



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

Cônicas e métricas em $\mathbb{R}^2$

Márcio Hrycyk

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO/SP

2019



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Cônicas e métricas em $\mathbb{R}^2$

Márcio Hrycyk

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

Rio Claro
2019

H873c Hrycyk, Márcio
Cônicas e métricas em R^2 / Márcio Hrycyk. -- Rio Claro, 2019
97 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Eliris Cristina Rizziolli

1. Cônicas. 2. Métricas R^2 . I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Márcio Hrycyk

CÔNICAS E MÉTRICAS EM $\mathbb{R}^2$

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profª. Dra. Elíris Cristina Rizzioli
Orientadora

Profª. Dra. Daiane Alice Henrique Ament
Departamento de Ciências Exatas - UFLA

Profª. Dra. Renata Gomes Zotin de Oliveira
Departamento de Matemática-IGCE- UNESP

Rio Claro, 18 de dezembro de 2019

*A Deus.
À Minha esposa.
À Minha orientadora.
Aos Meus amigos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo que tem feito por mim, me protegendo para que eu possa chegar até esta etapa final.

Em especial à Minha orientadora Dra. Eliris Cristina Rizziolli, pela paciência e dedicação que teve por mim.

Dedico este trabalho também à minha querida esposa Marluce F. Hrycyk que sempre me dava aquela força especial dizendo que eu era capaz e aos meus filhos, Najila Hrycyk e Olavo Hrycyk.

À minha mãe Maria do Carmo Hrycyk e in memoriam ao meu pai Emilio Hrycyk que sempre me apoiou e incentivou a estudar.

Aos professores que participaram da banca pelas valiosas sugestões que irão sempre engrandecer o meu trabalho.

Aos professores e funcionários do mestrado que estiveram sempre me dando aquela força nas horas mais difíceis.

*Se A é o sucesso, então A é igual a X mais Y mais Z.
O trabalho é X;
Y é o lazer;
e Z é manter a boca fechada.
Albert Einstein*

Resumo

Este estudo tem como objetivo explorar as cônicas clássicas, a saber: elipse, hipérbole e parábola. Inicialmente será feita uma abordagem do ponto de vista geométrico e posteriormente um tratamento analítico através das três métricas usuais de $\mathbb{R}^2$: euclidiana, do máximo e a da soma.

Palavras-chave: Geometria, Métricas em $\mathbb{R}^2$, Cônicas.

Abstract

This study aims to explore the classic conics, namely: ellipse, hyperbole and parabole. Initially an approach will be made from the geometrical point of view and later an analytical treatment through the three usual $\mathbb{R}^2$: euclidean, maximum and sum metrics.

Keywords: Geometry, Metrics in $\mathbb{R}^2$, Conics.

Lista de Figuras

1	Corte para obter a hipérbole.	19
2	Corte para obter a elipse.	20
3	Corte para obter a parábola.	20
1.1	Representação da esfera $S((0, 0); 1)$ segundo a métricas d	25
1.2	Representação da esfera $S((0, 0); 1)$ segundo a métricas d'	26
1.3	Representação da esfera $S((0, 0); 1)$ segundo a métricas d''	26
1.4	Representação conjunta da esfera em $\mathbb{R}^2$, segundo as métricas d , d' e d''	27
2.1	Focos	30
2.2	Elipse com focos em OX	31
2.3	Elipse com focos em OY	32
2.4	Elipse do exemplo 2.1	33
2.5	Elipse do exemplo 2.2	33
2.6	Centro da hipérbole.	34
2.7	Retas focal e não focal.	35
2.8	Vértices imaginários.	35
2.9	Assíntotas.	36
2.10	Simetria da reta focal.	37
2.11	Simetria em relação ao centro	38
2.12	Hipérbole do exemplo 2.3	39
2.13	Representação geométrica de $x^2 = 4px$	41
2.14	Representação geométrica de $x^2 = -4px$	41
2.15	Representação geométrica de $x^2 = 4py$	42
2.16	Representação geométrica de $x^2 = -4py$	42
2.17	Parábola do exemplo 2.5	43
2.18	Parábola do exemplo 2.6	43
3.1	Representação da elipse com a métrica da soma, eixo OX	46
3.2	Representação da elipse com a métrica da soma, eixo OY	47
3.3	Elipse $\mathcal{E}$ para $x \geq 3$ e $y \geq 0$	48
3.4	Elipse $\mathcal{E}$ para $-3 \leq x < 3$ e $y \geq 0$	49
3.5	Elipse $\mathcal{E}$ para $x < -3$ e $y \geq 0$	49
3.6	Elipse $\mathcal{E}$ para $x \geq -3$ e $y < 0$	50
3.7	Elipse $\mathcal{E}$ para $-3 \leq x < 3$ e $y < 0$	50
3.8	Elipse $\mathcal{E}$ para $x < -3$ e $y < 0$	51
3.9	Elipse $\mathcal{E}$ em $(\mathbb{R}^2, d')$	52
3.10	Elipse $\mathcal{E}$ em $(\mathbb{R}^2, d')$, com centro fora da origem	53
3.11	Elipse do exemplo 3.2	54

3.12	Elipse do exemplo 3.3	55
3.13	Representação da hipérbole com a métrica da soma, focos no eixo OX	57
3.14	Representação da hipérbole com a métrica da soma, com focos no eixo OY	58
3.15	Hipérbole do exemplo 3.4	59
3.16	Hipérbole em $(\mathbb{R}^2, d')$ com centro fora da origem.	60
3.17	Hipérbole do exemplo 3.5.	61
3.18	Hipérbole do exemplo 3.6	62
3.19	Projeção ortogonal de P a reta r	63
3.20	Representação da parábola com a métrica da soma, com foco no eixo OX	65
3.21	Representação da parábola com a métrica da soma, com foco no eixo OY	66
3.22	Parábola $\mathcal{P}$ para $x \geq 2$ e $y \geq 0$	67
3.23	Parábola $\mathcal{P}$ para $-2 \leq x < 2$ e $y \geq 0$	68
3.24	Parábola $\mathcal{P}$ para $x \leq 2$ e $y < 0$	69
3.25	Parábola $\mathcal{P}$ para $-2 \leq x < 2$ e $y < 0$	69
3.26	Parábola $ y = x + 2 - x - 2 $ em $(\mathbb{R}^2, d')$	70
3.27	Parábola $(\mathbb{R}^2, d')$	71
3.28	Parábola do exemplo 3.9	72
4.1	Caso I - elipse com focos no eixo OX via métrica d''	74
4.2	Caso II - elipse com focos no eixo OX via métrica d''	75
4.3	Caso III - elipse com focos no eixo OX via métrica d''	76
4.4	Caso IV - elipse com focos no eixo OX via métrica d''	77
4.5	Caso I - elipse com focos no eixo OY via métrica d''	78
4.6	Caso II- elipse com focos no eixo OY via métrica d''	79
4.7	Caso III- elipse com focos no eixo OY via métrica d''	80
4.8	Caso IV - elipse com focos no eixo OY via métrica d''	81
4.9	Caso II- hipérbole com focos no eixo OX via métrica d''	83
4.10	Caso III- hipérbole com focos no eixo OX via métrica d''	84
4.11	Caso IV- hipérbole com focos no eixo OX via métrica d''	85
4.12	Caso II- hipérbole com focos no eixo OY via métrica d''	87
4.13	Caso III- hipérbole com focos no eixo OY via métrica d''	88
4.14	Caso IV- hipérbole com focos no eixo OY via métrica d''	89
4.15	Caso I- Parábola com foco no eixo OX	91
4.16	Caso II- Parábola com foco no eixo OX	92
4.17	Caso I- Parábola com foco no eixo OY	93
4.18	Caso II- Parábola com foco no eixo OY	94

Sumário

Introdução	19
1 Preliminares	23
1.1 Uma noção elementar sobre os espaços métricos	23
1.2 Geometria das cônicas clássicas	27
2 Cônicas e a métrica euclidiana	29
2.1 Elipse	29
2.2 Hipérbole	34
2.3 Parábola	40
3 Cônicas e a métrica da soma	45
3.1 Elipse	45
3.2 Hipérbole	56
3.3 Parábola	63
4 Cônicas e a métrica do máximo	73
4.1 Elipse	73
4.2 Hipérbole	81
4.3 Parábola	90
Referências	97

Introdução

O estudo das **cônicas clássicas** - a saber, elipse, hipérbole e parábola - remontam à antiga Grécia, com a investigação realizada pelos matemáticos gregos como: Menaechmus, Euclides, Arquimedes, Kleper e Apolônio.

Menaechmus estudou os diferentes tipos de secções planas de uma superfície cônica circular. Construiu curvas com as propriedades algébricas e consequentemente mostrou que o ponto de interseção delas daria as médias proporcionais desejadas. A descoberta da elipse parece ter sido feita também por ele como um simples subproduto da sua pesquisa. Portanto, Menaechmus é considerado na história como sendo o primeiro geômetra a elaborar uma representação estereométrica das seções cônicas. Analisando os dados de sua pesquisa percebeu-se que uma família de curvas adequadas, podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone.

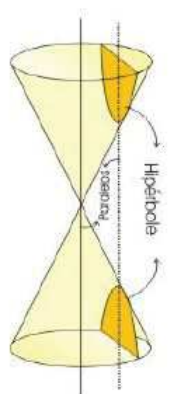


Figura-Corte da hipérbole.

Figura 1: Corte para obter a hipérbole.

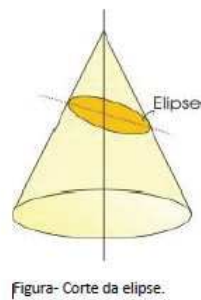


Figura 2: Corte para obter a elipse.

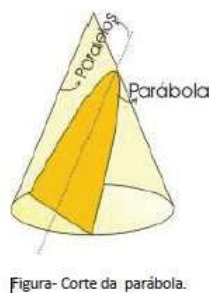


Figura 3: Corte para obter a parábola.

Nesta análise ele descobriu as curvas que posteriormente foram chamadas elipse, parábola e hipérbole. Não se sabe corretamente como Menaechmus determinava os pontos no plano pertencentes às curvas, mas um esboço certamente era possível usando o método euclidiano.

Euclides deu sua contribuição para os estudos das cônicas com um livro de sua autoria, citado anos mais tarde por Apolônio, mas que infelizmente não chegou aos nossos dias.

O matemático Apolônio aprofundou o estudo das cônicas, criando uma obra composta de oito livros sobre o estudo das cônicas. Ele deu nomes aos termos, elipse, parábola e a hipérbole, utilizados atualmente.

Johannes Kleper aprendeu Astronomia com Michael Maestlin, líder astrônomo. Relatando que a Astronomia do currículo era, obviamente, geocêntrica, pois parecia totalidade dos astrônomos que se sentiam satisfeitos em calcular a posição dos planetas e deixar os filósofos se preocuparem em saber os modelos matemáticos que correspondiam a mecanismos físicos. Kleper conclui que a órbita de Marte era uma elipse com o Sol sendo um dos seus focos. Na verdade, ele generalizou para os planetas, ficando conhecida como a primeira lei de Kleper, sendo uma das três leis do movimento planetário. A primeira lei de Kleper diz que o movimento dos planetas ocorre de forma elíptica e não de maneira circular. A segunda lei de Kleper determina que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo das distância a que estão do Sol. A terceira lei de Kleper, a lei dos períodos: os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas.

Neste trabalho estudaremos as cônicas elipse, hipérbole e parábola sob dois pontos

de vista: geométrico e analítico. Destacamos que a parte analítica é o cerne deste trabalho e exploraremos tais cônicas via as seguintes distâncias de $\mathbb{R}^2$: euclidiana, do máximo e da soma. Para tanto, primeiramente trataremos o conjunto $\mathbb{R}^2$ como espaço métrico munido de tais métricas. Num segundo momento apresentaremos estas cônicas como espaço geométrico no plano e finalizamos este assunto explorando cada cônica analiticamente através destas três métricas usuais de $\mathbb{R}^2$. Espera-se ainda utilizar o programa livre GeoGebra para confeccionar exemplos. A relevância deste tema proposto segue da inter e multidisciplinaridade que este promoverá já que o aluno terá que explorar conexões entre Geometria e Topologia.

Este material está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo dá uma introdução às métricas e as cônicas como lugar geométrico. Os demais capítulos tratam cada cônica clássica analiticamente de acordo com uma métrica específica: o capítulo 02 apresenta a análise das cônicas com a métrica euclidiana, o capítulo 03 com a métrica da soma e o capítulo 04 com a métrica do máximo, respectivamente.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas noções sobre espaços métricos e a geometria euclidiana das cônicas que são necessárias para o desenvolvimento dos próximos capítulos deste trabalho.

1.1 Uma noção elementar sobre os espaços métricos

Primeiramente apresentamos a noção de um espaço métrico e posteriormente estudamos o caso em particular quando consideramos o conjunto $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.1. *Uma métrica em um conjunto M (não-vazio) é uma aplicação $D : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $(x, y) \in M \times M$ um número real $D(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

$$d1) \ D(x, x) = 0;$$

$$d2) \ \text{Se } x \neq y \text{ então } D(x, y) > 0;$$

$$d3) \ D(x, y) = D(y, x);$$

$$d4) \ D(x, z) \leq D(x, y) + D(y, z).$$

Os postulados $d1$ e $d2$ dizem que $D(x, y) \geq 0$ e que $D(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado $d3$ afirma que a distância $D(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y . A condição $d4$ chama-se desigualdade triangular, e esse nome tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Um espaço métrico é um par (M, D) , onde M é um conjunto não-vazio e D é uma métrica em M . Por vezes, diremos simplesmente “o espaço métrico M ”, deixando subentendida qual a métrica D que está sendo considerada.

Exemplo 1.2. A métrica “zero-um”. Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples: basta definir a métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tomando $D(x, x) = 0$ e $D(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

Exemplo 1.3. Na reta, ou seja, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é possível definir a distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ por $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a chamada métrica usual da reta.

Exemplo 1.4. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$. Há três maneiras canônicas de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, escrevemos:

1. $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$
2. $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$
3. $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas, chamadas respectivamente de *métrica euclidiana*, *métrica da soma* e *métrica do máximo*.

Em particular para $\mathbb{R}^2$, temos: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

1. $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$
2. $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$
3. $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$

Definição 1.5. Seja a um ponto no espaço métrico (M, D) . Dado um número real $r > 0$, definimos:

A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r . Ou seja,

$$B(a; r) = \{x \in M; D(x, a) < r\}. \quad (1.1)$$

A **bola fechada** de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$ dos pontos de M que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto a . Ou seja,

$$B[a; r] = \{x \in M; D(x, a) \leq r\}. \quad (1.2)$$

A **esfera** de centro a e raio r é o conjunto $S(a; r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x, a) = r$. Assim:

$$S(a; r) = \{x \in M; D(x, a) = r\}. \quad (1.3)$$

Veja que: $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$

Exemplo 1.6. No plano $\mathbb{R}^2$, a bola aberta $B(a; r)$ é o interior de um círculo de centro a e raio r , ou o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$, ou então o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos. Estes casos correspondem a usarmos em $\mathbb{R}^2$ as métricas d, d' ou d'' , respectivamente. A esfera $S(a; r)$ é o bordo da figura correspondente e $B[a; r]$, que é igual à reunião $B(a; r) \cup S(a; r)$.

De fato, sejam $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, r > 0$.

- $B_d(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((a_1, a_2), (x, y)) < r\}$
 $B_d(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r\}$
 $B_d(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}$,
 que é o interior de uma circunferência de centro em a e raio r , ou seja, o interior da esfera de centro em a e raio r .
- $B_{d'}(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d'((a_1, a_2), (x, y)) < r\}$
 $B_{d'}(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a_1| + |y - a_2| < r\}$.
 Veja que a inequação modular $|x - a_1| + |y - a_2| < r$ é estudada através da análise dos seguintes casos:

- (i) $(x - a_1) + (y - a_2) < r$.
- (ii) $-(x - a_1) + (y - a_2) < r$.
- (iii) $(x - a_1) + -(y - a_2) < r$.
- (iv) $-(x - a_1) + -(y - a_2) < r$.

Assim, $B_{d'}(a; r)$ é o interior do paralelogramo delimitado pelas regiões (i), (ii), (iii) e (iv), ou seja, o interior da esfera de centro em a e raio r .

- $B_{d''}(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d''((a_1, a_2), (x, y)) < r\}$
 $B_{d''}(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} < r\}$.
 Veja que sendo $\max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} < r$ segue que $|x - a_1| < r$ e $|y - a_2| < r$. Logo, $B_{d''}(a; r)$ é o interior do quadrado dado por $|x - a_1| = r$ e $|y - a_2| = r$, ou seja, o interior da esfera de centro em a e raio r .

Veja a seguir como é representada uma esfera em $\mathbb{R}^2$, de centro na origem $(0, 0)$ e raio 1, considerando cada métrica específica:

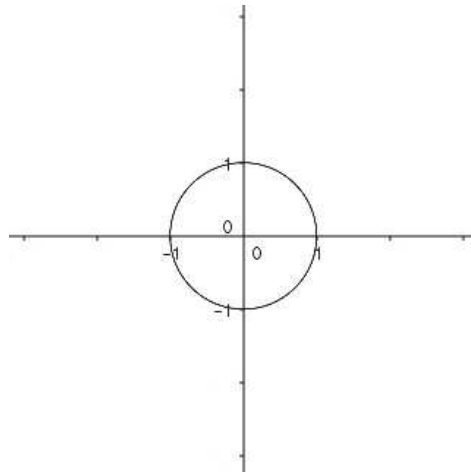


Figura 1.1: Representação da esfera $S((0, 0); 1)$ segundo a métricas d

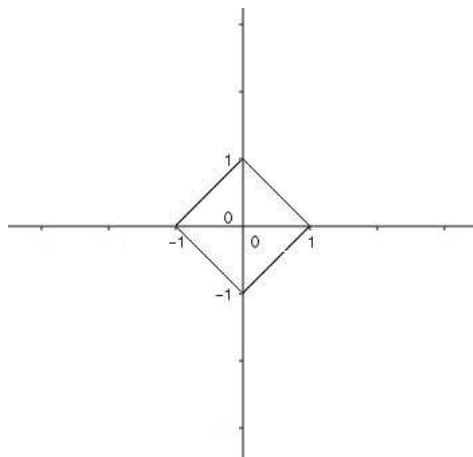


Figura 1.2: Representação da esfera $S((0,0);1)$ segundo a métricas d'

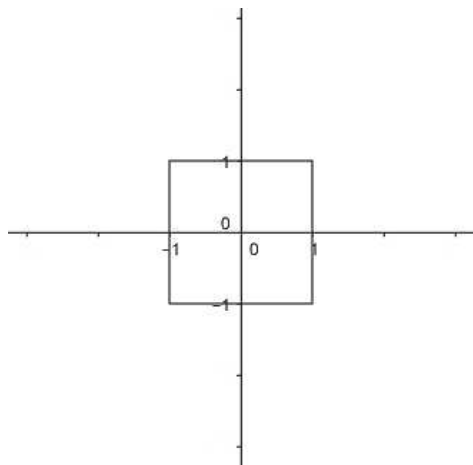


Figura 1.3: Representação da esfera $S((0,0);1)$ segundo a métricas d''

É possível mostrar a seguinte propriedade entre as métricas d , d' e d'' de $\mathbb{R}^2$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq 2d''(x, y)$$

e este fato pode ser observado pela relação geométrica entre as esferas em cada métrica:

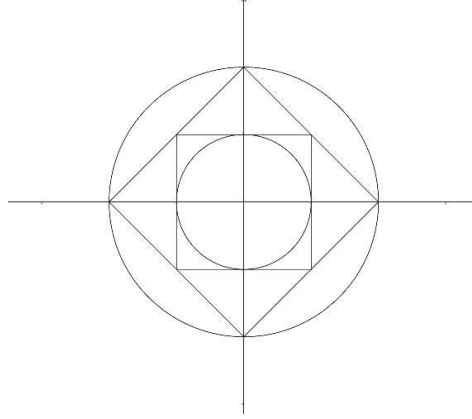


Figura 1.4: Representação conjunta da esfera em $\mathbb{R}^2$, segundo as métricas d , d' e d''

1.2 Geometria das cônicas clássicas

A seguir apresentamos as três cônicas que são estudadas em nosso trabalho: elipse, parábola e hipérbole, do ponto de vista da geometria euclidiana.

Definição 1.7. A elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano π cuja soma das distâncias a F_1 e a F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância, $2c \geq 0$, entre os focos.

Sendo $0 < c < a$ e $D(F_1, F_2) = 2c$, então

$$\mathcal{E} := \{P \in \pi : D(P, F_1) + D(P, F_2) = 2a\}.$$

Definição 1.8. A hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano π cujo valor absoluto da diferença entre as distâncias de P a F_1 e a F_2 é igual a uma constante $2a > 0$ maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$.

Sendo $0 < a < c$ e $D(F_1, F_2) = 2c$, então

$$\mathcal{H} := \{P \in \pi : |D(P, F_1) - D(P, F_2)| = 2a\}.$$

Definição 1.9. A parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz r é o conjunto dos pontos P do plano π cujas distâncias de P a F e a r são iguais, ou seja,

$$\mathcal{P} := \{P \in \pi : D(P, F) = D(P, r)\}.$$

2 Cônicas e a métrica euclidiana

As seguir estudamos analiticamente cada cônica clássica considerando $\mathbb{R}^2$ munido da métrica euclidiana d .

2.1 Elipse

Como sabemos, na disciplina de Geometria Analítica, a elipse é explorada analiticamente usando a métrica euclidiana. Nessa seção, primeiramente apresentamos a terminologia usada neste contexto e posteriormente exploramos a forma canônica da elipse.

Terminologia

- Como visto na definição, os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da elipse.
- A reta ℓ que contém os focos é a *reta focal* (Figura 3.1).
- A interseção da elipse com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2 , chamados *vértices* da elipse sobre a reta focal.

De fato, seja $A \in \mathcal{E} \cap \ell$. Então, $A \notin F_1F_2$, pois, se $A \in F_1F_2$, teríamos $2c = d(F_1, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$, o que é impossível, uma vez que, por definição, $2c < 2a$.

Seja $A_2 \in (\mathcal{E} \cap \ell) - F_1F_2$ tal que F_2 está entre F_1 e A_2 e $x = d(A_2, F_2)$, como na Figura 3.1:

Como $A_2 \in \mathcal{E}$, temos:

$$2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x = 2x + 2c \implies x = a - c.$$

Logo, o ponto $A_2 \in \ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_2 , tal que F_2 está entre F_1 e A_2 , pertence a elipse $\mathcal{E}$. Analogamente, o ponto $A_1 \in \ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_1 , tal que F_1 está entre A_1 e F_2 , pertence a elipse $\mathcal{E}$.

- O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o *eixo focal* da elipse.
- O *centro* C da elipse é o ponto médio do eixo focal A_1A_2 .

Note que o centro C é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos.

- A *reta não focal* é a reta ℓ' perpendicular a ℓ que passa pelo centro C .

- A elipse intersecta a reta não focal ℓ' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2 , denominados *vértices da elipse sobre a reta não focal*.

De fato, como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2 , temos que $B \in \ell' \cap \mathcal{E}$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Logo, pelo teorema de Pitágoras, $\ell' \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos em ℓ' , B_1 e B_2 , que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

- O segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, em que $b^2 = a^2 - c^2$, é o *eixo não focal* da elipse.
- O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse. Note que $0 \leq e < 1$.
- O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta e c é a distância do centro aos focos.

Ilustramos todos esses objetos na seguinte figura:

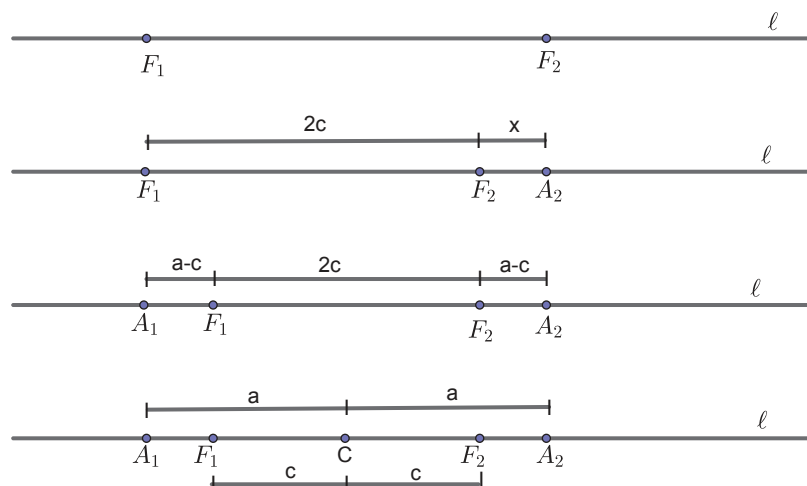


Figura 2.1: Focos

Forma canônica da elipse

A partir da definição da elipse, vamos obter uma equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para o caso em que a elipse $\mathcal{E}$ tem centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Neste caso, os vértices e focos de $\mathcal{E}$ são: $F_1 = (-c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_2 = (a, 0)$ e $B_2 = (0, b)$, em que $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Logo, para qualquer $P = (x, y) \in \mathcal{E}$, temos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A rigor, precisamos mostrar que se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então $a^2 + cx \geq 0$ e $2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0$.

A equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

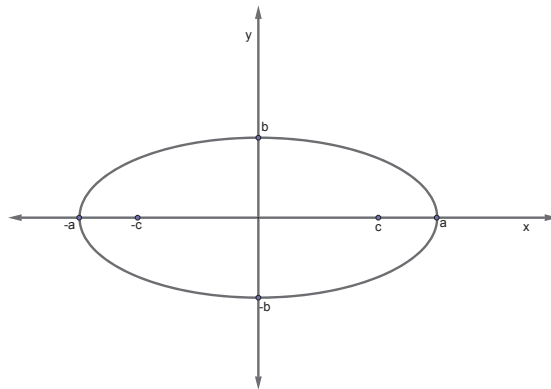


Figura 2.2: Elipse com focos em OX .

Analisemos agora o caso em que a elipse tem centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY . Neste caso os focos e os vértices da elipse $\mathcal{E}$ são:

$F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, em que $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Usando a mesma argumentação do caso anterior, verificamos que a forma canônica da elipse $\mathcal{E}$ centrada na origem, cuja reta focal coincide com o eixo OY , é dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

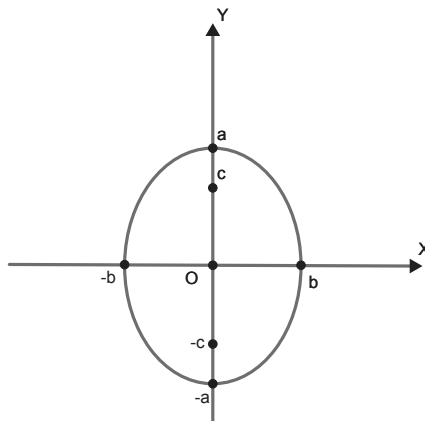


Figura 2.3: Elipse com focos em OY .

Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 2.1. Vejamos como determinar a equação de uma elipse $\mathcal{E}$ tal que os vértices são $(4, 0)$ e $(-4, 0)$ e seus focos são $(3, 0)$ e $(-3, 0)$.

Como $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$, a reta focal é o eixo OX enquanto que $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$ são vértices sobre a reta focal ℓ . Então $C = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{A_1 + A_2}{2} = (0, 0)$ é o centro da elipse, $a = d(C, A_1) = d(C, A_2) = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Logo, a equação da elipse $\mathcal{E}$ é $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

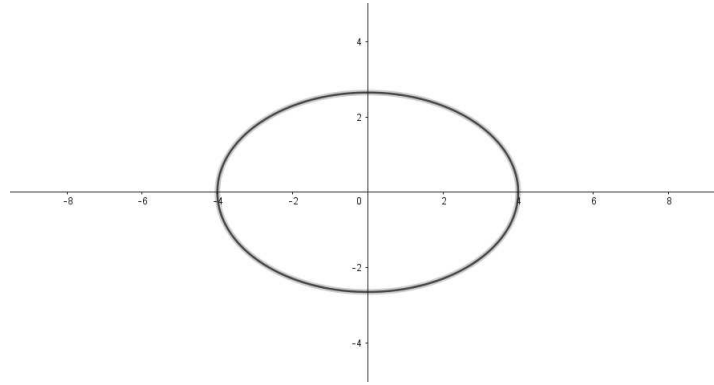


Figura 2.4: Elipse do exemplo 2.1

Exemplo 2.2. Vamos determinar a equação de uma elipse $\mathcal{E}$ tal que os vértices são $(0, 6)$ e $(0, -6)$ e seus focos são $(0, 4)$ e $(0, -4)$. Uma vez que $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$ segue que a reta focal é o eixo OY , os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (0, -6)$ e $A_2 = (0, 6)$ e o centro da elipse $\mathcal{E}$ é a origem, pois $C = \frac{(0, 4) + (0, -4)}{2} = (0, 0)$. Como $a = d(C, A_1) = 6$ e $c = d(C, F_1) = 4$, temos que $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$.

Assim a equação dessa elipse é dada por $\frac{x^2}{(\sqrt{20})^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$.

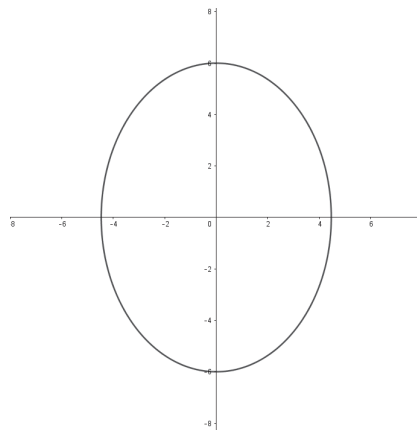


Figura 2.5: Elipse do exemplo 2.2

2.2 Hipérbole

Terminologia

- Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da hipérbole e a reta ℓ que os contém é a *reta focal*.
- A interseção da hipérbole $\mathcal{H}$ com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2 , chamados *vértices* da hipérbole.

Note que se $P \in \ell - F_1F_2$, então $P \notin \mathcal{H}$, de fato: se o ponto P pertence a semirreta de origem F_1 que não contém F_2 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin \mathcal{H}$, pois: $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |x - (x + 2c)| = 2c > 2a$. E se P pertence a semireta de origem F_2 que não contém F_1 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin \mathcal{H}$, pois: $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |(x + 2c) - x| = 2c > 2a$.

Seja, então, $A_1 \in F_1F_2 \cap \mathcal{H}$ tal que $d(A_1, F_1) = x$ e $0 < x < c$.

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, temos:

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a$$

$$\Leftrightarrow |x - (2c - x)| = 2a$$

$$\Leftrightarrow |2x - 2c| = 2a \Leftrightarrow 2c - 2x = 2a$$

$$\Leftrightarrow x = c - a.$$

Logo, o ponto A_1 de F_1F_2 , distante $c - a$ de F_1 , pertence à hipérbole $\mathcal{H}$. Analogamente, o ponto A_2 de F_1F_2 distante $c - a$ de F_2 , pertence à hipérbole $\mathcal{H}$.

- O segmento A_1A_2 é denominado *eixo focal* da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$
- O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o *centro* da hipérbole.

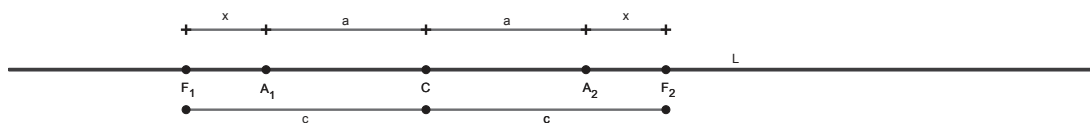


Figura 2.6: Centro da hipérbole.

O centro C é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos:

$$C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}. \text{ Observe que } d(C, F_1) = d(C, F_2) = c \text{ e } d(C, A_1) = d(C, A_2) = a.$$

- A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular a reta focal ℓ é a *reta não focal* da hipérbole. Como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2 , a hipérbole não intersecta a reta não focal ℓ' , pois, se $P \in \ell'$, temos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a.$$

A figura a seguir representa as retas focal e não focal:

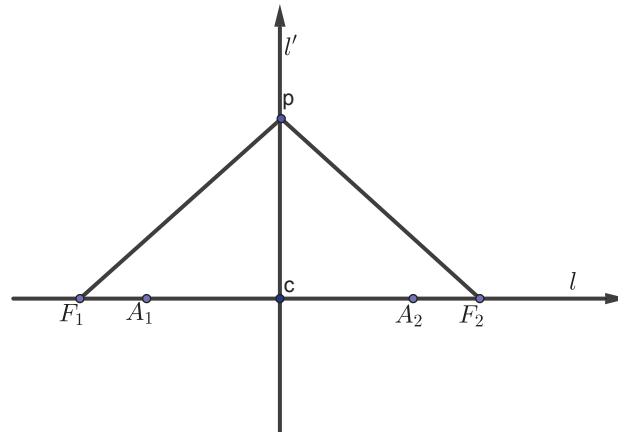


Figura 2.7: Retas focal e não focal.

- O segmento B_1B_2 , perpendicular ao eixo focal que tem ponto médio C e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado *eixo não focal* da hipérbole, e B_1 e B_2 são os *vértices imaginários* da hipérbole.

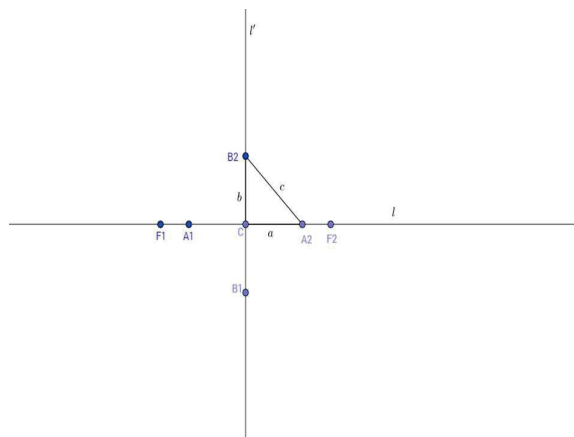


Figura 2.8: Vértices imaginários.

- A *excentricidade* da hipérbole $\mathcal{H}$ é $e = \frac{c}{a}$. Note que $e > 1$, pois $c > a$.
- O *retângulo de base* da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo cujos lados têm A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são assíntotas de $\mathcal{H}$ (Figura 3.8). Portanto, as *assíntotas* de $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação à reta focal. Assim, ℓ e ℓ' são as bissetrizes das assíntotas.

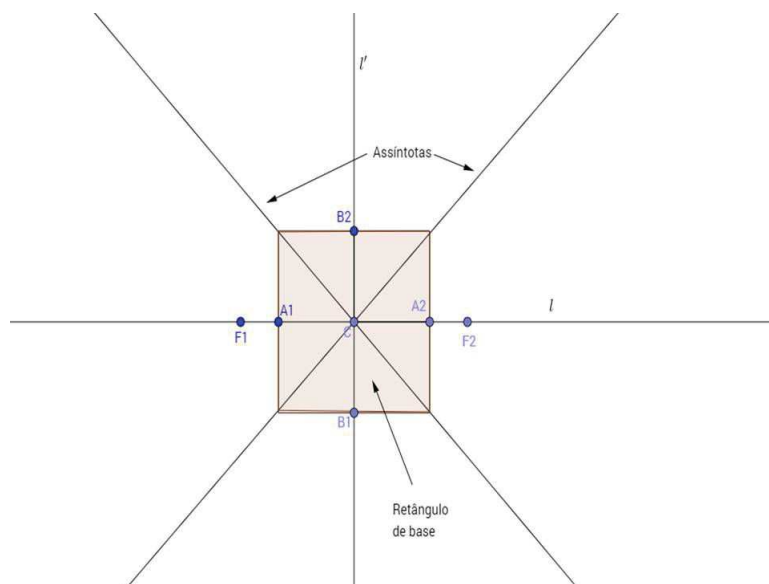


Figura 2.9: Assíntotas.

- Pelo teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ têm comprimento $2c$, pois a distância do centro C de $\mathcal{H}$ a qualquer vértice do retângulo de base é igual a c . Dizemos que uma hipérbole é *equilátera* se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, isto é, $a = b$. O retângulo de base de uma hipérbole equilátera é um quadrado e as assíntotas se intersectam perpendicularmente.
- Duas hipérboles são *conjugadas* se o eixo focal de cada uma é o eixo não focal da outra. Duas hipérboles conjugadas possuem o mesmo retângulo de base, o mesmo centro, as mesmas assíntotas e os focos estão a uma mesma distância do centro.

Apresentada essa terminologia, observe que uma hipérbole é simétrica em relação a reta focal, à reta não focal e ao centro. Com efeito,

- Simetria de $\mathcal{H}$ em relação à reta focal: se $P \in \mathcal{H}$ e P' é o simétrico de P em relação a reta focal, então $\triangle F_1 P Q \equiv \triangle F_1 P' Q$ e $\triangle F_2 P Q \equiv \triangle F_2 P' Q$ e deste fato segue, em particular, que $|F_2 P| = |F_2 P'|$ e $|F_1 P| = |F_1 P'|$.

Logo, $|d(P', F_1) - d(P', F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P' \in \mathcal{H}$.

A figura a seguir representa tal simetria:

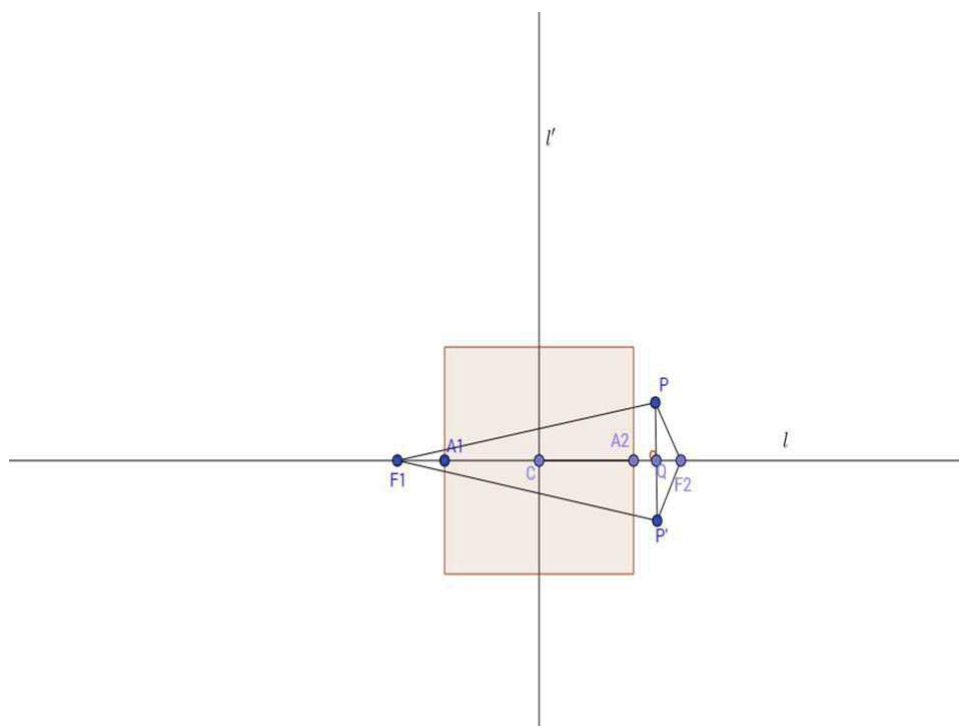


Figura 2.10: Simetria da reta focal.

- Simetria em relação à reta não focal: se verifica de maneira análoga ao item anterior.
- Simetria de $\mathcal{H}$ em relação ao centro:

Se $P \in \mathcal{H}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então: $\triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP''$ e $\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1$.

Em particular,

$$|F_2P| = |F_1P''| \text{ e } |F_1P| = |F_2P''|.$$

Logo, $|d(P'', F_2) - d(P'', F_1)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P'' \in \mathcal{H}$, conforme figura a seguir:

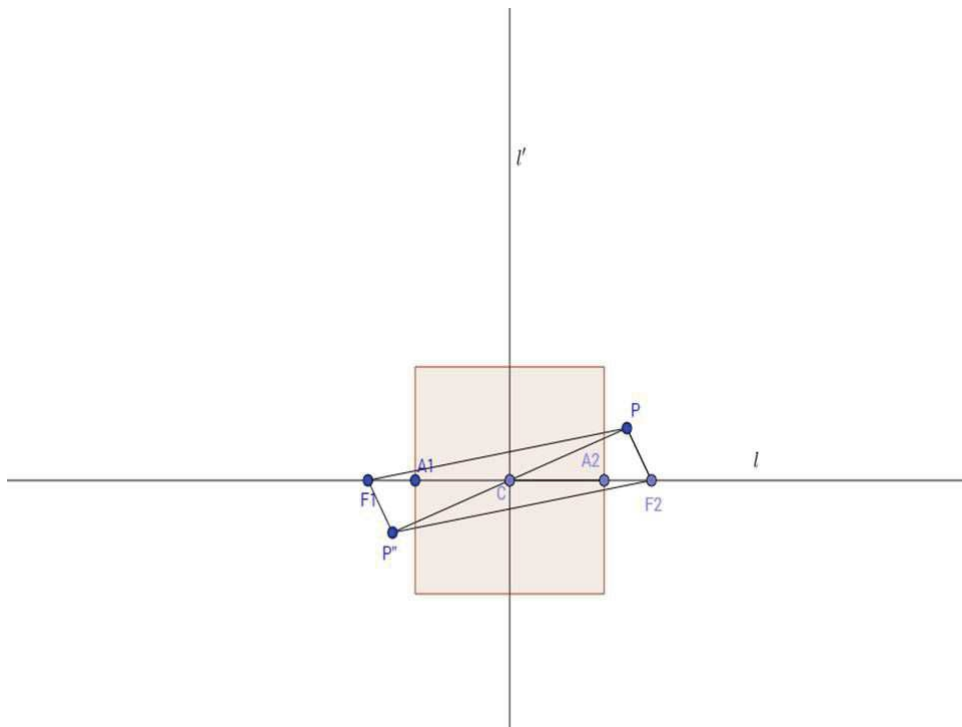


Figura 2.11: Simetria em relação ao centro

Forma canônica da hipérbole

Do mesmo modo que fizemos para a elipse, vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY . Primeiramente tratamos do caso em que o eixo focal é o eixo OX e com centro na origem. A saber, os focos são dados por $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e os vértices: $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$.

Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ e isso equivale a:

$$\begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a & (\text{ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a & (\text{ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a & (\text{ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a & (\text{ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos a conclusão que

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Vejam agora o caso em que a hipérbole tem centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY . Neste caso, temos os focos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$ e os vértices $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, onde $b^2 = c^2 - a^2$. Procedendo como anteriormente obtemos a seguinte forma canônica da hipérbole, de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY :

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Veja que as assíntotas são as retas $x = \pm \frac{b}{a}y$, ou seja, $ax - by = 0$ e $ax + by = 0$.

Exemplo 2.3. Determinemos a equação da hipérbole equilátera com focos $(-\sqrt{8}, 0)$ e $(\sqrt{8}, 0)$. De fato: temos que $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$, o centro da hipérbole é $C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (0, 0)$ e a reta focal é o eixo OX . Sendo a hipérbole equilátera ($a = b$), $c = \sqrt{8}$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos que $8 = a^2 + a^2 = 2a^2$, isto é, $a^2 = 4$.

Logo, $a = b = 2$ e $\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ é a equação da hipérbole.

Além disso, $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$ são os vértices, enquanto que $B_1 = (0, -2)$ e $B_2 = (0, 2)$ são os vértices imaginários e $y = \pm x$ são as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$.

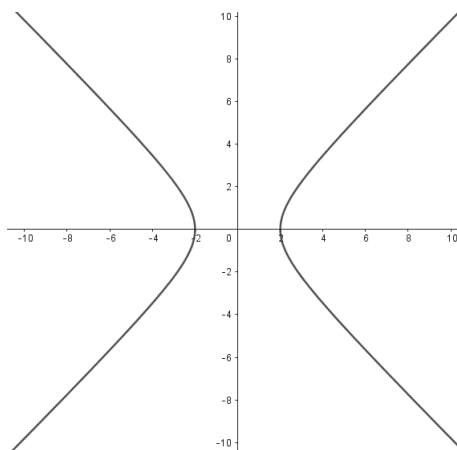


Figura 2.12: Hipérbole do exemplo 2.3

Exemplo 2.4. Mostremos que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$.

Como $a = b$ e $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$.

Então: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$.

2.3 Parábola

Terminologia

- O ponto F é o foco e a reta L é a diretriz da parábola $\mathcal{P}$.
- A *reta focal* ℓ da parábola $\mathcal{P}$ é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.
- O ponto V da parábola $\mathcal{P}$ que pertence à reta focal é o *vértice* de $\mathcal{P}$. Em particular, se A é o ponto onde L intercepta ℓ , então V é o ponto médio do segmento AF .
- O número $2p = d(F, L)$ é o *parâmetro* da parábola $\mathcal{P}$.

Note que $d(V, F) = d(V, L) = p$.

Veja que toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal. De fato, considere $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F , vértice V , diretriz L e reta focal ℓ . Sejam $P \in \mathcal{P}$, qualquer, e P' o ponto simétrico de P em relação à reta ℓ . O segmento $PP' \perp \ell$ intersecta a reta focal ℓ num ponto Q que é o ponto médio do segmento PP' . Observe que os triângulos $\triangle PQF$ e $\triangle P'QF$ são congruentes e em particular, $d(P, F) = d(P', F)$.

Além disso, $d(P, L) = d(Q, L) = d(P', L)$, pois $BPQA$ e $AQP'B'$ são retângulos. Como $P \in \mathcal{P}$, temos $d(P, F) = d(P, L)$. Portanto, $d(P', F) = d(P', L)$, isto é, $P' \in \mathcal{P}$.

Forma canônica da parábola

Vamos obter as formas canônicas da parábola $\mathcal{P}$ em relação a um sistema de coordenadas OXY . Apresentamos os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados.

- Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Caso I. O foco F está a direita da diretriz r .

Como o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é a origem $V = (0, 0)$, temos que o foco é o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz é a reta $r : x = -p$, onde $2p = d(P, r)$.

Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{P}$$

$$\Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

$$\Leftrightarrow (x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

$$\Leftrightarrow -2px + y^2 = 2px$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 4px$$

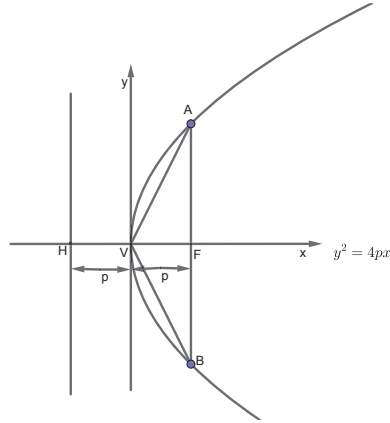


Figura 2.13: Representação geométrica de $x^2 = 4px$

Caso II. O foco F está à esquerda da diretriz r .

Neste caso, $F = (-p, 0)$ e $r : x = p$, onde $2p = d(F, r)$.

Então,

$$P = (x, y) \in \mathcal{P}$$

$$\Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x-p|$$

$$\Leftrightarrow (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2$$

$$\Leftrightarrow 2px + y^2 = -2px$$

$$\Leftrightarrow y^2 = -4px.$$

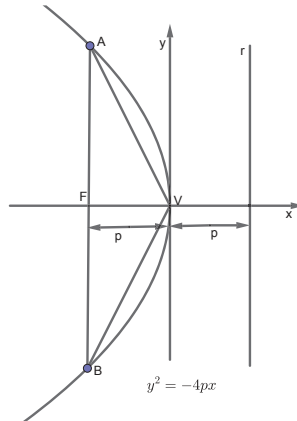


Figura 2.14: Representação geométrica de $x^2 = -4px$

- Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY .

Caso I. O foco F está acima da diretriz r .

Neste caso, $F = (0, p)$ e $r : y = -p$, onde $2p = d(F, r)$. Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Leftrightarrow x^2 = 4py.$$

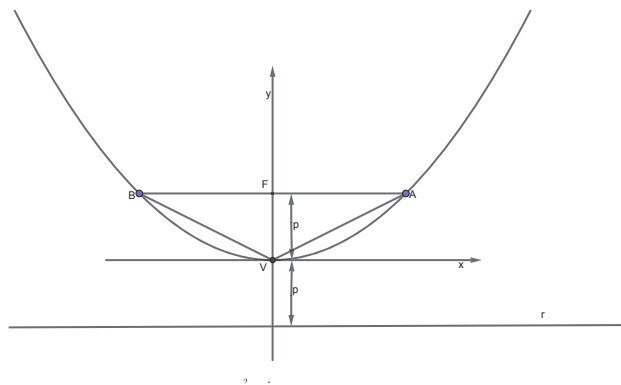


Figura 2.15: Representação geométrica de $x^2 = 4py$

Caso II. O foco F está abaixo da diretriz r .

Neste caso, $F = (0, -p)$ e $r : y = p$, onde $2p = d(F, r)$. Logo,

$P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y + p)^2} = |y - p| \Leftrightarrow x^2 = -4py.$$

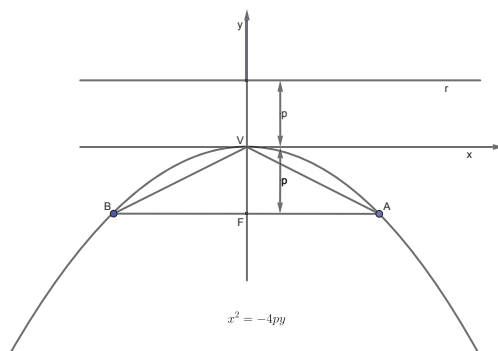


Figura 2.16: Representação geométrica de $x^2 = -4py$

Exemplo 2.5. Vamos determinar a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo o foco é $F = (3, 0)$. Neste caso temos $p = d(V, F) = 3$ e a reta focal igual ao eixo OX . Como o foco F está à direita do vértice, temos que a diretriz é a reta $x = -3$, e a equação da parábola $\mathcal{P}$ é dada por $y^2 = 12x$.

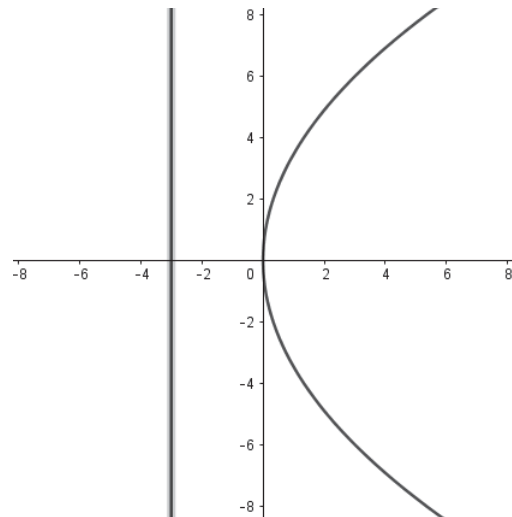


Figura 2.17: Parábola do exemplo 2.5

Exemplo 2.6. Vamos determinar a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo o foco é $F = (0, -2)$,

Veja que $p = d(V, F) = 2$ e a reta focal é igual ao eixo OY . Como o foco F está à baixo do vértice, temos que a diretriz é a reta $y = 2$, e a equação da parábola $\mathcal{P}$: $x^2 = -8y$.

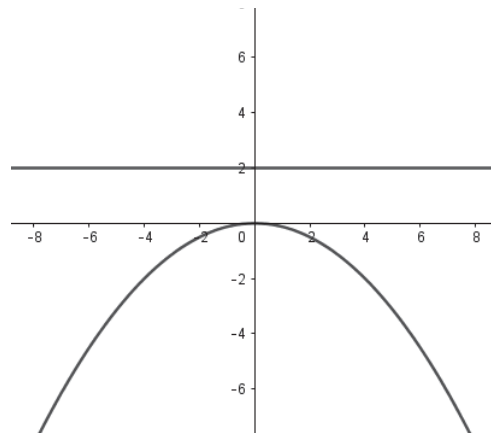


Figura 2.18: Parábola do exemplo 2.6

no capítulo seguinte abordaremos as cônicas usando a métrica da soma.

3 Cônicas e a métrica da soma

3.1 Elipse

Sabemos que a elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Sendo $0 < c < a$ e $D(F_1, F_2) = 2c$, então

$$\mathcal{E} := \{P \in \mathbb{R}^2 : D(P, F_1) + D(P, F_2) = 2a\}.$$

A seguir apresentamos um tratamento para a elipse considerando a métrica d' , da soma, e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica quando seu centro está na origem. Primeiramente quando os focos estão no eixo OX e posteriormente analisamos quando os focos estão no eixo OY .

Com efeito, sejam $c, a \in \mathbb{R}$ tais que $0 < c < a$ e suponha que $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $d'(P, F_1) + d'(P, F_2) = 2a$. Consequentemente:

$$d'(P, F_1) + d'(P, F_2) = 2a \Rightarrow d'((x, y), (c, 0)) + d'((x, y), (-c, 0)) = 2a \Rightarrow$$

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a.$$

Analisemos cada caso:

1. $x \geq c$, $y \geq 0$ e $x \geq -c$:

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow x - c + y + x + c + y = 2a \Rightarrow 2x + 2y = 2a \Rightarrow y = -x + a.$$

2. $x < c$, $y \geq 0$ e $x \geq -c$:

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow -x + c + y + x + c + y = 2a \Rightarrow y = a - c.$$

3. $x < c$, $y \geq 0$ e $x < -c$:

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow -x + c + y - x - c + y = 2a \Rightarrow y = x + a.$$

4. $x \geq c$, $y < 0$ e $x \geq -c$:

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow x - c - y + x + c - y = 2a \Rightarrow 2x - 2y = 2a \Rightarrow y = x - a.$$

5. $x < c$, $y < 0$ e $x \geq -c$:

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow -x + c - y + x + c - y = 2a \Rightarrow 2c - 2y = 2a \Rightarrow y = c - a = -(a - c).$$

6. $x < c$, $y < 0$ e $x < -c$:

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow -x + c - y - x - c - y = 2a \Rightarrow -2x - 2y = 2a \Rightarrow y = -x - a.$$

Geometricamente,

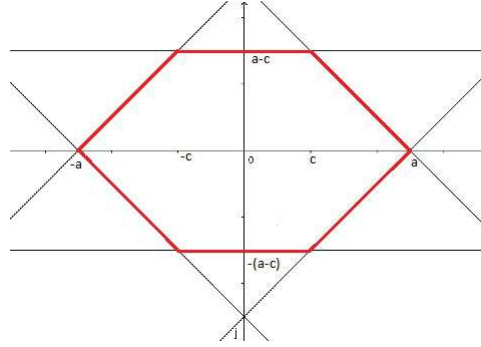


Figura 3.1: Representação da elipse com a métrica da soma, eixo OX .

Vejam agora a configuração da elipse com métrica da soma no caso em que os focos estão no eixo OY . Para tanto, sejam $c, a \in \mathbb{R}$ tais que $0 < c < a$ e suponha que $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $d'(P, F_1) + d'(P, F_2) = 2a$. Consequentemente:

$$d'(P, F_1) + d'(P, F_2) = 2a \Rightarrow d'((x, y), (0, c)) + d'((x, y), (0, -c)) = 2a \Rightarrow$$

$$(|x| + |y - c|) + (|x| + |y + c|) = 2a.$$

Analisemos cada caso:

1. $y \geq c$, $x \geq 0$ e $y \geq -c$:

$$(|x| + |y - c|) + (|x| + |y + c|) = 2a \Rightarrow x + (y - c) + x + (y + c) = 2a \Rightarrow 2x + 2y = 2a \Rightarrow y = -x + a.$$

2. $y < c$, $x \geq 0$ e $y \geq -c$:

$$(|x| + |y - c|) + (|x| + |y + c|) = 2a \Rightarrow x - (y - c) + x + (y + c) = 2a \Rightarrow 2x + 2c = 2a \Rightarrow x = a - c.$$

3. $y < c$, $x \geq 0$ e $y < -c$:

$$(|x| + |y - c|) + (|x| + |y + c|) = 2a \Rightarrow x - (y - c) + x - (y + c) = 2a \Rightarrow 2x - 2y = 2a \Rightarrow y = x - a.$$

4. $x \geq c$, $y < 0$ e $x \geq -c$:

$$(|x| + |y - c|) + (|x| + |y + c|) = 2a \Rightarrow -x + (y - c) - x + (y + c) = 2a \Rightarrow -2x + 2y = 2a \Rightarrow y = x + a.$$

5. $y < c$, $x < 0$ e $y \geq -c$:

$$(|x| + |y - c|) + (|x| + |y + c|) = 2a \Rightarrow -x - (y - c) - x + (y + c) = 2a \Rightarrow 2c - 2x = 2a \Rightarrow x = c - a = -(a - c).$$

6. $y < c$, $x < 0$ e $y < -c$:

$$(|x| + |y - c|) + (|x| + |y + c|) = 2a \Rightarrow -x - (y - c) - x - (y + c) = 2a \Rightarrow -2x - 2y = 2a \Rightarrow y = -x - a.$$

Geometricamente,

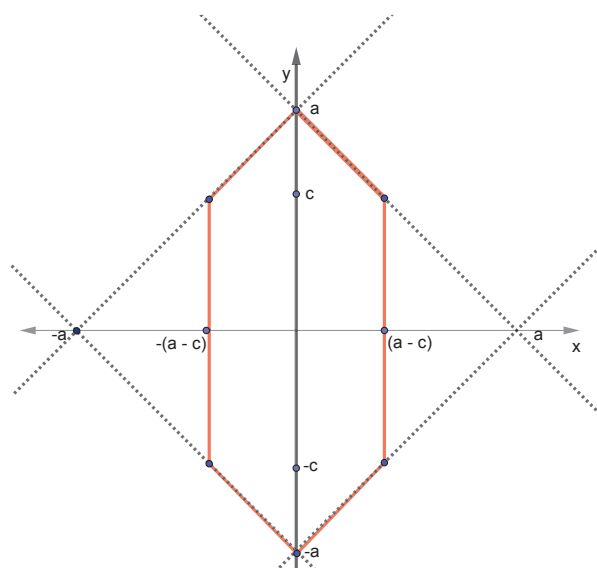


Figura 3.2: Representação da elipse com a métrica da soma, eixo OY .

Exemplo 3.1. Vamos determinar a equação da elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem, com os focos $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e eixo menor igual a 2.

Pelas informações tem-se:

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3; 2b = 2 \Rightarrow b = 1.$$

Utilizando a relação $a = b + c$ se obtém $a = 1 + 3 = 4$.

Assim, a equação desta elipse no espaço $(\mathbb{R}^2, d')$ será:

$$2|y| + |x + 3| + |x - 3| = 2a \Rightarrow 2|y| + |x + 3| + |x - 3| = 8$$

Agora devemos analisar todas as condições modulares na equação.

Como

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 3, & \text{se } x < -3, \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3, & \text{se } x < 3, \end{cases}$$

e

$$|y| = \begin{cases} y, & \text{se } y \geq 0 \\ -y, & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

tem-se:

- (i) Para $x \geq -3, x \geq 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |x + 3| + |x - 3| = 2y + x + 3 + x - 3 = 2y + x + 3 + x - 3 = 2y + 2x = 8$, o que implica que $y = -x + 4$. A representação gráfica, nestas condições, é dada por:

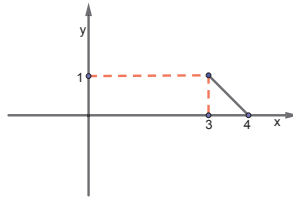


Figura 3.3: Elipse $\mathcal{E}$ para $x \geq 3$ e $y \geq 0$.

- (ii) Para $x \geq -3, x < 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |x + 3| + |-x + 3| = 2y + x + 3 + (-x + 3) = 2y + 6 = 8$, o que implica que $y = 1$. A representação gráfica, nestas condições, é dada por :
- (iii) Para $x < -3, x \geq 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |-x - 3| + |x - 3| = 2y - x - 3 + x - 3 = 2y - 6 = 8$, o que implica que $y = 7$. Nota-se que, para $x < -3$ e $x \geq 3$ não existe intersecção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para esse caso.

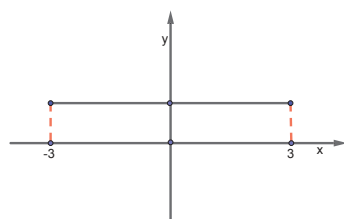


Figura 3.4: Elipse $\mathcal{E}$ para $-3 \leq x < 3$ e $y \geq 0$.

- (iv) Para $x < -3$, $x < 3$ e $y \geq 0$, tem-se $2|y| + |-x-3| + |-x+3| = 2y - x - 3 - x + 3 = 2y - 2x = 8$, o que implica que $y = x + 4$ para $x < -3$. A representação gráfica, nestas condições, é dada por:

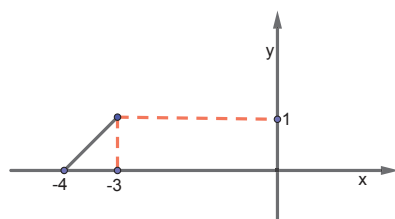


Figura 3.5: Elipse $\mathcal{E}$ para $x < -3$ e $y \geq 0$.

- (v) Para $x \geq -3, x \geq 3$ e $y < 0$, tem-se $2|y| + |x+3| + |x-3| = -2y + x + 3 + x - 3 = -2y + 2x = 8$, o que implica que $-y + x = 4 \Leftrightarrow y = x - 4$. A representação gráfica, nestas condições, é dada por:

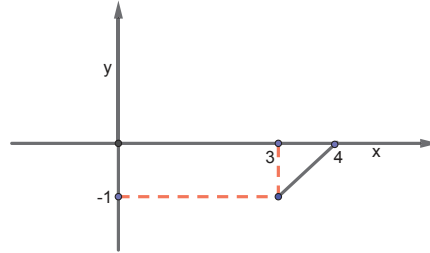


Figura 3.6: Elipse $\mathcal{E}$ para $x \geq -3$ e $y < 0$.

- (vi) Para $x \geq -3, x < 3$ e $y < 0$, tem-se $2|-y| + |x+3| + |-x+3| = -2y + x + 3 - x + 3 = -2y + 6 = 8$, o que implica que $-2y = 2 \Leftrightarrow y = -1$. A representação gráfica, nestas condições, é dada por

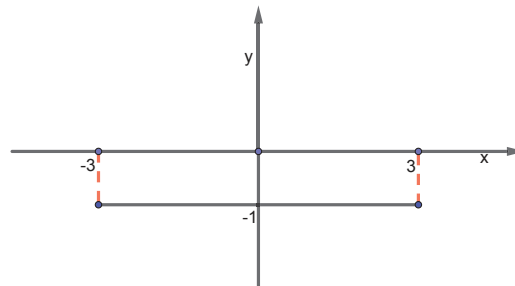


Figura 3.7: Elipse $\mathcal{E}$ para $-3 \leq x < 3$ e $y < 0$.

- (vii) Para $x < -3, x \geq 3$ e $y < 0$, tem-se $2|-y| + |-x-3| + |x+3| = -2y - x - 3 + x + 3 = -2y - 6 = 8$, o que implica que $-2y = 14 \Leftrightarrow y = -7$. Da mesma forma que em (iii) para $x < -3$ e $x \geq 3$ não existe intersecção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para esse caso.
- (viii) Para $x < -3, x < 3$ e $y < 0$, tem-se $2|-y| + |-x-3| + |-x+3| = -2y - x - 3 - x + 3 = -2y - 2x = 8$, o que implica que $-y - x = 8 \Leftrightarrow y = -x - 4$ para $x < -3$. A representação gráfica, nestas condições, é dada por:

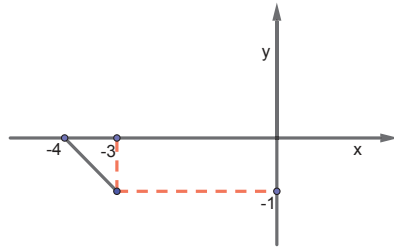


Figura 3.8: Elipse $\mathcal{E}$ para $x < -3$ e $y < 0$.

Ao serem unidos os segmentos obtidos nas análises modulares (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) e (viii) da equação da elipse $\mathcal{E}$: $2|y| + |x+3| + |x-3| = 8$, a representação geométrica de $\mathcal{E}$ no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d')$ pode ser visualizada da seguinte forma:

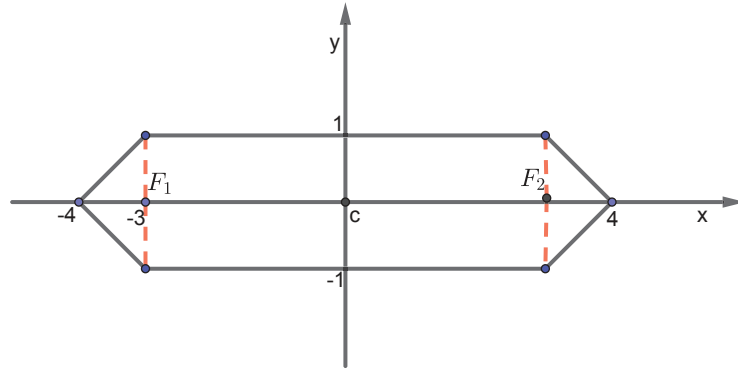


Figura 3.9: Elipse $\mathcal{E}$ em $(\mathbb{R}^2, d')$.

Analisemos agora uma elipse com o eixo focal paralelo ao eixo OXY e centro $C = (x_0, y_0) + (0, 0)$. Pode-se adotar o ponto $C = (x_0, y_0)$ como a origem de um sistema cartesiano auxiliar $CX'Y'$ e, cada ponto $P = (x', y')$ de $\mathcal{E}$, neste sistema auxiliar pode ser representado também no sistema cartesiano ortogonal OXY como $P = (x - x_0, y - y_0)$. Nestas condições, a equação de $\mathcal{E}$, que no sistema $CX'Y'$ é escrita como

$$2|y'| + |x' + c| + |x' - c| = 2a$$

enquanto que no sistema cartesiano ortogonal OXY é reescrita como

$$2|y - y_0| + |x - x_0 + c| + |x - x_0 - c| = 2a.$$

Veja a representação gráfica de $\mathcal{E}$ em $(\mathbb{R}^2, d')$ com centro fora da origem (figura 4.6)

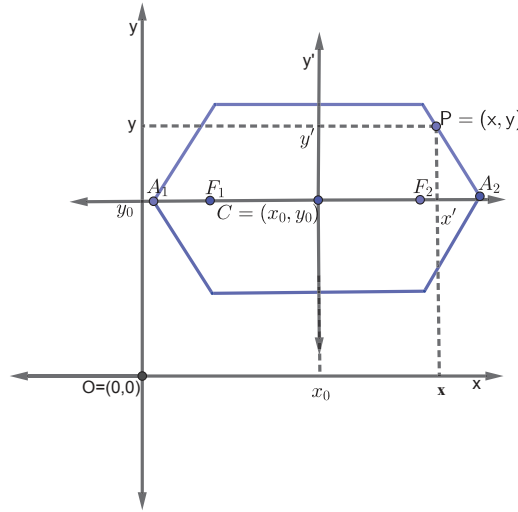


Figura 3.10: Elipse $\mathcal{E}$ em $(\mathbb{R}^2, d')$, com centro fora da origem .

De maneira análoga, se $\mathcal{E}$ possuir o eixo focal paralelo ao eixo OY e centro $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ sua equação, escrita em coordenadas do sistema cartesiano auxiliar $CX'Y'$ é dada por:

$$2|x'| + |y' + c| + |y' - c| = 2a$$

enquanto que no sistema cartesiano ortogonal OXY esta equação é reescrita como

$$2|x - x_0| + |y - y_0 + c| + |y - y_0 - c| = 2a.$$

Exemplo 3.2. Determinemos a equação de uma elipse $\mathcal{E}$ de centro $C = (2, 3)$, com reta focal medindo 10, paralela ao eixo OY , e reta não focal medindo 4, no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d')$. Considerando que sua reta focal mede 10, tem-se que $2a = 10$, o que implica que $a = 5$. Sabe-se ainda que sua reta não focal mede 4, o que implica que $b = 2$. Como $a = b + c$ (na métrica da soma) tem-se $c = a - b = 5 - 2 = 3$. Como $\mathcal{E}$ possui centro $C = (2, 3)$ fora da origem de OXY sua equação é dada por

$$2|y - y_c| + |x - x_c + c| + |x - x_c - c| = 2a.$$

Assim

$$\mathcal{E} : 2|y - 3| + |x - 2 + 3| + |x - 2 - 3| = 2 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} : 2|y - 3| + |x + 1| + |x - 5| = 10.$$

A representação gráfica de $\mathcal{E}$ no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d')$ é apresentada na figura 4.11. Note que foram omitidas as análises modulares pois são semelhantes ao que foi feito no caso anterior.

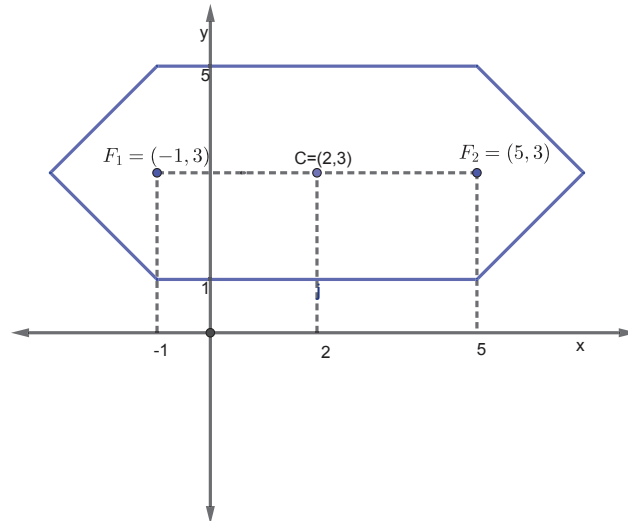


Figura 3.11: Elipse do exemplo 3.2

Exemplo 3.3. Dados os focos $F_1 = (2, 4)$ e $F_2 = (3, 6)$, encontremos o conjunto de pontos (x, y) do plano que atenda à equação: $d'(M, F_1) + d'(M, F_2) = 5$.

Ou seja, $|x - 2| + |y - 4| + |x - 3| + |y - 6| = 5$

Analisando a equação acima, temos os seguintes casos:

- $x \leq 2$ e $y \geq 4$: $x + y = 5$.
- $x < 2$ e $4 \leq y < 6$: $x = 1$.
- $x \geq 2$ e $y \geq 6$: $-x + y = 5$.
- $2 < x \leq 3$ e $y \geq 4$: $y = 3$.
- $2 < x < 3$ e $4 < y < 6$: $3 = 5$. (Não existe solução)
- $2 < x \leq 3$ e $y > 6$: $y = 7$.
- $x > 3$ e $y \leq 4$: $x - y = 0$.
- $x > 3$ e $4 < y \leq 6$: $x = 4$.
- $x > 3$ e $y > 6$: $x + y = 10$.

Tomando agora as soluções das equações anteriores com suas respectivas condições e traçando em um sistema de eixos cartesianos teremos a representação gráfica dessa elipse, a saber:

3.2 Hipérbole

Hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cujo valor absoluto da diferença entre as distâncias de P a F_1 e a F_2 é igual a uma constante $2a > 0$. Sendo $2a > 0$, então

$$\mathcal{H} := \{P \in \mathbb{R}^2 : |D(P, F_1) - D(P, F_2)| = 2a\}.$$

A seguir apresentamos um tratamento para a hipérbole considerando a métrica d' , da soma, e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica, quando o centro está na origem. Primeiramente quando os focos estão no eixo OX e posteriormente quando os focos estão no eixo OY .

Suponha que $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $|d'(P, F_1) - d'(P, F_2)| = 2a$, assim:

$$|d'(P, F_1) - d'(P, F_2)| = 2a \Rightarrow |d'((x, y), (c, 0)) - d'((x, y), (-c, 0))| = 2a \Rightarrow$$

$$|(|x - c| + |y - 0|) - (|x - (-c)| + |y - 0|)| = 2a \Rightarrow$$

$$|(|x - c| + |y|) - (|x + c| + |y|)| = 2a \Leftrightarrow$$

$$||x - c| - |x + c|| = 2a \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x - c| - |x + c| = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ |x - c| - |x + c| = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

Agora, para $|x - c| - |x + c| = 2a$ temos:

- $x - c \geq 0$ e $x + c \geq 0$: $(x - c) - (x + c) = 2a \Rightarrow -c - c = 2a \Rightarrow -2c = 2a \Rightarrow c = -a$, e este caso não contribui para a solução.
- $x - c \geq 0$ e $x + c \leq 0$: $(x - c) - (-(x + c)) = 2a \Rightarrow 2x = 2a \Rightarrow x = a$.
- $x - c \leq 0$ e $x + c \geq 0$: $-(x - c) - (x + c) = 2a \Rightarrow -2x = 2a \Rightarrow x = -a$.
- $x - c \leq 0$ e $x + c \leq 0$: $-(x - c) - (-(x + c)) = 2a \Rightarrow c + c = 2a \Rightarrow 2c = 2a \Rightarrow c = a$, e este caso não contribui para a solução.

Por outro lado, para $|x - c| - |x + c| = -2a$ temos:

- $x - c \geq 0$ e $x + c \geq 0$: $(x - c) - (x + c) = -2a \Rightarrow -c - c = -2a \Rightarrow -2c = -2a \Rightarrow c = a$, e este caso não contribui para a solução.
- $x - c \geq 0$ e $x + c \leq 0$: $(x - c) - (-(x + c)) = -2a \Rightarrow 2x = -2a \Rightarrow x = -a$.
- $x - c \leq 0$ e $x + c \geq 0$: $-(x - c) - (x + c) = -2a \Rightarrow -2x = -2a \Rightarrow x = a$.
- $x - c \leq 0$ e $x + c \leq 0$: $-(x - c) - (-(x + c)) = -2a \Rightarrow c + c = -2a \Rightarrow 2c = -2a \Rightarrow c = -a$, e este caso não contribui para a solução.

Consequentemente, $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ se , e somente se,

$$\begin{cases} x = a & (\text{ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ x = -a & (\text{ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

Geometricamente,

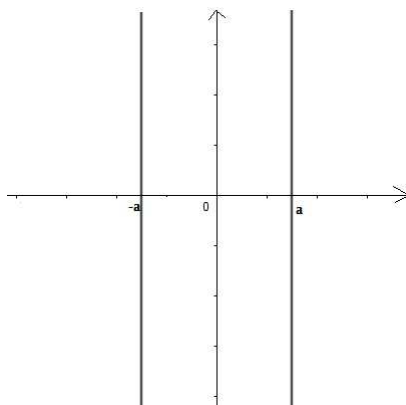


Figura 3.13: Representação da hiperbole com a métrica da soma, focos no eixo OX .

Agora analisamos a hipérbole quando o centro está na origem e os focos no eixo OY . Para tanto, considere os focos $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $|d'(P, F_1) - d'(P, F_2)| = 2a$, consequentemente:

$$|d'(P, F_1) - d'(P, F_2)| = 2a \Rightarrow |d'((x, y), (0, c)) - d'((x, y), (0, -c))| = 2a \Rightarrow$$

$$|(|x| + |y - c|) - (|x| + |y + c|)| = 2a \Leftrightarrow$$

$$||y - c| - |y + c|| = 2a \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |y - c| - |y + c| = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ |y - c| - |y + c| = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

Fazendo um estudo análogo ao caso em que os focos no eixo OX segue que: $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ se, e só se,

$$\begin{cases} y = a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ y = -a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

Geometricamente,

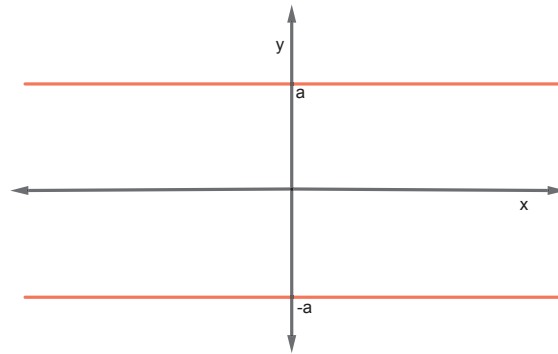


Figura 3.14: Representação da hipérbole com a métrica da soma, com focos no eixo OY .

Exemplo 3.4. Vamos determinar a equação de uma hipérbole $\mathcal{H}$ com os focos $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$ e eixo real igual a 8 no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d')$ e representar geometricamente esta figura em $(\mathbb{R}^2, d')$.

Como seu eixo real mede 8 unidades, então, tem-se $2a = 8 \Rightarrow a = 4$. Como os focos são $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$, então, tem-se o centro da hipérbole na origem do sistema OXY e focos pertencentes ao eixo OX . Logo, pela análise realizada anteriormente a equação dessa hipérbole é dada por:

$$\mathcal{H} : ||x + 5| - |x - 5|| = 8 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 & (\text{ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ x = -4 & (\text{ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

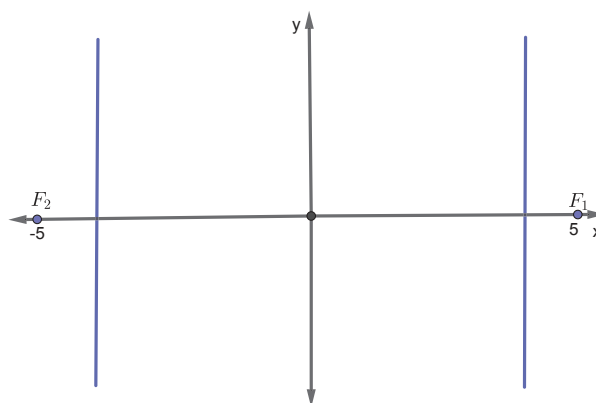


Figura 3.15: Hipérbole do exemplo 3.4

Vamos explorar agora o caso em que a hipérbole $\mathcal{H}$ está com o eixo real paralelo ao eixo OX e centro $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Como pode ser visualizado na figura seguinte, pode-se adotar o ponto $C = (x_0, y_0)$ como a origem de um sistema cartesiano auxiliar $CX'Y'$ e, para P de $\mathcal{H}$ será representado também no sistema cartesiano ortogonal OXY como $P = (x - x_0, y - y_0)$.

Nestas condições a equação de $\mathcal{H}$, que no sistema $CX'Y'$ é escrita como $||x' - c| - |x' + c|| = 2a$ poderá ser representada em coordenadas do sistema cartesiano ortogonal OXY como:

$$\mathcal{H} : ||x - x_0 - c| - |x - x_0 + c|| = 2a.$$

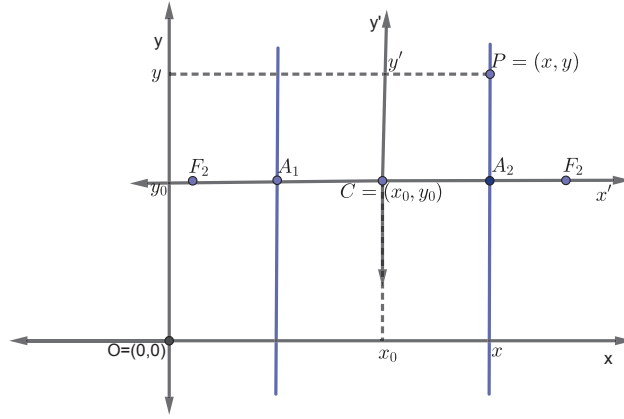


Figura 3.16: Hipérbole em $(\mathbb{R}^2, d')$ com centro fora da origem.

Veja a representação gráfica da hipérbole no espaço $(\mathbb{R}^2, d')$ e centro fora da origem

De maneira análoga, se $\mathcal{H}$ possuir o eixo real paralelo ao eixo OY e centro $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ sua equação, escrita em coordenadas neste sistema será $\mathcal{H}: ||y' - c| - |y' + c|| = 2a$, a qual, transcrita para coordenadas no sistema cartesiano ortogonal OXY passará a ser representada por

$$\mathcal{H} : ||y - y_0 - c| - |y - y_0 + c|| = 2a.$$

Exemplo 3.5. Vamos agora determinar a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro $C = (2, 3)$, eixo real com medida 8, paralelo ao eixo OX , e eixo imaginário com medida 2.

Pelo exposto, $\mathcal{H}$ é uma hipérbole com centro fora da origem do sistema cartesiano ortogonal OXY e eixo real paralelo ao eixo OX . Desse modo, a equação de $\mathcal{H}$ será dada por

$$\mathcal{H} : ||x - x_0 - c| - |x - x_0 + c|| = 2a.$$

Como o eixo real tem medida 8, então, tem-se $2a = 8 \Rightarrow a = 4$. Sabendo que o eixo imaginário tem a medida 2, em outras palavras, $2b = 2$, tem-se que $b = 1$. Pela relação $c = a + b$, obtém-se $c = 4 + 1 = 5$. Em decorrência disto, tem-se $F_1 = (7, 3)$ e $F_2 = (-3, 3)$.

Logo, a equação de $\mathcal{H}$ será:

$$\mathcal{H} : ||x - 2 - 5| - |x - 2 + 5|| = 8 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H} : ||x - 7| - |x + 3|| = 8.$$

A representação gráfica de $\mathcal{H}: ||x - 7| - |x + 3|| = 8$, em $(\mathbb{R}^2, d')$, é apresentada na figura seguinte.

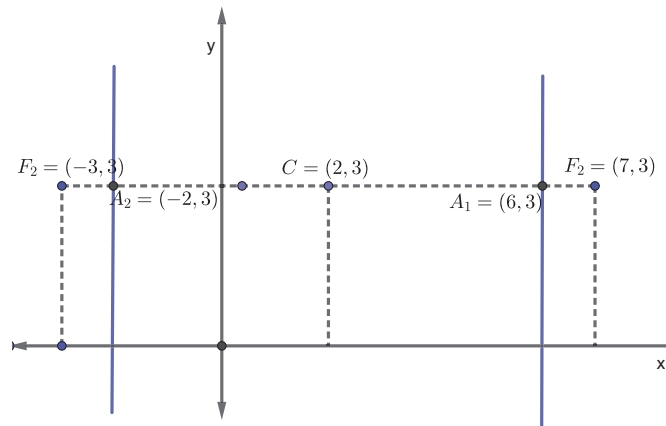


Figura 3.17: Hiperbole do exemplo 3.5.

Exemplo 3.6. Dados os focos $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (2, -3)$, determinemos os pontos que atendem a equação: $d'(M, F_1) - d'(M, F_2) = 2$.

Nestas condições temos, temos então:

$$||x| + |y - 4| - |x - 2| - |y + 3|| = 2.$$

Analisando essa equação, chega-se aos seguintes casos:

- $x < 2$ e $y < -3$ (não existe solução)
- $x < 0$ e $-3 \leq y < 0$:
 $\Rightarrow y = -7/2$ ou $y = -3/2 \Rightarrow y = -3/2$.
- $x < 0$ e $y \geq 0$ (não existe solução)
- $0 \leq x < 2$ e $y \leq -3 \Rightarrow x = 1/2$ ou $x = -3/2 \Rightarrow y = 1/2$.
- $0 \leq x < 2$ e $-3 \leq y < 0$
 $\Rightarrow x - y = 7/2$ ou $x - y = 3/2$.
- $0 \leq x < 2$ e $y \geq 0 \Rightarrow x = 7/2$ ou $x = 3/2 \Rightarrow x = 3/2$.
- $x \geq 2$ e $y < -3$ (não existe solução)
- $x \geq 2$ e $-3 \leq y < 0$
 $\Rightarrow y = -3/2$ ou $y = 1/2 \Rightarrow y = -3/2$.
- $x \geq 2$ e $y \geq 0$ (não existe solução)

Tomando agora as soluções das equações anteriores com suas respectivas condições e traçando em um sistema de eixos cartesianos teremos a representação gráfica dessa hipérbole na figura 4.18.

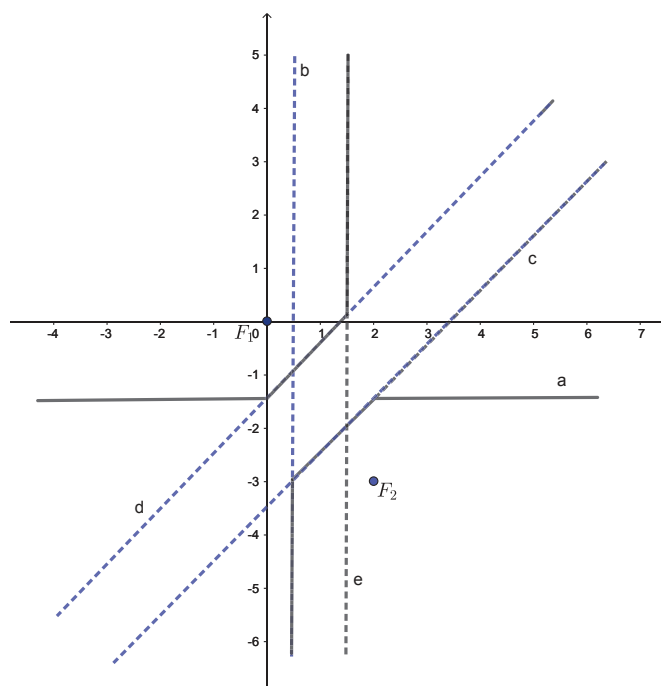


Figura 3.18: Hipérbole do exemplo 3.6

3.3 Parábola

Sabemos que a parábola $\mathcal{P}$ de foco F e reta diretriz r é o conjunto dos pontos P do plano cujas distâncias de P a F e a r são iguais, ou seja,

$$\mathcal{P} := \{P \in \mathbb{R}^2 : D(P, F) = D(P, r)\}.$$

A seguir apresentamos um tratamento para a parábola considerando a métrica d' , da soma, e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica.

Primeiramente, lembremos que a distância entre um ponto P e uma reta r é a menor distância entre estes dois objetos e pode ser obtida calculando-se a distância de P ao pé da perpendicular a r por P . Assim, se Q é a interseção da reta perpendicular a r passando por P , então, $D(P, r) = D(P, Q)$.

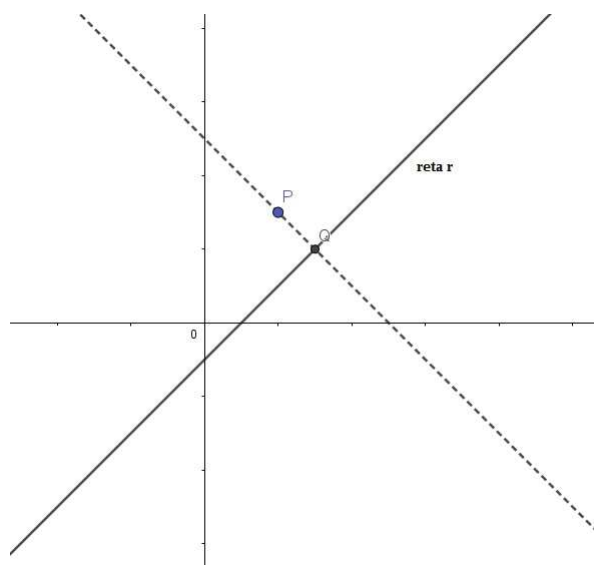


Figura 3.19: Projeção ortogonal de P a reta r .

Vejamos a configuração da parábola em que seu foco está no eixo OX . Com efeito, suponha que o foco F esteja no eixo X , digamos $F = (p, 0)$ e a reta diretriz seja dada por $r : x = -p$.

Temos que $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $d'(P, F) = d'(P, r)$. Veja que neste caso $d'(P, r) := d'(P, Q)$ em que $Q = (-p, y)$. Consequentemente:

$$d'(P, F) = d'(P, r) \Rightarrow d'(P, F) = d'(P, Q) \Rightarrow$$

$$d'((x, y), (p, 0)) = d'((x, y), (-p, y)) \Rightarrow$$

$$|x - p| + |y - 0| = |x - (-p)| + |y - y| \Rightarrow$$

$$|x - p| + |y| = |x + p| \Rightarrow$$

$$|y| = |x + p| - |x - p|.$$

Desta maneira, com essa métrica d' , temos nesse caso:

$$\mathcal{P} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x + p| - |x - p|\}.$$

Analisemos o comportamento.

1. Se $y \geq 0$, $x \geq -p$ e $x \geq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow y = x + p - (x - p) = 2p \Rightarrow y = 2p.$$

2. Se $y \geq 0$, $x \geq -p$ e $x \leq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow y = x + p - (-(x - p)) = 2x \Rightarrow y = 2x.$$

3. Se $y \geq 0$, $x \leq -p$ e $x \geq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow y = -(x + p) - (x - p) = -2x \Rightarrow y = -2x.$$

4. Se $y \geq 0$, $x \leq -p$ e $x \leq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow y = -(x + p) - (-(x - p)) = -2p \Rightarrow y = -2p.$$

5. Se $y \leq 0$, $x \geq -p$ e $x \geq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow -y = x + p - (x - p) = 2p \Rightarrow y = -2p.$$

6. Se $y \leq 0$, $x \geq -p$ e $x \leq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow -y = x + p - (-(x - p)) = 2x \Rightarrow y = -2x.$$

7. Se $y \leq 0$, $x \leq -p$ e $x \geq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow -y = -(x + p) - (x - p) = -2x \Rightarrow y = 2x.$$

8. Se $y \leq 0$, $x \leq -p$ e $x \leq p$, temos:

$$|y| = |x + p| - |x - p| \Rightarrow -y = -(x + p) - (-(x - p)) = -2p \Rightarrow y = 2p.$$

Geometricamente,

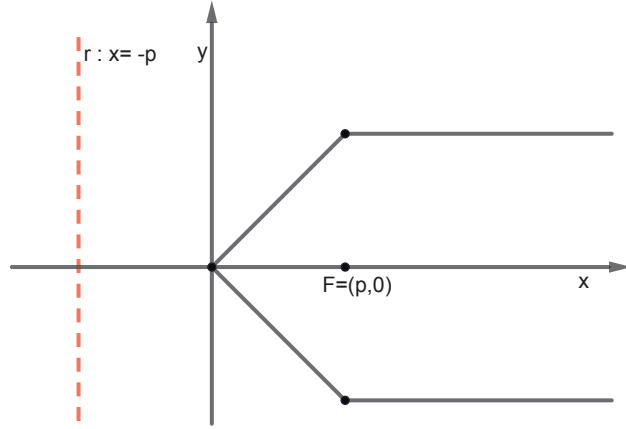


Figura 3.20: Representação da parábola com a métrica da soma, com foco no eixo OX .

Agora analisaremos configuração da parábola em que seu foco está no eixo OY . Com efeito, suponha que o foco F esteja no eixo OY , digamos $F = (0, p)$ e a reta diretriz seja dada por $r : y = -p$.

Temos que $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $d'(P, F) = d'(P, r)$. Veja que neste caso $d'(P, r) := d'(P, Q)$ em que $Q = (x, -p)$. Consequentemente:

$$d'(P, F) = d'(P, r) \Rightarrow d'(P, F) = d'(P, Q) \Rightarrow$$

$$d'((x, y), (0, p)) = d'((x, y), (x, -p)) \Rightarrow$$

$$|x - 0| + |y - p| = |x - x| + |y - (-p)| \Rightarrow$$

$$|x| + |y - p| = |y - (-p)| \Rightarrow$$

$$|x| = |y + p| - |y - p|.$$

Desta maneira, com essa métrica d' , temos nesse caso:

$$\mathcal{P} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y + p| - |y - p|\}.$$

Analisemos o comportamento.

1. Se $x \geq 0$, $y \geq -p$ e $y \geq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow x = y + p - (y - p) = 2p \Rightarrow x = 2p.$$

2. Se $x \geq 0$, $y \geq -p$ e $y \leq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow x = y + p - (-(y - p)) = 2y \Rightarrow x = 2y.$$

3. Se $x \geq 0$, $y \leq -p$ e $y \geq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow x = -(y + p) - (y - p) = -2y \Rightarrow x = -2y.$$

4. Se $x \leq 0$, $y \geq -p$ e $y \leq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow x = -(y + p) - (-(y - p)) = -2p \Rightarrow x = -2p.$$

5. Se $x \leq 0$, $y \geq -p$ e $y \geq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow -x = y + p - (y - p) = 2p \Rightarrow x = -2p.$$

6. Se $x \leq 0$, $y \leq -p$ e $y \leq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow -x = y + p - (-(y - p)) = 2y \Rightarrow x = -2y.$$

7. Se $x \leq 0$, $y \leq -p$ e $y \geq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow -x = -(y + p) - (y - p) = -2y \Rightarrow x = 2y.$$

8. Se $x \leq 0$, $y \leq -p$ e $y \leq p$, temos:

$$|x| = |y + p| - |y - p| \Rightarrow -x = -(y + p) - (-(y - p)) = -2p \Rightarrow x = 2p.$$

Geometricamente,

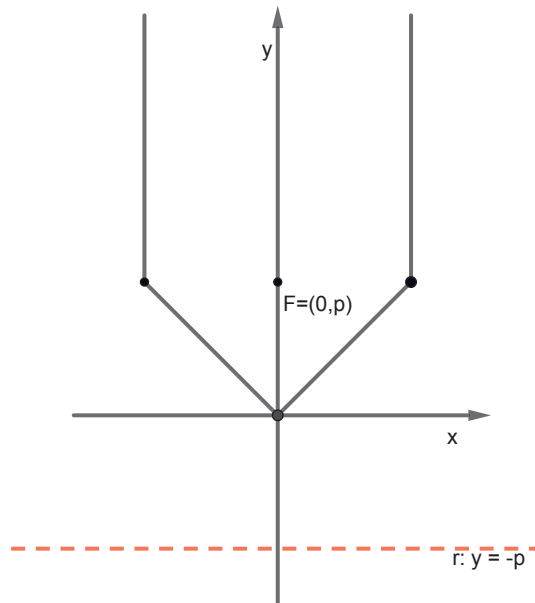


Figura 3.21: Representação da parábola com a métrica da soma, com foco no eixo OY .

Os demais casos são analisados de modo análogo.

Exemplo 3.7. Vamos determinar em $(\mathbb{R}^2, d')$, a equação da parábola com vértice na origem do sistema coordenado OXY e reta diretriz $x = -2$.

Dado vértice da parábola na origem do sistema OXY , tem-se $V = (0, 0)$ e a distância de V até a reta diretriz $r = 2$, logo, $\frac{p}{2} = 2$. Desse modo tem-se $F = (2, 0)$. Dado um ponto $P = (x, y)$ da parábola tem-se:

$$\begin{aligned} d'(P, F) &= d'(P, r) \Rightarrow \\ |x - 2| + |y - 0| &= |x - (-2)| + |y - y| \Rightarrow \\ |x - 2| + |y| &= |x + 2| \Rightarrow \\ |y| &= |x + 2| - |x - 2|. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{se } x < -2, \end{cases}$$

bem como

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

e ainda

$$|y| = \begin{cases} y, & \text{se } y \geq 0 \\ -y, & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

analisando, separadamente, cada condição modular, tem-se:

- (i) Para $x \geq -2, x \geq 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x + 2| - |x - 2| = x + 2 - (x - 2) = y = x + 2 - x + 2 = 4$, o que implica que $y = 4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada por:

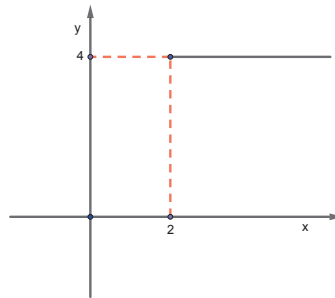


Figura 3.22: Parábola $\mathcal{P}$ para $x \geq 2$ e $y \geq 0$.

- (ii) Para $x \geq -2, x < 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x+2| - x + 2 = x+2 - (-x+2) = x+2+x-2 = 2x$, o que implica que $y = 2x$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada por:

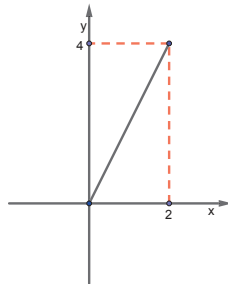


Figura 3.23: Parábola $\mathcal{P}$ para $-2 \leq x < 2$ e $y \geq 0$.

- (iii) Para $x < -2, x \geq 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x+2| - |-x+2| = -x-2 - (x-2) = -x-2-x+2 = -2x$, o que implica que $y = -2x$. Nota-se que, para $x < -2$, e $x \geq 2$ não existe interseção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para este caso.
- (iv) Para $x < -2, x < 2$ e $y \geq 0$, tem-se $|y| = |x+2| - |-x+2| = -x-2 - (-x+2) = -x-2+x-2 = -4$, o que implica que $y = -4$ para $x < -2$. Mas, da condição inicial $y \geq 0$ o que é impossível para a reta $y = -4$. De maneira análoga a anterior, não existe lugar geométrico para este caso.
- (v) Para $x \geq -2, x \geq 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |x+2| - |x-2| = x+2 - (x-2) = x+2-x+2 = 4$, o que implica que $-y = 4 \Leftrightarrow y = -4$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada por:

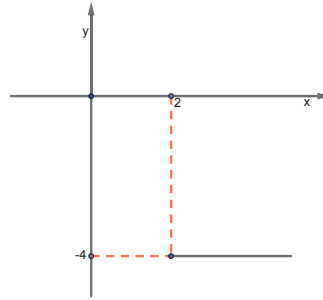


Figura 3.24: Parábola $\mathcal{P}$ para $x \leq 2$ e $y < 0$.

- (vi) Para $x \geq -2, x < 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |x+2| - |-x+2| = x+2 - (-x+2) = x+2+x-2$, o que implica que $-y = 2x \Leftrightarrow y = -2x$. A representação gráfica, nestas condições, é apresentada por:

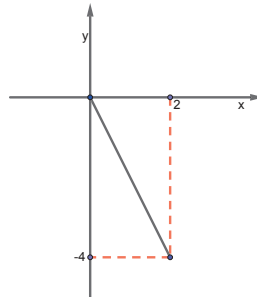


Figura 3.25: Parábola $\mathcal{P}$ para $-2 \leq x < 2$ e $y < 0$.

- (vii) Para $x < -2, x \geq 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |-x-2| - |x-2| = -x-2 - (x-2) = -x-2-x+2$, o que implica que $-y = -2x \Leftrightarrow y = 2x$. Da mesma forma que em (iii) para $x < -2$ e $x \geq 2$ não existe interseção para os valores de x . Portanto, não existe lugar geométrico para este caso.
- (viii) Para $x < -2, x < 2$ e $y < 0$, tem-se $|y| = |x+2| - |-x+2| = -x-2 - (-x+2) = -x-2+x-2$, o que implica que $-y = -4 \Leftrightarrow y = 4$ para $x < -2$. Da mesma forma que em (iv), da condição inicial $y < 0$ o que é impossível para a reta $y = 4$. De maneira análoga ao anterior, não existe lugar geométrico para este caso.

Ao serem unidos os seguimentos obtidos nas análises modulares (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) e (viii) da equação da parábola $\mathcal{P}: |y| = |x+2| - |x-2|$, a representação geométrica de $\mathcal{P}$ no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d')$ pode ser visualizada da seguinte maneira:

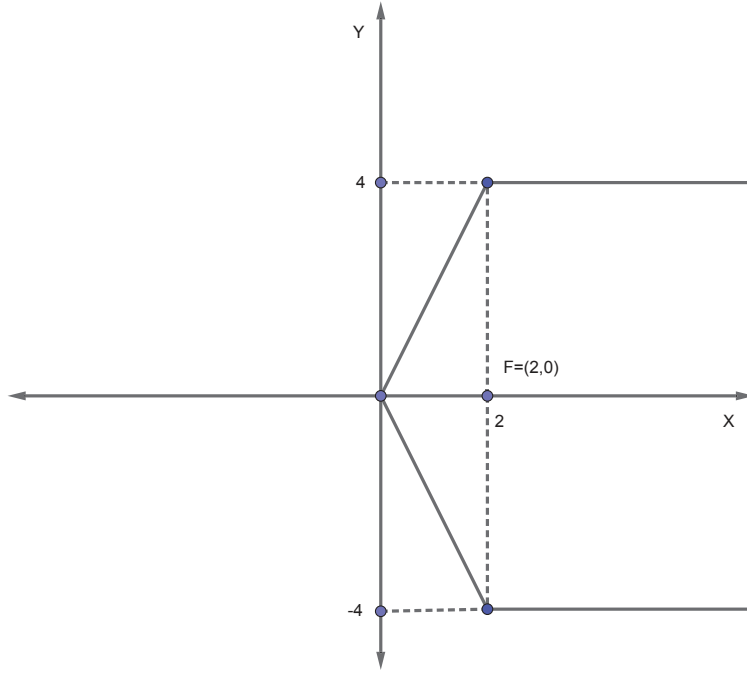


Figura 3.26: Parábola $|y| = |x + 2| - |x - 2|$ em $(\mathbb{R}^2, d')$.

Exemplo 3.8. Considerando $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola $\mathcal{P}$ cujo vértice é $V = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e o foco $F = (x_0, y_0 + \frac{p}{2})$, ou seja, o segmento $\overline{FV}$ é paralelo ao eixo das ordenadas, a diretriz, em relação ao sistema auxiliar $VX'Y'$, é a reta $d : y' = y_0 - \frac{p}{2}$ e a projeção ortogonal de P sobre a diretriz d é o ponto $D = (x', y_0 - \frac{p}{2})$. Note que o vértice V está fora da origem do sistema cartesiano OXY e por isso, conforme visto anteriormente, utiliza-se um sistema auxiliar de eixos coordenados $VX'Y'$. Desse modo, é possível representar qualquer ponto $P = (x', y')$ de $\mathcal{P}$, escrito como coordenadas de $VX'Y'$, como um ponto escrito em coordenadas de OXY temos $P = (x - x_0, y - y_0)$.

A equação da parábola, em coordenadas do sistema auxiliar $VX'Y'$ é escrita como:

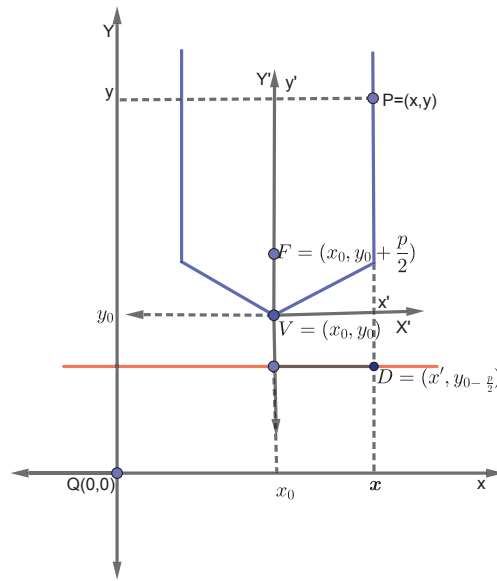
$$|x'| = |y' + \frac{p}{2}| - |y' - \frac{p}{2}|.$$

Ao representá-la em coordenadas do sistema cartesiano ortogonal OXY , obtém-se:

$$|x - x_0| = |y - y_0 + \frac{p}{2}| - |y - y_0 - \frac{p}{2}|.$$

A equação anterior apresentada é uma generalização da equação da parábola com a reta diretriz perpendicular ao eixo OY do sistema OXY , pois, caso o vértice dessa parábola coincida com a origem do sistema cartesiano ortogonal, basta considerar $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Caso $P = (x, y)$ seja um ponto qualquer de $\mathcal{P}$ cujo vértice é $V = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e o foco $F = (x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$, ou seja, o segmento $\overline{FV}$ é paralelo ao eixo OX , a diretriz, em relação ao sistema auxiliar $VX'Y'$, é a reta $d : y' = x_0 - \frac{p}{2}$ e a projeção ortogonal de P sobre a diretriz d é o ponto $D = (x_0 - \frac{p}{2}, y')$. De maneira análoga à anterior, a equação $\mathcal{P}$, representada em coordenadas do sistema auxiliar $VX'Y'$ é dada por:

Figura 3.27: Parábola $(\mathbb{R}^2, d')$.

$$|y'| = |x' + \frac{p}{2}| - |x' - \frac{p}{2}|.$$

O que em coordenadas do sistema cartesiano ortogonal OXY é representada por

$$|y - y_0| = |x - x_0 + \frac{p}{2}| - |x - x_0 - \frac{p}{2}|.$$

Exemplo 3.9. Dados foco $F = (0, 2)$ e diretriz como sendo a reta $L : y = -3$, determinemos os pontos $M = (x, y)$ do plano que atendem à equação $d'(M, F) = d'(M, L)$.

Nestas condições temos,

$$|x - 0| + |y - 2| = |y + 3|.$$

Analisando a equação acima, temos os seguintes casos:

- $x < 0$ e $y < -3$:
 $\Rightarrow x = 5$. (Não existe solução)
- $x < 0$ e $-3 \leq y < 2$:
 $\Rightarrow x + 2y = -1$.
- $x \geq 0$ e $y \geq 2$:
 $\Rightarrow x = -5$. (b)
- $x \geq 0$ e $y \leq -3$:
 $\Rightarrow x = -5$. (não existe solução)

- $x \geq 0$ e $-3 \leq y < 2$:

$$\Rightarrow x - 2y = 1.$$

- $x \geq 0$ e $y \geq 2$:

$$\Rightarrow x = 5.$$

Deste modo podemos visualizar a parábola na figura a seguir.

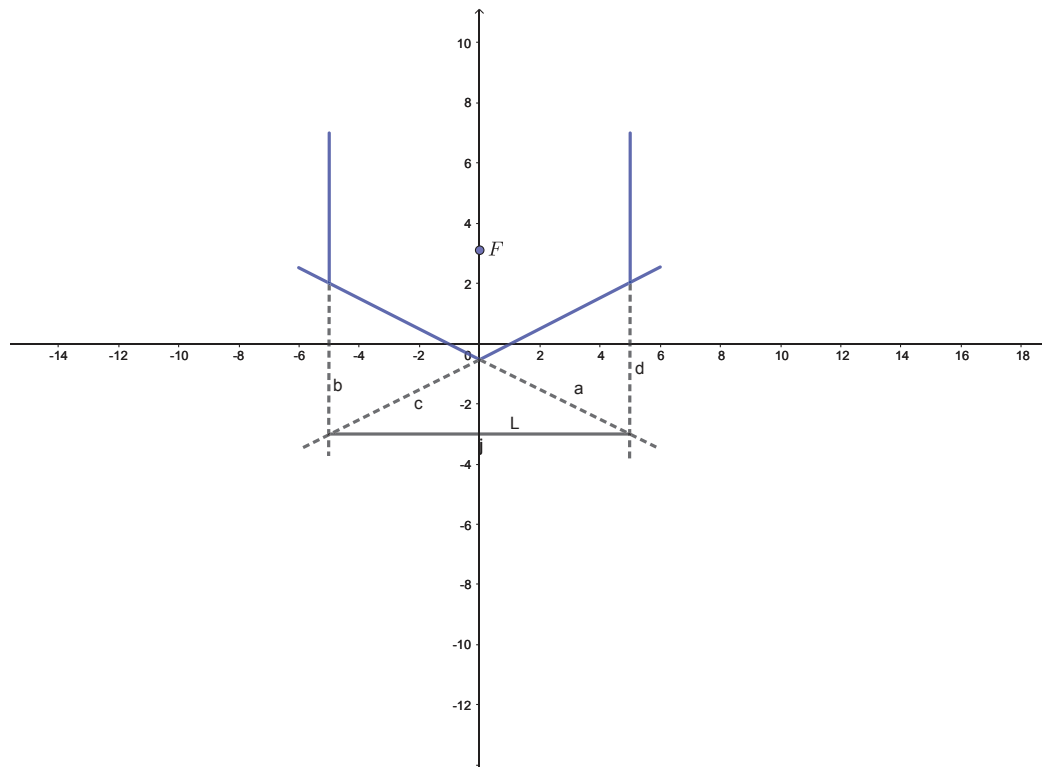


Figura 3.28: Parábola do exemplo 3.9

No capítulo seguinte abordaremos as cônicas usando a métrica do máximo.

4 Cônicas e a métrica do máximo

4.1 Elipse

Sabemos que a elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Sendo $0 < c < a$ e $D(F_1, F_2) = 2c$, então

$$\mathcal{E} := \{P \in \pi : D(P, F_1) + D(P, F_2) = 2a\}.$$

A seguir apresentamos um tratamento para a elipse considerando a métrica d'' , do máximo, e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica.

Primeiramente analisemos a elipse com focos no eixo OX . Com efeito, sejam $c, a \in \mathbb{R}$ tais que $0 < c < a$ e suponha que $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $d''(P, F_1) + d''(P, F_2) = 2a$.

Por outro lado, temos:

$$d''(P, F_1) = d''((x, y), (-c, 0)) = \max\{|x + c|, |y|\}$$

e

$$d''(P, F_2) = d''((x, y), (c, 0)) = \max\{|x - c|, |y|\}.$$

Consequentemente,

$$d''((x, y), (-c, 0)) + d''((x, y), (c, 0)) = 2a$$

implica que

$$\max\{|x - (-c)|, |y - 0|\} + \max\{|x - c|, |y - 0|\} = 2a \Rightarrow$$

$$\max\{|x + c|, |y|\} + \max\{|x - c|, |y|\} = 2a.$$

Analisemos cada caso com relação a maxibilidade entre os elementos:

$$|x + c|, |x - c| \text{ e } |y|.$$

Caso (I). $\max\{|x + c|, |y|\} = |y| = \max\{|x - c|, |y|\}$:

$$\max\{|x + c|, |y|\} + \max\{|x - c|, |y|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|y| + |y| = 2a \Rightarrow 2|y| = 2a \Rightarrow |y| = a \Rightarrow y = \pm a$$

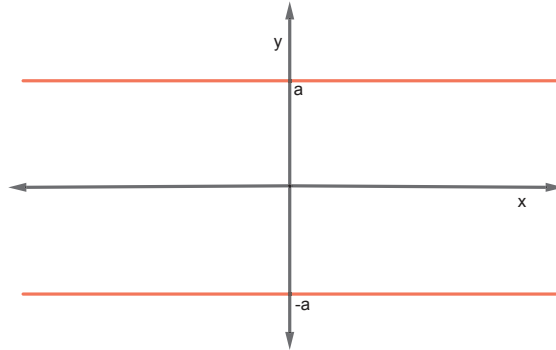


Figura 4.1: Caso I - elipse com focos no eixo OX via métrica d'' .

Caso (II). $\max\{|x + c|, |y|\} = |y|$ e $\max\{|x - c|, |y|\} = |x - c|$:

$$\max\{|x + c|, |y|\} + \max\{|x - c|, |y|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|y| + |x - c| = 2a.$$

Analisemos a equação modular acima:

- Se $y > 0$ e $x - c > 0$, temos:
 $|y| + |x - c| = 2a \Rightarrow y + x - c = 2a \Rightarrow y = -x + (2a + c).$
- Se $y > 0$ e $x - c < 0$, temos:
 $|y| + |x - c| = 2a \Rightarrow y - x + c = 2a \Rightarrow y = x + (2a - c).$
- Se $y < 0$ e $x - c > 0$, temos:
 $|y| + |x - c| = 2a \Rightarrow -y + x - c = 2a \Rightarrow -y = -x + (2a + c) \Rightarrow y = x - (2a + c).$
- Se $y < 0$ e $x - c < 0$, temos:
 $|y| + |x - c| = 2a \Rightarrow -y - x + c = 2a \Rightarrow -y = x + (2a - c) \Rightarrow y = -x - (2a - c)$

Geometricamente obtemos:

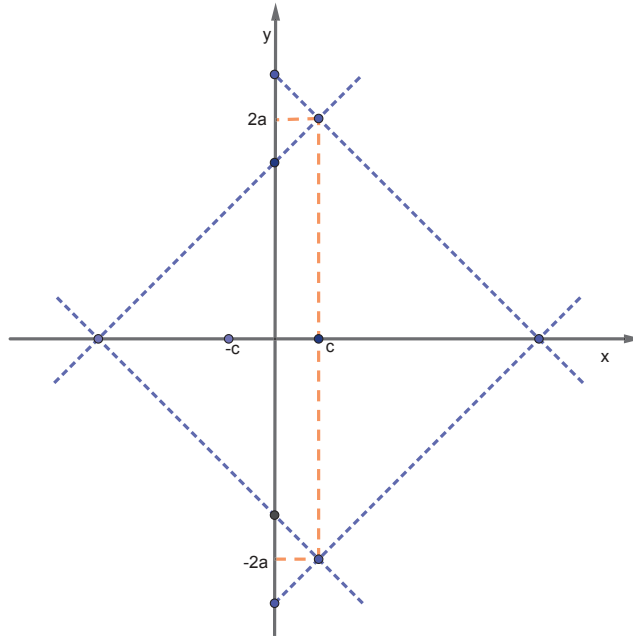


Figura 4.2: Caso II - elipse com focos no eixo OX via métrica d'' .

Caso (III). $\max\{|x+c|, |y|\} = |x+c|$ e $\max\{|x-c|, |y|\} = |y|$:

$$\max\{|x+c|, |y|\} + \max\{|x-c|, |y|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|x+c| + |y| = 2a.$$

Analisemos a equação modular acima:

- Se $x+c > 0$ e $y > 0$, temos:
 $|x+c| + |y| = 2a \Rightarrow x+c+y = 2a \Rightarrow y = -x + (2a-c).$
- Se $x+c > 0$ e $y < 0$, temos:
 $|x+c| + |y| = 2a \Rightarrow x+c-y = 2a \Rightarrow -y = -x + (2a-c) \Rightarrow y = x - (2a-c).$
- Se $x+c < 0$ e $y > 0$, temos:
 $|x+c| + |y| = 2a \Rightarrow -x-c+y = 2a \Rightarrow y = x + (2a+c).$
- Se $x+c < 0$ e $y < 0$, temos:
 $|x+c| + |y| = 2a \Rightarrow -x-c-y = 2a \Rightarrow -y = x + (2a+c) \Rightarrow y = -x - (2a+c).$

Geometricamente obtemos:

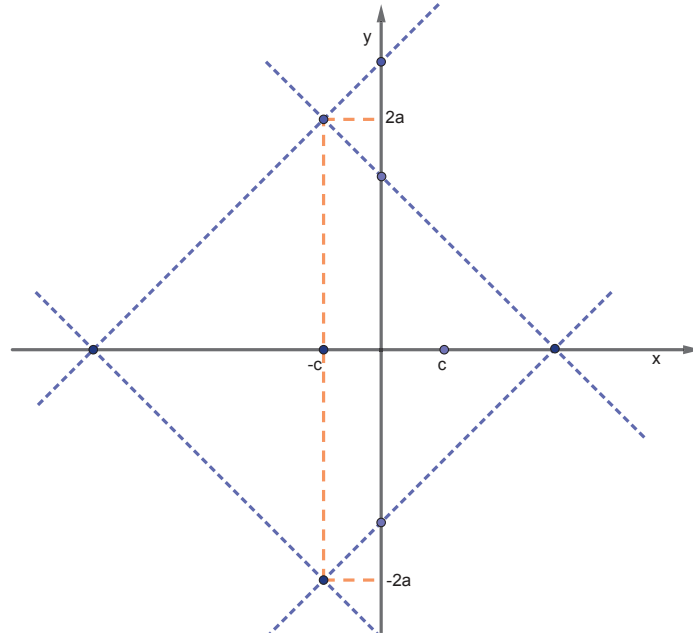


Figura 4.3: Caso III - elipse com focos no eixo OX via métrica d'' .

Caso (IV) $\max\{|x+c|, |y|\} = |x+c|$ e $\max\{|x-c|, |y|\} = |x-c|$:

$$\max\{|x+c|, |y|\} + \max\{|x-c|, |y|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|x+c| + |x-c| = 2a.$$

Analisemos a equação modular acima:

- Se $x+c > 0$ e $x-c > 0$, então:
 $|x+c| + |x-c| = 2a \Rightarrow x+c + x-c = 2a \Rightarrow 2x = 2a \Rightarrow x = a$
- Se $x+c > 0$ e $x-c < 0$, então:
 $|x+c| + |x-c| = 2a \Rightarrow x+c - x+c = 2a \Rightarrow 2c = 2a \Rightarrow c = a$, o que é absurdo, logo a solução para este caso é vazia.
- Se $x+c < 0$ e $x-c > 0$ então:
 $|x+c| + |x-c| = 2a \Rightarrow -x-c + x-c = 2a \Rightarrow -2c = 2a \Rightarrow -c = a$, o que é absurdo, logo a solução para este caso é vazia.
- Se $x+c < 0$ e $x-c < 0$ então:
 $|x+c| + |x-c| = 2a \Rightarrow -x-c - x+c = 2a \Rightarrow -2x = 2a \Rightarrow x = -a$.

Geometricamente obtemos:

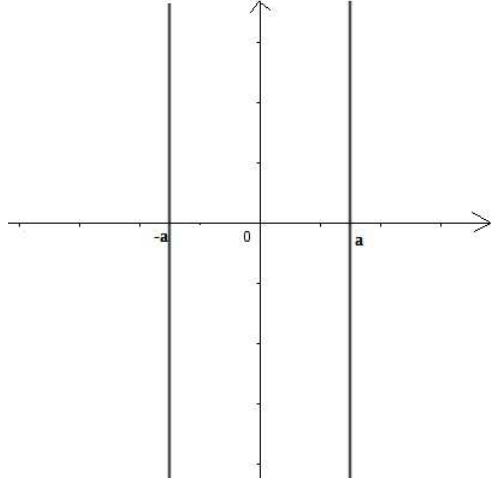


Figura 4.4: Caso IV - elipse com focos no eixo OX via métrica d'' .

A seguir apresentamos um tratamento para a elipse considerando a métrica do máximo, d'' , e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica para o eixo OY .

Sabemos que a elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 < c < a$ e $D(F_1, F_2) = 2c$, então

$$\mathcal{E} := \{P \in \pi : D(P, F_1) + D(P, F_2) = 2a\}.$$

Suponha que $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$. Temos que $P \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $d''(P, F_1) + d''(P, F_2) = 2a$.

Por outro lado, temos:

$$d''(P, F_1) = d''((x, y), (0, -c)) = \max\{|x + c|, |y|\}$$

e

$$d''(P, F_2) = d''((x, y), (0, c)) = \max\{|x - c|, |y|\}.$$

Consequentemente,

$$d''((x, y), (0, -c)) + d''((x, y), (0, c)) = 2a$$

implica que

$$\max\{|x - 0|, |y + c|\} + \max\{|x - 0|, |y - c|\} = 2a \Rightarrow$$

$$\max\{|x|, |y + c|\} + \max\{|x|, |y - c|\} = 2a.$$

Analisemos cada caso com relação a maxibilidade entre os elementos:

$$|x|, |y + c| \text{ e } |y - c|.$$

Caso (I). $\max\{|x|, |y + c|\} = |x| = \max\{|x|, |y - c|\}$:

$$\max\{|x|, |y + c|\} + \max\{|x|, |y - c|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|x| + |x| = 2a \Rightarrow 2|x| = 2a \Rightarrow |x| = a \Rightarrow x = \pm a.$$

Geometricamente obtemos:

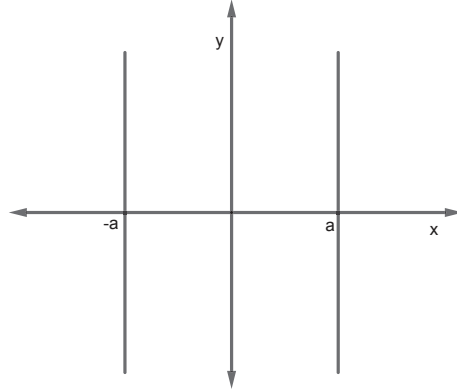


Figura 4.5: Caso I - elipse com focos no eixo OY via métrica d'' .

Caso (II). $\max\{|x|, |y + c|\} = |x|$ e $\max\{|x|, |y - c|\} = |y - c|$:

$$\max\{|x|, |y + c|\} + \max\{|x|, |y - c|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|x| + |y - c| = 2a.$$

Analisemos a equação modular acima:

- Se $x > 0$ e $y - c > 0$, então:
 $|x| + |y - c| = 2a \Rightarrow x + y - c = 2a \Rightarrow y = -x + (2a + c).$
- Se $x > 0$ e $y - c < 0$, então:
 $|x| + |y - c| = 2a \Rightarrow x - y + c = 2a \Rightarrow y = x - (2a - c).$
- Se $x < 0$ e $y - c > 0$, então:
 $|x| + |y - c| = 2a \Rightarrow -x + y - c = 2a \Rightarrow y = x + (2a + c).$
- Se $x < 0$ e $y - c < 0$, então:
 $|x| + |y - c| = 2a \Rightarrow -x - y + c = 2a \Rightarrow y = -x - (2a - c).$

Geometricamente obtemos:

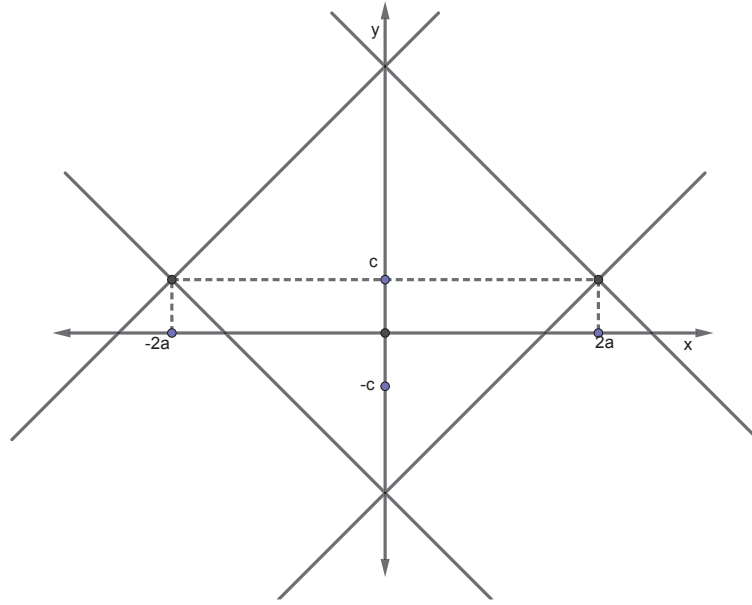


Figura 4.6: Caso II- elipse com focos no eixo OY via métrica d'' .

Caso (III). $\max\{|x|, |y + c|\} = |y + c|$ e $\max\{|x|, |y - c|\} = |x|$:

$$\max\{|x|, |y + c|\} + \max\{|x|, |y - c|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|y + c| + |x| = 2a.$$

Analisemos a equação modular acima.

- Se $y + c > 0$ e $x > 0$, então $|y + c| + |x| = 2a \Rightarrow y + c + x = 2a \Rightarrow y = -x + (2a - c)$.
- Se $y + c > 0$ e $x < 0$, então $|y + c| + |x| = 2a \Rightarrow y + c - x = 2a \Rightarrow y = x + (2a - c)$.
- Se $y + c < 0$ e $x > 0$, então $|y + c| + |x| = 2a \Rightarrow -y - c + x = 2a \Rightarrow y = x - (2a + c)$.
- Se $y + c < 0$ e $x < 0$, então $|y + c| + |x| = 2a \Rightarrow -y - c - x = 2a \Rightarrow y = -x - (2a + c)$.

Geometricamente obtemos:

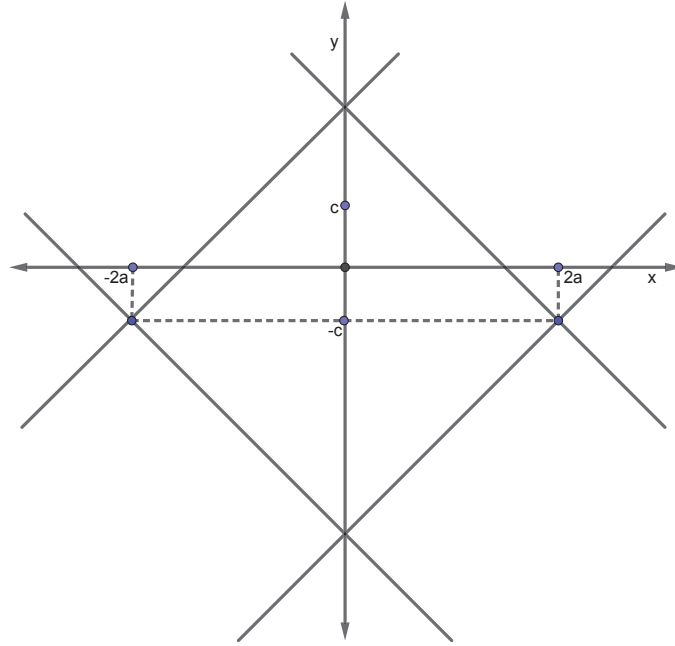


Figura 4.7: Caso III- elipse com focos no eixo OY via métrica d'' .

Caso (IV). $\max\{|x|, |y + c|\} = |y + c|$ e $\max\{|x|, |y - c|\} = |y - c|$:

$$\max\{|x|, |y + c|\} + \max\{|x|, |y - c|\} = 2a \Rightarrow$$

$$|y + c| + |y - c| = 2a.$$

Analisemos a equação modular acima:

- Se $y + c > 0$ e $y - c > 0$, então
 $|y + c| + |y - c| = 2a \Rightarrow y + c + y - c = 2a \Rightarrow 2y = 2a \Rightarrow y = a.$
- Se $y + c > 0$ e $y - c < 0$, então
 $|y + c| + |y - c| = 2a \Rightarrow y + c - y + c = 2a \Rightarrow 2c = 2a \Rightarrow c = a$, o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.
- Se $y + c < 0$ e $y - c > 0$, então
 $|y + c| + |y - c| = 2a \Rightarrow -y - c + y - c = 2a \Rightarrow -2c = 2a \Rightarrow -c = a$, o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.
- Se $y + c < 0$ e $y - c < 0$ então
 $|y + c| + |y - c| = 2a \Rightarrow -y - c - y + c = 2a \Rightarrow -2y = 2a \Rightarrow y = -a.$

Geometricamente obtemos:

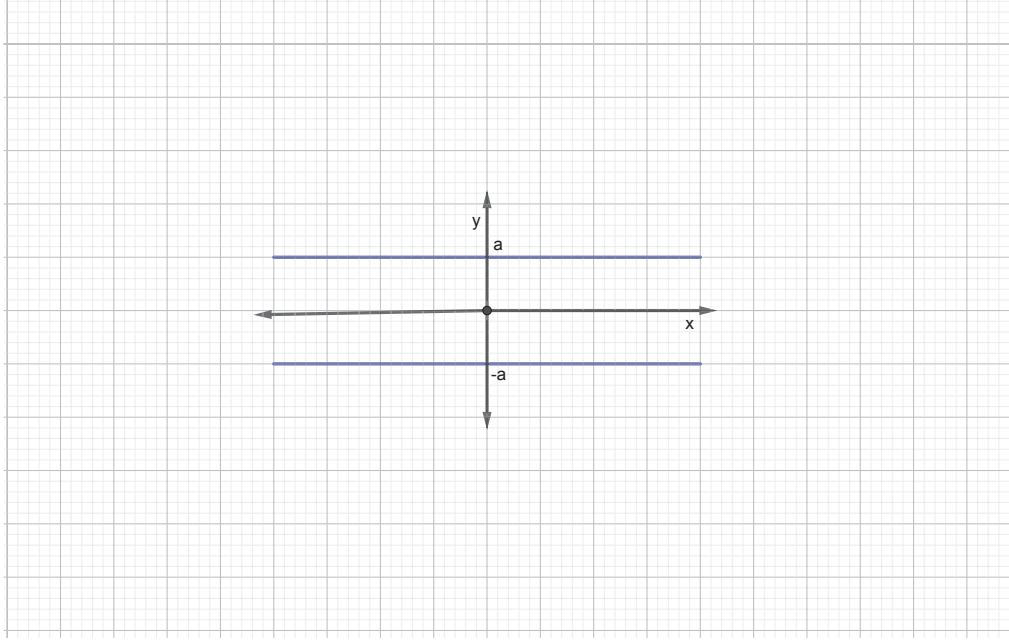


Figura 4.8: Caso IV - elipse com focos no eixo OY via métrica d'' .

4.2 Hipérbole

Hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cujo valor absoluto da diferença entre as distâncias de P a F_1 e a F_2 é igual a uma constante $2a > 0$.

Sendo $2a > 0$, então

$$\mathcal{H} := \{P \in \mathbb{R}^2 : |D(P, F_1) - D(P, F_2)| = 2a\}.$$

A seguir apresentamos um tratamento para a hipérbole considerando a métrica do máximo, d'' , e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica.

Primeiramente vamos fazer a análise da hipérbole que tem focos no eixo OX . Para tanto, suponha que $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $|d''(P, F_1) - d''(P, F_2)| = 2a$.

Por outro lado, temos:

$$d''(P, F_1) = d''((x, y), (-c, 0)) = \max\{|x + c|, |y|\}$$

e

$$d''(P, F_2) = d''((x, y), (c, 0)) = \max\{|x - c|, |y|\}.$$

Consequentemente,

$$|d''((x, y), (-c, 0)) - d''((x, y), (c, 0))| = 2a$$

implica que

$$|\max\{|x + c|, |y|\} - \max\{|x - c|, |y|\}| = 2a.$$

Analisemos cada caso com relação a maxibilidade entre os elementos:

$$|x + c|, |x - c| \text{ e } |y|.$$

Caso (I). $\max\{|x + c|, |y|\} = |y| = \max\{|x - c|, |y|\}$:

$$|\max\{|x + c|, |y|\} - \max\{|x - c|, |y|\}| = 2a \Rightarrow$$

$$||y| - |y|| = 2a \Rightarrow 0 = 2a.$$

Logo, neste caso, não há como definir uma hipérbole.

Caso (II). $\max\{|x + c|, |y|\} = |y|$ e $\max\{|x - c|, |y|\} = |x - c|$:

$$|\max\{|x + c|, |y|\} - \max\{|x - c|, |y|\}| = 2a \Rightarrow$$

$$||y| - |x - c|| = 2a \Rightarrow$$

$$|y| - |x - c| = 2a \text{ ou } |y| - |x - c| = -2a.$$

Analisamos cada caso separadamente:

$|y| - |x - c| = 2a$ para essa equação modular temos

- Se $y > 0$ e $x - c > 0$, então
 $|y| - |x - c| = 2a \Rightarrow y - x + c = 2a \Rightarrow y = x + (2a - c).$
- Se $y > 0$ e $x - c < 0$, então
 $|y| - |x - c| = 2a \Rightarrow y + x - c = 2a \Rightarrow y = -x + (2a + c).$
- Se $y < 0$ e $x - c > 0$, então
 $|y| - |x - c| = 2a \Rightarrow -y - x + c = 2a \Rightarrow -y = x + (2a - c) \Rightarrow y = -x - (2a - c).$
- Se $y < 0$ e $x - c < 0$, então
 $|y| - |x - c| = 2a \Rightarrow -y + x - c = 2a \Rightarrow y = x - (2a + c).$

$|y| - |x - c| = -2a$ para essa equação modular temos

- Se $y > 0$ e $x - c > 0$, então
 $|y| - |x - c| = -2a \Rightarrow y - x + c = -2a \Rightarrow y = x - (2a + c).$
- Se $y > 0$ e $x - c < 0$, então
 $|y| - |x - c| = -2a \Rightarrow y + x - c = -2a \Rightarrow y = -x - (2a - c).$
- Se $y < 0$ e $x - c > 0$, então
 $|y| - |x - c| = -2a \Rightarrow -y - x + c = -2a \Rightarrow y = -x + (2a + c).$
- Se $y < 0$ e $x - c < 0$, então
 $|y| - |x - c| = -2a \Rightarrow -y + x - c = -2a \Rightarrow y = x + (2a - c).$

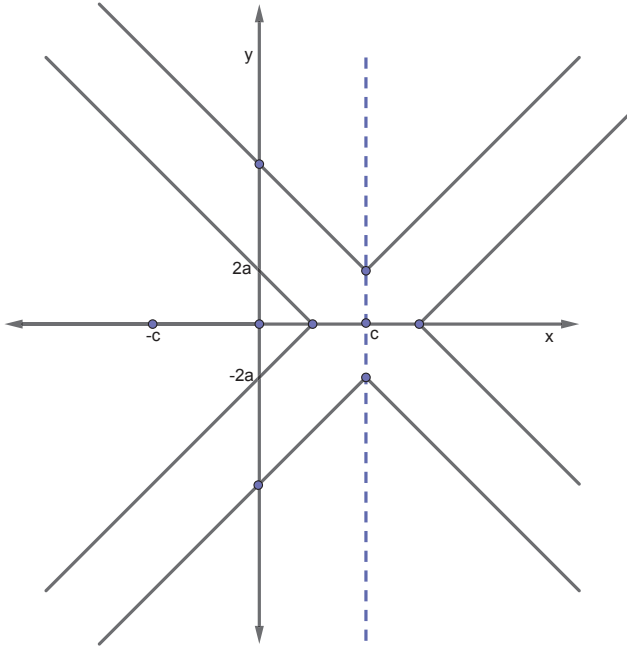


Figura 4.9: Caso II- hipérbole com focos no eixo OX via métrica d'' .

Caso (III). $\max\{|x + c|, |y|\} = |x + c|$ e $\max\{|x - c|, |y|\} = |y|$:

$$|\max\{|x + c|, |y|\} - \max\{|x - c|, |y|\}| = 2a \Rightarrow$$

$$||x + c| - |y|| = 2a \Rightarrow$$

$$|x + c| - |y| = 2a \text{ ou } |x + c| - |y| = -2a.$$

Analisamos cada caso separadamente:

$|x + c| - |y| = 2a$: para essa equação modular temos

- Se $x + c > 0$ e $y > 0$, então
 $|x + c| - |y| = 2a \Rightarrow x + c - y = 2a \Rightarrow y = x - (2a - c).$
- Se $x + c > 0$ e $y < 0$, então
 $|x + c| - |y| = 2a \Rightarrow x + c + y = 2a \Rightarrow y = -x + (2a - c).$
- Se $x + c < 0$ e $y > 0$, então
 $|x + c| - |y| = 2a \Rightarrow -x - c - y = 2a \Rightarrow y = -x - (2a + c).$
- Se $x + c < 0$ e $y < 0$, então
 $|x + c| - |y| = 2a \Rightarrow -x - c + y = 2a \Rightarrow y = x + (2a + c).$

$|x + c| - |y| = -2a$: para essa equação modular temos

- Se $x + c > 0$ e $y > 0$, então
 $|x + c| - |y| = -2a \Rightarrow x + c - y = -2a \Rightarrow y = x + (2a + c).$
- Se $x + c > 0$ e $y < 0$, então
 $|x + c| - |y| = -2a \Rightarrow x + c + y = -2a \Rightarrow y = -x - (2a + c).$

- Se $x + c < 0$ e $y > 0$, então
 $|x + c| - |y| = -2a \Rightarrow -x - c - y = -2a \Rightarrow y = -x + (2a - c)$.
- Se $x + c < 0$ e $y < 0$, então
 $|x + c| - |y| = -2a \Rightarrow -x - c + y = -2a \Rightarrow y = x - (2a - c)$.

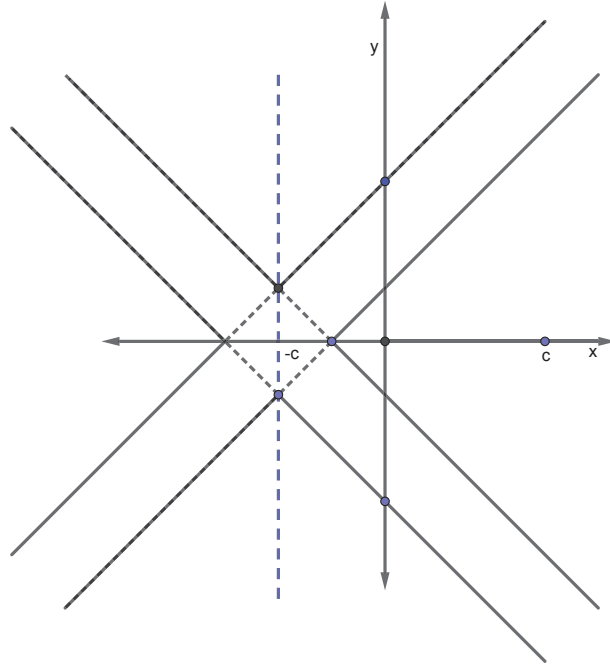


Figura 4.10: Caso III- hipérbole com focos no eixo OX via métrica d'' .

Caso (IV) $\max\{|x + c|, |y|\} = |x + c|$ e $\max\{|x - c|, |y|\} = |x - c|$:

$$\max\{|x + c|, |y|\} + \max\{|x - c|, |y|\} = 2a \Rightarrow$$

$$||x + c| - |x - c|| = 2a \Rightarrow$$

$$|x + c| - |x - c| = 2a \text{ ou } |x + c| - |x - c| = -2a.$$

$|x + c| - |x - c| = 2a$: para essa equação modular temos

- Se $x + c > 0$ e $x - c > 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = 2a \Rightarrow x + c - x + c = 2a \Rightarrow 2c = 2a \Rightarrow c = a$, o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.
- Se $x + c > 0$ e $x - c < 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = 2a \Rightarrow x + c + x - c = 2a \Rightarrow 2x = 2a \Rightarrow x = a$.
- Se $x + c < 0$ e $x - c > 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = 2a \Rightarrow -x - c - x + c = 2a \Rightarrow -2x = 2a \Rightarrow x = -a$.
- Se $x + c < 0$ e $x - c < 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = 2a \Rightarrow -x - c + x - c = 2a \Rightarrow -2c = 2a$, o que é absurdo, logo a solução para este caso é vazia.

$|x + c| - |x - c| = -2a$: para essa equação modular temos

- Se $x + c > 0$ e $x - c > 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = -2a \Rightarrow x + c - x + c = -2a \Rightarrow 2c = -2a \Rightarrow c = -a$,
 o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.
- Se $x + c > 0$ e $x - c < 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = -2a \Rightarrow x + c + x - c = -2a \Rightarrow 2x = -2a \Rightarrow x = -a$.
- Se $x + c < 0$ e $x - c > 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = -2a \Rightarrow -x + c - x + c = -2a \Rightarrow -2x = -2a \Rightarrow x = a$.
- Se $x + c < 0$ e $x - c < 0$, então
 $|x + c| - |x - c| = -2a \Rightarrow -x - c + x - c = -2a \Rightarrow -2c = -2a \Rightarrow c = a$,
 o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.

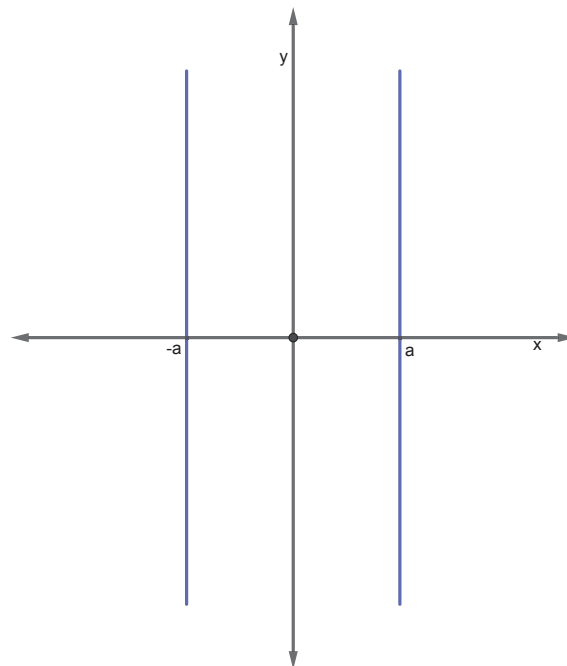


Figura 4.11: Caso IV- hipérbole com focos no eixo OX via métrica d'' .

A seguir apresentamos um tratamento para a hipérbole considerando a métrica do máximo, d'' , e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica para o eixo OY .

Para tanto, suponha que $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $|d''(P, F_1) - d''(P, F_2)| = 2a$.

Por outro lado, temos:

$$d''(P, F_1) = d''((x, y), (0, -c)) = \max\{|x|, |y + c|\}$$

e

$$d''(P, F_2) = d''((x, y), (0, c)) = \max\{|x|, |y - c|\}.$$

Consequentemente,

$$|d''((x, y), (0, -c)) - d''((x, y), (0, c))| = 2a$$

implica que

$$|\max\{|x|, |y + c|\} - \max\{|x|, |y - c|\}| = 2a.$$

Analisemos cada caso com relação a maxibilidade entre os elementos:

$$|y + c|, |y - c| \text{ e } |x|.$$

Caso (I). $\max\{|x|, |y + c|\} = |x| = \max\{|x|, |y - c|\}$:

$$|\max\{|x|, |y + c|\} - \max\{|x|, |y - c|\}| = 2a \Rightarrow ||x| - |x|| = 2a \Rightarrow 0 = 2a.$$

Logo, não há como definir uma hipérbole nesse caso.

Caso (II). $\max\{|x|, |y + c|\} = |x|$ e $\max\{|x|, |y - c|\} = |y - c|$:

$$|\max\{|x|, |y + c|\} - \max\{|x|, |y - c|\}| = 2a \Rightarrow$$

$$||x| - |y - c|| = 2a \Rightarrow$$

$$|x| - |y - c| = 2a \text{ ou } |x| - |y - c| = -2a.$$

$|x| - |y - c| = 2a$ para essa equação modular temos

- Se $x > 0$ e $y - c > 0$, então $|x| - |y - c| = 2a \Rightarrow x - y + c = 2a \Rightarrow y = x - (2a - c)$.
- Se $x > 0$ e $y - c < 0$, então $|x| - |y - c| = 2a \Rightarrow y + x - c = 2a \Rightarrow y = -x + (2a + c)$.
- Se $x < 0$ e $y - c > 0$, então $|x| - |y - c| = 2a \Rightarrow -x - y + c = 2a \Rightarrow y = -x - (2a - c)$.

- Se $x < 0$ e $y - c < 0$, então $|x| - |y - c| = 2a \Rightarrow -x + y - c = 2a \Rightarrow y = x + (2a + c)$.

$|x| - |y - c| = -2a$ para essa equação modular temos

- Se $x > 0$ e $y - c > 0$, então $|x| - |y - c| = -2a \Rightarrow x - y + c = -2a \Rightarrow y = x + (2a + c)$.
- Se $x > 0$ e $y - c < 0$, então $|x| - |y - c| = -2a \Rightarrow x + y - c = -2a \Rightarrow y = -x - (2a - c)$.
- Se $x < 0$ e $y - c > 0$, então $|x| - |y - c| = -2a \Rightarrow -x - y + c = -2a \Rightarrow y = -x + (2a + c)$.
- Se $x < 0$ e $y - c < 0$, então $|x| - |y - c| = -2a \Rightarrow -x + y - c = -2a \Rightarrow y = x - (2a - c)$.

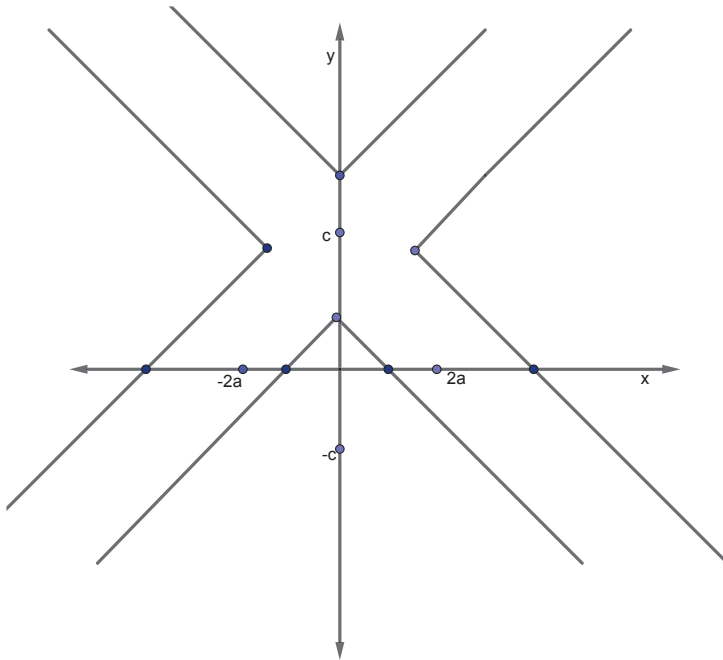


Figura 4.12: Caso II- hipérbole com focos no eixo OY via métrica d'' .

Caso (III). $\max\{|x|, |y + c|\} = |y + c|$ e $\max\{|x|, |y - c|\} = |x|$:

$$|\max\{|x|, |y + c|\} - \max\{|x|, |y - c|\}| = 2a \Rightarrow$$

$$||y + c| - |x|| = 2a \Rightarrow$$

$$|y + c| - |x| = 2a \text{ ou } |y + c| - |x| = -2a.$$

$|y + c| - |x| = 2a$ para essa equação modular temos

- Se $y + c > 0$ e $x > 0$, então
 $|y + c| - |x| = 2a \Rightarrow y + c - x = 2a \Rightarrow y = x + (2a - c)$.

- Se $y + c > 0$ e $x < 0$, então
 $|y + c| - |x| = 2a \Rightarrow y + c + x = 2a \Rightarrow y = -x + (2a - c).$
- Se $y + c < 0$ e $x > 0$, então
 $|y + c| - |x| = 2a \Rightarrow -y - c - x = 2a \Rightarrow y = -x - (2a + c).$
- Se $y + c < 0$ e $x < 0$, então
 $|y + c| - |x| = 2a \Rightarrow -y - c + x = 2a \Rightarrow y = x - (2a + c).$

$|y + c| - |x| = -2a$ para essa equação modular temos

- Se $y + c > 0$ e $x > 0$, então
 $|y + c| - |x| = -2a \Rightarrow y + c - x = -2a \Rightarrow y = x - (2a + c).$
- Se $y + c > 0$ e $x < 0$, então
 $|y + c| - |x| = -2a \Rightarrow y + c + x = -2a \Rightarrow y = -x - (2a + c).$
- Se $y + c < 0$ e $x > 0$, então
 $|y + c| - |x| = -2a \Rightarrow -y - c - x = -2a \Rightarrow y = -x + (2a - c).$
- Se $y + c < 0$ e $x < 0$, então
 $|y + c| - |x| = -2a \Rightarrow -y - c + x = -2a \Rightarrow y = x + (2a - c).$

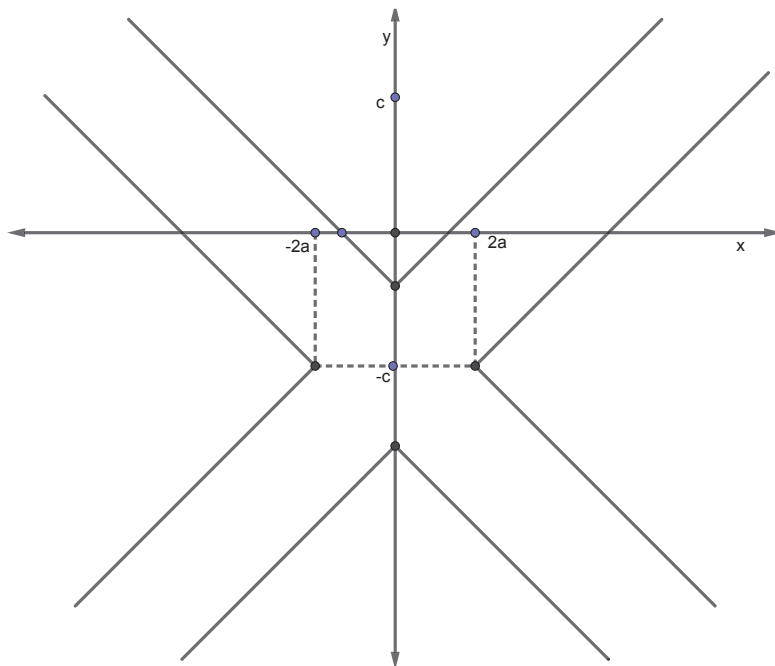


Figura 4.13: Caso III- hipérbole com focos no eixo OY via métrica d'''

Caso (IV). $\max\{|x|, |y + c|\} = |y + c|$ e $\max\{|x|, |y - c|\} = |y - c|$:

$$|\max\{|x|, |y + c|\} - \max\{|x|, |y - c|\}| = 2a \Rightarrow$$

$$||y + c| - |y - c|| = 2a \Rightarrow$$

$$|y + c| - |y - c| = 2a \text{ ou } |y + c| - |y - c| = -2a.$$

$|y + c| - |y - c| = 2a$: para essa equação modular temos

- Se $y + c > 0$ e $y - c > 0$, então
 $|y + c| - |y - c| = 2a \Rightarrow y + c - y + c = 2a \Rightarrow 2c = 2a \Rightarrow c = a$, o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.
- Se $y + c > 0$ e $y - c < 0$, então
 $|y + c| - |y - c| = 2a \Rightarrow y + c + y - c = 2a \Rightarrow 2y = 2a \Rightarrow y = a$.
- Se $y + c < 0$ e $y - c > 0$, então
 $|y + c| - |y - c| = 2a \Rightarrow -y - c - y + c = 2a \Rightarrow -2y = 2a \Rightarrow y = -a$.
- Se $y + c < 0$ e $y - c < 0$, então
 $|y + c| - |y - c| = 2a \Rightarrow -y - c + y - c = 2a \Rightarrow -2c = 2a \Rightarrow -c = a$, o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.

$|y + c| - |y - c| = -2a$ para essa equação modular temos

- Se $y + c > 0$ e $y - c > 0$, então
 $|y + c| - |y - c| = -2a \Rightarrow y + c - y + c = -2a \Rightarrow 2c = -2a \Rightarrow c = -a$, o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.
- Se $y + c > 0$ e $y - c < 0$ então
 $|y + c| - |y - c| = -2a \Rightarrow y + c + y - c = -2a \Rightarrow y = -a$
- Se $y + c < 0$ e $y - c > 0$, então
 $|y + c| - |y - c| = -2a \Rightarrow -y - c - y + c = -2a \Rightarrow -2y = -2a \Rightarrow y = a$
- Se $y + c < 0$ e $y - c < 0$, então
 $|y + c| - |y - c| = -2a \Rightarrow -y - c + y - c = -2a \Rightarrow -2c = -2a \Rightarrow c = a$, o que é absurdo, e a solução para este caso é vazia.

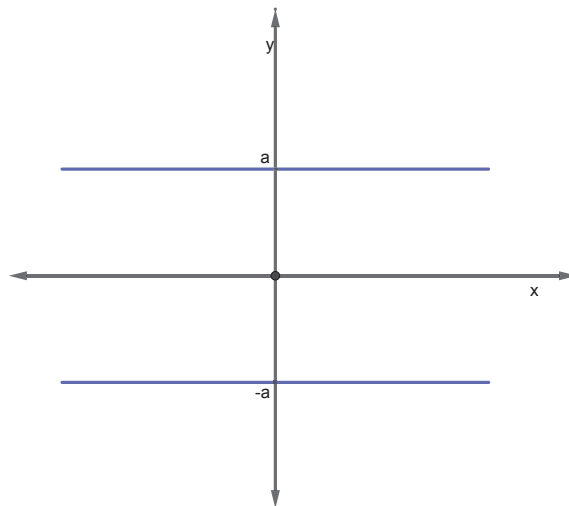


Figura 4.14: Caso IV- hipérbole com focos no eixo OY via métrica d'' .

4.3 Parábola

Sabemos que a parábola $\mathcal{P}$ de foco F e reta diretriz r é o conjunto dos pontos P do plano cujas distâncias de P a F e a r são iguais, ou seja,

$$\mathcal{P} := \{P \in \pi : D(P, r) = D(P, F)\}.$$

A seguir apresentamos um tratamento para a parábola considerando a métrica do máximo, d'' , e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica.

Sabemos que $\mathcal{P} := \{P \in \pi : D(P, r) = D(P, F)\}$, e que r é a reta diretriz e F é o foco.

Vamos estudar, primeiramente, o caso em que a diretriz é dada por $r : x = -p$ e $F = (p, 0)$, ou seja, caso em que o foco está no eixo OX . Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, qualquer.

Para calcular $d''(P, r)$ consideramos a distância de P ao pé da perpendicular a r por P , ou seja, $d''(P, r) = d''(P, Q)$, em que $Q = (-p, y)$.

Assim temos

$$d''(P, r) = d''(P, F) \Rightarrow$$

$$d''(P, Q) = d''(P, F) \Rightarrow$$

$$d''((x, y), (-p, y)) = d''((x, y), (p, 0)) \Rightarrow$$

$$\max\{|x + p|, 0\} = \max\{|x - p|, |y|\} \Rightarrow$$

$$|x + p| = \max\{|x - p|, |y|\}.$$

Analisemos cada caso com relação a maxibilidade entre os elementos:

$$|x - p| \text{ e } |y|.$$

Caso (I). $\max\{|x - p|, |y|\} = |y|$:

$$|x + p| = \max\{|x - p|, |y|\} \Rightarrow$$

$$|x + p| = |y|.$$

Analisemos esta equação modular:

- Se $x + p > 0$ e $y > 0$, então
 $|x + p| = |y| \Rightarrow x + p = y \Rightarrow y = x + p.$
- Se $x + p < 0$ e $y > 0$, então
 $|x + p| = |y| \Rightarrow -x - p = y \Rightarrow y = -x - p.$
- Se $x + p > 0$ e $y < 0$, então
 $|x + p| = |y| \Rightarrow x + p = -y \Rightarrow y = -x - p.$
- Se $x + p < 0$ e $y < 0$, então
 $|x + p| = |y| \Rightarrow -x - p = -y \Rightarrow y = x + p.$

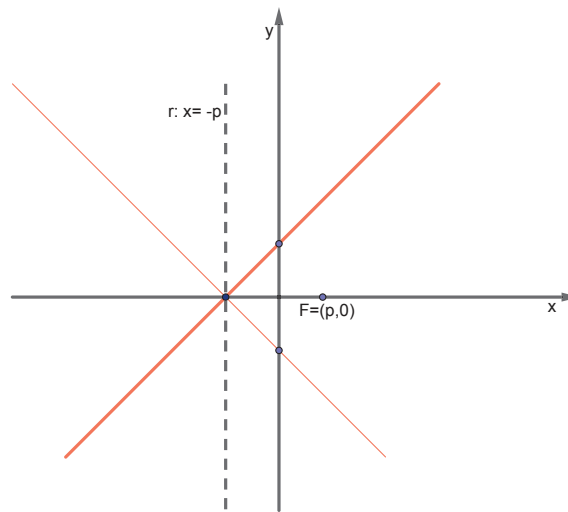


Figura 4.15: Caso I- Parábola com foco no eixo OX .

Caso (II). $\max\{|x - p|, |y|\} = |x - p|$:

$$|x + p| = \max\{|x - p|, |y|\} \Rightarrow$$

$$|x + p| = |x - p|.$$

Analisemos esta equação modular temos:

- Se $x + p > 0$ e $x - p > 0$, então
 $|x + p| = |x - p| \Rightarrow x + p = x - p \Rightarrow p = 0$.
 Logo neste caso, é impossível de se definir uma parábola.
- Se $x + p < 0$ e $x - p > 0$, então
 $|x + p| = |x - p| \Rightarrow -x - p = x - p \Rightarrow x = 0$.
- Se $x + p > 0$ e $x - p < 0$, então
 $|x + p| = |x - p| \Rightarrow x + p = -x + p \Rightarrow p = 0$.
 Logo neste caso, é impossível de se definir uma parábola.
- Se $x + p < 0$ e $x - p < 0$, então
 $|x + p| = |x - p| \Rightarrow -x - p = -x + p \Rightarrow x = 0$.

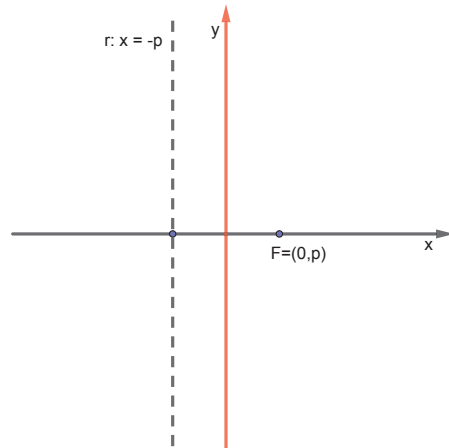


Figura 4.16: Caso II- Parábola com foco no eixo OX .

Agora vamos explorar o caso em que a diretriz é dada por $r : y = -p$ e $F = (0, p)$, ou seja, caso em que o foco está no eixo OY . Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, qualquer.

Para calcular $d''(P, r)$ consideramos a distância de P ao pé da perpendicular a r por P , ou seja, $d''(P, r) = d''(P, Q)$, em que $Q = (x, -p)$.

Assim temos

$$d''(P, r) = d''(P, F) \Rightarrow$$

$$d''(P, Q) = d''(P, F) \Rightarrow$$

$$d''((x, y), (x, -p)) = d''((x, y), (0, p)) \Rightarrow$$

$$\max\{0, |y + p|\} = \max\{|x|, |y - p|\} \Rightarrow$$

$$|y + p| = \max\{|x|, |y - p|\}.$$

Analisemos cada caso com relação a maxibilidade entre os elementos:

$$|x| \text{ e } |y - p|.$$

Caso (I). $\max\{|x|, |y - p|\} = |x|:$

$$|y + p| = \max\{|x|, |y - p|\} \Rightarrow$$

$$|y + p| = |x|.$$

Analisemos esta equação modular:

- Se $y + p > 0$ e $x > 0$, então $|y + p| = |x| \Rightarrow y + p = x \Rightarrow y = x - p$.
- Se $y + p > 0$ e $x < 0$, então $|y + p| = |x| \Rightarrow y + p = -x \Rightarrow y = -x - p$.
- Se $y + p < 0$ e $x > 0$, então $|y + p| = |x| \Rightarrow -y - p = x \Rightarrow y = -x - p$.
- Se $y + p < 0$ e $x < 0$, então $|y + p| = |x| \Rightarrow -y - p = -x \Rightarrow y = x - p$.

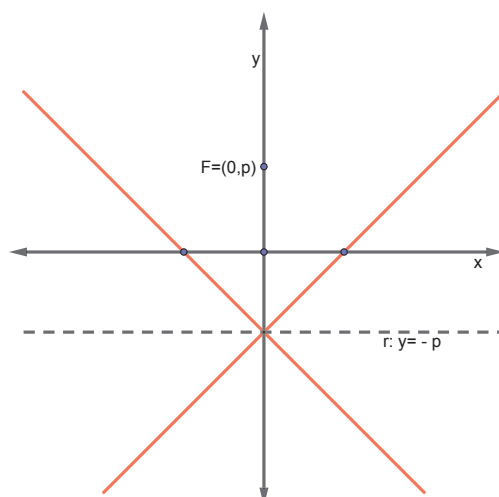


Figura 4.17: Caso I- Parábola com foco no eixo OY .

Caso (II). $\max\{|x|, |y - p|\} = |y - p|$:

$$|y + p| = \max\{|x|, |y - p|\} \Rightarrow$$

$$|y + p| = |y - p|.$$

Analisemos esta equação modular:

- Se $y + p > 0$ e $y - p > 0$, então $|y + p| = |y - p| \Rightarrow y + p = y - p \Rightarrow p = 0$ e neste caso a parábola se restringe a origem $(0, 0)$.
- Se $y + p > 0$ e $y - p < 0$, então $|y + p| = |y - p| \Rightarrow y + p = -y + p \Rightarrow y = 0$.
- Se $y + p < 0$ e $y - p > 0$, então $|y + p| = |y - p| \Rightarrow -y - p = y - p \Rightarrow y = 0$.
- Se $y + p < 0$ e $y - p < 0$, então $|y + p| = |y - p| \Rightarrow -y - p = -y + p$ e neste caso a parábola se restringe a origem $(0, 0)$.

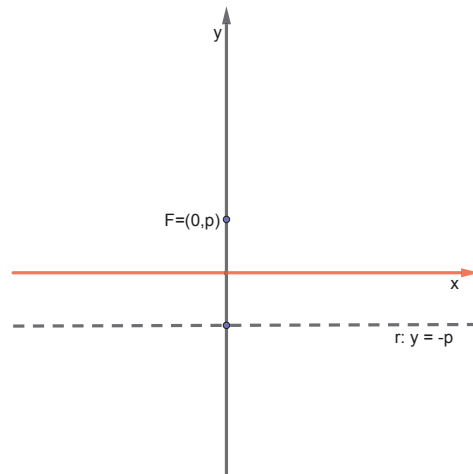


Figura 4.18: Caso II- Parábola com foco no eixo OY .

Conclusão

Neste trabalho exploramos as cônicas clássicas, a saber: elipse, hipérbole e parábola tanto do ponto de vista geométrico quanto analiticamente, através das três métricas usuais de $\mathbb{R}^2$: euclidiana, do máximo e a da soma. Pudemos observar a principal característica de cada cônica ao trocar a métrica, qual seja: seu esboço geométrico. Neste sentido, cada cônica ganha uma nova representação e propriedades bem diferentes, embora sejam o mesmo objeto visto por meio da geometria euclidiana e esta abordagem é o ponto forte deste trabalho. Por isso acreditamos que este material pode ser muito útil em disciplinas da graduação ou até mesmo pode ser usado em iniciações científicas.

Referências

- [1] P. Boulos ; I. de Camargo, *Geometria Analítica*, 3.ed., Pearson: São Paulo. 2005.
- [2] J. Delgado; K. Frensel; L. Crissaff, *Geometria Analítica*, SBM, Coleção PROFMAT, 2017.
- [3] H. Eyes, *Introdução à História da Matemática*, 2.ed., Ed.Unicamp: Campinas. 1997.
- [4] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, 3.ed, Projeto Euclides: Rio de Janeiro. 1993.
- [5] R. M. Monteiro, *Resgate do teorema de Dardelin no estudo das cônicas com o Geogebra*, UFES-ES. 2014.