

Rubens Pazim Carnevarollo Júnior

Variedade Central para Laços Homoclínicos

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto
2006

Carnevarollo Júnior, Rubens Pazim.

Variedade central para laços homoclínicos / Rubens Pazim

Carnevarollo Júnior. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2006

73 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Variedade central. 3. Laço homoclínico. I. Buzzi, Claudio Aguinaldo. II Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências. III. Título..

CDU – 515.16

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Prof. Dr. Claudio Aginaldo Buzzi (UNESP) - Orientador

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira (UNICAMP)

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva (UNESP)

Suplentes

Prof. Dr. Ali Messaoudi (UNESP)

Prof. Dr. Alexandre José Santana (UEM)

Dedico a meus pais.

Agradecimentos

Na certeza de que existem mais pessoas que merecem agradecimentos do que costumamos reconhecer, deixo aqui meus agradecimentos a estas pessoas. Em especial, agradeço:

Ao Prof. Dr. Claudio Agnaldo Buzzi pela disponibilidade na orientação, por toda dedicação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência que sempre teve para solucionar todas minhas dúvidas e principalmente por sua amizade.

À Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva pelos conselhos que me foram dados durante toda a Graduação.

Aos meus professores de Graduação e Pós-Graduação pela minha formação.

Ao Prof. Dr. José Ramom Beltran Abriego, pela sua amizade e estímulo.

Aos amigos de Pós-Graduação Anderson, Cátia, Elen, Fernanda, Francielle, Giovana, Júlio César, Marcus, Miriam, Michele e Tatiane pelo convívio durante dois anos desta caminhada que agora se completa.

Aos amigos de Graduação Florisvaldo, João, Matheus, Paulo (Azul), Rafael, Anderson e Flávia pela amizade e confiança.

Aos amigos de primeira república Rogério (Simpson), Erlon, Roberto Ciro, Eduardo e Sérgio pela amizade e confiança.

Aos amigos de Icém Rogério (Simpson), Kleber (Bim) e Paulo, pela amizade que temos por muitos anos.

Aos meus cunhados Ângelo, Fernando e Pedro Henrique. Ao Ângelo pelas discussões científicas, tecnológicas e outras mais que tivemos antes mesmo de termos este parentesco, ao Fernando pelos longos anos de convívio e por sempre acreditar na minha capacidade e ao Pedro Henrique por prezar a minha profissão e pelas vezes que fui seu Professor nas brincadeiras que tivemos.

À minha namorada Esther da Silva Feres pela compreensão da minha ausência que muitas vezes aconteceu, pela ajuda na tradução de vários textos e por ouvir pacientemente muitas teorias desta dissertação sem reclamar e

sempre sorrindo.

Aos meus pais Rubens e Juventina pelo apoio financeiro e principalmente moral.

Aos meus irmãos Clodoaldo, Rutinéia e Claudinéia por sempre estarem presentes não só estes dois anos, mas sim todos os momentos de minha vida.

As minhas avós Olimpia e Zaira pela preocupação com noites perdidas de sonos e com a alimentação.

A Deus por tudo.

*Quem escreve deve saber
que suas criações não são
mais suas, mas de quem as
lê.*

Cláudia Letti

Sumário

Introdução	10
1 Conceitos Básicos	13
2 Aplicação de Poincaré Próximo do Laço Homoclínico	22
2.1 Aplicação de Poincaré - Parte Local.	25
2.2 Aplicação de Poincaré - Parte Global.	38
3 Existência do Toro Invariante	42
4 Variedade Central para Laços Homoclínicos	66
4.1 Teorema da Variedade Centro Estável	66
4.2 Teorema da Variedade Centro Instável	72
4.3 Teorema da Variedade Central	73

Resumo

O objetivo principal desse trabalho é provar, sob certas hipóteses de transversalidade e sobre os autovalores, que se uma família a um-parâmetro de equações diferenciais possuindo, para um determinado valor do parâmetro, um laço homoclínico conectado a um ponto de equilíbrio do tipo sela, então existe uma variedade central invariante, de dimensão dois, que contém o laço homoclínico, que contém todas as trajetórias que permanecem numa vizinhança do laço homoclínico e ainda é tangente ao autoespaço gerado por autovetores associados aos autovalores que determinam o laço homoclínico.

palavras chave: Variedade Central, Laço Homoclínico

Abstract

The main goal of this work is to prove, under certain hypothesis of transversality and about the eigenvalues, that if a one-parameter family of ordinary differential equations possess, for a determined value of the parameter, a homoclinic loop connected to an equilibrium point of type saddle, then there exists an invariant center manifold, of dimension two, that contains the homoclinic loop, that contains all trajectories which stay in a small neighborhood of the homoclinic loop and that is tangent to the eigenspace spanned by the eigenvectors associated to the eigenvalues that determine the homoclinic loop.

Key words: Center Manifold, Homoclinic Loop.

Introdução

Muitos fenômenos em ciência e tecnologia são dinâmicos na natureza. Inicialmente muitos fenômenos eram estudados utilizando-se modelos lineares, posteriormente com o reconhecimento que vivemos em um “mundo não linear” surgiu a disciplina científica *Dinâmica Não Linear*. Neste trabalho abordaremos estudo de problemas que envolvem um sistema de equações diferenciais da forma

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \mu), \quad (1)$$

onde X , em geral, é não linear e μ é um parâmetro. Na maioria dos casos o espaço de parâmetros pode ser particionado em duas regiões: uma em que o modelo exibe comportamento simples de suas trajetórias e outra que o comportamento é complexo. Uma indicação primária de um comportamento complexo das trajetórias é a presença de uma trajetória homoclínica de Poincaré.

O objetivo principal desse trabalho é demonstrar, sob certas hipóteses, que um sistema da forma (1) possuindo um ponto crítico e um laço homoclínico, então existe uma variedade central invariante de dimensão dois que contém o laço.

A referência principal utilizada para elaboração dessa dissertação de mestrado foi o livro de Shilnikov et al [6]. Como referências complementares, usamos dentre outros os textos de Sotomayor [8] e Perko [4].

O trabalho está organizado da seguinte forma.

No capítulo 1 apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria Qualitativa, apresentamos as condições (A), (B), (C) e (D) que serão hipóteses para o resultado principal do trabalho e apresentamos alguns resultados que servirão de lemas para provar o resultado principal do trabalho. Algumas demonstrações foram omitidas por fugir ao escopo do trabalho.

No capítulo 2 discutimos a transformação de Poincaré. Tomaremos duas seções transversais ao laço homoclínico numa vizinhança do ponto crítico e

definiremos duas aplicações de retorno: a aplicação local T_{loc} e a aplicação global T_{glo} . A aplicação T_{loc} é definida através das soluções de problema de valor de contorno. São fornecidas estimativas para o tempo de retorno e suas derivadas em função dos autovalores da parte linear do sistema no ponto crítico. Além disso, novas coordenadas são definidas nas seções transversais tornando as expressões de T_{loc} mais simples. A aplicação T_{glo} é naturalmente definida usando o Teorema da Dependência Contínua e Diferenciável das condições iniciais. A condição (D) é utilizada para obter propriedade importante da parte linear de T_{glo} que será utilizada nos capítulos seguintes.

No capítulo 3 provamos o seguinte resultado que será utilizado como um lema fundamental para a prova do teorema principal do trabalho no capítulo 4.

Lema Fundamental: *Sejam X e Y subespaços fechados e convexos de um espaço de Banach. Seja $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$ definida da seguinte forma:*

$$T(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= F(x, \bar{y}) \text{ e} \\ y &= G(x, \bar{y}).\end{aligned}\tag{2}$$

Se F e G são funções diferenciáveis e as duas seguintes condições são satisfeitas,

$$\begin{aligned}\sqrt[q+1]{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\|^q \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial y} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} &< 1 \text{ e} \\ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0 + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial y} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} &< 1,\end{aligned}$$

então a aplicação T tem uma variedade M^* invariante de classe C^q que contém os pontos ω – limite e todas órbitas futuras de T .

No capítulo 4 provamos o seguinte resultado, que é o resultado principal do trabalho.

Teorema Principal. *Se as condições (A'), (B), (C') e (D') valem, então existe uma vizinhança U da trajetória homoclínica Γ tal que, para μ suficientemente pequeno, o sistema tem uma variedade centro instável invariante de*

dimensão $(m + 1)$ de classe $C^{\min\{p,r\}}$ denotada por W^{uC} . Tal que toda trajetória fora de W^{uC} deixa U com $t \rightarrow -\infty$, (Aqui, p é o maior inteiro tal que $p|\lambda_1| < |Re\lambda_2|$). A variedade W^{uC} é tangente ao auto espaço E^{uE} que corresponde aos autovalores associados aos autoespaços que determinam o laço homoclínico.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Seja Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^r$ em Δ é uma aplicação $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$. Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$\dot{x} = X(x, \mu). \quad (1.1)$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciais $\varphi : I \rightarrow \Delta$ (I intervalo da reta) tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t), \mu)$$

para todo t pertencente a I , são chamadas *trajetórias* ou *curvas integrais* de X ou da equação diferencial (1.1).

Um ponto x pertencente a Δ é dito *ponto singular* de X se $X(x, \mu) = 0$ e *ponto regular* se $X(x, \mu) \neq 0$.

Se x é ponto singular então $\varphi(t) = x$, $-\infty < t < \infty$ é solução de (1.1). Reciprocamente, se $\varphi(t) = x$, $-\infty < t < \infty$ é solução de (1.1) então x é ponto singular de X , pois

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t), \mu) = X(x, \mu). \quad (1.2)$$

Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow \Delta$ chama-se *máxima* se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi/I$ então $I = J$ e conseqüentemente $\varphi = \psi$. Neste caso I chama-se *intervalo máximo*.

Teorema 1.0.1.

a) (*Existência e unicidade de soluções máximas*). Para cada x pertencente a Δ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução máxima φ_x de (1.1) tal que $\varphi_x(0) = x$

b) (*Propriedade de grupo*). Se $y = \varphi_x(t)$ e t pertence a I_x , então $I_y = I_x - t = \{r - t; r \in I_x\}$ e $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$ para todo s pertencente a I_y

c) (*Diferenciabilidade em relação as condições iniciais*) O conjunto $D = \{(t, x); x \in \Delta, t \in I_x\}$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^r . Mais ainda, φ satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x), \mu) \cdot D_2 \varphi(t, x)$$

para todo (t, x) e D .

Demonstração.

A demonstração deste teorema encontra-se em [8]. ■

Definição 1.0.1. A aplicação $\varphi : D \rightarrow \Delta$ chama-se *fluxo gerado por X* .

Definição 1.0.2. Seja p um ponto do espaço $\mathbb{R}^n$ definimos:

1) ω – limite do ponto p como o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \exists (t_k); t_k \rightarrow +\infty \text{ com } \varphi(t_k, p) \rightarrow q\}$$

2) α – limite do ponto p como o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \exists (t_k); t_k \rightarrow -\infty \text{ com } \varphi(t_k, p) \rightarrow q\}$$

Definição 1.0.3. Sejam $\dot{x} = X(x, \mu)$ um sistema de EDO's, O um ponto de equilíbrio, $JX(O)$ o Jacobiano de X em O e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de

$JX(O)$.

(1) Se $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ então dizemos que O é um Estado de Equilíbrio Instável .

(2) Se $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ então dizemos que O é um Estado de Equilíbrio Estável .

(3) Se $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ ($i = 1, \dots, k$) e $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ ($i = k + 1, \dots, n$) então dizemos que O é um Estado de Equilíbrio do Tipo Sela.

Definição 1.0.4. *Seja O um ponto de equilíbrio no espaço $\mathbb{R}^n$. Definimos Variedade Estável de um ponto de equilíbrio O como o conjunto*

$$W^s(O) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(x, t) = O\}.$$

Definimos Variedade Instável de um ponto de equilíbrio O como o conjunto

$$W^u(O) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(x, t) = O\}.$$

Pode-se demonstrar que os conjuntos $W^s(O)$ e $W^u(O)$ são de fato variedades mergulhadas. Para uma demonstração, sugerimos [5].

Definição 1.0.5. *Seja O um ponto de equilíbrio do tipo sela. Dizemos que uma trajetória Γ é um Laço Homoclínico em O se para todo x pertencente a Γ temos $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(x, t) = O$.*

Proposição 1.0.1. *Seja O um ponto de equilíbrio do tipo sela, se Γ é um laço homoclínico em O , então $\Gamma \subset W^s(O) \cap W^u(O)$.*

Demonstração.

A demonstração segue imediatamente da definição do laço homoclínico Γ e das definições das variedades estáveis e instáveis. ■

Definimos agora as condições **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** que serão usadas como hipóteses para os resultados ao longo dos próximos capítulos.

Considere uma família de sistemas

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (1.3)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n+m}$ com $n, m \in \mathbb{N}^*$, $F(x, \mu) \in \mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$), com isso impomos as seguintes condições:

(A) O sistema (1.3), para todo μ numa vizinhança de $\mu = 0$, possui um ponto de equilíbrio O do tipo sela e os autovalores $(\lambda_n, \dots, \lambda_1, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ de $JX(O)$ satisfazem a seguinte relação de ordem:

$$Re\lambda_n \leq \dots \leq Re\lambda_1 < 0 < \gamma_1 < Re\gamma_2 \leq \dots \leq Re\gamma_m,$$

onde $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

(B) Para $\mu = 0$, o sistema possui um laço homoclínico Γ .

Como $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, ou seja, não possui parte imaginária; temos que ele é diferenciado, com isso construímos a subvariedade instável $W^{uu} \subset W^u$ na qual não sofre influência de γ_1 e denominamos esta subvariedade como Subvariedade Instável Forte. Assim, escrevemos a seguinte condição.

(C) A trajetória homoclínica Γ não está contida na subvariedade W^{uu} referente aos autovalores $\{\gamma_2, \dots, \gamma_m\}$.

Teorema 1.0.2. *Supondo a hipótese (A) válida, temos que na vizinhança do estado de equilíbrio do tipo sela, existe uma variedade estável estendida W_{loc}^{sE} de classe $\mathcal{C}^q$ (q é o maior inteiro tal que $q\gamma_1 < Re\gamma_2$) que contém W^s e é tangente ao espaço E^{sE} (espaço gerado pelos autovetores referentes aos autovalores $(\lambda_n, \dots, \lambda_1, \gamma_1)$ no ponto O).*

Demonstração.

Este teorema está demonstrado em [6] pag. 84. ■

A Variedade W_{loc}^{sE} está definida apenas na vizinhança do ponto de equilíbrio O . Mas podemos prolongar esta variedade pelas trajetórias passadas do sistema ao longo do laço homoclínico Γ .

Observamos aqui que se o sistema de equações diferenciais satisfaz a hipótese (A), ou seja ele é hiperbólico, então existe uma variedade invariante instável W^u , ver [7, 2]. Chamando as coordenadas em W^u de (w, y) , onde y está associado ao autovalor γ_1 e w está associado aos autovalores $\gamma_2, \dots, \gamma_m$, através de uma mudança de coordenadas, numa vizinhança da origem, podemos escrevê-lo numa forma linear

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Rw, \\ \dot{y} &= Sy.\end{aligned}$$

Nesse novo sistema de coordenadas, quando aplicamos o fluxo $\varphi(t, \cdot)$, com t fixo, as variedades da forma $\{y = \text{const}\}$ são transformadas em variedades do mesmo tipo. Quando aplicamos a mudança de coordenadas inversa na folheação determinada pelas variedades da forma $\{y = \text{const}\}$, obtemos uma folheação $\mathcal{F}_{loc}^u$ da variedade W_{loc}^u chamada *Folheação Instável Forte*. Note que a folheação $\mathcal{F}_{loc}^u$ está definida apenas na vizinhança do ponto crítico, mas podemos estender esta folheação pelo fluxo para todo tempo positivo, e com isso, temos uma folheação $\mathcal{F}^u$ de todo W^u . Assim, faz sentido a seguinte condição:

(D) *A variedade W^{sE} é transversal as folhas da folheação $\mathcal{F}^u$ em cada ponto da trajetória homoclínica Γ .*

Proposição 1.0.2. *Sejam W_{loc}^{uu} , W_{loc}^u e W_{loc}^s as variedades definidas acima, então as seguintes sentenças valem.*

1) *Toda trajetória que inicia em W_{loc}^{uu} continua em W_{loc}^{uu} para tempos negativos e vai para O quando $t \rightarrow -\infty$ tangenciando o auto espaço gerado pelos autovetores referente aos autovalores $(\gamma_2, \dots, \gamma_m)$.*

2) *Toda trajetória que inicia em $W_{loc}^u \setminus W_{loc}^{uu}$ continua em $W_{loc}^u \setminus W_{loc}^{uu}$ para todo tempo negativo finito e vai para O quando $t \rightarrow -\infty$ tangenciando o auto espaço gerado pelo autovetor referente ao autovalor γ_1 .*

3) *Toda trajetória que inicia em W_{loc}^s continua em W_{loc}^s para tempos negativos e vai para O quando $t \rightarrow +\infty$ tangenciando o auto espaço gerado pelos autovalores autovetores referente aos autovalores $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

Demonstração.

Defina E^{uu} como o espaço gerado pelos autovetores $(v_2, \dots, v_m)$ referentes aos autovalores $(\gamma_2, \dots, \gamma_m)$, E^s o espaço gerado pelos autovetores $(u_1, \dots, u_n)$

referentes aos autovalores $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, E^{γ_1} o espaço gerado pelo autovetor v_1 referente ao autovalor γ_1 e E^u o espaço gerado pelos autovetores $(v_1, \dots, v_m)$. Observe que, pelo Teorema de Hartman, para algum δ positivo, W_{loc}^{uu} é homeomorfo a $E^{uu} \cap B(O, \delta)$, W_{loc}^u é homeomorfo a $E^u \cap B(O, \delta)$ e W_{loc}^s é homeomorfo a $E^s \cap B(O, \delta)$.

1) Como $E^{uu} \cap B(O, \delta)$ para tempos negativos é invariante, temos que W_{loc}^{uu} é invariante para tempos negativos e pelo Teorema da Variedade Instável segue que W_{loc}^{uu} é tangente a E^{uu} em O .

2) O autovalor γ_1 é mais fraco que qualquer um dos autovalores $(\gamma_2, \dots, \gamma_m)$, com isso temos que toda trajetória que inicia em $W^u \setminus W^{uu}$ tangencia E^{γ_1} . Como toda trajetória que inicia em $E^u \setminus E^{uu}$ não é transversal a E^{uu} , logo a trajetória Υ que inicia em $W_{loc}^u \setminus W_{loc}^{uu}$ não é transversal a W_{loc}^{uu} ; assim, Υ atinge W_{loc}^{uu} somente em O para o tempo infinito negativo.

3) Como $E^s \cap B(O, \delta)$ para tempos positivos é invariante, temos que W_{loc}^s também é invariante para tempos positivos e pelo Teorema da Variedade Estável segue que W_{loc}^s é tangente a E^s em O . ■

Corolário 1.0.1. *Nas condições da proposição anterior, a trajetória homoclínica Γ deixa o ponto de sela O ao longo do auto espaço gerado pelo autovalor γ_1 , como podemos observar na Figura 1.1.*

Com a Figura 1.1 podemos entender melhor a condição (C) onde a trajetória Γ não está na subvariedade W^{uu} , já para o melhor entendimento do comportamento da condição (D) veja a Figura 1.2.

No teorema que iremos enunciar em seguida, usaremos a seguinte notação. Sejam $F = (f_1, f_2, \dots, f_r) \in \mathbb{R}^r$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$, onde $k_i \in \mathbb{Z}^+$ ($i = 1, \dots, p$) e $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_p$ definimos:

$$\frac{\partial^{|k|} F}{\partial x^k} := \left(\frac{\partial^{|k_1| + \dots + |k_p|} f_1}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_p^{k_p}}, \dots, \frac{\partial^{|k_1| + \dots + |k_p|} f_r}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_p^{k_p}} \right).$$

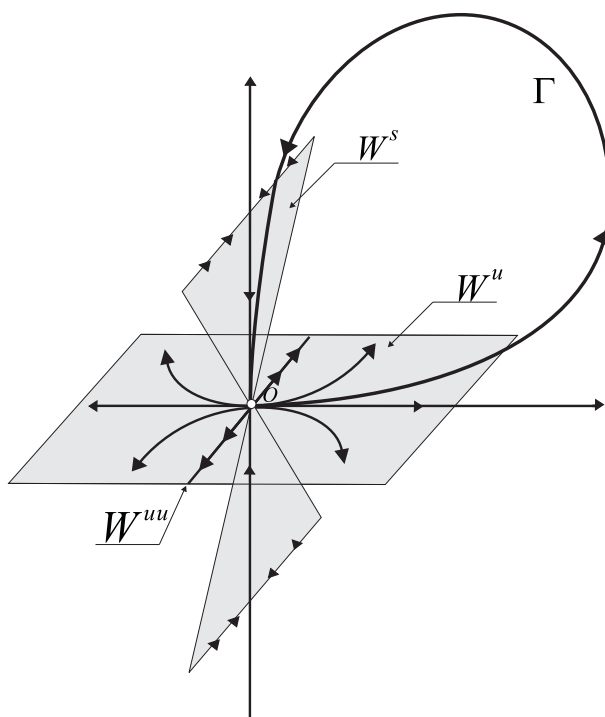


Figura 1.1: A trajetória homoclínica Γ deixa o ponto de sela O ao longo do auto espaço gerado pelo autovalor γ_1 , que por sua vez não está em W^{uu} .

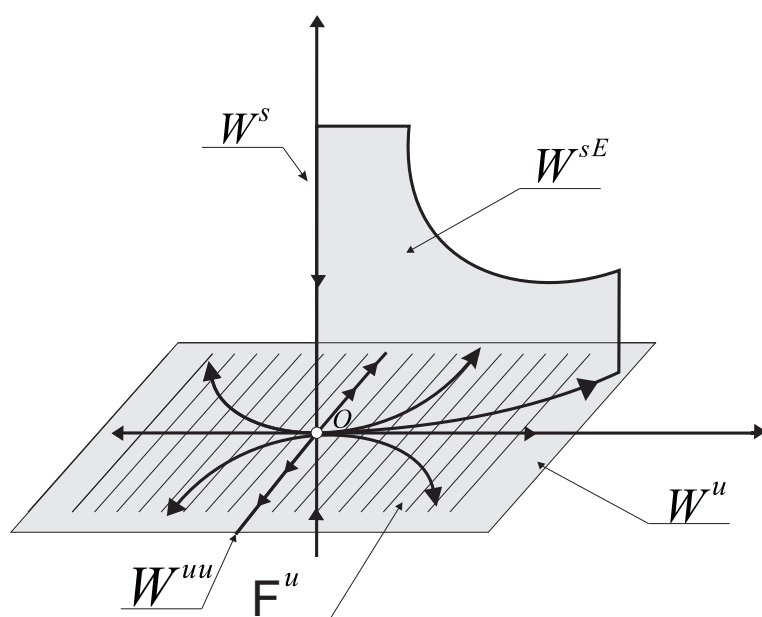


Figura 1.2: Variedade Estável Estendida

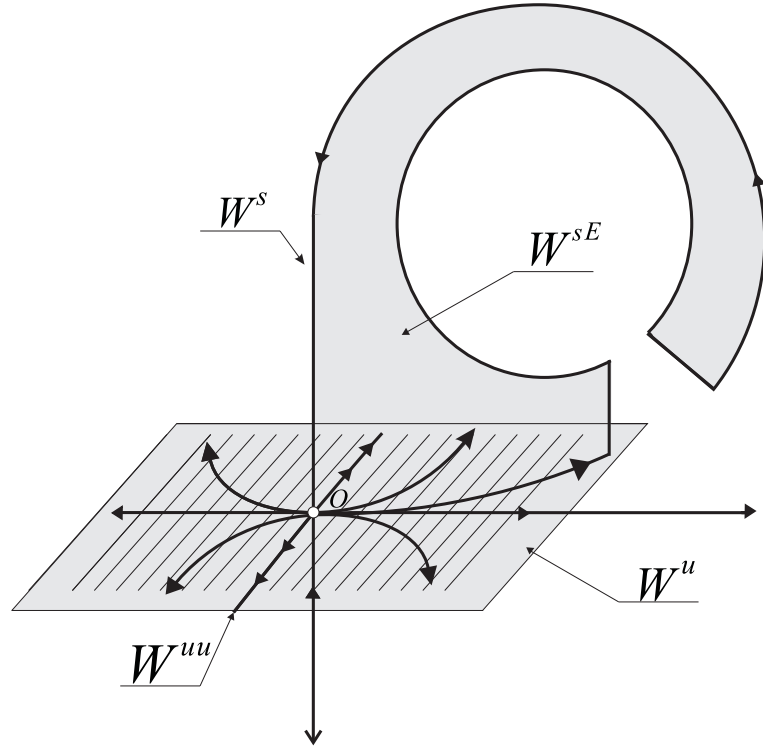


Figura 1.3: Variedade Estável Estendida prolongada ao longo das trajetórias passadas do laço homoclínico Γ

Teorema 1.0.3. *Sejam*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + f(z, v, \mu, t), \\ \dot{v} &= Bv + g(z, v, \mu, t), \\ \text{com } z(0) &= z^0 \text{ e } v(\tau) = v^1; \end{aligned} \tag{1.4}$$

um problema de valor de contorno, (z^*, v^*) a solução de (1.4), $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ os autovalores de A e $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ os autovalores de B em (1.4) onde $\max_{i=1, \dots, n} \{Re\alpha_i\} < \alpha < \beta < \min_{j=1, \dots, m} \{Re\beta_j\}$ e C uma constante positiva independente de (z^0, v^1, μ, τ) , mas dependendo da ordem de diferenciação $k = |k_1| + |k_2| + |k_3|$. Então, as seguintes estimativas valem:

1) Se $0 < \alpha < \beta$,

$$\left. \begin{array}{l} (a) \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial(z^0, \mu)^{k_1} \partial(v^1, \tau)^{k_2} \partial t^{k_3}} \right\| \\ (b) \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial(z^0, \tau, \mu)^{k_1} \partial(v^1)^{k_2} \partial(\tau-t)^{k_3}} \right\| \end{array} \right\} \leq \begin{cases} C & \text{se } |k_1| = |k_2| = 0, \\ Ce^{|k_1|\alpha t} & \text{se } |k_2| = 0 \text{ e } |k_1|\alpha < \beta, \\ Ce^{\beta(t-\tau)+|k_1|\alpha\tau} & \text{se } |k_2| \neq 0 \text{ ou } |k_1|\alpha > \beta. \end{cases} \quad (1.5)$$

2) Se $\alpha < 0 < \beta$,

$$\left. \begin{array}{l} (a) \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial(z^0)^{k_1} \partial(v^1, \tau)^{k_2} \partial t, \mu^{k_3}} \right\| \\ (b) \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial(z^0, \tau)^{k_1} \partial(v^1)^{k_2} \partial(\tau-t, \mu)^{k_3}} \right\| \end{array} \right\} \leq \begin{cases} C & \text{se } |k_1| = |k_2| = 0, \\ Ce^{\alpha t} & \text{se } |k_2| = 0 \text{ e } |k_1| \neq 0, \\ Ce^{\beta(t-\tau)} & \text{se } |k_1| = 0 \text{ e } |k_2| \neq 0, \\ Ce^{\alpha t + \beta(t-\tau)} & \text{se } |k_1| \neq 0 \text{ e } |k_2| \neq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Demonstração.

A demonstração deste teorema está em [6] pag. 295. ■

Capítulo 2

Aplicação de Poincaré Próximo do Laço Homoclínico

Definiremos a aplicação de Poincaré sobre as trajetórias de um sistema numa vizinhança de um laço homoclínico, e esta aplicação será representada pela composição de duas aplicações, a aplicação *local* T_{loc} definida numa vizinhança do ponto de sela O e a aplicação *global* T_{glo} definida ao longo da parte global da trajetória homoclínica Γ .

Na vizinhança do ponto de sela O introduzimos as coordenadas $(u, y, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ de forma que localmente o sistema tem a seguinte expressão.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= Au + f(u, y, w, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma y + g(u, y, w, \mu), \\ \dot{w} &= Bw + h(u, y, w, \mu),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde A é uma matriz $n \times n$ cujos autovalores são $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, B é uma matriz $(m-1) \times (m-1)$ e onde seus autovalores são $\gamma_2, \dots, \gamma_m$ e $\gamma = \gamma_1$.

Sejam $\lambda > 0$ e $\eta > 0$ tal que:

$$\max\{Re\lambda_1, \dots, Re\lambda_n\} < -\lambda,\tag{2.2}$$

$$\min\{Re\gamma_1, \dots, Re\gamma_m\} > \eta > \gamma.\tag{2.3}$$

As funções f, g, h são de classe $\mathcal{C}^r$,

$$(f, g, h)(0, 0, 0) = 0 \text{ e } \left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, y, w, \mu)} \right|_{(0,0,0,0)} = 0.$$

Proposição 2.0.3. *Nestas coordenadas, com $\mu = 0$, a variedade estável é tangente em O ao espaço $\{(y, w) = 0\}$ e a variedade instável é tangente em O ao espaço $\{u = 0\}$ e a variedade instável forte é tangente em O ao espaço $\{(u, y) = 0\}$.*

Demonstração.

A prova desta proposição segue imediatamente da Proposição 1.0.2. ■

Em $\mu = 0$ a trajetória homoclínica Γ retorna a pequena vizinhança de O com $t \rightarrow +\infty$, pois ela está contida na variedade estável local. Portanto, pela Proposição 2.0.3 para algum ξ a trajetória intercepta a superfície $\|u\| = \xi$ transversalmente em algum ponto M^+ pertencente a W_{loc}^s . Denotamos as coordenadas de M^+ como (u^+, y^+, w^+) . Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno e considere a superfície

$$S^{in} = \{\|u\| = \xi, \|u - u^+, y - y^+, w - w^+\| \leq \delta\}.$$

Temos que a trajetória Γ e todas as órbitas vizinhas interceptam transversalmente a superfície $\|u\| = \xi$, conseqüentemente, S^{in} é transversal as trajetórias perto de Γ desde que μ seja suficientemente pequeno.

Uma vez que a trajetória não está na subvariedade W^{uu} (condição (C)) ela deixa o ponto de sela O ao longo do auto espaço gerado por γ_1 que coincide com o eixo y . Sem perda de generalidade, assumimos que Γ deixa O para valores positivos de y . Neste caso, para $y^- > 0$ e y^- suficientemente pequeno, a trajetória homoclínica penetra na superfície $\{y = y^-\}$ em algum ponto M^- pertencente a W_{loc}^u .

Denotamos $M^- = (u^-, y^-, w^-)$. Uma vez que em $\mu = 0$ a trajetória homoclínica é transversal a $\{y = y^-\}$, segue que para μ suficientemente pequeno a pequena superfície,

$$S^{out} = \{y = y^-, \|(u - u^-, w - w^-)\| \leq \delta\},$$

é uma seção transversal (isto é, ela intercepta as trajetórias do sistema transversalmente). Para $\mu = 0$ a trajetória de M^- alcança o ponto M^+ para algum tempo positivo finito.

Portanto, pelo Teorema da Dependência Contínua de Trajetória Sobre as Condições Iniciais e Parâmetros [8], para todo μ pequeno, as trajetórias que passam por S^{out} perto de M^- , obrigatoriamente interceptam S^{in} perto de M^+ . Assim, podemos definir a aplicação T_{glo} que está bem definida na vizinhança de M^- sobre S^{out} indo para a vizinhança de M^+ sobre S^{in} .

Todas trajetórias partindo de S^{in} entram na ξ -vizinhança do ponto de sela O . Se a trajetória inicia em algum ponto $M^0 \in S^{in}$ e deixa a pequena vizinhança do ponto de sela no ponto $M^1 \in S^{out}$, nesse caso dizemos que o ponto M^0 e o ponto M^1 estão relacionados pela aplicação local $T_{loc} : M^0 \mapsto M^1$.

Obviamente que a trajetória que para todo tempo positivo está na pequena vizinhança do laço homoclínico deverá interceptar S^{in} e posteriormente S^{out} transversalmente, ou interceptar S^{in} transversalmente e permanecer na vizinhança do ponto de equilíbrio O para todo tempo futuro, e nesse caso a trajetória vizinha pertence a W_{loc}^s .

Por definição, os pontos consecutivos da intersecção da trajetória com a seção transversal, são relacionados pela aplicação T_{loc} ou T_{glo} . Assim temos uma correspondência entre as trajetórias consideradas e as aplicações T_{loc} e T_{glo} , ou seja

$$T = T_{glo} \circ T_{loc}.$$

A representação gráfica das aplicações locais e globais podem ser visualizadas na Figura 2.1.

Pelo fato do tempo de percurso de S^{out} a S^{in} ser limitado, pelo Teorema da Dependência Contínua e Diferenciável (ver [8], pg. 41) a T_{glo} é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$. Portanto, as estimativas sobre a aplicação T_{glo} pode ser simplesmente obtida pela expansão da Série de Taylor.

Observe que o estudo da aplicação T_{loc} não é trivial, pois o tempo de percurso até encontrar com S^{out} pode ser muito grande, e tende para o infinito, quando o ponto inicial tende para W_{loc}^s .

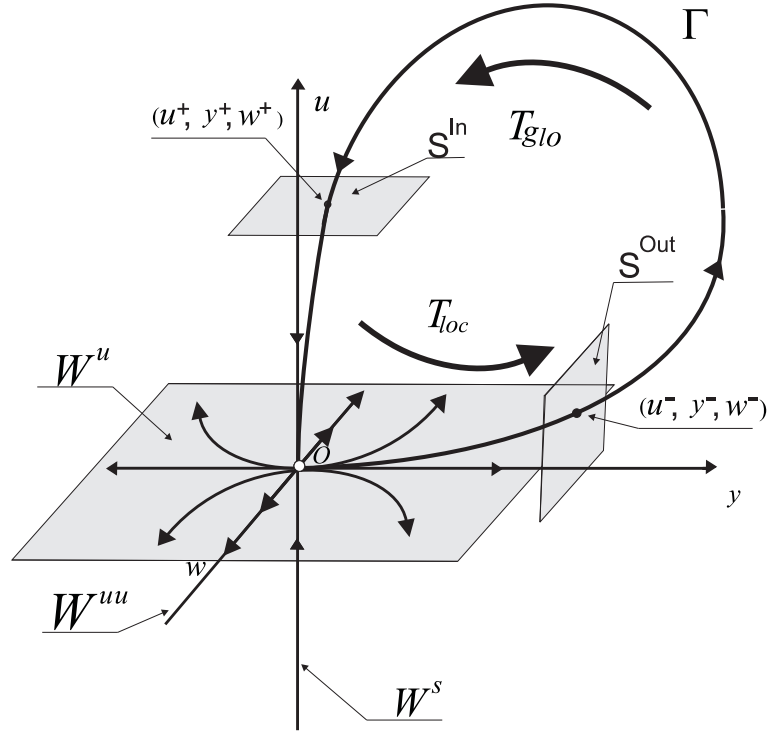


Figura 2.1: Aplicação de Poincaré

2.1 Aplicação de Poincaré - Parte Local.

Denotamos as coordenadas sobre S^{in} como (u^0, y^0, w^0) , com $\|u^0\| = \xi$, e as coordenadas de S^{out} como (u^1, y^1, w^1) , com y^1 fixo.

Lema 2.1.1. *Sejam $(u^*(t), y^*(t), w^*(t),)$ e $(u^{**}(t), y^{**}(t), w^{**}(t),)$ as trajetórias das soluções do problemas de valores de contorno do sistema (2.1), onde*

$$u^*(0) = u^0, \quad y^*(\tau) = y^1 \quad e \quad w^*(\tau) = w^1; \quad (2.4)$$

$$u^{**}(0) = u^0, \quad y^{**}(0) = y^0 \quad e \quad w^{**}(\tau) = w^1. \quad (2.5)$$

são os valores de contorno de $(u^*(t), y^*(t), w^*(t),)$ e $(u^{**}(t), y^{**}(t), w^{**}(t),)$ respectivamente. Então,

$$\frac{\partial y^*}{\partial \tau} = -\frac{\partial y^*}{\partial y^1} \dot{y} \Big|_{M_1} - \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w} \Big|_{M_1} \quad \text{não se anula e é negativa.}$$

Demonstração.

Primeiramente, observe que do problemas de valores de contorno (2.4) e (2.5) podemos escrever

$$\begin{aligned} u^1 &= u^*(\tau; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), \\ y^0 &= y^*(0; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), \\ w^0 &= w^*(0; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau) \end{aligned} \tag{2.6}$$

e também

$$\begin{aligned} u^1 &= u^{**}(\tau; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau), \\ y^1 &= y^{**}(\tau; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau), \\ w^0 &= w^{**}(0; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observe também que a solução do problema de valor de contorno (2.4) é uma trajetória do sistema (2.1) a qual intercepta a superfície

$$\{u = u^0\},$$

em $t = 0$ e a superfície

$$\{(y, w) = (y^1, w^1)\},$$

em $t = \tau$. Denotamos essa trajetória por:

$$(u^*(t; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), y^*(t; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), w^*(t; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau)).$$

Assim, em $t = \tau + \delta$ temos que a trajetória intercepta a superfície

$$\{(y, w) = (y^*(\tau + \delta; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), w^*(\tau + \delta; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau))\}.$$

Logo, temos que vale a seguinte igualdade

$$y^*(t; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau) = y^*(t; u^0, y^*(\tau + \delta; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), w^*(\tau + \delta; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), \mu, \tau + \delta). \tag{2.8}$$

Para simplificar a notação, denotaremos o vetor $(\tau + \delta; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau)$

por V . Derivando ambos os lados da equação (2.8) em relação a δ segue:

$$0 = \frac{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial y^1} \frac{\partial y^*(V)}{\partial \delta}}{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial \tau} \frac{\partial(\tau + \delta)}{\partial \delta}} + \frac{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial w^1} \frac{\partial w^*(V)}{\partial \delta}}{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial \tau} \frac{\partial(\tau + \delta)}{\partial \delta}};$$

implicando,

$$\frac{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial \tau} \frac{\partial(\tau + \delta)}{\partial \delta}}{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial w^1} \frac{\partial w^*(V)}{\partial t}} = - \left[\frac{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial y^1} \frac{\partial y^*(V)}{\partial t}}{\frac{\partial y^*(t; u^0, y^*(V), w^*(V), \mu, \tau + \delta)}{\partial w^1} \frac{\partial w^*(V)}{\partial t}} \right] \frac{\partial(\tau + \delta)}{\partial \delta}.$$

Tomando $\delta = 0$, temos:

$$\frac{\partial y^*}{\partial \tau} = - \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \dot{y}|_{M_1} - \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1}.$$

Observe que de (2.6) e (2.7) temos

$$y^0 = y^*(0; u^0, y^{**}(\tau; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), w^1, \mu, \tau).$$

Logo, derivando ambos os lados em relação a y^0 e (u^0, y^0, w^0) , temos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial y^0} \text{ e} \\ 0 &= \frac{\partial y^*}{\partial(u^0, w^1, \mu)} + \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial(u^0, w^1, \mu)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da primeira equação acima, temos que $\frac{\partial y^*}{\partial y^1}$ não se anula da segunda segue que $\frac{\partial y^*}{\partial w^1} = - \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial w^1}$. Temos também que $\frac{\partial y^{**}}{\partial w^1}$ é limitada (veremos na página 27) e pelo fato do laço homoclínico não estar no eixo w [condição (C)], temos também $\dot{y}|_{M_1} \gg \|\dot{w}|_{M_1}\|$.

Assim,

$$\frac{\partial y^*}{\partial \tau} = \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \left[-\dot{y}|_{M_1} + \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1} \right] \text{ não se anula e é negativa.}$$

■

Seja $\{y = \psi^s(u, \mu), w = \varphi^s(u, \mu)\}$ a equação que define W_{loc}^s e $\{u = \psi^u(y, w, \mu)\}$ a equação que define W_{loc}^u . Seja também $\{w = \varphi^{sE}(u, y, \mu)\}$ a equação da variedade estável estendida local W_{loc}^{sE} . Denotamos por l^{uu} uma folha da folheação instável que passa pelo ponto M^- em S^{out} , seja $\{y = \psi^{uu}(w, \mu), u = \varphi^{uu}(w, \mu)\}$ a equação de l^{uu} . Assim, faz sentido o enunciado do seguinte lema:

Lema 2.1.2. *Existem funções u_{loc} e w_{loc} definidas sobre $\|u^0 - u^+\| < \delta$, $\|w^1 - w^-\| < \delta$ e $0 < y^0 - \psi^s(u^0, \mu) \leq \delta'$ para algum δ' pequeno, tal que para dois pontos $M^0 = (u^0, y^0, w^0) \in S^{in}$ e $M^1 = (u^1, y^1, w^1) \in S^{out}$, a relação $M^1 = T_{loc}(M^0)$ vale se,*

$$\begin{aligned} u^1 &= u_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu) \text{ e} \\ w^0 &= w_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu). \end{aligned}$$

As funções u_{loc} e w_{loc} satisfazem as seguintes estimativas

$$\left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial(u^0, y^0)} \right\| \leq C e^{(\gamma - \lambda + \epsilon)\tau}, \quad (2.10)$$

$$\left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial \mu} \right\| \leq C \max\{1, e^{(\gamma - \lambda + \epsilon)\tau}\}, \quad (2.11)$$

$$\left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1} \right\| \leq C, \quad (2.12)$$

$$\left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq C \text{ e} \quad (2.13)$$

$$\left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial(w^1)} \right\| \leq C e^{-(\eta - \gamma - \epsilon)\tau}. \quad (2.14)$$

onde C é uma constante positiva, λ , η e γ satisfazem as condições (2.2) e (2.3), ϵ depende de δ , $\tau(u^0, y^0, w^1, \mu)$ é o tempo de percurso de M^0 a M^1 , no qual, $\tau \rightarrow \infty$ quando $y^0 \rightarrow \Psi^s(u^0, \mu)$ e

$$\left\| \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq C e^{(\gamma + \epsilon)\tau}, \quad \left\| \frac{\partial \tau}{\partial w^1} \right\| \leq C. \quad (2.15)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\lim_{y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)} u_{loc} &= \psi^u(y^-, w^1, \mu) \text{ e} \\ \lim_{y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)} w_{loc} &= \psi^s(u^0, \mu).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Demonstração.

Seja $(u^*(t), y^*(t), w^*(t),)$ a trajetória da solução do problema de valor de contorno do sistema (2.1), onde

$$u^*(0) = u^0, \quad y^*(\tau) = y^1 \quad \text{e} \quad w^*(\tau) = w^1.$$

Desse modo, a trajetória vai de M^0 a M^1 num tempo $t = \tau$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}u^1 &= u^*(\tau; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), \\ y^0 &= y^*(0; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau) \text{ e} \\ w^0 &= w^*(0; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau).\end{aligned}$$

Observe que este problema de valor de contorno satisfaz as hipóteses do Teorema 1.0.3, onde assumimos $\alpha = -\lambda$, $\beta = \gamma - \epsilon$, $u = z$ e $(y, w) = v$.

Assim, segue de (1.6-b) que,

$$\left\| \frac{\partial u^*}{\partial(u^0, \tau)} \right\| \leq \left\| \frac{\partial(u^*, y^*, w^*)}{\partial(u^0, \tau)} \right\| \leq Ce^{-\lambda t}.\tag{2.17}$$

Agora tome l e $\hat{l}$ vetores de dimensões $m - 1$ e p respectivamente, 0 o vetor nulo unidimensional, $k = (l, \hat{l})$, $k_2 = (0, l)$ e $k_3 = (0, \hat{l})$. O valor de $|k|$ é igual a $|k_2| + |k_3|$, pois,

$$|k| = |l| + |\hat{l}| = |0| + |l| + |0| + |\hat{l}| = |k_2| + |k_3|.$$

Escrevemos,

$$\frac{\partial^{|k_2|+|k_3|}(u^*, y^*, w^*)}{\partial(y^1, w^1)^{k_2} \partial(\tau-t, \mu)^{k_3}} = \frac{\partial^{|k|}(u^*, y^*, w^*)}{\partial(y^1)^0 \partial(w^1)^l \partial(\tau-t)^0 \partial(\mu)^{\hat{l}}} = \frac{\partial^{|k|}(u^*, y^*, w^*)}{\partial(w^1)^l \partial(\mu)^{\hat{l}}} = \frac{\partial^{|k|}u^*}{\partial(w^1, \mu)^k}.\tag{2.18}$$

Tome $|k| = 1$. Então, por (1.6-b), segue:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u^*}{\partial(w^1, \mu)} \right\| &= \left\| \frac{\partial^{|k_2|+|k_3|} u^*}{\partial(y^1, w^1)^{k_2} \partial(\tau-t, \mu)^{k_3}} \right\| \leq \left\| \frac{\partial^{|k_2|+|k_3|} (u^*, y^*, w^*)}{\partial(y^1, w^1)^{k_2} \partial(\tau-t, \mu)^{k_3}} \right\| \\ &\leq \begin{cases} C & \text{se } k_2 = 0, \\ Ce^{(\gamma-\epsilon)(t-\tau)} & \text{se } k_2 \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por (1.6-a), temos:

$$\left\| \frac{\partial(y^*, w^*)}{\partial(y^1, w^1, \tau)} \right\| \leq \left\| \frac{\partial(u^*, y^*, w^*)}{\partial(y^1, w^1, \tau)} \right\| \leq Ce^{(\gamma-\epsilon)(t-\tau)}. \quad (2.20)$$

Agora, seja $l_1 = (k_1, \hat{l}_1)$ e $k_3 = (0, \hat{l}_1)$ vetores, onde k_1 e $\hat{l}_1$ são vetores com n, p coordenadas respectivamente e 0 o vetor nulo unidimensional. Assim,

$$\frac{\partial^{|l_1|} (u^*, w^*)}{\partial(u^0, \mu)^{l_1}} = \frac{\partial^{|k_1|+|\hat{l}_1|} (u^*, w^*)}{\partial(u^0)^{k_1} \partial(\mu)^{\hat{l}_1}} = \frac{\partial^{|k_1|+|0|+|\hat{l}_1|} (u^*, w^*)}{\partial(u^0)^{k_1} \partial(t)^0 \partial(\mu)^{\hat{l}_1}} = \frac{\partial^{|k_1|+|k_3|} (u^*, w^*)}{\partial(u^0)^{k_1} \partial(t, \mu)^{k_3}}.$$

Tome $|l_1| = 1$. Dai, por (1.6-a) temos:

$$\left\| \frac{\partial(u^*, w^*)}{\partial(u^0, \mu)} \right\| = \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_3|} (u^*, w^*)}{\partial(u^0)^{k_1} \partial(t, \mu)^{k_3}} \right\| \leq \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_3|} (u^*, y^*, w^*)}{\partial(u^0)^{k_1} \partial(t, \mu)^{k_3}} \right\| \leq \begin{cases} C & \text{se } k_1 = 0, \\ Ce^{(\lambda t)} & \text{se } k_1 \neq 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Aplicando $t = \tau$ em (2.17) e (2.19) temos,

$$\left\| \frac{\partial u^*}{\partial(u^0, \tau)} \right\| \leq Ce^{-\lambda\tau} \quad (2.22)$$

e

$$\left\| \frac{\partial u^*}{\partial(w^1, \mu)} \right\| \leq C. \quad (2.23)$$

Aplicando $t = 0$ em (2.20) e (2.21) temos,

$$\left\| \frac{\partial(y^*, w^*)}{\partial(y^1, w^1, \tau)} \right\| \leq Ce^{-(\gamma-\epsilon)\tau} \quad (2.24)$$

e

$$\left\| \frac{\partial(u^*, w^*)}{\partial(u^0, \mu)} \right\| \leq C. \quad (2.25)$$

Através do problema de contorno do Lema 2.1.1, podemos escrever a seguinte equação,

$$\begin{aligned} u^1 &= u^{**}(\tau; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau), \\ y^1 &= y^{**}(\tau; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau) \text{ e} \\ w^0 &= w^{**}(0; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau). \end{aligned}$$

onde $(u^{**}(t), y^{**}(t), w^{**}(t))$ satisfaz as seguintes condições de contorno

$$(u^{**}(0) = u^0, y^{**}(0) = y^0, w^{**}(\tau) = w^1). \quad (2.26)$$

Agora pelo Teorema 1.0.3 assumindo $(u, y) = z$, $w = v$, $\alpha = \gamma + \epsilon$ e $\beta = \eta$; por (1.5-b) temos

$$\left\| \frac{\partial(y^{**}, u^{**})}{\partial(u^0, y^0, \mu, \tau)} \right\| \leq \left\| \frac{\partial(y^{**}, u^{**}, w^{**})}{\partial(u^0, y^0, \mu, \tau)} \right\| \leq Ce^{(\gamma+\epsilon)t}. \quad (2.27)$$

De maneira análoga escrevemos

$$\left\| \frac{\partial(y^{**}, u^{**})}{\partial(w^1)} \right\| \leq Ce^{\eta(t-\tau)}, \quad (2.28)$$

$$\left\| \frac{\partial(w^{**})}{\partial(w^1, \tau)} \right\| \leq Ce^{\eta(t-\tau)} \quad (2.29)$$

e

$$\left\| \frac{\partial(w^{**})}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq Ce^{(\gamma+\epsilon)t}. \quad (2.30)$$

Aplicando $t = \tau$ em (2.27) e (2.28) temos

$$\left\| \frac{\partial(y^{**}, u^{**})}{\partial(u^0, y^0, \mu, \tau)} \right\| \leq Ce^{(\gamma+\epsilon)\tau} \quad (2.31)$$

e

$$\left\| \frac{\partial(y^{**}, u^{**})}{\partial(w^1)} \right\| \leq C.$$

Aplicando $t = 0$ em (2.29) e (2.30) temos

$$\left\| \frac{\partial(w^{**})}{\partial(w^1, \tau)} \right\| \leq Ce^{-\eta\tau} \quad (2.32)$$

e

$$\left\| \frac{\partial(w^{**})}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq C. \quad (2.33)$$

Pelo Lema 2.1.1, temos que $\frac{\partial y^*}{\partial \tau}$ não se anula. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita temos que τ pode ser escrito em função de (u^0, y^0, w^1, μ) . Portanto, tem sentido os seguintes resultados.

$$\frac{\partial \tau}{\partial y^0} = \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} e \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial(u^0, w^1, \mu)} = - \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial(u^0, w^1, \mu)}. \quad (2.35)$$

Agora, da equação (2.35) podemos escrever (2.36), (2.37) e (2.38) e da segunda equação de (2.9) escrevemos (2.39), (2.40) e (2.41) como segue a seguir:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u^0} = - \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial u^0}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial w^1} = - \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial w^1}, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mu} = - \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial \mu}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial u^0} = - \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial u^0}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial w^1} = - \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial w^1} e \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial \mu} = - \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial \mu}. \quad (2.41)$$

Compondo (2.36) com (2.39), (2.37) com (2.40) e (2.38) com (2.41) temos respectivamente:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u^0} = \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial u^0}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial w^1} = \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial w^1} e \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial \mu}. \quad (2.44)$$

Observe também que da composição da primeira equação de (2.9) e da equação (2.34) temos:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y^0} = \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial y^0}. \quad (2.45)$$

Assim, como

$$\frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial u^0} & \frac{\partial \tau}{\partial y^0} & \frac{\partial \tau}{\partial \mu} \end{bmatrix},$$

pelas equações (2.42), (2.44) e (2.45) segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial u^0} & \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial w^1} & \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial \mu} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \begin{bmatrix} \frac{\partial y^{**}}{\partial u^0} & \frac{\partial y^{**}}{\partial y^0} & \frac{\partial y^{**}}{\partial \mu} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, usando (2.10) temos o resultado que segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} &= \left[\frac{\partial y^*}{\partial y^1} \left(-\dot{y}|_{M_1} + \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1} \right) \right]^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \\ &= \left(-\dot{y}|_{M_1} + \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1} \right)^{-1} \frac{\partial y^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} = \frac{\partial y^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \left(-\dot{y}|_{M_1} + \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1} \right)^{-1}. \quad (2.46)$$

De maneira análoga, temos:

$$\frac{\partial \tau}{\partial w^1} = \frac{\partial y^{**}}{\partial w^1} \left(-\dot{y}|_{M_1} + \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1} \right)^{-1}. \quad (2.47)$$

Observe que do Lema 2.1.1, segue que $\left(-\dot{y}|_{M_1} + \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1} \right)$ não se anula,

logo temos que existe K positivo tal que

$$\left\| \left(-\dot{y}|_{M_1} + \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w}|_{M_1} \right)^{-1} \right\| < K, \quad (2.48)$$

o que, implica em

$$\left\| \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq K \left\| \frac{\partial y^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\|$$

e

$$\left\| \frac{\partial \tau}{\partial w^1} \right\| \leq K \left\| \frac{\partial y^{**}}{\partial w^1} \right\|.$$

Agora, por (2.31) e com o resultado acima, temos:

$$\left\| \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq KC e^{(\gamma+\epsilon)\tau} = \bar{C} e^{(\gamma+\epsilon)\tau}$$

e

$$\left\| \frac{\partial \tau}{\partial w^1} \right\| \leq KC = \bar{C},$$

que prova a inequação (2.15).

Agora definimos u_{loc} e w_{loc} como abaixo:

$$\begin{aligned} u_{loc}(u^0, y^0, w^0, \mu) &= u^*(\tau(u^0, y^0, w^0, \mu); u^0, y^-, w^1, \mu, \tau(u^0, y^0, w^0, \mu)) \text{ e} \\ w_{loc}(u^0, y^0, w^0, \mu) &= w^{**}(\tau(u^0, y^0, w^0, \mu); u^0, y^0, w^1, \mu, \tau(u^0, y^0, w^0, \mu)). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Assim, temos os resultados que seguem:

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial(u^0, y^0)} \right\| &= \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0)} + \frac{\partial u^*}{\partial u^0} \frac{\partial u^0}{\partial(u^0, y^0)} + \frac{\partial u^*}{\partial(y^1, w^1, \mu)} \frac{\partial(y^1, w^1, \mu)}{\partial(u^0, y^0)} \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right\| \left\| \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0)} \right\| + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial u^0} \right\| \leq C^2 e^{(\gamma+\epsilon-\lambda)\tau} + C^2 e^{-\lambda\tau} \\
 &\leq C^2 e^{(\gamma+\epsilon-\lambda)\tau} = \tilde{C} e^{(\gamma+\epsilon-\lambda)\tau},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial \mu} \right\| &= \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \mu} + \frac{\partial u^*}{\partial(u^0, y^1, w^1)} \frac{\partial(u^0, y^1, w^1)}{\partial \mu} + \frac{\partial u^*}{\partial \mu} \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right\| \left\| \frac{\partial \tau}{\partial \mu} \right\| + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \mu} \right\| \\
 &\leq C e^{(\gamma+\epsilon-\lambda)\tau} + C \leq 2C \max\{e^{(\gamma+\epsilon-\lambda)\tau}, 1\} = \tilde{C} \max\{e^{(\gamma+\epsilon-\lambda)\tau}, 1\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1} \right\| &= \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial w^1} + \frac{\partial u^*}{\partial(u^0, y^1, \mu)} \frac{\partial(u^0, y^1, \mu)}{\partial w^1} + \frac{\partial u^*}{\partial w^1} \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right\| \left\| \frac{\partial \tau}{\partial w^1} \right\| + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial w^1} \right\| \leq C^2 e^{-\lambda\tau} = \tilde{C},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| &= \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} + \frac{\partial w^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} + \frac{\partial w^{**}}{\partial w^1} \frac{\partial w^1}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial \tau} \right\| \left\| \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| + \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq C^2 e^{(\gamma+\epsilon-\eta)\tau} + C < C \text{ e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial(w^1)} \right\| &= \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial w^1} + \frac{\partial w^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \frac{\partial(u^0, y^0, \mu)}{\partial w^1} + \frac{\partial w^{**}}{\partial w^1} \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial \tau} \right\| \left\| \frac{\partial \tau}{\partial w^1} \right\| + \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial w^1} \right\| \leq C^2 e^{-\eta\tau} + C e^{-\eta\tau} \leq C^2 e^{(\gamma+\epsilon-\eta)\tau} \\
 &= \tilde{C} e^{(\gamma+\epsilon-\eta)\tau};
 \end{aligned}$$

o que prova (2.10 - 2.14).

Observe que se $\tau \rightarrow +\infty$ então $M^0 \in W_{loc}^s$ e $M^1 \in W_{loc}^u$, isto é,

$$\begin{aligned}
 u^*|_{\tau=+\infty} &= \psi^u(y^1, w^1, \mu) \text{ e} \\
 w^{**}|_{\tau=+\infty} &= \varphi^s(u^0, \mu).
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Aplicando o limite nas equações de (2.49) e usando os resultados de (2.50)

provamos (2.16). ■

Lema 2.1.3. *No Lema 2.1.2 as seguintes estimativas valem:*

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial(u^0, y^0)^{k_1} \partial(\mu)^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| &\leq C e^{((|k_1|+|k_2|)(\gamma+\epsilon)-\lambda)\tau} \text{ se } k_1 \neq 0, \\
 \left\| \frac{\partial^{|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial(\mu)^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| &\leq C \max\{1, e^{(|k_2|)(\gamma+\epsilon)-\lambda)\tau}\}, \\
 \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial(w^1)^{k_2}} \right\| &\leq \begin{cases} C & \text{se } k_2 = 0 \text{ e } |k_1|(\gamma + \epsilon) < \eta \\ C e^{-(\eta-|k_1|)(\gamma+\epsilon)\tau} & \text{se } k_2 \neq 0 \text{ ou } |k_1|(\gamma + \epsilon) > \eta. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Demonstração.

De fato, tome $(u, y) = z$, $w = v$, $(\gamma + \epsilon) = \alpha$, $\lambda = \beta$, $\tilde{k}_1 = (k_1, k_2)$, $\tilde{k}_2 = (k_3, 0)$, onde ϵ satisfaz a seguinte condição:

$$(\gamma + \epsilon) < \lambda < 2(\gamma + \epsilon). \tag{2.52}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial(u^0, y^0)^{k_1} \partial\mu^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| &= \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|} u^*}{\partial(u^0, y^0)^{k_1} \partial\mu^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| \leq \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|} (u^*, y^*, w^*)}{\partial(u^0, y^0)^{k_1} \partial\mu^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| \\
 &= \left\| \frac{\partial^{\tilde{k}_1+|\tilde{k}_2|} (z^*, v^*)}{\partial(z^0, \mu)^{\tilde{k}_1} \partial(v^1, \tau)^{\tilde{k}_2}} \right\| \\
 &\leq \begin{cases} C e^{|\tilde{k}_1|\alpha t} & \text{se } |\tilde{k}_2| = 0 \text{ e } |\tilde{k}_1|\alpha < \beta \\ C e^{\beta(t-\tau)+|\tilde{k}_1|\alpha t} & \text{se } |\tilde{k}_2| \neq 0 \text{ ou } |\tilde{k}_1|\alpha > \beta. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tomando $t = 0$ e substituindo as constantes, temos

$$\left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial(u^0, y^0)^{k_1} \partial\mu^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| \leq \begin{cases} C & \text{se } \begin{cases} |k_3| = 0 \text{ e} \\ (|k_1| + |k_2|)(\gamma + \epsilon) < \lambda \end{cases} \\ C e^{((|k_1|+|k_2|)(\gamma+\epsilon)-\lambda)\tau} & \text{se } \begin{cases} |k_3| \neq 0 \text{ ou} \\ (|k_1| + |k_2|)(\gamma + \epsilon) > \lambda. \end{cases} \end{cases}$$

Observe que um problema ocorre quando $|k_3| = 0$, mas pela condição (2.52),

temos que este problema é reduzido para os casos $|k_1| = 1$ e $|k_2| = 0$ ou quando $|k_1| = 0$ e $|k_2| = 1$. Para $|k_1| = 1$ e $|k_2| = 0$ caímos na condição (2.10) e para o caso $|k_1| = 0$ e $|k_2| = 1$ caímos na condição (2.11), ambas do lema anterior.

Assim, temos valendo o seguinte resultado.

$$\left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial(u^0, y^0)^{k_1} \partial(\mu)^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| \leq C e^{((|k_1|+|k_2|)(\gamma+\epsilon)-\lambda)\tau} \text{ se } k_1 \neq 0 \text{ e}$$

$$\left\| \frac{\partial^{|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial(\mu)^{k_2} \partial(w^1)^{k_3}} \right\| \leq C \max\{1, e^{(|k_2|(\gamma+\epsilon)-\lambda)\tau}\},$$

o que prova a primeira parte do lema.

Agora para a segunda parte, tome $\alpha = (\gamma + \epsilon)$, $\beta = \eta$, $\tilde{k}_1 = k_1$ e $\tilde{k}_2 = (k_2, 0)$. Dai,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial(w^1)^{k_2}} \right\| &= \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} w^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial(w^1)^{k_2}} \right\| \leq \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} (u^{**}, y^{**}, w^{**})}{\partial(u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial(w^1)^{k_2} \partial\tau^0} \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial^{|\tilde{k}_1|+|\tilde{k}_2|} (z^*, v^*)}{\partial(z^0, \mu)^{\tilde{k}_1} \partial(v^1, \tau)^{\tilde{k}_2}} \right\| \\ &\leq \begin{cases} C e^{|\tilde{k}_1|\alpha t} & \text{se } |\tilde{k}_2| = 0 \text{ e } |\tilde{k}_1|\alpha < \beta \\ C e^{\beta(t-\tau)+|\tilde{k}_1|\alpha t} & \text{se } |\tilde{k}_2| \neq 0 \text{ ou } |\tilde{k}_1|\alpha > \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Tomando $t = 0$ e substituindo as constantes, temos

$$\left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial(w^1)^{k_2}} \right\| \leq \begin{cases} C & \text{se } k_2 = 0 \text{ e } |k_1|(\gamma + \epsilon) < \eta, \\ C e^{-(\eta-|k_1|(\gamma+\epsilon)\tau)} & \text{se } k_2 \neq 0 \text{ ou } |k_1|(\gamma + \epsilon) > \eta ; \end{cases} \quad (2.53)$$

o que prova o restante do lema. ■

Lema 2.1.4. *Considere a mudança de coordenadas sobre as seções transversais S^{in} e S^{out} como segue:*

$$\begin{aligned} y_{novo}^0 &= y^0 - \psi^s(u^0, \mu), \\ w_{novo}^0 &= w^0 - \varphi^{sE}(u^0, y^0, \mu) \text{ e} \\ u_{novo}^1 &= u^1 - \psi^u(y^1, w^1, \mu). \end{aligned}$$

Assim, os pontos $M^0 = (u^0, y^0, w^0) \in S^{in}$ e $M^1 = (u^1, y^1, w^1) \in S^{out}$ são relacionados pela aplicação T_{loc} , isto é, $T(M_0) = M_1$ se, e somente se,

$$u^1 = u_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu) \quad e \quad w^0 = w_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu), \quad (2.54)$$

onde as funções u_{loc} e w_{loc} estão agora definidas em $y \in [0, \delta]$ e satisfazem as seguintes inequações nas novas coordenadas:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} u_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial(w^1)^{k_2}} \right\| &\leq C e^{|k_1|(\gamma+\epsilon)\tau} \text{ se } k_1 \neq 0 \text{ e} \\ \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial(w^1)^{k_2}} \right\| &\leq C e^{-(\eta-|k_1|(\gamma+\epsilon)\tau)} \text{ se } k_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Além disso, nas novas coordenadas

$$u_{loc}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0, \quad w_{loc}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0 \quad (2.56)$$

e

$$\frac{\partial^k w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)^k}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0; \quad \text{com } k \leq \min\{q, r\}. \quad (2.57)$$

Demonstração.

A demonstração deste lema segue imediatamente dos dois lemas anteriores.

■

Observemos aqui que de (2.56) temos

$$\frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0 \text{ e } \frac{\partial w_{loc}}{\partial w^1}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0. \quad (2.58)$$

2.2 Aplicação de Poincaré - Parte Global.

Considere a aplicação global de Poincaré $T_{glo} : S^{out} \mapsto S^{in}$. Uma vez que o tempo de percurso de S^{in} a S^{out} é limitado, depende da aplicação fluxo que é de classe $\mathcal{C}^r$, e ainda, pelo Teorema da Dependência Contínua e Diferenciável

em relação as condições iniciais (ver [8]), Temos que a aplicação T_{glo} é um difeomorfismo de classe $\mathbf{C}^r$. Assim podemos trabalhar com a aplicação inversa $T_{glo}^{-1} : S^{in} \rightarrow S^{out}$, na qual denotamos esta aplicação por

$$T_{glo}^{-1}(u^0, y^0, w^0) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ y^0 \\ w^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu) \\ y^1 \\ w_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu) \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

onde $d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}$ e d_{23} são matrizes que dependem diferencialmente de μ , de dimensões $n \times (n-1)$, $n \times 1$, $n \times (m-1)$, $(m-1) \times (n-1)$, $(m-1) \times 1$ e $(m-1) \times (m-1)$ respectivamente e as funções u_{glo} e w_{glo} são os termos de ordem superior.

Pela construção acima da aplicação T_{glo}^{-1} podemos escrever o seguinte resultado.

$$\begin{pmatrix} u^1 - u^-(\mu) \\ w^1 - w^-(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 - u^+ \\ y^0 \\ w^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu) \\ w_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu) \end{pmatrix},$$

onde $(u^-(\mu), w^-(\mu))$ são as coordenadas da imagem de M^+ pela aplicação T_{glo}^{-1} .

Observe que pelo fato de $\|u^0\| = \xi$ temos que a dimensão do conjunto $\{u^0 : \|u^0\| = \xi\}$ é uma a menos que a dimensão do conjunto $\{(u, y, w) : y = w = 0\}$, ou seja, sua dimensão é $(n-1)$.

Observe também que o espaço tangente de W_{loc}^u em M^- é gerado pelo vetor velocidade $(\dot{u}, \dot{y}, \dot{w})|_{M^-}$ (que é tangente a Γ em M^-) e pela base do espaço tangente da folha l^{uu} no ponto M^- . Pelo fato de $\Gamma \subset W_{loc}^{sE}$ temos que o vetor velocidade está no espaço tangente de W_{loc}^{sE} e como W_{loc}^{sE} é transversal a l^{uu} (condição (D)), temos que a intersecção do espaço tangente de W_{loc}^u com o espaço tangente de W_{loc}^{sE} (ambos calculados em M^-) é um espaço gerado pelo vetor velocidade $(\dot{u}, \dot{y}, \dot{w})|_{M^-}$ e com isso, temos que este espaço é unidimensional.

Denotaremos por $\mathcal{T}_p V$ o espaço tangente de uma variedade V no ponto $p \in V$.

Como a dimensão de $\mathcal{T}_{M^-}[W_{loc}^{sE}]$ mais a dimensão de $\mathcal{T}_{M^-}[W_{loc}^u]$ menos a dimensão de $\mathcal{T}_{M^-}[W_{loc}^u \cap W_{loc}^{sE}]$ resulta na dimensão do espaço todo, temos que W_{loc}^{sE} e W_{loc}^u interceptam-se transversalmente em M^- .

Assim, temos também que $W_{loc}^{sE} \cap S^{out}$ intercepta transversalmente $W_{loc}^u \cap S^{out}$ no espaço ambiente S^{out} . Como T_{glo} é invariante pelo fluxo, temos $T_{glo}^{-1}(W_{loc}^{sE} \cap S^{in}) = W_{loc}^{sE} \cap S^{out}$, implicando que a imagem de $W_{loc}^{sE} \cap S^{in}$ pela aplicação T_{glo}^{-1} é transversal a $W_{loc}^u \cap S^{out}$, que por sua vez implica que a imagem do espaço tangente de $W_{loc}^{sE} \cap S^{in}$ (calculado em M^+), pela aplicação T_{glo}^{-1} , intercepta transversalmente o espaço tangente de $W_{loc}^u \cap S^{out}$ (calculado em M^-).

Observação 2.2.1. *Se N e M são duas variedades, $f: N \rightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in N$ e $f(p) = q$. Então, o seguinte resultado é válido:*

$$\mathcal{T}_q[f(N)] = Df_p[\mathcal{T}_p N];$$

dai,

$$f(N) \pitchfork M \Rightarrow \mathcal{T}_q[f(N)] \pitchfork \mathcal{T}_q M \Rightarrow Df_p[\mathcal{T}_p N] \pitchfork \mathcal{T}_q M,$$

onde, $\pitchfork$ denota a intersecção transversal.

Assim, pela observação acima temos que

$$DT_{glo}^{-1}(\mathcal{T}_{M^+}(W_{loc}^{sE} \cap S^{in})) \pitchfork \mathcal{T}_{M^-}(W_{loc}^u \cap S^{out}).$$

Para demais propriedades envolvendo teoria de transversalidade recomendamos [1]. Agora nas coordenadas do Lema 2.1.4 temos:

$$\mathcal{T}_{M^+}(W_{loc}^{sE} \cap S^{in}) = \{w^0 = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_{M^-}(W_{loc}^u \cap S^{out}) = \{u^1 = 0\},$$

implicando

$$DT_{glo}^{-1}(\{w^0 = 0\}) \pitchfork \{u^1 = 0\}. \quad (2.60)$$

Como o espaço ambiente da equação acima tem dimensão $(m - 1 + n)$ e $\{u^1 = 0\}$ tem dimensão $(m - 1)$ temos que $\dim(DT_{glo}^{-1}(\{w^0 = 0\})) \geq n$, mas pelo Teorema do Núcleo e Imagem temos $\dim(DT_{glo}^{-1}(\{w^0 = 0\})) \leq n$.

Dai, temos

$$\dim \left(\left\{ \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ y^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) = n;$$

logo,

$$\ker \left\{ \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \right\} = 0;$$

dai,

$$\det(d_{11}, d_{12}) \neq 0. \tag{2.61}$$

O fato do $\det(d_{11}, d_{12}) \neq 0$ é muito importante, pois será usado mais adiante como hipótese satisfeita do Teorema da Função Implícita para uma determinada aplicação.

Capítulo 3

Existência do Toro Invariante

Seja $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ um difeomorfismo, onde $\mathbb{T}^m$ é o produto cartesiano de S^1 com ele mesmo m vezes.

Seja também (x, θ) pertencente a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ e $T(x, \theta) = (\bar{x}, \bar{\theta})$, onde

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f(x, \theta) \\ \bar{\theta} &= \theta + g_0(x, \theta) = g(x, \theta) \pmod{2\pi},\end{aligned}\tag{3.1}$$

com f e g diferenciáveis e de período 2π com respeito a θ .

Denotamos $\mathbb{K}$ o anel definido por:

$$\mathbb{K} = \{(x, \theta) \mid \|x\| < \delta, \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m\}$$

Para o estudo da existência de um toro invariante no anel $\mathbb{K}$, consideremos as seguintes hipóteses.

Hipótese 1.

Para cada θ , a aplicação

$$\bar{x} = f(x, \theta)\tag{3.2}$$

é uma contração, isto é:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_0 < 1.$$

Hipótese 2

Para cada x fixo, a aplicação

$$\bar{\theta} = \theta + g_0(x, \theta) = g(x, \theta) \pmod{2\pi}$$

é um difeomorfismo.

Hipótese 3

$$2\sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0} + \sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_0} < 1.$$

Da Hipótese 2, temos que $\theta = G(x, \bar{\theta})$, assim podemos escrever o difeomorfismo (3.1) na seguinte forma.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x, \theta) = f(x, G(x, \bar{\theta})) = F(x, \bar{\theta}) \text{ e} \\ \theta &= G(x, \bar{\theta}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Observe que,

$$\bar{\theta} = g(x, G(x, \bar{\theta})). \tag{3.4}$$

Das identidades acima, temos que:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_0 &\leq \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_0 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0, \\ \left\|\frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0 &= \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0, \\ \left\|\frac{\partial G}{\partial x}\right\|_0 &\leq \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \text{ e} \\ \left\|\frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0 &= \left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

De fato, seja $H(x, \bar{\theta}) = g(x, G(x, \bar{\theta}))$. Dai, $H(x, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ para todo x em $\mathbb{R}^n$,

assim temos que H não depende de x , logo

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Dai,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = - \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Observe que para x fixo, temos que na variável θ g é a inversa de G , logo

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1}, \quad (3.7)$$

ou seja,

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} = Id.$$

Observe também que

$$Id = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \theta},$$

logo

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0. \quad (3.8)$$

Assim, derivando (3.3) e usando as equações (3.6), (3.7) e (3.8) escrevemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1}, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= - \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} \text{ e} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_0 &\leq \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_0 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0, \\ \left\|\frac{\partial F}{\partial \theta}\right\|_0 &= \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0, \\ \left\|\frac{\partial G}{\partial x}\right\|_0 &\leq \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \text{ e} \\ \left\|\frac{\partial G}{\partial \theta}\right\|_0 &= \left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0.\end{aligned}$$

Da Hipótese 3, temos

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0} + \sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0} \\ &+ \sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_0} < 1;\end{aligned}$$

em particular, cada parcela da expressão acima é menor que 1, dai

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_0 + \left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0} \\ &+ \sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0} < 1\end{aligned}$$

que por sua vez implica em

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_0 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0\right) \left(\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0\right)} \\ &+ \sqrt{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0} < 1.\end{aligned}$$

Com a última expressão acima e por (3.5), finalmente temos

$$\sqrt{\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0} + \sqrt{\left\|\frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0 \left\|\frac{\partial G}{\partial x}\right\|_0} < 1. \quad (3.9)$$

Em particular

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0 < 1. \quad (3.10)$$

De (3.1), temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = Id + \frac{\partial g_0}{\partial \theta}.$$

Dai,

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \theta}\right\|_0 \leq 1 + \left\|\frac{\partial g_0}{\partial \theta}\right\|_0$$

ou seja,

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial \theta}\right\|_0 = \left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^{-1}\right\|_0 \geq 1.$$

Logo, de (3.10) segue que

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_0 < 1.$$

Assim,

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_0 + \sqrt{\left\|\frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0 \left\|\frac{\partial G}{\partial x}\right\|_0} < \sqrt{\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|_0 \left\|\frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0} + \sqrt{\left\|\frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0 \left\|\frac{\partial G}{\partial x}\right\|_0} < 1. \quad (3.11)$$

Denotamos

$$\mathfrak{L} = \sqrt{\left\|\frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}}\right\|_0 \left\|\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^{-1}\right\|_0}, \quad (3.12)$$

quando $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \equiv 0$, tome $\mathfrak{L}$ suficientemente grande.

Observe que por cálculos simples, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 &< 1, \\ \sup_{(x,\theta)} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\| \right\} &\leq \left(1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{L}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0 \right), \\ \sup_{(x,\theta)} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\| \right\} &< \left(1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right)^2 \text{ e} \\ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0 &< 1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Denotaremos por $H(\mathfrak{L})$ o espaço das funções $x = h(\theta)$ com o gráfico em $\mathbb{K}$ onde $\|h\| < \eta_0$ e h satisfazem a condição de Lipschitz.

$$\|h(\theta + \Delta\theta) - h(\theta)\| \leq \mathfrak{L} \|\Delta\theta\| \quad \text{com } \mathfrak{L} > 0 \quad (3.14)$$

Seja $H(\mathfrak{L})$ um espaço normado pela norma usual

$$\text{dis}(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| = \sup_{\theta} \|h_1(\theta) - h_2(\theta)\|$$

Lema 3.0.1. *Se a primeira e a segunda equação de (3.13) são satisfeitas, então a imagem do gráfico de uma aplicação de Lipschitz $x = h(\theta)$ que satisfaz (3.14) pela aplicação T é o gráfico de aplicação uma aplicação $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$ que também satisfaz (3.14).*

Demonstração.

Seja $h \in H(\mathfrak{L})$. Provaremos agora que a imagem $T\{x = h(\theta)\}$ é uma superfície do tipo $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$, ou seja, para todo $\bar{\theta}$ existe um único $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$ tal que $(\bar{x}, \bar{\theta}) = T(h(\theta), \theta)$, para isto, primeiro provaremos que as afirmações abaixo são equivalentes.

- (i) Para cada $\bar{\theta}$, existe um único $\bar{x}$ tal que $T(h(\theta), \theta) = (\bar{x}, \bar{\theta})$.
- (ii) Para cada $\bar{\theta}$ existe um único θ tal que $\theta = G(h(\theta), \bar{\theta})$.

De fato, suponhamos que (i) é verdadeiro e provaremos que (ii) vale, ou seja, (i) implica em (ii).

Suponhamos por absurdo que para cada $\bar{\theta}$ existem $\theta_1 \neq \theta_2$ tal que

$$\begin{cases} \theta_1 = G(h(\theta_1), \bar{\theta}) \\ \theta_2 = G(h(\theta_2), \bar{\theta}). \end{cases} \quad \text{Considerando} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = F(h(\theta_1), \bar{\theta}) \\ \bar{x}_2 = F(h(\theta_2), \bar{\theta}) \end{cases}$$

teremos que

$$\begin{aligned} T(h(\theta_1), \theta_1) &= (x_1, \bar{\theta}) \\ T(h(\theta_2), \theta_2) &= (x_2, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

Sendo, $\theta_1 \neq \theta_2$ e T difeomorfismo, então $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ que é uma contradição. Logo, (i) implica (ii).

Agora provaremos que (ii) implica (i). Suponhamos também por absurdo que para cada $\bar{\theta}$ existem $x_1 \neq x_2$ tal que

$$\begin{cases} T(h(\theta_1), \theta_1) = (\bar{x}_1, \bar{\theta}) \Rightarrow \theta_1 = G(h(\theta_1), \bar{\theta}) \\ T(h(\theta_2), \theta_2) = (\bar{x}_2, \bar{\theta}) \Rightarrow \theta_2 = G(h(\theta_2), \bar{\theta}). \end{cases}$$

Como por hipótese existe um único $\bar{\theta}$ tal que $\theta = G(h(\theta), \bar{\theta})$, temos que $\theta_1 = \theta_2$. Pelo fato de T ser um difeomorfismo e pela equação acima, temos que $x_1 = x_2$ que é uma contradição. Logo, (ii) implica (i).

Portanto, (i) e (ii) são equivalentes.

Agora, vamos encontrar condições que para todo $\bar{\theta}$ existe uma única solução da equação abaixo sobre θ ;

$$\theta = G(h(\theta), \bar{\theta}). \quad (3.15)$$

Considere a aplicação, para cada $\bar{\theta}$ fixo,

$$\theta \mapsto G(h(\theta), \bar{\theta}).$$

De (3.14) temos:

$$\|\Delta x\| \equiv \|h(\theta + \Delta\theta) - h(\theta)\| \leq \mathfrak{L}\|\Delta\theta\|$$

e

$$G(x + \Delta x, \bar{\theta}) - G(x, \bar{\theta}) = \int_1^0 \frac{\partial G}{\partial x}(x + s\Delta x, \bar{\theta}) ds \Delta x.$$

Assim

$$\|G(x + \Delta x, \bar{\theta}) - G(x, \bar{\theta})\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \mathfrak{L} \|\Delta \theta\|.$$

Da primeira equação de (3.13) temos que a aplicação acima é uma contração, logo para todo $\bar{\theta}$ existe um único θ tal que (3.15) vale. Assim, T leva gráfico em gráfico.

Substituindo θ na primeira equação de (3.3), obtemos:

$$\tilde{h}(\bar{\theta}) = \bar{x} = F(h(\theta(\bar{\theta})), \bar{\theta}) \quad \text{ou} \quad \tilde{h} = Th.$$

Vamos mostrar agora que $\tilde{h}$ satisfaz a condição de Lipschitz. Para isto é suficiente mostrar que

$$\frac{\|\Delta \bar{x}\|}{\|\Delta \bar{\theta}\|} \leq \mathfrak{L}.$$

Tome

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x + s\Delta x, \bar{\theta}) ds, \\ G_x &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x + s\Delta x, \bar{\theta}) ds, \\ F_{\bar{\theta}} &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}}(x, \bar{\theta} + s\Delta \bar{\theta}) ds \text{ e} \\ G_{\bar{\theta}} &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}(x, \bar{\theta} + s\Delta \bar{\theta}) ds. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x} &= F(x + \Delta x, \bar{\theta} + \Delta \bar{\theta}) - F(x, \bar{\theta}) \\ &= F(x + \Delta x, \bar{\theta} + \Delta \bar{\theta}) - F(x + \Delta x, \bar{\theta}) + F(x + \Delta x, \bar{\theta}) - F(x, \bar{\theta}) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}}(x, \bar{\theta} + s\Delta \bar{\theta}) ds \right) \Delta \bar{\theta} + \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x + s\Delta x, \bar{\theta}) ds \right) \Delta x \\ &= F_x \Delta x + F_{\bar{\theta}} \Delta \bar{\theta}. \end{aligned}$$

Analogamente podemos provar que

$$\Delta \theta = G_x \Delta x + G_{\bar{\theta}} \Delta \bar{\theta}.$$

Dai

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x} &= F_x \Delta x + F_{\bar{\theta}} \Delta \bar{\theta} \text{ e} \\ \Delta \theta &= G_x \Delta x + G_{\bar{\theta}} \Delta \bar{\theta}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Logo

$$\|\Delta\theta\| \leq \|G_x\| \|\Delta x\| + \|G_{\bar{\theta}}\| \|\Delta\bar{\theta}\| \leq \|G_x\| \mathfrak{L} \|\Delta\theta\| + \|G_{\bar{\theta}}\| \|\Delta\bar{\theta}\|,$$

implicando

$$\|\Delta\theta\| (1 - \mathfrak{L} \|G_x\|) \leq \|G_{\bar{\theta}}\| \|\Delta\bar{\theta}\|.$$

Portanto,

$$\|\Delta\theta\| \leq \frac{\|G_{\bar{\theta}}\| \|\Delta\bar{\theta}\|}{1 - \mathfrak{L} \|G_x\|}.$$

Da primeira equação de (3.16) temos

$$\begin{aligned} \|\Delta\bar{x}\| &\leq \|F_x\| \|\Delta x\| + \|F_{\bar{\theta}}\| \|\Delta\bar{\theta}\| \\ &\leq \|F_x\| \mathfrak{L} \|\Delta\theta\| + \|F_{\bar{\theta}}\| \|\Delta\bar{\theta}\| \\ &\leq \mathfrak{L} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{L}} \|F_{\bar{\theta}}\| + \frac{\|F_x\| \|G_{\bar{\theta}}\|}{1 - \mathfrak{L} \|G_x\|} \right\} \|\Delta\bar{\theta}\|. \end{aligned}$$

Dai,

$$\frac{\|\Delta\bar{x}\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \leq \mathfrak{L} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{L}} \|F_{\bar{\theta}}\| + \frac{\|F_x\| \|G_{\bar{\theta}}\|}{1 - \mathfrak{L} \|G_x\|} \right\}.$$

Finalmente pela segunda equação de (3.13) temos

$$\frac{\|\Delta\bar{x}\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \leq \sup \frac{\|\Delta\bar{x}\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \leq \mathfrak{L}.$$

■

Utilizando o lema acima, podemos induzir de T um operador

$$\mathcal{T} : H(\mathfrak{L}) \rightarrow H(\mathfrak{L})$$

da seguinte forma: dado h pertencente a $H(\mathfrak{L})$, o lema anterior diz que T leva gráfico de h no gráfico de uma outra aplicação $\tilde{h}$ pertencente a $H(\mathfrak{L})$, defina então

$$\mathcal{T}(h) := \tilde{h}.$$

O próximo lema apresentado em [3] da uma condição suficiente sobre um operador T para que $(I - T)$ seja inversível.

Lema 3.0.2. *Sejam $T : \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ um operador linear e $\mathbb{K}$ um compacto.*

Se $\|T\| < 1$, então

$$(I - T)^{-1} = \sum_{K=0}^{+\infty} T^K. \quad (3.17)$$

Demonstração.

De fato, sejam $S_n = \sum_{K=0}^n T^K$ e $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Esse limite existe, pois $\|T\| < 1$, logo

$$\|S_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|T\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Como

$$\begin{aligned} S_n &= I + T + T^2 + \cdots + T^n \text{ e} \\ -S_n T &= -T - T^2 - T^3 \cdots - T^{n+1}, \end{aligned}$$

então

$$S_n(I - T) = I - T^{n+1}.$$

Dai,

$$S_n = (I - T^{n+1})(I - T)^{-1}$$

Aplicando o limite, temos:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - T^{n+1})(I - T)^{-1}.$$

Vamos mostrar agora que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (I - T^{n+1}) = I,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (I - T^{n+1})(x) = x \text{ para todo } x \text{ em } \mathbb{K}.$$

Que é equivalente a mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{n+1}x = 0,$$

que por sua vez é suficiente mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^{n+1}x\| = 0.$$

Pelo fato de x estar num compacto e $\|T\| < 1$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^{n+1}x\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T\|^{n+1} \|x\| = 0.$$

Portanto,

$$(I - T)^{-1} = \sum_{K=0}^{+\infty} T^K$$

■

Teorema 3.0.1. *Se as Hipóteses (1), (2) e (3) valem, então para o difeomorfismo (3.1) existe um toro invariante em $\mathbb{K}$ que contém o ω -limite de todas semi-trajetórias positivas de $\mathbb{K}$. O toro é definido pelo gráfico $x = h^*(\theta)$ com h de classe $\mathcal{C}^1$ e de período 2π .*

Demonstração.

Pela afirmação posterior ao Lema 3.0.1, temos definido o operador $\mathcal{T} : H(\mathfrak{L}) \rightarrow H(\mathfrak{L})$. Suponhamos que $\mathcal{T}$ é uma contração. Nesse caso, como $H(\mathfrak{L})$ é um subconjunto fechado de um espaço de Banach, teremos que existe um único ponto fixo h^* para o operador $\mathcal{T}$ sobre $H(\mathfrak{L})$.

Assim, $\mathcal{T}(h^*) = h^*$, logo, a imagem da variedade $\{x = h^*(\theta)\}$ pela aplicação T é a mesma variedade, isto é, esta variedade é a variedade invariante.

Provaremos agora que $\mathcal{T}$ é uma contração; de fato, seja h_1 e h_2 dois elementos de $H(\mathfrak{L})$ e $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ suas respectivas imagens pela aplicação $\mathcal{T}$.

Fixe qualquer $\bar{\theta}$ e tome os pontos $(\bar{x}_1, \bar{\theta})$ e $(\bar{x}_2, \bar{\theta})$ em que a superfície $\{(x, \theta) \in \mathbb{K} \mid \theta = \bar{\theta}\}$ intercepta as variedades $\{\bar{x} = \tilde{h}_1(\bar{\theta})\}$ e $\{\bar{x} = \tilde{h}_2(\bar{\theta})\}$ respectivamente.

Uma vez que as variedades acima são definidas pelas imagens das variedades $\{x = h_1(\theta)\}$ e $\{x = h_2(\theta)\}$ pela aplicação T , existem pontos $\{x_1 = h_1(\theta_1)\}$ e

$\{x_2 = h_2(\theta_2)\}$ tal que $T(x_1, \theta_1) = (\bar{x}_1, \bar{\theta})$ e $T(x_2, \theta_2) = (\bar{x}_2, \bar{\theta})$. Por (3.3)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 &= F(h_1(\theta_1), \bar{\theta}) \\ \theta_1 &= G(h_1(\theta_1), \bar{\theta}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 &= F(h_2(\theta_2), \bar{\theta}) \\ \theta_2 &= G(h_2(\theta_2), \bar{\theta}), \end{cases}$$

que pela desigualdade do valor médio temos;

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\| &\leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \|h_1(\theta_1) - h_2(\theta_2)\| \text{ e} \\ \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0 \|h_1(\theta_1) - h_2(\theta_2)\|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando a condição de Lipschitz (3.14) temos

$$\|h_1(\theta_1) - h_2(\theta_2)\| \leq \|h_1(\theta_1) - h_1(\theta_2)\| + \|h_1(\theta_2) - h_2(\theta_2)\| \leq \mathfrak{L} \|\theta_1 - \theta_2\| + \text{dis}(h_1, h_2)$$

Assim, pelas inequações (3.18); podemos escrever as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\| &\leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 (\mathfrak{L} \|\theta_1 - \theta_2\| + \text{dis}(h_1, h_2)) \text{ e} \\ \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0 (\mathfrak{L} \|\theta_1 - \theta_2\| + \text{dis}(h_1, h_2)). \end{aligned}$$

Podemos reescrever a primeira equação da expressão acima da seguinte forma:

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \left(1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \mathfrak{L} \right)^{-1} \cdot \text{dis}(h_1, h_2),$$

dai,

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0 \left(\mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \left(1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \mathfrak{L} \right)^{-1} \cdot \text{dis}(h_1, h_2) + \text{dis}(h_1, h_2) \right).$$

Logo, temos que vale o seguinte resultado:

$$\|\bar{h}_1(\bar{\theta}) - \bar{h}_2(\bar{\theta})\| \equiv \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq \left(\frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \mathfrak{L}} \right) \text{dis}(h_1, h_2).$$

Uma vez que $\bar{\theta}$ é arbitrário, pela inequação acima temos,

$$\text{dis}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \leq \left(\frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \mathfrak{L}} \right) \text{dis}(h_1, h_2),$$

então pela última equação de (3.13) a aplicação $\mathcal{T}$ é uma contração.

Provaremos agora a diferenciabilidade da variedade invariante. Da invariância da variedade $\{x = h^*(\theta)\}$, segue de (3.3) que para todo $\bar{\theta}$

$$h^*(\bar{\theta}) = F(h^*(\theta), \bar{\theta}), \quad (3.19)$$

onde θ é definido pela equação

$$\theta = G(h^*(\theta), \bar{\theta}). \quad (3.20)$$

Nesse momento faremos um cálculo formal. Admitindo que $\frac{\partial h^*}{\partial \theta}$ existe veremos que $\frac{\partial h^*}{\partial \theta}$ deverá satisfazer uma expressão e que essa expressão define uma contração a qual possui como ponto fixo $\frac{\partial h^*}{\partial \theta}$, em outras palavras provaremos a existência de $\frac{\partial h^*}{\partial \theta}$.

Caso exista, denote

$$\eta^*(\theta) = \frac{\partial h^*}{\partial \theta}.$$

Assim,

$$\eta^*(\bar{\theta}) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial F}{\partial \theta},$$

como

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}},$$

então

$$\left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right) \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}.$$

Logo podemos escrever,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} = \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}.$$

Dai,

$$\eta^*(\bar{\theta}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial F}{\partial x} \eta^*(\theta) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \quad (3.21)$$

onde todas as derivadas do lado direito são calculadas em $(x = h^*(\theta), \bar{\theta})$ e θ é definido por (3.20) como funções de $\bar{\theta}$.

Considere $H'(\mathfrak{L})$ o espaço das funções contínuas e limitadas $x = \eta(\theta)$, com $\|\eta\|_0 \leq \mathfrak{L}$. $H'(\mathfrak{L})$ é um subconjunto fechado do espaço de Banach das funções contínuas com a norma

$$\|\eta_1 - \eta_2\| = \text{dis}(\eta_1 - \eta_2) = \sup_{\theta} \{\|\eta_1(\theta) - \eta_2(\theta)\|\}. \quad (3.22)$$

Agora, considere a aplicação $\eta \rightarrow \tilde{\eta}$ definida sobre $H'(\mathfrak{L})$, onde

$$\tilde{\eta}(\bar{\theta}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial F}{\partial x} \eta(\theta) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta(\theta) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}}. \quad (3.23)$$

Provando que (3.23) é uma contração, teremos que existe uma única solução η^* de (3.21).

Vamos provar agora que a aplicação $\eta \rightarrow \tilde{\eta}$ está bem definida, ou seja, $\tilde{\eta}$ é limitada por $\mathfrak{L}$ com a norma provida de (3.22).

De fato,

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \eta \right\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \mathfrak{L} < 1$$

Assim, pelo Lema 3.0.2 podemos escrever

$$\left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \eta \right)^k.$$

Logo,

$$\left\| \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta \right)^{-1} \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \eta \right\|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right)^k = \frac{1}{1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0}. \quad (3.24)$$

Usando estas estimativas e por (3.23), temos:

$$\|\tilde{\eta}\| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|_0 + \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|}{1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0}.$$

Pela segunda equação de (3.13) temos:

$$\|\tilde{\eta}\| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|_0 + \frac{\mathfrak{L} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{L}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|_0 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 + \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|_0 \right)}{1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} = \mathfrak{L},$$

o que implica em

$$\|\tilde{\eta}\| \leq \mathfrak{L},$$

ou seja, $\tilde{\eta} \in H'(\mathfrak{L})$.

Provaremos agora a contração.

Afirmção:

$$\left(I - \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} \eta_2 - \eta_1 \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right)^{-1} = \left(I - \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} (\eta_2 - \eta_1) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right)^{-1}$$

De fato, se multiplicarmos o a equação acima por $\left(I - \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \right)$ pela esquerda e por $\left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right)$ pela direita temos que a afirmação vale se, e somente se,

$$\eta_2 \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right) - \left(I - \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \right) \eta_1 = \eta_2 - \eta_1,$$

ou seja,

$$\eta_2 - \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 - \eta_1 + \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 = \eta_2 - \eta_1,$$

que é verdadeiro.

De (3.24) temos

$$\eta \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta \right)^{-1} = \eta + \eta \frac{\partial G}{\partial x} \eta + \dots = \left(I - \eta \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1}.$$

Assim escrevemos,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_2(\bar{\theta}) - \bar{\eta}_1(\bar{\theta}) &= \frac{\partial F}{\partial x} \eta_2 \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_2 \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial x} \eta_1 \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \left[\eta_2 \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_2 \right)^{-1} - \eta_1 \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right)^{-1} \right] \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \left[\left(I - \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} \eta_2 - \eta_1 \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right)^{-1} \right] \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \left[\left(I - \eta_2 \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} (\eta_2 - \eta_1) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta_1 \right)^{-1} \right] \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Assim

$$dis(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1) \leq \frac{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\| \right\}}{\left(1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right)^2} dis(\eta_2, \eta_1).$$

Pela terceira equação de (3.13) temos que a aplicação (3.23) é uma contração.

Provaremos agora que h é de fato diferenciável. Seja

$$z(\theta) = \limsup_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\|h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta(\theta)\|}{\|\Delta\theta\|}. \quad (3.25)$$

Vamos provar que $z(\theta)$ é identicamente nula. Primeiro, observe que a seguinte expressão é verdadeira

$$h^*(\bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}) - h^*(\bar{\theta}) = \frac{\partial F}{\partial x} (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta)) + \frac{\partial F}{\partial \theta} \Delta\bar{\theta} + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta). \quad (3.26)$$

onde $\Delta\theta$ satisfaz,

$$\Delta\theta = \frac{\partial G}{\partial x} (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta)) + \frac{\partial G}{\partial \theta} \Delta\bar{\theta} + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta). \quad (3.27)$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, \theta + \Delta\theta) &= F(x, \theta) + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial \theta} \Delta\theta + o(\Delta x) + o(\Delta\theta), \\ G(x + \Delta x, \theta + \Delta\theta) &= G(x, \theta) + \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial \theta} \Delta\theta + o(\Delta x) + o(\Delta\theta) \text{ e} \\ \Delta x &= h(\theta + \Delta\theta) - h(\theta). \end{aligned}$$

De (3.19) e pela expressão acima temos

$$\begin{aligned} h^*(\bar{\theta} + \Delta\theta) - h^*(\theta) &= F(h^*(\theta + \Delta\theta), \bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}) - F(h^*(\theta), \bar{\theta}) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta)) + \frac{\partial F}{\partial \theta} \Delta\bar{\theta} + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta) \text{ e} \\ \Delta\theta &= G(h^*(\theta), \Delta\bar{\theta}) - G(h^*(\theta), \bar{\theta}) \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} [h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta)] + \frac{\partial G}{\partial \theta} \Delta\bar{\theta} + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta). \end{aligned}$$

De (3.27) temos a expressão

$$\Delta\theta = \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial x} (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta)) - \eta^*(\theta) \Delta\theta + \frac{\partial G}{\partial \theta} \Delta\bar{\theta} \right] + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta).$$

Como h^* satisfaz a condição de Lipschitz por (3.27) temos valendo a seguinte sentença,

$$\|\Delta\theta\| \leq \frac{\left(\left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\| + \left\| \frac{o(\Delta\bar{\theta})}{\Delta\bar{\theta}} \right\| \right) \|\Delta\bar{\theta}\|}{\left\| \left(I - \mathfrak{L} \frac{\partial G}{\partial x} \right) \right\| - \left\| \frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \right\|},$$

que por sua vez implica em

$$\limsup_{\Delta\bar{\theta} \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\theta\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \leq \frac{\left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|}{1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0}. \quad (3.28)$$

Observe que de (3.26) e (3.21) podemos escrever

$$\begin{aligned} h^*(\bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}) - h^*(\bar{\theta}) - \eta^*(\bar{\theta})\Delta\bar{\theta} &= \frac{\partial F}{\partial x} \left(I + \eta^*(\theta) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x} \right) \\ &\quad \cdot (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta) + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como

$$\begin{aligned} I + \eta^*(\theta) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x} \\ &= I + \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} + \eta^*(\theta) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x} - \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \\ &= I - \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right) - \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \\ &= \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

escrevemos

$$\begin{aligned} h^*(\bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}) - h^*(\bar{\theta}) - \eta^*(\bar{\theta})\Delta\bar{\theta} &= \frac{\partial F}{\partial x} \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta) + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Agora por (3.25), (3.28) e pelo resultado acima, segue que:

$$\begin{aligned} z(\bar{\theta}) &= \limsup_{\Delta\bar{\theta} \rightarrow 0} \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta) + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta) \right\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \\ &\leq \limsup_{\Delta\bar{\theta} \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|}{1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} \right) \frac{\|\Delta\theta\| \| (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta) \|}{\|\Delta\bar{\theta}\| \|\Delta\theta\|} \right] \\ &\leq \frac{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\| \right\}}{\left(1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right)^2} z(\theta) \end{aligned}$$

Portanto,

$$z(\bar{\theta}) \leq \frac{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\| \right\}}{\left(1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right)^2} z(\theta) = K z(\theta), \quad (3.31)$$

onde K é uma constante estritamente menor que 1.

Denote por $\theta^{-\bar{n}}$ a imagem de θ pela aplicação T^{-1} , n interações, ou seja, $T^{-n}(\theta) = \theta^{-\bar{n}}$. Observe que

$$z(\theta) \geq \frac{1}{K^n} z(\theta^{-\bar{n}}),$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(\theta) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{K^n} z(\theta^{-\bar{n}}) = \infty.$$

Pelo fato de $z(\theta)$ ser uniformemente limitada segue que z é uma aplicação identicamente nula. ■

O fato de θ ser um ângulo não é essencial para os resultados que acabamos de adquirir, assim podemos trocar a variável θ por uma variável y e com isso segue o seguinte teorema.

Teorema 3.0.2. *Sejam X e Y subespaços fechados e convexos de um espaço de Banach. Seja $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$ definida da seguinte forma:*

$$T(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= F(x, \bar{y}) \text{ e} \\ y &= G(x, \bar{y}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Se F e G são funções diferenciáveis e as duas seguintes condições são satisfeitas,

$$\sqrt{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\| \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} < 1 \text{ e} \quad (3.33)$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0 + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} < 1, \quad (3.34)$$

então a aplicação T tem uma variedade M^* invariante de classe $\mathcal{C}^1$ que contém os pontos ω – limite e todas órbitas futuras de T .

Vamos procurar agora resultados de forma que a variedade M^* seja de classe $\mathcal{C}^q$, para $q \leq r$.

Com a troca de θ por y , reescrevemos (3.20) e (3.23) da seguinte forma:

$$y = G(h^*(y), \bar{y}) \quad (3.35)$$

$$\bar{\eta}(\bar{y}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial F}{\partial x} \eta(y) \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta(y) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \quad (3.36)$$

onde $x = h^*(y)$ é a equação de M^* .

Assim, das equações acima escrevemos

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \mathfrak{F}(\eta, \bar{y}) \\ ey &= \mathfrak{G}(\bar{y}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Agora definimos $T(\eta, y) = (\bar{\eta}, \bar{y})$, onde as equações de (3.37) são satisfeitas. Observe que

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \eta} \equiv 0.$$

Se

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\| \right\} < 1 \quad (3.38)$$

e

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \right\} < 1, \quad (3.39)$$

podemos aplicar o Teorema 3.0.2, e assim temos que existe uma variedade invariante $\eta = S^*(y)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Agora vamos verificar em quais condições em termos das aplicações F e G as identidades (3.38) e (3.39) valem.

Pela equação (3.25)

$$dist(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \leq K dist(\eta_1, \eta_2), \quad (3.40)$$

lembrando que K é estritamente menor que 1. Tome $f(\eta) = \mathfrak{F}(\eta, \bar{y}) = \bar{\eta}$.

Como $\mathfrak{F}$ é diferenciável, chamando

$$D = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta}(\eta_2) = df_{\eta_2},$$

temos

$$Dh = \frac{\partial f}{\partial h}(\eta_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\eta_2 + th) - f(\eta_2)}{t}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|Dh\| &= \text{dist}(Dh, 0) = \text{dist}\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\eta_2 + th) - f(\eta_2)}{t}, 0\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \text{dist}\left(\frac{f(\eta_2 + th) - f(\eta_2)}{t}, 0\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} \cdot \text{dist}(f(\eta_2 + th), f(\eta_2)) \leq K\|h\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D\| = \sup \frac{\|Dh\|}{\|h\|} \leq K.$$

Então,

$$\left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|}{\left(1 - \mathfrak{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right)^2}.$$

Substituindo $\mathfrak{L}$ pelo seu valor de definição, temos:

$$\left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|}{\left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0} \right)^2}. \quad (3.41)$$

Agora, derivando (3.35) em relação a $\bar{y}$ temos

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial G}{\partial \bar{y}};$$

dai

$$\left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{y}},$$

implicando

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \left(I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta(y) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{y}}.$$

Como

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial y}{\partial \bar{y}},$$

temos

$$\left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|}{\left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0} \right)}. \quad (3.42)$$

Assim,

$$\left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^2}{\left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0} \right)^2}.$$

Resultando

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\| \right\} \leq \frac{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^2 \right\}}{\left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0} \right)^3}. \quad (3.43)$$

Assim, para que

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\| \right\} < 1,$$

basta que o lado direito de (3.43) seja menor que 1, ou equivalentemente,

$$\sqrt[3]{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^2 \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} < 1. \quad (3.44)$$

Provaremos agora que $S^*(y) = \eta^*(y)$.

Pelo Teorema 3.0.2 temos que $\eta = S^*(y)$ é uma variedade invariante para T , e com isso segue que $T(S^*(y), y) = (S^*(y), \bar{y})$ (relembrando que agora T é

dada por $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$); por (3.37)

$$\begin{cases} S^*(\bar{y}) = \mathfrak{F}(S^*(y), \bar{y}) \\ y = \mathfrak{G}(\bar{y}). \end{cases}$$

Assim, S^* é ponto fixo de (3.36), pela unicidade do ponto fixo, segue que $S^*(y) = \eta^*(y)$; logo $\eta^*(y)$ é de classe $\mathcal{C}^1$ implicando que h^* é de classe $\mathcal{C}^2$.

Portanto, se (3.44) é satisfeito, então h^* é de classe $\mathcal{C}^2$.

Teorema 3.0.3 (Lema Fundamental). *Seja as funções F e G do Teorema 3.0.2 de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$) e que elas também satisfazem a condição*

$${}^{q+1}\sqrt{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^q \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0}$$

para algum inteiro $q \leq r$. Neste caso a variedade M^* é de classe $\mathcal{C}^q$.

Demonstração.

Suponhamos que o teorema vale para todo inteiro q tal que $1 \leq q \leq k$, e provaremos que o teorema vale para $q = k + 1$.

De fato, por (3.37) temos

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \mathfrak{F}(\eta, \bar{y}) \text{ e} \\ y &= \mathfrak{G}(\bar{y}), \end{aligned} \tag{3.45}$$

lembrando que

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \eta} \equiv 0.$$

Aplicando o teorema para $q = k$ temos que se $\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\|^k \right\} < 1$, então existe uma variedade $\eta = \eta^*$ invariante de classe $\mathcal{C}^k$, que por sua vez implica em $x = h^*$ ser de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Temos por hipótese para $q = k + 1$ que

$${}^{k+2}\sqrt{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^{k+1} \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} < 1,$$

dai

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^{k+1} \right\} < \left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} \right)^{k+2}.$$

Então,

$$\frac{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^{k+1} \right\}}{\left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} \right)^{k+2}} < 1.$$

Por outro lado, por (3.41) e (3.42)

$$\left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\|^k \leq \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^{k+1}}{\left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} \right)^{k+2}}.$$

Assim,

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \bar{y}} \right\|^k \right\} \leq \frac{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\|^{k+1} \right\}}{\left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0} \right)^{k+2}} < 1.$$

Logo, a variedade é de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Portanto, a variedade é de classe $\mathcal{C}^q$ ($q \leq r$) ■

Capítulo 4

Variedade Central para Laços Homoclínicos

4.1 Teorema da Variedade Centro Estável

Teorema 4.1.1. *Se as condições (A), (B), (C) e (D) valem, então existe uma pequena vizinhança U da trajetória homoclínica Γ tal que para todo μ suficientemente pequeno o sistema X_μ possui uma variedade centro estável W^{sC} invariante de classe $\mathbf{C}^{\min(q,r)}$ tal que toda trajetória que não está em W^{sC} deixa U quando $t \rightarrow +\infty$. A variedade W^{sC} é tangente em O ao auto espaço estendido estável E^{sE} .*

Demonstração.

Sejam dois pontos (u^0, y^0, w^0) e $(\bar{u}^0, \bar{y}^0, \bar{w}^0)$ sobre a seção transversal S^{in} , (u^1, y^1, w^1) um ponto sobre a seção transversal S^{out} onde

$$(u^1, y^1, w^1) = T_{glo}^{-1}(u^0, y^0, w^0).$$

Assim, $T^{-1}(u^0, y^0, w^0) = (\bar{u}^0, \bar{y}^0, \bar{w}^0)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} T_{glo}^{-1}(u^0, y^0, w^0) &= (u^1, y^1, w^1) \text{ e} \\ T_{loc}^{-1}(u^1, y^1, w^1) &= (\bar{u}^0, \bar{y}^0, \bar{w}^0); \end{aligned} \tag{4.1}$$

que é equivalente a dizer que

$$\begin{aligned}\bar{w}^0 &= w_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^1, \mu), \\ u^1 &= u_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^1, \mu), \\ u^1 - u^-(\mu) &= d_{11}(u^0 - u^+) + d_{12}(y^0) + d_{13}(w^0) + u_{glo}(u^0, y^0, w^1, \mu) \text{ e} \\ w^1 - w^-(\mu) &= d_{21}(u^0 - u^+) + d_{22}(y^0) + d_{23}(w^0) + w_{glo}(u^0, y^0, w^1, \mu).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Agora, trocamos as funções u_{loc} e w_{loc} por

$$\begin{aligned}\hat{u}_{loc} &= u_{loc} \chi\left(\frac{(u^0 - u^+, y^0, w^1)}{\rho}\right) \text{ e} \\ \hat{w}_{loc} &= w_{loc} \chi\left(\frac{(u^0 - u^+, y^0, w^1)}{\rho}\right);\end{aligned}\tag{4.3}$$

onde, ρ é uma constante e $\chi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^r$ tal que:

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, \text{ se } \|s\| \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{ se } \|s\| \geq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial \chi}{\partial s} \right\|_k < M. \tag{4.4}$$

Temos que as estimativas do Lema 2.1.4 valem para as funções $\hat{u}_{loc}$ e $\hat{w}_{loc}$ a menos do produto por uma constante.

De fato, sejam $k = (k_1, k_2)$ e $I = \{v, \quad v \text{ é um vetor de dimensão } (n-1+m) \text{ com coordenadas inteiras não negativas com a soma das coordenadas menores ou iguais a } k\}$. Dai,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial^{|k|} \hat{u}_{loc}}{\partial (u^0, y^0, w^1, \mu)^k} \right\| &\leq \max_{v \in I} \left\{ \left\| \frac{\partial^{|v|} u_{loc}}{\partial (u^0, y^0, w^1, \mu)^v} \right\| \right\} \max_{v \in I} \left\{ \left\| \frac{\partial^{|v|} \chi}{\partial (u^0, y^0, w^1, \mu)^v} \right\| \right\} 2^{|k|} \\ &\leq C e^{|k_1|(\gamma+\epsilon)\tau} M 2^{|k|} = \hat{C} e^{|k_1|(\gamma+\epsilon)\tau}\end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que o mesmo vale para o caso $\hat{w}_{loc}$.

Assim, temos que as funções $\hat{u}_{loc}$ e $\hat{w}_{loc}$ satisfazem as estimativas do Lema 2.1.4, são identicamente nulas fora da vizinhança $\frac{\rho}{2}$ de $(u^+, 0, 0)$ e não perdem a diferenciabilidade.

Aplicamos um procedimento análogo para a aplicação T_{glo}^{-1} , onde modificamos u_{glo} e w_{glo} . Assim, fora da vizinhança $\frac{\rho}{2}$ de $(u^+, 0, 0)$ a aplicação T_{glo}^{-1} é linear e no restante do espaço fica muito proximo de uma aplicação linear.

Da terceira equação de (4.2) escrevemos

$$S(u^1, u^0, y^0, w^0, \mu) = -u^1 + u^-(\mu) + (d_{11}, d_{12})(u^0 - u^+, y^0) + d_{13}(w^0) + w_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu).$$

Assim,

$$\frac{\partial S}{\partial(u^0, y^0)} \Big|_{(u^-, u^+, y^+, w^+, 0)} = (d_{11}, d_{12})$$

que por (2.61) seu determinante é diferente de zero. Pelo Teorema da Função Implícita, temos:

$$(u^0, y^0) = f(u^1, w^0, \mu). \quad (4.5)$$

Todas as derivadas de f são uniformemente limitadas na vizinhança de $(u^-, w^+, 0)$.

Da quarta equação de (4.2) temos,

$$w^1 = w^-(\mu) + (d_{21}, d_{22})f(u^1, w^0, \mu) + d_{23}(w^0) + w_{glo}(f(u^1, w^0, \mu), w^0, \mu),$$

donde temos que

$$w^1 = g(u^1, w^0, \mu). \quad (4.6)$$

Vamos verificar também que todas as derivadas de g são uniformemente limitadas na vizinhança de $(u^-, w^+, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u^1} \Big|_{(u^-, w^+, 0)} &= (d_{21}, d_{22}) \frac{\partial f}{\partial u^1} \Big|_{(u^-, w^+, 0)}, \\ \frac{\partial g}{\partial w^0} \Big|_{(u^-, w^+, 0)} &= (d_{21}, d_{22}) \frac{\partial f}{\partial w^0} \Big|_{(u^-, w^+, 0)} + d_{23}. \end{aligned}$$

Pelo fato das derivadas de f serem limitadas, temos a limitação de g na vizinhança de $(u^-, w^+, 0)$.

Substituindo (4.6) na segunda equação de (4.2) obtemos

$$u^1 = u_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, g(u^1, w^0, \mu), \mu). \quad (4.7)$$

Fazemos agora a troca das funções u_{loc} por $\hat{u}_{loc}$, obtemos

$$u^1 = \hat{u}_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, g(u^1, w^0, \mu), \mu). \quad (4.8)$$

Observe que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} \right\| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1} \chi + u_{loc} \frac{\partial \chi}{\partial w^1} \right\| = 0,$$

pois $u_{loc}(u^0, 0, w^1, \mu) = 0$, $\frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1} = 0$ em $y^0 = 0$ e tanto χ como suas derivadas são limitadas.

Logo temos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} \right\| = 0. \quad (4.9)$$

Seja $P(u^1, (u^0, y^0), w^0, \mu) = u^1 - \hat{u}_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, g(u^1, w^0, \mu)\mu)$.

Como

$$\frac{\partial P}{\partial u^1} = \left(Id - \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial u^1} \right), \quad (4.10)$$

temos que para ρ suficientemente pequeno vale

$$\frac{\partial P}{\partial u^1} \neq 0, \quad (4.11)$$

logo

$$u^1 = \tilde{u}_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^0, \mu). \quad (4.12)$$

Lembrando que $w^1 = g(u^1, w^0, \mu)$ e substituindo a expressão acima dentro de (4.5) e da primeira equação de (4.2) temos,

$$\begin{aligned} \bar{w}^0 &= w_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, g(u^1, w^0, \mu), \mu) = w_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, g(\tilde{u}_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^0, \mu), w^0, \mu), \mu) \text{ e} \\ (u^0, y^0) &= f(u^1, w^0, \mu) = f(\tilde{u}_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^0, \mu), w^0, \mu). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Onde podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{w}^0 &= F(w^0, (\bar{u}^0, \bar{y}^0)) \text{ e} \\ (u^0, y^0) &= G(w^0, (\bar{u}^0, \bar{y}^0)). \end{aligned}$$

Observe que excluímos o parâmetro μ das expressões para simplificar a notação. Vamos verificar agora que as funções F e G satisfazem as hipóteses do Teorema 3.0.3.

Observe que,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right] &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{-\frac{\partial P}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)}}{\frac{\partial P}{\partial u^1}} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} + \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)}}{Id - \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial u^1}} \right] \text{ e} \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial w^0} \right] &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{-\frac{\partial P}{\partial w^0}}{\frac{\partial P}{\partial u^1}} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial w^0}}{Id - \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial u^1}} \right]. \end{aligned}$$

Como todas as derivadas de g são uniformemente limitadas e por (4.9) $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial w^1} = 0$ temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{u}_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \text{ e} \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial w^0} &= 0. \end{aligned}$$

Lembrando que de (2.58) $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial w_{loc}}{\partial w^1} = 0$, usando os resultados acima, pelo fato de todas as derivadas de g e de f serem uniformemente limitadas e usando as estimativas do Lema 2.1.4 para as funções modificadas, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial F}{\partial w^0} \right\| &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial w^0} \right\| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial w^0} \right\| \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial w^1} \left[\frac{\partial g}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial w^0} + \frac{\partial g}{\partial w^0} \right] \right\| = 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial G}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right\| &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial f}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right\| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial f}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right\| \leq M, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial F}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right\| &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \left[\frac{\partial w_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} + \frac{\partial w_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right] \right\| \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \left[\frac{\partial w_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} + \frac{\partial w_{loc}}{\partial w^1} \frac{\partial g}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right] \right\| = 0 \text{ e} \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial G}{\partial w^0} \right\| &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \left[\frac{\partial f}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{u}_{loc}}{\partial w^0} + \frac{\partial f}{\partial w^0} \right] \right\| \leq M. \end{aligned}$$

Assim, para ρ suficientemente pequeno,

$${}^{q+1}\sqrt{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial w^0} \right\| \left\| \frac{\partial G}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right\|^q \right\}} + \sqrt{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial(\bar{u}^0, \bar{y}^0)} \right\|_0 \left\| \frac{\partial G}{\partial w^0} \right\|_0 \right\}} < 1,$$

onde $(w^0, (\bar{u}^0, \bar{y}^0)) \in B((u^+, y^+, w^+), \rho)$.

Logo, pelo Teorema 3.0.3, existe uma variedade $w^0 = \phi^*(u^0, y^0, \mu)$ que é invariante com respeito a aplicação T^{-1} modificada. Como aplicação modificada coincide com a aplicação original T^{-1} na vizinhança de $(u^+, 0, 0)$, desta segue que a intersecção da variedade ϕ^* com o domínio da aplicação original e com a bola de centro $(u^+, 0, 0)$ e raio ρ é uma variedade diferenciável da aplicação original, que será denominada de *pequena variedade invariante*.

Pelo Teorema 3.0.3 as interações futuras da aplicação T^{-1} em qualquer ponto na bola de centro $(u^+, 0, 0)$ e raio $\frac{\rho}{2}$ converge exponencialmente para a variedade ϕ^* . Isto implica que qualquer ponto cuja interações passadas da aplicação T^{-1} estão numa distância $\frac{\rho}{2}$ do ponto $(u^+, 0, 0)$, obrigatoriamente ele está na pequena variedade.

Em termos da aplicação de Poincaré original T , isto significa que todo ponto, cuja interações futuras estão na vizinhança do ponto $(u^+, 0, 0)$ obrigatoriamente pertencem a pequena variedade invariante.

O conjunto das trajetórias que inicia nos pontos dessa variedade sobre a seção transversal, é uma variedade invariante para o sistema de equações diferenciais considerado, (escolha um pedaço da trajetória em que os pontos permaneçam na vizinhança U do laço homoclínico), por construção esta variedade contém todas as trajetórias que permanecem em U para todo tempo positivo. Em particular, ela contém $W_{loc}^s \cap U$. O ponto O obrigatoriamente, também está incluído na variedade invariante resultante. Note que a diferenciabilidade da variedade invariante acima segue da diferenciabilidade provada da intersecção com a seção transversal S^{in} , exceto no estado de equilíbrio O .

A diferenciabilidade de O é verificada separadamente, mas a demonstração será omitida em nosso trabalho.

Apenas note que a variedade invariante resultante coincide localmente com a variedade estável estendida $W_{loc}^{sE}(0)$ de que a diferenciabilidade de O segue.

■

4.2 Teorema da Variedade Centro Instável

Observamos aqui que devido a simetria do problema em relação a reversão do tempo, segue que existe uma correspondência entre esse teorema provado e o Teorema da variedade instável que pode ser formulado como segue.

Suponha que o sistema tenha um laço homoclínico Γ em $\mu = 0$. Seja modificadas as condições (A),(C) e (D) pelas condições (A'),(C') e (D') respectivamente, como segue:

(A') *Seja os autovalores do ponto O satisfazendo a seguinte condição.*

$$Re\lambda_n \leq \dots \leq Re\lambda_2 < \lambda_1 < 0 < Re\gamma_1 \leq \dots \leq Re\gamma_m,$$

com λ_1 real.

Como $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, temos que ele é diferenciado, com isso construímos a subvariedade instável $W^{ss} \subset W^s$ na qual não sofre influência de λ_1 e denominamos esta subvariedade como Subvariedade Estável Forte. Assim, escrevemos a seguinte condição.

(C') *Assuma que a trajetória homoclínica γ não mora em W^{ss} .*

Teorema Principal: *Com a condição A' valendo, temos que na vizinhança do estado de equilíbrio do tipo sela, existe uma variedade instável estendida W_{loc}^{uE} de classe $\mathcal{C}^p$ (p é o maior inteiro tal que $p|\lambda_1| < |Re\lambda_2|$) que contém W^u e é tangente ao espaço E^{uE} (espaço gerado pelos autovetores referentes aos autovalores $(\gamma_n, \dots, \gamma_1, \lambda_1)$) no ponto O . **Demonstração.***

Este teorema está demonstrado em [6] pag. 84. ■

Prolongamos a variedade W_{loc}^{uE} com as trajetórias futuras do laço Γ . Assim, temos a variedade instável estendida global W^{uE} .

De maneira análoga a construção da folheação fortemente instável $\mathcal{F}^u$, construímos a folheação fortemente estável $\mathcal{F}^s$ e com isso, escrevemos a seguinte condição.

(D') *Assuma que em cada ponto de Γ a variedade instável estendida W^{uE} é transversal as folhas da folheação fortemente estável $\mathcal{F}^s$.*

Como no caso anterior, nos podemos prolongar a variedade instável estendida invariante ao longo das trajetórias futuras.

Com isso temos valendo a seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Se as condições (A') , (B) , (C') e (D') valem, então existe uma vizinhança U da trajetória homoclínica Γ tal que, para μ suficientemente pequeno, o sistema tem uma variedade centro instável invariante de dimensão $(m + 1)$ de classe $C^{\min\{p,r\}}$ denotada por W^{uC} . Tal que toda trajetória fora de W^{uC} deixa U com $t \rightarrow -\infty$, (Aqui, p é o maior inteiro tal que $p|\lambda_1| < |Re\lambda_2|$). A variedade W^{uC} é tangente ao auto espaço E^{uE} que corresponde aos autovalores $(\gamma_m, \dots, \gamma_1, \lambda_1)$.*

Demonstração.

A demonstração deste Teorema é análoga a do Teorema da Variedade Centro Estável. ■

4.3 Teorema da Variedade Central

Com os Teoremas 4.1.1 e 4.2.1 valendo temos o seguinte Teorema.

Teorema 4.3.1. *Sobre as hipóteses A, B, C, D, A', B' e D' temos que existe uma variedade central bidimensional, invariante de classe $C^{\min\{p,q,r\}}$ denotada por W^C . Ela contém todas trajetórias que permanecem totalmente na vizinhança U para todo o tempo. A variedade W^C é tangente em O ao auto espaço E^L correspondente aos autovalores $(\gamma_1$ e $\lambda_1)$ onde $(\gamma_1$ e $\lambda_1)$ são os autovalores reais puros.*

Demonstração.

Basta tomar $W^C = W^{uC} \cap W^{sC}$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] GUILLEMIN , Victor e POLLACK, Alan *Differential topology*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [2] HIRSCH, Morris W., SMALE, Stephen e DEVANEY, Robert L., *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Second edition. Pure and Applied Mathematics , Academic Press, Amsterdam, 2004
- [3] HÖNIG, Chaim S., *Aplicações da topologia à Análise*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [4] PERKO, Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] ROBINSON, R. Clark, *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
- [6] SHILNIKOV, Leodini P., SHILNIKOV, Andrey L., TURAEV, Dimitry V. e CHUA, Leon O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, Part I, Universty of California, Berkeley, 1998.
- [7] SMALE, Stephen e HIRSCH, Morris W. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60, Academic Press, New York-London, 1974.
- [8] SOTOMAYOR, Jorge, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979