Christensen (2009)

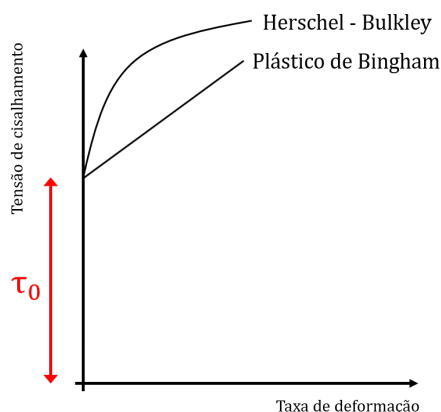
2.9.4 Com Tensão Inicial

Os fluidos não newtonianos com tensão inicial são aqueles que se comportam como sólidos até uma tensão limite e como fluidos quando a tensão ultrapassa esse limite. Dentre os fluidos dessa categoria,

pode-se evidenciar dois grupos principais:

- Plástico de Bingham → Após a tensão limite, se comporta como um fluido newtoniano.
- Fluido de Herschel-Bulkley → Após a tensão limite, se comporta como um fluido não newtoniano.

Figura 17 – Características de fluidos com tensão inicial.



Fonte: Produção do próprio autor

2.9.4.1 Plástico de Bingham

Para o caso de plástico de Bingham será feita uma dedução a fim de encontrar a equação que define o perfil de velocidades de um escoamento em tubo. A formulação geral para os plásticos de Bingham é:

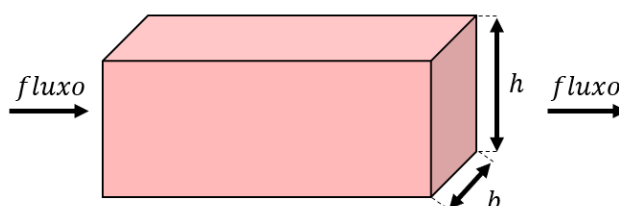
$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} \quad \text{para} \quad |\tau_{yx}| > |\tau_0| \quad (74)$$

$$\frac{dU_x}{dy} = 0 \quad \text{para} \quad |\tau_{yx}| < |\tau_0| \quad (75)$$

Essa característica desse fluido resulta em um perfil de velocidades de escoamento em tubo interessante, com a parte central sólida, sem escoamento e a parte próximas às paredes se comportando como um fluido newtoniano.

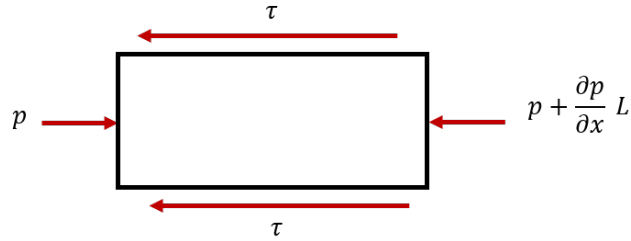
Para calcular o perfil de velocidades em uma seção transversal de forma analítica, inicia-se analisando as pressões e tensões agindo sobre o elemento de fluido de acordo com as [Figura 18](#) e [Figura 19](#), como mostrados a seguir:

Figura 18 – Representação de um elemento tridimensional



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 19 – Elemento fluido para dedução do perfil de velocidades do fluido plástico de Bingham.



Fonte: Produção do próprio autor

Para um fluxo de massa constante (regime permanente), pode-se fazer o balanço de forças:

$$p + \tau = \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \Delta y + p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta y \Rightarrow -\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (76)$$

Para o plástico de Bingham, tem-se:

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} \quad (77)$$

Substituindo uma expressão na outra:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} \right) \quad (78)$$

Considerando que a pressão não varia ao longo da seção transversal e que a tensão τ somente depende da altura y , as derivadas parciais se tornam derivadas totais:

$$\frac{dp}{dx} = -\mu \frac{d^2 U_x}{dy^2} \quad (79)$$

Já que τ_0 é constante e pode ser eliminado na derivada.

Rearranjando os termos:

$$-\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 U_x}{dy^2} = \text{constante} \quad (80)$$

Essa expressão é constante porque consideramos uma queda de pressão constante ao longo do percurso. Essa queda de pressão $\frac{dp}{dx}$ é negativa, pois $p_2 < p_1$. Por fim, integrando em y :

$$\frac{dU_x}{dy} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1 \quad (81)$$

$$U_x(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (82)$$

Para a condição de contorno $U_x(y = 0) = 0$ (condição de não deslizamento na parede), tem-se que $C_2 = 0$.

Outra condição de contorno é que a força de atrito nas paredes é igual à queda de pressão. Para

$W = 2bL$ sendo a área das duas paredes e $S = bh$ a área da seção transversal do escoamento:

$$\tau W = \Delta p S \text{ então } \left(\tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} \right) 2bL = \Delta p bh \quad (83)$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \left(\tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} \right) \frac{2}{h} \quad (84)$$

Sabe-se que a queda de pressão é constante e negativa ($p_2 < p_1$), logo:

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{dp}{dx} \text{ então } \frac{dp}{dx} = -\left(\tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} \right) \frac{2}{h} \quad (85)$$

Rearranjando:

$$\frac{dU_x}{dy} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \tau_0 \right) \quad (86)$$

Agora substituindo (86) em (81), encontra-se a constante C_1 :

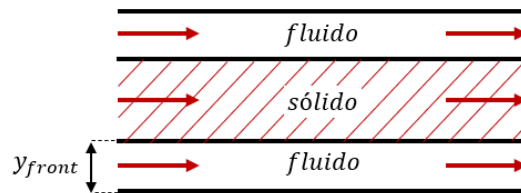
$$C_1 = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \tau_0 \right) \quad (87)$$

E por fim, obtém-se a expressão $U_x(y)$:

$$U_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \tau_0 \right) y \quad (88)$$

Um ponto importante é que essa expressão é válida somente até um certo valor de y . A tensão cisalhante τ reduz à medida que se afasta das paredes, e para um Plástico de Bingham, somente haverá escoamento se $\tau > \tau_0$. Assim, o comportamento obtido é o seguinte:

Figura 20 – Representação do escoamento com Plástico de Bingham.



Fonte: Produção do próprio autor

Para obter y_{front} , deve-se considerar que acima da fronteira entre a parte que se comporta como sólido e a que se comporta como fluido, a variação da velocidade com a coordenada y é nula:

$$\left. \frac{dU_x}{dy} \right|_{y_{front}} = 0 \quad (89)$$

Substituindo isso na equação (81) e usando o que foi obtido para C_1 :

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y_{front} - \frac{1}{\mu} \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \tau_0 \right) = 0 \quad (90)$$

Por fim:

$$y_{front} = \frac{h}{2} + \frac{\tau_0}{\frac{dp}{dx}} \quad (91)$$

Sendo que $\frac{dp}{dx}$ é um valor negativo, como mostrado na equação (85).

Também pode ser calculada a velocidade na parte central do escoamento (a que se comporta como sólido). É facilmente encontrada utilizando a equação (82), para $y = y_{front}$:

$$U_{x,max} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h}{2} + \frac{\tau_0}{\frac{dp}{dx}} \right)^2 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \tau_0 \right) \left(\frac{h}{2} + \frac{\tau_0}{\frac{dp}{dx}} \right) \quad (92)$$

Rearranjando:

$$U_{x,max} = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{4} + h\tau_0 + \frac{\tau_0^2}{\frac{dp}{dx}} \right] \quad (93)$$

2.9.4.2 Fluido de Herschel-Bulkley

O modelo de Herschel-Bulkley descreve fluidos com tensão limite de escoamento. São fluidos estruturados, que tem estrutura muito forte abaixo da tensão limite de escoamento, com viscosidade muito elevada. De acordo com Barnes (2000), ao atingir a tensão limite de escoamento, a estrutura do fluido se quebra, causando uma queda brusca nos níveis de viscosidade. A formulação geral para essa classificação de fluido é:

$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu \frac{dU_x}{dy} \quad \text{para } |\tau_{yx}| > |\tau_0| \quad (94)$$

$$\frac{dU_x}{dy} = 0 \quad \text{para } |\tau_{yx}| < |\tau_0| \quad (95)$$

Uma outra forma de representar a equação (95), é que quando a tensão está abaixo dessa tensão limite de escoamento, o fluido apresentará viscosidade tendendo a infinito, ou seja, não escoará. Ou seja, ele se comporta como um fluido não newtoniano generalizado para tensões acima de τ_0 .

2.9.5 Fluidos Newtonianos Generalizados

Um fluido newtoniano generalizado é um modelo fenomenológico que assume que o escoamento ao qual o fluido é submetido muda apenas a taxa de dissipação (ou viscosidade), não alterando a estrutura tensorial do modelo constitutivo newtoniano.

Para descrever o comportamento de fluidos não newtonianos alguns modelos matemáticos foram desenvolvidos. Dentre eles os seguintes serão abordados:

- Carreau–Yasuda

- Power law
- Carreau–Yasuda adaptado

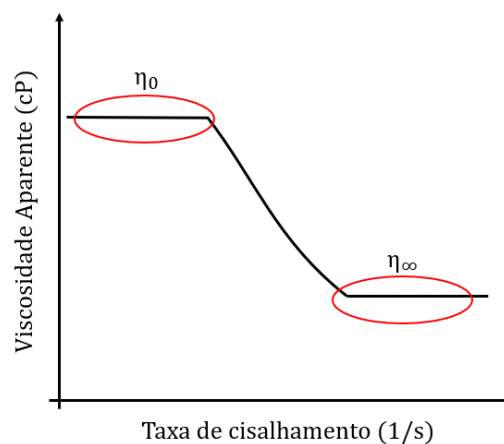
O modelo Carreau–Yasuda, com gráfico apresentado na **Figura 21** muito utilizado para caracterizar Fluidos Pseudoplásticos, é uma interpolação entre a viscosidade do fluido a uma taxa de cisalhamento nula η_0 e uma taxa de cisalhamento infinito η_∞ . Ele pode ser escrito como:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) [1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (96)$$

- $\eta \rightarrow$ viscosidade aparente;
- $\dot{\gamma} \rightarrow$ taxa de cisalhamento;
- $\eta_0 \rightarrow$ viscosidade para uma taxa de cisalhamento nula;
- $\eta_\infty \rightarrow$ viscosidade para uma taxa de cisalhamento infinita;
- $\lambda \rightarrow$ tempo característico do fluido;
- $n \rightarrow$ índice que caracteriza o modelo;
- $a \rightarrow$ constante que caracteriza o modelo.

Onde $n < 1$ sempre para Carreau-Yasuda. O modelo assume que para taxas de cisalhamento muito pequenas ou muito elevadas o fluido apresenta uma certa viscosidade aparente constante, dessa forma o comportamento de um Fluido Newtoniano. Para um certo valor intermediário da taxa de cisalhamento há variação da viscosidade aparente.

Figura 21 – Modelo Carreau-Yasuda para um Pseudoplástico.



Fonte: Produção do próprio autor

Nesse caso a constante a define o tamanho e curvatura da seção intermediária e λ é um tempo de relaxação que define a taxa de cisalhamento cruzado.

O índice n é responsável por caracterizar o fluido em questão, sendo que para $n < 1$ ele é **Pseudoplástico** e para $n > 1$ é **Dilatante**. Para $n = 1$ tem-se um fluido Newtoniano.

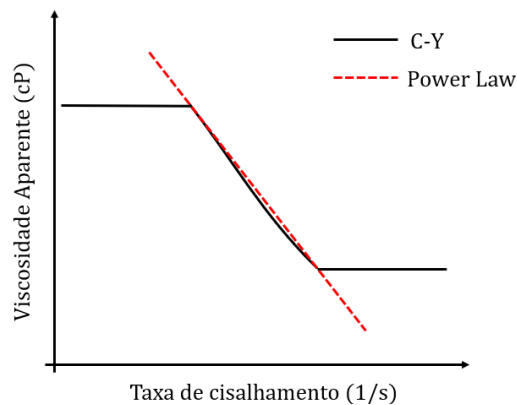
O modelo *power law*, já apresentado neste Módulo, é considerado uma simplificação do modelo Carreau-Yasuda. Ele alternativamente pode ser representado da seguinte forma:

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (97)$$

$$\eta = k \dot{\gamma}^{n-1} \quad (98)$$

Comparando ambos modelos na **Figura 22**, percebe-se que o modelo *power law* não leva em consideração limites para a viscosidade independente da taxa de cisalhamento.

Figura 22 – Comparação entre modelos *power law* e Carreau-Yasuda para um Pseudoplástico.



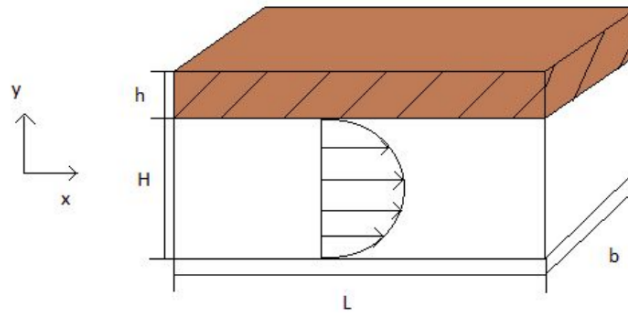
Fonte: Produção do próprio autor

2.9.6 Modelagem Newtoniano

Sabendo que o termo de interação depende da geometria do poro, considere a geometria apresentada na **Figura 23**. A porosidade consiste no espaço vazio da geometria, ou seja, a altura definida como H . Algumas hipóteses simplificadoras podem ser aplicadas:

- Regime permanente
- Escoamento completamente desenvolvido
- Equilíbrio no poro
- Velocidade média no poro igual à velocidade no REV
- Escoamento bidimensional

Figura 23 – Poro placas planas.

Fonte: [Garcia \(2021\)](#)

Assumindo porosidade igual a 1 (domínio fluido) e aplicando as hipóteses:

$$\frac{dp}{dx} = \mu_i \frac{d^2 U_x}{dy^2} = \text{cte} \quad (99)$$

Integrando ao longo de y:

$$\frac{dU_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (100)$$

onde c_1 é constante de integração. Como o perfil de velocidade é parabólico, tem-se que em $y = H/2$:

$$\frac{dU_x}{dy} = 0 \quad (101)$$

O que torna possível determinar a constante de integração:

$$c_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{H}{2} \quad (102)$$

substituindo c_1 :

$$\frac{dU_x}{dy} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{H}{2} - y \right) \quad (103)$$

integrando novamente em y:

$$U_x(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} Hy + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_2 \quad (104)$$

Pela condição de não deslizamento na parede:

$$c_2 = 0 \quad (105)$$

Assim, o perfil de velocidade é dado por:

$$U_x(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y (H - y) \quad (106)$$

Para determinar a velocidade média no poro, integra-se o perfil ao longo de y, ponderando pela distância entre as placas:

$$\bar{U}_x = -\frac{1}{H} \int_0^H \left[\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y (H - y) \right] dy \quad (107)$$

Realizando a integração:

$$\bar{U}_x = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} H^2 \quad (108)$$

Para determinar $\mathbf{M}$, utiliza-se a hipótese de equilíbrio no poro:

$$\mathbf{M} = \phi \nabla p = -\phi \frac{12\mu_i}{H^2} \mathbf{U} \quad (109)$$

A partir das dimensões do poro, define-se que a fração de vazio (porosidade) é dada por:

$$\phi = \frac{H}{H + h} \quad (110)$$

E assumindo caráter dacyneano da velocidade média calculada, a permeabilidade efetiva seria dada por:

$$K_i = \frac{H^3}{12(H + h)} \quad (111)$$

Pode-se então determinar explicitamente a relação entre porosidade e permeabilidade efetiva para este caso específico:

$$\frac{K_i}{\phi} = \frac{H^2}{12} \quad (112)$$

Substituindo na equação [109](#), chega-se à:

$$\mathbf{M} = -\phi^2 \mu \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (113)$$

Considerando um escoamento bifásico de um fluido newtoniano deslocando outro fluido qualquer, uma reestruturação da equação [113](#) se faz necessária. Isto porque a influência do outro fluido no meio passa a ser relevante, então passa-se a utilizar de novos conceitos como:

- Porosidade efetiva: Também chamada de fração de fase (α) na literatura, consiste na fração do fluido em questão existente no poro com o seguinte cálculo $\phi_{eff} = S\phi$;
- Permeabilidade efetiva: É a consideração da movimentação da fase ao incluir a presença da outra fase no REV e tem o seguinte cálculo: $\mathbf{K}_{eff} = k_{rel} \mathbf{K}$ onde k_{rel} é a permeabilidade relativa das fases que varia de 0 a 1.

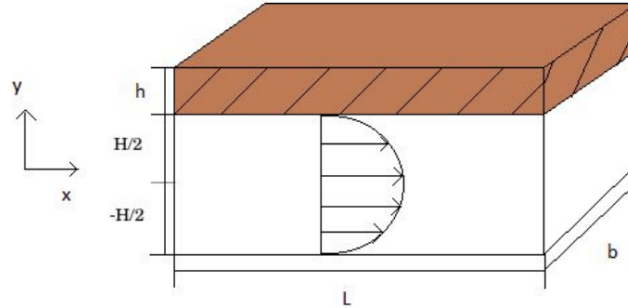
E substituindo esses conceitos na equação [113](#), é possível obter o termo de interação entre fase sólida e fase fluida em escoamento bifásico.

$$\mathbf{M} = -\frac{\alpha^2 \mu}{k_{rel}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (114)$$

2.9.7 Modelagem *power law* por Poros de Placas Planas

Para a modelagem do termo considerando fluido *power law* em escoamento monofásico, será considerado novamente poro de placa plana com as mesmas hipóteses.

Figura 24 – Cenário de placas planas



Fonte: [Garcia \(2021\)](#)

- Regime permanente
- Escoamento completamente desenvolvido
- Equilíbrio no poro
- Velocidade média no poro igual a velocidade no REV
- Escoamento bidimensional

Assumindo porosidade igual a 1 (domínio fluido) e aplicando as hipóteses:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dy} \left[k \left(\frac{dU_x}{dy} \right)^n \right] = \text{cte} \quad (115)$$

Integrando ao longo de y :

$$\left(\frac{dU_x}{dy} \right)^n = \frac{1}{k} \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (116)$$

onde c_1 é constante de integração. Como o perfil de velocidade é parabólico, tem-se que em $y = 0$:

$$\frac{dU_x}{dy} = 0 \quad (117)$$

O que torna possível determinar a constante de integração:

$$c_1 = 0 \quad (118)$$

substituindo c_1 :

$$\frac{dU_x}{dy} = \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} y^{1/n} \quad (119)$$

e integrando novamente em y :

$$U_x(y) = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} y^{\frac{n+1}{n}} + c_2 \quad (120)$$

Pela condição de não deslizamento na parede:

$$c_2 = - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (121)$$

Assim, o perfil de velocidade é dado por:

$$U_x(y) = - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{y}{H/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (122)$$

Para determinar a velocidade média no poro, integra-se o perfil ao longo de y, ponderando pela distância entre as placas:

$$\bar{U}_x = - \frac{1}{H/2} \int_0^{H/2} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{y}{H/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \right] dy \quad (123)$$

Realizando a integração:

$$\bar{U}_x = - \frac{1}{H/2} \left[\frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{H}{2} \left(1 - \frac{n}{2n+1} \right) \right] \right] \quad (124)$$

Após algum algebrismo:

$$\bar{U}_x = - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (125)$$

Como a geometria é a mesma em relação ao caso newtoniano de poro placa plana:

$$\frac{K_i}{\phi} = \frac{H^2}{12} \implies \frac{H}{2} = \left(\frac{3K}{\phi} \right)^{1/2} \quad (126)$$

e portanto a velocidade média no poro será:

$$\bar{U}_x = - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(\frac{3K}{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \quad (127)$$

Extrapolando para o caso tridimensional e pela hipótese de equilíbrio no poro:

$$\mathbf{M} = \phi \nabla p \quad (128)$$

assumindo a velocidade média no poro igual à velocidade de Darcy no REV e manipulando:

$$\mathbf{M} = -\phi k \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\phi \mathbf{K}^{-1}}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \mathbf{U}^n \quad (129)$$

E novamente aqui, considerando um escoamento bifásico de um fluido newtoniano deslocando outro fluido qualquer, uma reestruturação da equação (129) se faz necessária. Isto porque a influência

do outro fluido no meio passa a ser relevante, então passa-se a utilizar dos conceitos de **porosidade efetiva e permeabilidade efetiva**. E substituindo esses conceitos na equação (129), é possível obter o termo de interação entre fase sólida e fase fluida em escoamento bifásico para *power law*. Porém além disso o índice de consistência k será alterado aqui para H para não existir equívocos quanto a permeabilidade relativa k_{rel} .

$$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha \mathbf{K}^{-1}}{3k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \mathbf{U}^n \quad (130)$$

Porém, a equação (130) está matematicamente incoerente por causa dos tensores e vetores em exponenciais. Para corrigir é necessário reestruturar a equação para retirar os exponenciais. Primeiro decompondo o vetor velocidade

$$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha \mathbf{K}^{-1}}{3k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \cdot \mathbf{U}^{\frac{n+1}{2}} \quad (131)$$

Agrupando termos com expoentes iguais

$$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}}{3k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \quad (132)$$

Retirando o produto interno dos parênteses

$$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{3k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} (\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U})^{\frac{n+1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \quad (133)$$

O produto interno entre tensor e vetor resulta em vetor, e decompondo esse vetor

$$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{3k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (134)$$

Lembrando que:

- α : Fração de fase $[-]$;
- H : Índice de consistência do modelo *power law* $[Pa.s^n]$;
- n : Índice de potência do modelo *power law* $[-]$;
- $\mathbf{K}^{-1}$: Inverso do tensor de permeabilidade absoluta $[m^{-2}]$;
- $\mathbf{U}$: Vetor velocidade $[m/s]$.

A dedução foi retirada dos trabalhos de Vignoli (2021), Garcia (2021), Barboza Júnior (2022). Para um detalhamento maior, é necessário uma revisão destes documentos.

Foi apresentado, portanto, expressão para o termo de interação entre fase sólida e fase fluida do modelo de poro com placas planas. A partir dessa expressão é possível, a partir do termo de interação entre fase sólida e fase fluida do newtoniano, encontrar uma equação para a viscosidade aparente.

Para o caso de poro modelado como placas planas, será modificada a equação (134) para chegar em um formato parecido com a equação (114) e ser possível de encontrar uma relação para a viscosidade aparente μ_{nn} .

Isolando a permeabilidade relativa

$$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (135)$$

Decompondo o termo da permeabilidade relativa, multiplicando e dividindo pela fração de fase e por fim reestruturando a expressão

$$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}} \right) \|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (136)$$

$$\mathbf{M} = -\alpha^2 \frac{H}{\alpha} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}} \right) \|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (137)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\overbrace{-\alpha^2 \frac{H}{\alpha} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}}_{k_{rel}}}{k_{rel}} \quad (138)$$

onde o termo em destaque, comparado a equação (114), equivale a viscosidade aparente e portanto

$$\mu_{nn} = \frac{H}{\alpha} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\| \|\mathbf{U}\|}{k_{rel}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (139)$$

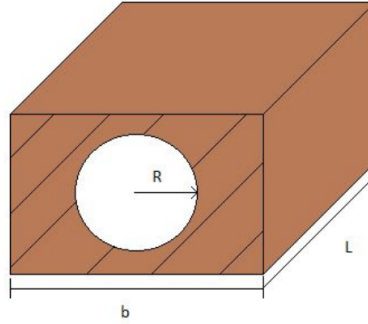
2.9.8 Modelagem *power law* por Poros Cilíndricos

Porém existem outras formas de modelar o termo de interação entre fase sólida e fase fluida, pois este termo depende também da geometria do poro. Considerando a geometria do poro como cilíndrica, conforme [Figura 25](#) e utilizando as mesmas hipóteses simplificadoras:

Hipóteses

- Regime permanente;
- Escoamento completamente desenvolvido;
- Equilíbrio no poro;
- Velocidade média no poro igual à velocidade no REV;
- Escoamento bidimensional.

Figura 25 – Cenário poro cilíndrico.



Fonte: [Barboza Júnior \(2022\)](#)

Aplicando as hipóteses assumidas à equação de balanço de quantidade de movimento (lembrando que H equivale ao índice de consistência do modelo de *power law*):

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r H \left(\frac{du}{dr} \right)^n \right] = cte \quad (140)$$

Integrando ao longo de r :

$$r \left(\frac{du}{dr} \right)^n = \left(\frac{1}{2H} \frac{dp}{dx} \right) r^2 + c_1 \quad (141)$$

Pela simetria do perfil de velocidades em $r = 0$:

$$c_1 = 0 \quad (142)$$

Integrando-se novamente em r :

$$u(r) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2H} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} r^{\frac{n+1}{n}} + c_2 \quad (143)$$

Pela condição de não deslizamento:

$$c_2 = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2H} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} R^{\frac{n+1}{n}} \quad (144)$$

Assim, o perfil de velocidade é dado por:

$$u(r) = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2H} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (145)$$

Integrando ao longo do raio para determinar a velocidade média:

$$\bar{u} = -\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left[\frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2H} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right) \right] 2\pi r dr \quad (146)$$

Realizando a integração:

$$\bar{u} = -\frac{n}{3n+1} \left(\frac{1}{2H} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} R^{\frac{n+1}{n}} \quad (147)$$

Como já apresentado para o caso newtoniano, a relação entre porosidade e permeabilidade para esta geometria é:

$$\frac{K_i}{\phi} = \frac{R^2}{8} \quad (148)$$

E pela hipótese de equilíbrio no poro:

$$\mathbf{M} = -\phi \nabla p \quad (149)$$

Manipulando as equações e substituindo a relação entre porosidade e permeabilidade, chega-se à:

$$\mathbf{M} = -2H\phi \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\phi \mathbf{K}^{-1}}{8} \right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \mathbf{U}^n \quad (150)$$

Considerando novamente um escoamento bifásico de um fluido newtoniano deslocando outro fluido qualquer, uma reestruturação da equação (150) se faz necessária. Isto porque a influência do outro fluido no meio passa a ser relevante, então passa-se a utilizar dos conceitos de **porosidade efetiva** e **permeabilidade efetiva**. E substituindo esses conceitos na equação (150), é possível obter o termo de interação entre fase sólida e fase fluida em escoamento bifásico para *power law* por poro cilíndrico. Uma tabela com todas as equações será apresentada no final da seção para não haver dúvidas.

$$\mathbf{M} = -2H\alpha \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\phi \mathbf{K}^{-1}}{8k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \mathbf{U}^n \quad (151)$$

Como não existe vetor ou tensor em potência é necessário retrabalhar a expressão conforme feito na seção de placas planas de forma a aparecer um produto interno entre tensor e vetor sem quaisquer expoentes.

$$\mathbf{M} = -2\alpha H \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{8} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{U}\|^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (152)$$

De forma análoga feita no tópico anterior 2.9.7, é encontrada uma expressão que equivale a viscosidade aparente considerando poro cilíndrico. Omitindo o procedimento, já que é parecido com o de placas planas, a expressão se torna:

$$\mu_{nn} = \frac{2H}{\alpha} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\alpha}{8} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\| \|\mathbf{U}\|}{k_{rel}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (153)$$

2.9.9 Modelagem *power law* Proposta de Wu (1990)

Um outro modelo encontrado na literatura é uma dedução para meios **isotrópicos** que foi proposta por Wu (1990) que modela diretamente a viscosidade aparente do fluido não newtoniano em escoamento

bifásico. Essa expressão apresentada na equação (154) é função de uma viscosidade efetiva com unidade $Pa.s^n.m^{1-n}$ que apresenta todos os parâmetros referentes ao fluido e ao meio poroso.

$$\mu_{nn} = \mu_{eff} \left(\frac{\|\mathbf{K} \cdot \nabla \Phi_{nn}\| k_{rel}}{\mu_{eff}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (154)$$

$$\mu_{eff} = \frac{H}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n \left(150 k_{rel} \frac{tr(\mathbf{K})}{3} \alpha \right)^{\frac{1-n}{2}} \quad (155)$$

Além disso também é encontrado na literatura uma relação para o gradiente potencial com a velocidade de darcy pela equação (156)

$$\mathbf{U} = - \frac{k_{rel} \mathbf{K} \cdot \nabla \Phi_{nn}}{\mu} \quad (156)$$

onde todos os parâmetros referem-se ao fluido não newtoniano em questão. Substituindo as equação (156) e equação (155) na equação (154) é obtido a expressão a seguir

$$\mu_{nn} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} \frac{H}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n \left(150 k_{rel} \frac{tr(\mathbf{K})}{3} \right)^{\frac{1-n}{2}} \|\mathbf{U}\|^{n-1} \quad (157)$$

onde:

- $\mathbf{K}^{-1}$: Inverso do tensor permeabilidade absoluta em meio isotrópico [m^{-2}];
- μ_{nn} : Viscosidade aparente do fluido não newtoniano [$Pa.s$];
- $\mathbf{U}$: Vetor velocidade do fluido não newtoniano [m/s];
- α : Fração de fase do fluido não newtoniano $[-]$;
- H : Índice de consistência do modelo *power law* [$Pa.s^n$];
- n : Índice de potência do modelo *power law* $[-]$;

É possível encontrar a partir da equação (157) uma expressão que seria equivalente a um termo de interação entre fase sólida e fase fluida. Substituindo a equação (157) na equação (114) e adequando os termos:

$$\mathbf{M} = - \frac{\alpha^{\frac{n+3}{2}} H}{12 k_{rel}} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n \left(150 k_{rel} \frac{tr(\mathbf{K})}{3} \right)^{\frac{1-n}{2}} \|\mathbf{U}\|^{n-1} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (158)$$

A seguir nas Tabela 1 e Tabela 2, serão apresentadas de forma resumida as expressões deduzidas nesta seção

Tabela 1 – Expressões para o termo de interação entre fase sólida e fase fluida para os modelos analisados

Modelos	Termo interação sólido fluido (M)
Newtoniano	$\mathbf{M} = -\frac{\alpha^2 \mu}{k_{rel}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}$
Poros Placas Planas	$\mathbf{M} = -\alpha H \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \ \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\ ^{\frac{n-1}{2}} \ \mathbf{U}\ ^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}$
Poros Cilíndrico	$\mathbf{M} = -2\alpha H \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \left(\frac{\alpha}{8}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{k_{rel}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \ \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\ ^{\frac{n-1}{2}} \ \mathbf{U}\ ^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}$
Proposta de Wu	$\mathbf{M} = -\frac{\alpha^{\frac{n+3}{2}} H}{12k_{rel}} \left(9 + \frac{3}{n}\right)^n \left(150k_{rel} \frac{\text{tr}(\mathbf{K})}{3}\right)^{\frac{1-n}{2}} \ \mathbf{U}\ ^{n-1} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}$

Fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 2 – Expressões para o termo de interação entre fase sólida e fase fluida para os modelos analisados

Modelos	Viscosidade aparente
Newtoniano	constante
Poros Placas Planas	$\mu_{nn} = \frac{H}{\alpha} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\ \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\ \ \mathbf{U}\ }{k_{rel}}\right)^{\frac{n-1}{2}}$
Poros Cilíndrico	$\mu_{nn} = \frac{2H}{\alpha} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \left(\frac{\alpha}{8}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\ \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}\ \ \mathbf{U}\ }{k_{rel}}\right)^{\frac{n-1}{2}}$
Proposta de Wu	$\mu_{nn} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} \frac{H}{12} \left(9 + \frac{3}{n}\right)^n \left(150k_{rel} \frac{\text{tr}(\mathbf{K})}{3}\right)^{\frac{1-n}{2}} \ \mathbf{U}\ ^{n-1}$

Fonte: Produção do Próprio Autor.

2.10 FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL

OpenFOAM é um *software open source* de fluidodinâmica computacional, desenvolvido inicialmente pela *OpenCFD Ltd* em 2004. E desde este ano possui usuários da maioria das áreas de engenharia e ciência, tanto de organizações comerciais quanto acadêmicas. O *OpenFOAM* possui uma ampla gama de recursos para resolver qualquer coisa, desde fluidos complexos, envolvendo reações químicas, turbulência e transferência de calor, até acústica, mecânica dos sólidos, interação fluido-estrutura, eletromagnetismo e até mesmo solução da equação de Black-Scholes para precificar commodities.

É lançado uma versão estável a cada seis meses incluindo desenvolvimentos patrocinados por clientes e contribuições da comunidade. É testado independentemente pelos especialistas da *OpenCFD's*, desenvolvedores parceiros e com apoio de infraestrutura da *ESI*. A garantia de qualidade é baseada em testes rigorosos. O processo de avaliação, verificação e validação de código inclui várias centenas de testes unitários diários, uma bateria de teste é executada semanalmente e uma bateria grande de testes executada antes do lançamento de novas versões. Todos os testes avaliando uso de memória, desempenho do código e escalabilidade.

O *OpenFOAM* é escrito em C++ para fazer simulações CFD, baseado em volumes finitos e possui utilitários para criar malha, manipular malha, pré e pós processamento (GARCIA, 2021)

Como é de código aberto, sua licença permite que novas ferramentas e simuladores sejam desenvolvidos. Todos os resultados deste trabalho foram desenvolvidos no *upstreamFoam*, que é uma

aplicação baseada no *OpenFOAM* que possibilita simulações de poços, reservatórios ou sistemas contendo reservatórios, poços em um mesmo domínio e desenvolvido pela empresa WIKKI Brasil

Como o *OpenFOAM* é open source é permitido desenvolvimentos em paralelo por toda a comunidade. Nos dias atuais, ele está dividido em três vertentes. FOAM-Extend, distribuído pela WIKKI do Reino Unido e pelo professor Hrvoje Jasak. O OpenFOAM distribuído pela OpenCFD Ltd. e OpenFOAM distribuído pela OpenFOAM Foundation Inc (JASAK, 2009; VIGNOLI, 2021)

Nesse capítulo será apresentada a modelagem numérica desse simulador de forma genérica, pois a implementação real é complexa e envolve inúmeras etapas, que não são o escopo desse estudo. Mais informações podem ser encontradas em Dias (2017)

2.10.1 Método dos Volumes Finitos

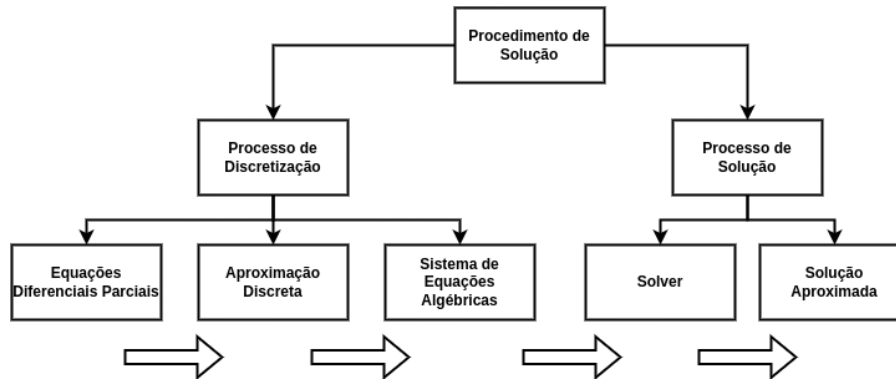
Métodos numéricos como método dos volumes finitos (FVM) são usados para obter uma solução aproximada das equações governantes como as de Navier-Stokes com correspondentes condições iniciais e de contorno. Este em específico FVM foi introduzido na década de 1970 por McDonald (1971) e Maccormack e Paullay (1972)

De acordo com Osses (2016) "uma importante propriedade do FVM é que os princípios de conservação (massa, momentum e energia), que são a base da modelagem matemática para a mecânica do contínuo, por definição, são respeitados pelas equações deduzidas por método de volumes finitos". O método não se limita somente a problemas de mecânica de fluidos, e, de forma geral, envolve os seguintes passos:

- Discretização do espaço em volume de controle;
- Formulação das equações integrais de conservação para cada volume de controle (e quanto mais volumes maiores os custos computacionais);
- Aproximação numérica das integrais que são as discretizações dos termos da equação de transporte relacionada;
- Aproximação dos valores das variáveis nas faces por métodos de interpolação, por exemplo linear;
- Montar o sistema de equações algébricas e buscar a solução para os campos de velocidade e pressão, por exemplo.

O procedimento de obtenção do valor aproximado da solução consiste em algumas etapas apresentadas na Figura 26

Figura 26 – Passos para solução CFD.



Fonte: Kolditz (2002)

2.10.2 Discretizações das Equações de Transporte

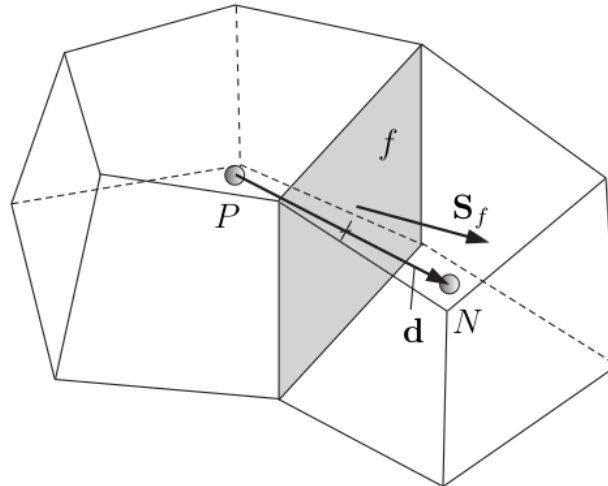
Equações discretizadas convertem equações parciais diferenciais em um conjunto de equações algébricas que são normalmente expressas em matrizes na forma da equação (159)

$$[A][x] = [b] \quad (159)$$

onde $[A]$ é uma matriz quadrada, $[x]$ é o vetor coluna da variável dependente e $[b]$ é de origem. A descrição de $[x]$ e $[b]$ como 'vetores' vem de uma lista de valores definido em locais na geometria, ou seja, em cada célula resultará em uma componente para essas listas e quanto maior a discretização espacial mais custoso computacionalmente uma simulação será.

Para entender as discretizações das equações de transporte primeiro é necessário definir como alguns parâmetros de células em uma discretização espacial, conforme Figura 27. Nessa imagem as letras em maiúsculo P e N significam centroides de células, d é o vetor distância entre essas duas células e pode ser ou não ortogonal com a face f de contato entre elas. Por fim, S_f é o vetor área da face f . Para malhas hexaédricas o vetor d coincide com S_f significando um menor custo computacional por envolver menos termos nas equações discretizadas e quando existem células não hexaédricas então são adicionados termos nas equações para a devida transferência de informação nas faces.

Figura 27 – Parâmetros em uma discretização espacial.



Fonte: [OpenFoam-Foundation](#) (2022)

Será apresentada inicialmente uma equação de transporte geral utilizada no OpenFOAM para explicar as discretizações dos termos.

$$\underbrace{\int_{V_P} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV}_{\text{termo temporal}} + \underbrace{\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dV}_{\text{termo convectivo}} - \underbrace{\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV}_{\text{termo difusivo}} = \underbrace{\int_{V_P} S_\phi(\phi) dV}_{\text{termo fonte}} \quad (160)$$

onde ϕ é a quantidade transportada, podendo ser escalar, vetorial ou tensorial; ρ a massa específica do fluido considerando escoamento monofásico e incompressível; $\mathbf{u}$ vetor velocidade; Γ_ϕ constante de difusão da quantidade ϕ e o subíndice de integral P significa cálculo feito no centroide da célula P da

[Figura 27](#)

E sabendo que a teorema de Gauss é:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} \quad (161)$$

A equação [\(160\)](#) pode ser convertida em

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} (\rho \phi) dV + \oint_{\partial V_P} \underbrace{d\mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{u} \phi)}_{\text{fluxo convectivo}} - \oint_{\partial V_P} \underbrace{d\mathbf{S} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)}_{\text{fluxo difusivo ou termo laplaciano}} = \int_{V_P} S_\phi(\phi) dV \quad (162)$$

E o problema passa a utilizar de algum método para interpolar valores centrados nas células aos centros das faces.

2.10.2.1 Termo Temporal

A discretização da derivada temporal da equação de transporte é feita integrando em todo domínio do volume de controle. Dando um exemplo para esquema de tempo implícito Euler. É um método estável mas apenas com acurácia de primeira ordem no tempo ([OPENFOAM-FOUNDATION, 2022](#)).

Assumindo variação linear da quantidade ϕ em relação ao tempo a discretização é a seguinte:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \right] dt = \frac{(\rho_P \phi_P V)^n - (\rho_P \phi_P V)^o}{\Delta t} \Delta t \quad (163)$$

onde $(\rho_P \phi_P V)^n$ equivale a quantidade no passo atual de tempo e $(\rho_P \phi_P V)^o$ equivale a quantidade no passo de tempo anterior.

2.10.2.2 Termo Convectivo

Pelo teorema de Gauss podemos converter integrais de volume em integrais de superfície. A aproximação feita no final da equação (164) é uma aproximação por meio da regra do ponto médio, que é um método de segunda ordem de acurácia.

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{U})_f \phi_f = \sum_f F \phi_f \quad (164)$$

De acordo com [OpenFoam-Foundation \(2022\)](#), o campo ϕ_f nas faces pode ser avaliado por diferentes esquemas porém em todos os casos apresentados neste trabalho será utilizado diferenças centradas (CD) que é um método de acurácia de segunda ordem definido pela equação (165):

$$\phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N \quad (165)$$

onde $f_x \equiv \overline{fN}/\overline{PN}$ sendo $\overline{fN}$ é a distância entre f e o centro da célula N , e $\overline{PN}$ é a distância entre os centros das células P e N , conforme [Figura 27](#)

2.10.2.3 Termo Gradiente

De acordo com [OpenFoam-Foundation \(2022\)](#), o termo gradiente é explícito que pode ser avaliado de várias maneiras, como por exemplo integração de Gauss ou método dos mínimos quadrados. Em todos os casos deste será utilizado integração de Gauss, definida na equação (166).

$$\int_V \nabla \phi dV = \int_S d\mathbf{S} \phi = \sum_f \mathbf{S}_f \phi_f \quad (166)$$

2.10.2.4 Termo Fonte

Integrando o termo fonte no espaço e utilizando do teorema de Gauss resulta na seguinte equação discretizada.

$$\int_{V_P} S_\phi(\phi) dV = S_c V_P + S_p V_P \phi_P \quad (167)$$

onde S_c é a parte constante do termo fonte e S_p é a parte não linear. Existe certa liberdade sobre como exatamente é linearizado o termo fonte.

2.10.2.5 Termo Laplaciano

Integrando o termo laplaciano no espaço e utilizando o teorema de Gauss:

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\Gamma \nabla \phi) = \sum_f \Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f \quad (168)$$

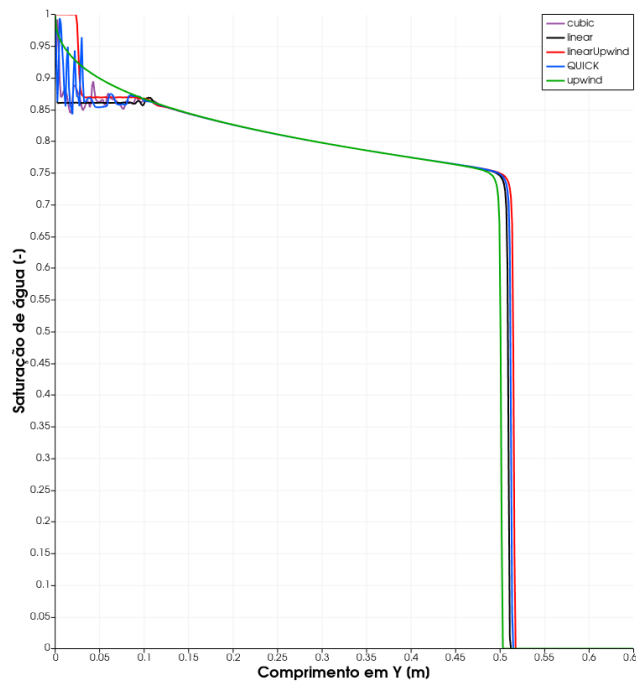
A discretização do gradiente nas faces é implícita quando o vetor de comprimento $\mathbf{d}$ entre o centro da célula de interesse P e o centro de uma célula vizinha N é ortogonal à face plano, *i.e.*, paralelo a $\mathbf{S}_f$:

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |S_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|} \quad (169)$$

No caso de malhas não ortogonais é introduzido um termo explícito adicional que é avaliado pela interpolação de gradientes do centro da célula.

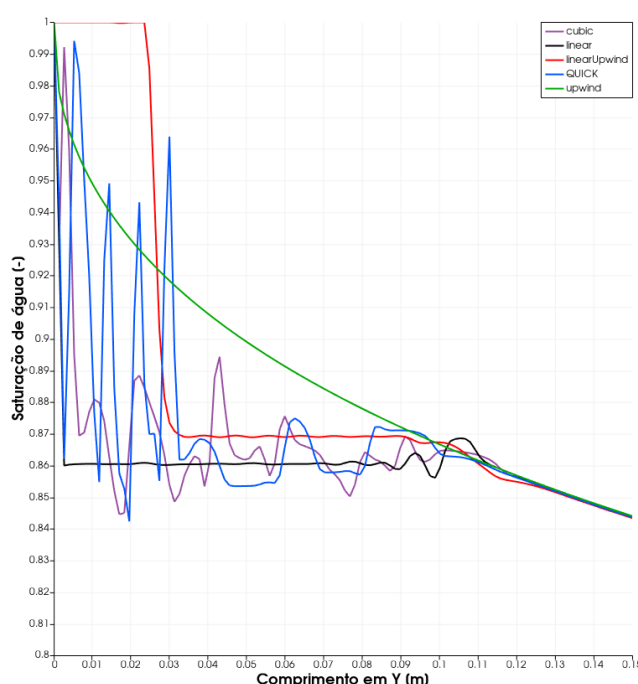
O método de interpolação selecionado aqui é importante e pode causar variações no campo da quantidade escalar na simulação. Foram feitos testes em um domínio Buckley-Leverett apresentados na [Figura 28](#) e ampliado na [Figura 29](#) com o intuito de avaliar o perfil de saturação de água ao modelar a água como fluido não newtoniano *power law*.

Figura 28 – Frente de saturação em caso Buckley-Leverett variando esquema do divergente.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 29 – Ampliação do começo do perfil de saturação em caso Bulckley-Leverett variando esquema do divergente.



Fonte: Produção do próprio autor.

São observados nos gráficos anteriores variações no começo do domínio no perfil de saturação da água modelado como fluido não newtoniano. O resultado com menor oscilação ou resíduo é aquele apresentado em verde sendo *Upwind*.

2.10.3 Controle do Passo de Tempo

O controle do passo de tempo é feito por um número adimensional chamado *Courant*, nomeado pelo matemático Richard Courant. Este controle existe devido ao tempo de avanço do fluido na célula, e por causa disso quanto maior a velocidade do escoamento menor o passo de tempo para compensar e manter a acurácia da simulação (WILLIAMSON JÚNIOR, 1980).

Para um domínio unidimensional de $1m$, um passo de tempo de $5s$ faria com que uma velocidade do fluido constante igual a $1m/s$ divergisse o resultado porque em $5s$ não seria possível ver qualquer avanço do fluido no domínio. Esse limite no qual o passo de tempo pode avançar é controlado pelo número de *Courant*, definido na equação (170) sendo:

$$C = \frac{U \Delta t}{\Delta x} \quad (170)$$

onde U é a velocidade do fluido, Δt é o passo de tempo e Δx é o espaçamento da célula da malha.

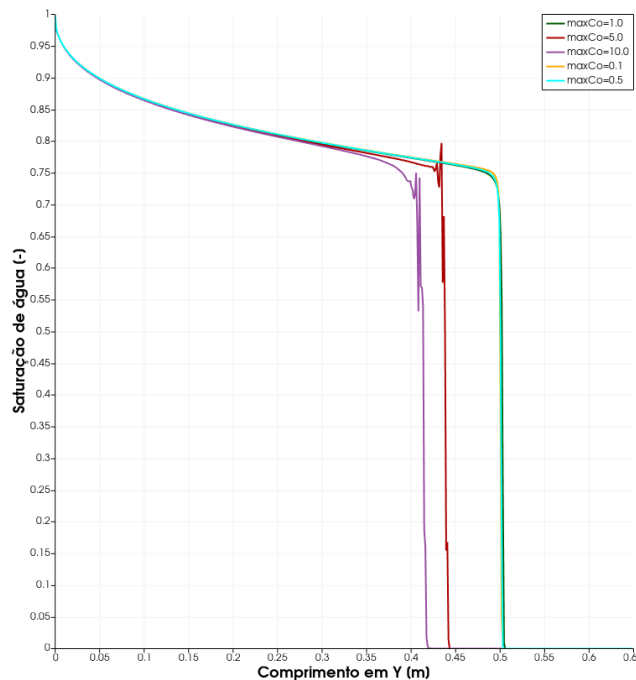
É importante ressaltar que "o número de *Courant* é um dos parâmetros mais importantes em simulações transientes, pois através deste simples valor, se consegue relacionar a velocidade do escoamento com a resolução da malha. Na prática é recomendável número de *Courant* menor ou igual a 1" (WILLIAMSON JÚNIOR, 1980).

Diante disso, o *OpenFOAM* disponibiliza a função *adjustableRunTime* para alguns solucionadores. Quando não há esta opção, dependendo do solver, é possível modificar o código do *OpenFOAM* para

se acrescentar este controle do número de *Courant*. Esta palavra-chave permite que o *OpenFOAM* ajuste o Δt a fim de que o número de *Courant* não ultrapasse o valor de *MaxCo*.

Nos testes que serão apresentados a posteriori, foram simulados com número de *Courant* máximo igual a 0.8, que significa na prática que onde houver a maior velocidade na malha, a informação não ultrapassará um volume finito, mantendo a igualdade de *Courant* igual a 0.8. Caso este valor ultrapassar 1, a solução pode divergir. Pela equação (170), quanto mais se refina uma malha, mais se deve diminuir o Δt . Testes foram feitos e apresentados na Figura 30 mostrando a variação do perfil de saturação da água modelada como fluido não newtoniano em um escoamento bifásico em um caso Buckley-Leverett variando o parâmetro *maxCo*, e de acordo com a quanto maior o número de *Courant*, ou seja quanto maior o avanço que a informação pode ter, maiores são as oscilações nos resultados garantindo imprecisões numéricas. Quanto menor o número de *Courant* mais conservador o resultado será, ao custo de demandar mais tempo computacional.

Figura 30 – Perfis de saturação mostrando a variação do *maxCo* nas simulações em Buckley-Leverett.



Fonte: Produção do próprio autor.

2.10.4 Algoritmos do Acoplamento Pressão-Velocidade

É dito acoplamento pressão-velocidade pela dependência destes campos nas equações de balanço de quantidade de massa e momento. A forma semi-discretizada das equações de Navier-Stokes envolve deixar o gradiente da pressão e discretizar todos os outros termos, apresentados 2.10.2. Essas equações discretizadas geram termos que entram na diagonal principal do sistema linear e termos que entram no restante da matriz. Portanto, a forma semi-discretizada de Navier-Stokes é a seguinte

$$a_P \mathbf{U}_P + \sum_N a_N \mathbf{U}_N = -\nabla p + \mathbf{b}^0 \quad (171)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
a_P &= a_P^t + a_P^c + a_P^d \\
a_N &= a_N^c + a_N^d \\
\mathbf{b}^0 &= \mathbf{b}^t + \mathbf{b}^c + \mathbf{b}^d
\end{aligned} \tag{172}$$

onde a_P e a_N são os coeficientes da linha P , respectivamente na diagonal e na coluna N da matriz de quantidade de movimento; $\mathbf{U}_P$ é o vetor velocidade na célula P ; $\mathbf{U}_N$ é o vetor velocidade na célula N ; p é gradiente da velocidade; $\mathbf{b}^0$ é a contribuição do sistema linear que não estão na diagonal principal e os sobrescritos t , c e d são as componentes da diagonal (a) e não-diagonal (b) que são obtidas após discretização dos termos temporal, convectivo e difuso, respectivamente. Para manter a compatibilidade com a notação do *OpenFOAM* apresentada no guia, a equação (171) pode ser reescrita como

$$a_P \mathbf{U}_P = \mathbf{H} - \nabla p \tag{173}$$

onde

$$\mathbf{H} = - \sum_N a_N \mathbf{U}_N + \mathbf{b}^0 \tag{174}$$

O problema acoplamento $p - U$ consiste em deduzir uma equação cuja solução fornece um campo de pressão que quando inserido na quantidade de movimento resulte em um campo de velocidade que satisfaça a continuidade.

Lembrando que a equação de continuidade pela equação (175), é isolado o vetor velocidade da equação (173) e substituído na equação (175) gerando assim a equação para pressão conforme equação (176)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{175}$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{a_P} \nabla p \right] = \nabla \cdot \left[\frac{1}{a_P} \mathbf{H}(\mathbf{u}) \right] \tag{176}$$

2.10.4.1 Cálculo do Fluxo Conservativo

Observando a forma discreta da equação de continuidade

$$\oint_{V_P} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \sum_f \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{u} = \sum_f F \tag{177}$$

onde F é o fluxo na face $F = \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{u}_f$

Para que o fluxo na face seja conservativo, o mesmo deve ser calculado a partir da solução (p) da equação (176) da pressão. Substituindo a expressão de $\mathbf{u}$ na equação do fluxo resulta:

$$F = \left[\frac{\mathbf{s}_f \cdot \mathbf{H}(\mathbf{u})}{a_P} \right]_f - \left[\frac{\mathbf{s}_f \cdot \nabla p}{a_P} \right]_f \tag{178}$$

os dois termos ao lado direito da equação (178) são avaliados na face de todas as células.

A seguir serão apresentados três algoritmos que são utilizados para encontrar a solução deste acoplamento pressão-velocidade (e outros como temperatura e concentração). As informações a seguir foram obtidas do minicurso "Acoplamento Pressão Velocidade no OpenFOAM" ministrado por Antonio de O. Samel Moraes (WIKKI-BRASIL, 2021).

2.10.4.2 Algoritmo SIMPLE

SIMPLE significa *Semi-Implicit Algorithm for Pressure-Linked Equations* que:

1. Estimar o campo de pressão p^* , componente esta não física;
2. Resolver a equação de quantidade de movimento usando a pressão do passo de tempo anterior. Este passo é chamado *momentum predictor*

$$a_P^u \mathbf{u}_P = (\mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p^*) \quad (179)$$

3. Calcular nova pressão baseado no campo de velocidade. Este passo é chamado de *pressure correction*

$$\nabla \cdot [(a_P^u)^{-1} \nabla p] = \nabla \cdot [(a_P^u)^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{u})] \quad (180)$$

4. Baseado na solução acima, calcular o fluxo conservativo F

$$F = [(a_P^u)^{-1} \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{H}(\mathbf{u})]_f - [a_P^{-1} \mathbf{s} \cdot \nabla p]_f \quad (181)$$

5. Utilizar de fatores de relaxamento explícito para pressão e implícito para velocidade
6. Repita até a convergência

O algoritmo SIMPLE produz uma série de correções de $\mathbf{u}$ e p . Sem o passo 5 o algoritmo diverge. Esta divergência se deve ao fato de que a correção na pressão considera a mesma constituída por uma componente não-física e a equação da pressão força que o fluxo discreto (que contém informação desse campo não físico) seja conservativo, causando instabilidade numérica (PATANKAR; SPALDING, 1972).

De modo a obter a convergência são utilizados os fatores de relaxação da etapa 5, sendo eles

$$p^{**} = p^* + \alpha_P (p - p^*) \quad (182)$$

$$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^* + \alpha_U (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (183)$$

onde p e $\mathbf{u}$ são soluções das equações da pressão e do momento, $\mathbf{u}^*$ e p^* representam uma série de aproximações da pressão e da velocidade advindas de iterações prévias. Na prática relaxação do momento é implícita e da pressão é explícita

$$\frac{a_P^u}{\alpha_U} \mathbf{u}_P^{**} = \mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p^* + \frac{1 - \alpha_U}{\alpha_U} a_P^u \mathbf{u}_P^* \quad (184)$$

2.10.4.3 Algoritmo PISO

A lógica do algoritmo PISO envolve:

- Sistema de pressão velocidade contém 2 termos de acoplamento complexos: termo de convecção não-linear com acoplamento u-u e acoplamento linear pressão-velocidade
- Para baixos número de *Courant*, o termo linear de acoplamento pressão-velocidade é muito maior que o termo não-linear
- É então possível repetir um certo número de *pressure correctors* sem precisar atualizar a equação do momento discretizada (usando novos fluxos)
- Neste caso, o primeiro *pressure correctors* irá criar um campo de velocidade conservativo, enquanto que o segundo e seguintes irão determinar a distribuição da pressão.

Dado que múltiplos *pressure correctors* são usados para uma única equação de momento, não é mais necessário usar o fator de relaxação para pressão. Para simulações estacionárias, o sistema é estabilizado pela relaxação do momento. O inconveniente é que a derivação do PISO se baseia na hipótese que a resolução da equação do momento pode ser suspensa enquanto uma série de *pressure correctors* é feita, o que é verificado somente para pequenos passos de tempo e portanto adequados para simulações transientes.

A sequência de operações do PISO é a seguinte

1. Usar o campo de pressão disponível p^* do último corrector ou passo de tempo
2. Resolver a equação do momento usando a pressão do item anterior. Esta operação é chamada de *momentum predictor*

$$a_P^u \mathbf{u}_P = (\mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p^*) \quad (185)$$

3. Calcular a nova pressão baseada no campo de velocidade. Esta etapa é chamada de *pressure correction*

$$\nabla \cdot [(a_P^u)^{-1} \nabla p] = \nabla \cdot [(a_P^u)^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{u})] \quad (186)$$

4. Baseando-se na solução da pressão, calcular o fluxo da face F

$$F = (a_P^u)^{-1} \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{H}(\mathbf{u}) - a_N^p (p_N - p_P) \quad (187)$$

5. Atualizar a velocidade no centro da célula com os coeficientes de momento obtidos

$$\mathbf{u}_P = (a_P^u)^{-1} (\mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p^*) \quad (188)$$

6. Retornar para *pressure correction* se a convergência não foi alcançada dentro do passo de tempo
7. Para um novo passo de tempo, começar do início.

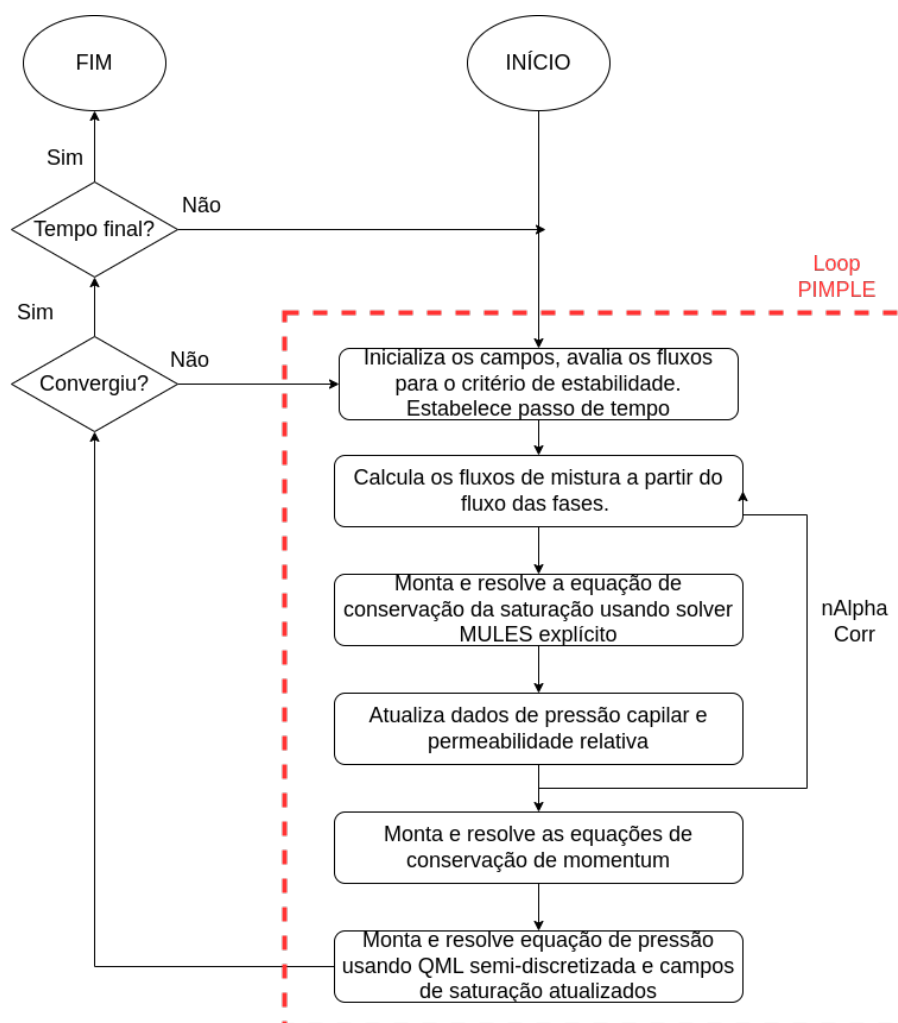
2.10.4.4 Algoritmo PIMPLE

De forma geral a lógica do PIMPLE é uma utilização ao mesmo tempo de SIMPLE e PISO. Sem utilizar relaxação pode ser transformado no PISO, mas não é possível operar no modo SIMPLE

É usado para simulações transientes e estacionárias, no último caso adotando abordagem pseudo-transiente. Esta abordagem tem como ideia chave tirar vantagem da discretização implícita e incondicionalmente estável do operador transiente, que sempre aumenta a dominância diagonal da matriz de coeficientes (garantindo estabilidade numérica). Quando não é importante a acurácia temporal, é possível obter estabilidade na solução transiente com elevados passos de tempo e assim alcançar mais rapidamente o estado estacionário (OPENFOAM-FOUNDATION, 2022).

A diferença com o PISO envolve as relaxações explícitas da pressão entre as correções de pressão e relaxações implícitas do *momentum predictor* entre iterações externas do *loop* PISO, ambas dentro do passo de tempo. Na Figura 31 é apresentado o fluxograma de solução utilizado no simulador *upstreamFoam*

Figura 31 – Fluxograma de solução do simulador.



Fonte: Produção do próprio autor.

De acordo com o fluxograma, existe uma inicialização dos campos das propriedades utilizadas, são avaliados os fluxos para critério de estabilidade (*Courant*) e então assim é estabelecido o passo de tempo. Ao iniciar o passo de tempo o *loop* do PIMPLE começa. São calculados os fluxos de mistura a partir do fluxo das fases, com essas informações é montada e resolvido a equação de conservação da saturação usando solver MULES explícito para solucionar e evitar problema de *boundness* e encontrar os campos (S). São atualizados os dados de pressão capilar e os campos de permeabilidade relativa com os modelos assim pré estabelecidos, e é resolvida a equação de conservação de momentum, atualizando os campos de saturação. Se o resultado obtido for menor ao pré estabelecido como convergência, o *loop* PIMPLE encerra e é avançado o passo de tempo de acordo com os fluxos e de acordo com o critério de estabilidade. Esse processo é repetido até chegar no tempo final da simulação.

3 ESTUDO DE CASO

Serão utilizados os casos Buckley-Leverett e plugue 3D para testes e validações neste trabalho. Aqui estão listados os parâmetros de configuração do OpenFOAM, como discretização temporal/espacial pela Tabela 3, método de solução dos sistemas lineares Tabela 5 e configuração do PIMPLE Tabela 4. Para ambos os casos que serão descritos, as discretizações temporal/espacial e métodos de interpolações são iguais, diferenciando apenas as condições de contorno.

Tabela 3 – Discretização dos Operadores Matemáticos.

Operador	Método
Derivada Temporal	Euler
Operador Gradiente Explícito	Gauss linear
Operador Divergente (Velocidade)	Gauss upwind
Operador Divergente (Fração de fase)	Gauss linear
Operador Laplaciano	GaussV linear corrected
Operador de Interpolação (Fração de fase)	upwind phi
Operador de Interpolação (Saturação)	fixedBlended 0.8 Minmod phi upwind phi
Operador Gradiente Implícito	corrected

Fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 4 – Parâmetros do algoritmo para acoplamento pressão-velocidade.

Parâmetro	Atribuição
Acoplamento p-U	PIMPLE
nCorrectors	2
nOuterCorrectors	10
nNonOrthogonalCorrectors	0

Fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 5 – Parâmetros do algoritmo para solução de sistemas lineares.

Parâmetro	Atribuição
Solver linear para p_rgh	PCG
preconditioner	GAMG
smoother	DIC
tolerance	1e-8
relTol	1e-4
Solver linear para alpha	diagonal
nAlphaCorr	4
nAlphaSubCycles	4
tolerance	1e-8
maxIter	1000

Fonte: Produção do Próprio Autor.

Além desses parâmetros, as propriedades dos fluidos utilizadas para ambos os casos também são iguais e apresentados na Tabela 6

Tabela 6 – Características dos fluidos.

Propriedade	fluido injetado	fluido deslocado
Massa específica ρ_0 [kg/m^3]	1000	800
Viscosidade dinâmica [$Pa.s$]	Do modelo <i>power law</i>	0.006
Expoente do modelo de Brooks & Corey n_{krel}	3	3
Limitação do modelo de Brooks & Corey k_{relMax}	0.85	0.85
Pressão de referência [Pa]	0	0

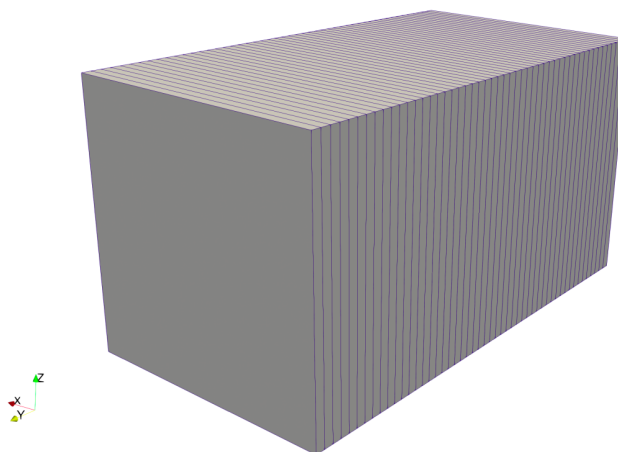
Fonte: Produção do Próprio Autor.

3.1 CASO BUCKLEY-LEVERETT

O caso Buckley-Leverett é o mais simples matematicamente para simulação de deslocamento de fluidos em meios porosos com o intuito de avaliar a frente de saturação do fluido injetado, além de ter solução analítica sendo importante para a etapa de verificação da implementação. Em outras palavras, este modelo é usado para escoamentos bifásicos onde água desloca óleo, fluidos incompressíveis, regime permanente, meio poroso e fluxo unidimensional (BUCKLEY; LEVERETT, 1942).

Na Figura 32 é apresentada a malha deste caso em questão onde o fluxo unidimensional é no sentido Y negativo, o patch nomeado como inlet é a face no plano XZ em Y positivo, o patch nomeado como outlet é a face no plano XZ em Y negativo e o patch nomeado como frontAnadBack são todas as outras faces laterais deste paralelepípedo.

Figura 32 – Malha caso Buckley-Leverett.



Fonte: Produção do próprio autor.

Assim como apresentado na Figura 32, tem área de seção transversal de $(0.035 \times 0.035) m^2$ e comprimento de $0.065 m$. A discretização espacial envolve apenas 1 célula nas direções X e Z e 50 células na direção Y. O blockMesh utilizado para a geração da malha está disposto no Apêndice X.

Foram utilizadas diferentes condições de contorno como Dirichlet (de valor fixo) e Neumann (de gradiente fixo). O caso Buckley-Leverett é unidimensional e por este fato são definidos patches na malha com a condição *empty* significando que as equações não serão resolvidas nas direções normais a estes patches. Na Tabela Figura 43 são apresentadas as condições de contorno utilizadas.

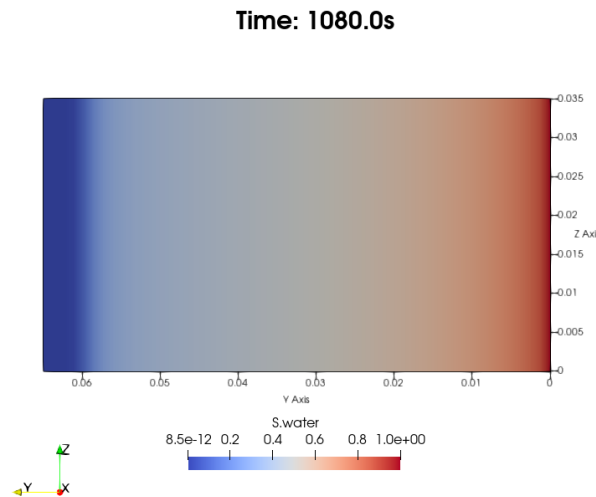
Tabela 7 – Condições de Contorno para o caso Buckley-Leverett.

Variável	internalField	Inlet	Outlet
<i>alpha.oil</i>	uniform 0.2	fixedValue 0	zeroGradient
<i>alpha.water</i>	uniform 0	fixedValue 0.2	zeroGradient
<i>alpha.rock</i>	uniform 0.8	fixedValue 0.8	zeroGradient
<i>invK.rock0</i>	uniform 1.0132739e+12	zeroGradient	zeroGradient
<i>p_rgh</i>	uniform 0	fixedValue 0	zeroGradient
<i>p</i>	uniform 0	calculated 0	calculated 0
<i>U.oil</i>	uniform (0,0,0)	fixedValue (0,0,0)	fluxCorrectedVelocity (0,0,0)
<i>U.water</i>	uniform (0,0,0)	flowRateInletVelocity 2e-7	fluxCorrectedVelocity (0,0,0)

Fonte: Produção do Próprio Autor.

Tomando como exemplo um caso com taxa de injeção de $2\text{cm}^3/\text{min}$, porosidade homogênea $\phi = 0.2$ e permeabilidade absoluta isotrópica e homogênea $\mathbf{K} = [1000, 0, 0, 0, 1000, 0, 0, 0, 1000]\text{mD}$, a [Figura 33](#) mostra a frente de saturação de água no tempo 1080s.

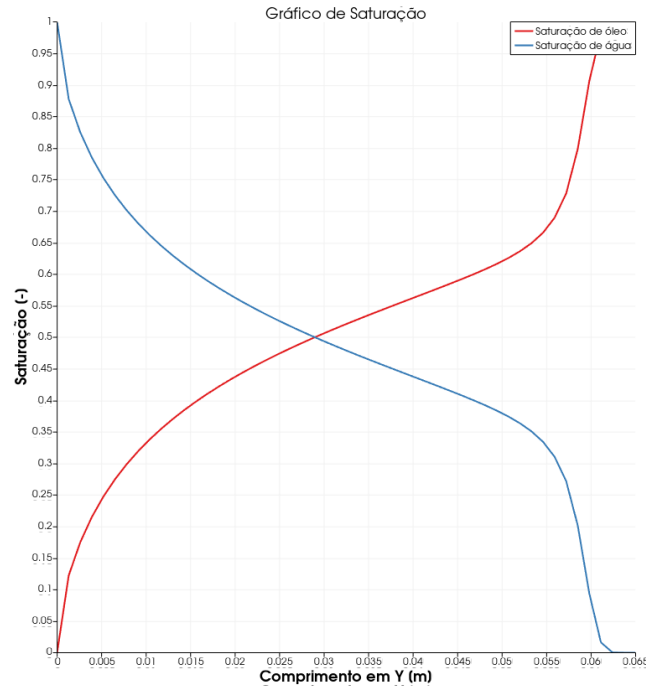
Figura 33 – Campo de saturação de água.



Fonte: Produção do próprio autor.

Utilizando o paraview na versão 5.10.0 é obtido a curva da frente de saturação do sentido inlet para outlet, ou seja mostrando a variação espacial da saturação de água e de óleo e apresentado na [Figura 34](#).

Figura 34 – Gráfico do avanço da frente de saturação.

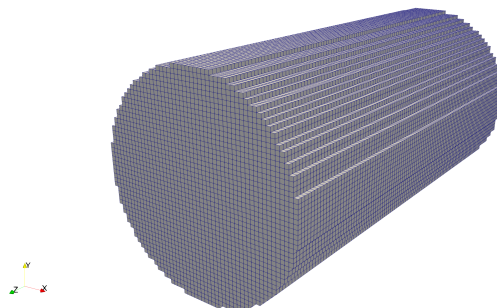


Fonte: Produção do próprio autor.

3.2 CASO PLUGUE 3D

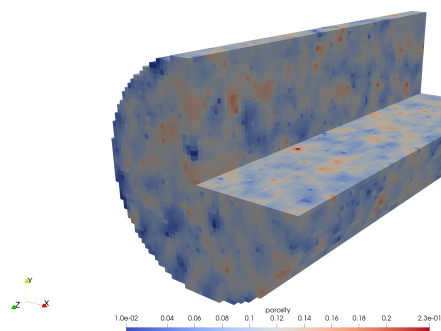
O caso plugue 3D envolve um domínio cilíndrico irregular composto por volumes hexaédricos de acordo com a [Figura 35](#), com porosidade heterogênea apresentada na [Figura 36](#), permeabilidade absoluta heterogênea e anisotrópica apresentada na [Figura 37](#) cujo campo foi calculado utilizando o campo de porosidade no modelo de Winland [\[2.5\]](#), taxa de injeção no inlet de $Q = 1\text{cm}^3/\text{min}$, área da seção transversal $A = 0.0025\text{m}^2$, comprimento $L = 0.103\text{m}$ e 203528 volumes hexaédricos. Os resultados abaixo são apenas exemplos, na seção serão apresentados resultados com variações de alguns parâmetros da simulação, principalmente do modelo não newtoniano *power law*.

Figura 35 – Discretização espacial do caso plugue 3D.



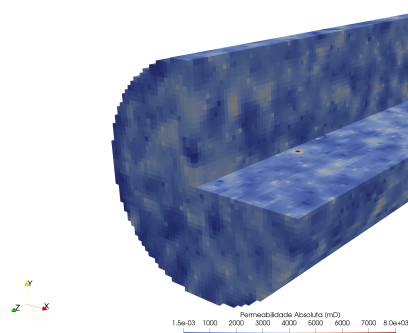
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 36 – Campo de porosidade do plugue 3D.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 37 – Campo de permeabilidade absoluta em miliDarcy do plugue 3D.



Fonte: Produção do próprio autor.

Em relação aos campos iniciais, o plugue 3D apresenta domínio totalmente saturado de óleo com injeção constante do fluido modelado como não newtoniano. Além disso apresenta saturação residual de 35%, ou seja, do espaço livre para escoar (desconsiderando a rocha) existe 35% de espaço onde ocorre adsorção do fluido e portanto somente 65% livre para o escoamento. No simulador a saturação residual é tratada como fase estacionária e uniforme em todo o domínio, mas estudos sugerem relação diretamente proporcional entre saturação residual e número de capilaridade (Ca) (WOLF; SIEBERT; SURMAS, 2020).

Foram utilizadas diferentes condições de contorno como Dirichlet (de valor fixo) e Neumann (de gradiente fixo). O caso plugue é tridimensional, heterogêneo e anisotrópico. Na Tabela 8 são apresentadas as condições de contorno utilizadas.

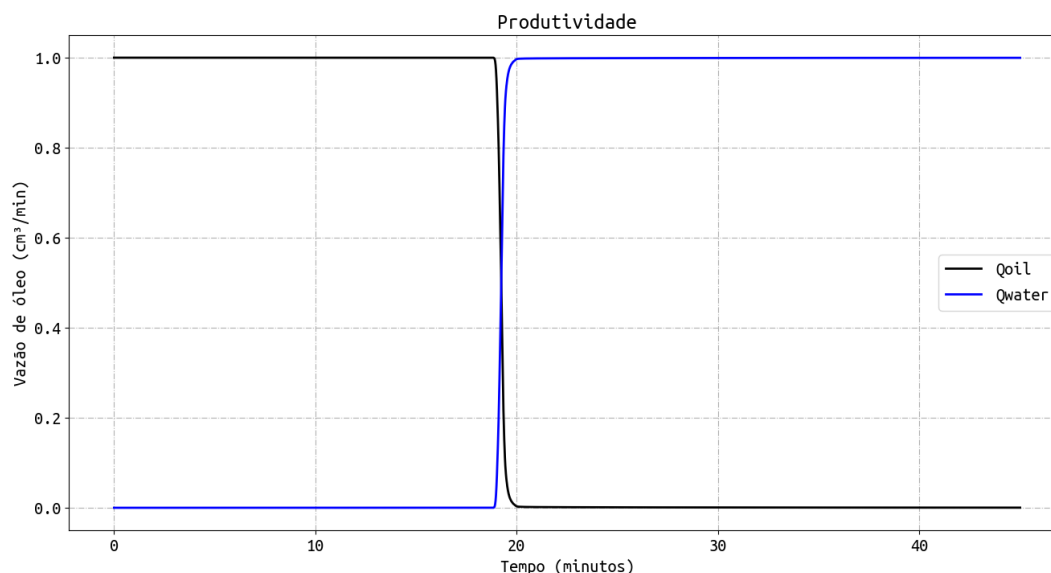
Tabela 8 – Condições de Contorno para o caso plugue 3D.

Variável	wall	Inlet	Outlet
<i>alpha.oil</i>	zeroGradient	fixedValue 0	zeroGradient
<i>alpha.water</i>	zeroGradient	fixedValue 1.0	zeroGradient
<i>alpha.rock</i>	zeroGradient	fixedValue 0	zeroGradient
<i>invK.rock0</i>	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
<i>p_rgh</i>	fixedFluxPressure 0	fixedFluxPressure 0	fixedValue 0
<i>p</i>	calculated 0	calculated 0	calculated
<i>U.oil</i>	slip	fixedValue (0,0,0)	fluxCorrectedVelocity (0,0,0)
<i>U.water</i>	slip	flowRateInletVelocity 1.66667e-08	fluxCorrectedVelocity (0,0,0)

Fonte: Produção do Próprio Autor.

Para o caso plugue 3D não faz sentido apresentar a curva de saturação de água ou óleo pois esta varia de ponto a ponto selecionado (campo heterogêneo). O mais adequado seria apresentar gráficos como da [Figura 38](#) que apresenta produtividade de óleo ou até mesmo fator de recuperação que é a razão da quantidade de óleo retirado do plugue e volume total de óleo contido no plugue inicialmente.

Figura 38 – Produtividade de óleo em função do tempo.



Fonte: Produção do próprio autor.

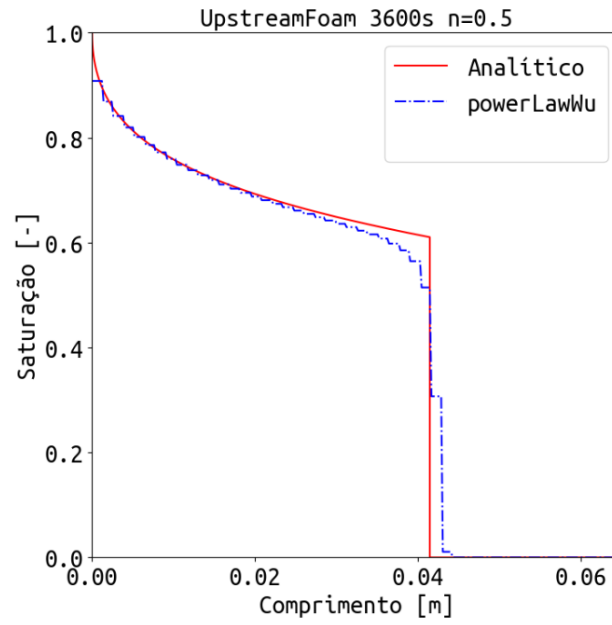
Na próxima seção serão apresentados resultados e análises em relação ao fator de recuperação (RF) que é a razão entre o volume de óleo deslocado e o volume poroso do plugue, em um tempo específico ou seja, $RF = 100 * V_d / PV$, onde o tempo da análise de RF é o tempo necessário para a injeção de 1PV, ou seja, para injetar no domínio o volume fluido equivalente ao volume poroso do plugue.

3.3 CONVERGÊNCIA DE MALHA

Nesta seção serão apresentados alguns resultados mostrando o impacto da discretização espacial no resultado das simulações. Quanto maior o número de volumes de controle maior o custo computacional porém a solução obtida é mais precisa, e quanto menor o número de volumes de controle menor o custo computacional para resolver o sistema linear porém a acurácia reduz significativamente.

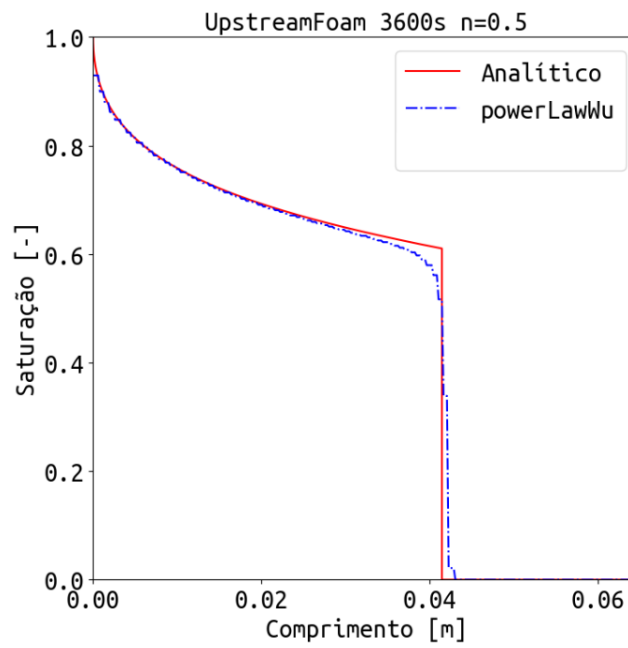
Nas [Figura 39](#), [Figura 40](#), [Figura 41](#) e [Figura 42](#) são apresentados resultados do caso Buckley-Leverett, descrito anteriormente, com o valor do índice de potência $n = 0.5$ e consistência $H = 0.01$. A diferença entre os casos está no número de elementos da malha.

Figura 39 – Malha Buckley-Leverett com 50 elementos.



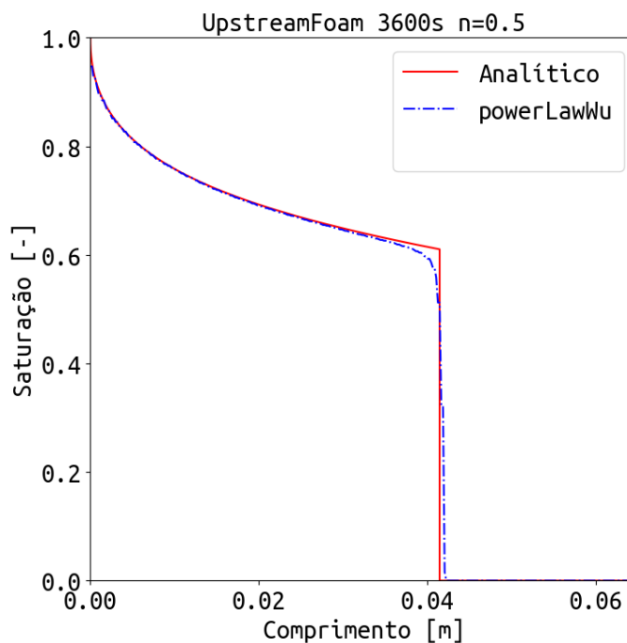
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 40 – Malha Buckley-Leverett com 100 elementos.



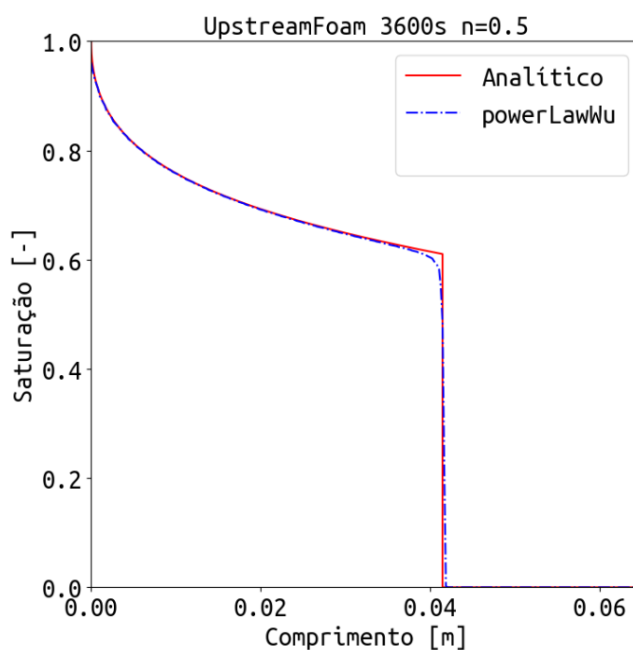
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 41 – Malha Buckley-Leverett com 200 elementos.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 42 – Malha Buckley-Leverett com 400 elementos.



Fonte: Produção do próprio autor.

Em todas as figuras são apresentadas as frentes de saturação do fluido injetado não newtoniano comparado com a solução analítica de Buckley-Leverett. Percebe-se um aumento da acurácia para o número de células igual a 400, e esse resultado tende a ser mais acurado quanto maior o número de volumes de controle.

Porém a convergência de malha é feita a partir de uma análise qualitativa do erro com a solução analítica ou quantitativa, e no caso da segunda opção pode ser feito um *script* para rodar diferentes

casos aumentando o número de células e verificando se o erro RMSE (Root Mean Squared Error), por exemplo, está dentro de um valor pré estabelecido.

3.4 RESULTADOS E VERIFICAÇÕES

Serão apresentados nesta seção resultados de casos diferentes evoluindo em complexidade:

- Buckley-Leverett: Campos homogêneos, isotrópicos, unidimensional em escala de plugue. Esse caso tem solução analítica encontrado na literatura e foi utilizado como base para validação dos modelos implementados. Além disso, serão apresentados resultados preliminares de campos de viscosidade aparente não newtoniano;
- Plugue 3D: Amostras sintéticas com campos heterogêneos, isotrópicos, tridimensional em escala de plugue. Após validados os modelos, são realizadas simulações de robustez para verificar a solução ao utilizar campos heterogêneos e em grandes quantidades de volumes de controle. Aqui serão apresentados os campos de viscosidade aparente juntamente com análises, e resultados de sensibilidade em relação aos parâmetros *power law*. Para finalizar o caso, serão apresentados resultados utilizando polímeros reais de diferentes concentrações do FP3630 encontrado na literatura, mostrando o aumento no fator de recuperação quando comparado à injeção de água;
- Reservatório: Caso simplificado em escala de reservatório com campos homogêneos, isotrópicos e tridimensional. O objetivo desse caso é apresentar resultados parciais de como seria o comportamento do FP3630 em escala de reservatório. Em todo estudo feito até o momento foi considerado escala de plugue com simplificações no desenvolvimento do modelo, então sem um estudo mais aprofundado não é possível garantir representatividade do escoamento em escala de reservatório.

3.4.1 Resultados Buckley-Leverett

Para um deslocamento horizontal de fluido newtoniano em um meio poroso, baseado na solução de Buckley-Leverett, a vazão volumétrica não tem efeito na eficiência do deslocamento. Quando um fluido não newtoniano é envolvido, entretanto, mudanças nas vazões volumétricas ocasionam mudanças na velocidade nos poros, que por sua vez afetarão a viscosidade aparente da fase não newtoniana e nas curvas de vazões fracionadas, impactando na eficiência do deslocamento.

O exemplo de interesse é um caso de escoamento unidimensional, bifásico com ambas fases incompressíveis, em um meio poroso homogêneo, isotrópico, horizontal com valor unitário da área de seção transversal. Uma injeção constante de fluido *power law* é feito no inlet ($x = 0$) no tempo $t = 0$. As propriedades da rocha e fluidos são dados na Tabela 9. Para o processo de deslocamento com esse tipo de fluido shear-thinning (com $n < 1$), quanto menor a vazão volumétrica maior será a eficiência do deslocamento, por causa do aumento da viscosidade do fluido não newtoniano.

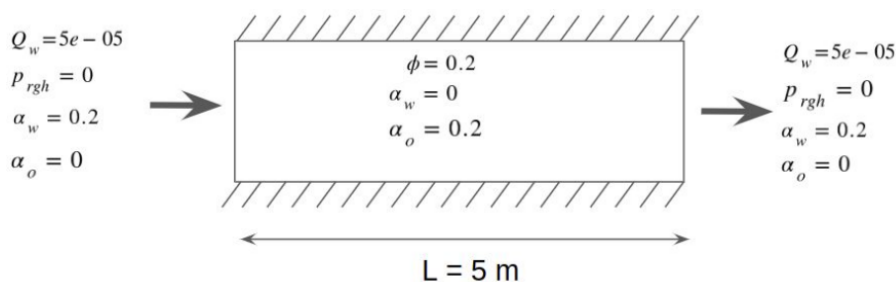
Tabela 9 – Tabela de propriedades da rocha e fluidos

Parâmetros	Valor	Unidade
Porosidade, ϕ	0.20	[-]
Permeabilidade absoluta, K	9.869e-13	[m ²]
Área da seção transversal, A	1	[m ²]
Comprimento da formação, L	5	[m]
Taxa de injeção, q_t	5.0e-5	[m ³ /s]
Tempo de injeção, t	36000	[s]
Viscosidade do fluido newtoniano, μ_{ne}	0.006	[Pa.s]
Índice de potência (lista), n	[0.5, 1.0, 1.5]	[-]
Índice de consistência, H	[0.1, 0.01, 0.001]	[Pa.s ⁿ]
Saturação residual do fluido newtoniano, $S_{ne,ir}$	0	[-]
Saturação residual do fluido não newtoniano, $S_{nn,ir}$	0	[-]
Máxima permeabilidade relativa newtoniana, $k_{rne,max}$	0.85	[-]
Máxima permeabilidade relativa não newtoniana, $k_{rnn,max}$	0.85	[-]
Índice de potência da permeabilidade relativa, n_{ne}	3.0	[-]
Índice de potência da permeabilidade relativa, n_{nn}	3.0	[-]
Massa específica do fluido newtoniano, ρ_{ne}	1000	[kg/m ³]
Massa específica do fluido não newtoniano, ρ_{nn}	800	[kg/m ³]

Fonte: Produção do Próprio Autor.

No apêndice C de Wu (1990) existe um script de solução analítica de deslocamento de fluido newtoniano por um fluido não newtoniano em caso do tipo Buckley-Leverett. Este script inicialmente foi traduzido para python para que com script de automação fosse possível comparar os resultados da implementação no *upstreamFoam* com o analítico de Wu. As condições de contorno são apresentadas na Figura 43.

Figura 43 – Condições de contorno utilizados.



Fonte: Produção do próprio autor.

Foram comparados os dois modelos *power law* implementados no *upstreamFOAM* com a solução analítica presente na literatura de Wu. Os testes envolveram:

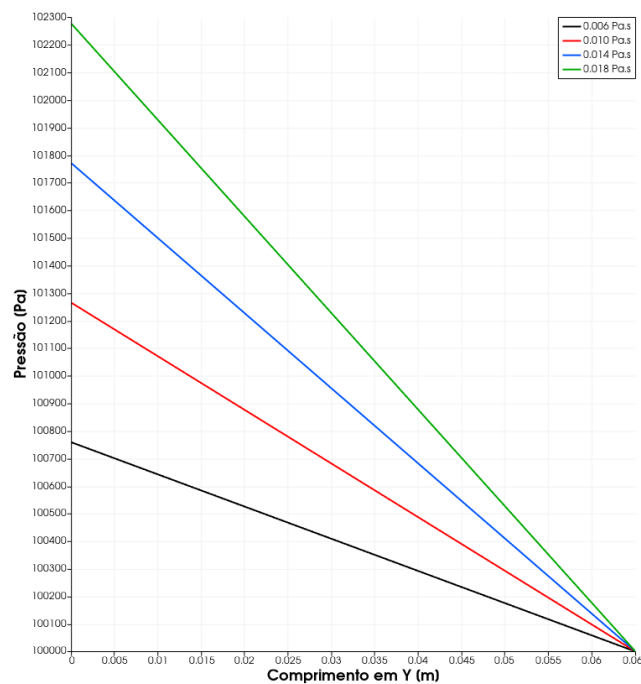
- Variação do índice de potência n : [0.2, 0.5, 1.5, 2.0]
- Variação do índice de consistência k : [0.1, 0.01, 0.001]

Lembrando que é esperado que para os pseudoplásticos ($n < 1$) ocorra uma diminuição da viscosidade e uma rápida frente de saturação, enquanto para os dilatantes ($n > 1$) ocorra um aumento da viscosidade

e uma lenta frente de saturação. Para o caso específico de $n=1$ é esperado que os modelos de *power law* recaem no modelo newtoniano (viscosidade constante).

Para um escoamento monofásico de fluido newtoniano do caso Buckley-Leverett foi utilizada uma pressão constante no patch *outlet* de $1e + 05 Pa$, deixando o patch *inlet* como *zeroGradient* ou seja, o valor da propriedade no patch equivale ao valor da propriedade nos respectivos centros de células. O domínio é inicialmente saturado de óleo e foi feita uma variação da viscosidade de $\mu = [0.006, 0.010, 0.014, 0.018] Pa.s$. Na figura [Figura 44](#) são apresentadas as curva de queda de pressão ao variar a viscosidade do fluido contido no domínio. A taxa de injeção de óleo no patch *inlet* é constante e igual a $0.6 cm^3/min$.

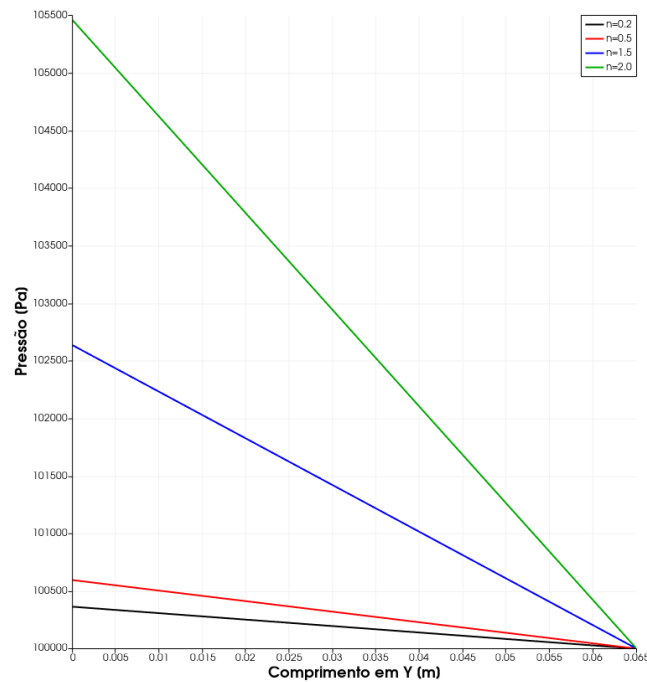
Figura 44 – Resultados de queda de pressão em escoamento newtoniano e monofásico de óleo variando viscosidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

Alterando o fluido para não newtoniano, utilizando o modelo *power law* de poros cilíndricos e mantido constante o índice de consistência em $H = 0.01 Pa.s^n$, foi feita uma variação no índice de potência em $n = [0.2, 0.5, 1.5, 2.0]$ cujos gráficos de perda de carga são apresentados na figura [Figura 45](#)

Figura 45 – Resultados de queda de pressão em escoamento monofásico não newtoniano variando índice de potência.

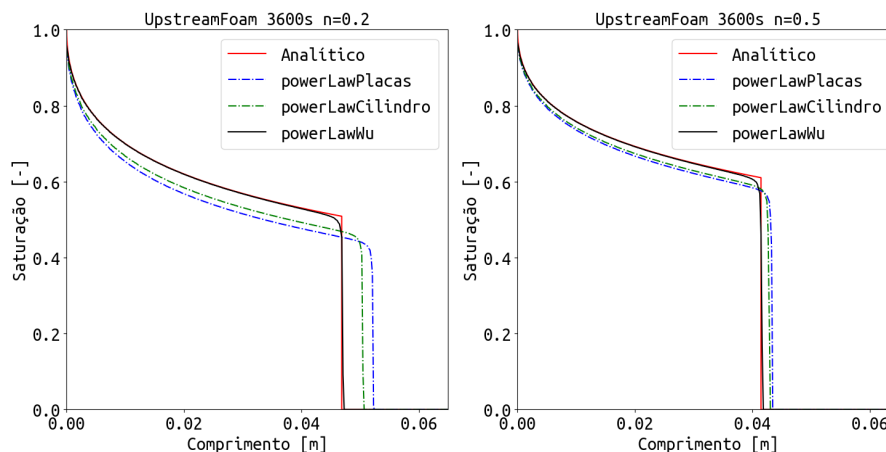


Fonte: Produção do próprio autor.

Em ambas as figuras, são observados expressivos aumentos na queda de pressão ao aumentar a viscosidade, seja do fluido newtoniano ou não newtoniano em combinação dos índices n e H . Lembrando que é esperado um aumento significativo na viscosidade ao utilizar fluidos de característica dilatante $n > 1.0$ e portanto, nesta faixa, o aumento da queda de pressão é maior.

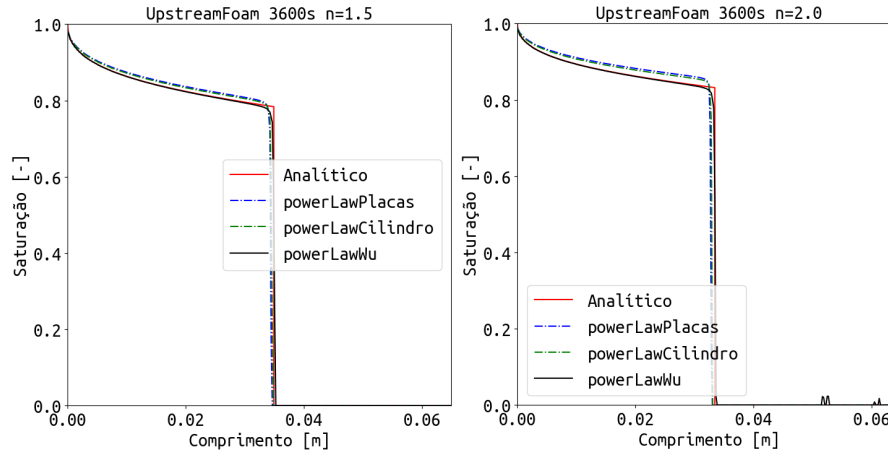
Já para escoamento bifásico, nas imagens abaixo "Analítico" diz respeito ao script de solução analítica do caso Bulckley-Leverett encontrado no apêndice C de Wu (1990) e convertido em python; "powerLawPlacas" são os resultados das simulações no *upstreamFoam* modelando poro como placas planas; "powerLawCilindro" são os resultados das simulações no *upstreamFoam* modelando poro como cilindros e "powerLawWu" são as simulações com o modelo proposto por Wu (1990) que modela uma viscosidade aparente de um fluido não newtoniano.

Figura 46 – Resultados da característica pseudoplástica.

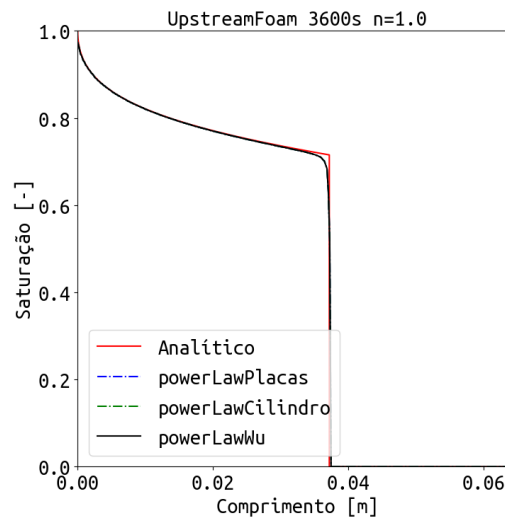


Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 47 – Resultados da característica dilatante.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 48 – Resultados para $n=1.0$ - newtoniano.

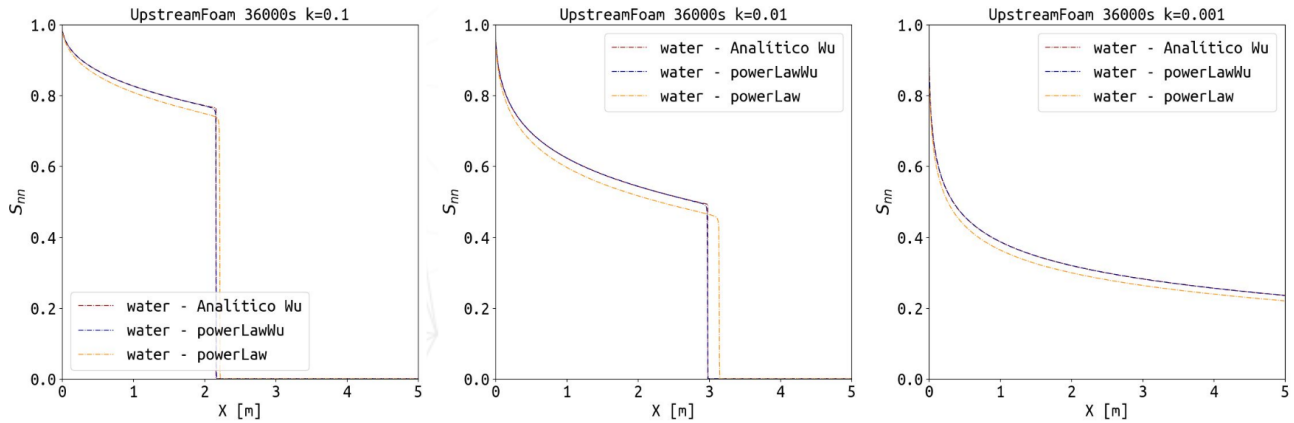
Fonte: Produção do próprio autor.

Verificam-se nas imagens, portanto, que a solução considerando poros cilindros é mais próxima da solução com a proposta de Wu. Quanto menores os valores de n maior a diferença entre os modelos porém quanto maiores os valores de n a partir de $n = 1.0$ mais próximos os resultados ficam do analítico.

Assim como o esperado, na [Figura 48](#) todos os resultados convergem. Isso devido a simplificação das equações equação [\(129\)](#), equação [\(150\)](#) e equação [\(157\)](#) ao utilizar $n = 1.0$ que faz com que apenas o índice consistência seja relevante.

Os resultados obtidos com a variação do índice de consistência foram os seguintes:

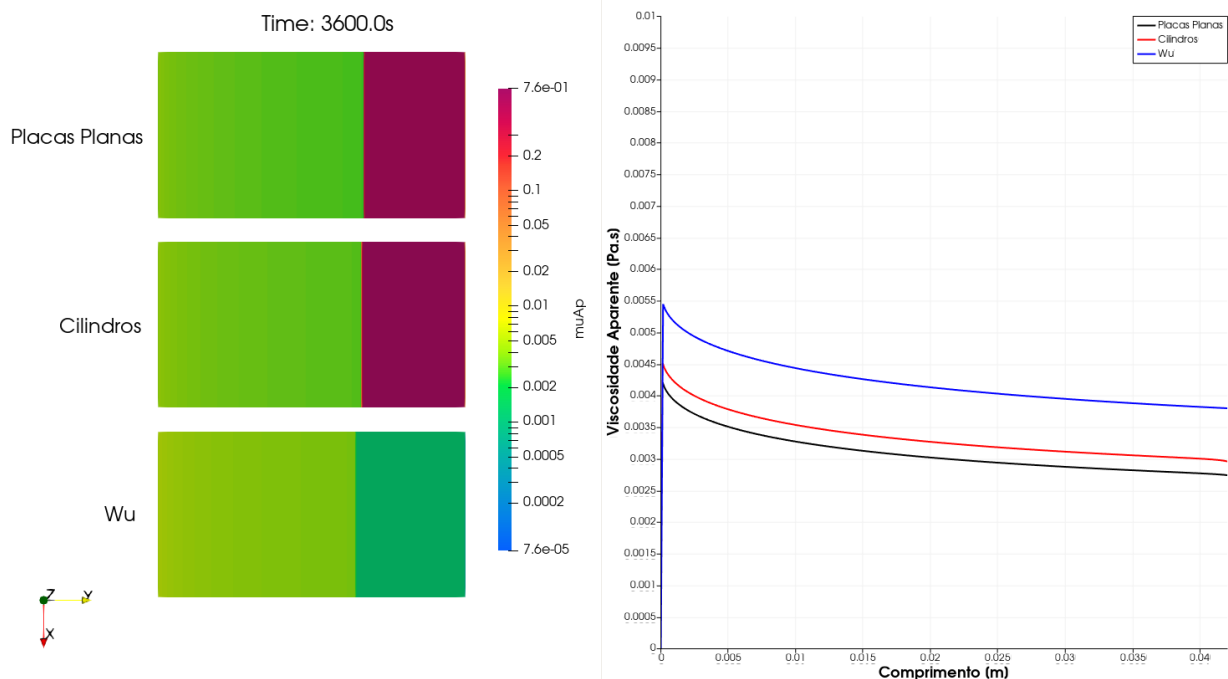
Figura 49 – Resultados da variação do índice de consistência.



Fonte: Produção do próprio autor.

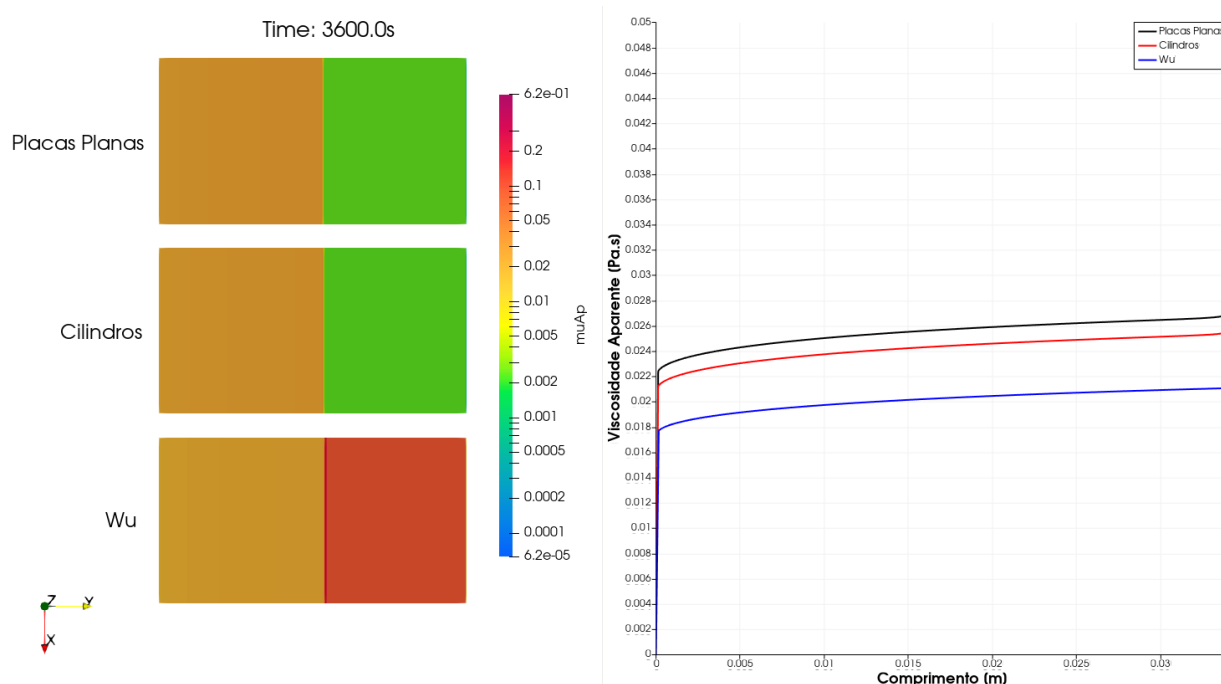
Os testes para viscosidade aparente envolveram novamente o caso Buckley-Leverett para os valores de $n = 0.5$ e $n = 1.5$. De acordo com a Tabela 1, as equações referentes a viscosidade aparente utilizam unicamente dos parâmetros do fluido não newtoniano, sendo complexo pensar em escoamento bifásico. Estão apresentadas na direita das Figura 51 e Figura 50 gráficos da frente de saturação do fluido não newtoniano, e estes gráficos foram restringidos até o comprimento da frente de saturação pois os resultados dos campos de viscosidade após a frente de saturação são apenas residuais, ou seja, como não existem informações do fluido não newtoniano ainda naquelas células serão utilizados resíduos presentes no *upstreamFoam* que servem para evitar erro de ponto flutuante. Os resultados após a frente de saturação são residuais e não reais.

Figura 50 – Resultados da característica pseudoplástica.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 51 – Resultados da característica dilatante.



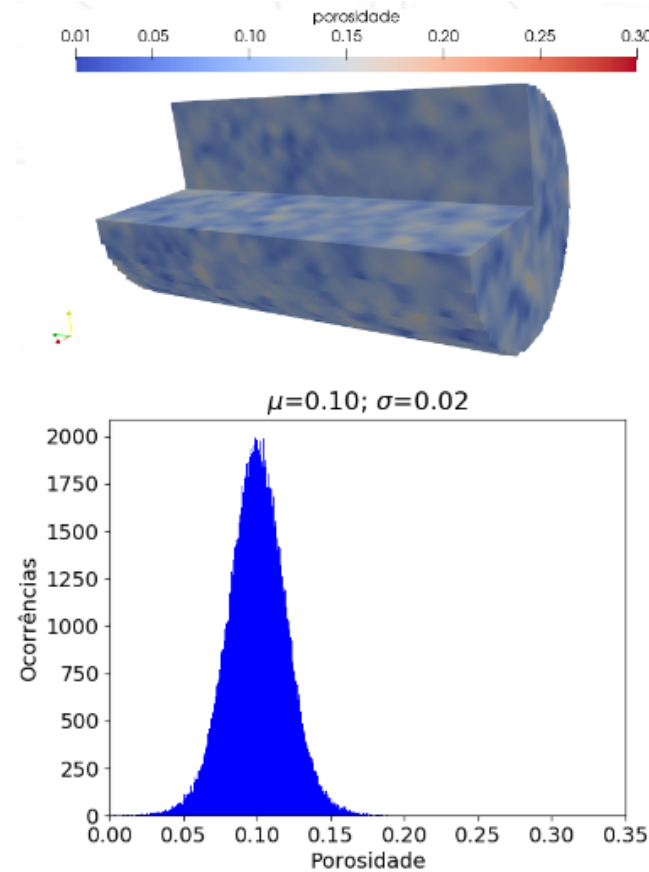
Fonte: Produção do próprio autor.

Pela [Figura 50](#) percebe-se que a viscosidade a partir da dedução de Wu é superestimada frente aos outros modelos. Comportamento contrário mostrado na [Figura 51](#) onde a viscosidade do modelo com poro placas planas é superestimada frente aos outros modelos. Nos dois casos, os modelos com poros placas planas e poros cilíndricos tiverem resultados próximos. É de se esperar resultados diferentes já que as equações equação (139) e equação (153) são parecidas porém apresentam constantes diferentes de acordo com suas deduções.

3.4.2 Resultados Plugue

A partir das amostras sintéticas escolhidas, foram feitas as simulações propostas na Etapa 2. Serão apresentados pós processamentos de simulações variando o índice de potência n e índice de consistência H na primeira amostra selecionada com média de porosidade igual a 0.1 e desvio de 0.02, de acordo com a [Figura 52](#).

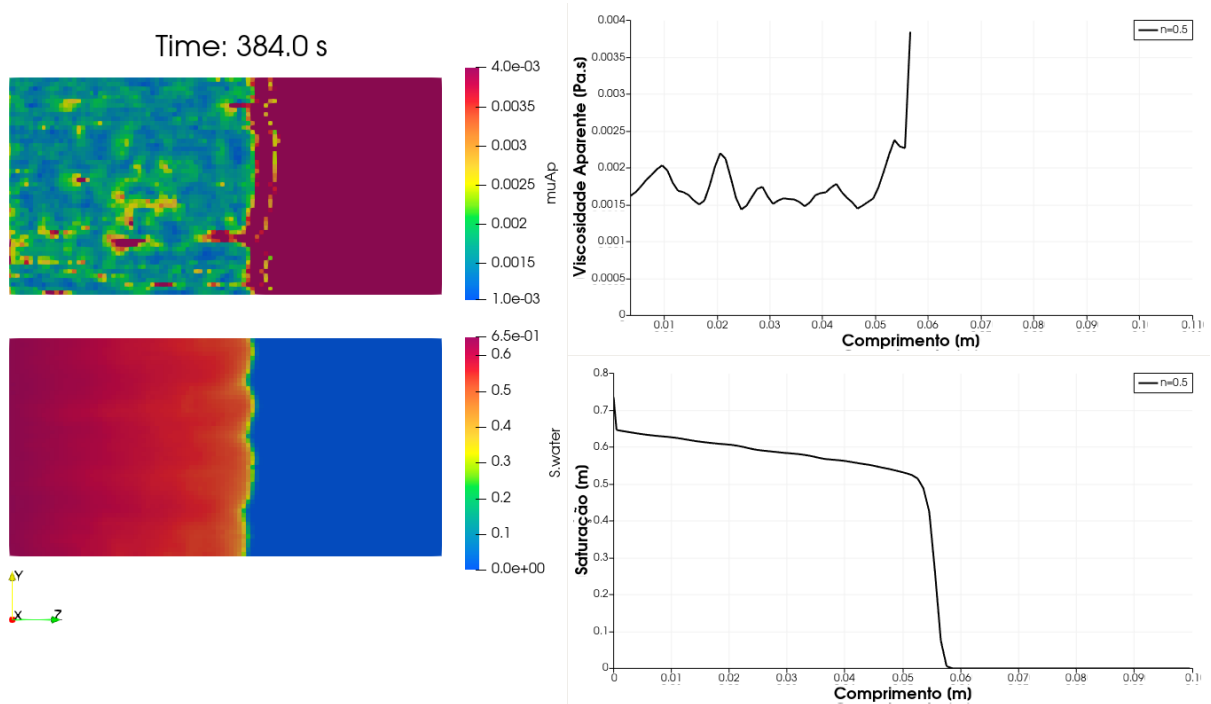
Figura 52 – Campo de porosidade da amostra sintética analisada.



Fonte: Produção do próprio autor.

Para todos os resultados que serão apresentados, considere $n = 1.0$ para o modelo de permeabilidade relativa de Brooks and Corey do fluido não newtoniano e $n = 2.0$ para o modelo de permeabilidade absoluta de Winland. Na [Figura 53](#) repare que a curva de viscosidade aparente termina na frente de saturação, isso porque a viscosidade aparente após a frente de saturação adquire valores residuais apenas, não físicos. Outro detalhe é que o avanço do fluido não newtoniano não é homogêneo, existe um gradiente de saturação até a frente de saturação.

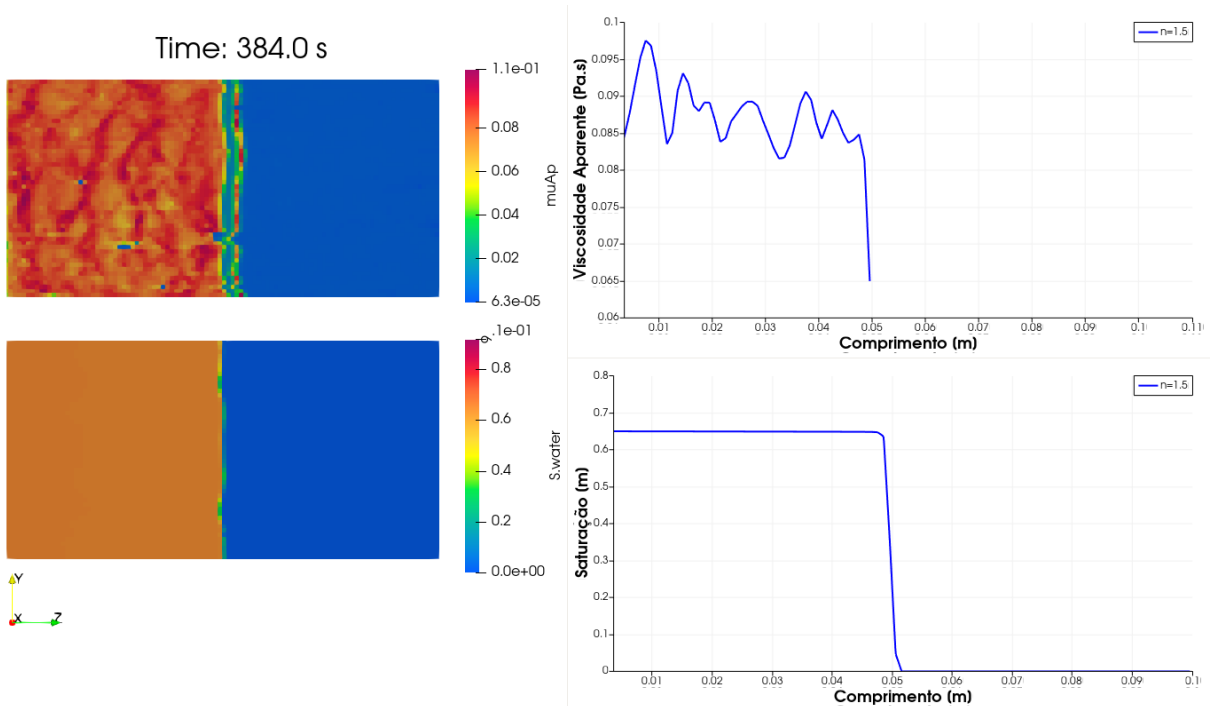
Figura 53 – Resultados $n = 0.5$ e $H = 0.01 Pa.s^n$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Para a característica dilatante de $n = 1.5$ a viscosidade aparente aumenta ainda mais e a frente de saturação é homogênea. A viscosidade aparente após a frente de saturação continua sendo apenas residual, e a queda da viscosidade não tem sentido físico é apenas numérico.

Figura 54 – Resultados $n = 1.5$ e $H = 0.01 Pa.s^n$.

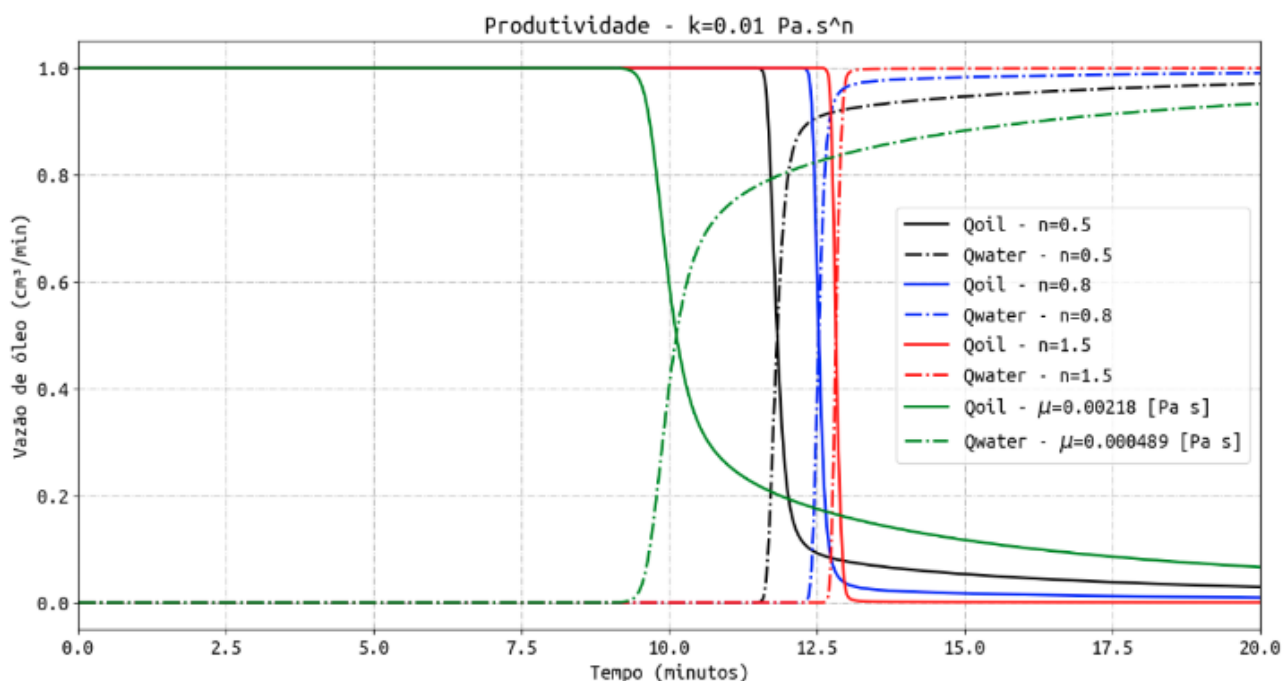


Fonte: Produção do próprio autor.

De forma a sintetizar os resultados anteriores, é apresentado na [Figura 55](#) uma comparação de

produtividade do fluido não newtoniano em diferentes índices de potência do modelo *power law*.

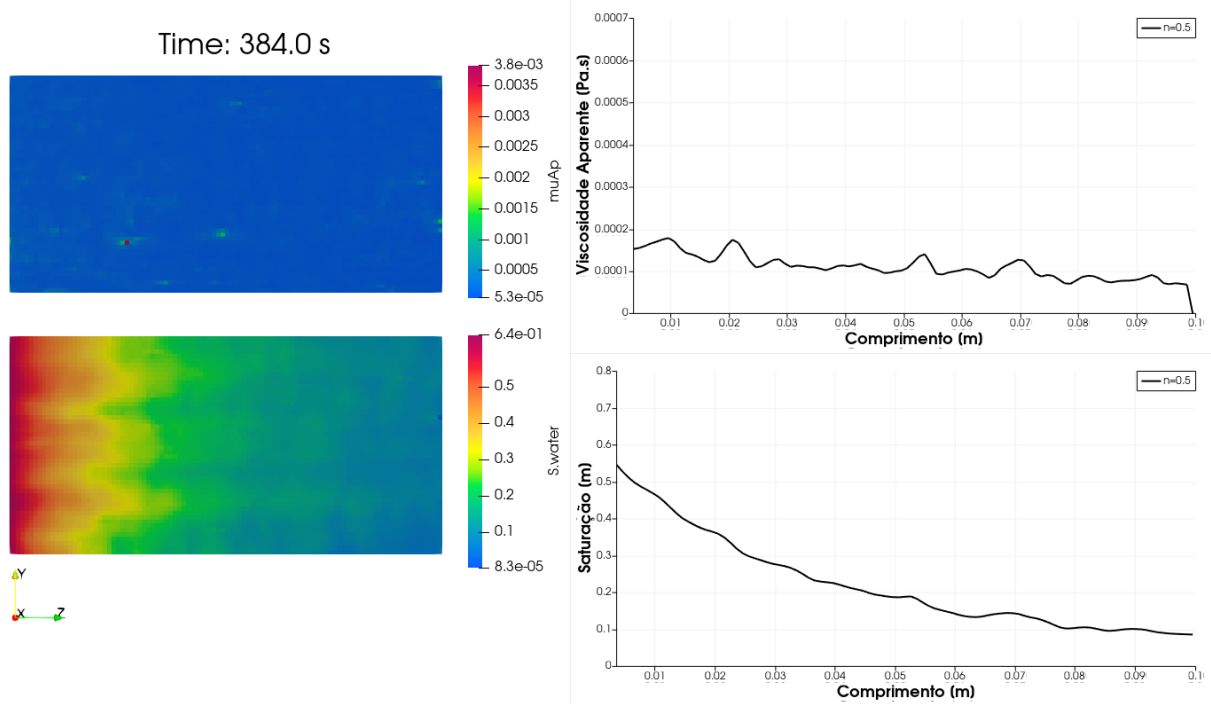
Figura 55 – Produtividade para $H = 0.01 Pa.s^n$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Voltando para a característica pseudoplástica de $n = 0.5$ e diminuindo o índice de consistência para $H = 0.001 Pa.s^n$ percebe-se na [Figura 56](#) que a viscosidade aparente também reduz proporcionalmente, isso está de acordo com a equação [153](#), já que a viscosidade aparente é diretamente proporcional ao índice de consistência. Outro detalhe a ser comentado aqui é que não está presente uma frente de saturação bem definido, isto porque o efeito conjunto do índice de potência e índice de consistência ambos baixos diminui a viscosidade em tal ponto que nos primeiros tempos observados da simulação parte do fluido não newtoniano já alcançou a saída do domínio.

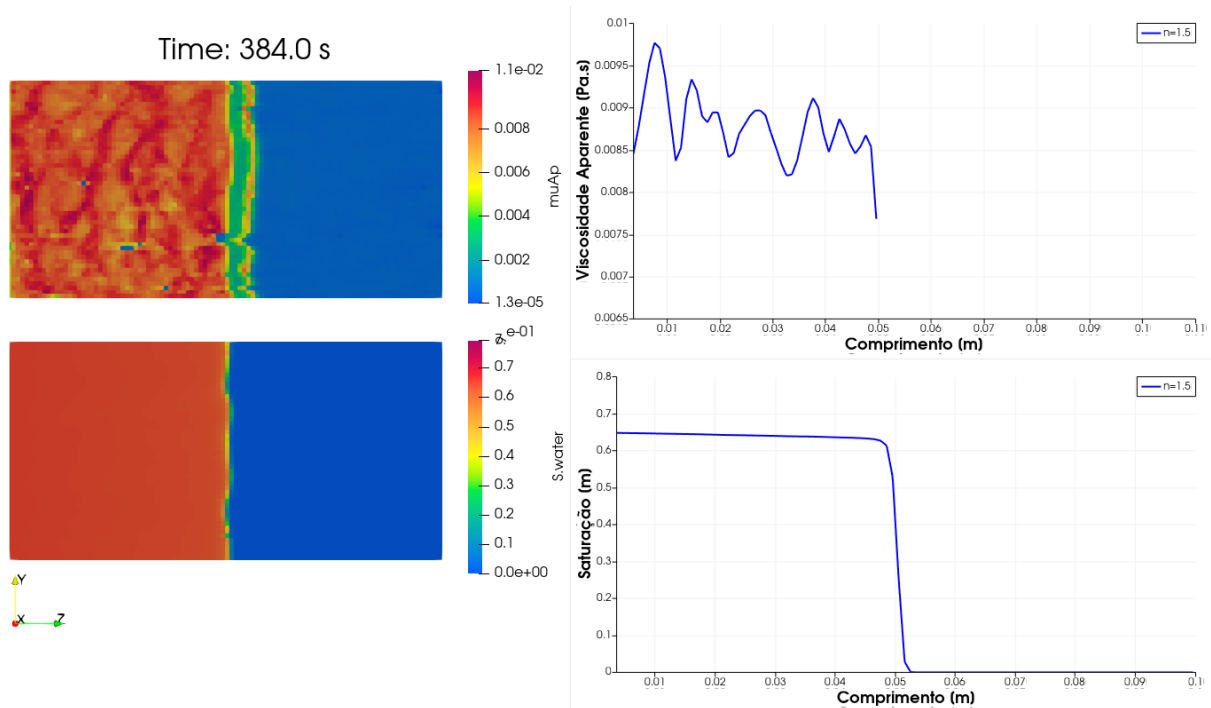
Figura 56 – Resultados $n = 0.5$ e $H = 0.001 Pa.s^n$.



Fonte: Produção do próprio autor.

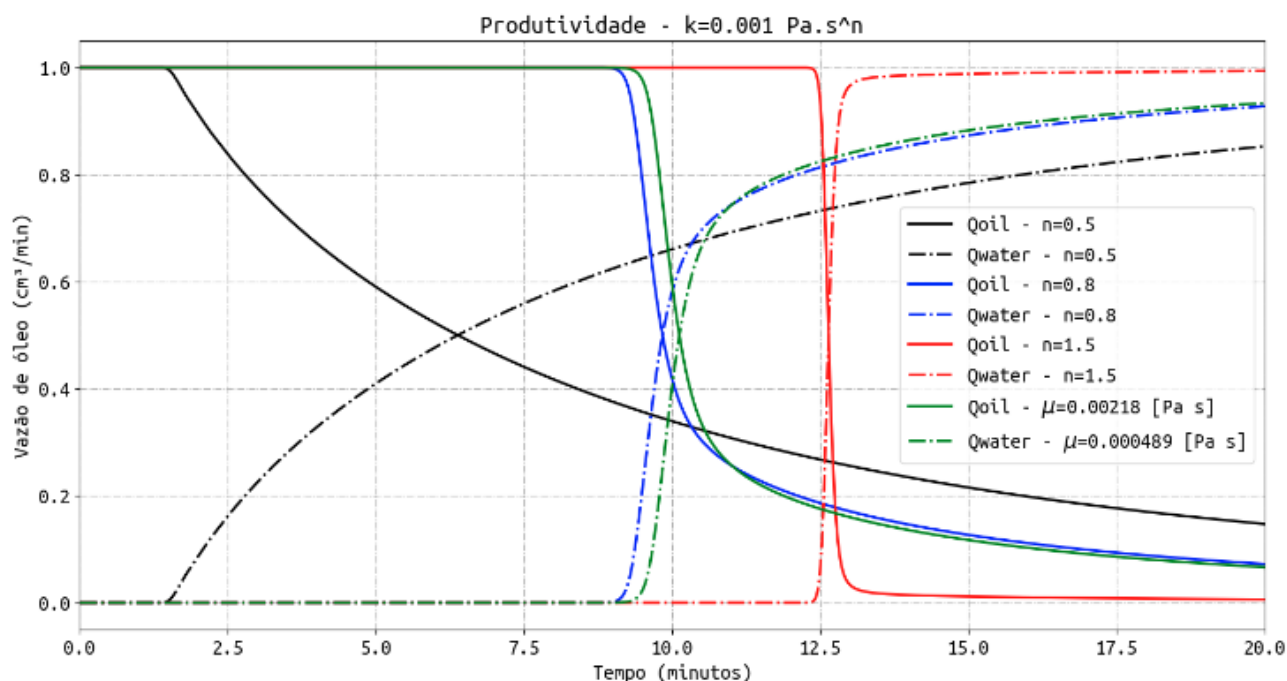
Por fim, para a [Figura 57](#) a viscosidade aparente diminui proporcionalmente a H porém a frente de saturação mal se altera ao diminuir H , comparando com $H = 0.01 Pa.s^n$

Figura 57 – Resultados $n = 1.5$ e $H = 0.001 Pa.s^n$.



Fonte: Produção do próprio autor.

De forma a sintetizar os resultados anteriores, na [Figura 58](#) apresenta-se uma comparação de produtividade do fluido não newtoniano em diferentes índices de potência do modelo *power law*.

Figura 58 – Produtividade para $H = 0.001 Pa.s^n$.

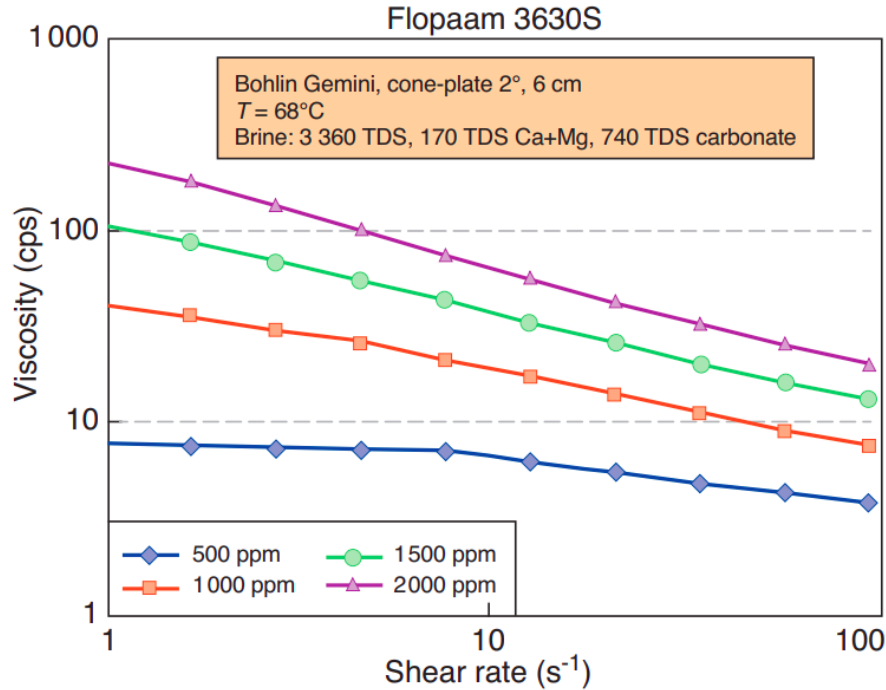
Fonte: Produção do próprio autor.

Portanto o índice de potência do modelo não newtoniano generalizado *power law* impacta diretamente na característica do fluido. Quando $n < 1$ e tende a zero, maior a característica pseudoplástica de diminuir a viscosidade, e quando $n > 1$ e tendendo ao infinito (teoricamente) maior a característica dilatante de aumentar a viscosidade. A mudança do índice de consistência de *power law*, possível de perceber nas figuras anteriores, tem um impacto diretamente linear no valor da viscosidade aparente. O efeito combinado de n e k podem trazer viscosidade altas quando $n < 1$ e viscosidades baixas quando $n > 1$.

3.5 RESULTADOS COM POLÍMEROS REAIS

Alguns polímeros possíveis de encontrar na literatura relacionado à técnica de injeção de polímeros são os de poliacrilamida hidrolisada. Esta classe de polímeros apresenta em toda faixa de taxa de cisalhamento a característica pseudoplástica, ou seja, viscosidade indiretamente proporcional a taxa de cisalhamento conforme figura [Figura 59](#).

Figura 59 – Viscosidade em função da taxa de cisalhamento para diferentes concentrações de FP3630.



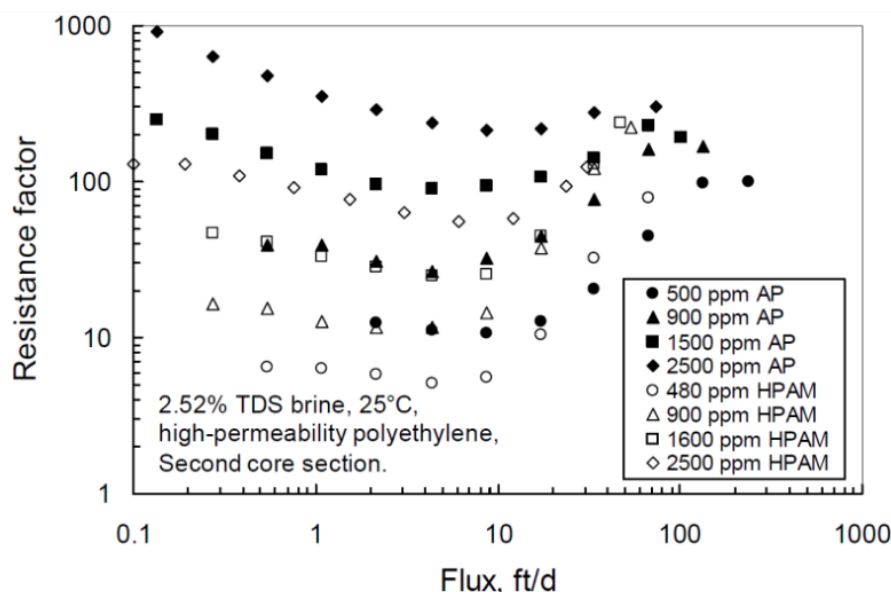
Fonte: [Thomas, Gaillard e Favero \(2013\)](#)

No entanto, quando é feita uma análise envolvendo injeção de salmoura seguida de injeção de polímero em meio poroso, o comportamento do polímero pode ser mais complexo. Dependendo da faixa de taxa de cisalhamento utilizado, o polímero pode apresentar comportamento newtoniano em diferentes valores, comportamento pseudoplástico e também comportamento dilatante. Isso acontece principalmente ao fazer uma análise completa de injeção de salmoura seguida por injeção de polímero, calculando o fator de resistência pela equação (1) (diretamente proporcional a viscosidade do polímero) in-situ. Esse comportamento completo é apresentado na figura [Figura 60](#).

$$FR = \frac{\Delta p_{polimero}}{\Delta p_{salmoura}} = \frac{\mu_{polimero}}{\mu_{salmoura}} \quad (1)$$

onde Δp_w é a queda de pressão do escoamento ao utilizar salmoura, Δp_p é a queda de pressão do escoamento ao utilizar o polímero, μ_p viscosidade do polímero e μ_w viscosidade da salmoura (água) que é constante igual a 0.565 cP e utilizado para todas as simulações apresentadas..

Figura 60 – Fator de resistência em função da vazão do polímero para diferentes concentrações.



Fonte: Sun, Saleh e Bai (2012)

Porém para este trabalho serão apresentados resultados e análises para polímeros em faixa de cisalhamento tal que apareça somente a característica pseudoplástica, conforme figura [Figura 59](#), para diferentes concentrações.

Para obter os parâmetros *power law* a partir da figura [Figura 59](#), é necessário converter fator de resistência em viscosidade do polímero utilizando a equação (1) e $\mu_w = 0.565cP$. Esta conversão dos dados é apresentada na Tabela [10](#).

Tabela 10 – Tabela viscosidade em função da taxa de cisalhamento para diferentes concentrações do polímero

Taxa de Cisalhamento (s^{-1})	500ppm ($Pa.s$)	1000ppm ($Pa.s$)	1500ppm ($Pa.s$)	2000ppm ($Pa.s$)
1,63707	0,00757004	0,0364314	0,087624	0,180363
2,71801	0,00735874	0,0307401	0,0688834	0,135893
4,51268	0,00725531	0,0259379	0,055706	0,100948
7,43977	0,00715333	0,021275	0,0444162	0,0739354
12,3522	0,00629768	0,0174503	0,0334649	0,0565001
20,5082	0,00562341	0,0141121	0,0263076	0,0419711
33,8105	0,00488118	0,011252	0,0203904	0,0325308
56,1352	0,00435857	0,00909948	0,0164897	0,0255733
92,5467	0,00389192	0,00767792	0,0133352	0,0203904

Fonte: Produção do Próprio Autor.

A equação *power law* não newtoniano é do formato da equação (2), que ao utilizar logaritmo em ambos os lados (3), chega-se a equação da reta apresentada na equação (4).

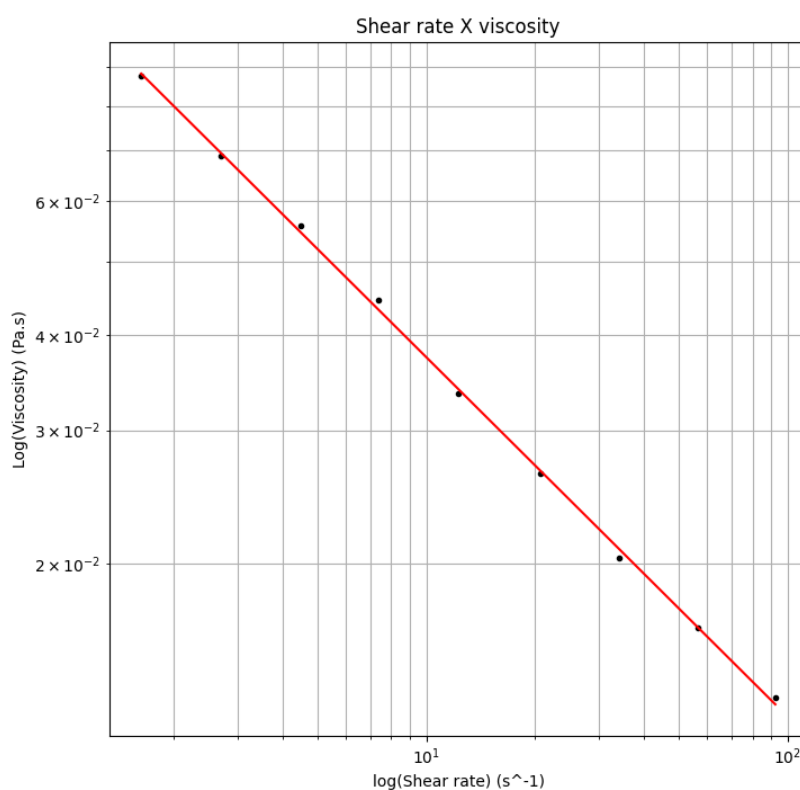
$$\mu = H\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2)$$

$$\log(\mu) = (n - 1) \log(\dot{\gamma}) + \log(H) \quad (3)$$

$$y = mx + c \quad (4)$$

Portanto basta converter as listas de dados em gráficos log x log para obter uma reta e encontrar o coeficiente angular que equivale a $n - 1$ e a viscosidade na qual a taxa de cisalhamento é zero para encontrar $\log(H)$. Um exemplo do gráfico obtido é apresentado na figura [Figura 61](#) que utiliza os dados do polímero FP3630 com concentração de 1500ppm.

Figura 61 – Gráfico logarítmico da viscosidade em função da taxa de cisalhamento para FP36030 - 1500ppm.



Fonte: Produção do Próprio Autor.

Para este caso em específico, utilizando da equação [\(3\)](#), foram obtidos os valores de índice de potência $n = 0.5276734594373653$ e índice de consistência $H = 0.11101783278513376$ para concentração de 1500ppm. Este processo foi realizado utilizando script python para análise dos dados, e o resultado de todas as concentrações é apresentado na Tabela [11](#). É apresentado também a raiz quadrada do erro médio da obtenção dos coeficientes da reta em log. vs log. por conta da função não representar perfeitamente uma reta, apenas aproxima. Podem observar pelos dados da Tabela [11](#) que quanto maior a concentração do polímero menor o índice de potência evidenciando uma característica pseudoplástica mais evidente.

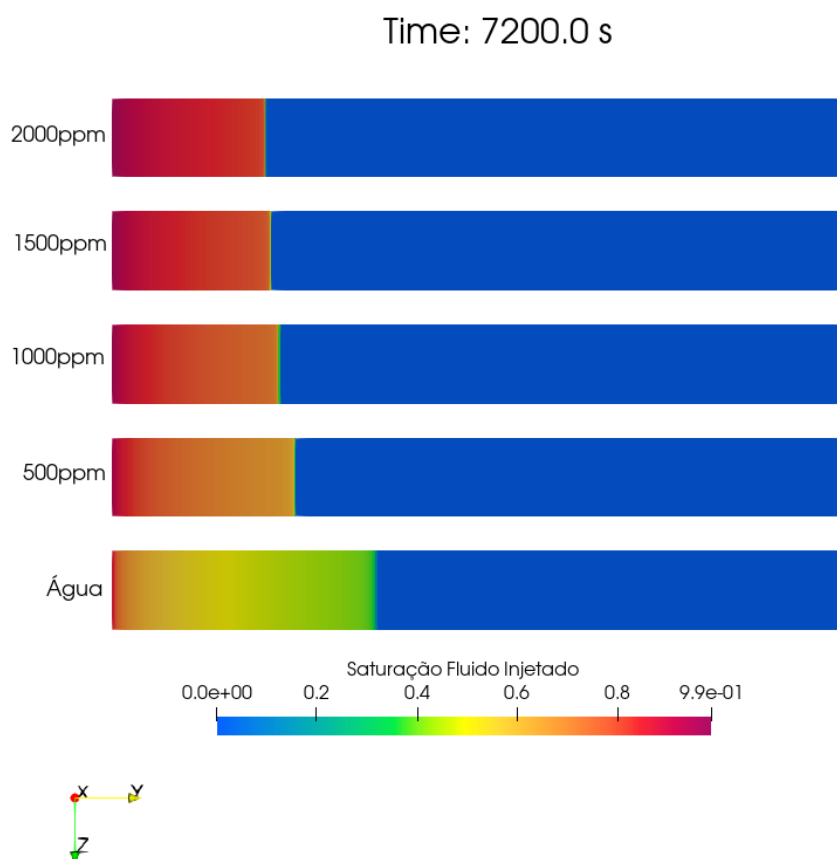
Tabela 11 – Tabela viscosidade em função da taxa de cisalhamento para diferentes concentrações do polímero

Concentração (ppm)	Índice de potência $n(-)$	Índice de consistência $H(\text{Pa.s}^n)$	Erro RMSE
500	0,82604	0,00911	0,02749
1000	0,60570	0,04577	0,00946
1500	0,52767	0,11102	0,00739
2000	0,45275	0,22922	0,01403

Fonte: Produção do Próprio Autor.

Para os resultados apresentados a seguir foram comparados injeção de diferentes concentrações diferentes do polímero em relação a injeção de água. Na figura [Figura 62](#) são apresentadas as frentes de saturação do fluido injetado enquanto a figura [Figura 63](#) são apresentadas as curvas relativas da figura [Figura 62](#), ambos para vazão de injeção igual a $1.2\text{cm}^3/\text{min}$.

Figura 62 – Campos de saturação para FP3630 com vazão de $1.2\text{cm}^3/\text{min}$

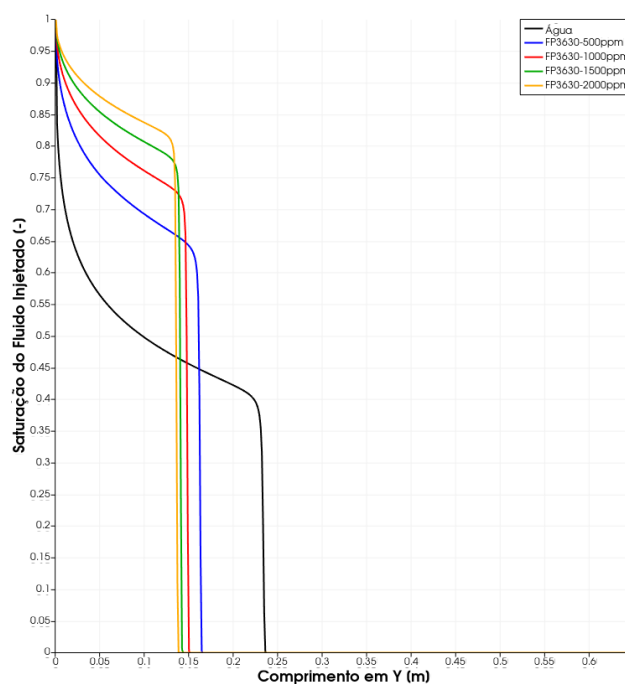


Fonte: Produção do Próprio Autor.

Nas figuras [Figura 63](#) e [Figura 64](#) são apresentadas curvas de saturação do fluido injetado variando a taxa de injeção. A diferença entre a frente de saturação de água e a frente de saturação para qualquer concentração de polímero representa indiretamente o ganho de produtividade ao utilizar o polímero. Para todos os casos, a injeção do polímero começa com um campo menos difuso de

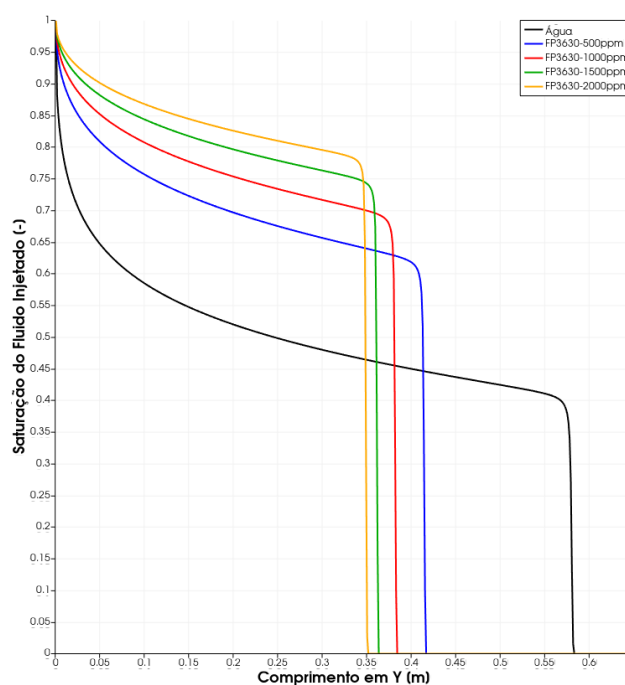
saturação, comparado com o da água, indicando que após o *breakthrough* a produção de óleo será baixa enquanto do polímero será alta.

Figura 63 – Curvas de saturação para FP3630 com vazão de $1.2\text{cm}^3/\text{min}$.



Fonte: Produção do Próprio Autor.

Figura 64 – Curvas de saturação para FP3630 com vazão de $3\text{cm}^3/\text{min}$.



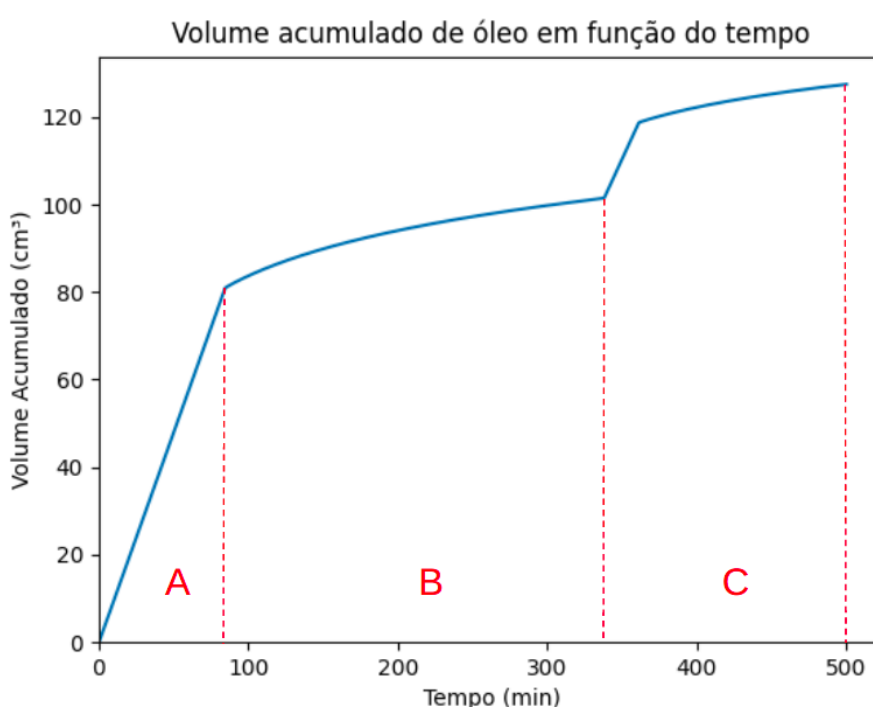
Fonte: Produção do Próprio Autor.

Para um caso de injeção com apenas água, devido sua viscosidade, é esperado uma produtividade lenta de óleo por causa do campo difuso de saturação gerado. Já para injeção com apenas polímero é esperado um ganho na produtividade devido o aumento na viscosidade em toda faixa de taxa de

cisalhamento quando comparado com água. Porém na prática, a recuperação de óleo é feita injetando primeiro salmoura (água salina) e após um determinado tempo injeta-se polímero. Nesse tipo de recuperação busca o maior custo benefício, já que preço do polímero é maior quando comparado à água salina. Sendo assim, na equação (5) é apresentado a forma de calcular o ganho ao utilizar o polímero, onde cada FR equivale a porcentagem de óleo retirado do domínio em relação ao total existente, e na figura [Figura 65](#) é apresentado gráfico de volume acumulado em função do tempo ao injetar 250min de água e 250min de polímero.

$$FR_{ganho} = \frac{FR_{polimero} - FR_{agua}}{FR_{agua}} 100\% \quad (5)$$

Figura 65 – Volume acumulado em função do tempo para $Q = 4.8cm^3/min$.

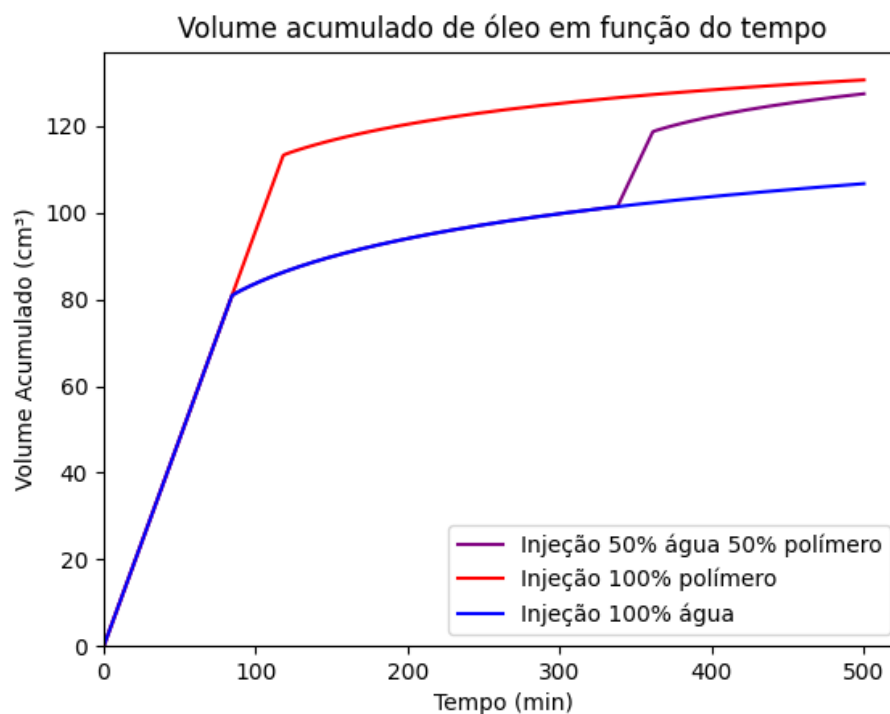


Fonte: Produção do Próprio Autor.

Na figura [Figura 65](#) a curva A representa a injeção constante de água no domínio, a curva B representa o momento que a água chega no final do domínio (outlet) diminuindo a produção de óleo devido ao campo difuso de saturação. Já para a curva C injeta-se polímero que desloca rapidamente óleo por conta da diferença de viscosidade deste com a água (aumentando a pressão) e continua um aumento uniforme por conta do campo difuso de saturação até chegar no valor limite de $159,25cm^3$, valor este que representa a quantidade de óleo total presente no domínio Buckley-Leverett.

Qualquer combinação de injeção utilizando polímero e água representa um ganho na produtividade quando comparado apenas a injeção de água. Na figura [Figura 66](#) são apresentadas curvas de volume acumulado em função do tempo ao injetar apenas água, apenas polímero, e 250min de água e 250min polímero.

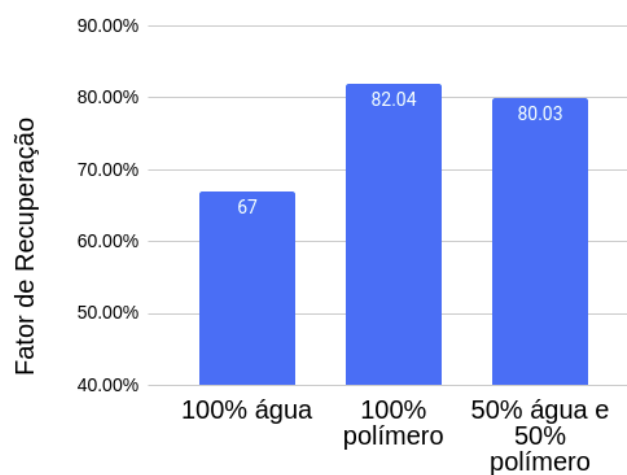
Figura 66 – Volume acumulado em função do tempo para diferentes injeções de fluidos com $Q = 4.8\text{cm}^3/\text{min}$.



Fonte: Produção do Próprio Autor.

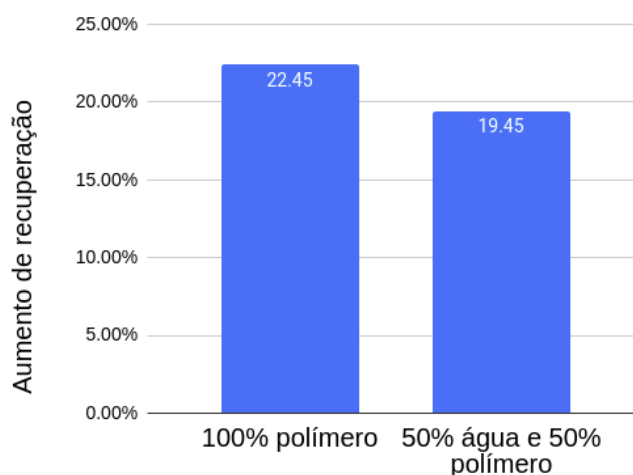
Na figura [Figura 67](#) são comparados os fatores de recuperação para cada tipo de injeção e na figura [Figura 68](#) são apresentados os ganhos relativos ao utilizar polímero (ou mistura) em vez de água.

Figura 67 – Comparação dos fatores de recuperação para cada tipo de injeção com $Q = 4.8\text{cm}^3/\text{min}$.



Fonte: Produção do Próprio Autor.

Figura 68 – Ganho no fator de recuperação ao utilizar polímero ou mistura, com $Q = 4.8\text{cm}^3/\text{min}$.

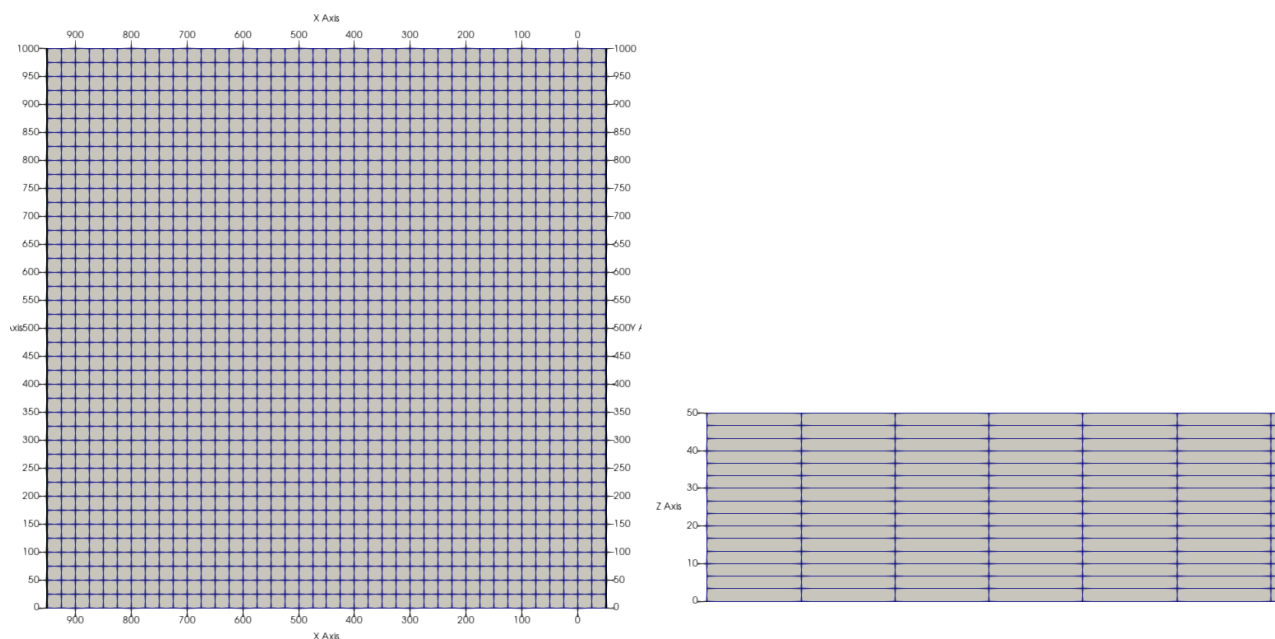


Fonte: Produção do Próprio Autor.

3.6 RESULTADOS EM ESCALA DE RESERVATÓRIO

Todos os modelos apresentados e testados, foram feitos a partir de escala de poro. Nesta seção serão apresentados resultados em escala de poro utilizando o modelo *tabulated* com a Tabela 10 de concentração 2000ppm. O reservatório apresentado na figura 69 será simplificado considerando geometria *box* com $1000 \times 1000 \times 50\text{m}$ com discretização $40 \times 40 \times 20$ respectivamente.

Figura 69 – Domínio do reservatório e discretização espacial utilizados na simulação.



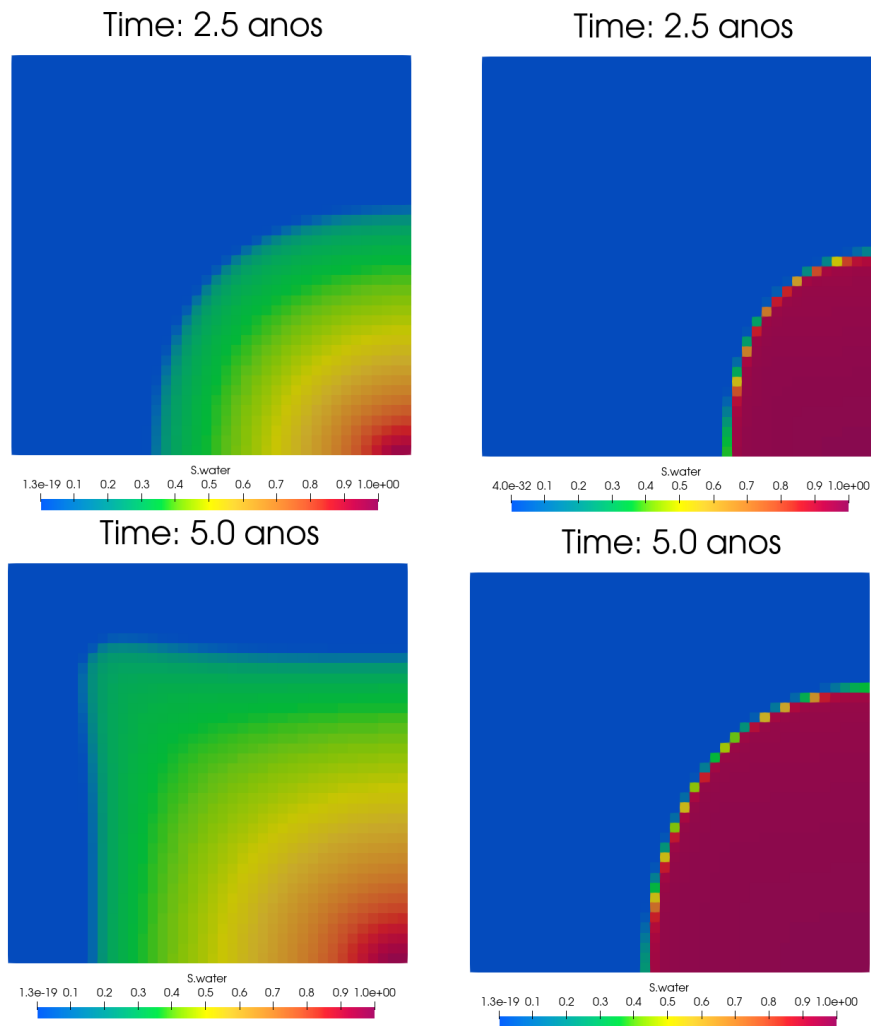
Fonte: Produção do Próprio Autor.

O canto inferior esquerdo apresenta o patch *inlet* enquanto o canto superior direito apresenta o patch *outlet*. Todas as demais boundary são chamadas *wall* e apresentam condição *zeroGradient*, significando que o valor da face é o mesmo calculado do centro da célula respectiva. A vazão volumétrica utilizada no *inlet* foi de $Q = 0.1\text{m}^3/\text{s}$ e a simulação tem como tempo final 20 anos.

Além disso, o domínio consiste em um campo homogêneo de porosidade $\phi = 0.2$, homogêneo e isotrópico de permeabilidade absoluta $K = (1000 \ 1000 \ 1000)mD$. O total de óleo no domínio equivale a $V_{total} = 10^7 m^3$. Nas figuras [Figura 70](#) e [Figura 71](#) são apresentados lado a lado a comparação de injetar água ou polímero FP3630-2000ppm, nos tempos $[2.5, 5.0, 10.0, 15.0]$ anos.

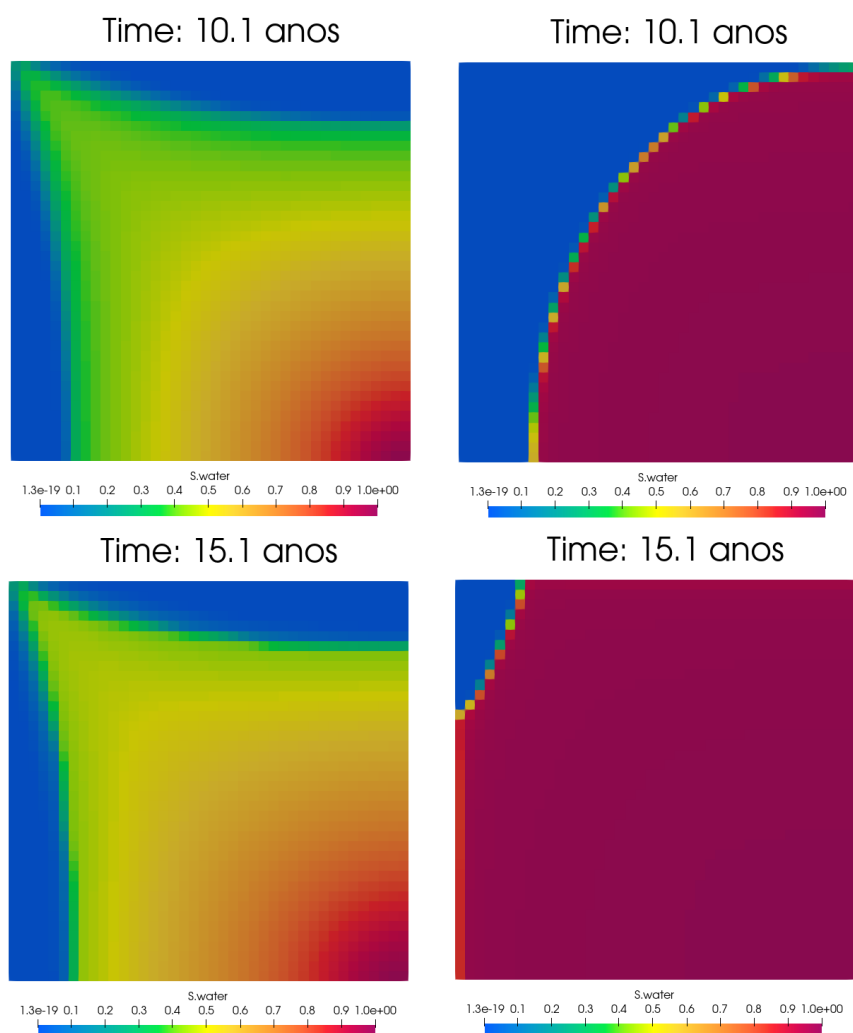
A viscosidade da água utilizada foi de $\mu_w = 0.000489 Pa.s$ e massa específica $\rho_w = 1000 kg/m^3$, enquanto a viscosidade do óleo foi utilizado $\mu_o = 0.006 Pa.s$ e a massa específica utilizada foi de $\rho_o = 800 kg/m^3$.

Figura 70 – Campos de saturação em 2.5 anos e 5.0 anos, a esquerda injetado água e a direita injetado polímero.



Fonte: Produção do Próprio Autor.

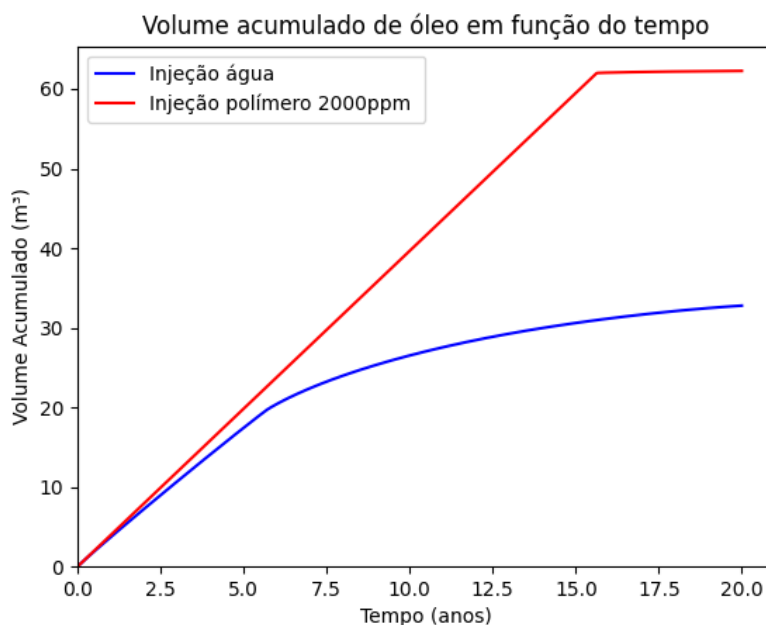
Figura 71 – Campos de saturação em 10.0 anos e 15.0 anos, a esquerda injetado água e a direita injetado polímero.



Fonte: Produção do Próprio Autor.

Pelo polímero ter em toda sua faixa de taxa de cisalhamento uma viscosidade maior que a da água, é esperado um avanço lento e uniforme deste. Na figura [Figura 72](#) são comparados os volumes acumulados de óleo ao injetar água e polímero.

Figura 72 – Volume acumulado em função do tempo ao injetar água ou polímero.



Fonte: Produção do Próprio Autor.

Tomando como referência uma injeção de fluido por 20 anos, a utilização de água retira o total de 52.12% de óleo contido no reservatório, enquanto a utilização do polímero FP3630-2000ppm retira um total de 98.98%. O aumento na produtividade com a injeção do polímero equivale a 89.91% quando comparado com o da água. Cabe uma análise maior quanto a injeção inicial de salmoura seguida de polímero, o tempo de injeção de cada um, reduzindo o máximo de custo possível de equipamentos como por exemplo bombas de maior porte devido o aumento da pressão necessária para escoar fluido de maior viscosidade e o custo do polímero em si, porém não é o escopo deste projeto.

De qualquer maneira, foram apresentados resultados que sugerem um significativo aumento na produtividade de um poço de petróleo ao utilizar um poço injetor (ou mais) de polímero em vez da água. Na escala de poro foi encontrado um ganho equivalente a 22.45% enquanto na escala de reservatório foi encontrado um ganho de 89.91%.

Os resultados encontrados para reservatório devem ser tomados inicialmente como qualitativos. Todos os modelos não newtonianos utilizados neste trabalho foram validados para escala de poro e não necessariamente é significativo para escala de reservatório, porém dá um indicativo de como são os resultados para uma escala maior. O ganho maior encontrado em reservatório, comparado a escala de poro, pode ser também um resultado de um maior tempo de escoamento e maior espaço percorrido pelo fluido injetado.

4 CONCLUSÃO

Foram feitas deduções a partir das equações de Navier-Stokes com simplificações do meio poroso para obter termos de interação entre fase sólida e fase fluida utilizando fluidos newtonianos ou não newtonianos. Além disso, foram obtidas expressões para geometria de poro de placas planas e poros cilíndricos, e demonstrado a maior precisão dos resultados ao utilizar geometria de poros cilíndricos.

Para as simulações com o modelo *power law* de fluidos não newtonianos, foram avaliados tanto a característica pseudoplástica quanto dilatante, e assim como esperado os fluidos dilatantes fornecem maiores viscosidades e consequente aumento no fator de recuperação de óleo. Avançando a complexidade, foram analisadas diferentes concentrações de polímero FP3630 e foi provado que mesmo sendo uma solução polimérica com características pseudoplásticas, ou seja que reduz a viscosidade, o fator de recuperação também é aumentado.

Em relação aos domínios utilizados, o caso Buckley-Leverett é apresentado na literatura com solução analítica para escoamento bifásico em meios porosos de fluidos não newtonianos, e com base nisso os modelos foram validados com testes de robustez do simulador. Aumentando a complexidade, o plugue 3D com campos heterogêneos mostrou resultados próximos dos reais de reservatório ao mostrar que zonas de alta permeabilidade tem um aumento representativo da viscosidade por conta dos fluidos dilatantes, fazendo com que a frente de saturação fique homogênea reduzindo o tempo de *breakthrough*. Também foram feitos testes parciais em escala de reservatório com simulações em tempos de 20 anos de injeção de polímero, e foram evidenciados boa robustez do simulador e aumento esperado do fator de recuperação de óleo. Neste último caso, maior atenção se faz necessária se as expressões deduzidas em escala de plugue são representativas o suficiente em escala de reservatório.

Em diferentes escalas foram provados que a utilização de injeção de polímeros em campos maduros possibilita maior produtividade de óleo quando comparado à injeção de água. O polímero utilizado nas simulações foi o FP3630 com concentração de 2000ppm, sendo facilmente encontrado na literatura estudos sobre o mesmo e principalmente gráficos mostrando o comportamento deste polímero em meios porosos, onde coexistem as características pseudoplásticas, dilatantes e newtonianas, sendo por esse motivo escolhido neste estudo.

Como sugestões de trabalhos futuros está a implementação de modelos viscoelásticos, onde a viscosidade varia com a taxa de cisalhamento e com o tempo de aplicação da tensão. Foram encontrados na literatura polímeros com esse comportamento, e um estudo do gênero aumentaria a representatividade física do escoamento

Por fim, as implementações feitas no simulador *upstreamFoam* se mostraram eficazes garantindo robustez, podendo dessa forma realizar dezenas de simulações em tempo hábil. Este trabalho tem como valor agregado a possibilidade de empresas especializadas em *EOR* e re-desenvolvimento desse tipo poderem estudar a física do escoamento com *polymer flooding*, utilizando de um simulador do software de código aberto como *OpenFOAM* como base para escolha de polímeros e concentrações a partir de dados da variação da viscosidade em função da taxa de cisalhamento, seja *in-situ* ou não.

REFERÊNCIAS

BARBOZA JÚNIOR, R. e. a. Modelling and simulation of carbonate's reactive-dissolution viscoelastic-surfactant-based acid and comparison with experimental results. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Elsevier, Rio de Janeiro, v. 215, p. 110595, 2022. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410522004697>>. Acesso em: 19 dez. 2022.

BARNES, H. A. **A handbook of elementary rheology**. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics Aberystwyth, 2000. v. 1. Disponível em: <https://kupdf.net/download/handbook-of-elementary-rheology_5b02c09ee2b6f5fc246832ee_.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2023.

BATCHELOR, G.; BATCHELOR, G.; BATCHELOR, K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge University Press, 1967. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521041188. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=8_fAjgEACAAJ>. Acesso em: 05 fev. 2023.

BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media**. Dover, 1988. (Dover Civil and Mechanical Engineering Series). ISBN 9780486656755. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=picSrNsgY8oC>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

BOUDREAU, B. P. The diffusive tortuosity of fine-grained unlithified sediments. **Geochimica et cosmochimica acta**, Elsevier, Halifa, Canada, v. 60, n. 16, p. 3139–3142, 1996. Acesso em: 05 fev. 2023.

BROOKS, R. H.; COREY, A. T. Properties of porous media affecting fluid flow. **Journal of the irrigation and drainage division**, American Society of Civil Engineers, [S.l.], v. 92, n. 2, p. 61–88, 1966. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JRCEA4.0000425>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

BUCKLEY, S.; LEVERETT, M. Mechanism of fluid displacement in sands. **Transactions of the AIME**, OnePetro, New York, v. 146, n. 01, p. 107–116, 1942. Acesso em: 05 fev. 2023.

CASTRO, M. E. M. R. de. **Propriedades petrofísicas: você já ouviu falar em porosidade e permeabilidade?** 2022. Disponível em: <<http://petropet.uff.br/propriedades-petrofisicas-voce-ja-ouviu-falar-em-porosidade-e-permeabilidade>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

CHRISTENSEN, D. **Cornstarch and water on a speaker**. 2009. 1,024 × 768 pixels, file size: 506 KB, MIME type: image/jpeg. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Corn_speaker.jpg>. Acesso em: 05 fev. 2023.

COIMBRA, A. L. **Mecânica dos fluidos**. E-papers Serviços Editoriais, 2015. Disponível em: <https://www.coppe.ufrj.br/sites/default/files/livro_mecanica_dos_fluidos_0.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2023.

CORREA, M. R. **Métodos de elementos finitos estabilizados para escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy acoplados**. Tese (Doutorado) — Agora eu sei o que é uma engrenagem planetária., Petrópolis, RJ, 2006. Disponível em: <https://www.lareferencia.info/vufind/Record/BR_d443b79b10a97b66bef672ae06579ecf>. Acesso em: 05 fev. 2023.

DIAS, L. et al. Estimativa de permeabilidade absoluta com processamento de imagens utilizando distribuição de tamanho de grãos. **Notas Técnicas**, [s.n.], Rio de Janeiro, RJ, v. 7, n. 2, p. 10–21, 04 2017. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/321924427_Estimativa_de_Permabilidade_Absoluta_com_Processamento_de_Imagens_Utilizando_Distribuicao_de_Tamanho_de_Graos>. Acesso em: 05 fev. 2023.

DIAS, R. A. C. **Produtividade de poços em reservatórios de alta heterogeneidade de permeabilidade**. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil, 2017. Disponível em: <<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=32970@1>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

DRUETTA, P. **Numerical simulation of chemical EOR processes**. Tese (Doutorado) — University of Groningen, 2018. Disponível em: <https://pure.rug.nl/ws/portalfiles/portal/143846256/Complete_thesis_Compressed.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2023.

EDWARDS, D. et al. The influence of reynolds number upon the apparent permeability of spatially periodic arrays of cylinders. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, American Institute of Physics, Haifa, Israel, v. 2, n. 1, p. 45–55, 1988. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.857691>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

FANCHER, G. Henry Darcy - engineer and benefactor of mankind. **Journal of Petroleum Technology**, OnePetro, Austin, Tex, v. 8, n. 10, p. 12–14, 10 1956. ISSN 0149-2136. Disponível em: <<https://onepetro.org/JPT/article-pdf/8/10/12/2238458/spe-762-g.pdf>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

FREEZE, R. A. Henry darcy and the fountains of dijon. **The Groundwater Association**, [s.n.], [S.l.], v. 32, n. 1, p. 23–30, 1994. Disponível em: <<https://ngwa.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1745-6584.1994.tb00606.x>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

GARCIA, F. A. S. **Análise da robustez de um simulador de fluidodinâmica computacional para escoamento bifásico e compressível em meios porosos**. 93 p. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: <<http://www.repositorio.poli.ufrj.br/monografias/projpoli10035256.pdf>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

GÁS, I. B. de Petróleo e. **Maiores produtores mundiais de petróleo em 2021**. 2022. Disponível em: <<https://www.ibp.org.br/observatorio-do-setor/snapshots/maiores-produtores-mundiais-de-petroleo-em-2020/>>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

GOGARTY, W. Mobility control with polymer solutions. **Society of Petroleum Engineers Journal**, OnePetro, Littleton, Colo, v. 7, p. 161–173, 06 1967. Disponível em: <<https://onepetro.org/spejournal/article/7/02/161/163045/Mobility-Control-With-Polymer-Solutions>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

HONARPOUR, M. M.; KOEDERITZ, F.; HERBERT, A. **Relative permeability of petroleum reservoirs**. CRC Press, Inc., 1986. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/5783247>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

HOWES, F. A.; WHITAKER, S. The spatial averaging theorem revisited. **Chemical Engineering Science**, [s.n.], Davis, CA U.S.A, v. 40, n. 8, p. 1387–1392, 1985. ISSN 0009-2509. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0009250985800786>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

HUBBERT, M. K. The theory of ground-water motion. **The Journal of Geology**, The University of Chicago Press, New York, U.S.A., v. 48, n. 8, p. 785–944, 1940. ISSN 00221376, 15375269. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/30057101>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

JASAK, H. Openfoam: open source cfd in research and industry. **International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering**, [s.n.], [S.l.], v. 1, p. 89–94, 12 2009. ISSN 2092-6782. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2092678216303879>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

JONES, S. C. A rapid accurate unsteady-state Klinkenberg Permeameter. **Society of Petroleum Engineers Journal**, The Society, Littleton, Colo U.S.A., v. 12, n. 05, p. 383–397, 10 1972. ISSN 0197-7520. Disponível em: <https://onepetro.org/spejournal/article-pdf/12/05/383/2157419/spe-3535-pa.pdf>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

KOLDITZ, O. Finite volume method. In: _____. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. p. 173–190. ISBN 978-3-642-07683-1. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-04761-3_8>. Acesso em: 05 fev. 2023.

MACCORMACK, R.; PAULLAY, A. Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators. **AIAA Paper**, [s.n.], San Diego, CA, U.S.A., v. 154, p. 7, 02 1972. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.1972-154>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

MASSARINI, G. **Fluidodinâmica em sistemas particulados**. E-Papers, 2002. ISBN 8587922327. Disponível em: http://www.e-papers.com.br/produtos.asp?codigo_produto=2818>. Acesso em: 05 fev. 2023.

MCDONALD, P. W. **The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades**. American Society of Mechanical Engineers, 1971. v. 79825. Disponível em: <https://asmedigitalcollection.asme.org/GT/proceedings/GT1971/79825/V001T01A089/234506>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

NAAR, J.; HENDERSON, J. An imbibition model: its application to flow behavior and the prediction of oil recovery. **Society of Petroleum Engineers Journal**, Gulf Research, Pittsburgh, PA, v. 1, n. 02, p. 61–70, 06 1961. ISSN 0197-7520. Disponível em: <https://onepetro.org/spejournal/article-pdf/1/02/61/2153117/spe-1550-g.pdf>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

NEUMAN, S. Theoretical derivation of darcy's law. **Acta Mechanica**, Springer Wien, Tucson, Arizona, v. 25, p. 153–170, set. 1977. ISSN 0001-5970. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01376989>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

OPENFOAM-FOUNDATION. **ProgrammersGuide**. 2022. Disponível em: <https://www.openfoam.com/documentation/overview>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

OSSES, J. **O método de volumes finitos**. 2016. Disponível em: <https://www.esss.co/blog/o-metodo-de-volumes-finitos/>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

PATANKAR, S.; SPALDING, D. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Imperial College of Science and Technology, London, England, v. 15, n. 10, p. 1787–1806, 1972. ISSN 0017-9310. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931072900543>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

PETRÓLEO, G. N. e. B. Agência Nacional do. **Anuário estatístico**. 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/anuario-estatistico/anuario-estatistico-2021>>. Acesso em: 05 fev. 2023.

PETRORIO. **Ativos e operações**. 2021. Disponível em: <https://petroriosa.com.br/ativos-e-operacoes>. Acesso em: 05 fev. 2023.

PROMENTILLA, M. A. B.; SUGIYAMA, T. X-ray microtomography of mortars exposed to freezing-thawing action. **Journal of Advanced Concrete Technology**, Japan Concrete Institute, Japan, v. 8, n. 2, p. 97–111, 2010. Disponível em: https://www.jstage.jst.go.jp/article/jact/8/2/8_2_97/_pdf/-char/ja. Acesso em: 05 fev. 2023.

QUINTARD, M. Transfers in porous media. **Special Topics Reviews in Porous Media: An International Journal**, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Toulouse, France, v. 6, n. 2, p. 91–108, 2015. ISSN 2151-4798. Disponível em: <https://www.dl.begellhouse.com/journals/3d21681c18f5b5e7,09dfc75d18d3a6ca,148b9c94371359eb.html>. Acesso em: 05 fev. 2023.

SUN, Y.; SALEH, L.; BAI, B. Measurement and impact factors of polymer rheology in porous media. In: _____. IntechOpen, 2012. cap. 8. ISBN 978-953-51-0187-1. Disponível em: <https://www.intechopen.com/chapters/30973>. Acesso em: 05 fev. 2023.

THOMAS, A.; GAILLARD, N.; FAVERO, C. Some key features to consider when studying acrylamide-based polymers for chemical enhanced oil recovery. **Oil Gas Science and Technology**, [s.n.], [S.l.], v. 67, p. 887–902, 11 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/271033742_Some_Key_Features_to_Consider_When_Studying_Acrylamide-Based_Polymers_for_Chemical_Enhanced_Oil_Recovery. Acesso em: 05 fev. 2023.

VIGNOLI, B. A. D. L. **Análise por meio de simulações de fluidodinâmica computacional da influência da reologia dos fluidos em casos de injeção em reservatórios de petróleo simplificados**. 71 p. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: <http://www.repositorio.polι.ufrj.br/monografias/projpolι10035249.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2023.

WHITAKER, S. Diffusion and dispersion in porous media. **AIChE Journal**, [s.n.], Davis, California, v. 13, p. 420 – 427, 05 1967. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/229599842_Diffusion_and_Dispersion_in_Porous_Media. Acesso em: 05 fev. 2023.

WIKKI-BRASIL. **Minicurso acoplamento pressão velocidade**. [S.l.:s.n.], 2021. 1 vídeo (25:13min). Publicado pelo canal de Wikki Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fqAISipltCw&list=PLqurcgxgZi_hykXg5zAGBna4YgEod_8nA. Acesso em: 05 fev. 2023.

WILLIAMSON JÚNIOR, F. Richard courant and the finite element method: a further look. **Historia Mathematica**, Academic Press, Mahwah, NJ, v. 7, n. 4, p. 369–378, 1980. ISSN 0315-0860. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086080900014>. Acesso em: 05 fev. 2023.

WOLF, F.; SIEBERT, D.; SURMAS, R. Influence of the wettability on the residual fluid saturation for homogeneous and heterogeneous porous systems. **Physics of Fluids**, AIP Publishing LLC, [S.l.], v. 32, n. 5, p. 052008, 2020. Disponível em: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/5.0004681>. Acesso em: 05 fev. 2023.

WU, Y.-S. **Theoretical studies of non-newtonian and newtonian fluid flow through porous media**. Department of Materials Science and Mineral Engineering University of California, 1990. Disponível em: <https://www.proquest.com/openview/>

[e9e59df6c5651628fcbda75cd73b8b0c/1?pg-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410518307174). Acesso em: 05 fev. 2023.

YOU, L. et al. Optimizing the particle size distribution of drill-in fluids based on fractal characteristics of porous media and solid particles. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Elsevier, Sichuan Province, China, v. 171, p. 1223–1231, 2018. ISSN 0920-4105. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410518307174>>. Acesso em: 05 fev. 2023.