

Transcrição da seção “As noções de grandeza e de medida” do primeiro manuscrito do livro *As ideias fundamentais da matemática*, contida no dossiê AC.T.3.031 do Arquivo Amoroso Costa (digital), Museu de Astronomia e Ciências Afins

Fólios 142 a 148

Páginas 231 a 240 do documento digital

As noções de grandeza e de medida**1 – a noção de grandeza –**

Na sua origem, em grande parte do seu desenvolvimento histórico e nas suas aplicações, a Matemática é a ciência das grandezas.

Não falta quem ainda hoje a defina desse modo*. Que essa concepção tradicional seja [entretanto] incompatível com o conceito atual da matemática pura é o que prova este fato: na exposição que vamos fazendo das noções fundamentais desta ciência, não interveio até aqui a noção de grandeza. Vimos que historicamente a ideia de número modelou-se a princípio sobre as grandezas que se apresentam no campo da nossa experiência: grandezas discretas, representadas pelos números inteiros; grandezas divisíveis, que deram origem aos números fracionários; grandezas relativas, das quais procedem a criação dos números qualificados (positivos e negativos); grandezas contínuas, que deram origem aos números irracionais.

A palavra experiência não significa aliás aqui apenas a experiência externa, senão também [a intuição interna], a livre atividade criadora do espírito; nenhuma experiência física provará jamais a existência de uma grandeza incomensurável. "On parle quelquefois du *continu physique* comme du modèle (imparfait) d'après lequel l'esprit humain aurait créé le continu mathématique; mais il n'y a pas, il ne saurait y avoir de continu physique. Ce que l'on appelle ainsi, c'est (tout au plus) des suites compactes de points, analogues à l'ensemble des nombres rationnels. Or, en admettant même (ce qui est déjà excessif) qu'une suite compacte soit donnée dans l'intuition, rien n'oblige ni même n'autorise à compléter une telle suite par des points irrationnels, de manière à la rendre continue." (Couturat, Les pr. p. 90)

Seja qual for a origem da intuição da [grandezas] contínuas, é fora de

?????????????????????????????: grandeza é tudo que é suscetível de aumento ou de diminuição.

[ver nota pag. Seg.]

de Couturat, *De l'Infini math.* :

Il est évident que la définition traditionnelle et banale de la grandeur: "ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution", enferme un cercle vicieux, car elle implique l'idée de grandeur, et même la notion de l'inégalité des grandeurs, du *plus grand* et du *plus petit*. De plus, elle considère la grandeur comme essentiellement variable, ce qui est une autre espèce de cercle vicieux: car toute variation suppose des points de repère fixes, et exige des données invariables, non seulement pour être constatée et perçue, mais même pour être conçue "On voit que la notion d'égalité est impliquée, aussi bien que celle d'inégalité, dans celle de variation. On ne peut donc, sans pétition de principe, concevoir et définir la grandeur comme une chose susceptible de varier. Au contraire, la grandeur est essentiellement et tout d'abord quelque chose de fixe et d'immuable, et ce n'est qu'après avoir posé diverses grandeurs fixes qu'on peut les considérer comme les *états* (nécessairement successifs, en vertu du principe de contradiction) d'une seule et même grandeur variable." p. 367.

De du Bois-Reymond, *Th. gen. des fonct.* p. 31:

Par grandeur ou quantité mathématique (quantum, quantitas, Grösse) on entend une qualité commune à des objets de différentes espèces, par rapport à laquelle ils sont comparables numériquement, comme leur longueur ou leur poids.

Nota nossa:

A primeira das citações acima é do livro *De l'Infini mathématique*, de Louis Couturat.

A segunda obra citada é *Théorie générale des fonctions*, tradução por G. Millaud e A. Girot, do original alemão *Die allgemeine Functionentheorie*, de Paul du Bois-Reymond. Trata-se de uma das referências arroladas por A. Costa no início do dossiê:

✓ 57 - Paul du Bois-Reymond - Die allgemeine Functionentheorie (1, Tübingen (1882). Trad.: Th. gen. des fonct. Nice (1887). } trad. de G. Millaud e A. Girot

dúvida que o número irracional foi inventado para [tornar possível a sua] representação. As generalizações superiores de número, porém, nem [sempre] nasceram da consideração das grandezas a que se aplicam, e pelo contrário precederam [muitas vezes] as interpretações em termos de grandeza: a criação acaba por exceder o domínio da aplicação.

Em suma, o número é a imagem da grandeza. O número fracionário é o símbolo da classe das grandezas divisíveis; sobre esse símbolo o espírito reconstrói a infinita cadeia das relações entre grandezas divisíveis.

Mas se historicamente [e psicologicamente] o número se modelou sobre a grandeza, logicamente a noção de número pode [e deve] preceder a de grandeza.

O número é a forma, a grandeza é a matéria. De posse da noção de número, que se pode indefinidamente generalizar, a matemática pura prescinde inteiramente da noção de grandeza;

estas são dados empíricos ou intuitivos e somente graças a um postulado se poderá afirmar que são isomórficos uma dada espécie de grandezas e uma dada classe de números.

Conquanto não seja assunto deste capítulo o objeto da matemática, convém observar aqui que esse objeto não é a grandeza: as noções de ordem e de correspondência, por exemplo, nada têm a ver com as noções de grandeza e de medida, e no entanto são a alma do conceito atual de ciência matemática. E mesmo em certos ramos da geometria (como a *analysis situs*), abstrae-se completamente dessas noções de grandeza e de medida.

Abstraindo das propriedades particulares que possam apresentar as grandezas concretas, devemos aqui considerar o fato de que

existem grandezas de espécies diferentes (é aliás o que significa a generalização do número) [Poder-se-ia distinguir entre a grandeza e a quantidade, e dizer, com mais rigor, que o se costuma chamar grandezas iguais, são quantidades iguais, isto é, que possuem a mesma grandeza.] Todas as espécies de grandezas se subsumem no conceito geral de grandeza; a grandeza é a classe das diferentes classes de grandezas. Pode-se dizer que duas grandezas são da mesma espécie quando possam ser comparadas uma a outra, de modo que se afirme que uma das duas é inferior a outra*.

Costuma-se distinguir entre as grandezas intensivas, em relação às quais se pode definir a desigualdade, mas não a adição, e as grandezas extensivas, em relação às quais se podem definir a desigualdade a adição. As grandezas extensivas são as grandezas propriamente matemáticas.

2 – as grandezas extensivas –

Pode-se construir uma teoria axiomática das grandezas extensivas. Citemos a este respeito os trabalhos de Burali-Forti

(Sulla Teoria generale delle Grandezze e dei Numeri, ap. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXIX (1904)) e de Huntington (a complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude, ap. Trans. of the Am. Math. Soc. (1902)). [Anteriormente: Helmholtz: Zählen und Messen e Stoltz – Arith. Gen.] +
Eis aqui um resumo da teoria de Burali-Forti [segundo Couturat.]

Uma espécie de grandezas é uma classe G na qual se define uma operação $+$ (que se chama adição de grandezas), e que verifica o sistema de axiomas que será formulado abaixo.

O elemento nulo da classe G [a grandeza nula], isto é o módulo da adição, será representado por 0 (zero) (por analogia com o número zero, mas

* A igualdade de duas grandezas (pelo menos do ponto de vista absolutista) é a sua identidade: duas grandezas iguais são uma única grandeza [Ver Couturat, Les. pr., p. 99]

+ **Nota nossa:** trata-se de uma tradução do título da obra de Stolz (*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*) que Couturat cita como *Arithmétique générale* em *L'infini*.

[assim a desigualdade é definida em termos da soma]

sem confusão). Duas outras explicações prévias são necessárias:

1) a desigualdade de grandezas G : de fato exprime-se o conjunto dos elementos inferiores a um elemento a , que se representa por θa (inferior a a): " a sendo um G , θa é o conjunto dos x da classe G tais que a é a soma de x e de um G não-nulo."

2) um conjunto limitado de G : é um conjunto u tal que existem

G não inferiores (isto é inferiores ou iguais a) a um u qualquer.

Eis aqui agora os oito axiomas de Burali-Forti:

Sejam x, y, z grandezas G . Então:

- I. Se $x + z = y + z$, tem-se $x = y$.
- II. Existe (pelo menos) um G nulo. [demonstra-se pelo axioma I que a grandeza nula é única]
- III. Existe (pelo menos) um G não-nulo.
- IV. A soma de dois G , dos quais um é não-nulo, é um G não-nulo.
- V. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (lei associativa da adição)
- VI. Ou bem $x = y$, ou bem $x < y$, ou bem $y < x$.
- VII. Se x não é nulo, existe um G menor que x e não-nulo.
- VIII. Se u é um conjunto limitado de G , existe uma grandeza x tal que $\theta x = \theta u$.

Os oito axiomas são independentes um do outro. O sétimo exprime a divisibilidade, o oitavo a continuidade das grandezas da classe G . Desses oito axiomas deduzem-se, entre outros, os seguintes teoremas:

1) a, b sendo G não-nulos, existe um número inteiro n tal que $na > b^*$. (A esta proposição, considerada como primitiva, chama-se também axioma de Arquimedes; ela desempenha um papel muito importante na medida de grandezas.)

2) Dada uma grandeza a e um número inteiro não-nulo n ,

* A multiplicação por n sendo definida como soma de n quantidades a .

existe uma grandeza x [única] tal que $nx = a$. (esta proposição exprime a divisibilidade indefinida das grandezas G).

Em suma, uma classe de grandezas G é uma classe em que se pode efetuar a operação $+$ e que verifica os oito axiomas acima. Como exemplo de classe G , citemos a dos números reais: é a classe tipo das grandezas contínuas, aquela que representa as propriedades formais dessas grandezas, e constitui o seu esquema-abstrato. E isso explica por que razão a matemática pura pode ignorar a consideração da grandeza e substituí-la pelo número; os dois conceitos são formalmente idênticos; o primeiro, porém, implica um dado empírico ou intuitivo, ao passo que o segundo é uma construção inteiramente abstrata. [observemos que outras classes de grandezas podem verificar parcialmente o sistema de axiomas de Burali-Forti; assim, por exemplo, todas as classes de grandezas do tipo do conjunto dos números racionais verificam esse sistema com exclusão do axioma VIII.]

3 – A noção de medida – do que se viu acima, resulta que o número representa a grandeza; ou mais precisamente que entre as grandezas de uma espécie dada e a classe dos números que lhe servem de tipo pode-se estabelecer uma correspondência perfeita e tal que a soma de duas grandezas quaisquer corresponde a soma de dois números correspondentes. Estabelecer uma correspondência é definir a medida das grandezas a que ela se refere. Observemos que uma correspondência pode ser estabelecida de uma infinidade de modos. [por exemplo, ^[no caso da corresp.] entre os comprimentos sobre uma reta e os números reais – axioma de Cantor-Dedekind, a qual já nos referimos.] A correspondência entre a soma das grandezas e a soma dos números

de Couturat, Les pr. p. 118

"Il n'y a donc aucune nécessité à ce qu'à la somme des grandeurs corresponde la somme des nombres: il n'y a là qu'une raison de commodité et de convenance.

Pour mieux comprendre cette raison, il convient de faire appel à une idée plus générale que celle de mesure, à la notion de proportionnalité. Étant donnés deux ensembles de grandeurs (de même espèce dans chaque ensemble, mais non pas nécessairement de l'un à l'autre ensemble), on dit que ces ensembles sont proportionnels, s'il y a entre eux une correspondance biunivoque telle, que le rapport de deux grandeurs quelconques de l'un soit égal au rapport des deux grandeurs correspondantes de l'autre...

Or, pour que deux ensembles de grandeurs soient proportionnels, il faut et il suffit qu'à la somme de deux grandeurs quelconques de l'un corresponde la somme des grandeurs correspondantes de l'autre." [Esta última proposição é um teorema conhecido.]

Nota nossa:

A citação acima é do livro *Les principes des mathématiques*, de Louis Couturat.

é apenas uma conveniência [ver nota ao texto].

Os axiomas de Burali-Forti definem assim o conceito de grandeza contínua mensurável. Quanto à medida de uma grandeza

individual [um estado de grandezas, ou uma quantidade] em relação a uma grandeza padrão da mesma espécie, será a relação* entre a primeira e a segunda; quando as duas grandezas forem iguais, a medida da primeira é o número 1 (isto é : $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \dots = \frac{n}{n}$).

A segunda grandeza, em relação à qual se exprime a medida, se chama grandeza-unidade ou unidade de medida ; sua escolha determina a medida de todas as outras grandezas da mesma espécie. [sobre a rel. entre a medida e o postulado de Arquimedes, ver adiante]

4 – Extensão da noção de medida – A noção de medida é suscetível de generalizações muito interessantes de modo a se aplicar a conjuntos [infinitos] descontínuos. A medida dos conjuntos descontínuos de pontos constitui assim uma extensão das noções geométricas de comprimento, área, etc. Sua extensão (como objeto primitivo foi de tornar possível generalizações (ver este capítulo) de integrais) se pode fazer de vários modos. Devem-se definições diferentes a Hankel (1882), Cantor (1884), Peano (1887), Jordan (1892). Vamos indicar aqui* como se Apresenta a noção de medida dos conjuntos no sentido de Borel, generalizada por Lebesgue [Leçons sur l'intégration, 1904], a qual foi a origem de numerosos aperfeiçoamentos da teoria das funções. [ver Encycl. I 7 p. 524]

Consideremos primeiro o caso dos conjuntos lineares.

Trata-se de fazer corresponder a cada conjunto linear borné K um número positivo ou nulo $m(K)$, que será a sua medida, e tal que: 1) dois conjuntos iguais (isto é superponíveis por translação)

* Relação entre A e B é o número racional ou irracional pelo qual se deve multiplicar B para obter A . É a operação pela qual se pode construir A de B .

* **Nota nossa:** essa parte foi colocada como sendo a última seção do *Capítulo XI – As noções de variável e de limite* no livro publicado, como *A medida dos conjuntos*.

Sobre a medida dos conjuntos – da Encycl. I 7 p. 525 :

“On montre qu'on obtient toujours des ensembles mesurables à, en partant d'ensembles dont chacun est constitué soit par un point, soit par un intervalle, on applique un nombre fini de fois les deux opérations suivantes: 1°) Former la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles. 2°) Prendre l'ensemble commun à un nombre fini ou à une infinité dénombrable d'ensembles. Au point de vue pratique, cela revient à dire que tous les ensembles que l'on sait définir effectivement sont mesurables.”

Nota nossa:

A citação acima é do fascículo 7 (*Théorie des ensembles*), tomo I, da obra *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*.

têm a mesma medida; 2) o conjunto formado pela reunião de um número finito ou de um infinito enumerável de conjuntos, sem ponto comum dois a dois, tem por medida a soma das medidas dos conjuntos parciais ; 3) o segmento $(0,1)$ tem por medida o número 1.

Os conjuntos para os quais é possível definir o número $m(K)$ se dizem mensuráveis no sentido de Lebesgue. Eis aqui como se definir a ^[sua] medida.

Dado um K , encerremos seus pontos em um número finito ou um infinito enumerável de intervalos ^[exteriores uns aos outros]; seja λ o comprimento total destes intervalos ; consideremos o conjunto dos λ possíveis : ele tem uma borne inferior $m_e(K)$ que é a medida exterior de K .

Sejam : $\overline{AB}$ um segmento que contem K ; K_1 o conjunto dos pontos de $\overline{AB}$ que não pertencem a K . O conjunto K_1 tem uma medida exterior $m_e(K_1)$; o número positivo ou nulo igual a $\overline{AB} - m_e(K_1)$ se chama a medida interior de K e se representa por $m_i(K)$. Demonstra-se que $m_e(K) \geq m_i(K)$.

Se se tem:

$m_e(K) = m_i(K)$, demonstra-se que o valor comum dos dois números satisfaz as condições impostas: é a medida de K .

Exemplos: um intervalo ^[qualquer] é mensurável : sua medida é o seu comprimento. Um conjunto finito (ou enumerável) de pontos tem uma medida nula. O conjunto dos pontos irracionais do segmento $(0,1)$ tem para medida 1.

A definição acima se estende facilmente aos conjuntos de duas ou mais dimensões (medida superficial, etc. por oposição à medida linear que foi definida.) Um segmento de reta de um plano tem medida superficial nula e medida linear positiva.

* Nota saiu cortada.

As noções de grandeza e de medida

1. A noção de grandeza

Na sua origem, em grande parte do seu desenvolvimento histórico e nas suas aplicações, a Matemática é a *ciência das grandezas*. Não falta quem ainda hoje a defina desse modo¹. Que essa concepção tradicional seja, entretanto, incompatível com o conceito atual da matemática pura é o que prova este fato: na exposição que vamos fazendo das noções fundamentais desta ciência, não interveio até aqui a noção de grandeza. Vimos que historicamente a ideia de número modelou-se a princípio sobre as grandezas que se apresentam no campo da nossa experiência: grandezas discretas, representadas pelos números inteiros; grandezas divisíveis, que deram origem aos números fracionários; grandezas relativas, das quais procedem a criação dos números qualificados (positivos e negativos); grandezas contínuas, que deram origem aos números irracionais.

A palavra experiência não significa aliás aqui apenas a experiência externa, senão também a intuição interna, a livre atividade criadora do espírito; nenhuma experiência física provará jamais a existência de uma grandeza incomensurável.

Às vezes falamos do *continuum físico* como o modelo (imperfeito) segundo o qual a mente humana teria criado o continuum matemático; mas não há, não pode haver um continuum físico. O que chamamos assim são (no máximo) sequências compactas de pontos, análogas ao conjunto dos números racionais. Ora, mesmo admitindo (o que já é excessivo) que uma sequência compacta seja dada na intuição, nada obriga ou mesmo autoriza completar tal sequência com pontos irracionais, de modo a torná-la contínua. (Couturat, *Les principes des mathématiques*, p. 90)

¹ “É óbvio que a definição tradicional e banal de magnitude: ‘o que é suscetível de aumentar e diminuir’, encerra um círculo vicioso, pois implica a ideia de magnitude, e até mesmo a noção de desigualdade de magnitudes, maior e menor. Além disso, considera a magnitude como essencialmente variável, o que é outro tipo de círculo vicioso: pois toda variação supõe pontos de referência fixos e requer dados invariáveis, não apenas para serem observados e percebidos, mas até mesmo concebidos [...]. Vemos que a noção de igualdade está implícita, assim como a de desigualdade, na de variação. Não se pode, portanto, sem petição de princípio, conceber e definir a magnitude como algo suscetível de variação. Pelo contrário, a grandeza é essencialmente e antes de tudo algo fixo e imutável, e só depois de ter posto várias grandezas fixas podemos considerá-las como os estados (necessariamente sucessivos, em virtude do princípio de contradição) de uma só e mesma grandeza variável.” (Couturat, *De l'infini mathématique*, p. 367)

“Por grandeza ou quantidade matemática (quantum, quantitas, Grösse) entende-se uma qualidade comum a objetos de espécies diferentes, em relação às quais são numericamente comparáveis, como seu comprimento ou seu peso.” (du Bois-Reymond, *Théorie générale des fonctions*, p. 31)

Seja qual for a origem da intuição das grandezas contínuas, é fora de dúvida que o número irracional foi inventado para tornar possível a sua representação. As generalizações superiores de número, porém, nem sempre nasceram da consideração das grandezas a que se aplicam, e, pelo contrário, precederam muitas vezes as interpretações em termos de grandeza: a criação acaba por exceder o domínio da aplicação.

Em suma, o número é a imagem da grandeza. O número fracionário é o símbolo da classe das grandezas divisíveis; sobre esse símbolo o espírito reconstrói a infinita cadeia das relações entre grandezas divisíveis.

Mas se historicamente e psicologicamente o número se modelou sobre a grandeza, logicamente a noção de número pode e deve preceder a de grandeza. O número é a forma, a grandeza é a matéria. De posse da noção de número, que se pode indefinidamente generalizar, a matemática pura prescinde inteiramente da noção de grandeza; estas são dados empíricos ou intuitivos e somente graças a um postulado se poderá afirmar que são *isomórficos* uma dada espécie de grandezas e uma dada classe de números.

Conquanto não seja assunto deste capítulo o objeto da matemática, convém observar aqui que esse objeto não é a grandeza: as noções de ordem e de correspondência, por exemplo, nada têm a ver com as noções de grandeza e de medida, e, no entanto, são a alma do conceito atual de ciência matemática. E mesmo em certos ramos da geometria (como a *analysis situs*), abstrae-se completamente dessas noções de grandeza e de medida.

Abstraindo das propriedades particulares que possam apresentar as grandezas concretas, devemos aqui considerar o fato de que existem grandezas de espécies diferentes (é aliás o que significa a generalização do número). Poder-se-ia distinguir entre a *grandeza* e a *quantidade*, e dizer, com mais rigor, que o se costuma chamar grandezas *iguais*, são quantidades iguais, isto é, que possuem a mesma grandeza.

Todas as espécies de grandezas se subsumem no conceito geral de grandeza; a *grandeza* é a classe das diferentes classes de *grandezas*. Pode-se dizer que duas grandezas são da mesma espécie quando possam ser comparadas uma à outra, de modo que se afirme que uma das duas é inferior a outra².

² A igualdade de duas grandezas (pelo menos do ponto de vista absolutista) é a sua identidade: duas grandezas iguais são uma única grandeza (ver Couturat, *Les principes des mathématiques*, p. 99).

Costuma-se distinguir entre as grandezas *intensivas*, em relação às quais se pode definir a desigualdade, mas não a adição, e as grandezas *extensivas*, em relação às quais se podem definir a desigualdade a adição. As grandezas extensivas são as grandezas propriamente matemáticas.

2. As grandezas extensivas

Pode-se construir uma teoria axiomática das grandezas extensivas. Citemos a este respeito os trabalhos de Burali-Forti (*Sulla Teoria generale delle Grandezze e dei Numeri*, ap. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXXIX (1904)) e de Huntington (*A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude*, ap. *Trans. of the Am. Math. Soc.* (1902)). Anteriormente: Helmholtz (*Zählen und Messen*) e Stoltz (*Arithmétique générale*).

Eis aqui um resumo da teoria de Burali-Forti segundo Couturat. Uma *espécie de grandezas* é uma classe G na qual se define uma operação $+$ (que se chama adição de grandezas), e que verifica o sistema de axiomas que será formulado abaixo.

O elemento nulo da classe G , isto é o módulo da adição, será representado por 0 (zero) (por analogia com o número zero, mas sem confusão). Duas outras definições prévias são necessárias:

3) a *desigualdade* de grandezas G : de fato exprime-se o conjunto dos elementos inferiores a um elemento a , que se representa por θa (*inferior a a*): “ a sendo um G , θa é o conjunto dos x da classe G tais que a é a soma de x e de um G não-nulo.”

4) um *conjunto limitado* de G : é um conjunto u tal que existem G não inferiores (isto é, inferiores ou iguais) a um u qualquer.

Eis aqui agora os oito axiomas de Burali-Forti:

Sejam x, y, z grandezas G . Então:

IX. Se $x + z = y + z$, tem-se $x = y$.

X. Existe (pelo menos) um G nulo.

XI. Existe (pelo menos) um G não-nulo.

XII. A soma de dois G , dos quais um é não-nulo, é um G não-nulo.

XIII. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (lei associativa da adição)

XIV. Ou bem $x = y$, ou bem $x < y$, ou bem $y < x$.

XV. Se x não é nulo, existe um G menor que x e não-nulo.

XVI. Se u é um conjunto limitado de G , existe uma grandeza x tal que $\theta x = \theta u$.

Os oito axiomas são independentes um do outro. O sétimo exprime a divisibilidade, o oitavo a continuidade das grandezas da classe G . Desses oito axiomas deduzem-se, entre outros, os seguintes teoremas:

3) a, b sendo G não-nulos, existe um número inteiro n tal que $na > b$ ³. (A esta proposição, considerada como primitiva, chama-se também *axioma de Arquimedes*; ela desempenha um papel muito importante na *medida* de grandezas).

4) Dada uma grandeza a e um número inteiro não-nulo n , existe uma grandeza x única tal que $nx = a$ (esta proposição exprime a divisibilidade indefinida das grandezas G).

Em suma, uma classe de grandezas G é uma classe em que se pode efetuar a operação $+$ e que verifica os oito axiomas acima. Como exemplo de classe G , citemos a dos números reais: é a classe tipo das grandezas contínuas, aquela que representa as propriedades formais dessas grandezas, e constitui o seu esquema-abstrato. E isso explica por que razão a matemática pura pode ignorar a consideração da grandeza e substituí-la pelo número; os dois conceitos são formalmente idênticos; o primeiro, porém, implica um dado empírico ou intuitivo, ao passo que o segundo é uma construção inteiramente abstrata (observemos que outras classes de grandezas podem verificar parcialmente o sistema de axiomas de Burali-Forti; assim, por exemplo, todas as classes de grandezas do tipo do conjunto dos números racionais verificam esse sistema com exclusão do axioma VIII).

3. A noção de medida

Do que se viu acima, resulta que o número representa a grandeza; ou mais precisamente que entre as grandezas de uma espécie dada e a classe dos números que lhe servem de tipo pode-se estabelecer uma correspondência perfeita e tal que a soma de duas grandezas quaisquer corresponde a soma de dois números correspondentes. Estabelecer uma correspondência é definir a *medida* das grandezas a que ela se refere. Observemos que uma correspondência pode ser estabelecida de uma infinidade de modos (por exemplo, no caso da correspondência entre os comprimentos sobre uma reta e os números reais – axioma de Cantor-Dedekind, ao qual já nos referimos).

³ A multiplicação por n sendo definida como soma de n quantidades a .

A correspondência entre a soma das grandezas e a soma dos números é apenas uma conveniência.

Portanto, não há necessidade de que a soma das grandezas corresponda à soma dos números: há apenas uma razão de comodidade e conveniência. Para melhor compreender esta razão, é necessário recorrer a uma ideia mais geral do que a de medição, à noção de proporcionalidade. Dados dois conjuntos de grandezas (do mesmo tipo em cada conjunto, mas não necessariamente de um para o outro conjunto), esses conjuntos são ditos proporcionais se houver uma correspondência biunívoca entre eles tal que a razão de qualquer de duas grandezas de um é igual à razão das duas grandezas correspondentes do outro. [...] Ora, para que dois conjuntos de grandezas sejam proporcionais, é necessário e suficiente que a soma de quaisquer duas grandezas de um corresponda à soma das grandezas correspondentes do outro. (Couturat, *Les principes des mathématiques*, p. 118-119).

Os axiomas de Burali-Forti definem assim o conceito de grandeza contínua *mensurável*. Quanto à medida de uma grandeza individual (um estado de grandeza ou uma quantidade) em relação a uma grandeza padrão da mesma espécie, será a relação⁴ entre a primeira e a segunda; quando as duas grandezas forem iguais, a medida da primeira é o número 1 (isto é: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \dots = \frac{n}{n}$). A segunda grandeza, em relação à qual se exprime a medida, se chama *grandeza-unidade* ou *unidade de medida*; sua escolha determina a medida de todas as outras grandezas da mesma espécie (sobre a relação entre a medida e o postulado de Arquimedes, ver adiante).

4. Extensão da noção de medida

A noção de medida é suscetível de generalizações muito interessantes de modo a se aplicar a conjuntos infinitos descontínuos. A medida dos conjuntos descontínuos de pontos constitui assim uma extensão das noções geométricas de comprimento, área, etc. Sua extensão (como objeto primitivo foi de tornar possível generalizações de integrais) se pode fazer de vários modos. Devem-se definições diferentes a Hankel (1882), Cantor (1884), Peano (1887), Jordan (1892). Vamos indicar aqui⁺ como se apresenta a noção de medida dos conjuntos no sentido de Borel, generalizada por Lebesgue (*Leçons sur l'intégration*, 1904), a qual foi a origem de numerosos aperfeiçoamentos da teoria das funções⁵.

⁴ A relação entre A e B é o número racional ou irracional pelo qual se deve multiplicar B para obter A.

⁵ Mostramos que sempre obtemos conjuntos mensuráveis em, partindo de conjuntos cada um dos quais constituído por um ponto ou por um intervalo, aplicamos um número finito de vezes as seguintes duas operações: 1º) Formar a união de um número finito ou um número infinito enumerável de conjuntos. 2º) Tome o conjunto comum a um número finito ou a uma infinidade

Consideremos primeiro o caso dos conjuntos lineares. Trata-se de fazer corresponder a cada conjunto linear *borne* K um número positivo ou nulo $m(K)$, que será a sua *medida*, e tal que:

1) dois conjuntos iguais (isto é, superponíveis por translação) têm a mesma medida;

2) o conjunto formado pela reunião de um número finito ou de um infinito enumerável de conjuntos, sem ponto comum dois a dois, tem por medida a soma das medidas dos conjuntos parciais;

3) o segmento $(0,1)$ tem por medida o número 1.

Os conjuntos para os quais é possível definir o número $m(K)$ se dizem *mensuráveis no sentido de Lebesgue*. Eis aqui como se definir a sua medida.

Dado um K , encerremos seus pontos em um número finito ou um infinito enumerável de intervalos exteriores uns aos outros; seja λ o comprimento total destes intervalos; consideremos o conjunto dos λ possíveis: ele tem uma *borne inferior* $m_e(K)$ que é a *medida exterior* de K .

Sejam: $\overline{AB}$ um segmento que contém K ; K_1 o conjunto dos pontos de $\overline{AB}$ que não pertencem a K . O conjunto K_1 tem uma medida exterior $m_e(K_1)$; o número positivo ou nulo igual a $\overline{AB} - m_e(K_1)$ se chama a medida interior de K e se representa por $m_i(K)$. Demonstra-se que $m_e(K) \geq m_i(K)$.

Se se tem: $m_e(K) = m_i(K)$, demonstra-se que o valor comum dos dois números satisfaz as condições impostas: é a *medida* de K . Exemplos: um intervalo qualquer é mensurável: sua medida é o seu comprimento. Um conjunto finito (ou enumerável) de pontos tem uma medida nula. O conjunto dos pontos irracionais do segmento $(0,1)$ tem para medida 1.

A definição acima se estende facilmente aos conjuntos de duas ou mais dimensões (*medida superficial* etc. por oposição à medida linear que foi definida). Um segmento de reta de um plano tem medida superficial nula e medida linear positiva.

enumerável de conjuntos. Do ponto de vista prático, isso equivale a dizer que todos os conjuntos que sabemos definir efetivamente são mensuráveis. (Baire; Schoenflies, *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, tomo I, fascículo 7, p. 525)