

**DINÂMICA IMPULSIVA:
ESTABILIDADE E INVARIÂNCIA**

Valeriano Antunes de Oliveira

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 072

Dinâmica Impulsiva: Estabilidade e Invariância

Valeriano Antunes de Oliveira

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto

17 de fevereiro de 2003

“Se se deseja um *slogan* que expresse o cerne da Matemática, pode-se dizer que ela é a ciência do infinito”.

Heyman Weyl

“A Matemática oferece às ciências exatas um certo grau de segurança que sem ela não poderiam alcançar.”

Albert Einstein

À minha família

Dedico

Agradecimentos

Às pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, em especial ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva que me orientou neste trabalho.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

À Deus.

Resumo

Neste trabalho abordamos sistemas dinâmicos controlados por medidas, onde as medidas podem ser pensadas como sendo variáveis de controle impulsivas. Mais especificamente, estudamos os Sistemas de Inclusão Impulsivos. Estes sistemas, que nos permite trabalhar com dados não-suaves, possuem uma parte absolutamente contínua (chamada parte regular) e uma parte dependente de uma medida de Borel (chamada parte singular). Isto requer o uso de um conceito diferente de solução, chamado de solução robusta. Apresentamos esta noção de solução robusta e fazemos também um estudo detalhado sobre estabilidade segundo Lyapounov e invariância para tais sistemas.

Palavras-chave: sistemas impulsivos, sistemas de controle, medidas de controle, estabilidade, invariância.

Abstract

In this work we consider dynamical systems which are controlled by measures, where the measures can be thought as impulsive control variables. More specifically, we study Impulsive Inclusion Systems. These systems, which allow us to work with nonsmooth data, have an absolutely continuous part (the regular one) and a part dependent of a Borel measure (the singular one). For this reason we need to use a different concept of solution, the so called robust solution. We make a discussion of this notion of solution and study Lyapounov stability and the invariance properties of these systems.

Keywords: impulsive systems, control systems, control measures, Lyapounov stability, invariance.

Sumário

Introdução	9
1 Sistemas Impulsivos	13
2 Estabilidade	24
3 Invariância	35
Conclusão	49
A Teoria da Medida	50
B Integração Abstrata	62
C Análise Não-Suave	69
Referências Bibliográficas	78

Introdução

Nesta dissertação abordamos alguns tópicos relativos aos sistemas de inclusão impulsivos. Estudamos a estabilidade (segundo Lyapounov) e a invariância destes sistemas. Um sistema de inclusão impulsivo é dado na forma

$$\begin{aligned} dx(t) &\in F(t, x(t))dt + \mathbf{G}(t, x(t))\mu(dt), \quad t \in [0, \infty) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

onde $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{G} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n \times q})$ são multi-funções dadas e $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ é uma medida vetorial. $C^*([0, \infty); K)$ é o espaço dual das funções contínuas de $[0, \infty)$ a \mathbb{R}^q tomando valores em K . O conjunto K é o cone positivo em \mathbb{R}^q . Podemos ver que este sistema é composto por duas partes. A primeira, chamada parte regular, é absolutamente contínua. A segunda é a parte singular, que é controlada por medidas. Estas medidas podem ser pensadas como variáveis de controle impulsivas. Impulsivas no sentido que tomam valores muito grandes em pequenos intervalos de tempo. Isto quer dizer que pode ocorrer de $\mu(\{\tau\}) \neq 0$. Quando isto ocorrer diremos que τ é um átomo da medida de controle μ . Na prática podemos dizer que os sistemas impulsivos são aqueles que utilizam impulsos (impactos, saltos, etc.) como forças externas. Na engenharia podemos encontrar muitos exemplos destes sistemas. Mas existem também sistemas impulsivos não-mecânicos como por exemplo a variação da população humana por um longo período de tempo com um decréscimo repentino devido a catástrofes (guerras, epidemias, etc.).

Estes sistemas de inclusão impulsivos são importantes em aplicações em várias áreas tais como a de administração (ou manejo) de recursos renováveis (veja [3, 5] e [10]), da mecânica de impacto e vibração (veja [4]), da navegação aeroespacial (veja [11] e [13]), entre outras. Muitas destas aplicações surgem no contexto de controle ótimo, de onde surge a necessidade de trabalharmos com inclusões diferenciais controladas por

medida e não com equações deste tipo. Isto é em parte devido ao Lema de Filippov (veja [7]) que diz que se

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u), \quad u \in \mathcal{U},$$

é um problema de controle então definindo

$$F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in \mathcal{U}\},$$

resolver o problema de controle é equivalente a resolver a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(t, x).$$

Do ponto de vista teórico é mais simples trabalharmos com inclusões diferenciais do que com equações diferenciais.

Porém para lidarmos com inclusões diferenciais controladas por medida é necessário usarmos um tipo diferente de solução, chamado solução robusta (veja [15] e [18]), através do qual podemos entender como funciona a interação entre a medida de controle e as variáveis de estado durante os saltos (a trajetória salta nos átomos da medida de controle). Este tipo de solução possui importantes propriedades de robustez, no sentido que se aproximarmos a medida de controle por uma seqüência de controles convencionais a seqüência de trajetórias associadas converge para a trajetória correspondente à medida μ , ou seja, converge para a solução robusta.

Esta dissertação está organizada em 3 capítulos e 3 apêndices. Os apêndices tratam da teoria básica que foi necessária para o desenvolvimento do assunto em questão. São eles teoria da medida, integração abstrata e análise não-suave. Nestes apêndices incluímos alguns conceitos e definições utilizados ao longo dos Capítulos 1 a 3 tais como conjuntos de Borel, conjuntos de Lebesgue, funções mensuráveis, e medida de Lebesgue no Apêndice A; integrais de Lebesgue, Teorema de Riesz, noções de funções de variação limitada e de funções absolutamente contínuas e derivada de Radon-Nikodym no Apêndice B; cones normais, cones tangentes, subgradientes proximais e gradientes generalizados de Clarke no Apêndice C. Sugerimos que o leitor não familiarizado com estes tópicos inicie a leitura deste trabalho pelos apêndices. No

primeiro capítulo introduzimos a noção de solução robusta. Fazemos também uma motivação para o estudo dos problemas impulsivos além de discorrermos (brevemente) sobre as funções impulso, que são comumente tomadas como sendo medidas de controle. As exposições sobre estabilidade e invariância ocorrem, respectivamente, nos capítulos 2 e 3. Estabilidade e invariância consistem no estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos, no sentido que podemos saber como é o comportamento das trajetórias sem necessariamente conhecê-las.

No Capítulo 2 fizemos uma rápida revisão para os casos de estabilidade segundo Lyapounov para equações diferenciais e inclusões diferenciais regulares (baseados em [7]). Depois apresentamos os conceitos de ponto de equilíbrio e funções de Lyapounov para o caso de inclusões diferenciais impulsivas assim como condições suficientes à estabilidade (uma extensão do Teorema de Lyapounov) e exemplos ilustrativos. No que diz respeito à estabilidade de sistemas dinâmicos convencionais e até mesmo no caso de inclusões diferenciais regulares temos uma vasta bibliografia, isto é, muito já foi pesquisado nestes casos e considerando vários tipos de estabilidade. Um destes tipos de estabilidade é a estabilidade segundo Lyapounov, que é objeto de estudo desta dissertação. Para este tipo de estabilidade já temos resultados de suficiência e até mesmo de necessidade para alguns casos particulares, inclusive resultados que caracterizam uma recíproca ao Teorema de Lyapounov têm sido objeto de recentes pesquisas (veja [6] e [17]). Em relação à estabilidade para sistemas controlados por medida (ou impulsivos) até então existe pouca bibliografia. Citamos [2, 14] e [16]. Este estudo se baseia na última referência, contudo conseguimos estabelecer a extensão do Teorema de Lyapounov sem utilizar uma condição de regularidade usada neste artigo. Em [2] encontram-se resultados sobre estabilidade para sistemas dinâmicos com trajetórias descontínuas, porém em um contexto diferente do considerado nesta dissertação. Em [14] encontramos também resultados desta natureza no contexto de robustez da solução em relação a perturbações na medida de controle.

Organizamos o Capítulo 3 sobre invariância de maneira similar ao Capítulo 2: fizemos uma revisão do conceito para os sistemas regulares (com base em [7]) e

na seqüência exploramos o tema para o caso dos sistemas impulsivos. Apresentamos condições necessárias e suficientes aos dois tipos de invariância, fraca e forte. Incluímos também exemplos ilustrativos. Assim como em estabilidade, existe pouca bibliografia sobre invariância para sistemas impulsivos. Citamos [1] e [20]. Em [1] o estudo é feito no contexto de inclusões diferenciais parciais. Em [20] é desenvolvida a teoria geométrica para processos impulsivos equanto a abordagem aqui apresentada é sobre a teoria analítica para sistemas impulsivos.

Capítulo 1

Sistemas Impulsivos

Vamos iniciar este capítulo com uma motivação ao estudo de sistemas impulsivos, depois falaremos sobre funções impulso e por fim vamos introduzir os sistemas impulsivos. Nesta última parte também definiremos a solução robusta para sistemas impulsivos além de expormos alguns resultados importantes que serão utilizados nos capítulos posteriores. Com isso estaremos aptos a iniciar o estudo de invariância e estabilidade.

Motivação

Considere o problema de controle ótimo abaixo.¹

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \int_0^1 u(t) dt \\ \text{sujeito a} \quad & \dot{x}(t) = ax(t) + bu \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) \geq x_1 \tag{1.2}$$

$$u(t) \geq 0, \quad \|u(\cdot)\|_{L_1} < M, \tag{1.3}$$

onde a e b são constantes arbitrárias e x_1 , $M > 0$ são dados. Resolvendo o sistema (1.1) com a condição inicial $x(0) = 0$, obtemos

$$x(t) = b \exp(at) \int_0^t u(s) \exp(-as) ds, \tag{1.4}$$

de modo que

$$x(1) = b \exp(a) \int_0^1 u(s) \exp(-as) ds \leq b \exp(a) \int_0^1 u(s) ds < b \exp(a) M,$$

¹Este é um *Minimum Fuel Problem*.

onde utilizamos as desigualdades $\exp(-as) \leq 1$, $s \in [0, 1]$ e (1.3). Então se escolhermos as constantes a e b de modo que $b \exp(a)M \leq x_1$ a restrição (1.2) não será cumprida e não poderemos resolver o problema. Mas considere a seqüência de controles definida abaixo.

$$u_n(t) = \begin{cases} a \exp(-a)x_1 \exp(a/n)/[b(\exp(a/n) - 1)] & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{se } t \in (1/n, 1], \end{cases}$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\|u_n(\cdot)\|_{L_1} = \frac{a \exp(-a)x_1 \exp(a/n)}{nb(\exp(a/n) - 1)} \rightarrow \frac{\exp(-a)x_1}{b}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

o que implica que $\{u_n\}$ é limitada. Assim a restrição (1.3) é satisfeita para algum M e como $u_n \geq 0$, $\forall n$, temos que u_n é um controle admissível, para todo n . Substituindo u_n em (1.4) obtemos

$$x_n(t) = \begin{cases} \exp(-a)x_1 \exp(a/n)(\exp(at) - 1)/(\exp(a/n) - 1) & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ \exp(-a)x_1 \exp(at) & \text{se } t \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

Logo $x(1/n) = \exp(-a)x_1 \exp(a/n)$ e $x(1) = x_1$. Na Figura 1.1 ilustramos algumas soluções. A seqüência $\int_0^1 u_n(t)dt = \|u_n(\cdot)\|_{L_1}$ dada em (1.5) é decrescente de modo que quando n cresce estamos melhorando o valor do funcional que queremos minimizar. Portanto o processo ótimo (x^*, u^*) é obtido fazendo $n \rightarrow \infty$. Mas observe que procedendo desta maneira obtemos a trajetória x^* com uma descontinuidade em $t = 0$. O que podemos concluir é que o problema posto não possui solução se admitirmos apenas funções de controle em $L_1[0, 1]$. Isto quer dizer que o espaço de controles deve ser estendido admitindo medidas como funções de controle, ou seja, controles impulsivos.

Geralmente se utiliza medidas construídas a partir de funções impulso. Se $\delta(t)$ é uma função impulso podemos definir

$$\mu(A) = \int_A \delta(t)dt.$$

Na seqüência apresentamos as funções impulso e suas propriedades. Em exemplos nos próximos capítulos vamos utilizar estas funções para definir medidas de controle.

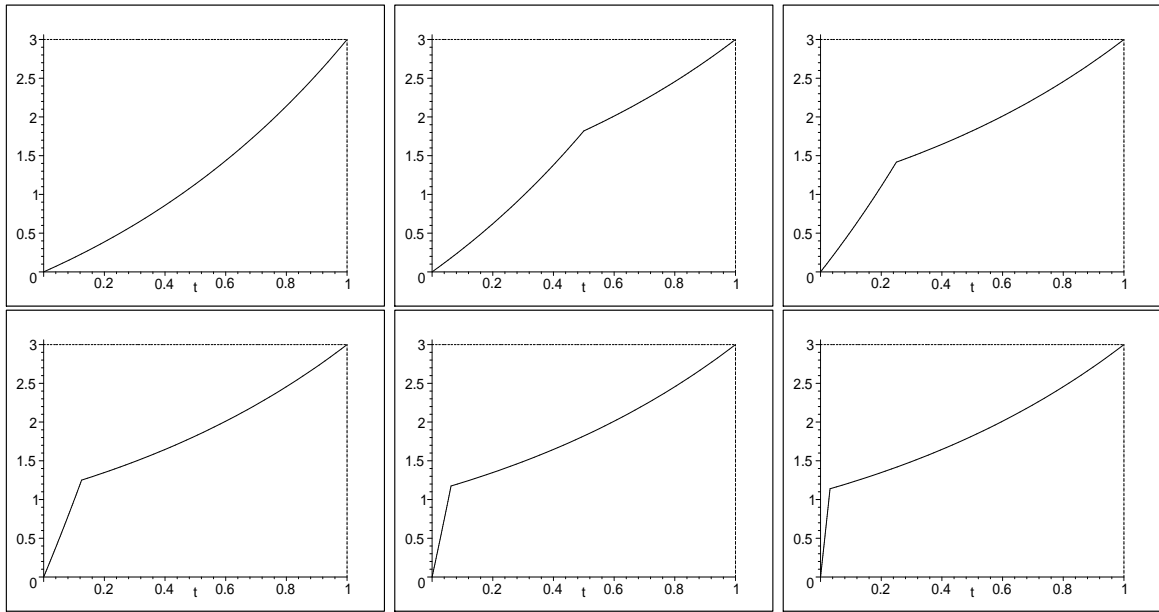


Figura 1.1: Gráficos de algumas trajetórias x_n com $a = b = 1$ e $x_1 = 3$.

Funções Impulso

Uma *função impulso unitário* em $t = 0$ (também conhecida por *delta de Dirac*) definida em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, e denotada por δ_0 , é definida como tendo as seguintes propriedades:

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) dt = 1. \quad (1.6)$$

É claro que o “impulso” pode ocorrer em qualquer t_0 e quando este for o caso denotaremos por δ_{t_0} . A surpreendente propriedade à direita em (1.6) é um caso particular da também surpreendente propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) f(t) dt = f(0), \quad (1.7)$$

onde f é uma função real contínua que se anula fora de um intervalo compacto. Em (1.6) e (1.7) pode se ver claramente um abuso de notação. Mas, um tratamento matemático rigoroso pode ser dado a funções com tais propriedades recorrendo-se à Teoria das Aproximações (ver [19]). Aqui não iremos fazer isso, mas vamos justificar (1.7) utilizando um raciocínio até certo ponto geométrico. Paul Dirac² introduziu os

²Prêmio Nobel em 1933 por trabalhos em Mecânica Quântica.

hoje chamados *núcleos de Dirac*, e através destes podemos fazer a justificativa desejada. Estes núcleos consistem numa seqüência de funções contínuas $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

- (i) $k_n(-t) = k_n(t) \geq 0$;
- (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(t) dt = 1$;
- (iii) $\forall \varepsilon, \eta > 0 \exists n_0$ tal que $\int_{|t|>\eta} k_n(t) dt < \varepsilon$, para $n \geq n_0$.

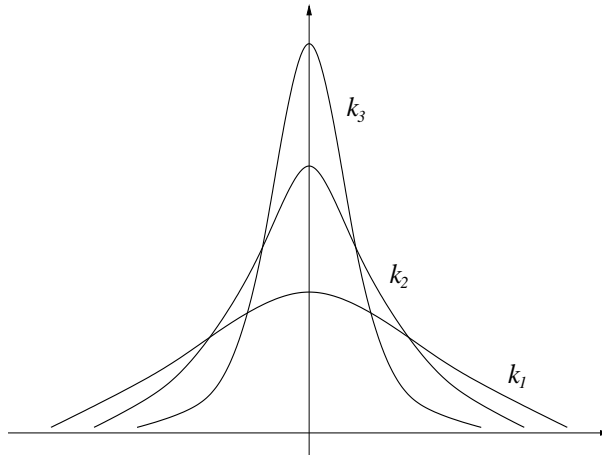


Figura 1.2: Gráficos das funções k_n .

Estas funções podem ser pensadas como aproximações para δ_0 . Na Figura 1.2 podemos observar que as áreas abaixo dos gráficos de $k_n(t)$ se acumulam em torno do eixo y . Daí o raciocínio geométrico. Assim definimos o primeiro membro de (1.7) da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(t) f(t) dt. \quad (1.8)$$

O teorema abaixo justifica tal definição. Não vamos incluir a demonstração, que pode ser encontrada em [8].

Teorema 1.1. *Sejam $\{k_n\}$ uma seqüência de núcleos de Dirac e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Então as funções φ_n abaixo estão bem definidas*

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(t-s) \varphi(s) ds$$

e $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ uniformemente em intervalos limitados e fechados.

A função f em (1.7) satisfaz as hipóteses do teorema acima. Logo aplicando o teorema para $t = 0$ obtemos

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s) f(s) ds.$$

Assim de (1.7) temos (1.8).

Definimos o *produto de convolução* das funções $f(x)$ e $g(x)$, o qual é denotado por $(f * g)(x)$, como abaixo:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)dy.$$

De posse desta definição, uma propriedade que pode ser tirada de (1.6) é a de que

$$(\delta_0 * f)(s) = (f * \delta_0)(s) = f(s),$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(s - t)f(t)dt = f(s),$$

onde f é uma função contínua que se anula fora de um intervalo compacto. Particularmente temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t)f(t)dt = f(0),$$

que é (1.7).

Para finalizar vamos analisar informalmente o comportamento de um sistema sujeito a um impulso instantâneo. Abaixo temos uma equação que representa um sistema sem excitação até $t = \pi$: neste instante o sistema recebe um impulso de intensidade 2:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 2\delta_\pi(t - \pi), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

É claro que não existe uma solução clássica (no sentido que $x(t)$ seja de classe C^2) para este problema. O que podemos obter é uma certa generalização do conceito de solução. A Figura 1.3, onde traçamos o gráfico de $x(t)$, mostra a influência do impulso. Este exemplo está resolvido em [9].

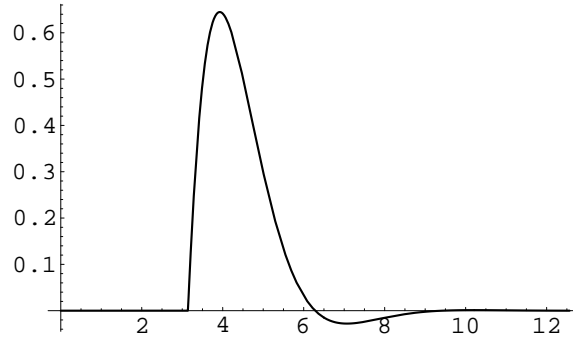


Figura 1.3: Gráfico de $x(t)$: influência do impulso.

O Sistema Impulsivo

Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos introdutórios a respeito dos sistemas de inclusão impulsivos. Recordamos que um tal sistema é dado na forma

$$\begin{aligned} dx(t) &\in F(t, x(t))dt + \mathbf{G}(t, x(t))\mu(dt), \quad t \in [0, \infty) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{G} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n \times q})$ são multi-funções dadas e $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ é uma medida vetorial. $C^*([0, \infty); K)$ é o espaço dual das funções contínuas de $[0, \infty)$ a \mathbb{R}^q tomando valores em K . O conjunto K é o cone positivo em \mathbb{R}^q . Costumamos dizer que a multi-função F em (1.9) é a parte absolutamente contínua e que a multi-função \mathbf{G} é a parte singular do sistema.

Abaixo vamos apresentar algumas notações que serão utilizadas no decorrer do texto.

- $AC([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são absolutamente contínuas;
- $BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de variação limitada e contínuas à direita em $(0, \infty)$;
- $\bar{\mu}$ é a variação total da medida μ , $\bar{\mu}(dt) := \sum_{i=1}^q \mu_i(dt)$;
- $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ é o produto σ -álgebra, onde \mathcal{L} denota os subconjuntos de Lebesgue em $[0, \infty)$ e \mathcal{B} denota os subconjuntos de Borel em \mathbb{R}^q ;

- B é a bola unitária aberta no espaço Euclidiano;
- $W_0^\infty(x)$ denota a variação dos elementos $x \in BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$.

Nesta dissertação vamos trabalhar com o conceito de solução robusta definido em [15], fazendo as alterações que se fizerem necessárias para englobar intervalos infinitos (já que neste artigo o estudo é feito para intervalos finitos). Este conceito de solução possui importantes propriedades de robustez, que são perdidas se trabalharmos com o conceito usual de solução³. Isto é razoável visto que estamos trabalhando com sistemas impulsivos, isto é, controlados por medida. Contudo, para introduzirmos este conceito de solução precisamos antes definir um outro conceito, o de completamento gráfico. Abaixo seguem algumas funções que serão necessárias nesta definição:

- $M_i(t) := \begin{cases} \int_{[0,t]} \mu_i(ds), & \forall t > 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, q;$
- $\eta(t) := t + \sum_{i=1}^q M_i(t);$
- $\bar{\eta}(t) := \begin{cases} \{\eta(t)\} & \text{se } \bar{\mu}(\{t\}) = 0, \\ [\eta(t^-), \eta(t)] & \text{se } \bar{\mu}(\{t\}) > 0. \end{cases}$

A função η definida acima é chamada *função de reparametrização do tempo*.

Definição 1.1. *Uma família de completamentos gráficos associados à medida vetorial μ é o conjunto dos pares $(\theta, \gamma) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \times K$ onde $\theta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é a “inversa” de $\bar{\eta} : [0, \infty) \hookrightarrow \mathcal{P}([0, \infty))$ no sentido que $\theta(s) = t, \forall s \in \bar{\eta}(t)$; e $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$ é definida $\forall s \in \bar{\eta}(t), t \in [0, \infty)$, por*

$$\gamma(s) := \begin{cases} M(\theta(s)) & \text{se } \bar{\mu}(\{t\}) = 0 \\ M(t^-) + \int_{\eta(t^-)}^s v(\sigma) d\sigma & \text{se } \bar{\mu}(\{t\}) > 0, \end{cases}$$

³A solução usual consiste em fazer uma seleção $f \in F$ e resolver o problema $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Uma maneira de resolver este problema é utilizar as soluções de Euler. Para mais detalhes veja [7].

para algum $v(\cdot) \in V^t$, onde $t = \theta(s)$. Aqui $M(\cdot) := \text{col}(M_1(\cdot), \dots, M_q(\cdot))$ e

$$V^t := \left\{ v : \bar{\eta}(t) \rightarrow K \text{ t.q. } \dot{\theta}(s) + \sum_{i=1}^q v_i(s) = 1 \forall s \in \bar{\eta}(t) \text{ e } \int_{\bar{\eta}(t)} v(s) ds = \mu(\{t\}) \right\}.$$

A Figura 1.4 ilustra algumas das funções definidas acima no caso em que a medida μ é escalar.

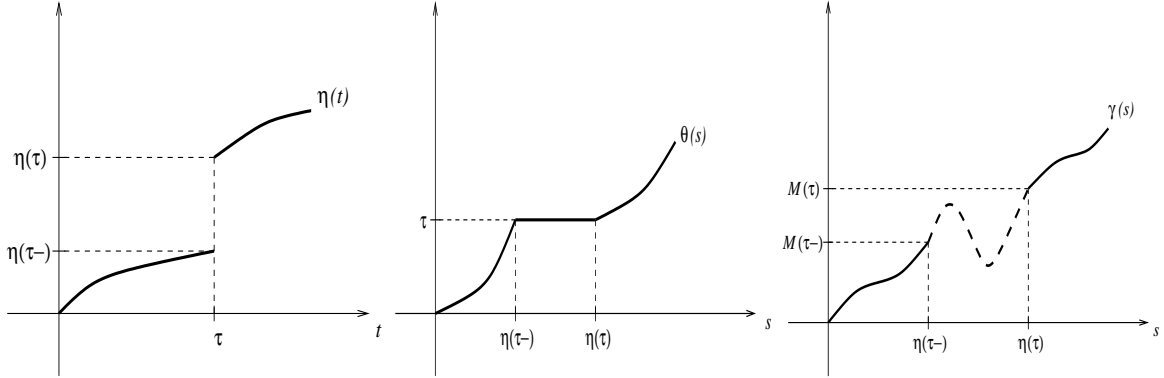


Figura 1.4: Ilustração: as funções η , θ e γ .

Definição 1.2. Uma função $x \in BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é uma solução robusta de (1.9) se existir uma função Lebesgue integrável f , $f(t) \in F(t, x(t))$ \mathcal{L} -q.s., e uma função $\bar{\mu}$ -integrável g , $g(t) \in \tilde{G}(t, x(t^-); \mu(\{t\}))$ $\bar{\mu}$ -q.s., tais que

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau + \int_{[0, t]} g(\tau) \bar{\mu}(d\tau) \quad \forall t \in (0, \infty),$$

onde a multi-função $\tilde{G} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times K \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\tilde{G}(t, z; \alpha) := \begin{cases} \{G(t, z)w(t)\} & \text{se } |\alpha| = 0 \\ \left\{ \frac{[\xi(\eta(t)) - \xi(\eta(t^-))]}{|\alpha|} \right\} & \text{se } |\alpha| > 0 \end{cases},$$

para todo $(\xi(\cdot), \gamma)$ satisfazendo

$$\xi(\eta(t^-)) = z, \quad (1.10)$$

$$\dot{\xi}(s) = G(t, \xi(s))\dot{\gamma}(s) \quad \bar{\eta}(t)\text{-q.s.}, \text{ e} \quad (1.11)$$

$$\alpha = \gamma(\eta(t)) - \gamma(\eta(t^-)), \quad (1.12)$$

para alguma função $G \in \mathbf{G}$ contínua em t e Lipschitz em x . Aqui, $|\alpha| = \sum_{i=1}^q \alpha_i$, $w(\cdot)$ é a derivada de Radon-Nikodym⁴ de μ em relação à $\bar{\mu}$, (ξ, γ) pertence a $AC([0, \infty); \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q)$, e o par (θ, γ) é um completamento gráfico de μ .

Dizemos que (x, μ) é um processo viável para o sistema impulsivo se $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ e x é uma solução robusta de (1.9).

Através de uma mudança de variável podemos definir uma inclusão diferencial regular (absolutamente contínua) associada à inclusão diferencial impulsiva de modo que exista uma importante relação entre as soluções destes sistemas. Expomos isto no próximo teorema. A demonstração será omitida e é similar à prova do Teorema 4.1 em [18].

Teorema 1.2. *Suponha que as multi-funções em (1.9) satisfazem:*

- F toma valores em conjuntos fechados e é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ mensurável; e
- \mathbf{G} toma valores em conjuntos fechados e é Borel mensurável.

Fixe uma medida $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ e um estado inicial x_0 . Seja (θ, γ) o completamento gráfico de μ e η a função de reparametrização.

- (i) *Suponha que $x(\cdot) \in BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é uma solução robusta de (1.9) (em relação a μ e x_0). Então existe uma solução $y(\cdot) \in AC([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ de*

$$\begin{cases} \dot{y}(s) & \in F(\theta(s), y(s))\dot{\theta}(s) + \mathbf{G}(\theta(s), y(s))\dot{\gamma}(s) \\ y(0) & = x_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

para a qual

$$x(t) = y(\eta(t)) \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (1.14)$$

Reciprocamente,

- (ii) *suponha que $y(\cdot) \in AC([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é solução de (1.13). Então existe uma solução $x(\cdot) \in BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ de (1.9) para a qual (1.14) é satisfeita.*

⁴A definição deste conceito de derivada pode ser encontrada no Apêndice B.

(iii) Tome uma solução x de (1.9). Seja y uma solução de (1.13) tal que (1.14) é satisfeita. Então

$$W_0^\infty(x) \leq W_0^\infty(y)$$

Nós vamos precisar do seguinte lema de mudança de variáveis em integrais em algumas demonstrações nos próximos capítulos. A demonstração pode ser feita de maneira análoga à demonstração da Proposição 2.1 em [18] e iremos omiti-la.

Lema 1.3. *Seja (θ, γ) uma família de complementos gráficos de $\mu \in C^*([0, \infty); K)$. Então*

(i) θ e γ são funções Lipschitz contínuas não-negativas e satisfazem

$$\dot{\theta}(s) + \sum_{i=1}^q \dot{\gamma}_i(s) = 1 \quad \mathcal{L} - q.s.;$$

(ii) Para toda medida de Borel $\mu \in C^*([0, \infty), K)$, toda função integrável $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$ e todo conjunto de Borel $T \subset [0, \infty)$, temos

$$\int_{\theta^{-1}(T)} G(\theta(s)) \dot{\gamma}(s) ds = \int_T G(\tau) \mu(d\tau);$$

(iii) Para toda função Lebesgue mensurável $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e todo conjunto de Borel $S \subset [0, \infty)$ temos que $\theta(S)$ também é um conjunto de Borel e

$$\int_S f(\theta(s)) \dot{\theta}(s) ds = \int_{\theta(S)} f(\tau) d\tau.$$

Apresentamos abaixo algumas hipóteses sobre as multi-funções F e \mathbf{G} que serão necessárias em demonstrações nos Capítulos 2 e 3.

Hipóteses Básicas:

(h1) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x)$ e $\mathbf{G}(x)$ são conjuntos convexos, compactos e não-vazios;

(h2) F e \mathbf{G} são semi-contínuas superior;

(h3) existem constantes a e b tais que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$v \in F(x) \implies \|v\| \leq a\|x\| + b;$$

$$v \in \mathbf{G}(x) \implies \|v\| \leq a\|x\| + b.$$

A hipótese (h3) é conhecida como condição de crescimento linear.

Recordamos que uma multi-função Γ é semi-contínua superior em x se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|y - x\| < \delta \implies \Gamma(y) \subset \Gamma(x) + \varepsilon B,$$

e Γ é semi-contínua inferior em x se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|y - x\| < \delta \implies \Gamma(y) \supset \Gamma(x) - \varepsilon B.$$

Capítulo 2

Estabilidade

Neste capítulo iremos estudar a estabilidade do sistema (1.9) segundo a abordagem de Lyapounov, ou seja, utilizando as *funções de Lyapounov*. Vamos estudar apenas o caso autônomo, ou seja, vamos supor que as multifunções F e \mathbf{G} que definem a dinâmica não dependem explicitamente da variável tempo. Começaremos revisando estabilidade segundo Lyapounov para equações diferenciais e para inclusões diferenciais regulares. Primeiro expomos o caso de equações diferenciais.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.1)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função suave. Suponha que x^* é um ponto de equilíbrio do sistema, isto é, $f(x^*) = 0$. Então se $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ a solução $x(\cdot)$ de (2.1) satisfazendo $x(0) = x_0$ é tal que $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow \infty$ dizemos que x^* é um ponto de equilíbrio *globalmente assintoticamente estável*. A estabilidade do sistema (2.1) pode ser caracterizada pela existência de um par de funções de Lyapounov. Um par de funções de Lyapounov para x^* são funções suaves Q, V satisfazendo:

- (i) $Q(x), V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$;
- (ii) $\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq r\}$ são compactos para todo $r \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\langle \nabla Q(x), f(x) \rangle \leq -V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1. *Seja x^* um ponto de equilíbrio para o sistema (2.1). Suponhamos que exista um par de funções de Lyapounov Q e V para x^* . Então x^* é globalmente assintoticamente estável.*

Prova:¹ Seja $x(\cdot)$ uma solução de (2.1). Pela condição (iii) temos

$$\frac{d}{dt}Q(x(t)) = \langle \nabla Q(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq -V(x(t)).$$

Logo a função não-negativa $t \mapsto Q(x(t)) + \int_0^t V(x(\tau))d\tau$ é decrescente e portanto limitada em $[0, \infty)$. Assim $t \mapsto Q(x(t))$ é limitada, já que por (i) $V \geq 0$. Então por (ii) $x(t)$ é também limitada. Então a solução $x(t)$ de (2.1) existe em $[0, \infty)$, e do fato de $V(x)$ ser suave segue que $V(x(t))$ é globalmente Lipschitz em $[0, \infty)$ e com isso em mãos não é difícil mostrar que $V(x(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$; ou seja, $x(t) \rightarrow x^* = V^{-1}(0)$. ■

Considere a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad (2.2)$$

onde $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Neste caso x^* é um ponto de equilíbrio para (2.2) se $0 \in F(x^*)$ e Q, V constituem um par de Lyapounov para x^* se satisfazem:

- (a) $Q(x), V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{x}$;
- (b) $\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq r\}$ é compacto para todo $r \in \mathbb{R}$; e
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \partial_P Q(x)$,

$$\min\{\langle \xi, v \rangle : v \in F(x)\} \leq -V(x),$$

onde $\partial_P Q(x)$ denota o conjunto dos subgradientes proximais de Q em x .

Teorema 2.2. *Seja x^* um ponto de equilíbrio para o sistema (2.2). Se existir um par de funções de Lyapounov Q e V para x^* tais que Q e V são semi-contínuas inferior, então para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma trajetória x para F em $[0, \infty)$ com $x(0) = x_0$ e $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow \infty$.*

¹Esta demonstração está feita como em [7] e foi incluída apenas para ressaltar a importância das condições (i)-(iii).

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7]. Este teorema generaliza o Teorema 2.1 para o caso de inclusões diferenciais. Para o caso de inclusões diferenciais impulsivas também temos um resultado similar. Neste caso um ponto de equilíbrio \bar{x} é caracterizado por

$$\text{col}(u, 0) \in H(\bar{x}) := \{\{v_0\} \times \{F(\bar{x})v_0 + \mathbf{G}(\bar{x})v\} : (v_0, v) \in \bar{V}\}$$

para algum $0 \leq u \leq 1$, onde $\bar{V} := \{(v_0, v) : v_0 \geq 0, v \in K, \sum_{i=0}^q v_i = 1\}$.

Dizemos que o sistema (F, \mathbf{G}) é *globalmente assintoticamente controlável* (ou *estável*) a \bar{x} se para qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe um processo viável (x, μ) de (1.9), para o qual $x(0) = x_0$ e $x(t) \rightarrow \bar{x}$, quando $t \rightarrow \infty$. Quando isto ocorrer, diremos simplesmente que (F, \mathbf{G}, \bar{x}) é GAC. As funções Q e V são um par de funções de Lyapounov para \bar{x} se satisfazem

- (1) $Q(x), V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{x}$;
- (2) $\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq r\}$ é compacto para todo $r \in \mathbb{R}$; e
- (3) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \partial_P Q(x)$,

$$\min\{\langle \xi, \nu \rangle : \nu \in F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v, (v_0, v) \in \bar{V}\} \leq -V(x). \quad (2.3)$$

Agora vamos expor e demonstrar o principal resultado deste capítulo, que generaliza o Teorema 2.2 para o caso em que a dinâmica é controlada por medida. A demonstração foi feita como em [16], porém não utilizamos uma condição de regularidade usada na demonstração feita neste artigo.

Teorema 2.3. *Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio. Suponha que exista um par de funções de Lyapounov Q e V para \bar{x} que sejam semi-contínuas inferior. Então (F, \mathbf{G}, \bar{x}) é GAC.*

Prova: Sejam $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio e (Q, V) um par de funções de Lyapounov para \bar{x} . Considere o sistema

$$\text{col}\left(\frac{dy^\circ}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) \in H(x) := \{\{v_0\} \times \{F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v\} : (v_0, v) \in \bar{V}\}$$

$$y^\circ(0) = 0, \quad y^\circ(s) \rightarrow \infty \text{ quando } s \rightarrow \infty$$

$$y(0) = y_0 = x_0.$$

Pelo Teorema 2.2 segue que para $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma trajetória $\tilde{y} = \text{col}(y^\circ, y)$ tal que $\tilde{y}(0) = \text{col}(0, y_0)$, $y^\circ(s) \rightarrow \infty$ e $y(s) \rightarrow \bar{x}$, quando $s \rightarrow \infty$. Segue da construção da trajetória \tilde{y} através da seleção mínima em H e da própria definição de H que vale a inclusão:

$$\dot{\tilde{y}}(s) \in \{\{v_0\} \times \{f(s)v_0 + \mathbf{g}(s)v\} : (v_0, v) \in \bar{V}\},$$

onde $f(s) \in F(y(s))$ e $\mathbf{g}(s) \in \mathbf{G}(y(s))$ para quase todo $s \in [0, \infty)$.

Pelo teorema da seleção mensurável existe uma função Lebesgue mensurável $(v_0, v_1, \dots, v_q)(s) \in \bar{V}$, quase sempre em $[0, \infty)$, tal que

$$\dot{\tilde{y}}(s) = (\dot{y}^\circ, \dot{y}) = (v_0(s), f(s)v_0(s) + \sum_{i=1}^q g_i(s)v_i(s)).$$

Logo temos

$$y^\circ(s) = \int_0^s v_0(\sigma) d\sigma. \quad (2.4)$$

Lembrando que $y^\circ(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$ podemos concluir a partir de (2.4) que $v_0 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ não se anula em intervalos infinitos.

Com isto em mãos podemos construir um processo (x, μ) tal que $x \in BV^+$ é uma solução da inclusão dinâmica impulsiva (1.9), correspondente a μ . Primeiro construiremos a medida de controle μ . Defina

$$\theta(s) := \int_0^s v_0(\sigma) d\sigma, \quad \eta(t) := \sup\{s : \theta(s) \leq t\}; \quad \text{e} \quad (2.5)$$

$$\mu(A) := \int_{\theta^{-1}(A)} v(s) ds \quad \forall A \in \mathcal{B}([0, \infty)), \quad (2.6)$$

onde $v(s) := (v_1(s), \dots, v_q(s))$.

Como a função $v_0(s)$ é não negativa e não se anula em intervalos ilimitados, a função θ definida em (2.5) é não-decrescente e sua imagem é todo intervalo $[0, \infty)$. Isto implica que μ , definida em (2.6) é uma medida regular, com domínio nos borelianos do intervalo $[0, \infty)$. Segue facilmente da definição de η que esta é

uma função crescente. Seja $\{t_i\}$ uma seqüência de pontos em $[0, \infty)$ onde os intervalos $\theta^{-1}(t_i)$ são não-degenerados, ou seja, cada t_i é um átomo da medida μ , por construção (ver (2.5) e (2.6)). Queremos mostrar que existem $\tilde{f}(t) \in F(x(t))$ q.s. e $\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t^-), \mu(\{t\}))$ $\bar{\mu}$ -q.s. tal que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(\sigma) d\sigma + \int_{[0,t]} \tilde{g}(\sigma) \bar{\mu}(d\sigma)$$

para todo $t \in [0, \infty)$. Defina

$$\begin{aligned} x(t) &:= y(\eta(t)); \\ \tilde{f}(t) &:= f(\eta(t)); \quad \text{e} \\ \tilde{g}(t) &:= \begin{cases} \mathbf{g}(\eta(t))v(\eta(t)) & \forall t \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \{t_i\} \\ \frac{1}{\eta(t) - \eta(t^-)} \int_{[\eta(t^-), \eta(t)]} \mathbf{g}(s) \cdot v(s) ds & \forall t \in \cup_{i=1}^{\infty} \{t_i\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que $x(\theta(s)) = y(s)$ em $[0, \infty) \setminus \cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}$ e $\dot{\theta}(s) = 0$ em $\cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}$.

Então temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0, \infty)} \chi_{F(y(s))}(\tilde{f}(\theta(s))) \dot{\theta}(s) ds \\ &= \int_{[0, \infty)} \chi_{F(x(t))}(\tilde{f}(t)) dt, \end{aligned}$$

onde² a segunda igualdade acima segue do Lema 1.3. Isto implica que $\tilde{f}(t) \in F(x(t))$ quase sempre com relação a medida de Lebesgue.

Segue facilmente da definição de \tilde{g} que

$$\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t^-); \mu(\{t\})) \quad \forall t \in \cup_i \{t_i\}. \quad (2.7)$$

Também temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0, \infty) \setminus \cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}} \chi_{G(x(\theta(s)))}(\mathbf{g}(\eta(\theta(s)))) v(s) ds \\ &= \int_{[0, \infty) \setminus \cup_i \{t_i\}} \chi_{G(x(t))}(\mathbf{g}(\eta(t))) \bar{\mu}(dt), \end{aligned}$$

onde utilizamos novamente o Lema 1.3. Segue que $\mathbf{g}(\eta(t)) \in G(x(t))$ quase sempre em $[0, \infty)$ com relação a medida μ .

²Veja a definição da função característica χ_E no Apêndice A.

Segue da construção de μ que $\mu(dt) = v(\eta(t))\bar{\mu}(dt)$, i.e., $w(t) = v(\eta(t))$ é a derivada de Radon-Nikodym de μ com a relação a sua variação total $\bar{\mu}$. Assim, como $\tilde{g}(t) := \mathbf{g}(\eta(t)) \cdot v(\eta(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \setminus \cup_i \{t_i\}$, temos

$$\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t^-); \mu(\{t\})) \quad \bar{\mu} - \text{q.s.} \quad \text{em } [0, \infty) \setminus \cup_i \{t_i\}.$$

Isto junto com (2.7) implica em

$$\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t^-); \mu(\{t\})) \quad \bar{\mu} - \text{q.s.} \quad \text{em } [0, \infty).$$

Tome $t > 0$. Então, pelo Lema 1.3, segue que

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= y(\eta(t)) - x_0 \\ &= \int_{[0, \eta(t)]} f(s)v_0(s)ds + \int_{[0, \eta(t)]} \mathbf{g}(s)v(s)ds \\ &= \int_{[0, \eta(t)]} \tilde{f}(\theta(s))v_0(s)ds + \int_{[0, \eta(t)] \setminus \cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}} \mathbf{g}(s)v(s)ds \\ &\quad + \int_{[0, \eta(t)] \cap \cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}} \mathbf{g}(s)v(s)ds \\ &= \int_{[0, t]} \tilde{f}(\tau)d\tau + \int_{[0, t]} \tilde{g}(\tau)\bar{\mu}(d\tau). \end{aligned}$$

Isto confirma que (x, μ) é de fato um processo viável de (1.9).

Resta mostrar que $x(t) \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow \infty$. Observe que se t tende ao infinito então $\eta(t)$, definida em (2.5), também tende ao infinito. Já que $x(t) = y(\eta(t))$ e $y(s) \rightarrow \bar{x}$ quando $s \rightarrow \infty$ segue que $x(t) \rightarrow \bar{x}$. ■

No que segue vamos mostrar a importância do fato de $v_0(s)$ não se anular em intervalos infinitos. Suponhamos por simplicidade que $q = 1$ e $v_0(s) \equiv 0$ em $[s_0, \infty)$, para algum s_0 . Então de (2.5) obtemos

$$\dot{\theta}(s) = v_0(s) = 0 \quad \text{em } [s_0, \infty).$$

Logo $\theta(s) = t_0$ em $[s_0, \infty)$, para algum t_0 . Daí de (2.6) segue que

$$\mu(\{t_0\}) = \int_{\theta^{-1}(\{t_0\})} v(s)ds = \int_{[s_0, \infty)} ds = +\infty,$$

onde usamos o fato de $v(s) \equiv 1$ em $[s_0, \infty)$, já que $(v_0(s), v(s)) \in \bar{V}$. Mas $\mu(\{t_0\}) = +\infty$ provocaria um salto infinito em $x(t)$, o que não é desejável.

Exemplos

O Teorema 2.3 nos permite trabalhar com sistemas bastante gerais no sentido que podemos utilizar funções de Lyapounov não-suaves, podemos trabalhar com a parte singular em $\mathbb{R}^{n \times q}$, além de outras generalidades. Contudo, nos exemplos que apresentamos a seguir não vamos explorar isto. Incluímos estes exemplos para mostrar como é o comportamento de um sistema impulsivo ou para mostrar como a dinâmica impulsiva influencia a evolução do sistema, ou seja, desejamos apenas ilustrar a teoria e não resolver problemas complicados.

Ressaltamos que a medida de controle μ utilizada é singular em relação à medida de Lebesgue. Isto significa que quando uma está ativa a outra permanece inativa. Geralmente ativamos a medida de controle μ somente em alguns instantes cruciais, os quais chamamos de átomos de μ . Nestes instantes a trajetória salta, isto é, nestes instantes a trajetória é descontínua.

Uma grande dificuldade que surge ao tentarmos aplicar o método de Lyapounov é a de encontrar um par de funções de Lyapounov adequado ao problema. Geralmente, estas funções estão relacionadas com a norma do \mathbb{R}^n ou com a energia do sistema. Às vezes é necessário uma dose de ingenuidade e/ou intuição física para determiná-las.

Exemplo 2.1.

Vamos analisar a controlabilidade (estabilidade) à origem do sistema (F, \mathbf{G}) com

- $F(x) = Ax$ e
- $\mathbf{G}(x) = Bx$,

onde $x = \text{col}(x_1, x_2)$ e

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. Suponhamos que μ toma valores em \mathbb{R}^+ . Neste caso $\bar{x} = \text{col}(0, 0)$.

Tomemos

$$Q(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \quad \text{e} \quad V(x) = \frac{1}{9}x_1^2 + \frac{2}{9}x_2^2$$

como sendo um par de funções de Lyapounov. Temos que

$$\langle \nabla Q(x), F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v \rangle = (2v_0\alpha - \frac{1}{2}v)x_1^2 + (2v\beta - v_0\alpha + 1)x_1x_2 - (v\beta + 2v_0)x_2^2,$$

onde $(v_0, v) \in \bar{V}$. Logo escolhendo $(v_0, v) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\alpha = \frac{1}{3}$ e $\beta = -\frac{2}{3}$ obtemos

$$\langle \nabla Q(x), F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v \rangle = -\frac{1}{9}x_1^2 - \frac{2}{9}x_2^2 = -V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto a condição (2.3) está satisfeita e pelo Teorema 2.3 o sistema em questão é GAC. Então dado $x_0 = \text{col}(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ podemos construir um processo viável (x, μ) tal que $x(0) = x_0$ e $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Com $\alpha = \frac{1}{3}$ a solução da parte não-singular do sistema é dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01} \exp(t/3) \\ x_2(t) = x_{02} \exp(-t). \end{cases}$$

Logo se deixarmos o sistema evoluir apenas sob a ação do campo não-singular a trajetória não irá convergir para a origem, a menos que $x_{01} = 0$. Então vamos aplicar um impulso no sistema permitindo que o campo singular atue. Para isto vamos tomar $t = 0$ como sendo um átomo da medida de controle μ , de modo que a trajetória salte no instante inicial $t = 0$. Tomemos $\mu(dt) = l\delta_0(t)$, onde l , o tamanho do salto, será escolhido adequadamente, dependendo do estado inicial x_0 . Resolvendo $d\xi(s) = B\xi(s)d\mu(s)$ com $\beta = -\frac{2}{3}$ obtemos a trajetória que o sistema irá percorrer durante o salto:

$$\begin{cases} \xi_1(s) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x_{02}\text{sen} \frac{\sqrt{3}}{3}s + x_{01} \cos \frac{\sqrt{3}}{3}s \\ \xi_2(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_{01}\text{sen} \frac{\sqrt{3}}{3}s + x_{02} \cos \frac{\sqrt{3}}{3}s. \end{cases}$$

Logo se escolhermos l de modo que $\xi_1(l) = 0$, temos que $x(0^+) = \xi(l)$ pertence ao eixo x_2 ; e a partir daí a trajetória converge à origem sem a necessidade de algum controle, ou seja, apenas sob a ação do campo não-singular. A Figura 2.1, que mostra também o campo não-singular, ilustra esta situação com $x_0 = \text{col}(-2, 1)$ e $\hat{x}_0 = \text{col}(2, 0)$. Para

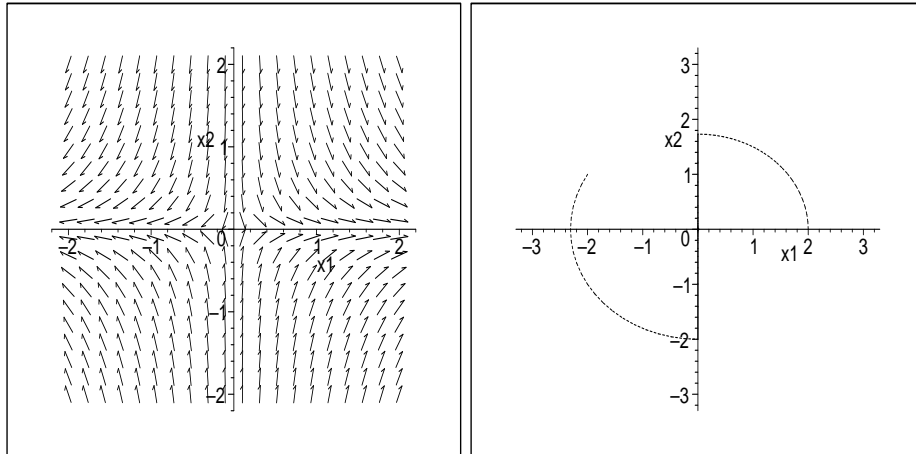


Figura 2.1: O campo não-singular e trajetórias: a parte tracejada representa a “trajetória salto”.

x_0 escolhemos $l = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ de modo que $\xi(l) = \text{col}(0, -2)$ e para \hat{x}_0 escolhemos $l = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ de modo que $\xi(l) = \text{col}(0, \sqrt{3})$. \square

Exemplo 2.2.

Vamos estudar a estabilidade do sistema não-linear (F, \mathbf{G}) com

- $F(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 + 2x_1x_2^2 \end{pmatrix}$ e
- $\mathbf{G}(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$,

onde $x = \text{col}(x_1, x_2)$ e $\bar{x} = \text{col}(0, 0)$ é o ponto de equilíbrio. Tomemos

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{e} \quad V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$$

como sendo um par de funções de Lyapounov. Analisemos o comportamento do sistema evoluindo apenas sob a ação do campo não-singular. Temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla Q(x), dx(t) \rangle &= \langle (x_1, x_2), (-2x_1 dt, -2x_2 dt + 2x_1x_2^2 dt) \rangle \\ &= -2x_1^2 dt - 2x_2^2(1 - x_1x_2) dt. \end{aligned}$$

Logo se $x \notin R := \{x : 1 - x_1x_2 > 0\}$ a condição (2.3) pode não ser satisfeita. Observando a Figura 2.2 onde traçamos o campo não-singular vemos que de fato o sistema não é GAC: trajetórias com estados iniciais fora da região R não convergem para o ponto de equilíbrio $\bar{x} = \text{col}(0, 0)$. Agora vamos mostrar que permitindo a ação do campo singular o sistema é GAC. Escolhendo $(v_0, v) = (0, 1) \in \bar{V}$ temos

$$\langle \nabla Q(x), F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v \rangle = \langle (x_1, x_2), (-x_1, -2x_2) \rangle = -x_1^2 - 2x_2^2 = -V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto temos a condição (2.3) satisfeita e pelo Teorema 2.3 o sistema é GAC.

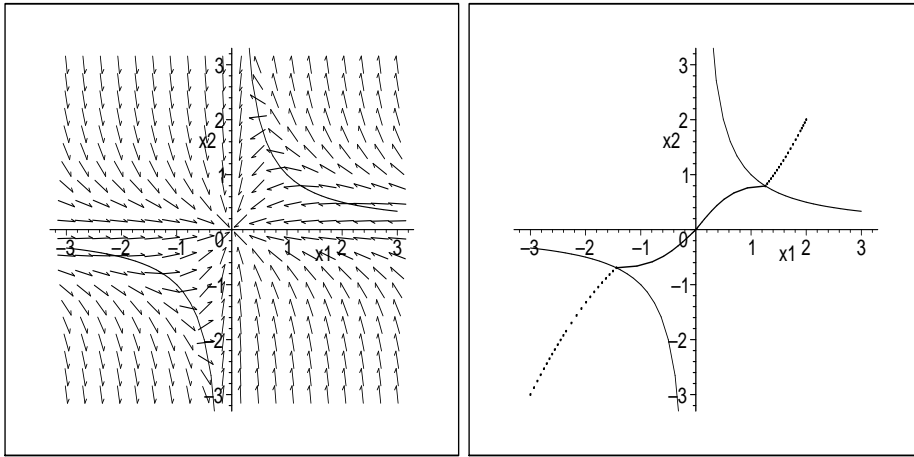


Figura 2.2: O campo não-singular e trajetórias: a parte pontilhada representa a “trajetória salto”.

Vamos então construir um processo (x, μ) tal que a trajetória x converge para a origem. Seja $x_0 = \text{col}(x_{01}, x_{02}) \notin R$. Vamos escolher a medida de controle μ de modo que no instante inicial $t = 0$ a trajetória salte para dentro da região R . Para isto tomemos μ tal que $\mu(dt) = l\delta_0(t)$, onde l , que representa o tamanho do salto, será escolhido posteriormente. As trajetórias do sistema impulsivo

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(s) = -\xi_1(s) \\ \dot{\xi}_2(s) = -2\xi_2(s) \end{cases}$$

são dadas por

$$\begin{cases} \xi_1(s) = x_{01} \exp(-s) \\ \xi_2(s) = x_{02} \exp(-2s). \end{cases}$$

Devemos escolher l de modo que $1 - \xi_1(l)\xi_2(l) > 0$. Deste modo $x(0^+) = \xi(l) \in R$. Logo basta tomar $l > \frac{\ln x_{01}x_{02}}{3}$. Para $t > 0$ deixamos o sistema evoluir naturalmente sem nenhuma interferência externa, isto é, apenas sob a ação do campo não-singular. Desta forma a trajetória converge para a origem. Para estados iniciais $x_0 \in R$ o sistema evolui naturalmente para o ponto de equilíbrio, e assim não precisamos interferir. Na Figura 2.2 traçamos duas trajetórias convergindo para a origem com estado inicial fora da região R . \square

Observação: No exemplo anterior poderíamos ter construído um processo (x, μ) mais simples considerando apenas o campo singular, já que a origem é um ponto nodal estável para este sistema. Porém um processo onde apenas o campo singular atua não é desejável, visto que isto caracteriza um salto infinito.

Capítulo 3

Invariância

Neste capítulo estudaremos a noção de invariância para os sistemas de inclusão diferencial. Vamos estudar apenas o caso autônomo, ou seja, vamos supor que as multifunções F e \mathbf{G} que definem a dinâmica não dependem explicitamente da variável tempo. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado. Dizemos que um dado sistema é invariante quando as trajetórias que começam em S permanecem em S quando o tempo vai ao infinito. Primeiro vamos fazer uma rápida exposição de invariância para os sistemas de inclusão regulares do tipo

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad (3.1)$$

onde $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Depois vamos considerar as inclusões impulsivas.

Existem dois tipos de invariância: invariância fraca e invariância forte. No que segue temos as definições destes conceitos com os respectivos resultados de caracterização, cujas demonstrações podem ser encontradas em [7].

Definição 3.1. *O sistema (S, F) é dito fracamente invariante se para cada $x_0 \in S$ existe uma trajetória $x(\cdot)$ em $[0, \infty)$ satisfazendo*

$$x(0) = x_0 \quad e \quad x(t) \in S \quad \forall t \geq 0.$$

O conjunto dos estados atingíveis a partir de x_0 no tempo T , o qual é denotado por $\mathcal{A}(x_0; T)$, é definido como:

$$\mathcal{A}(x_0; T) := \{x(T) : x \text{ é uma trajetória de (3.1) em } [0, T] \text{ satisfazendo } x(0) = x_0\}.$$

Teorema 3.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $F(x) \cap T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S;$ ¹
- (b) $F(x) \cap \text{co}T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S;$
- (c) $\min\{\langle f, \zeta \rangle : f(x) \in F(x)\} \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^P(x) \text{ e } \forall x \in S;$ ²
- (d) (S, F) é fracamente invariante;
- (e) $\forall x_0 \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $\mathcal{A}(x_0, \delta) \cap S \neq \emptyset$.

Definição 3.2. *O sistema (S, F) é dito fortemente invariante se toda trajetória $x(\cdot)$ em $[0, \infty)$ com $x(0) \in S$ é tal que $x(t) \in S \quad \forall t \geq 0$.*

No próximo teorema vamos precisar da condição de Lipschitz para multi-funções. Dizemos que uma multi-função $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ é *localmente Lipschitz* se para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existirem $\delta, K > 0$ tal que

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(y) + K\|x - y\|B \quad \forall x, y \in x_0 + \delta B.$$

Teorema 3.2. *Suponhamos que F é localmente Lipschitz. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $F(x) \subseteq T_S^C(x) \quad \forall x \in S;$ ³
- (b) $F(x) \subseteq T_S^B(x) \quad \forall x \in S;$
- (c) $F(x) \subseteq \text{co}T_S^B(x) \quad \forall x \in S;$
- (d) $\max\{\langle f, \zeta \rangle : f(x) \in F(x)\} \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^P(x) \text{ e } \forall x \in S;$
- (e) (S, F) é fortemente invariante;
- (f) $\forall x_0 \in S, \exists \varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{A}(x_0, t) \subseteq S \quad \forall t \in [0, \varepsilon]$.

¹Veja a definição do cone tangente de Bouligand T_S^B no Apêndice C.

²Veja a definição do cone normal proximal N_S^P no Apêndice C.

³Veja a definição do cone tangente de Clarke T_S^C no Apêndice C.

Para o estudo de invariância para sistemas impulsivos é necessário tratarmos as trajetórias de (1.9) como arcos multi-valorados, isto é, para cada instante de tempo t consideramos suas imagens como curvas em \mathbb{R}^n . Denotamos uma tal trajetória por $x_t(\cdot)$. Quando t é um ponto de continuidade da medida de controle μ , a imagem de $x_t(\cdot)$ é um único ponto do \mathbb{R}^n . Porém quando t é um átomo da medida de controle μ , a imagem de $x_t(\cdot)$ é dada pelo conjunto de curvas

$$x_t(\cdot) := \{\xi : \bar{\eta}(t) \rightarrow \mathbb{R}^n : \xi \text{ satisfaz (1.10)-(1.12) com } z = x(t^-) \text{ e } \alpha = \mu(\{t\})\}.$$

Veja uma ilustração na Figura 3.1.

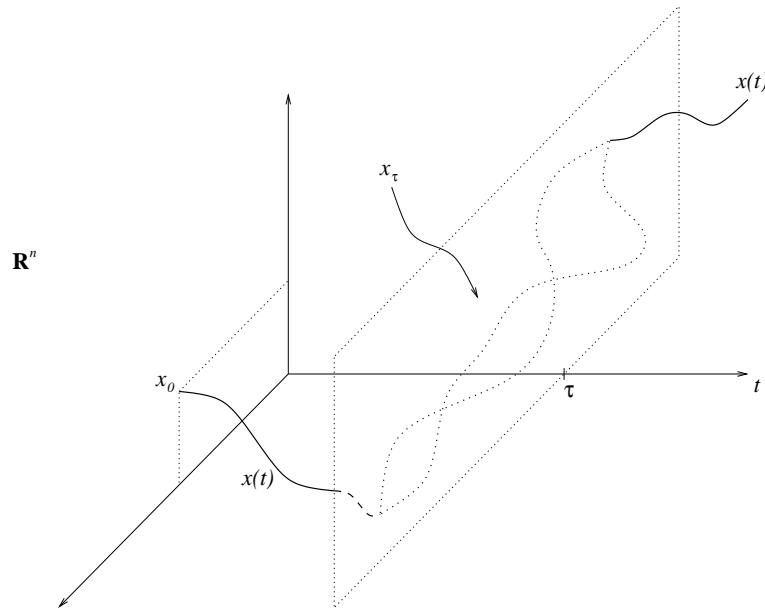


Figura 3.1: Ilustração: τ é um átomo da medida μ . As curvas pontilhadas são curvas em x_τ que conectam os pontos de descontinuidade.

Seja (x, μ) um processo viável e $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ uma ordenação dos átomos de μ . Então $x_t(\cdot) \in S$ significa

$$x(t) \in S \quad \forall t \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^\infty \{t_i\} \quad \text{e} \quad x_{t_i}(s) \subset S, \quad \forall s \in \bar{\eta}(t_i).$$

Abaixo vamos definir o conceito de invariância para os sistemas de inclusão impulsivos.

Definição 3.3. Dizemos que o sistema (F, \mathbf{G}, S) é fracamente invariante se $\forall x_0 \in S$ existe um processo viável $(x(\cdot), \mu(\cdot))$ de (1.9) com $x(0) = x_0$ e $x(t) \in S \forall t \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \{t_i\}$ e, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists \xi_i(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot)$ tal que $\xi_i(s) \in S$ para todo $s \in \bar{\eta}(t_i)$.

Definição 3.4. Se $x_t(\cdot) \in S \forall t \geq 0$, para todo processo viável $(x(\cdot), \mu(\cdot))$ de (1.9) tal que $x(0) \in S$, dizemos que o sistema (F, \mathbf{G}, S) é fortemente invariante.

Vamos agora expor um resultado que generaliza o Teorema 3.1 para o caso de sistemas impulsivos. Antes temos uma proposição que será utilizada na demonstração deste resultado. Nesta proposição vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned} \text{col} \left(\frac{dy^\circ}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) &\in H(x) := \{ \{v_0\} \times \{F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v\} : (v_0, v) \in \bar{V} \} \\ y^\circ(0) = 0, \quad y^\circ(s) &\rightarrow \infty \text{ quando } s \rightarrow \infty \\ y(0) &= y_0 = x_0, \end{aligned}$$

onde $\bar{V} = \{(v_0, v) : v_0 \geq 0, v \in K, \sum_{i=0}^q v_i = 1\}$.

Proposição 3.1. O sistema $(H, \mathbb{R} \times S)$ é fracamente invariante se e somente se o sistema (F, \mathbf{G}, S) também o é.

Prova: $[\Rightarrow]$ Suponhamos que o sistema $(H, \mathbb{R} \times S)$ é fracamente invariante. Então existe uma trajetória $\tilde{y} = (y^\circ, y)$ tal que $\tilde{y}(0) = \text{col}(0, x_0)$, $y^\circ(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$ e $y(s) \in S, \forall s \geq 0$. Então de maneira análoga à feita na demonstração de Teorema 2.3, podemos construir um processo viável (x, μ) tal que $x(t) = y(\eta(t)) \forall t \in (0, \infty)$. Portanto $x(0) = x_0, x(t) \in S \forall t \geq 0$ e $\exists \xi_i(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot)$ tal que $\xi_i(s) = y(s) \in S \forall s \in \bar{\eta}(t_i)$, de modo que o sistema (F, \mathbf{G}, S) é fracamente invariante.

$[\Leftarrow]$ Seja $x_0 \in S$. Se (F, \mathbf{G}, S) é fracamente invariante existe um processo viável (x, μ) de (1.9) com $x(0) = x_0, x(t) \in S \forall t \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \{t_i\}$ e $\forall i \exists \xi_i(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot)$ tal que $\xi_i(s) \in S$, para todo $s \in \bar{\eta}(t_i)$. Pelo Teorema 1.2 existe uma trajetória \hat{y} de $\{F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v : (v_0, v) \in \bar{V}\}$ satisfazendo $x(t) = \hat{y}(\eta(t)) \forall t \in (0, \infty)$. Defina

$$y^\circ(s) = \theta(s) \quad \text{e} \quad y(s) = \begin{cases} \hat{y}(s) = x(\theta(s)), & \text{se } s \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \bar{\eta}(t_i) \\ \xi_i(s), & \text{se } s \in \bar{\eta}(t_i), \forall i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Então para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $\tilde{y} = (y^\circ, y)$ tal que $\tilde{y}(0) = \text{col}(0, x_0)$, $y^\circ(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$ (pois pela definição, θ é crescente) e $\tilde{y}(s) = \text{col}(y^\circ(s), y(s)) \in \mathbb{R} \times S$, $\forall s \geq 0$. Portanto o sistema $(H, \mathbb{R} \times S)$ é fracamente invariante. ■

Neste caso de sistemas impulsivos, o conjunto dos estados atingíveis é dado por

$$\mathcal{A}(x_0; T) := \{x(T) : x \text{ é um processo viável de (1.9) com } x(0) = x_0\}.$$

Teorema 3.3. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $H(x) \cap T_{\mathbb{R} \times S}^B(x^\circ, x) \neq \emptyset \quad \forall (x^\circ, x) \in \mathbb{R} \times S$;
- (b) $H(x) \cap \text{co}T_{\mathbb{R} \times S}^B(x^\circ, x) \neq \emptyset \quad \forall (x^\circ, x) \in \mathbb{R} \times S$;
- (c) *Para cada $(x^\circ, x) \in \mathbb{R} \times S$ existem $(v_0, v) \in \bar{V}$, $f(x) \in F(x)$ e $\mathbf{g}(x) \in \mathbf{G}(x)$ tais que*

$$\langle (v_0, v_0 f + \sum_{i=1}^q v_i g_i), (\zeta^\circ, \zeta) \rangle \leq 0 \quad \forall (\zeta^\circ, \zeta) \in N_{\mathbb{R} \times S}^P(x^\circ, x);$$

- (d) *O sistema (F, \mathbf{G}, S) é fracamente invariante;*
- (e) $\forall x_0 \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $\mathcal{A}(x_0; \delta) \cap S \neq \emptyset$.

Observações:

- (1) Podemos verificar, direto da definição, que

$$T_{\mathbb{R} \times S}^B(x^\circ, x) = \mathbb{R} \times T_S^B(x).$$

Logo para termos o item (a) acima satisfeito é necessário e suficiente que

$$\{F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v : (v_0, v) \in \bar{V}\} \cap T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S.$$

Daqui em diante vamos denotar $\{F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v : (v_0, v) \in \bar{V}\}$ por $\tilde{F}(x)$.

- (2) Também pode ser verificado que

$$N_{\mathbb{R} \times S}^P(x^\circ, x) = \{0\} \times N_S^P(x),$$

de modo que o item (c) acima é equivalente a existir $(v_0, v) \in \bar{V}$, $f(x) \in F(x)$, $\mathbf{g}(x) \in \mathbf{G}(x)$ tais que

$$\langle v_0 f + \sum_{i=1}^q v_i g_i, \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^P(x), \quad \forall x \in S. \quad (3.2)$$

Prova do Teorema 3.3: As implicações (a) \Rightarrow (b), (d) \Rightarrow (e) e (e) \Rightarrow (d) são imediatas. Considerando que $\text{co} T_{\mathbb{R} \times S}^B(x^\circ, x) \subset [N_{\mathbb{R} \times S}^P(x^\circ, x)]^\circ$ e que

$$[N_{\mathbb{R} \times S}^P(x^\circ, x)]^\circ = \{(w^\circ, w) \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle (w^\circ, w), (\zeta^\circ, \zeta) \rangle \leq 0, \forall (\zeta^\circ, \zeta) \in N_{\mathbb{R} \times S}^P(x^\circ, x)\}$$

a implicação (b) \Rightarrow (c) também é imediata.

Mostremos agora que (c) \Rightarrow (d). Seja $x_0 \in S$. Considere o sistema (\tilde{F}, S) . De (3.2) obtemos

$$\min\{\langle w, \zeta \rangle : w \in \tilde{F}(x)\} \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^P(x).$$

Segue, pelo Teorema 3.1, que existe uma trajetória $y(\cdot)$ de \tilde{F} em $[0, \infty)$ tal que $y(0) = x_0$ e $y(s) \in S$ para todo $s \geq 0$. A partir daí construímos um processo (x, μ) de (1.9), de forma completamente análoga à construção de (x, μ) na demonstração do Teorema 2.3, com $x(t) = y(\eta(t))$ para uma função η apropriada tal que $x(0) = x_0$, $x(t) \in S$ para todo $t \geq 0$ e $\xi_{t_i}(s) \in S \forall s \in \bar{\eta}(t_i)$, para todo átomo t_i de μ e alguma função $\xi_i(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot)$. Portanto o sistema (F, \mathbf{G}, S) é fracamente invariante.

Finalmente, mostremos que (e) \Rightarrow (a). Como já foi citado na observação (1) acima, é suficiente mostrarmos que

$$\{F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v : (v_0, v) \in \bar{V}\} \cap T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S.$$

Observe que (d) é equivalente a (e). Assim, pela Proposição 3.1, podemos concluir que a afirmação (e) vale também para o conjunto dos estados atingíveis para versão absolutamente contínua

$$\dot{y}(s) \in F(y(s))\dot{\theta}(s) + \mathbf{G}(y(s))\dot{\gamma}(s).$$

Isto nos permite adaptar a demonstração da mesma afirmação para o caso regular. Suponha que (e) valha para a versão absolutamente contínua dos estados atingíveis,

que passamos a denotar por $\mathcal{A}^y(x_0, t)$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\exists \delta_n \in (0, 1/n)$ com $\mathcal{A}^y(x_0, \delta_n) \cap S \neq \emptyset$. Isto implica que, para cada n ,

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(s) &\in F(y_n(s))\dot{\theta}_n(s) + \mathbf{G}(y_n(s))\dot{\gamma}_n(s) \\ &\subset \{F(y_n(s))v_0 + \mathbf{G}(y_n(s))v : (v_0, v) \in \bar{V}\} \\ &= \tilde{F}(y_n(s)). \end{aligned}$$

Aqui (θ_n, γ_n) são complementamentos gráficos de medidas $\mu_n \in C^*([0, \infty); K)$.

As funções y_n possuem a mesma constante de Lipschitz K . Então

$$\frac{\|y_n(\delta_n) - x_0\|}{\delta_n} \leq K \quad \forall n.$$

Logo, tomando subsequências (não re-indexamos), existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n(\delta_n) - x_0}{\delta_n}$. Isto é, $v \in T_S^B(x_0)$. Portanto se mostrarmos que $v \in \tilde{F}(x_0)$ obteremos (a). Podemos escrever

$$y_n(\delta_n) - x_0 = \int_0^{\delta_n} \dot{y}_n(s) ds.$$

Dado $\varepsilon \geq 0$, para n suficientemente grande, como \tilde{F} é semi-contínua superior, segue que

$$y_n(\delta_n) - x_0 \in \int_0^{\delta_n} \{\tilde{F}(x_0) + \varepsilon B\} ds.$$

Dividindo por δ_n e passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$v \in \tilde{F}(x_0) + \varepsilon B.$$

Como ε é arbitrário, o resultado segue. ■

A proposição abaixo será utilizada na demonstração do próximo teorema, que generaliza o Teorema 3.2 para o caso de sistemas de inclusão impulsivos.

Proposição 3.2. *O sistema $(H, \mathbb{R} \times S)$ é fortemente invariante se e somente se o sistema (F, \mathbf{G}, S) também o é.*

Prova:

[\Rightarrow] Seja (x, μ) um processo viável de (1.9) tal que $x(0) \in S$. Então, segue do Teorema 1.2 que existe uma trajetória y de $F(x)\dot{\theta} + \mathbf{G}(x)\dot{\gamma} \in \{F(x)v_0 + \mathbf{G}(x)v : (v_0, v) \in$

\bar{V} tal que $y(0) = x(0) \in S$, $y(s) = x(\theta(s))$ para todo $s \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \bar{\eta}(t_i)$ e $y(s) \in x_{t_i}(s)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pondo $y^\circ(s) = \theta(s)$, obtemos uma trajetória $\tilde{y} = (y^\circ, y)$ de H satisfazendo $\tilde{y}(0) = (0, y(0)) \in \mathbb{R} \times S$. Da hipótese de $(H, \mathbb{R} \times S)$ ser fortemente invariante, segue $\tilde{y}(s) = (y^\circ(s), y(s)) \in \mathbb{R} \times S$ para todo $s \geq 0$. Como $y(s)$ pode ser qualquer curva em x_{t_i} , que terá as mesmas propriedades, segue que $x_{t_i}(\cdot) \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, segue de $x(t) = y(\eta(t))$ que $x_t(\cdot) \in S$ para todo $t \geq 0$. Portanto, (F, \mathbf{G}, S) é fortemente invariante.

[\Leftarrow] Seja $\tilde{y} = (y^\circ, y)$ uma trajetória arbitrária de H com $\tilde{y}(0) = (0, y(0)) \in \mathbb{R} \times S$. É claro que $y^\circ(s) \in \mathbb{R}$ para todo $s \geq 0$. Então nos resta mostrar que dado $T > 0$, arbitrário, $y(T) \in S$. Podemos construir um processo viável (x, μ) de (F, \mathbf{G}) em $[0, T]$, com $x(0) = y(0) \in S$ de forma completamente análoga à feita na demonstração do Teorema 2.3. Seja $T^* := \eta(T)$. Como (F, \mathbf{G}, S) é fortemente invariante, temos que $x_t(\cdot) \in S$ para todo $t \in [0, T]$. Por construção temos $y(s) = x(\theta(s))$ para todo $s \in [0, T^*] \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \bar{\eta}(t_i)$ e $y(s) \in x_{t_i}(s)$ para todo $s \in \bar{\eta}(t_i)$. Logo $y(s) \in S$ para todo $s \in [0, T^*]$. Mas $T^* \geq T$, o que implica $y(T) \in S$. Como a solução \tilde{y} é arbitrária, segue que $(H, \mathbb{R} \times S)$ é fortemente invariante. ■

Teorema 3.4. *Suponha que F e \mathbf{G} são localmente Lipschitz. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$(a) \quad H(x) \subseteq T_{\mathbb{R} \times S}^C(x^\circ, x) \quad \forall (x^\circ, x) \in \mathbb{R} \times S;$$

$$(b) \quad H(x) \subseteq T_{\mathbb{R} \times S}^B(x^\circ, x) \quad \forall (x^\circ, x) \in \mathbb{R} \times S;$$

$$(c) \quad H(x) \subseteq \text{co}T_{\mathbb{R} \times S}^B(x^\circ, x) \quad \forall (x^\circ, x) \in \mathbb{R} \times S;$$

$$(d) \quad \forall (x^\circ, x) \in \mathbb{R} \times S, \forall (v_0, v) \in \bar{V}, \text{ temos}$$

$$\max_{f \in F(x), \mathbf{g} \in \mathbf{G}(x)} \langle (v_0, v_0 f + \sum_{i=1}^q v_i g_i), (\zeta^\circ, \zeta) \rangle \leq 0 \quad \forall (\zeta^\circ, \zeta) \in N_{\mathbb{R} \times S}^P(x^\circ, x);$$

$$(e) \quad \text{O sistema } (F, \mathbf{G}, S) \text{ é fortemente invariante;}$$

$$(f) \quad \forall x_0 \in S, \exists \varepsilon > 0, \text{ tal que } \mathcal{A}(x_0; t) \subseteq S \quad \forall t \in [0, \varepsilon].$$

Prova: Primeiro observe que H herda de F e \mathbf{G} a Lipschitz continuidade e as hipóteses básicas.

Decorre do Teorema 3.2 que (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a) e que (d) é equivalente a $(H, \mathbb{R} \times S)$ ser fortemente invariante. Por outro lado, a invariância forte de $(H, \mathbb{R} \times S)$, pela Proposição 3.2, é equivalente ao item (e). Assim, para concluir a demonstração basta verificar que (e) é equivalente a (f). Mas isto é imediato, concluindo a demonstração. ■

Observação: Ressaltamos mais uma vez que

$$N_{\mathbb{R} \times S}^P(x^\circ, x) = \{0\} \times N_S^P(x),$$

de modo que o item (d) acima é equivalente a

$$\max_{f \in F, g \in \mathbf{G}} \langle v_0 f + \sum_{i=1}^q v_i g_i, \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^P(x), \forall x \in S \text{ e } \forall (v_0, v) \in \bar{V}. \quad (3.3)$$

Exemplos

Nos exemplos que seguem utilizamos sistemas bastante simples. Contudo, com a teoria desenvolvida neste capítulo podemos lidar com sistemas mais gerais (ou complexos). Vamos apresentá-los apenas à título de ilustração; para mostrar como é o comportamento de um sistema impulsivo, e como a dinâmica impulsiva influencia a evolução do sistema. Neste exemplos iremos explorar apenas o caso de invariância fraca visto que poucas aplicações surgem no contexto de invariância forte.

Ressaltamos que a medida de controle μ utilizada é singular em relação à medida de Lebesgue. Isto significa que quando uma está ativa a outra permanece inativa. Geralmente ativamos a medida de controle μ somente em alguns instantes cruciais, os quais chamamos de átomos de μ . Nestes instantes a trajetória salta, isto é, a trajetória é descontínua nos átomos de μ .

Exemplo 3.1.

Seja $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Vamos estudar a invariância do sistema (F, \mathbf{G}, S) com

- $F(x) = \{(|x_2| - u - \frac{1}{2}, u) : -1 \leq u \leq 1\}$;

- $\mathbf{G}(x) = \left\{ \left(-\frac{x_1}{|x_1|}, k \right) : k \geq 0 \right\}$ e
- $S = \{(x_1, x_2) : -2 \leq x_1 \leq 2\}$.

Neste caso temos

$$N_S^P(x_1, x_2) = \left\{ \left(\lambda \frac{x_1}{|x_1|}, 0 \right) : \lambda \geq 0 \right\},$$

para $x_1 = \pm 2$. Para outros pares (x_1, x_2) , $N_S^P(x_1, x_2) = \{(0, 0)\}$ e a desigualdade (3.2) é claramente satisfeita. No primeiro caso, tomando $(v_0, v_1) = (0, 1) \in \bar{V}$, segue (para todos os valores de u) que

$$\begin{aligned} & \left\langle v_0 \left(|x_2| - u - \frac{1}{2}, u \right) + v_1 \left(-\frac{x_1}{|x_1|}, k \right), \left(\lambda \frac{x_1}{|x_1|}, 0 \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(-\frac{x_1}{|x_1|}, k \right), \left(\lambda \frac{x_1}{|x_1|}, 0 \right) \right\rangle = -\lambda \leq 0, \end{aligned}$$

de modo que (3.2) é satisfeita e pelo Teorema 3.3 o sistema é fracamente invariante.

Vamos analisar mais detalhadamente o caso com $u = k = 1$. Neste caso as trajetórias são dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = \int |x_2(t)| dt - \frac{3}{2}t + A \\ x_2(t) = t + B, \end{cases}$$

onde A e B são constantes arbitrárias que podem ser encontradas por condições iniciais.

Tome

$$\mu(dt) := \delta_{t_i}(t)dt$$

como medida de controle, onde δ_{t_i} é a função impulso unitário em $t = t_i$. Aqui $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, a seqüência de átomos da medida de controle, são tais que ou

$$(i) \quad x_1(t_i) = -2 \text{ e } -\frac{3}{2} \leq x_2(t_i) \leq \frac{3}{2}$$

ou

$$(ii) \quad x_1(t_i) = 2 \text{ e } x_2(t_i) > \frac{3}{2} \text{ ou } x_2(t_i) < -\frac{3}{2}.$$

Os itens (i) and (ii) acima significam que a trajetória alcança a fronteira de S em uma região onde o campo não-singular “aponta para fora de S ”. Neste momento

vamos ativar o campo singular de modo que a trajetória será “empurrada” para dentro de S e portanto teremos uma descontinuidade. Nós ressaltamos que fora dos átomos t_i o campo singular \mathbf{G} não está ativo e o sistema evolui apenas sob a ação do campo não-singular F . As curvas em x_{t_i} , que conectam os pontos de descontinuidade da trajetória, são dadas por

$$\begin{cases} \xi_1(t) = t - 2 - \eta(t_i^-) \\ \xi_2(t) = t + x_2(t_i^-) - \eta(t_i^-) \end{cases}$$

se $x_1(t_i) = -2$ ou

$$\begin{cases} \xi_1(t) = -t + 2 + \eta(t_i^-) \\ \xi_2(t) = t + x_2(t_i^-) - \eta(t_i^-) \end{cases}$$

se $x_1(t_i) = 2$, onde η é a função de reparametrização do tempo definida no Capítulo 1. Desde que $\eta(t_i) - \eta(t_i^-) = 1$ (recorde que a medida de controle μ é uma função impulso unitário), temos que

$$\xi_1(\eta(t_i)) = \eta(t_i) - 2 - \eta(t_i^-) = -1$$

se $x_1(t_i) = -2$ e

$$\xi_1(\eta(t_i)) = -\eta(t_i) + 2 + \eta(t_i^-) = 1$$

se $x_1(t_i) = 2$, isto é, o sistema sempre faz com que a trajetória salte para as retas $x_1 = -1$ ou $x_1 = 1$ quando $x_1(t_i) = -2$ ou $x_1(t_i) = 2$, respectivamente. A Figura 3.2 mostra o campo não-singular em S e uma trajetória com as respectivas “trajetórias salto” com ponto inicial $(-2, -3)$. \square

Exemplo 3.2.

Vamos estudar a invariância do sistema (F, \mathbf{G}, S) com

- $F(x) = Ax$;
- $\mathbf{G}(x) = Bx$ e
- $S = \{x : x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \text{ e } x_2 \leq 2\}$,

onde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix},$$

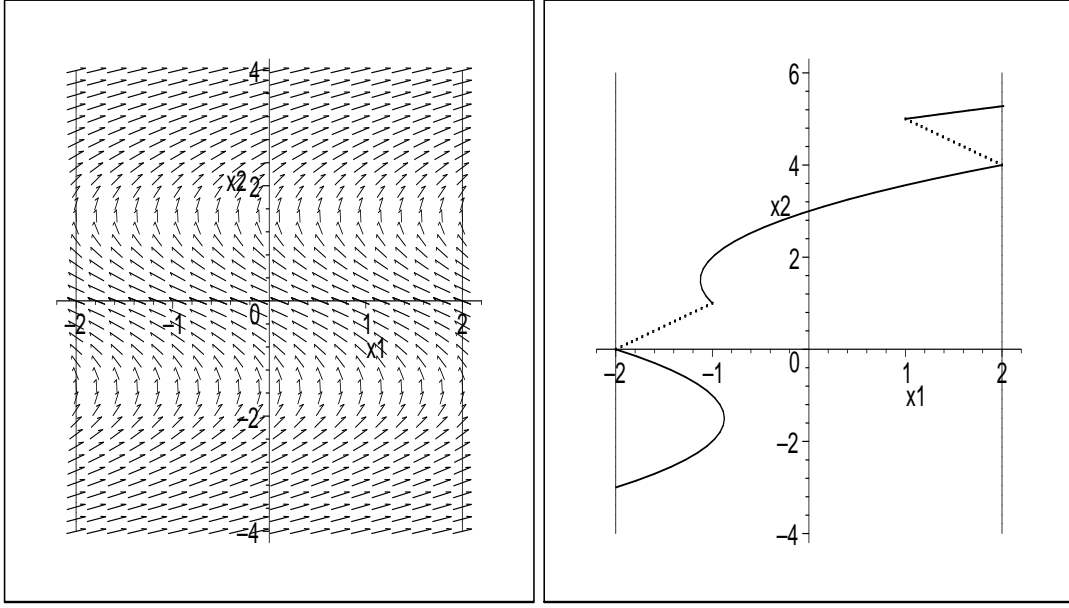


Figura 3.2: O campo não-singular em S e uma trajetória: as partes tracejadas representam as “trajetórias salto”.

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 < 8$, $\beta \neq 0$ e $x = \text{col}(x_1, x_2)$.

Vamos aplicar o Teorema 3.3. Temos que satisfazer a desigualdade (3.2) para todo $x \in S$. Vamos escolher $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Para $x = \text{col}(-\sqrt{5}, 2)$ temos

$$N_S^P(x) = \{\lambda\zeta : \zeta_1 \leq \frac{-\sqrt{5}}{2}\zeta_2 \text{ e } -\zeta_1, \zeta_2, \lambda \geq 0\},$$

onde $\zeta = \text{col}(\zeta_1, \zeta_2)$. Tomemos $(v_0, v_1) = (0, 1) \in \bar{V}$. Daí

$$\langle v_0 f + v_1 g, \lambda\zeta \rangle = \langle (\sqrt{5}, -2), (\lambda\zeta_1, \lambda\zeta_2) \rangle \leq -\frac{9}{2}\lambda\zeta_2 \leq 0.$$

Para $x = \text{col}(\sqrt{5}, 2)$ temos

$$N_S^P(x) = \{\lambda\zeta : \zeta_1 \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\zeta_2 \text{ e } \zeta_1, \zeta_2, \lambda \geq 0\},$$

onde $\zeta = \text{col}(\zeta_1, \zeta_2)$. Tomemos $(v_0, v_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \bar{V}$. Daí

$$\langle v_0 f + v_1 g, \lambda\zeta \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}(2\sqrt{5} - 4) - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}2 \right), (\lambda\zeta_1, \lambda\zeta_2) \right\rangle \leq \left(\frac{1 - 2\sqrt{5}}{4} \right) \lambda\zeta_2 \leq 0.$$

Para $x = \text{col}(x_1, 2)$, com $-\sqrt{5} < x_1 < \sqrt{5}$, temos

$$N_S^P(x) = \{(0, \lambda) : \lambda \geq 0\}.$$

Tomemos $(v_0, v_1) = (0, 1) \in \bar{V}$. Então

$$\langle v_0 f + v_1 g, (0, \lambda) \rangle = \langle (-x_1, -2), (0, \lambda) \rangle = -2\lambda \leq 0.$$

Para outros $x \in S$ temos

$$\begin{aligned} N_S^P(x) &= \{(0, 0)\} \quad \text{se } x \in \text{int } S; \quad \text{ou} \\ N_S^P(x) &= \{\lambda(2x_1, 2x_2) : \lambda \geq 0\} \quad \text{se } x \in \text{fr } S. \end{aligned}$$

No primeiro caso a desigualdade (3.2) é claramente satisfeita. Para o segundo caso tomemos $(v_0, v_1) = (0, 1) \in \bar{V}$. Então

$$\langle v_0 f + v_1 g, \lambda(2x_1, 2x_2) \rangle = \langle (-x_1, -2), (2\lambda x_1, 2\lambda x_2) \rangle = -2\lambda(x_1^2 + x_2^2) \leq 0.$$

Portanto temos (3.2) satisfeita para todo ponto em S . Logo pelo Teorema 3.3 o sistema (F, \mathbf{G}, S) é fracamente invariante e assim para todo $x_0 = \text{col}(x_{01}, x_{02}) \in S$ podemos construir um processo (x, μ) tal que $x(0) = x_0$, $x(t) \in S$, $\forall t \geq 0$ e $\exists \xi \in x_\tau$ com $\xi(s) \in S$ se τ é um átomo de μ .

Neste caso com $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ a matriz A possui auto-valores complexos com parte real positiva, ou seja, temos um foco instável e portanto as trajetórias tendem ao infinito quando $t \rightarrow \infty$. Então precisamos ativar o campo singular para impedir que as trajetórias escapem de S . Para isto tomemos

$$\mu(dt) := l\delta_{t_i}(t)$$

como medida de controle, onde $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é a seqüência de átomos e l é o tamanho do salto. Cada t_i é tal que $x(t_i) \in \text{fr } S^4$. O tamanho do salto deve ser escolhido adequadamente para cada átomo t_i . Vamos fazer isso de modo que a trajetória salte sempre para a

⁴fr S denota a fronteira de S .

região $\{x : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset S$. Se $x(t_i)$ é o estado inicial então para cada i as trajetórias do campo singular são dadas por

$$\begin{cases} \xi_1(t) = x_1(t_i) \exp(\eta(t_i^-) - t) \\ \xi_2(t) = x_2(t_i) \exp(\eta(t_i^-) - t). \end{cases}$$

Queremos que $\xi_1^2(\eta(t_i)) + \xi_2^2(\eta(t_i)) = 1$. Então, lembrando que $l = \eta(t_i) - \eta(t_i^-)$, vamos escolher

$$l = \frac{\ln(x_1(t_i)^2 + x_2(t_i)^2)}{2}.$$

A Figura 3.3 mostra uma trajetória iniciando em $x_0 = \text{col}(0, -2)$. □

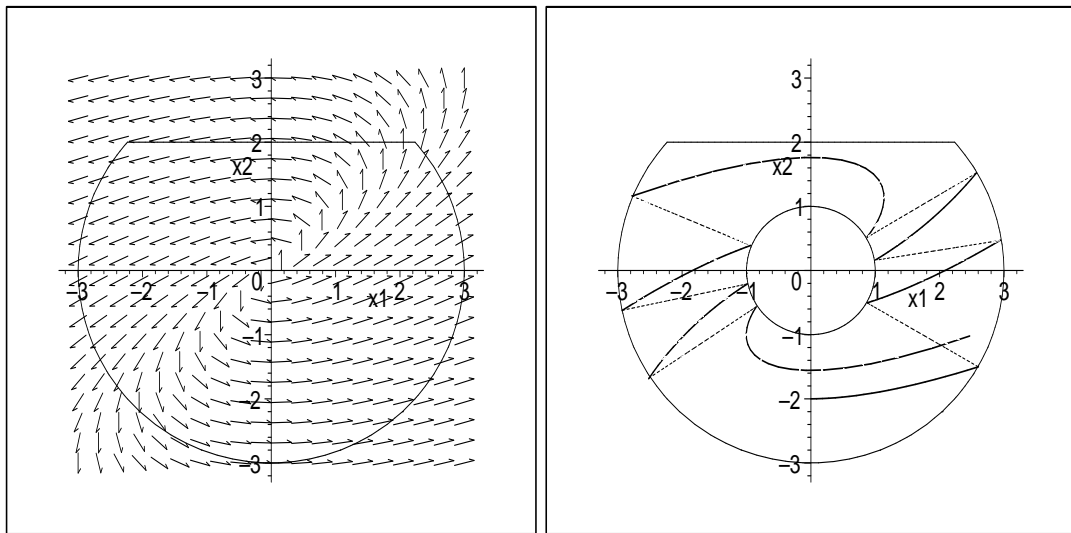


Figura 3.3: O campo não-singular em S e uma trajetória: as partes tracejadas representam as “trajetórias salto”.

Conclusão

Este trabalho se centrou no estudo de estabilidade (segundo Lyapounov) e invariância para sistemas onde a dinâmica é controlada por medida. Para isto foi necessário utilizarmos o conceito de solução robusta. Tanto na parte de invariância como na de estabilidade expomos e demonstramos resultados que são uma extensão natural do caso regular para o caso impulsivo. Estes resultados caracterizam estabilidade e invariância dando condições suficientes nos dois casos e também condições necessárias no caso de invariância. As demonstrações destes resultados consistiram em reduzir ao caso regular através da utilização de um sistema dinâmico convencional equivalente. A maior dificuldade nas demonstrações surgiu na construção de uma medida regular no intervalo infinito $[0, \infty)$, medida esta que dá origem à trajetória da inclusão diferencial impulsiva. No final dos Capítulos 2 e 3 incluímos alguns exemplos e a construção destes exemplos foi particularmente interessante além de nos ajudar a melhor compreender os assuntos estudados.

O estudo realizado durante a execução do projeto de mestrado na minha opinião foi de alta qualidade e de bastante importância científica com vistas à aplicações em inúmeras áreas de interesse (as quais já citamos anteriormente). Foi abordado temas atuais de grande potencial para novas pesquisas. Tivemos um grande enriquecimento cultural (matemático) quando entramos em contato com as teorias básicas envolvidas neste estudo e com o próprio estudo.

Apêndice A

Teoria da Medida

Neste apêndice faremos um estudo introdutório a respeito de Teoria da Medida. Este estudo é baseado em [12]. Não incluiremos a maioria das demonstrações.

Funções de Variação Limitada

Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. A *variação de f em $[a, b]$* é dada por

$$W_a^b(f) := \sup_{\pi} \sum_{i=1}^n \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|$$

onde π é uma partição de $[a, b]$: $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Quando $W_a^b < \infty$ dizemos que f é uma *função de variação limitada* em $[a, b]$. Um exemplo de funções de variação limitada são as funções monótonas. Se f é uma tal função, $W_a^b = |f(b) - f(a)|$. Portanto uma função de variação limitada pode ser descontínua. Contudo nem toda função contínua é de variação limitada. Veja um exemplo na Figura A.1. Neste exemplo a função f (definida em $[0, 1]$) é até mesmo diferenciável. Agora se f é Lipschitz contínua em $[a, b]$ então f é de variação limitada em $[a, b]$.

Vejamos agora alguns resultados envolvendo as funções de variação limitada.

(R1) $W_a^c(f) = W_a^b(f) + W_b^c(f), \quad a < b < c;$

(R2) $W_c^d(f) \leq W_a^b(f), \quad a \leq c < d \leq b;$

(R3) *Se f é de variação limitada em $[a, b]$ e em $[b, c]$ então f é de variação limitada em $[a, c]$;*

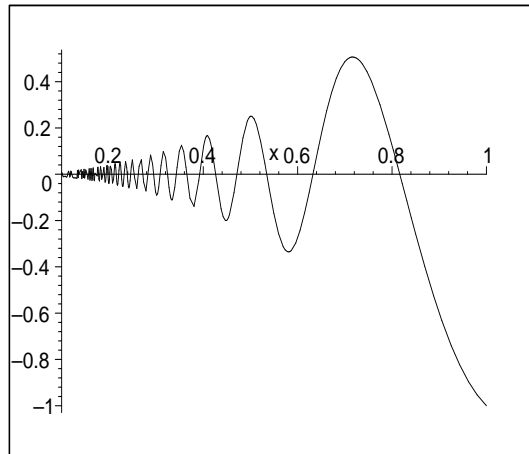


Figura A.1: $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$.

- (R4) Se f é de variação limitada em $[a, b]$ então f é de variação limitada em qualquer sub-intervalo de $[a, b]$;
- (R5) Se f é de variação limitada em $[a, b]$ então f é limitada em $[a, b]$;
- (R6) A combinação linear, o produto e a divisão (desde que o divisor seja não-nulo) de funções de variação limitada são funções de variação limitada;
- (R7) Se f é de variação limitada em $[a, b]$ e é contínua à direita (à esquerda) em x_0 então a função variação $x \mapsto W_a^x(f)$ é contínua à direita (à esquerda) em x_0 ;
- (R8) O limite de uma seqüência convergente $\{f_n\}$ de funções de variação limitada tais que $W_a^b(f_n) \leq K$, $\forall n$, é uma função de variação limitada;
- (R9) **(Decomposição canônica de Jordan)** Toda função de variação limitada em $[a, b]$ pode ser escrita como a diferença de duas funções crescentes (e portanto de variação limitada): $f = \varphi + \psi$, onde $\varphi(x) = \frac{1}{2}(W_a^x(f) + f(x))$ e $\psi(x) = \frac{1}{2}(W_a^x(f) - f(x))$;

Obs.: Segue de (R6) que a diferença de duas funções de variação limitada é de variação limitada. O Resultado (R9) é a recíproca deste fato.

(R10) Uma função de variação limitada possui no máximo um número enumerável de pontos de descontinuidade;

(R11) (1.º Teorema de Helly) Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções de variação limitada tais que $W_a^b(f_n) \leq M$ e $|f_n(a)| \leq M, \forall n$. Então existe uma subseqüência de $\{f_n\}$ que converge em $[a, b]$ para uma função de variação limitada.

Se f é definida num intervalo infinito, digamos $[a, \infty)$, então definimos a variação de f , denotada por $W_a^\infty(f)$, como abaixo:

$$W_a^\infty(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} W_a^T(f), \quad (\text{A.1})$$

onde $T > a$. Quando o limite em (A.1) é finito, dizemos que f é de variação limitada.

Conjuntos e Funções Mensuráveis e Medidas

Seja X um espaço arbitrário. Uma família \mathcal{S} não vazia de subconjuntos de X é dita uma álgebra se

- (i) $A, B \in \mathcal{S} \implies A \cup B \in \mathcal{S}$;
- (ii) $A, B \in \mathcal{S} \implies A \setminus B \in \mathcal{S}$.

Agora se \mathcal{S} satisfaz

- (i) $A_i \in \mathcal{S}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$;
- (ii) $A, B \in \mathcal{S} \implies A \setminus B \in \mathcal{S}$,

dizemos que \mathcal{S} é uma σ -álgebra. Quando $A \in \mathcal{S}$ dizemos que A é \mathcal{S} -mensurável.

Tomando $A = B \in \mathcal{S}$ temos que $A \setminus B = \emptyset \in \mathcal{S}$. Também se $A_i \in \mathcal{S}, i \in \mathbb{N}$, temos

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}, \quad \text{pois} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i).$$

Teorema A.1. A intersecção de σ -álgebras é uma σ -álgebra.

Prova: Sejam $\{\mathcal{S}_n\}$ uma família de σ -álgebras e $\mathcal{S} = \bigcap_n \mathcal{S}_n$. Se $A_i \in \mathcal{S}, i \in \mathbb{N}$, então $A_i \in \mathcal{S}_n, \forall n$. Logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}_n, \forall n$, o que implica que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$. Analogamente se mostra que $A \setminus B \in \mathcal{S}$ quando $A, B \in \mathcal{S}$. ■

Seja \mathcal{K} uma família de subconjuntos de X . Pelo Teorema A.1 a intersecção de todas as σ -álgebras que contém \mathcal{K} é uma σ -álgebra, chamada σ -álgebra gerada pela família \mathcal{K} e denotada por $\mathcal{S}(\mathcal{K})$.

Sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ σ -álgebras. Definimos o *produto cartesiano das álgebras* \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 por

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \mathcal{S}(\mathcal{S}_1 \bar{\times} \mathcal{S}_2),$$

onde $\mathcal{S}_1 \bar{\times} \mathcal{S}_2$ denota a família de todos os conjuntos $E_1 \times E_2$ com $E_1 \in \mathcal{S}_1$ e $E_2 \in \mathcal{S}_2$.

A *álgebra de Borel*, denotada por $\mathcal{B}(X)$ ou simplesmente \mathcal{B} (quando não houver a possibilidade de confusão), é a σ -álgebra gerada pela família de todos os conjuntos abertos em X . Se $A \in \mathcal{B}$, dizemos que A é um *conjunto de Borel*. Pelo Teorema A.1 fica claro que a álgebra de Borel é a menor σ -álgebra que contém a família dos conjuntos abertos. Quando $X = \mathbb{R}^n$, denotamos a álgebra de Borel por \mathcal{B}_n .

Seja F um conjunto fechado. Logo $\setminus F$ é aberto. Daí $\setminus(\setminus F) = F \in \mathcal{B}$, ou seja, a álgebra de Borel contém todos os conjuntos fechados. Analogamente a σ -álgebra \mathcal{B}' gerada pela família dos conjuntos fechados contém todos os conjuntos abertos. Portanto $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, isto é, a álgebra de Borel é também gerada pela família dos conjuntos fechados. Na seqüência temos alguns resultados sobre os conjuntos de Borel.

(R12) *Seja f uma função contínua. Então a imagem inversa de todo conjunto de Borel é um conjunto de Borel;*

(R13) *O produto cartesiano de conjuntos de Borel é um conjunto de Borel;*

(R14) *Se X_1 e X_2 são espaços separáveis então $\mathcal{B}(X_1) \times \mathcal{B}(X_2) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$. Particularmente, $\mathcal{B}_{n+m} = \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m$.*

Seja \mathcal{G} a família de todos os conjuntos abertos em X . Então $A_i \in \mathcal{G} \Rightarrow A_i \in \mathcal{B}$, $i \in \mathbb{N}$, e assim $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$. Portanto todas as intersecções contáveis de conjuntos abertos são conjuntos de Borel. Denotamos a família destes conjuntos por \mathcal{G}_δ .

Considere a família \mathcal{F} de todos os conjuntos fechados em X . É claro que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$ se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, já que todo fechado é um conjunto de Borel. Logo

podemos afirmar que todas as uniões contáveis de conjuntos fechados são conjuntos de Borel. Denotamos a família destes conjuntos por \mathcal{F}_σ .

A partir das famílias \mathcal{G}_δ e \mathcal{F}_σ podemos construir a seqüência

$$\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{\sigma\delta}, \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}, \dots, \mathcal{G}_\delta, \mathcal{G}_{\delta\sigma}, \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}, \dots$$

que obviamente são famílias de conjuntos de Borel.

Seja \mathcal{S} uma σ -álgebra. Uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, onde $E \in \mathcal{S}$, é dita \mathcal{S} -*mensurável* se

$$f^{-1}((a, \infty]) = \{x : f(x) > a\} \in \mathcal{S}, \forall a.$$

Abaixo temos alguns resultados sobre funções mensuráveis.

(R15) *Sejam φ uma função real $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -mensurável e f uma função mensurável. Então a composição $\varphi \circ f$ também é mensurável;*

Obs.: Se φ é uma função contínua em $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ então φ é $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -mensurável, pois neste caso $\varphi^{-1}((a, \infty])$ é um conjunto aberto, ou seja, é um conjunto de Borel. Logo segue do Resultado (R1) que se f é uma função mensurável então as funções f^2 , $|f|$, $1/f$ e $af + b$ são também $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -mensuráveis.

(R16) *Sejam f, g funções mensuráveis em $E \in \mathcal{S}$. Então a combinação linear $af + bg$ e o produto fg são também funções mensuráveis;*

(R17) *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções mensuráveis então $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ e $\lim f_n$ (se existir) são funções mensuráveis;*

(R18) *Uma função f é mensurável se e somente se f_+ e f_- são mensuráveis, onde*

$$f_+ = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad e \quad f_- = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) > 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

(R19) *Seja f uma função definida num conjunto mensurável E . Se f é mensurável e $f(x) = g(x)$ em quase todo ponto $x \in E$, então g é mensurável.*

A função característica do conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

É fácil ver que uma condição necessária e suficiente para χ_E ser mensurável é que $E \in \mathcal{S}$ e $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{S}$.

Uma função simples f é uma função que assume apenas um número finito de valores distintos, digamos $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Se $E_i = \{x : f(x) = x_i\}$ então podemos escrever

$$f(x) = \sum_{i=1}^k x_i \chi_{E_i}(x).$$

Teorema A.2. *Toda função mensurável pode ser escrita como sendo o limite de uma seqüência de funções simples mensuráveis.*

Uma função real μ definida em uma σ -álgebra \mathcal{S} dada é uma medida se satisfaz

- (i) $\mu(E) \geq 0$, $E \in \mathcal{S}$;
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (iii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, $E_i \in \mathcal{S}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i, j$.

Se $A \in \mathcal{S}$ dizemos que A é μ -mensurável. Abaixo seguem algumas propriedades de medidas.

- (P1) $\mu(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n)$, onde E_1, \dots, E_n são disjuntos e $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$;
- (P2) Se $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$, onde $E, F \in \mathcal{S}$;
- (P3) Se $E \subset F$ e se $\mu(F) < \infty$ então $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$, onde $E, F \in \mathcal{S}$;

Uma medida μ é regular se satisfaz

- (i) $\mu(G) = \sup\{\mu(F) : G \supset F \text{ compacto}\}$, para G aberto;

(ii) $\mu(E) = \inf\{\mu(G) : E \subset G \text{ aberto}\}$, para $E \in \mathcal{B}(X)$.

Seja $A \in \mathcal{S}$. Dizemos que A tem *medida nula* se $\mu(A) = 0$.

Sejam $P(x)$ uma condição em $x \in X$ e $E \subset X$. Dizemos que $P(x)$ *vale quase sempre em E* ou $P(x)$ *vale q.s. em E* se existir $Z \subset E$ tal que $\mu(Z) = 0$ e $P(x)$ vale em $E \setminus Z$, $\forall x$.

Chamamos uma medida μ de *medida completa* se todo subconjunto de um conjunto de medida nula é mensurável, ou seja, tem medida nula. Abaixo vamos apresentar um teorema que diz que toda medida pode ser estendida a uma medida completa.

Seja \mathcal{N} a família de todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula. Vamos denotar por $\hat{\mathcal{S}}$ a álgebra gerada por $\mathcal{S} \cup \mathcal{N}$.

Teorema A.3. *Existe exatamente uma medida $\hat{\mu}$ em $\hat{\mathcal{S}}$ de modo que $\hat{\mu} = \mu$ em \mathcal{S} . Esta medida é completa.*

De acordo com o teorema acima, dizemos que a medida $\hat{\mu}$ é o *completamento* de μ e que $\hat{\mathcal{S}}$ é o *completamento* de \mathcal{S} em relação à μ .

Uma função real μ^* definida em $\mathcal{P}(X)$ (família de todos os subconjuntos de X) é chamada uma *medida externa* em X se

- (i) $\mu^*(E) \geq 0$, $E \in X$;
- (ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (iii) $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$, $E \subset F$;
- (iv) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$, $E_i \subset X$.

Dizemos que $E \subset X$ é μ^* -mensurável se

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E), \quad \forall A \subset X.$$

Do fato de $A \cap E = A \setminus (\setminus E)$ e $A \setminus E = A \cap (\setminus E)$ segue que E é mensurável se e somente se $\setminus E$ é mensurável.

Teorema A.4. *A família Λ de todos os conjuntos μ^* -mensuráveis é uma σ -álgebra. A restrição de μ^* a Λ é uma medida.*

Teorema A.5. *Se $\mu^*(E) = 0$ então E é μ^* -mensurável. A restrição de μ^* a Λ é uma medida completa.*

Prova: Seja $A \in X$. Pela propriedade (iii) de medidas externas, $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$, já que $A \cap E \subset E$. Logo, pela propriedade (i), temos que $\mu^*(A \cap E) = 0$. Agora $A \setminus E \subset A$, de onde segue que $\mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A)$. Assim

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A). \quad (\text{A.3})$$

Por outro lado $A \subset (A \cap E) \cup (A \setminus E)$. Daí

$$\mu^*(A) \leq \mu^*((A \cap E) \cup (A \setminus E)) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \quad (\text{A.4})$$

De (A.3) e (A.4) obtemos $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$, ou seja, E é μ^* -mensurável.

Seja $F \subset E \in \Lambda$, onde $\mu^*(E) = 0$. Por (iii) e (i) temos que $\mu^*(F) = 0$. Mas isto implica, pelo que acabamos de ver, que F é μ^* -mensurável. Portanto μ^* restrita a Λ é completa. ■

Suponhamos que X seja um espaço métrico com métrica ρ . Uma medida externa é chamada *medida externa métrica* se satisfaz

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F), \quad \text{quando } \rho(E, F) > 0.$$

Se μ^* é uma medida externa métrica temos, por indução, que

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E_i), \quad \text{quando } \rho(E_i, E_j), i \neq j.$$

Teorema A.6. *Quando μ^* é uma medida externa métrica todos os conjuntos de Borel em X são μ^* -mensuráveis. Assim a restrição de μ^* a $\mathcal{B}(X)$ é uma medida em $\mathcal{B}(X)$.*

Falaremos agora sobre o conteúdo de um intervalo n -dimensional, isto é, um intervalo em \mathbb{R}^n . Um tal intervalo é o produto cartesiano de n intervalos reais (finitos). Por exemplo se P é um intervalo n -dimensional fechado então podemos escrever

$$P = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]. \quad (\text{A.5})$$

Definimos o *conteúdo* de um intervalo fechado P escrito como em A.5 por

$$|P| := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Se P for aberto ou aberto apenas em um lado definimos o conteúdo de P da mesma forma.

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\cup P_i$ uma cobertura finita ou enumerável de intervalos fechados para o conjunto E . O ínfimo da soma dos conteúdos destes conjuntos é chamado *medida externa de Lebesgue* do conjunto E . Denotamos esta medida externa por m_n^* . Logo

$$m_n^*(E) = \inf_{E \subset \cup P_i} \sum |P_i|.$$

Na definição acima podemos tomar uma cobertura aberta para E ao invés da cobertura fechada. Podemos ainda nos restringir a coberturas por n -cubos¹ abertos ou fechados.

Teorema A.7. *A medida externa de Lebesgue m_n^* é uma medida externa métrica em \mathbb{R}^n .*

Dizemos que $E \subset \mathbb{R}^n$ é *Lebesgue mensurável* se é m_n^* -mensurável. Vamos denotar a família dos conjuntos Lebesgue mensuráveis por \mathcal{L}_n . \mathcal{L}_n é uma σ -álgebra e a restrição de m_n^* a \mathcal{L}_n é uma medida a qual denotamos por m_n e chamamos de *medida de Lebesgue*.

Observações:

1. Pelo Teorema A.5 segue que a medida m_n^* é completa. Pelo Teorema A.6 todos os conjuntos de Borel são Lebesgue mensuráveis. Mas nem todo conjunto Lebesgue mensurável é um conjunto de Borel;
2. Se P é um intervalo aberto (ou fechado) então $m_n(P) = |P|$;

De fato: Temos que $P \subset \bar{P}$, de onde

$$m_n(P) = m_n^*(P) \leq |\bar{P}| = |P|. \tag{A.6}$$

¹ n -cubos são intervalos n -dimensionais definidos como sendo o produto cartesiano de intervalos reais de mesmo comprimento.

Por outro lado, tomemos uma cobertura aberta $\bigcup_i Q_i$ de P . Logo $P \subset \bigcup_i Q_i$, onde Q_i são abertos, $\forall i$. Seja um intervalo fechado P_0 tal que $P \subset P_0$ e $|P| - \varepsilon < |P_0|$, $\varepsilon > 0$. Mas $P \subset P_0 \Rightarrow P_0 \subset \bigcup_i Q_i$. Pelo Teorema de Heine-Borel segue que $P_0 \subset \bigcup_{i=1}^k Q_i$ para algum $k \Rightarrow |P_0| \leq \sum_{i=1}^k |Q_i| \leq \sum_i |Q_i|$. Portanto

$$\begin{aligned} |P| - \varepsilon &\leq \sum_i |Q_i| \Rightarrow |P| - \varepsilon \leq m_n^*(P) \\ &\Rightarrow |P| \leq m_n^*(P) = m_n(P). \end{aligned} \tag{A.7}$$

De (A.6) e (A.7) obtemos $|P| = m_n(P)$. ■

3. Se E é um conjunto mensurável, então $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, onde P_i são conjuntos mensuráveis disjuntos;
4. Se $E \subset \mathbb{R}^n$, então existe um conjunto H do tipo G_δ tal que $E \subset H$ e $m_n(H) = m_n^*(E)$;
5. As condições abaixo são necessárias e suficientes para um dado conjunto E ser \mathcal{L}_n -mensurável:
 - (a) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G$ aberto tal que $E \subset G$ e $m_n^*(G \setminus E) \leq \varepsilon$;
 - (b) $\exists H$ do tipo G_δ tal que $E \subset H$ e $m_n^*(H \setminus E) = 0$;
 - (c) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ fechado tal que $F \subset E$ e $m_n^*(E \setminus F) \leq \varepsilon$;
 - (d) $\exists J$ do tipo F_σ tal que $J \subset E$ e $m_n^*(E \setminus J) = 0$.
6. A σ -álgebra \mathcal{L}_n coincide com o completamento da álgebra de Borel $\bar{\mathcal{B}}_n$ (o qual existe pelo Teorema A.3) em relação à medida m_n ;

De fato: Vimos na Observação 1 que todo conjunto de Borel é m_n^* -mensurável e que esta é uma medida completa. Logo todo subconjunto de um conjunto de Borel de medida nula é mensurável. Portanto $\bar{\mathcal{B}}_n \subset \mathcal{L}_n$.

Tome $E \in \mathcal{L}_n$. Pela Observação 5b, pondo $Z = H \setminus E$ temos que Z é mensurável, já que $m_n^*(Z) = 0$ (veja o Teorema A.5). Daí $E = H \setminus Z$, onde $H \in \mathcal{B}_n$ e $m_n^*(Z) = 0$. Da Observação 4 segue que $\exists H' \in G_\delta$ ($\Rightarrow H' \in \mathcal{B}_n$) tal que $Z \subset H'$

e $m_n(H) = m_n^*(Z) = 0$. Logo Z é um subconjunto de um conjunto de Borel de medida nula. Assim $Z \in \bar{\mathcal{B}}_n$, de onde $H \setminus Z \in \bar{\mathcal{B}}_n$ (já que $H \in \mathcal{B}_n$). Portanto $\mathcal{L}_n \subset \bar{\mathcal{B}}_n$ e deste modo temos $\mathcal{L}_n = \bar{\mathcal{B}}_n$. ■

7. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é \mathcal{L}_n -mensurável e $F \subset \mathbb{R}^p$ é \mathcal{L}_p -mensurável então $E \times F \subset \mathbb{R}^{n+p}$ é \mathcal{L}_{n+p} -mensurável. Além disso, $m_{n+p}(E \times F) = m_n(E)m_p(F)$;
8. Sejam $G \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto \mathcal{L}_n -mensurável e $T : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação Lipschitz contínua. Então a imagem de conjuntos \mathcal{L}_n -mensuráveis é \mathcal{L}_n -mensurável;
9. Seja f uma função definida num conjunto mensurável E . Então f é \mathcal{L}_n -mensurável se e somente se $\exists F \subset E$ fechado tal que a restrição f_F é contínua e $m_n^*(E \setminus F) < \varepsilon$;
10. Seja f uma função definida num conjunto mensurável E . Se f é \mathcal{L}_n -mensurável então existe uma seqüência de funções contínuas que converge para f q.s. em E .

No caso da medida de Lebesgue é fácil ver que os conjuntos enumeráveis são exemplos de conjuntos de medida nula. Mas podemos dar exemplos de conjuntos não-enumeráveis de medida nula. O conjunto de Cantor, cuja construção faremos a seguir, é um exemplo disto. Considere o conjunto $E_0 = [0, 1]$. Retirando uma terça parte deste conjunto obtemos o conjunto $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Retirando uma terça parte dos conjuntos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ obtemos o conjunto $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Repetindo este raciocínio obtemos uma seqüência $\{E_n\}$ de conjuntos tal que $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ e para cada n , E_n é a união de 2^n conjuntos cada um com comprimento 3^{-n} , de modo que $m_n(E_n) = (\frac{2}{3})^n$. O conjunto

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

é o conjunto de Cantor. Temos que

$$P \subset E_n \Rightarrow m(P) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \forall n.$$

Logo tomando o limite com $n \rightarrow \infty$ obtemos $m(P) = 0$.

Vamos dar mais um exemplo. Mas desta vez vamos construir um conjunto que não é Lebesgue mensurável. No intervalo $[0, 1]$ considere a relação de equi-valência \sim

que é tal que $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. É claro que \sim produz uma partição de classes de equivalência em $[0, 1]$. Tome $M \subset [0, 1]$ como sendo um conjunto que contém exatamente um representante de cada classe de equivalência (a existência deste conjunto é uma consequência do Axioma da Escolha). Suponhamos que M seja Lebesgue mensurável. Tomemos $m(M) = \alpha$. Seja $\{r_n\}$ a seqüência de todos os números racionais em $[-1, 1]$ e seja

$$M_n = r_n + M = \{r_n + x : x \in M\}.$$

Estes conjuntos são disjuntos e para todo n têm-se $[0, 1] \subset M_n \subset [-1, 2]$. Então

$$[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset [-1, 2].$$

Agora $m(M_n) = m(M) = \alpha$ já que cada M_n é uma translação (invariante) de M . Daí

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \leq 3 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Mas por outro lado $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \geq 1$ e portanto temos uma contradição. Logo M não é Lebesgue mensurável.

Apêndice B

Integração Abstrata

Neste apêndice vamos introduzir o conceito de integral abstrata e apresentar alguns resultados envolvendo estas integrais. Não incluiremos as demonstrações destes resultados. Estas podem ser encontradas em [12].

Primeiro vamos definir a integral somente para funções não-negativas. Sejam μ uma medida e f uma função μ -mensurável não-negativa definida num conjunto μ -mensurável E . A *integral de f em E em relação à medida μ* é definida como:

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu := \sup_{E=\bigcup_i E_i} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\inf_{E_i} f \right) \mu(E_i),$$

onde E_i são conjuntos mensuráveis disjuntos. Se caso algum E_i for vazio temos $\inf_{E_i} f = 0$. Quando $\mu = m_n$, a integral acima é chamada *integral de Lebesgue da função f no conjunto E* . Denotamos por

$$\int_E f(x) dx = \int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

onde $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$

Teorema B.1 (Teorema do Valor Médio). *Seja f uma função definida num conjunto mensurável E . Se f é mensurável e não-negativa, então*

$$\left(\inf_E f \right) \mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq \left(\sup_E f \right) \mu(E).$$

Propriedades:

$$(P1) \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu, \quad \alpha \geq 0;$$

$$(P2) f(x) \leq g(x) \text{ em } E \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu;$$

$$(P3) \int_E c d\mu = c\mu(E), \quad c \geq 0;$$

$$(P4) \mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0.$$

Na seqüência listamos alguns resultados.

(R1) *Seja f uma função definida num conjunto mensurável E . Se f é mensurável e não-negativa, então*

(a) $\lambda(A) := \int_A f d\mu$ é uma medida na álgebra dos conjuntos mensuráveis contidos em E ;

(b) $E = \bigcup_i E_i : E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow \int_E f d\mu = \sum_i \int_{E_i} f d\mu$.

(R2) *Seja f uma função definida num conjunto mensurável E . Se f é mensurável e não-negativa, então*

(a) $f(x) \geq 0$ e $\int_E f d\mu = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ q. s. em E ;

(b) $f(x) > 0$ e $\mu(E) > 0 \Rightarrow \int_E f d\mu > 0$.

(R3) **(Teorema de Lebesgue)** *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência crescente de funções não-negativas e mensuráveis, onde f_n é definida em um conjunto mensurável E , para todo n . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu, \quad \text{onde } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ em } E.$$

(R4) *Sejam f e g funções não-negativas definidas num conjunto mensurável E . Se f e g são mensuráveis então*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu, \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

(R5) *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções não-negativas e mensuráveis, onde f_n é definida em um conjunto mensurável E , para todo n . Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

Agora vamos definir a integral para funções de sinal arbitrário. Seja f uma função μ -mensurável definida num conjunto μ -mensurável E . A *integral de f em E em relação à medida μ* é definida como:

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu,$$

onde f_+ e f_- foram definidas em (A.2). Se as integrais acima à direita são finitas, dizemos que a função f é *integrável* (ou *somável*) em E . Mais uma vez se $\mu = m_n$ esta integral é chamada *integral de Lebesgue* da função f em E e a denotamos por

$$\int_E f(x) dx = \int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

onde $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$. Naturalmente as Propriedades (P1)-(P4), os Resultados (R1)-(R5) e o Teorema B.1 também valem neste caso. Abaixo listamos mais algumas propriedades.

(P5) *Se $f = g$ q.s. em E , então $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$;*

(P6) $\int_E f d\mu < \infty \Rightarrow f(x) < \infty$ q. s. em E ;

(P7) $\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$

Teorema B.2. *Seja f uma função mensurável em um conjunto mensurável E . Então*

(a) *f é integrável se e somente se $x \mapsto |f(x)|$ é integrável;*

(b) *Se $|f(x)| \leq \varphi(x)$ onde φ é integrável, então f é integrável.*

Existe uma conexão entre a integral de Lebesgue e a integral de Riemann. Se f é uma função limitada em um intervalo P , uma condição necessária e suficiente para

f ser Riemann integrável é que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f em P tenha medida (de Lebesgue) nula. Quando isto ocorre a integral de Lebesgue coincide com a integral de Riemann.

No que segue vamos apresentar o Teorema de Fubini. Antes precisamos definir o produto cartesiano de medidas. Sejam X_1 e X_2 espaços arbitrários e sejam \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 σ -álgebras definidas em X_1 e X_2 , respectivamente. Tomemos duas medidas μ_1 e μ_2 nas σ -álgebras \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , respectivamente. Então

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) := \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(E^{x_2}) d\mu_2, \quad E \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2,$$

onde $E_{x_1} := \{x_2 : (x_1, x_2) \in E\}$ e $E^{x_2} := \{x_1 : (x_1, x_2) \in E\}$. Esta medida satisfaz

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2), \quad E_i \in \mathcal{S}_i.$$

Teorema B.3 (Teorema de Fubini). *Seja f uma função $(\mu_1 \times \mu_2)$ -mensurável definida no conjunto $E_1 \times E_2$, onde E_i é μ_i -mensurável, $i = 1, 2$. Então*

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int_{E_1} \left[\int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{E_2} \left[\int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right] d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Seja X um espaço métrico localmente compacto. Vamos denotar por \mathcal{C}_+ a família das funções contínuas e não-negativas em X .

Teorema B.4 (Teorema de Riesz). *Se F é um funcional definido em \mathcal{C}_+ tal que $F(f+g) = F(f)+F(g)$, então existe uma medida μ em $\mathcal{B}(X)$ que é finita em conjuntos compactos e tal que*

$$F(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}_+.$$

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e f uma função mensurável numa vizinhança de x_0 . Dizemos que x_0 é um *ponto de Lebesgue* da função f se

$$\lim_{\delta(Q) \rightarrow 0, x_0 \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx = f(x_0),$$

onde Q é um cubo n -dimensional e $\delta(Q)$ denota o diâmetro de Q .

Teorema B.5. *Seja f uma função definida em um intervalo P . Se f é mensurável, então quase todos os pontos de P são pontos de Lebesgue da função f .*

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é *absolutamente contínua* em $[a, b]$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ são sub-intervalos disjuntos de $[a, b]$ tais que $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) \leq \delta$, então $\sum_{i=1}^k |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$. Segue desta definição que uma função absolutamente contínua é uma função contínua e que uma função Lipschitz contínua é absolutamente contínua. Abaixo temos alguns resultados envolvendo funções absolutamente contínuas.

(R6) *Se f é uma função absolutamente contínua em um intervalo $[a, b]$, então f é derivável em quase todo ponto de $[a, b]$;*

(R7) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Então*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a);$$

(R8) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Se f é crescente então*

$$m(f(E)) = \int_E f'(x)dx$$

para todo conjunto mensurável $E \subset [a, b]$.

Seja \mathcal{K} uma família de conjuntos contendo o conjunto vazio. Uma função $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma σ -função se satisfaz

- (i) $\lambda(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\lambda(E)$ é finita, $\forall E \in \mathcal{K}$;
- (iii) $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$, se $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{K}$ e E_i são conjuntos disjuntos em \mathcal{K} .

Seja F uma σ -função definida em um intervalo $P \subset \mathbb{R}^n$. A *variação* da função F em P é dada por

$$|F|(P) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^k |F(P_i)| : P = \bigcup_{i=1}^k P_i \right\},$$

onde P_i são intervalos disjuntos. Quando $|F|(P) < \infty$ dizemos que F é uma *função de variação limitada*.

Teorema B.6 (Decomposição Canônica de Jordan). *Seja λ uma σ -função definida numa σ -álgebra \mathcal{S} . Então λ pode ser escrita como a diferença de duas medidas:*

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-,$$

onde

$$\lambda^+(E) = \sup_{F \subset E} \lambda(F), \quad \lambda^-(E) = - \inf_{F \subset E} \lambda(F),$$

com $E, F \in \mathcal{S}$.

As medidas λ^+ e λ^- definidas no teorema anterior são chamadas *variação superior* e *variação inferior* da σ -função λ , respectivamente. A medida definida por

$$|\lambda| := \lambda^+ + \lambda^-$$

é chamada *variação total* da função λ . Não é difícil verificar as propriedades abaixo:

- $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$;
- $|\alpha\lambda + \beta\nu|(E) \leq |\alpha||\lambda|(E) + |\beta||\nu|(E)$.

Sejam $\lambda, \nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ σ -funções, onde \mathcal{S} é uma σ -álgebra em X . Dizemos que λ é *absolutamente contínua em relação à ν* se

$$\lambda(E) = 0 \quad \text{quando} \quad |\nu|(E) = 0, \quad E \in \mathcal{S}.$$

Seja $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma σ -função. Dizemos que λ é *σ -finita* em X se

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{com} \quad |\lambda(E_i)| < \infty,$$

onde $E_i \in \mathcal{S}$.

Sejam $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida e f uma função mensurável. Então

$$\lambda(E) := \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{S},$$

define uma σ -função absolutamente contínua em relação a μ . No teorema abaixo temos a recíproca deste fato.

Teorema B.7 (Teorema de Radon-Nikodym). *Seja \mathcal{S} uma σ -álgebra em X . Sejam λ uma σ -função em \mathcal{S} e μ uma medida em \mathcal{S} . Se λ e μ são σ -finitas, então existe uma função f , mensurável e integrável em relação a μ , tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.1})$$

A função f definida por (B.1) q.s. (μ) é chamada *derivada de Radon-Nikodym* de λ em relação a μ . Denotamos por $\frac{d\lambda}{d\mu}$.

Teorema B.8 (Mudança de Medida). *Considere as hipóteses do teorema de Radon-Nikodym válidas. Se f é integrável em relação a λ em $E \in \mathcal{S}$, então $f d\lambda/d\mu$ é integrável em relação a μ em E e*

$$\int_E f d\mu = \int_E f \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu.$$

Sejam $\lambda, \nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ σ -funções, onde \mathcal{S} é uma σ -álgebra em X . Dizemos que λ é *singular em relação a ν* se existir uma decomposição de X tal que

- (i) $X = A \cup B$ com $A \cap B = \emptyset$;
- (ii) $E \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap E, B \cap E \in \mathcal{S}$;
- (iii) $|\lambda|(A \cap E) = |\nu|(B \cap E) = 0$.

Da definição acima segue que se λ é singular em relação a ν então λ^+ , λ^- e $|\lambda|$ são singulares em relação a ν . Também podemos concluir que se λ é singular e absolutamente contínua em relação a ν então $\lambda = 0$.

Teorema B.9 (Decomposição Canônica de Lebesgue). *Seja \mathcal{S} uma σ -álgebra em X . Seja uma σ -função σ -finita em \mathcal{S} . Então toda σ -função σ -finita ν em \mathcal{S} pode ser escrita de maneira única na forma $\nu = \rho + \sigma$, onde ρ é absolutamente contínua e σ é singular em relação a μ .*

Apêndice C

Análise Não-Suave

Neste apêndice iremos estudar uma generalização de diferenciabilidade para funções não-suaves. Vamos também introduzir os conceitos de espaço tangente e espaço normal no âmbito da análise não-suave. Começaremos falando de cálculo proximal e depois falaremos dos gradientes generalizados, dos espaços tangente e normal de Clarke. As demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [7].

Sejam X um espaço real de Hilbert e S um subconjunto de X . Tome um ponto $x \notin S$. Então a *projeção* de x em S é um ponto de S cuja distância a x é mínima. Este ponto pode não ser único como mostra a Figura C.1: os pontos s_4 e s_6 em S são projeções de x_1 . Denotamos o conjunto de todos estes pontos por $\text{proj}_S(x)$. Dizemos que $x - s$ é uma *direção normal proximal* a S por s . O *cone normal proximal* a S em s , denotado por $N_S^P(s)$, é definido como sendo

$$N_S^P(s) := \{\zeta = t(x - s), t \geq 0\}.$$

Se $s \in S$ é tal que $s \notin \text{proj}_S(x)$, $\forall x \notin S$, então definimos $N_S^P(s) = \{0\}$. Agora $N_S^P(s)$ não está definido quando $s \notin S$. Observando a Figura C.1 podemos concluir então que $N_S^P(s_3) = N_S^P(s_5) = \{0\}$, enquanto $N_S^P(s_1)$, $N_S^P(s_2)$, $N_S^P(s_7)$ e $N_S^P(s_8)$ possuem pelo menos dois vetores l.i.

Definimos a *função distância* $d_S : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $d_S(x) := \inf\{\|x - s\| : s \in S\}$.

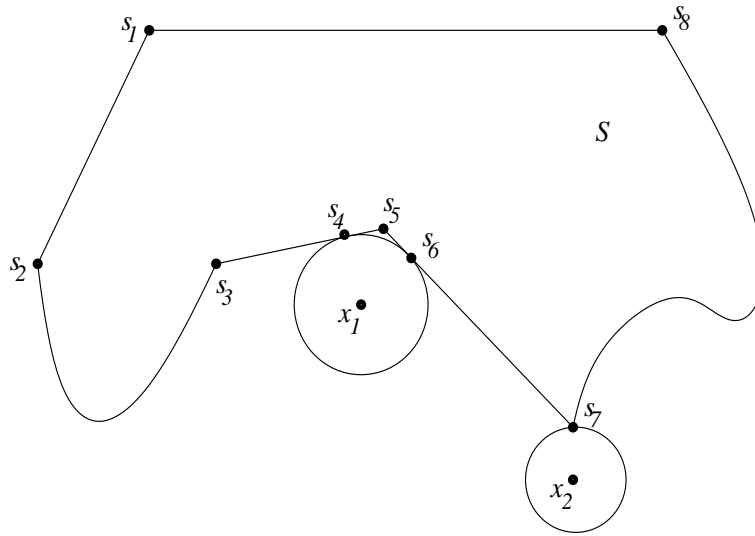


Figura C.1: Exemplo.

O cone normal proximal pode ser caracterizado pela função distância:

$$N_S^P(s) = \{\zeta : \exists t > 0 \text{ de modo que } d_S(s + t\zeta) = t\|\zeta\|\}.$$

Abaixo temos alguns resultados sobre cones normais proximais.

(R1) $\zeta \in N_S^P(s) \Leftrightarrow \exists \sigma = \sigma(\zeta, s) \geq 0 : \langle \zeta, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2, \quad \forall s' \in S;$

(R2) Se S é fechado e convexo então $\zeta \in N_S^P(s) \Leftrightarrow \langle \zeta, s' - s \rangle \leq 0, \quad \forall s' \in S;$

(R3) Se S é fechado e convexo, $\dim(X) < \infty$ e $s \in \text{fr}(S)$, então $N_S^P(s) \neq \{0\}$.

Teorema C.1. *Sejam $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, tais que $h_i \in C^1$ e $\nabla h_i(s)$, $i = 1, \dots, k$, são linearmente independentes. Consideremos $S := \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, k\}$. Seja $s \in S$. Então*

(i) $N_S^P(s) \subseteq \text{ger}\{\nabla h_i(s), i = 1, \dots, k\};$

(ii) Se $h_i \in C^2$, $i = 1, \dots, k$, então temos igualdade em (i).

Seja $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$. Os conjuntos domínio de f , gráfico de f e epígrafo de f estão definidos, respectivamente, abaixo:

- $\text{dom } f := \{x \in X : f(x) < \infty\}$;
- $\text{gr } f := \{(x, f(x)) : x \in \text{dom } f\}$;
- $\text{epi } f := \{(x, r) \in \text{dom } f \times \mathbb{R} : r \geq f(x)\}$.

Dizemos que $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é semi-contínua inferior em $x \in X$ se

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x),$$

ou equivalentemente, se para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : f(y) \geq f(x) - \varepsilon$ quando $y \in B(x, \delta)$. Um resultado de fácil demonstração é que f é semi-contínua inferior em X se e somente se $\text{epi } f$ é fechado em $X \times \mathbb{R}$.

Seja $U \subseteq X$ um aberto. Denotamos por $\mathcal{F}(U)$ o conjunto das funções semi-contínuas inferior em U .

Seja $f \in \mathcal{F}(U)$. Dizemos que $\zeta \in X$ é um *subgradiente proximal* de f em $x \in U$ se

$$(\zeta, -1) \in N_{\text{epi } f}^P(x, f(x)).$$

O *subdiferencial proximal* de f em x , denotado por $\partial_P f(x)$, é o conjunto dado abaixo:

$$\partial f(x) = \{\zeta : (\zeta, -1) \in N_{\text{epi } f}^P(x, f(x))\}.$$

Na Figura (C.2) temos alguns exemplos de subgradientes proximais. No ponto x_1 o subdiferencial proximal é gerado por um único subgradiente proximal. No ponto x_2 não temos nenhum subgradiente proximal. No ponto x_4 o subdiferencial proximal é um conjunto não limitado (a seta tracejada não representa um subgradiente proximal). Nos outros pontos temos dois subgradientes proximais l.i.

Abaixo vamos expor um teorema que traz na expressão (C.1) a chamada *desigualdade do subgradiente proximal* que caracteriza os subgradientes de uma dada função f .

Teorema C.2. *Sejam $f \in \mathcal{F}(X)$ e $x \in \text{dom } f$. Daí $\zeta \in \partial_P f(x)$ se e somente se existem $\sigma, \eta > 0$ tais que*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2, \quad \forall y \in B(x, \eta). \quad (\text{C.1})$$

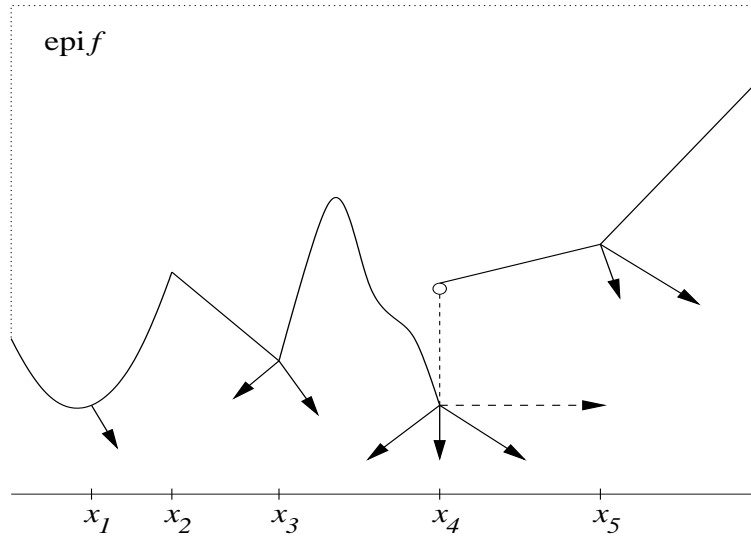


Figura C.2: Exemplo.

Na seqüência temos dois corolários deste resultado.

Corolário C.2.1. *Seja $f \in \mathcal{F}(X)$ e $U \subset X$ um conjunto aberto.*

- (i) *Se f é Gâteaux diferenciável em $x \in U$, então $\partial_P f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}$;*
- (ii) *Se $f \in C^2(U)$, então $\partial_P f(x) = \{f'(x)\}^1$, $\forall x \in U$;*
- (iii) *Se f é convexa, então $\zeta \in \partial_P f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle$, $\forall y \in X$.*

Corolário C.2.2. *Seja $f \in \mathcal{F}(X)$.*

- (i) *Se x é um ponto de mínimo local f , então $0 \in \partial_P f(x)$;*
- (ii) *Se f é convexa e $0 \in \partial_P f(x)$, então x é ponto de mínimo global de f .*

Vamos expor mais uma seqüência de resultados importantes.

(R4) *Suponhamos que $x \notin S$ e $\zeta \in \partial_P d_S(x)$. Então $\exists \bar{s} \in S$ de modo que as afirmações abaixo são verdadeiras:*

- (i) *Toda seqüência minimizante² $\{s_i\} \subset S$ de $\inf_{s \in S} \|s - x\|$ converge para \bar{s} ;*

¹ f' denota a derivada de Fréchet de f (veja [7]).

² $\{x_i\}$ é dita seqüência minimizante para algum ínfimo do tipo $\inf_{x \in S} g(x)$ se $x_i \in S$, $\forall i$, e $\lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i) = \inf_{x \in S} g(x)$.

$$(ii) \text{ proj}_S(x) = \{\bar{s}\};$$

$$(iii) \text{ A derivada de Fréchet existe e } \{\zeta\} = \partial_P d_S(x) = \{d'_S(x)\} = \frac{x - \bar{s}}{\|x - \bar{s}\|};$$

$$(iv) \zeta \in N_S^P(\bar{s}).$$

(R5) *Sejam $S \subset U \subset X$, onde S é fechado e U é aberto, e f uma função Lipschitz contínua em U , com constante K . Consideremos o problema de otimização*

$$\inf f(s) \quad \text{sujeito a } x \in S. \quad (\text{P})$$

Se $s \in S$ é solução para (P) então a função $x \mapsto f(x) + Kd_S(x)$ atinge o mínimo em U no ponto $x = s$. Reciprocamente, se $K' > K$ e $x \mapsto f(x) + K'd_S(x)$ atinge o mínimo em $x = s$, então $s \in S$ é solução para (P);

(R6) *Se S é fechado e $s \in S$, então $N_S^P(s) = \{t\zeta : t \geq 0, \zeta \in \partial_P d_S(s)\}$;*

(R7) *Sejam $U \subset X$ aberto e convexo e $f \in \mathcal{F}(U)$. Então f é Lipschitz contínua em U com constante $K \geq 0$ se e somente se $\|\zeta\| \leq K, \forall \zeta \in \partial_P f(x), \forall x \in U$;*

(R8) *Sejam $U \subset X$ aberto e convexo e $f \in \mathcal{F}(U)$. Então f é constante em U se e somente se $\partial_P f(x) \subset \{0\}, \forall x \in U$.*

No caso de funções suaves (ou diferenciáveis) temos $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. No caso não-suave não temos uma propriedade semelhante. Mas temos algumas propriedades similares que vamos expor abaixo.

$$(P1) \quad \partial_P f(x) + \partial_P g(x) \subseteq \partial_P (f + g)(x);$$

$$(P2) \quad \partial_P (\lambda f)(x) = \lambda \partial_P f(x), \quad \forall \lambda > 0;$$

(P3) *Sejam $f \in \mathcal{F}(X)$, $x \in X$ e $g \in C^2$ em alguma vizinhança de x . Então*

$$\zeta \in \partial_P (f + g)(x) \quad \text{implica} \quad \zeta - g'(x) \in \partial_P f(x).$$

A recíproca da Propriedade (P1) nem sempre vale como mostra o seguinte exemplo. Vamos trabalhar em $X = \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = 2|x|$ e $g(x) = -|x|$.

Então $\partial_P f(0) = [-2, 2]$, $\partial_P g(0) = \emptyset$ e $\partial_P(f + g)(0) = [-1, 1]$. Daí $\partial_P f(0) + \partial_P g(0) = [-2, 2] + \emptyset = \emptyset$. Logo $\partial_P(f + g)(0)$ não está contido em $\partial_P f(0) + \partial_P g(0)$.

O teorema abaixo é conhecido como “Regra da Soma fuzzy”.

Teorema C.3. *Sejam f_1 e $f_2 \in \mathcal{F}(X)$. Tome $x_0 \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$ e $\zeta \in \partial_P(f_1 + f_2)(x_0)$. Suponhamos que uma das hipóteses abaixo vale:*

- (i) f_1 e f_2 são fracamente semicontínuas inferior³;
- (ii) f_1 ou f_2 é Lipschitz contínua numa vizinhança de x_0 .

Então existem $x_i \in B(x_0, \varepsilon)$ tais que $|f_i(x_0) - f_i(x_i)| < \varepsilon$, $i = 1, 2$ e

$$\zeta \in \partial_P f_1(x_1) + \partial_P f_2(x_2) + \varepsilon B, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

O próximo teorema é uma Regra da Cadeia para funções semi-contínuas inferior.

Teorema C.4. *Sejam $g \in \mathcal{F}(Y)$, $h : X \rightarrow Y$ localmente Lipschitz contínua e $x_0 \in X$. Suponhamos que uma das hipóteses abaixo vale:*

- (i) g é fracamente semi-contínua e h é linear;
- (ii) g é Lipschitz contínua numa vizinhança de x_0 .

Se $f(x) := g(h(x))$ e $\zeta \in \partial_P f(x_0)$, então para todo $\varepsilon > 0$ existem $\bar{x} \in x_0 + \varepsilon B_X$, $\bar{y} \in h(x_0) + \varepsilon B_Y$ e $\gamma \in \partial_P g(\bar{y})$ tais que $\|h(\bar{x}) - h(x_0)\| < \varepsilon$ e

$$\zeta \in \partial_P \{\langle \gamma, h(\cdot) \rangle\}(\bar{x}) + \varepsilon B_X.$$

Daqui em diante vamos falar sobre o cálculo dos gradientes generalizados. Seja X um espaço real de Banach. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua na vizinhança de um certo ponto $x \in X$. A derivada direcional generalizada de f em x , na direção v , é dada por:

$$f^\circ(x; v) := \limsup_{y \rightarrow x; t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

³Dizemos que f é fracamente semi-contínua inferior em x se $\liminf_{i \rightarrow \infty} f(x_i) \geq f(x)$ quando $x_i \rightarrow x$.

Vamos denotar o espaço dual dos funcionais lineares contínuos em X por X^* . Seja $\Sigma \subset X^*$. A *função suporte* de Σ é a função $H_\Sigma : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ definida abaixo:

$$H_\Sigma(v) := \sup\{\zeta \cdot v : \zeta \in \Sigma\}.$$

Com estas definições em mãos podemos introduzir a noção de gradiente generalizado. O *gradiente generalizado de Clarke* de f em x , denotado por $\partial f(x)$, é definido como sendo o subconjunto w^* -compacto de X^* cuja função suporte é $f^\circ(x; \cdot)$. Logo

$$\zeta \in \partial f(x) \Leftrightarrow f^\circ(x; v) \geq \zeta \cdot v = \langle \zeta, v \rangle, \quad \forall v \in X.$$

Uma observação interessante é que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 então $f^\circ(x; v) = \langle f'(x), v \rangle$ e $\partial f(x) = \{f'(x)\}$. Também se f é convexa e Lipschitz numa vizinhança de x então $f'(x; v) = f^\circ(x; v)$ e além disso

$$\zeta \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \geq \langle \zeta, y - x \rangle \quad \forall y.$$

Proposição C.1. *Suponhamos que f é Lipschitz de ordem K na vizinhança de x . Temos que*

- (a) $\partial f(x)$ é um subconjunto não-vazio, convexo e w^* -compacto de X^* . Além disso $\|\zeta\|_* \leq K$ para todo $\zeta \in \partial f(x)$, onde a norma $\|\cdot\|_*$ é dada por $\|\zeta\|_* = \sup\{\langle \zeta, v \rangle : v \in X, \|v\| = 1\}$;
- (b) Para todo $v \in X$ temos $f^\circ(x; v) = \max\{\langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial f(x)\}$.

Abaixo vamos listar algumas propriedades dos gradientes generalizados.

(P4) $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$, para todo escalar λ ;

(P5) $\partial(f + g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$.

Teorema C.5 (Teorema do Valor Médio de Lebourg). *Sejam $x, y \in X$. Se f é Lipschitz em um conjunto aberto contendo o segmento $[x, y]$, então existe um ponto $u \in (x, y)$ tal que*

$$f(y) - f(x) \in \langle \partial f(u), y - x \rangle.$$

Teorema C.6 (Regra da Cadeia). *Sejam $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz na vizinhança de $x \in X$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz na vizinhança de $F(x)$. Então a função $f(y) := g(F(y))$ é Lipschitz na vizinhança de x e além disso*

$$\partial f(x) \subset \overline{\text{co}}^* \{ \partial \langle \gamma, F(\cdot) \rangle : \gamma \in \partial g(F(x)) \}^4.$$

Esta noção de diferencial de Clarke generaliza, de fato, a noção usual. Seja f uma função Lipschitz na vizinhança de $x \in X$. Então

- (a) Se f é Gâteaux diferenciável em x então $f'_G(x) \in \partial f(x)$;
- (b) Se f é continuamente diferenciável em x então $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

Vamos introduzir as noções de cones tangente e normal. Seja $S \subset X$ um subconjunto fechado. O *cone tangente de Clarke* a S em $x \in S$, denotado por $T_S^C(x)$, é dado por

$$T_S^C(x) := \{v \in X : d_S^o(x; v) \leq 0\}.$$

Uma observação que podemos fazer é que a condição $d_S^o(x; v) \leq 0$ significa que d_S não cresce na direção v .

O *cone normal de Clarke* a S em x , o qual é denotado por $N_S^C(x)$, é dado por

$$N_S^C(x) := T_S^C(x)^\circ := \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \forall v \in T_S(x)\}.$$

Pode ser provado que $T_S^C(x) = N_S^C(x)^\circ = \{v \in X : \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \forall \zeta \in N_S(x)\}$. Abaixo temos alguns resultados envolvendo cones.

(R9) *Se S é convexo então*

- (i) $T_S^C(x) = \text{cl}\{\lambda(s - x) : \lambda \geq 0, s \in S\}$ ⁵;
- (ii) $N_S^C(x) = \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, y - x \rangle \leq 0 \forall y \in S\}$.

(R10) *Se f é Lipschitz na vizinhança de x então*

⁴ $\overline{\text{co}}^*$ denota o envoltório convexo w^* -fechado.

⁵cl denota o fecho do conjunto.

- (i) $T_{\text{epi } f}^C(x, f(x)) = \text{epi } f^\circ(x; \cdot)$;
- (ii) $\zeta \in \partial f(x) \iff (\zeta, -1) \in N_{\text{epi } f}^C(x, f(x))$.

O teorema abaixo relaciona as subdiferenciais proximal e de Clarke assim como os cones normal proximal e o normal de Clarke.

Teorema C.7. *Seja X um espaço de Hilbert.*

(a) *Se f é Lipschitz na vizinhança de x então*

$$\partial f(x) = \overline{\text{co}}\{w - \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i : \zeta_i \in \partial_P f(x_i), x_i \rightarrow x\}^6;$$

(b) *Se S é um subconjunto fechado de X contendo x , então*

$$N_S(x) = \overline{\text{co}}\{w - \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i : \zeta_i \in N_S^P(x_i), x_i \rightarrow x\}.$$

Definimos a seguir uma outra noção de cone tangente. O cone tangente de Bouligand a S em x , denotado por $T_S^B(x)$, é definido por:

$$T_S^B(x) := \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - x}{\lambda_i} : x_i \xrightarrow{S} x, \lambda_i \downarrow 0 \right\},$$

onde $x_i \xrightarrow{S} x$ significa que $x_i \in S$ e $x_i \rightarrow x$.

Sabemos através do Teorema de Rademacher que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz em um conjunto aberto U é diferenciável quase sempre (no sentido da medida de Lebesgue).

Teorema C.8 (Fórmula do Gradiente Generalizada). *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz na vizinhança de x . Denotemos por Ω_f o conjunto dos pontos em \mathbb{R}^n onde a função f não é diferenciável. Então*

$$\partial f(x) := \text{co}\{\lim \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin \Omega, x_i \notin \Omega_f\}^7,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é qualquer conjunto de medida nula.

⁶ $\overline{\text{co}}$ denota o fecho do envoltório convexo.

⁷ co denota o envoltório convexo.

Referências Bibliográficas

- [1] Aubin, J. P., *Boundary-Value Problems for Systems of Hamilton-Jacobi-Bellman Inclusions with Constraints*. SIAM J. Control and Optimization, vol. 41, No. 2, pp. 425-456, 2001.
- [2] Aubin, J. P., *Impulse Differential Equations and Hybrid Systems: A Viability Approach*. Lecture Notes, University of California at Berkeley, 2000.
- [3] Baumeister, J., *On Optimal Control of a Fishery*, in 'NOLCOS'01 - 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 2001.
- [4] Brogliato, B., *Nonsmooth Impact Mechanics: Models, Dynamics and Control*. Lect. Notes in Control and Inform. Sci., 220, Springer-Verlag, 1996.
- [5] Clark, C., Clarke, F. and Munro, G., *The Optimal Exploitation of Renewable Stocks*. Econometrica, 47, pp. 25-47, 1979.
- [6] Clarke, F., Ledyaev, Y., Rifford, L. and Stern, R., *Feedback Stabilization and Lyapunov Functions*. SIAM J. Control and Optimization, 39(10), 25-48, 2000.
- [7] Clarke, F. H., Ledyaev, Yu., Stern, R. and Wolenski, P., *Non-Smooth Analysis and Control Theory*. Graduate Texts in mathematics Vol. 178, Springer-Verlag, 1998.
- [8] Figueiredo, D., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides - IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, 1997.

-
- [9] Figueiredo, D. e Neves, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas*. Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
- [10] Gurman, V., *Models of Natural Resources Control*. Nauka, Moscow, 1981.
- [11] Lawden, D., *Optimal Trajectories for Space Navigation*. Butterworths, 1963.
- [12] Lojasiewicz, S., *An introduction to the theory of real functions*. John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [13] Marec, J. P., *Optimal Space Trajectories*. Elsevier, 1979.
- [14] Miller, B., *Stability of Solutions of Ordinary Differential Equations with Measures*. Uspekhi Mat. Nauk., 1978.
- [15] Pereira, F. L. and Silva, G. N., *Necessary Conditions of Optimality for Vector-Valued Impulsive Control Problems*. Systems & Control Letters, 40:205-215, 2000.
- [16] Pereira, F. L. and Silva, G. N., *Stability for Impulsive Control Systems*. Dynamical Systems: an International Journal (aceito), 2002.
- [17] Rifford, L., *Existence of Lipschitz and Semiconcave Control - Lyapunov Functions*. SIAM J. Control and Optimization, 39(4), 1043-1064, 2000.
- [18] Silva, G. N. and Vinter, R., *Measure Driven Differential Inclusions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 202:727-746, 1996.
- [19] Schwartz, L., *Mathematics for the Physical Sciences*. Hermann-Addison Wesley, 1996.
- [20] Shu, Z., *On Impulsive Processes*. International J. Non-Linear Mechanics, 37, 213-224, 2000.