

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

Estudo da Difusão Caótica em Mapas Bidimensionais

Yoná Hirakawa Huggler

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro (SP)

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

YONÁ HIRAKAWA HUGGLER

ESTUDO DA DIFUSÃO CAÓTICA EM MAPAS
BIDIMENSIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Campus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, para obtenção do grau de
Bacharel e Licenciada em Física.

Rio Claro - SP

2019

H891e Huggler, Yoná Hirakawa
Estudo da Difusão Caótica em Mapas Bidimensionais /
Yoná Hirakawa Huggler. -- Rio Claro, 2019
30 p. : il. + 1 CD-ROM

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado e
licenciatura - Física) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro

Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Mapa Padrão Dissipativo. 3.
Leis de Escala. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

YONÁ HIRAKAWA HUGGLER

ESTUDO DA DIFUSÃO CAÓTICA EM MAPAS
BIDIMENSIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -
Campus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para
obtenção do grau de Bacharel e Licenciada em
Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Dr. Diogo Ricardo da Costa

Prof. Dr. Giovani Gozzi

Rio Claro, 11 de Novembro de 2019.

Assinatura do(a) aluno(a)

assinatura do(a) orientador(a)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Myuki e Célio, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em todas as decisões.

Aos meus amigos de curso, por torná-lo um pouco mais fácil e todas as amizades que encontrei durante esses anos.

Às meninas que moram comigo, Clara, Beatriz e Bruna, por sempre estarem ao meu lado e aguentarem o meu humor.

À Célia por sempre dispor um tempo para me ajudar, com suas valiosas discussões.

E principalmente ao meu orientador, Prof. Dr. Edson Denis Leonel, pela oportunidade de trabalhar com ele, pela sua paciência e dedicação, e por todos os ensinamentos.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o mapa padrão dissipativo descrito pelas variáveis dinâmicas ação, I , e ângulo, θ . A dinâmica foi caracterizada por dois parâmetros de controle ϵ e γ , tais que ϵ controla a não linearidade do mapa e γ controla a intensidade de dissipação no sistema. Construindo o espaço de fases do mapa, observamos uma figura mista que contém ilhas de estabilidade, curvas invariantes *spanning* e mar de caos para o caso conservativo em que $\gamma = 0$ e para valores de ϵ pequenos. Quando $\epsilon > \epsilon_c$, com $\epsilon_c \approx 0,9716 \dots$, as curvas invariantes *spanning* são destruídas e há difusão ilimitada na variável ação. Introduzindo um fator de dissipação, $\gamma \neq 0$, o sistema apresenta atratores, a difusão ilimitada na variável ação é suprimida, o que nos mostra uma transição de difusão ilimitada para limitada. Analisando o comportamento da ação quadrática média, I_{RMS} , foram feitas hipóteses de escala que conduziu a duas leis de escala. Os expoentes críticos foram determinados analiticamente. Com essas relações, identificamos que a região caótica é invariante de escala quando os parâmetros de controle ϵ e γ são variados.

Palavras chave: lei de escala, expoentes críticos, caos.

ABSTRACT

In this work, we have studied the dissipative standard map described by the dynamical variables action I and angle θ . The dynamics have been characterized by two control parameters ϵ e γ , which ϵ controls the nonlinearity of the system and γ controls the intensity of the dissipation on the system. We plotted the phase space of the map, and observed a mixed phase space containing periodic islands, invariant spanning curves and chaos for the conservative case with $\gamma = 0$ and for small ϵ . When $\epsilon > \epsilon_c$, with $\epsilon_c \approx 0,9716 \dots$, the invariant spanning curves were all destroyed and unlimited diffusion of the action could be seen. Introducing a parameter of dissipation, $\gamma \neq 0$, attractors appeared in the phase space and the unlimited diffusion was suppressed, leading to a transition from unlimited to limited diffusion. Analyzing the behavior of the average squared action (I_{RMS}), we made scaling hypotheses leading to two scaling laws. The critical exponents were determined analitically. With these relations, we have shown chaotic region is a scaling invariant with respect to the control parameters.

Keywords: scaling law, critical exponent, chaos.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	8
2. MAPA PADRÃO DISSIPATIVO.....	13
2.1. O mapa	13
2.2. Descrição Fenomenológica	16
2.3. Análise Numérica	22
3. EQUAÇÃO DA DIFUSÃO.....	25
4. CONCLUSÃO	29
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	29

1. INTRODUÇÃO

Nesta seção faremos uma breve contextualização histórica sobre dinâmica não linear e caos, introduzindo alguns conceitos fundamentais que serão abordados nas próximas seções.

No começo do século XIX ainda não se tinha uma ideia do que era o caos, acreditava-se na visão linearizada da natureza, em que era possível se obter uma ordem com regularidades. Por volta de 1880, o físico francês Henri Poincaré (1854 – 1942) notou a existência de comportamentos mais complexos e irregulares em sistemas dinâmicos estudando órbitas planetárias. A partir do estudo do movimento dos três corpos ele obteve como resultado movimentos irregulares com trajetórias variando rapidamente, órbitas indistinguíveis de um processo aleatório e uma sensibilidade aos dados iniciais, impossibilitando obter uma previsão correta para tempos longos [1]. Hoje em dia conhecemos que esta é uma das características fundamentais da teoria do caos. Poincaré escreveu em *Ciência e Método* (1908):

“Uma causa muito pequena que escapa de nossa observação determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver, e então dizemos que o efeito é devido ao acaso. Se conhecêssemos exatamente as leis da Natureza e a situação do Universo no momento inicial, poderíamos predizer exatamente a situação desse mesmo Universo em um momento posterior. Mas, mesmo se fosse o caso de que as leis da Natureza não tivessem segredos para nós, poderíamos conhecer a situação inicial apenas aproximadamente. Se isso nos permitisse predizer a situação posterior com a mesma aproximação, isso seria tudo que exigimos, e diríamos que o fenômeno foi previsto, isto é que ele é governado por leis. Mas não é sempre assim; pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes nos fenômenos finais. Um pequeno erro nos antecedentes produzirá um erro enorme nos últimos. A previsão se torna impossível, e temos um fenômeno fortuito.”

Apesar da visão de Poincaré acerca das sensibilidades de um sistema às condições iniciais, feita na passagem do século, ela foi praticamente esquecida; nos Estados Unidos, o único matemático a seguir seriamente a observação de Poincaré, nas décadas de 20 e 30, foi George D. Birkhoff (1884 – 1944), professor do jovem Edward Lorenz (1917 – 2008) no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (M.I.T.), por um breve período de tempo.

No início da década de 60, Edward Lorenz, meteorologista do M.I.T., dedicou-se a tentar fazer previsões do tempo simulando as condições atmosféricas em computadores [2]. Em 1961, fez as simulações meteorológicas utilizando 12 equações diferenciais parciais para descrever a atmosfera terrestre. Querendo examinar mais detalhadamente uma sequência, Lorenz tomou um atalho, ao invés de refazer toda a sequência, começou pelo meio. Dessa forma, ele digitou os números da impressão anterior como condições iniciais.

Em vez de reutilizar os dados iniciais da primeira simulação, utilizou dados ligeiramente arredondados, porque o computador, que manipulava números com seis casas decimais, imprimia-os com apenas três, dessa forma, ao reintroduzir os dados na repetição não estava utilizando os dados originais. O que era pra ser uma repetição exata da última sequência, acabou mostrando resultados completamente diferentes, os pequenos erros mostravam-se catastróficos.

A princípio ele achou que havia alguma falha no computador, porém ele percebeu depois que na verdade o erro estava nesse arredondamento ligeiro dos dados. Em 1963, Lorenz publicou um artigo [3] concluindo que a previsão meteorológica a longo prazo é impossível, a menos que se conheça as condições atuais exatas, como as observações são imprecisas e incompletas, a previsão precisa a longo prazo não poderia existir e pequenos erros nas condições iniciais ocasionariam em resultados catastróficos. Este fenômeno ficou conhecido como Efeito Borboleta – “a noção de que uma borboleta, agitando o ar em Pequim pode modificar no mês seguinte sistemas de tempestades em Nova York” (GLEICK, 1989, p. 8).

Tomando uma série de equações de movimento dos fluidos, mais especificamente para a convecção, Lorenz reduziu-as, eliminando tudo que pudesse ser irrelevante, deixando-as mais simples possível. Quase tudo do modelo original desaparecera, permanecendo a não-linearidade. Dessa forma, encontrou três equações para descrever

esse tipo de comportamento, que mais tarde ficou conhecido como sistema de Lorenz, descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.1)$$

em que σ , r e b são parâmetros de controle.

Este sistema apresentou um mapa de complexidade infinita, traçava uma forma estranha como se fosse uma espiral dupla em três dimensões, como uma borboleta com as duas asas, como é possível ver na Figura 1.1, a seguir.

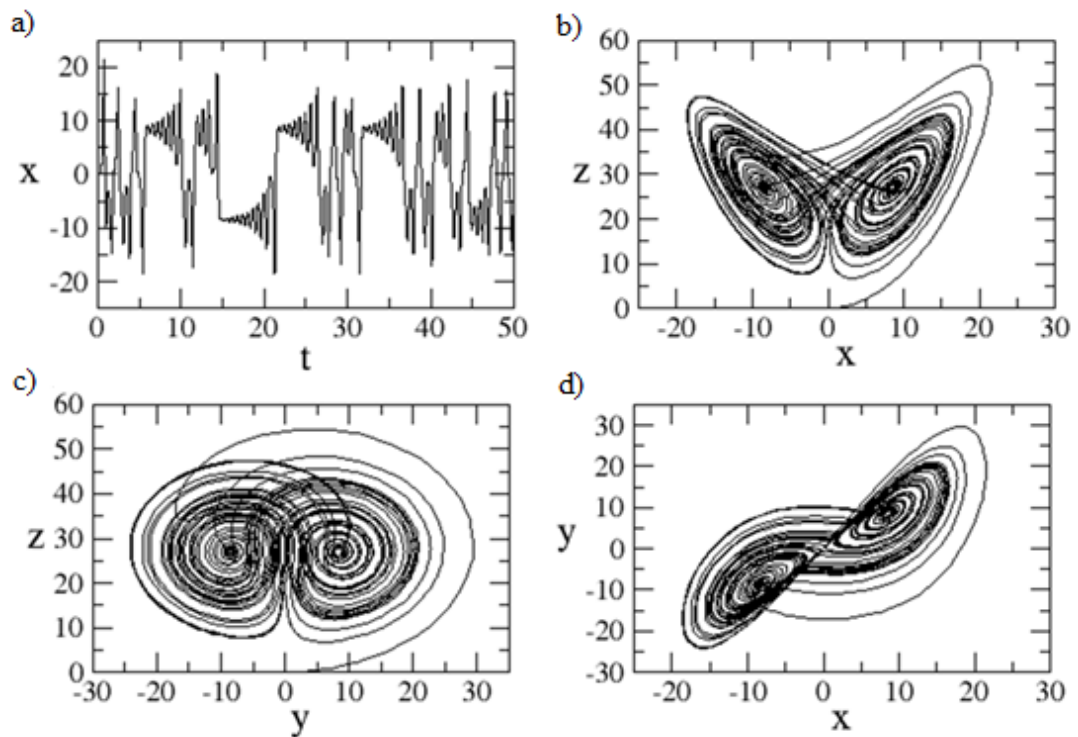


Figura 1.1: Atrator de Lorenz com a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.01, 0.01)$ e parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$ a) t vs. x ; b) x vs. z ; c) y vs. z ; e d) x vs. y .

A partir daí, estudos nessa área começaram a crescer, contando também com o desenvolvimento da tecnologia e computadores com desempenhos melhores. Os estudos não se encontravam somente na área da física, como também na matemática, biologia, química, entre outras que buscavam uma ligação entre diferentes tipos de irregularidades.

Por exemplo, os fisiologistas descobriram uma ordem no caos que se desenvolve no coração humano, causa principal da morte súbita e inexplicada; os ecólogos exploraram a ascensão e queda da população das mariposas conhecidas como limântrias; os economistas desenterraram velhas cotações da Bolsa e tentaram um novo tipo de análise [2], todas estavam relacionadas com o caos.

A partir do conhecimento das leis que descrevem a dinâmica, geralmente fornecidas pelas leis de Newton para sistemas mecânicos, os conjuntos de equações que determinam posição e velocidade em instantes futuros podem ser classificados como lineares ou não lineares.

O estudo de sistemas não-lineares muitas vezes envolve modelos dinâmicos que são descritos através de um mapeamento discreto (ou mapa discreto, ou ainda simplesmente mapa), que descreve a evolução temporal do sistema expressando seu estado como uma função do instante anterior. Ou seja, tendo o conhecimento de um dado estado dinâmico de um sistema em um instante n , pode-se determinar qual será seu estado futuro no instante $(n + 1)$.

Então, a partir do conhecimento de um estado inicial, é possível se obter um conjunto de estados seguintes pela evolução dinâmica de um sistema, em que a sequência cronológica desses estados recebe o nome de órbita, e fornece a dinâmica temporal para esta condição inicial. Se a configuração inicial for diferente, a evolução dinâmica também mudará, fornecendo outra sequência de estados, e, conseqüentemente, outra órbita. O conjunto de todas as órbitas recebe o nome de espaço de fases ou espaço de estados e fornece informações sobre todos os estados permitidos do sistema dinâmico [4].

Dependendo do sistema considerado, o espaço de fases pode exibir três tipos característicos de comportamento: periódico, quase periódico e caótico. Existem sistemas que apresentam comportamentos periódicos, outros quase periódicos e outros completamente caóticos, como também pode-se encontrar sistemas que apresentam os três comportamentos que coexistem em um espaço de fases. No comportamento periódico, percebe-se que a dinâmica se repete a intervalos de tempo bem definidos, levando a uma dinâmica regular e previsível. No caso do movimento quase-periódico, a repetição da dinâmica em tempos bem definidos não é mais observada, porém o fato de não conseguir medir determinado período não significa que a dinâmica seja completamente errática. De modo que a evolução dinâmica se dá ao longo de um conjunto

supostamente compacto de pontos no espaço de fases e que não exhibe afastamento, com o decorrer do tempo, de duas configurações iniciais bastante próximas. Por outro lado, o comportamento caótico é determinado a partir da evolução de duas condições iniciais próximas que se afastam uma da outra exponencialmente no tempo.

A dinâmica caótica, então, é consequência da não linearidade nas equações que descrevem a evolução dos sistemas caóticos. A não linearidade é necessária para a existência do caos, entretanto, existem sistemas não lineares que não apresentam uma dinâmica caótica.

Sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos têm sido amplamente estudados durante vários anos [5,6], bem como as leis de escala desses sistemas [7]. Leis de escala estão basicamente associadas às transições de fase. Em física estatística, transições de fase estão relacionadas às mudanças na estrutura espacial do sistema, particularmente devido à variação de parâmetros de controle. Por outro lado, em sistemas dinâmicos, elas estão vinculadas às modificações na estrutura do espaço de fases do sistema, também devido às mudanças nos parâmetros de controle. De fato, próximo a uma transição de fase, o sistema tem observáveis que são descritos por uma função de escala e expoentes críticos caracterizam a dinâmica próximo à transição.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2, discutiremos o modelo estudado com suas propriedades. Apresentaremos uma descrição fenomenológica, assumindo hipóteses de escala a partir do comportamento das curvas da variável I_{RMS} vs. n . Faremos uma análise numérica mostrando os resultados dos expoentes críticos. A seção 3 é dedicada à apresentação da equação da difusão para futura solução. Na seção 4, apresentamos nossas conclusões sobre o modelo e perspectivas futuras.

2. MAPA PADRÃO DISSIPATIVO

2.1. O mapa

O mapa padrão dissipativo pode ser escrito como:

$$T: \begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + \epsilon \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \bmod 2\pi' \end{cases} \quad (2.1)$$

onde I é a variável ação, θ é a variável ângulo, ϵ é o parâmetro que controla a não linearidade do sistema e γ é o parâmetro de dissipação.

Escolhendo um conjunto de parâmetros de controle ϵ e γ , a evolução dinâmica do Mapeamento (2.1) parte de uma condição inicial (I_0, θ_0) . A iteração do mapa, conhecendo (I_0, θ_0) , fornece (I_1, θ_1) que, quando iterado, fornece (I_2, θ_2) , e assim sucessivamente. A sequência de estados $(I_0, \theta_0) \rightarrow (I_1, \theta_1) \rightarrow (I_2, \theta_2) \rightarrow \dots (I_n, \theta_n)$ recebe o nome de órbita e o conjunto de todas elas é chamado de espaço de fases.

A Figura 2.1 apresenta a forma do espaço de fases para o mapeamento descrito acima, para diferentes valores de ϵ , considerando o caso conservativo em que $\gamma = 0$. O sistema é dissipativo no caso em que $0 < \gamma < 1$. No caso conservativo, para $\epsilon = 0$, o sistema é integrável. Para $0 < \epsilon < \epsilon_c$, com $\epsilon_c \approx 0,9716 \dots$, podemos ver que o espaço de fases é misto contendo ilhas de estabilidade, curvas invariantes *spanning* e caos. Uma órbita no mar de caos é proibida de entrar nas ilhas de estabilidade assim como não pode cruzar as curvas invariantes *spanning*.

Para $\epsilon > \epsilon_c$, as curvas invariantes *spanning* são destruídas e há difusão ilimitada na variável ação, como pode ser visto na Figura 2.1 (e, f).

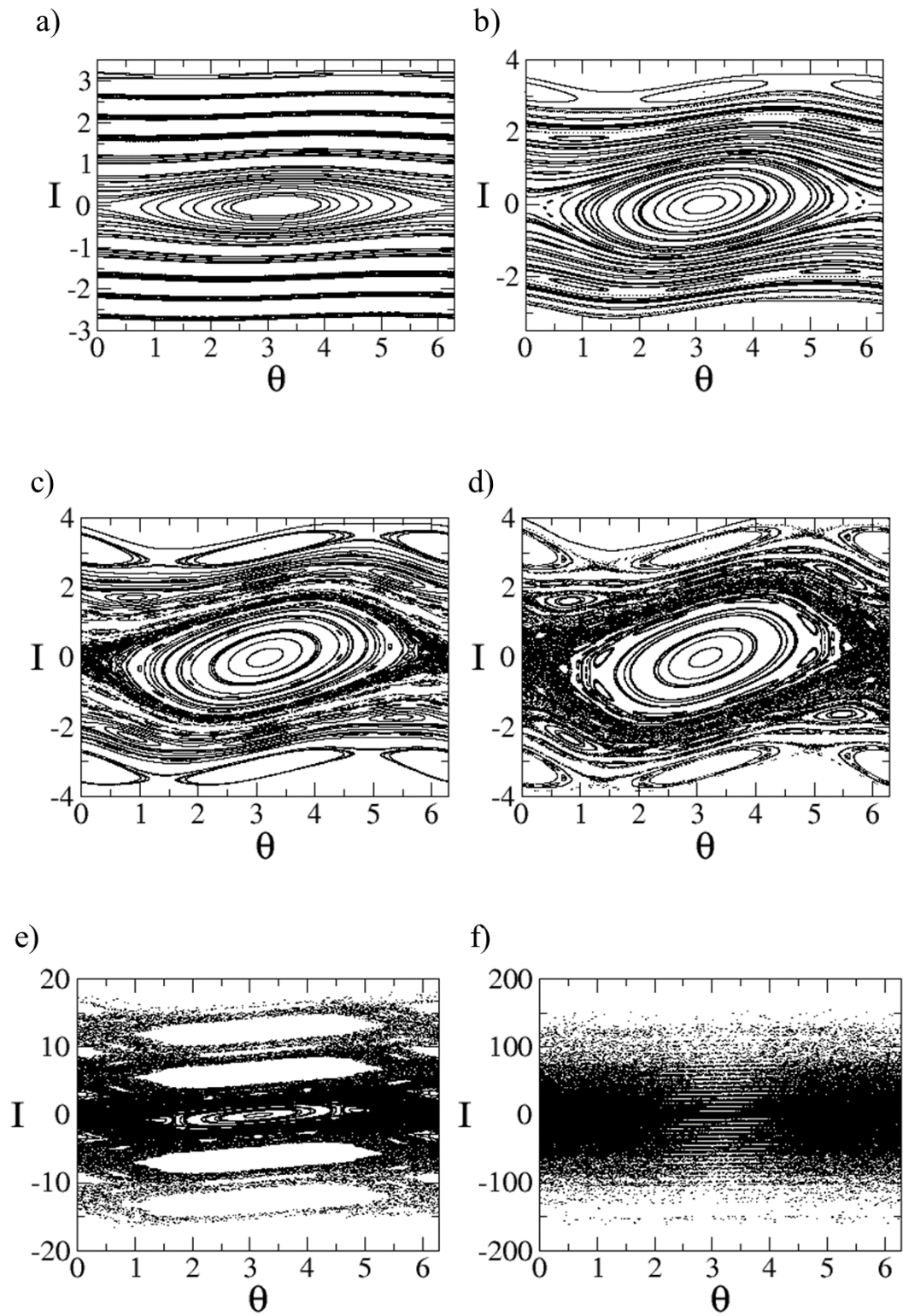


Figura 2.1: Espaço de fases para os parâmetros de controle: a) $\epsilon = 0,1$; b) $\epsilon = 0,5$; c) $\epsilon = 0,75$; d) $\epsilon = 0,97$; e) $\epsilon = 1,5$; e f) $\epsilon = 3,0$. Para todos os itens consideramos $\gamma = 0$.

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix},$$

e os coeficientes são:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma,$
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \epsilon \cos \theta_n,$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma,$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + \epsilon \cos \theta_n.$

Temos então que a matriz Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} 1 - \gamma & \epsilon \cos \theta_n \\ 1 - \gamma & 1 + \epsilon \cos \theta_n \end{bmatrix},$$

em que o determinante da matriz é dado por

$$\det J = (1 - \gamma)(1 + \epsilon \cos \theta_n) - (1 - \gamma)(\epsilon \cos \theta_n),$$

logo,

$$\det J = 1 - \gamma.$$

De acordo com o Teorema de Liouville [8], o mapeamento preserva a área no espaço de fases quando o determinante da matriz Jacobiana é igual a 1 e então, o sistema é dito ser conservativo.

Se o parâmetro de controle γ for nulo, ou seja, se não houver um parâmetro de dissipação, a área do espaço de fases é preservada. Quando $\gamma \neq 0$ o sistema apresenta atratores, e há a eliminação de difusão ilimitada na variável ação, o que nos mostra uma transição de difusão ilimitada para limitada. A difusão é suprimida como pode ser vista na Figura 2.2 e a estrutura mista do espaço de fases para o mapa não dissipativo é destruída e substituída por atratores.

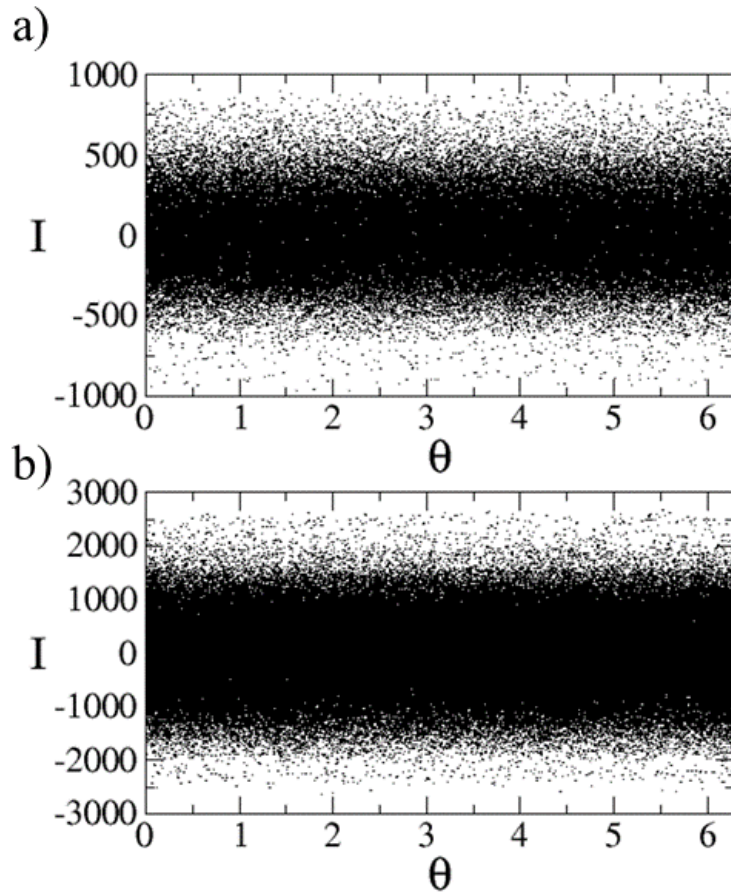


Figura 2.2: Espaço de fases para os parâmetros de controle: a) $\gamma = 10^{-2}$ e b) $\gamma = 10^{-3}$ com $\epsilon = 50$.

2.2. Descrição Fenomenológica

Como o espaço de fases é simétrico para a variável ação, isso leva a $\bar{I} = 0$. Dessa forma, ao longo do atrator caótico, a variável $\bar{I}$ não é a variável apropriada para ser estudada, mas sim a ação quadrática média (I_{RMS}) que é dada por $\sqrt{\bar{I}^2}$ e pode ser determinada a partir de duas médias:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{j,i}^2 \right]} \quad (2.2)$$

em que n identifica o número de iterações do mapeamento, ao passo que M especifica o número de condições iniciais diferentes utilizadas, definindo assim uma média no ensemble de condições iniciais. A soma em j fornece uma média na órbita, enquanto a soma em i define uma média ao longo de um ensemble de condições iniciais. Usamos $M = 1000$ valores de $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ que foram escolhidos uniformemente distribuídos para um valor inicial fixo $I_0 = 10^{-3}\epsilon$. A escolha desse valor assegura que a condição inicial está localizada no mar de caos e também distante das curvas invariantes *spanning*, permitindo uma análise difusiva de I [4]. A Figura 2.3 mostra o comportamento de I_{RMS} como função de (a) n e (b) $n\epsilon^2$ para três valores do parâmetro de controle.

As curvas mostradas na Figura 2.3 (a) de I_{RMS} em função de n exibem um comportamento semelhante para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ . Escolhendo uma condição inicial I_0 pequena, cada curva apresenta um crescimento de acordo com uma lei de potência, para valores de n pequenos e se aproxima de um regime de saturação, para n suficientemente longo.

A mudança de regime de crescimento para saturação, caracterizado por um platô constante, ocorre em um número de iterações característico definido como n_x . A Figura 2.3 (a) mostra que as curvas crescem e saturam em valores diferentes dependendo do valor do parâmetro de controle. Quando o parâmetro de controle aumenta, o platô de saturação também aumenta. Porém, podemos ver que as curvas crescem partindo de valores de I_{RMS} diferentes, e para $n < n_x$, elas crescem paralelas umas às outras. Com isso, fazendo uma transformação $n \rightarrow n\epsilon^2$ o eixo horizontal é reescalado e as curvas agora crescem juntas, separando-se logo após em platôs de saturação diferentes, como visto na Figura 2.3 (b).

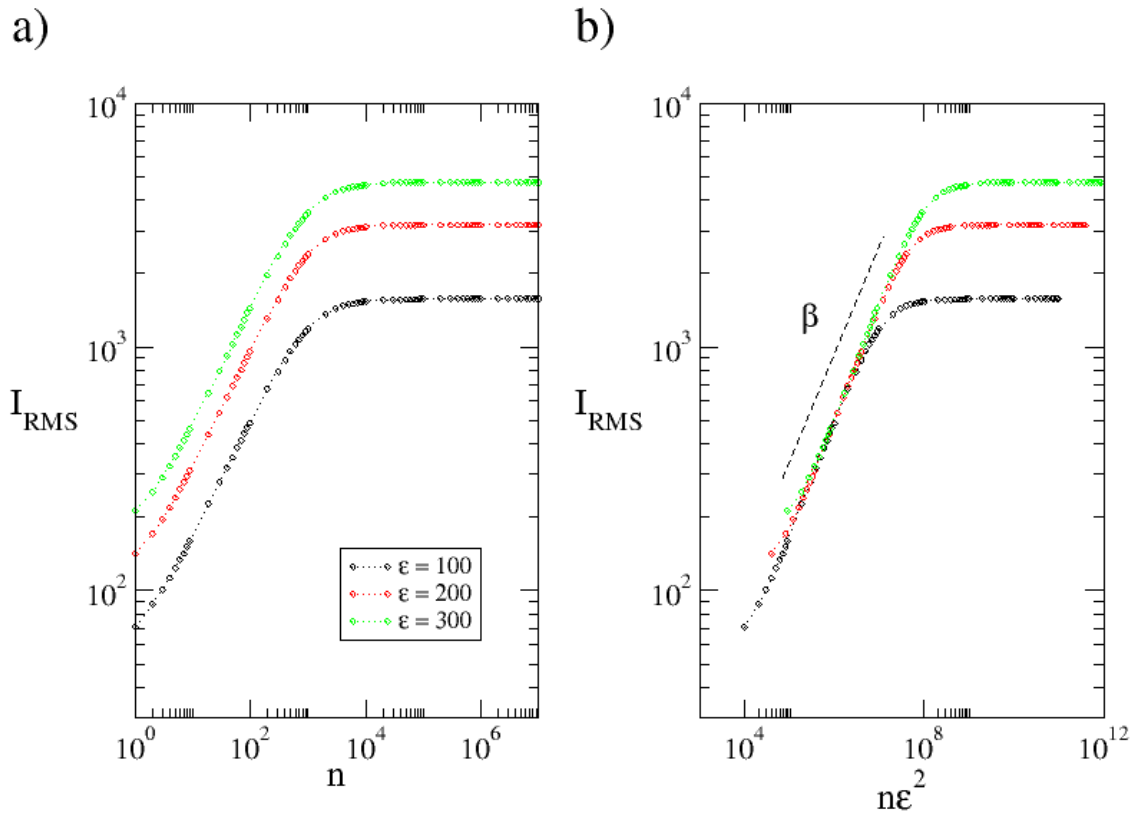


Figura 2.3: Esboço de I_{RMS} como função de a) n , e b) $n\epsilon^2$. Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 100$, $\epsilon = 200$, $\epsilon = 300$ e $\gamma = 10^{-3}$. O valor numérico de $\beta \approx 0,5$.

Analisando o comportamento das curvas da Figura 2.3 (b), podemos estabelecer as seguintes hipóteses de escala:

1. Para $n \ll n_x$, as curvas de crescimento são descritas por

$$I_{RMS} \propto (n\epsilon^2)^\beta, \quad (2.3)$$

em que β é o expoente de aceleração;

2. Para $n \gg n_x$, as curvas se aproximam de um regime de platô constante, descritas por

$$I_{RMS,SAT} \propto \epsilon^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2}, \quad (2.4)$$

em que α_1 e α_2 são os expoentes de crescimento;

3. O número de iterações que mostra a mudança de crescimento para saturação é dado por

$$n_x \propto \epsilon^{z_1} \gamma^{z_2}, \quad (2.5)$$

em que z_1 e z_2 são expoentes de escala.

A partir dessas três hipóteses de escala, podemos escrever uma função homogênea generalizada para descrever o comportamento de I_{RMS} :

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon, \gamma) = l I_{RMS}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon, l^c \gamma), \quad (2.6)$$

em que l é um fator de escala, a, b, c são expoentes característicos. Como l é um fator de escala, podemos escolher $l^a n\epsilon^2 = 1$, o que leva a

$$l = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}}. \quad (2.7)$$

Levando este resultado na Equação (2.6), temos que

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon, \gamma) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_{RMS}\left(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon, (n\epsilon^2)^{-\frac{c}{a}} \gamma\right), \quad (2.8)$$

no qual o termo $I_{RMS}\left(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon, (n\epsilon^2)^{-\frac{c}{a}} \gamma\right)$ é considerado constante para $n \ll n_x$.

Comparando a Equação (2.8) com a primeira hipótese de escala, Equação (2.3), temos

$$\beta = -\frac{1}{a}. \quad (2.9)$$

Escolhendo agora $l^b \epsilon = 1$, temos

$$l = \epsilon^{-\frac{1}{b}}. \quad (2.10)$$

Substituindo na função homogênea, temos

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon, \gamma) = \epsilon^{-\frac{1}{b}} I_{RMS}\left(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2, 1, \epsilon^{-\frac{c}{b}} \gamma\right), \quad (2.11)$$

o termo $I_{RMS}\left(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2, 1, \epsilon^{-\frac{c}{b}} \gamma\right)$ é considerado constante para $n \gg n_x$. Dessa forma, comparando com a segunda hipótese de escala, temos

$$\alpha_1 = -\frac{1}{b}. \quad (2.12)$$

Considerando agora $l^c \gamma = 1$, temos

$$l = \gamma^{-\frac{1}{c}}. \quad (2.13)$$

Substituindo na função homogênea, encontramos

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon, \gamma) = \gamma^{-\frac{1}{c}} I_{RMS}\left(\gamma^{-\frac{a}{c}} n\epsilon^2, \gamma^{-\frac{b}{c}} \epsilon, 1\right), \quad (2.14)$$

no qual o termo $I_{RMS}\left(\gamma^{-\frac{a}{c}} n\epsilon^2, \gamma^{-\frac{b}{c}} \epsilon, 1\right)$ é considerado constante para $n \gg n_x$.

Comparando mais uma vez com a segunda hipótese de escala, temos

$$\alpha_2 = -\frac{1}{c}. \quad (2.15)$$

Podemos comparar dessa vez as diferentes equações do fator de escala l . Das Equações (2.7), (2.9), (2.10) e (2.12), temos que

$$\begin{aligned} (n\epsilon^2)^\beta &= \epsilon^{\alpha_1}, \\ n\epsilon^2 &= \epsilon^{\frac{\alpha_1}{\beta}}, \\ n_x &= \epsilon^{\frac{\alpha_1}{\beta}-2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Comparando com a terceira hipótese de escala, encontramos

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta} - 2. \quad (2.17)$$

A Equação (2.17) define uma lei de escala. Isso implica que os expoentes críticos estão relacionados entre si de modo que o conhecimento de dois deles permite determinar o terceiro.

Da mesma forma, utilizando as Equações (2.7), (2.13), temos

$$\begin{aligned} (n\epsilon^2)^\beta &= \gamma^{\alpha_2}, \\ n\epsilon^2 &= \gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}}, \\ n_x &= \frac{\gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}}}{\epsilon^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Comparando com a terceira hipótese de escala e considerando ϵ constante, temos:

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta}. \quad (2.19)$$

Como a Equação (2.19) também define uma relação entre os expoentes críticos, ela estabelece a segunda lei de escala.

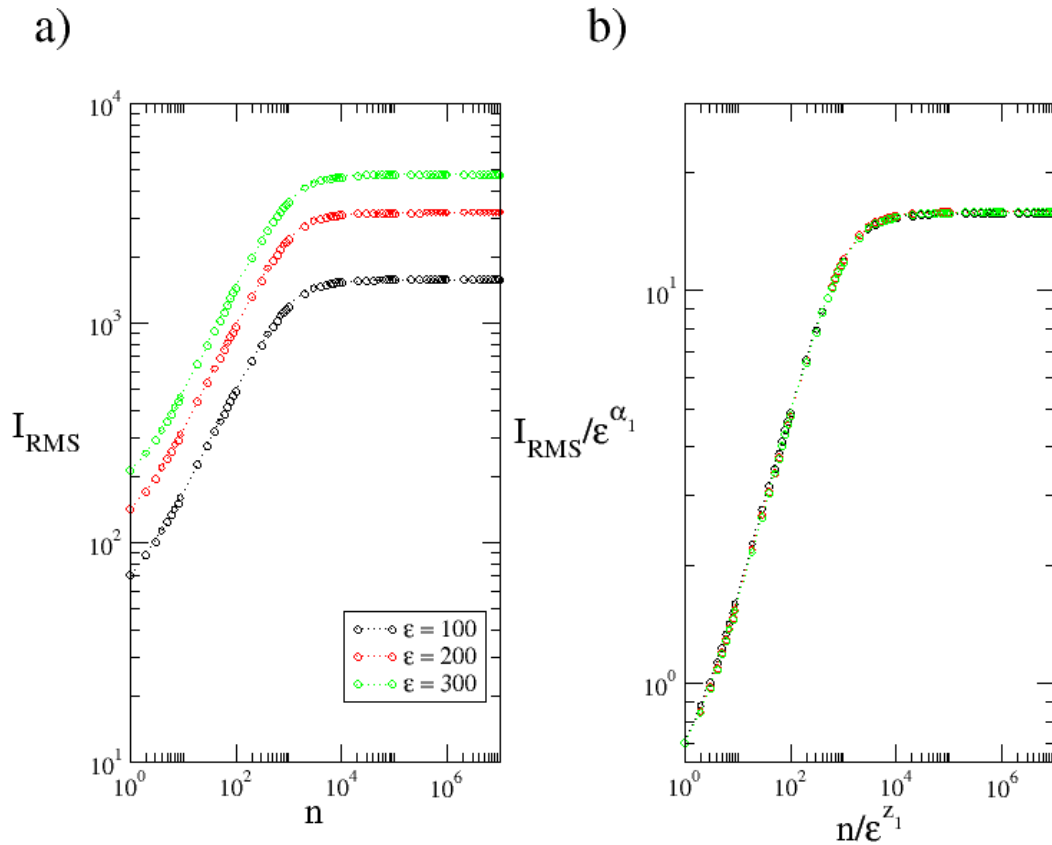


Figura 2.4: Esboço de a) I_{RMS} como função de n , e b) sobreposição das curvas mostradas em (a) em uma única curva universal a partir das transformações $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/\epsilon^{\alpha_1}$ e $n \rightarrow n/\epsilon^{z_1}$. Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 100$, $\epsilon = 200$, $\epsilon = 300$ e $\gamma = 10^{-3}$.

A relação entre os expoentes críticos, obtida a partir da função homogênea generalizada na descrição do mar de caos, demonstra que a região caótica é invariante de escala quando os parâmetros de controle ϵ e γ são variados. Aplicando as transformações $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/\epsilon^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}$ e $n \rightarrow n/\epsilon^{z_1}\gamma^{z_2}$ em diferentes curvas de I_{RMS} obtidas para parâmetros distintos, podemos ver que todas elas se sobrepõem em uma única curva universal. O comportamento pode ser visto tanto na Figura 2.4 (b), em que apenas o parâmetro ϵ foi variado, quanto na Figura 2.5, em que ambos os parâmetros ϵ e γ foram variados, confirmando assim a invariância de escala do mar de caos em relação aos parâmetros de controle.

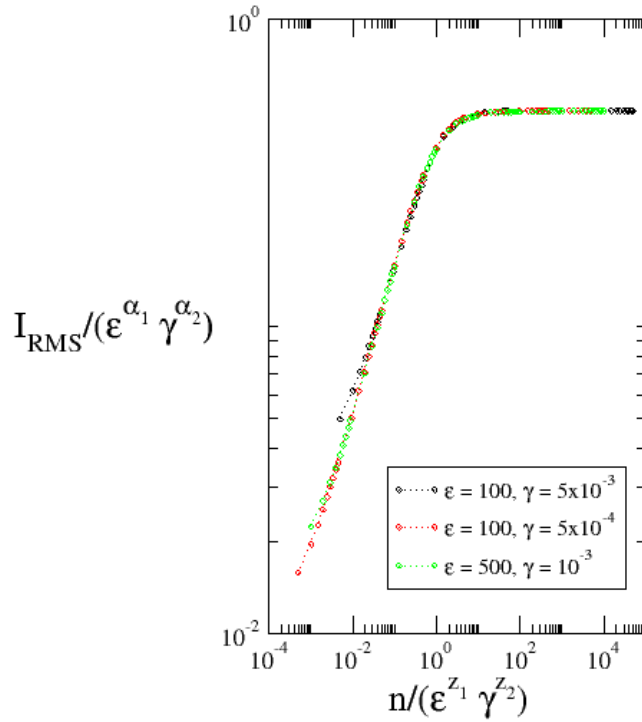


Figura 2.5: Sobreposição das curvas em uma única curva universal para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ e γ a partir das transformações $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/\epsilon^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}$ e $n \rightarrow n/\epsilon^{z_1}\gamma^{z_2}$. Foram utilizados os valores $\epsilon = 100$ com $\gamma = 5 \times 10^{-3}$ e $\gamma = 5 \times 10^{-4}$, e $\epsilon = 500$ com $\gamma = 10^{-3}$, como mostrado na figura.

2.3. Análise Numérica

Iterando o mapa para diversos valores dos parâmetros de controle ϵ e γ , utilizamos os resultados numéricos para obter os expoentes críticos α_1 , α_2 e β . Os expoentes z_1 e z_2 foram obtidos pelas leis de escala, já abordadas anteriormente.

O expoente α_1 foi obtido numericamente após um ajuste em lei de potência que nos fornece $\alpha_1 = 1.00(1)$, variando o parâmetro de controle ϵ enquanto γ teve seu valor fixo igual a 10^{-3} , conforme mostra a Figura 2.6.

Para obter o expoente α_2 , variamos o parâmetro de controle γ enquanto ϵ teve seu valor fixo igual a 100. Da mesma forma, fazendo um ajuste em lei de potência, o valor obtido foi $\alpha_2 = -0.50(1)$, como mostra a Figura 2.7.

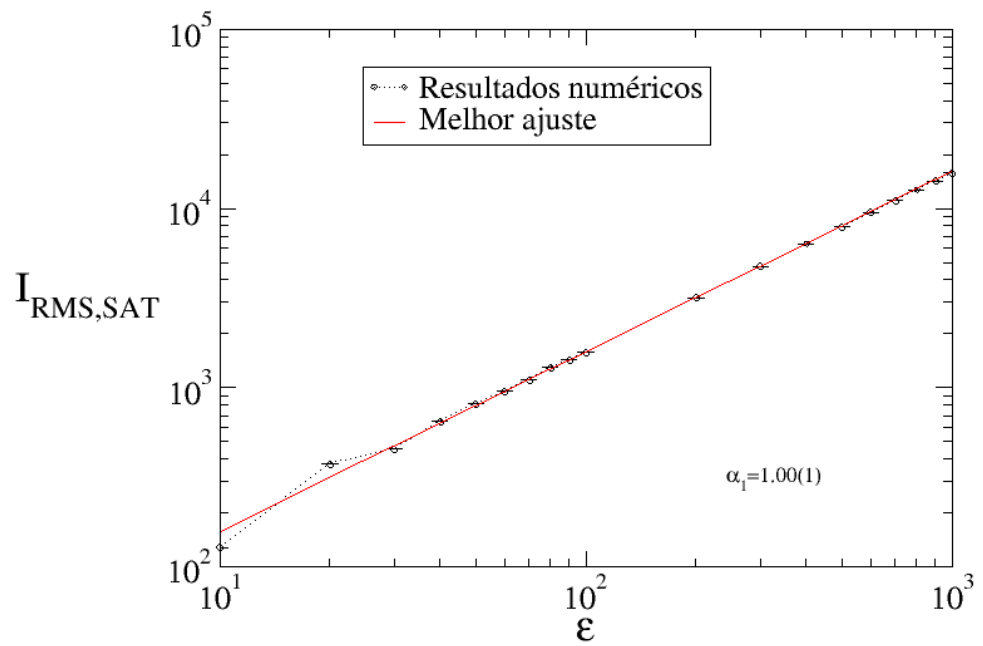


Figura 2.6: Comportamento de $I_{RMS,SAT}$ vs. ϵ para $\gamma = 10^{-3}$. Um ajuste em lei de potência nos fornece $\alpha_1 = 1.00(1)$.

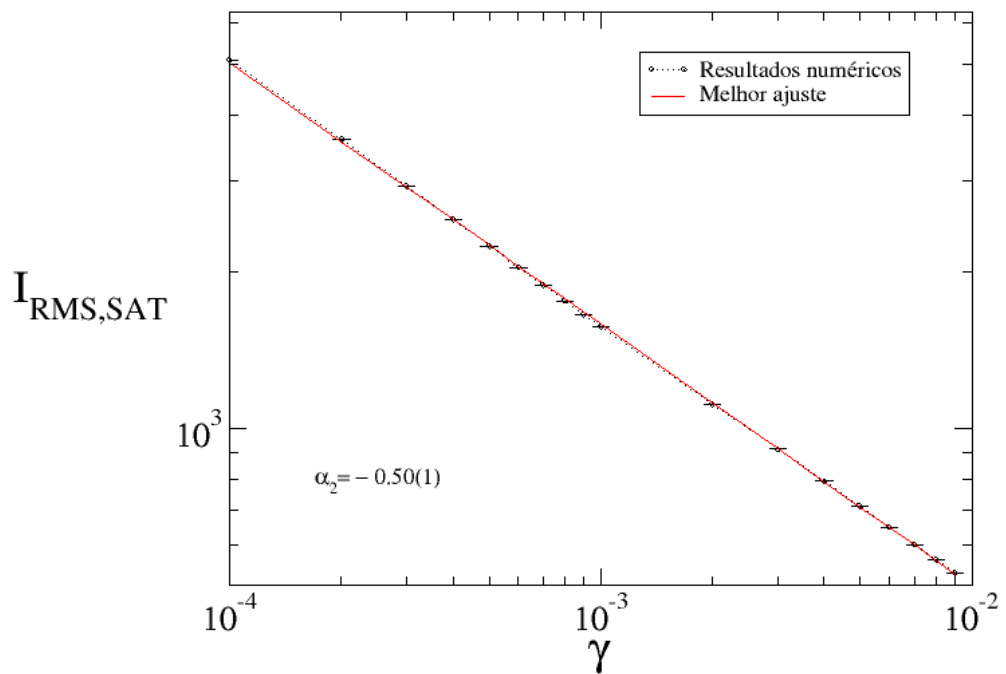


Figura 2.7: Comportamento de $I_{RMS,SAT}$ vs. γ para $\epsilon = 100$. Um ajuste em lei de potência nos fornece $\alpha_2 = -0.50(1)$.

O expoente de aceleração foi obtido a partir de um ajuste em lei de potência do crescimento das curvas de I_{RMS} , como mostrado na Figura 2.3 (b), tirando uma média de todos os resultados dos gráficos variando ϵ e γ , obtemos que $\beta \approx 0,5$.

Por fim, através das leis de escalas descritas pelas Equações (2.16) e (2.18), e com os valores encontrados de α_1 , α_2 e β , temos que:

$$z_1 = 0$$

e

$$z_2 = -1.$$

3. EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

A difusão é um fenômeno muito comum na natureza e pode ser entendida como um processo em que sistemas, geralmente, fora do equilíbrio tendem para o estado de equilíbrio. Nesse processo, elementos que se movem – energia, átomos, moléculas, momento linear, etc. – realizam um movimento aleatório e irregular, no qual o conjunto se difunde. Este comportamento individual e irregular no nível microscópico torna-se um movimento coletivo com grande regularidade em nível macroscópico, com leis dinâmicas bem definidas [9].

Consideraremos que existe um conjunto de partículas que se movem continuamente de um lado para o outro de maneira aleatória. Uma vez que as partículas não são criadas nem destruídas, podemos considerar que existe uma grandeza que é localmente preservada. Chamaremos essa grandeza de densidade de probabilidade ρ [8]. Da equação da continuidade, temos que

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J(x, t)}{\partial x}, \quad (3.1)$$

em que $J(x, t)$ é a corrente de partículas que cruzam um determinado ponto x ao longo de um eixo horizontal.

Por outro lado, a corrente J pode ser escrita a partir da densidade, utilizando-se a lei de Fick [8], em que

$$J = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (3.2)$$

onde D é o coeficiente de difusão. Levando a equação (3.2) na equação (3.1), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[-D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que esta é chamada de equação da difusão.

Para resolver a Equação (3.3) consideramos que, no instante $t = 0$, todas as partículas estão concentradas na posição x , de forma que

$$\rho(x, 0) = \rho_0 \delta(x), \quad (3.4)$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac.

Nas variáveis dinâmicas envolvidas no nosso caso, a equação da difusão é escrita como

$$\frac{\partial \rho(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 \rho(I, n)}{\partial I^2}. \quad (3.5)$$

Antes de resolver a equação da difusão, podemos fazer uma estimativa analítica do coeficiente de difusão D utilizando a primeira equação do Mapeamento (2.1) e fazendo a média quadrada da variável ação, $\bar{I}^2$. Elevando os dois lados da equação, temos:

$$I_{n+1}^2 = (1 - \gamma)^2 I_n^2 + 2(1 - \gamma) I_n \epsilon \sin \theta_n + \epsilon^2 \sin^2 \theta_n, \quad (3.6)$$

Tomando agora a média no ensemble de $\theta \in [0, 2\pi]$ e assumindo independência estatística entre I e θ , temos:

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - \gamma)^2 \bar{I}_n^2 + 2(1 - \gamma) \bar{I}_n \epsilon \overline{\sin \theta_n} + \epsilon^2 \overline{\sin^2 \theta_n}, \quad (3.7)$$

Sabemos que:

$$\overline{\sin \theta_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0,$$

e

$$\overline{\sin^2 \theta_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2},$$

dessa forma, temos:

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - 2\gamma + \gamma^2) \bar{I}_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Podemos escrever a equação anterior como

$$\overline{I_{n+1}^2} = \bar{I}_n^2 + (-2\gamma + \gamma^2) \bar{I}_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2},$$

e reagrupando obtemos:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \bar{I}_n^2 = \overline{\Delta I^2} = (\gamma^2 - 2\gamma)\bar{I}_n^2 + \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (3.8)$$

Sabendo que o coeficiente de difusão é dado por [10]:

$$D = \frac{\overline{\Delta I^2}}{2}. \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação (3.8) na (3.9), temos que

$$D = \frac{1}{2} \left[(\gamma^2 - 2\gamma)\bar{I}^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \right],$$

no qual pode ser escrito como

$$D = (\gamma^2 - 2\gamma)\frac{\bar{I}^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{4}, \quad (3.10)$$

Voltando a Equação (3.5), substituindo agora D , temos

$$\frac{\partial \rho(I, n)}{\partial n} = \left[(\gamma^2 - 2\gamma)\frac{\bar{I}^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} \right] \frac{\partial^2 \rho(I, n)}{\partial I^2}. \quad (3.11)$$

Podemos resolver essa equação através da técnica de separação de variáveis [11], que é dada por:

$$\rho(I, n) = X(I)N(n), \quad (3.12)$$

em que $X(I)$ é uma função que depende apenas da variável I e $N(n)$ é outra função que depende apenas da variável n . Essa técnica transforma a equação diferencial parcial original, no nosso caso a Equação (3.5), de primeira ordem em n e segunda ordem em I , em duas equações diferenciais ordinárias que devem ser resolvidas separadamente.

Temos então, a partir da Equação (3.12), que

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = X \frac{\partial N}{\partial n}, \quad (3.13)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial \rho}{\partial I} \right) = \frac{\partial}{\partial I} \left(N \frac{\partial X}{\partial I} \right) = N \frac{\partial^2 X}{\partial I^2}, \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) e (3.14) na Equação (3.5) obtemos

$$X \frac{\partial N}{\partial n} = DN \frac{\partial^2 X}{\partial I^2}. \quad (3.15)$$

Reescrevendo (3.15) de forma que o lado esquerdo dependa apenas de n e o lado direito apenas de I , temos

$$\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} = \frac{D}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial I^2}. \quad (3.16)$$

Para resolver a Equação (3.16) ambos os lados devem ser igualados a uma mesma constante, denominada constante de separação, que escolhemos ser igual a $-a^2$. Dessa forma, teremos

$$\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} = \frac{D}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial I^2} = -a^2. \quad (3.17)$$

Separando as equações, temos

$$\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} = -a^2. \quad (3.18)$$

Resolvendo esta equação encontramos

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^n -a^2 dn, \quad (3.19)$$

em que temos

$$N = N_0 e^{-a^2 n}. \quad (3.20)$$

Considerando a outra parte da Equação (3.17), temos que resolver agora:

$$\frac{D}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial I^2} = -a^2, \quad (3.21)$$

mas, pela Equação (3.10), o coeficiente de difusão não é uma constante, de forma que a Equação (3.21) a ser resolvida na verdade é

$$\left[(\gamma^2 - 2\gamma) \frac{\bar{I}^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} \right] \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial I^2} = -a^2. \quad (3.22)$$

Como perspectiva desta seção pretendemos resolver a Equação (3.22).

4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A partir do estudo do mapa padrão dissipativo, vimos que o espaço de fases é misto, contendo ilhas de estabilidade, curvas invariantes *spanning* e mar de caos, no caso conservativo ($\gamma = 0$) e para valores pequenos do parâmetro ϵ . Com um parâmetro de controle $\epsilon > 0,9716 \dots$, as curvas invariantes e as ilhas de estabilidade são destruídas e há uma difusão ilimitada da variável ação. Introduzido um fator de dissipação ($\gamma \neq 0$) no sistema podemos ver que a difusão é suprimida, de forma que há uma transição de difusão ilimitada para difusão limitada.

Analisamos o comportamento das curvas da ação quadrática média (I_{RMS}) em função do número de iterações, foi feita uma descrição fenomenológica com um conjunto de hipóteses de escala, utilizamos uma função homogênea generalizada que nos conduziu à duas leis de escalas.

Foram determinados cinco expoentes críticos α_1 , α_2 , β , z_1 e z_2 . Numericamente encontramos os expoentes de crescimento $\alpha_1 = 1.00(1)$, $\alpha_2 = -0.50(1)$ e o expoente de aceleração $\beta = 0.5$. Pelas leis de escala, encontramos $z_1 = 0$ e $z_2 = -1$.

Vimos que as relações entre os expoentes críticos demonstram que a região caótica é invariante de escala.

A partir da equação da difusão, utilizamos a técnica de separação de variáveis, assim como a expressão do coeficiente de difusão D e encontramos uma equação diferencial a ser resolvida. Esperamos que a solução desta equação diferencial, associada às condições de contorno, forneça a probabilidade de se observar uma partícula com ação I no instante n . O conhecimento da probabilidade permite a determinação de todos os momentos da distribuição.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PIRES, Antonio S.T. *Evolução das Ideias da Física*. Livraria da Física, 2011.
- [2] GLEICK, J. *Caos – A criação de uma nova ciência*. Editora Elsevier, 18ª edição, Rio de Janeiro, 1989.
- [3] Lorenz, E. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Science*, 20: 130, 1963.
- [4] Leonel, E.D. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares*, Blucher, 2019.
- [5] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. Regular and Chaotic Dynamics, *Appl. Math. Sci.* 38, Springer-Verlag, New York. (1992).
- [6] G. M. Zaslavsky, Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics (Oxford,2006).
- [7] Leonel, E.D.; McClintock, P.V.E.; Silva, J.K.L. *Physical Review Letters* 93, 014101 (2004).
- [8] Leonel, E.D. *Fundamentos de Física Estatística*, Blucher, 2015.
- [9] Pedron, I.T. *Estudos em Difusão Anômala*. Universidade Estadual de Maringá, 2003.
- [10] Leonel, E.D., Penalva, J., Teixeira, R.M.N., Costa Filho, R.N., Silva, M.R., de Oliveira, J.A. A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents. *Physical Letters A*, 379: 1808, 2015.
- [11] Crank, J. *The Mathematics of Diffusion*, Second Edition, Oxford University Press, 1975.