

COMPARAÇÃO DE AJUSTES DO MODELO DE GOMPERTZ A DADOS DE CRESCIMENTO

Farid Sallum Neto

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro - 2013

COMPARAÇÃO DE AJUSTES DO MODELO DE GOMPERTZ A DADOS DE CRESCIMENTO

Farid Sallum Neto

Orientadora: Prof. Dra. **Lídia Raquel de Carvalho**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉC. AQUIS. TRATAMENTO DA INFORM.
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CAMPUS DE BOTUCATU - UNESP
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: **ROSEMEIRE APARECIDA VICENTE**

Sallum Neto, Farid.

Comparação de ajustes do modelo de Gompertz a dados de crescimento /
Farid Sallum Neto. - Botucatu : [s.n.], 2012

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Biociências de Botucatu

Orientador: Lúdia Raquel de Carvalho

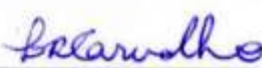
Capes: 10202064

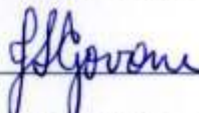
1. Biometria. 2. Modelos matemáticos. 3. SAS (Sistema de computador).
4. Modelos não lineares (Estatística). 5. Gompertz, Modelo de.


Palavras-chave: Curvas de crescimento; Dados longitudinais; Modelo
autorregressivo de primeira ordem; modelos de efeitos mistos; Modelo não
linear.

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE FARID SALLUM NETO, INTITULADA "COMPARAÇÃO DE AJUSTES DO MODELO DE GOMPERTZ A DADOS DE CRESCIMENTO", APRESENTADA AO INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, UNESP, CAMPUS DE BOTUCATU, SÃO PAULO, EM 07 de fevereiro de 2013.

APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA:

Prof(a) Dr(a) LIDIA RAQUEL DE CARVALHO
Instituição: Instituto de Biociências de Botucatu
Assinatura: 

Prof(a) Dr(a) JOSE SILVIO GOVONE
Instituição: Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Assinatura: 

Prof(a) Dr(a) SILVIO SANDOVAL ZOCCHI
Instituição: Universidade de São Paulo
Assinatura: 

Dedicatória

Eu dedico esta dissertação a minha avó Eunice Ceciliato de Moraes
Iafélix e a meu amigo Renan Dantas Medrado.

Agradecimentos

A DEUS.

À minha família, pelo apoio e incentivo para os estudos.

Aos amigos Paulo Roberto Isler e José Nilton da Cruz, por me ajudarem no início do mestrado em Botucatu, auxiliando em tudo o que era preciso.

Aos amigos da sala 2, Cíntia Pimentel de Oliveira, Ronaldo Rhouver Guedes Silva e Thiago Santos Mota, por dois anos juntos, trabalhando e nos divertindo.

Aos amigos da minha república, Paulo Roberto Isler, Renan Mercuri Pinto e Thiago Santos Mota, pelos ótimos momentos compartilhados.

À minha orientadora Profa. Dra. Lídia Raquel de Carvalho e à Profa. Dra. Martha Maria Mischán, pela orientação e paciência para a realização deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Bioestatística, pela disposição e ajuda em todos os momentos.

À minha namorada Ingrid, pelo carinho, pelas palavras, pelos gestos, pela atenção e, principalmente, pela paciência e amor que teve comigo para que eu concluísse minha dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

	Página
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
RESUMO	ix
SUMMARY	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DE LITERATURA	3
2.1 Regressão Não-Linear	3
2.2 Curvas de crescimento	3
2.3 Modelos Não-Lineares	5
2.3.1 Estimação dos parâmetros	6
2.3.2 Modelo de Gompertz	7
2.4 Séries Temporais	8
2.4.1 Tipos de séries	9
2.4.2 Objetivos de uma série temporal	9
2.4.3 Elementos de uma série temporal	10
2.4.4 Processos estocásticos	10
2.4.5 Caracterização de um processo estocástico	10
2.4.6 Média, covariância e correlação	11
2.4.7 Processos Estacionários	11

2.4.8	Modelos ARIMA	12
2.4.9	Ruído branco	12
2.4.10	Modelo Autorregressivo de ordem p - AR(p)	12
2.4.11	Modelo Autorregressivo de ordem 1 - AR(1)	12
2.4.12	Estimação dos parâmetros de modelo autorregressivo de ordem 1 - AR(1)	14
2.5	Modelos de efeitos mistos	14
2.5.1	Introdução	14
2.5.2	Modelo Misto	15
2.6	Análise de resíduos	16
2.6.1	Teste de Durbin-Watson	17
2.6.2	Teste de Breusch-Pagan	18
2.7	Crítérios de Seleção de modelos	18
3	MATERIAL E MÉTODOS	20
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	23
5	CONCLUSÕES	35
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	36
	APÊNDICES	40

Lista de Figuras

	Página
1 Pesos médios observados e estimados das vacas	28
2 Pesos observados e estimados para as ratas	28
3 Pesos observados e estimados para os ratos	28

Lista de Tabelas

		Página
1	Exemplos de modelos não-lineares	6
2	Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as ratas	23
3	Estimativas dos parâmetros do ajuste do modelo autorregressivo para as ratas	23
4	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeito fixo das ratas	24
5	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo das ratas . . .	24
6	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeito fixo dos ratos	25
7	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo dos ratos . . .	25
8	Estimativas dos parâmetros para o ajuste único dos ratos	26
9	QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único dos ratos	26
10	Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as vacas Fla- mengas	27
11	Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as vacas Guernsey-Gir	27
12	Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as vacas Ho- landesas	29
13	Estimativas dos parâmetros do modelo autorregressivo para as vacas Fla- mengas	29

14	Estimativas dos parâmetros do modelo autorregressivo para as vacas Guernsey-Gir	30
15	Estimativas dos parâmetros do modelo autorregressivo para as vacas Holandesas	30
16	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeitos fixos para as vacas Flamengas	31
17	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeitos fixos para as vacas Guernsey-Gir	31
18	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeitos fixos para as vacas Holandesas	32
19	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo para as vacas Flamengas	32
20	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo para as vacas Guernsey-Gir	33
21	QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo para as vacas Holandesas	33
22	QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único das vacas Flamengas . .	34
23	QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único das vacas Guernsey-Gir .	34
24	QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único das vacas Holandesas . .	34

COMPARAÇÃO DE AJUSTES DO MODELO DE GOMPERTZ A DADOS DE CRESCIMENTO

Autor: FARID SALLUM NETO

Orientadora: Prof. Dra. LÍDIA RAQUEL DE CARVALHO

RESUMO

Em análise de modelo de crescimento com o objetivo de representar o desenvolvimento de organismos vivos por um período maior que sua fase inicial, utiliza-se, frequentemente, modelos não lineares. O objetivo deste trabalho foi ajustar o modelo não-linear de Gompertz utilizando o software SAS através de três estruturas diferentes: 1) modelo de efeitos fixos; 2) modelo autorregressivo de primeira ordem e 3) modelo de efeito misto a um conjunto de dados de crescimento em peso de ratos da linhagem *Rattus norvegicus* e para um conjunto de dados de crescimento em peso de vacas de três raças: Flamengas, Guernsey-Gir e Holandesas, para verificar o melhor modelo para os conjuntos de dados obtidos. Para tal, optou-se por seis critérios estatísticos como avaliadores de ajuste. Os critérios foram: Quadrado médio do resíduo, critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), erro de predição médio (EPM), resíduos nos pontos iniciais, chamado res 0, usado para avaliar o ajuste nas primeiras observações e um índice sendo

um valor considerado como avaliador no final do ajuste (calculado pela razão entre os 20% dos maiores valores estimados e a assíntota estimada). Além destes, foram feitos testes de Durbin-Watson e Breusch-Pagan para verificar a independência dos resíduos e a heteroscedasticidade, respectivamente. Os resultados mostram que, em muitas repetições, onde havia a necessidade de correção da autocorrelação e heteroscedasticidade, o modelo autorregressivo de primeira ordem foi o melhor ajuste. Já em relação ao ajuste único, nos casos em que a autocorrelação foi significativa, o modelo autorregressivo foi o melhor segundo os critérios e, quando a autocorrelação foi não significativa, o modelo de efeitos fixos foi o melhor modelo.

Palavras-chave: modelo não linear; curvas de crescimento; modelos de efeitos mistos; modelos autorregressivos de primeira ordem; dados longitudinais

COMPARISON OF FITS OF GOMPERTZ MODEL TO GROWTH DATA

Author: FARID SALLUM NETO

Adviser: Prof. Dra. LÍDIA RAQUEL DE CARVALHO

SUMMARY

In growth model analyzing to represent the development of organisms for a larger period than its initial phase, it nonlinear models are often used . The aim of this work was to adjust the nonlinear Gompertz model using the software SAS by three different structures: 1) fixed effects model, 2) first-order autoregressive model and 3) mixed-effects model to a data of growth of female and male rats *Rattus norvegicus* and to a data of growth of three breeds cow to verify the best model for the data obtained. To attach the objective, six criteria was chosen as evaluators of statistical adjustment. The criteria were: residual mean square, Akaike information criterion (AIC), Bayesian information criterion (BIC), mean prediction error (EPM), residues in starting points, called res 0, used to assess the fit in the first observations and an index value being considered as an evaluator at the end of adjustment (calculated as the ratio between 20% of the largest estimated values and estimated

asymptote). In addition, Durbin-Watson and Breusch-Pagan tests were performed to verify the independence of waste and heteroscedasticity, respectively. The results show that in many repetitions, where was need a correction of autocorrelation and heteroscedasticity, the first order autoregressive model was the best fit. In relation to the single adjustment, where the autocorrelation was significant, the autoregressive model was the best, according to the criteria utilized, and when the autocorrelation was not significant, the fixed effects model was the best model.

Keywords: nonlinear model; growth curves; mixed models; autorregressive model; data longitudinal

1 INTRODUÇÃO

Na análise de regressão, o modelo normal linear é muito utilizado pois, geralmente, assume-se que os erros tem distribuição normal e são independentes. Porém, em muitas situações práticas, não se observa tais condições. Por conta disto, novos modelos foram desenvolvidos afim de contornar essas condições. Como exemplos, os modelos lineares generalizados e os modelos de regressão não lineares.

Quando se estuda o desenvolvimento de um organismo vivo por um período maior que sua fase inicial, é conveniente utilizar modelos não lineares, tendo em vista que tais modelos são representados por sigmóides e caracterizam bem tal crescimento pois registram um rápido crescimento inicial, uma desaceleração e uma estabilização desse crescimento.

As curvas de crescimento tem sido utilizadas para a avaliação de dados longitudinais, como dados de crescimento de animais em peso ou tamanho, e ajustadas por modelos não lineares, como o modelo de Gompertz, pois estes modelos tem parâmetros com interpretação biológica e fornecem bons ajustes com poucos parâmetros.

Nos estudos de curvas de crescimento, em geral, são desconsideradas a heterogeneidade de variância dos erros no decorrer do tempo e a existência de autocorrelação nos resíduos. Estes fatos podem acarretar em estimações viesadas para os parâmetros e subestimação da variância dos parâmetros, respectivamente.

Kroll & Tornero (1994) afirmaram que é difícil garantir independência dos erros quando se trabalha com dados longitudinais, ou seja, dados obtidos de um mesmo indivíduo ao longo do tempo. Para solucionar isto, deve-se adotar um modelo que leve em consideração uma estrutura autorregressiva nos erros.

Dois exemplos de modelos que possuem esta estrutura de autocorrelação desejada são os modelos autorregressivos, da classe ARIMA, e os modelos de efeitos mistos.

O objetivo deste trabalho é ajustar a dados de crescimento em peso de ratos, fêmeas e machos, e vacas de três raças, três estruturas do modelo de Gompertz: 1) modelo de efeitos fixos; 2) modelo autorregressivo de primeira ordem e 3) modelo de efeito misto e compará-los através de seis critérios estatísticos: Quadrado médio do resíduo, critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), erro de predição médio (EPM), resíduos nos pontos iniciais, chamado res 0, usado para avaliar o ajuste nas primeiras observações e um índice sendo um valor considerado como avaliador no final do ajuste (calculado pela razão entre os 20% dos maiores valores estimados e a assíntota estimada). Além destes, foram feitos testes de Durbin-Watson e Breusch-Pagan para verificar a independência dos resíduos e a heteroscedasticidade, respectivamente.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Regressão Não-Linear

A regressão linear é comumente utilizada na análise de dados pois mostra-se uma ferramenta adequada para a representação de diversos fenômenos. Ela possui uma forma analítica de estimação de parâmetros, uma vez que resolve-se um sistema de equações lineares em relação aos coeficientes de regressão e as propriedades dos estimadores são facilmente dedutíveis.

Em análise de modelos de crescimento, a regressão linear pode ser utilizada para representar o crescimento de organismos vivos em sua fase inicial. Porém, quando este crescimento é estudado por um tempo maior que tal fase, não se obtêm boa representação através de uma função linear, uma vez que o desenvolvimento de organismos vivos caracteriza-se por um rápido crescimento inicial, o qual se atenua e tende à estabilização na fase adulta.

Assim, o processo pode ser bem representado por curvas sigmoidais (Regazzi (2003)), como a função de Gompertz (Winsor (1932)), dentre outras.

2.2 Curvas de crescimento

Dados longitudinais são conjuntos de observações onde as variáveis são medidas em cada unidade amostral (animais, pessoas, plantas) várias vezes ao longo do tempo.

As técnicas de análise deste tipo de dado procuram descrever seu comportamento através de curvas, conhecidas como Análise de Curvas de Crescimento, e, posteriormente, há interesse em comparar efeitos de tratamentos através

dos parâmetros destas curvas (Brandão (1996)).

Oliveira et al. (2000) afirmaram que várias funções já foram utilizadas na tentativa de modelar a curva de crescimento animal, como modelos multifásicos e fatoriais. Porém, atualmente, os modelos não-lineares são os mais utilizados para esta modelagem.

Segundo Freitas (2005), há várias aplicações das curvas de crescimento na produção animal, como:

- resumir em poucos parâmetros as características de crescimento da população;
- avaliar as respostas dos tratamentos aplicados durante longo período;
- estudar interações de respostas ou tratamentos no decorrer do tempo;
- identificar os indivíduos que consigam mais peso precocemente.

Em geral, nos estudos de curvas de crescimento, são desconsideradas a heterogeneidade de variância dos erros no decorrer do tempo e a existência de autocorrelação nos resíduos (Mazzini et al. (2005)).

Kroll & Tornero (1994) afirmaram que é difícil garantir independência dos erros quando se trabalha com dados longitudinais. De acordo com Souza (1998), não considerar a autocorrelação residual no ajuste ocasionará a subestimação das variâncias dos parâmetros e, com desvios-padrão incorretos, erros serão cometidos na construção de testes de hipóteses e intervalos de confiança.

Medeiros et al. (2000) avaliaram a qualidade e as características do ajuste da função logística monofásica com estrutura de erros independentes e autorregressivos de primeira ordem referentes a dados de vacas leiteiras. Concluíram que houve o melhor ajuste quando foi considerada no modelo a estrutura de erros autorregressivos.

Em relação à heterogeneidade de variâncias, Pasternak & Shalev (1994) afirmaram que ignorá-la acarretará na obtenção de estimativas viesadas.

Braccini Neto et al. (1996), ao observarem a relação entre a variância e a média dos pesos por idade, constataram que a variância crescia exponencialmente

com a média, mostrando, assim, não haver homogeneidade de variâncias para os pesos. Utilizaram a transformação logarítmica visando melhor uniformidade.

A fim de obter a função de melhor ajustamento ao crescimento de bovinos Hereford, Mazzini et al. (1996) ajustaram as funções de Brody, Gompertz, Logística, Richards e Von Bertalanffy aos dados de crescimento destes bovinos. Eles ajustaram um modelo não ponderado e um ponderado pelo inverso da variância dos pesos, considerando, assim, a heterogeneidade das variâncias. Concluíram que os melhores modelos foram os ponderados pelo inverso da variância.

2.3 Modelos Não-Lineares

O modelo não-linear, segundo Bates & Watts (1988), é escrito como:

$$Y_i = f(\beta; X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

em que:

- $X = (x^1, \dots, x^s)$ é a matriz de dimensões $n \times s$ das s variáveis regressoras e n o número de observações;
- $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ é o vetor dos k parâmetros
- $Y_i = f(\beta; X_i)$ é uma função não linear nos parâmetros e diferenciável em β ;
- $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$

Um modelo é não-linear se uma das derivadas parciais em relação aos parâmetros depende de, pelo menos, um dos parâmetros.

Exemplo: Seja a função: $Y = A \exp(BX) + \epsilon$. Derivando Y em relação a B tem-se: $\frac{\partial Y}{\partial B} = AX \exp(BX)$ e derivando Y em relação a A tem-se: $\frac{\partial Y}{\partial A} = \exp(BX)$. Portanto, por definição, a função Y é não linear.

Algumas características dos modelos não lineares são tidas como vantagens em relação às dos modelos lineares.

Tabela 1. Exemplos de modelos não-lineares

Modelo	Função matemática
Brody (Brody (1945))	$\alpha(1 - \kappa \exp(-\gamma t))$
Von Bertalanffy (Von Bertalanffy (1957))	$\alpha(1 - \kappa \exp(-\gamma t))^3$
Gompertz (Winsor (1932))	$\alpha(\exp(-\kappa \exp(-\gamma t)))$
Logística (Nelder (1961))	$\alpha(1 + \kappa \exp(-\gamma t))^{-1}$
Richards (Richards (1959))	$\alpha(1 - \kappa \exp(-\gamma t))^m$

Os modelos não-lineares são desenvolvidos a partir de suspeitas envolvendo dinâmicas sobre o fato estudado, sendo assim, tais modelos tem uma fundamentação teórica que, em geral, associa-se a teoria de equações diferenciais, o que não acontece com os modelos lineares Weisberg (2005). Tal fato sugere que o uso de transformações para facilitar o ajuste implicaria em estimativas menos realísticas e dificuldade de interpretação dos parâmetros (Prudente (2009)), fato de grande importância, pois os modelos não lineares possuem parâmetros com interpretação biológica(Ratkowsky (1983))(Bates & Watts (1988)). E, ainda, os modelos não lineares geralmente fornecem um bom ajuste com menos parâmetros do que os modelos lineares.

Outras características são tidas como desvantagens: não há uma forma analítica na estimação de parâmetros dos modelos não-lineares. Usa-se algoritmos iterativos, ficando, assim, dependendo de valores iniciais e convergências.

2.3.1 Estimação dos parâmetros

Um dos métodos para a estimação dos parâmetros de um modelo não-linear é o método dos Mínimos Quadrados Ordinários. A estimativa do vetor de parâmetros β , com $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$, é obtida minimizando a Soma de Quadrados dos Erros. Em símbolos:

$$SQ_{erros} = \sum_{i=1}^n [(y_i - f(x_i, y))^2]. \quad (2)$$

Daí, derivando (2) em relação ao k -ésimo parâmetro, tem-se:

$$\frac{\partial SQ_{erros}}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n -2(y_i - f(x_i, y)) \left[\frac{\partial f(x_i, y)}{\partial \beta_k} \right] = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, y)] \left(\frac{\partial f(x_i, y)}{\partial \beta_k} \right). \quad (3)$$

Igualando estas equações a zero, obtêm-se as equações normais de Mínimos Quadrados e, destas, as estimativas dos k parâmetros.

Porém, para a solução do sistema de k equações do tipo $\frac{\partial SQ_{erros}}{\partial \beta_k} = 0$, usa-se processos iterativos, pois as equações são não-lineares. Para isso, é escolhido um método numérico e, em seguida, valores iniciais, consultados geralmente na literatura ou com especialistas, e um critério de convergência.

2.3.2 Modelo de Gompertz

A equação de Gompertz,

$$y(x) = \alpha \exp\{-\exp[-\kappa(x - \gamma)]\}, \forall x, \quad \text{com } \alpha, \kappa > 0$$

é solução da equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \kappa \exp[-\kappa(x - \gamma)]. \quad (4)$$

Em outras palavras, a equação (4) diz que a taxa de crescimento relativa decresce exponencialmente com o passar do tempo x ($x \rightarrow \infty$).

A função de Gompertz é uma curva sigmóide, assim como a função Logística e a de Richards. Tem $y = \alpha$ (capacidade de sustentação do meio) como uma assíntota horizontal superior e $y = 0$ como uma assíntota horizontal inferior, já que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0. \quad (5)$$

Com isso, ela assumirá valores no intervalo $]0, \alpha[$, fato que, segundo Fialho (1999), é uma característica desejável em uma curva de crescimento pois admite-se que o indivíduo sempre nasce com alguma massa.

A função de Gompertz é estritamente crescente com:

- concavidade para cima se $x < \gamma$;
- concavidade para baixo se $x > \gamma$;
- ponto de inflexão em $x = \gamma$.

Em torno do ponto de inflexão ficam as propriedades da função de Gompertz:

a função atinge menos que a metade da capacidade de sustentação do meio, ou seja, $y(\gamma) = \frac{\alpha}{e} < \frac{\alpha}{2}$, a massa corporal é de $\frac{\alpha}{e}$ (37% do máximo) e sua taxa de crescimento, dada pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \kappa \exp \{ -\kappa(t - \gamma) - \exp[-\kappa(t - \gamma)] \} \quad (6)$$

é máxima e igual a $y(\gamma) = \frac{\alpha}{e}$.

Os parâmetros da função de Gompertz tem interpretação biológica (Fialho (1999)) e, com isso, obtem-se informações importantes a respeito do crescimento do indivíduo. Em geral, os parâmetros para modelos que relacionam peso e tempo são interpretados como:

- α é o peso assintótico quando o tempo $x \rightarrow \infty$, considerado o peso à idade adulta;
- γ é a abcissa do ponto de inflexão, onde a taxa de crescimento é máxima;
- κ é a taxa de crescimento, a mudança de peso em relação ao peso à maturidade.

2.4 Séries Temporais

Série temporal é um conjunto de observações ordenadas no tempo, não necessariamente igualmente espaçadas, onde suas observações vizinhas são dependentes.

O estudo de séries temporais tem aplicações em várias áreas, como economia, avaliando os preços diários de ações, ou qualquer índice da bolsa de valores;

epidemiologia, quantificando e fazendo previsões para casos de doenças; meteorologia, na análise das temperaturas diárias de uma cidade, quantidade de chuva, entre outras.

Um dos enfoques utilizados na análise de séries temporais é feito no domínio temporal, onde o objetivo é a construção de modelos paramétricos com um número finito de parâmetros para representar as séries.

2.4.1 Tipos de séries

Seja a série temporal o conjunto de observações $Y(t), t \in T$, onde Y é a variável de interesse e T é o conjunto de representação dos índices. Assim, as séries temporais podem ser:

- discretas: $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, as observações são tomadas em intervalos de tempo até um número n ;
- contínuas: $T = \{t : t_1 < t < t_2\}$, as observações são tomadas continuamente no tempo.

2.4.2 Objetivos de uma série temporal

Segundo Morettin & Toloi (2004), os objetivos da análise de uma série temporal podem ser:

- fazer previsões: dada uma série temporal pode-se prever valores desta, a curto ou longo prazo, o que possibilitará tomar decisões corretamente;
- descrever o comportamento de uma série temporal: isto por meio de gráficos e verificação dos elementos de uma série;
- saber como se dá a geração dos elementos de uma série temporal, o que possibilita a descrição efetiva desta;
- procurar periodicidade nos dados.

2.4.3 Elementos de uma série temporal

As séries temporais são compostas de 3 elementos ditos básicos:

- tendência: descreve a movimentação da série a longo prazo;
- ciclos: referem-se às variações na série que acontecem com certa regularidade durante a evolução dela;
- sazonalidade: refere-se às oscilações que ocorrem em um período determinado.

2.4.4 Processos estocásticos

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $Z(t), t \in T$, definida em um espaço de probabilidade (η, A, P) , em que, para cada $t \in T$, $z(t)$ é uma função de dois argumentos, ou seja, $\{f(t, w), t \in T, w \in \eta\}$.

O conjunto T é chamado de espaço de parâmetros, geralmente tomado como o conjunto dos números inteiros ou reais; os valores de $Z(t)$ são chamados estados e o conjunto dos valores de $Z(t)$ é denominado espaço dos estados, denotado por E .

2.4.5 Caracterização de um processo estocástico

Seja o processo estocástico $Z(t)$, com $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$. Para o tempo t_1 , tem-se que a distribuição acumulada $F_y(x_1; t_1)$ é dada por:

$$F_z(x_1; t_1) = Pr[Z(t_1) \leq y_1], \quad (7)$$

em que $F_z(x_1; t_1)$ é a distribuição de primeira ordem de $Z(t)$.

Analogamente, faz-se as distribuições até a n -ordem de $Z(t)$, dada por:

$$F_z(z_1, z_2, \dots, z_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = Pr[Z(t_1) \leq z_1, \dots, Z(t_n) \leq z_n]. \quad (8)$$

Fica completamente caracterizado o processo estocástico $Y(t)$ quando forem conhecidas as distribuições de todas as ordens. Porém, na prática, é muito difícil a especificação de todas as distribuições. Por isso, trabalha-se com as funções vindas dos primeiros momentos.

2.4.6 Média, covariância e correlação

Seja o processo estocástico $\{Z(t), t \in T\}$. Define-se:

- função média (f_m):

$$\mu(t) = E(Z_t) \quad (9)$$

- função autocovariância (f_{acv}):

$$\gamma(t, t+j) = Cov(Z_t, Z_{t+j}) = E[(Z_t - \mu_t)(Z_{t+j} - \mu_{t+j})] = E(Z_t, Z_{t+j}) - \mu_t \mu_{t+j} \quad (10)$$

- função de autocorrelação (f_{ac}):

$$\rho(t, t+j) = Corr(Z_t, Z_{t+j}) = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+j})}{\sqrt{Var(Z_t)Var(Z_{t+j})}}. \quad (11)$$

Esta função mede a dependência linear entre os valores do processo em t e $t+j$.

Segundo Santos (2006), quando há interesse entre Z_t e seus valores defasados

Z_{t-k} , o conceito de correlação é chamado de autocorrelação.

2.4.7 Processos Estacionários

Seja o processo estocástico $\{Z(t), t \in T\}$. Diz-se que $Z(t)$ é estritamente estacionário se suas distribuições conjuntas de

$$Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n) \quad (12)$$

é a mesma distribuição conjunta de $Z(t_1 - k), Z(t_2 - k), \dots, Z(t_n - k)$ para qualquer $t \in T$ e qualquer k constante.

Para um processo estacionário, tem que:

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t-k}) \text{ e } \rho_k = Corr(Z_t, Z_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \text{ com as seguintes propriedades:}$$

- $\gamma_0 = Var(Y_t), \rho_0 = 1$;
- $\gamma_k = \gamma_{-k}, \rho_k = \rho_{-k}$;
- $\gamma_k \leq \gamma_0, \rho_k \leq 1$.

2.4.8 Modelos ARIMA

A classe de modelos usada na análise de séries temporais é a dos modelos auto regressivos integrados e de médias móveis, modelos ARIMA, que tem dois casos particulares importantes: o modelo auto-regressivo de ordem p , $AR(p)$, e o modelo de médias móveis de ordem q , $MA(q)$.

2.4.9 Ruído branco

Seja uma série temporal a_t . Esta série é dita ser um ruído branco se a_t é uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, não correlacionadas entre instantes diferentes, com valor esperado e variância constantes (geralmente assume-se que o ruído tem média zero e variância σ_a^2).

Quando a série a_t tem distribuição Normal, diz-se que a_t é um ruído branco gaussiano.

2.4.10 Modelo Autorregressivo de ordem p - AR(p)

O modelo auto-regressivo de ordem p , $AR(p)$, é dado por (Morettin & Toloi (2004)):

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t, \quad (13)$$

em que a_t é o ruído branco, os Z_t , para quaisquer "lag", são independentes de a_t . Neste trabalho, para a análise do conjunto de dados, será utilizado o modelo auto-regressivo de ordem 1, $AR(1)$, descrito a seguir.

2.4.11 Modelo Autorregressivo de ordem 1 - AR(1)

O modelo auto-regressivo de ordem 1 é dado por (Morettin & Toloi (2004)):

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t. \quad (14)$$

Neste modelo, tem -se que $E(Z_t) = 0, \forall t \in T$ pois:

$$E(Z_t) = E(\phi Z_{t-1} + a_t) = \phi E(Z_{t-1}) + E(a_t) = \phi E(Z_{t-1}) + 0 = \phi E(Z_t)$$

$$\Rightarrow E(Z_t) - \phi E(Z_t) = 0$$

$$\Rightarrow E(Z_t)(1 - \phi) = 0$$

$$\Rightarrow E(Z_t) = \frac{0}{1-\phi} = 0, \forall t \in T.$$

E a variância $Var(Z_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$ pois:

$$Var(Z_t) = Var(\phi Z_{t-1} + a_t)$$

$$= \phi^2 Var(Z_{t-1}) + Var(a_t)$$

$$= \phi^2 Var(Z_{t-1}) + \sigma^2$$

$$= \phi^2 Var(Z_t) + \sigma^2$$

$$\Rightarrow Var(Z_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \text{ com } \phi^2 < 1, \text{ pois } Var(Z_t) > 0.$$

A função de autocovariância é dada por:

$$\begin{aligned} f_{acv} &= \gamma_1 = Cov(Z_t, Z_{t-1}) = E[(Z_t - 0)(Z_{t-1})] = E(Z_t Z_{t-1}) = \\ &E[(\phi Z_{t-1} + a_t)(\phi Z_{t-2} + a_{t-1})] \\ &= E[\phi^2 Z_{t-1} Z_{t-2} + \phi Z_{t-1} a_{t-1} + \phi Z_{t-2} a_t + E(a_t a_{t-1})] \\ &= \phi^2 E(Z_{t-1} Z_{t-2}) + \phi E(Z_{t-1} a_{t-1}) + \phi E(Z_{t-2} a_t) + E(a_t a_{t-1}) \\ &= \phi^2 \gamma_1 + \phi \sigma_a^2 \\ &\Rightarrow \gamma_1 = \phi^2 \gamma_1 + \phi \sigma_a^2 \\ &\Rightarrow \gamma_1 = \frac{\phi}{1-\phi^2} \sigma_a^2. \end{aligned}$$

Generalizando, $\gamma_k = \frac{\phi^k}{1-\phi^2} \sigma_a^2, k = 0, 1, 2, \dots$

A função de autocorrelação do modelo auto-regressivo de ordem 1 é dada por:

$$\begin{aligned} f_{ac} &= Corr(Z_t, Z_{t-1}) = \rho_1 = \frac{Cov(Z_t, Z_{t-1})}{Var(Z_t)Var(Z_{t-1})} \\ &= \frac{Cov(Z_t, Z_{t-1})}{\gamma_0 \gamma_0} \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1. \end{aligned}$$

Generalizando, $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k$.

Segundo Santos (2006), o modelo AR(1) será estacionário se, e somente se, $|\phi_1| < 1$.

2.4.12 Estimação dos parâmetros de modelo autorregressivo de ordem 1 - AR(1)

A estimação dos parâmetros do modelo AR(1) pode ser feita por:

- Método dos momentos: um dos métodos mais simples, consiste em formular equações dos momentos amostrais e dos momentos teóricos e obter as estimativas dos parâmetros pelas soluções de tais equações;
- Método dos mínimos quadrados: no caso AR(1), com

$$Z_t - \mu = \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + a_t,$$

consiste em minimizar a soma de quadrados das diferenças $(Z_t - \mu) - \phi_1(Z_{t-1} - \mu)$, chamada função da soma de quadrados condicional.

2.5 Modelos de efeitos mistos

2.5.1 Introdução

Em geral, na análise de dados longitudinais, deve-se admitir a autocorrelação entre as observações tal como a heterogeneidade de variâncias entre as medidas e, para análise dessa situação, há necessidade da especificação de um modelo mais flexível (Barbosa (2009)).

Uma alternativa ao modelo linear de efeito fixo, que não é adequado para ajustes de medidas repetidas devido às suas pressuposições (independência dos erros e homogeneidade de variâncias), é a utilização de modelos de efeitos mistos para tais ajustes.

Craig et al. (2001) ajustaram um modelo de efeitos mistos aos dados de crescimento de porcos e mostraram que este modelo, com a assíntota de cada animal sendo considerada aleatória, corrigiu as condições de heteroscedasticidade e correlação residual.

Ainda de acordo com Barbosa (2009), o uso do modelo de efeito misto na análise de dados longitudinais proporciona possibilidades de modelagem da matriz de covariâncias, podendo ser determinada através de dados incompletos, irregulares ou desbalanceados em relação ao tempo, englobando análises uni e multivariadas.

Os modelos lineares de efeitos mistos caracterizam-se pela presença de efeitos fixos e efeitos aleatórios, além da média geral, que é sempre fixa, e do erro experimental, que é sempre aleatório.

Segundo Pinheiro (1994), os modelos mistos foram desenvolvidos para análise de dados agrupados e, já que nesses casos as observações não são independentes, estes modelos constituem uma ferramenta conveniente para modelar a dependência entre indivíduos.

2.5.2 Modelo Misto

O modelo linear de efeitos mistos é escrito da forma:

$$y_{ijk} = \mu + \beta_i + \gamma_j + e_{ijk}, \quad \text{com } i = 1, \dots, p \quad e \quad j = 1, \dots, q \quad (15)$$

em que:

- y_{ijk} é a k -ésima observação do nível i dos efeitos fixos ao nível j dos efeitos aleatórios;
- μ constante de todas as observações;
- β_i é o efeito do nível i do fator fixo;
- γ_j é o efeito do nível j , do fator aleatório, no nível i do fator fixo;
- e_{ijk} é o erro associado a observação y_{ijk}

Na forma matricial, o modelo linear de efeitos mistos é escrito como:

$$Y = X\beta + Z\alpha + e \quad (16)$$

com as seguintes distribuições e estruturas de médias e variâncias: $\alpha \sim N(0, G)$, $e \sim N(0, R)$, $E(Y) = X\beta$ e $Var(Y) = V = ZGZ' + R$, em que:

- Y é o vetor das observações;
- β é o vetor paramétrico dos efeitos fixos, com matriz de incidência X ;
- α é o vetor paramétrico de efeitos aleatórios, com matriz de incidência Z ;
- e é o vetor dos erros aleatórios;
- G é a matriz de variância-covariância dos efeitos aleatórios;
- R é a matriz de variância-covariância dos erros aleatórios.

Segundo Pinheiro (1994), os métodos mais utilizados de estimação dos parâmetros para o modelo linear misto são: método da Máxima Verossimilhança e Máxima Verossimilhança Restrita.

O modelo não linear misto é escrito da forma:

$$y = f(\boldsymbol{\theta}, X) + e, \quad \text{onde} \quad \boldsymbol{\theta} = A\beta + Bb \quad (17)$$

com y = vetor das respostas, f = função não linear, $\boldsymbol{\theta}$ = vetor de parâmetros de efeitos mistos expresso como função linear de efeitos fixos B e efeitos aleatórios b , X é matriz de covariáveis, e = vetor de erros e A e B são as matrizes de efeitos fixos e efeitos aleatórios respectivamente. O erro $e \sim N(0, R)$ e $b \sim N(0, G)$, com b independente de e .

Há vários métodos para estimação dos modelos não lineares sendo propostos, porém os mais utilizados são os métodos da Máxima Verossimilhança e da Máxima Verossimilhança Restrita Pinheiro (1994).

2.6 Análise de resíduos

Para a verificação das condições dos modelos estudados neste trabalho, serão utilizados dois testes: Teste de Durbin-Watson, para a independência dos resíduos, e o Teste de Breusch-Pagan, para a análise da homocedasticidade.

2.6.1 Teste de Durbin-Watson

Este teste é utilizado para detectar a autocorrelação residual. Para isto, supõe-se que o erro em um dado modelo de regressão segue um processo autor-regressivo de primeira ordem, $AR(1)$, ou seja:

$$E_i = \rho E_{i-1} + a_i \quad (18)$$

em que E_i é o erro na i -ésima observação, a_i é o ruído branco, com $a_i \sim N(0, \sigma_a^2)$ e ρ é o coeficiente de autocorrelação com $|\rho| < 1$.

As hipóteses do teste de Durbin-Watson são dadas por:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

Ou seja, a hipótese testada é se não há autocorrelação serial dos resíduos.

A estatística do teste é dada por:

$$d_w = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (20)$$

que mede a correlação entre cada resíduo no instante i e o resíduo no instante anterior $i - 1$.

Esta estatística, associado com dois valores, d_L e d_U , consultados em uma tabela do teste de Durbin-Watson, são interpretadas como:

- se $0 \leq d_W < d_L$, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, há dependência dos resíduos;
- se $d_L \leq d_W \leq d_U$, nada se conclui sobre o teste;
- se $d_U < d_W < 4 - d_U$, não se rejeita a hipótese nula, ou seja, há independência nos resíduos;
- se $4 - d_U \leq d_W \leq 4 - d_L$, nada se conclui sobre o teste;
- se $4 - d_L < d_W \leq 4$, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, há dependência dos resíduos.

De maneira empírica, considera-se:

- se $d_W \approx 0$, os resíduos tem autocorrelação positiva;
- se $d_W \approx 2$, os resíduos não são autocorrelacionados;
- se $d_W \approx 4$, os resíduos tem autocorrelação negativa.

2.6.2 Teste de Breusch-Pagan

Para verificar se a variância dos erros permanece constante para todas as observações, ou seja, $Var(e_i) = \sigma_e^2$, com $i = 1, \dots, n$, será utilizado neste trabalho o teste de Breusch-Pagan Breusch & Pagan (1979).

Para a obtenção da estatística do teste, ajusta-se o modelo de regressão e encontra-se os resíduos (e_i) e os valores ajustados (\hat{y}) para as n observações e, ainda, considera-se os resíduos (μ_i) padronizados por:

$$\mu_i = \frac{e_i^2}{\frac{SQE}{n}}, \quad (21)$$

em que $SQE = \sum_{i=1}^n e_i^2$.

Basta agora fazer a regressão entre $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ como variável resposta e $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ como variável explicativa que obtêm-se a estatística χ_{BP}^2 , que, sob a hipótese nula de homocedasticidade, segue uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade.

2.7 Critérios de Seleção de modelos

Na análise de regressão, quando há comparação de modelos, deve-se optar por avaliadores de ajuste que selecionem o melhor modelo para o conjunto de dados em estudo. Neste trabalho, optou-se por seis critérios afim de selecionar o melhor modelo. Tais critérios são descritos a seguir.

O quadrado médio do resíduo dado por:

$$QMR = \frac{SQR}{n - k} \quad (22)$$

em que: SQR é a soma de quadrados dos resíduos; n é o número de observações e k o número de tratamentos.

O critério de informação de Akaike (AIC), proposto por Akaike (1974), é definido como:

$$AIC = -2\ln(L) + 2p \quad (23)$$

em que: L é a função de verossimilhança; n é o número de observações e p o número de parâmetros ajustados.

O critério de informação Bayesiano, proposto por Schwarz (1978), é dado por:

$$BIC = -2\ln(L) + p\ln(n) \quad (24)$$

em que: L é a função de verossimilhança; n é o número de observações e p o número de parâmetros ajustados. Para os critérios AIC e BIC considera-se os menores valores como os melhores resultados.

O erro de predição médio (EPM), proposto por Goonewardene et al. (1981) é obtido calculando-se a média dos erros de predição, onde os EP são dados por:

$$EP = 100 \left(\frac{p_o - p_e}{p_o} \right) \quad (25)$$

em que p_o é o peso observado e p_e é o peso estimado dos indivíduos, sendo que valores positivos do EPM indica subestimação e valores negativos do EPM superestimação dos pesos.

Um índice, calculado pela razão entre os 20% dos maiores valores estimados e a assíntota estimada, que é um valor considerado como avaliador no final do ajuste. Considera-se o índice bom quando seu valor é mais próximo de 1.

Os resíduos nos pontos iniciais, chamado de resíduo no ponto 0, é um avaliador usado para verificar o ajuste no início das observações. É obtido pela média das diferenças entre os valores observados e os valores estimados.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Neste trabalho, foram ajustados três modelos de Gompertz, com estruturas diferentes, a dados de crescimento de peso em gado e ratos *Rattus norvegicus*.

Os dados dos bovinos referem-se a três raças diferentes sendo:

- Flamengo: 5 indivíduos com 60 pesagens mensais;
- Guernsey-Gir: 9 indivíduos com 59 pesagens mensais;
- Holandesa: 11 indivíduos com 52 pesagens mensais;

Estes dados foram utilizados na tese de doutorado Mischan (1972), e foram obtidos nos Livros de Registro da Seção Técnica de Zootecnia da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", cidade de Piracicaba, São Paulo.

Enquanto que os dados relativos aos ratos, previamente utilizados na tese de Carvalho (1996) foram divididos em cinco indivíduos masculinos e cinco femininos, sendo 26 mensurações para cada, e obtidos de um experimento no Biotério da Faculdade de Medicina de Botucatu em 1989.

Os modelos ajustados foram:

- Modelo de Gompertz de efeitos fixos, dado por:

$$y_i = f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\{-\exp[-\kappa(x - \gamma)]\} + e_i, \forall x, \quad \text{com } \alpha, \kappa > 0 \quad (26)$$

em que $\boldsymbol{\theta}$ = vetor de parâmetros, x = peso dos animais e $e_i \sim Niid(0, \sigma_e^2)$

- Modelo de Gompertz com estrutura de autocorrelação de primeira ordem, dado por:

$$y_i = f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\{-\exp[-\kappa(x - \gamma)]\} + \rho\mu_{i-1} + e_i, \forall x, \quad \text{com } \alpha, \kappa > 0 \quad (27)$$

em que $\mu_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, independente de x e $e_i \sim Niid(0, \sigma_e^0)$

- Modelo de Gompertz de efeitos mistos, dado por:

$$y_{ij} = f(x, \boldsymbol{\theta}) + \delta_i g(x, \boldsymbol{\theta}) + e_{ij} \quad (28)$$

em que $f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\{-\exp[-\kappa(x - \gamma)]\}$, $g(x, \boldsymbol{\theta}) = \delta \alpha \exp\{-\exp[-\kappa(x - \gamma)]\}$, y_{ij} = resposta do indivíduo i no tempo j , x = peso dos animais, $\boldsymbol{\theta} = [\alpha, \kappa, \gamma]$ vetor de parâmetros, δ_i = efeito aleatório para o indivíduo i com $\delta_i \sim N(0, \sigma_\delta^2)$ e e_{ij} = erro associado à parcela (i, j) com $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$.

O modelo de Gompertz de efeito misto leva em consideração alguns aspectos: a assíntota de cada animal tem um componente aleatório, as variâncias são crescentes com a idade do animal e há correlações seriais através da idade.

Foram feitos ajustes dos modelos de efeitos fixos e dos modelos com autocorrelação para cada repetição dos dados bovinos e dos ratos utilizando o software Statistical Analysis System (SAS) (2000), com a proc model e os resultados encontrados das estimações dos parâmetros $(\alpha, \kappa, \gamma, \rho)$ e erro-padrão de cada ajuste foram tabelados.

A fim de determinar qual o melhor modelo de ajuste para os dados estudados, foram determinados os critérios de seleção de modelos e tabelados os valores de: índice para medir a qualidade da parte final do ajuste; resíduo nos pontos iniciais, para verificar como foi a qualidade do início do ajuste; quadrado médio dos resíduos (QMR); o critério de informação de Akaike (AIC); o critério de informação Bayesiano (BIC) e o erro de predição médio (EPM).

Para a comparação dos ajustes do modelo de efeito misto foram feitos ajustes únicos para os dados dos bovinos e dos ratos, utilizando o software SAS e a proc nlmixed.

Da mesma forma, foram tabelados estimativas dos parâmetros e erros-padrão, tal como os critérios de seleção para os ajustes únicos dos modelos de efeitos fixo, misto e autorregressivo.

Fez-se a análise de resíduos a partir dos testes de Durbin-Watson, para a verificação da independência dos resíduos, e o teste de Breusch-Pagan, para a verificação da homogeneidade dos resíduos. Os resultados obtidos para os ajustes de cada repetição e para os ajustes únicos foram tabelados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

São apresentados os resultados dos ajustes para os ratos e para as vacas, tais como as estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros, QMR, índices, resíduo no ponto zero, AIC, BIC, valor do teste de Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para os modelos de efeito fixo, autorregressivo e misto. São apresentadas também as figuras 1, 2 e 3, que mostram os perfis relativos aos ajustes.

Tabela 2. Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as ratas

rep	α	erro α	κ	erro κ	γ	erro γ
1	293,2085	2,9447	3,7152	0,2088	0,2264	0,0091
2	319,8372	1,9083	4,4777	0,1779	0,2452	0,0061
3	294,7648	1,9619	4,8769	0,2681	0,2806	0,0089
4	310,9036	1,7892	3,9976	0,1185	0,2132	0,0045
5	298,5717	1,9271	4,1417	0,1614	0,2334	0,0061

Tabela 3. Estimativas dos parâmetros do ajuste do modelo autorregressivo para as ratas

rep	α	erro α	κ	erro κ	γ	erro γ	ρ	erro ρ
1	290,7994	7,0854	4,0846	0,3846	0,2446	0,0163	0,8396	0,1283
2	320,2981	3,4232	4,5203	0,2986	0,2461	0,0102	0,5929	0,1807
3	295,3307	3,3616	4,8934	0,4250	0,2805	0,0140	0,5373	0,1868
4	311,5946	3,3396	4,0375	0,2057	0,2139	0,0078	0,5574	0,2144
5	297,6846	3,4537	4,2661	0,2836	0,2385	0,0103	0,6311	0,1672

Tabela 4. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeito fixo das ratas

rep	QMR	índice	Resíduo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	45,2104	0,9831	6,1259	105,0945	108,8688	-3,5472	0,4124	0,1636
2	21,2692	0,9869	0,8695	85,4888	89,2631	-0,3437	0,8319	0,5899
3	29,5709	0,9938	-1,2724	94,0566	97,8308	0,835	0,931	0,776
4	13,4242	0,9753	3,8681	73,5235	77,2978	-2,3648	0,8824	0,2459
5	19,8356	0,9840	3,2398	83,6744	87,4487	-2,3075	0,7568	0,8309

Tabela 5. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo das ratas

rep	QMR	índice	Resíduo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	17,9784	0,9879	2,8449	83,1184	88,1508	-0,8685	1,9787	0,1302
2	14,9287	0,9870	0,5973	78,2854	83,3178	-0,0873	1,8189	0,0662
3	22,4709	0,9937	-1,3519	88,9177	93,9501	0,7092	1,9302	0,3374
4	10,5910	0,9754	3,5317	69,3601	74,3925	-1,5298	1,8052	0,333
5	12,9016	0,9854	2,3319	74,4911	79,5235	-1,0886	1,7814	0,6026

Com relação às estimativas dos parâmetros para as ratas (tabelas 2 e 3), os modelos de efeito fixo e autorregressivo tiveram valores próximos, porém, quanto aos erros-padrão, os valores dos modelos autorregressivos foram maiores, ficando de acordo com a literatura, a qual diz que desconsiderar a autocorrelação acarreta na subestimação das variâncias (Souza (1998)).

Para os ajustes dos dados das vacas também foi observado que os modelos autorregressivos tiveram erros-padrão maiores que os modelos de efeito fixo, exceto para a primeira repetição das vacas Flamengas (tabelas 10 a 15).

Resultados análogos foram encontrados para os ratos.

Em relação aos índices, os dois modelos, para os ratos e para as ratas, tiveram ótimos ajustes (valores próximos a 1). Os valores do quadrado médio do resíduo foram todos menores para o modelo autorregressivo, tal como os valores de

Tabela 6. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeito fixo dos ratos

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	26,4545	0,9883	-1,1831	91,1611	94,9354	0,4484	0,843	0,3967
2	19,0226	0,9642	5,3105	82,5863	86,3606	-3,8783	1,0019	0,1363
3	61,3066	0,9845	0,4414	113,0131	116,7874	-1,0395	0,4792	0,0227
4	82,7561	0,9773	2,1237	120,8133	124,5876	-2,4079	0,4656	0,1766
5	43,4181	0,9776	1,0867	104,0428	107,8171	-0,8333	1,0965	0,0289

Tabela 7. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo dos ratos

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	19,6235	0,9882	-1,3613	85,3949	90,4273	0,4902	1,5996	0,1915
2	16,3507	0,9640	5,2189	80,6510	85,6834	-2,97	1,652	0,1014
3	28,4071	0,9860	-0,8294	95,0126	100,0450	0,1224	1,9223	0,2566
4	31,6854	0,9910	-4,2676	102,7445	107,7769	2,3577	2,2302	0,7313
5	38,312	0,9768	1,2538	102,7898	107,8222	-0,7656	1,7872	0,4902

AIC e BIC. Já os valores dos EPM foram menores para os ajustes autorregressivos e, em ambos os sexos, mostraram uma tendência de superestimação dos parâmetros (valores negativos)(Tabelas 4 a 7).

No caso das vacas, os índices foram maiores para o modelo autorregressivo, sendo em duas repetições menor que o modelo fixo. Já os valores de quadrados médio dos resíduos, AIC e BIC foram todos menores para o modelo autorregressivo. Os valores dos EPM para os modelos autorregressivos foram menores que os valores dos modelos fixos, sendo todos valores próximos a zero e que tendem a subestimar os parâmetros (tabelas 16 a 21).

Os resultados do teste de Durbin-Watson para os ratos e ratas e para as vacas mostraram que houve uma melhora para o modelo autorregressivo de primeira ordem já que os valores obtidos das estatísticas foram próximos a dois, o que indica

Tabela 8. Estimativas dos parâmetros para o ajuste único dos ratos

	α	erro α	κ	erro κ	γ	erro γ	ρ	erro ρ
sem auto	457,5441	3,6195	4,7705	0,2289	0,2287	0,00688		
com auto	457,356	1,9472	4,7556	0,1223	0,2286	0,0037	-0,5589	0,0742
misto	457,13	3,8254	1,6008	0,0067	0,2336	0,0025		

Tabela 9. QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único dos ratos

	QMR	AIC	BIC	DW	BP
sem auto	303,9	749,1708	757,7734	3,1056	0,006
com auto	211,1	701,8031	710,4057	2,0635	0,0011
misto	3102	1050,9	1065,2	1,4	0,8875

a ausência de autocorrelação residual.

Pelos resultados do teste de Breusch-Pagan, observou-se que para ambos os casos e sexos dos ratos e para as vacas manteve-se a homocedasticidade.

A fim de comparar os ajustes do modelo de efeitos fixos e o autorregressivo com o modelo de efeitos mistos, foram feitos ajustes únicos utilizando todas as repetições. Para as ratas, os ajustes individuais que para cada repetição apresentou autocorrelação nos resíduos, na análise única não apresentou. Sendo assim, confirmando através de todos os critérios, o modelo sem autocorrelação se mostrou melhor.

Para os ratos, a autocorrelação foi significativa e, analisando-se todos os critérios, com exceção do teste de Breusch-Pagan, o modelo autorregressivo foi o melhor (Tabelas 8 e 9).

Quanto a estimativa σ_δ^2 , para os ratos foi de 401,44 e para as ratas foi de 187,93, valores de 15% e 13% do QMR.

Já para as vacas, observou-se em todos os critérios que o modelo autorregressivo foi o melhor ajuste em comparação ao modelo fixo e ao modelo misto (tabelas 22 a 24).

Quanto a estimativa σ_δ^2 , para as vacas, para a raça Flamengo foi 365, 2, Guernsey-Gir foi 713, 21 e para a Holandesa 1402, 3, ficando respectivamente de 2%, 3% e 5% do quadrado médio do resíduo.

Tabela 10. Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as vacas Flamengas

rep	α	erro	α	κ	erro	κ	γ	erro	γ
1	794,8518	90,7206		1,9485	0,0814		0,0279	0,0040	
2	499,9513	16,4194		1,9552	0,1141		0,0598	0,0055	
3	493,8381	13,4143		1,8686	0,0919		0,0602	0,0047	
4	506,0435	11,5174		2,1801	0,0903		0,0606	0,0037	
5	460,7345	19,8493		1,8528	0,1442		0,0602	0,0076	

Tabela 11. Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as vacas Guernsey-Gir

rep	α	erro	α	κ	erro	κ	γ	erro	γ
1	378,6312	6,9012		2,0767	0,1270		0,0822	0,0057	
2	511,2892	11,2538		2,0252	0,0922		0,0650	0,0043	
3	374,2278	14,8575		1,8496	0,1440		0,0634	0,0077	
4	390,4805	6,8822		1,9954	0,1001		0,0755	0,0047	
5	390,2933	7,9889		1,8745	0,1234		0,0805	0,0065	
6	472,4987	11,5219		1,8437	0,0749		0,0591	0,0041	
7	512,3239	9,6025		2,2057	0,0849		0,0649	0,0034	
8	413,6701	7,1238		2,1189	0,1124		0,0786	0,0049	
9	454,7310	10,9497		1,8425	0,1192		0,0733	0,0064	

Para os ajustes únicos das vacas foram estimados para o parâmetro ρ os valores: $-0,1136$, $-0,0779$ e $0,0777$ para as Flamengas, Guernsey-Gir e Holandesas, sendo estes não significativos, ao nível de 5% de significância.

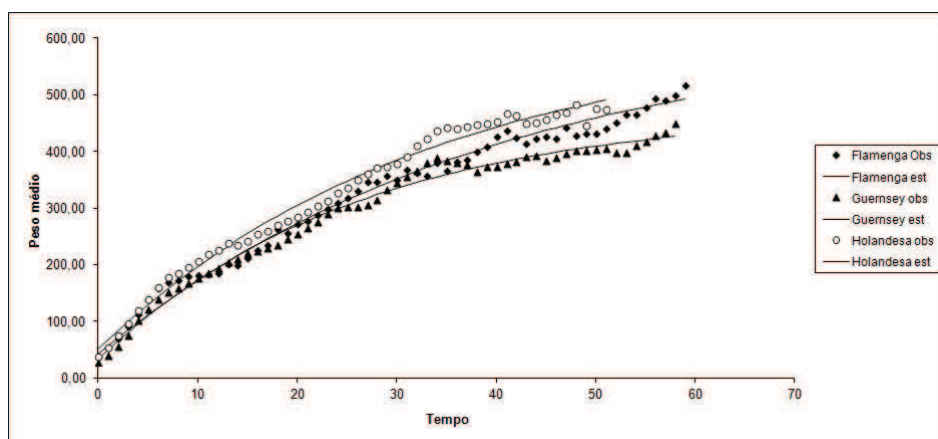


Figura 1: Pesos médios observados e estimados das vacas

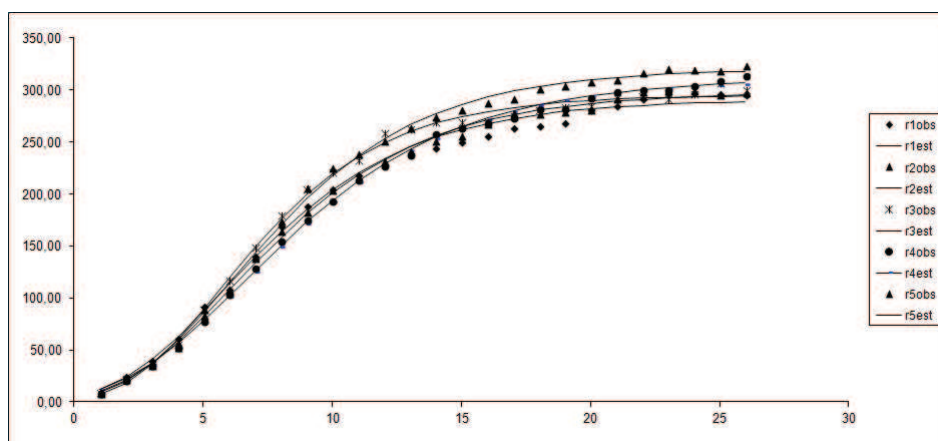


Figura 2: Pesos observados e estimados para as ratas

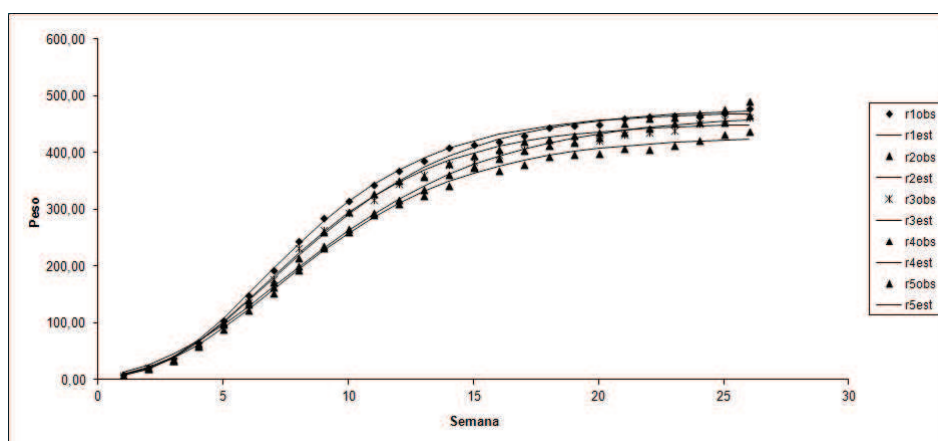


Figura 3: Pesos observados e estimados para os ratos

Tabela 12. Estimativas dos parâmetros do ajuste de efeitos fixos para as vacas Holandesas

rep	α	erro α	κ	erro κ	γ	erro γ
1	559,3195	19,3721	2,0102	0,1225	0,0690	0,0066
2	440,1216	9,9952	2,0228	0,1516	0,0928	0,0081
3	523,7467	27,0897	1,7278	0,0889	0,0546	0,0066
4	550,7307	47,3544	2,0381	0,1224	0,0488	0,0077
5	638,9176	46,7653	1,9494	0,0977	0,0481	0,0066
6	511,9909	17,8139	1,9749	0,1175	0,0682	0,0065
7	622,2531	82,2884	1,8806	0,0958	0,0340	0,0061
8	525,3025	10,9048	2,0849	0,0948	0,0759	0,0047
9	570,2989	22,6103	1,9232	0,1083	0,0632	0,0064
10	481,8134	18,7977	1,8442	0,0915	0,0603	0,0058
11	564,0442	13,3761	2,1327	0,0809	0,0665	0,0040

Tabela 13. Estimativas dos parâmetros do modelo autorregressivo para as vacas Flamengas

rep	α	erro α	κ	erro κ	γ	erro γ	ρ	erro ρ
1	608,1361	87,5888	2,3670	0,2996	0,0489	0,0119	0,8893	0,0682
2	519,9184	51,6369	2,3067	0,3039	0,0624	0,0133	0,8654	0,0819
3	477,6523	23,0207	2,0500	0,2151	0,0687	0,0099	0,6997	0,0968
4	515,3693	28,5743	2,3558	0,2206	0,0620	0,0081	0,7321	0,1132
5	462,2364	41,2659	2,1273	0,3568	0,0663	0,0159	0,7598	0,0944

Tabela 14. Estimativas dos parâmetros do modelo autorregressivo para as vacas Guernsey-Gir

rep	α	erro α	κ	erro κ	γ	erro γ	ρ	erro ρ
1	369,4053	14,8904	2,3827	0,3185	0,0942	0,0132	0,7814	0,0857
2	513,8898	28,0219	2,2992	0,2392	0,0702	0,0098	0,8100	0,0900
3	399,7907	58,9270	2,4291	0,4468	0,0677	0,0209	0,8968	0,0832
4	392,3187	14,6282	2,1447	0,2135	0,0787	0,0095	0,6925	0,1076
5	384,8222	21,5645	2,3725	0,3321	0,0973	0,0166	0,8722	0,0721
6	476,2278	44,9052	2,4007	0,2816	0,0700	0,0143	0,9051	0,0851
7	504,0937	21,5831	2,5305	0,2454	0,0729	0,0083	0,8031	0,0871
8	416,5968	13,0331	2,1746	0,1988	0,0789	0,0084	0,5570	0,1223
9	437,7921	22,4001	2,2167	0,3159	0,0911	0,0154	0,8145	0,0791

Tabela 15. Estimativas dos parâmetros do modelo autorregressivo para as vacas Holandesas

rep	α	erro α	κ	erro κ	γ	erro γ	ρ	erro ρ
1	561,2499	40,1404	2,2008	0,2727	0,0732	0,0132	0,7583	0,1001
2	435,6618	20,1389	2,2246	0,3194	0,1010	0,0162	0,7378	0,0982
3	454,9431	38,6790	2,2393	0,2920	0,0893	0,0188	0,9159	0,0612
4	452,2138	56,2038	2,4716	0,4747	0,0752	0,0207	0,8794	0,0730
5	548,2857	57,3848	2,2350	0,3349	0,0684	0,0162	0,8101	0,0893
6	477,4562	33,6377	2,3263	0,3118	0,0858	0,0156	0,8653	0,0747
7	497,8082	74,9141	2,2382	0,3078	0,0556	0,0148	0,8483	0,082
8	502,6670	23,1724	2,4349	0,2525	0,0909	0,0115	0,8509	0,0776
9	534,7731	39,5500	2,1797	0,2705	0,0773	0,0144	0,8400	0,0796
10	473,5506	34,9664	2,0667	0,2235	0,0678	0,0119	0,7691	0,0965
11	554,0729	23,2921	2,2744	0,1761	0,0716	0,0077	0,6709	0,1088

Tabela 16. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeitos fixos para as vacas Flamengas

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	772,2	0,6448	73,2566	404,9546	411,2376	-4,3722	0,4174	0,001
2	618,1	0,9219	30,7612	391,5990	397,8820	-1,7713	0,3647	0,0085
3	618,1	0,9267	36,2188	391,5990	397,8820	-2,5977	0,6287	0,0256
4	409,0	0,9167	29,1982	366,8229	373,1059	-2,8888	0,638	0,0497
5	1355,0	0,9275	38,2420	438,6934	444,9764	-4,2462	0,5282	0,042

Tabela 17. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeitos fixos para as vacas Guernsey-Gir

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	412,1	0,9716	27,4588	361,2547	367,4873	-3,4480	0,4703	0,0216
2	504,3	0,9340	31,4735	373,1671	379,3997	-2,0669	0,4063	0,0045
3	854,9	0,9345	34,8661	404,3081	410,5407	-4,9460	0,3359	0,0001
4	322,1	0,9616	23,0894	346,7169	352,9495	-3,0255	0,6595	0,0052
5	545,6	0,9720	35,8834	377,8113	384,0439	-4,0973	0,3171	0,002
6	394,6	0,9190	42,7639	358,6945	364,9271	-3,1824	0,3906	0,0001
7	339,0	0,9279	34,4445	349,7340	355,9666	-4,2636	0,4711	0,0026
8	377,6	0,9652	19,7081	356,0963	362,3289	-2,7517	0,8929	0,3879
9	775,4	0,9604	38,0389	398,5494	404,7820	-4,7026	0,4202	0,0048

Tabela 18. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo de efeitos fixos para as vacas Holandesas

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	1018,2	0,9176	28,9275	366,1412	371,9949	-1,9975	0,5189	0,0011
2	757,2	0,9709	24,2213	350,7406	356,5944	-2,1524	0,5362	0,3349
3	864,5	0,8677	53,0566	357,6319	363,4856	-4,5717	0,2515	0,1392
4	1300,3	0,8038	46,7470	378,8582	384,7119	-5,2611	0,3249	0,0018
5	1270,2	0,8065	50,9560	377,6403	383,4941	-3,6349	0,4722	0,0174
6	832,8	0,9160	35,0516	355,6893	361,5430	-2,6349	0,321	0,0077
7	759,2	0,6732	59,8927	350,8778	356,7315	-4,6813	0,4451	0,0146
8	451,3	0,9369	33,3054	323,8309	329,6846	-3,7878	0,3628	0,001
9	1007,5	0,8985	33,3427	365,5918	371,4456	-2,5442	0,3596	0,0023
10	599	0,8896	32,1997	338,5536	344,4073	-1,9837	0,506	0,0333
11	394,5	0,9028	31,8300	316,8362	322,6899	-2,6477	0,6711	0,2023

Tabela 19. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo para as vacas Flamengas

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	318,1	0,8382	17,1073	351,7419	362,1193	0,6110	2,0953	0,2117
2	308,2	0,8325	11,8158	349,8449	360,2223	0,3673	1,5972	0,0024
3	343,4	0,9485	21,4207	356,3338	366,7111	-0,3504	1,9646	0,0254
4	244,2	0,8792	20,7707	335,8793	346,2566	-0,5399	1,6392	0,0079
5	655,5	0,9736	21,0553	395,1239	405,5013	-0,6931	2,4781	0,0585

Tabela 20. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo para as vacas Guernsey-Gir

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	180,2	0,9823	14,0965	312,4500	322,7601	-0,3891	1,4056	0,804
2	221,6	0,9423	15,5632	324,6516	334,9617	0,1230	1,6824	0,4412
3	284,4	0,9312	11,2280	339,3725	349,6827	0,1036	1,5615	0,3356
4	191	0,9649	15,9418	315,8841	326,1943	-0,8318	1,7212	0,445
5	170,2	0,9850	11,8836	309,0815	319,3916	0,0007	1,0072	0,4996
6	156,2	0,9393	11,1722	304,0171	314,3272	0,4369	1,7192	0,1382
7	154,4	0,9448	18,1355	303,3333	313,6434	-0,4018	1,589	0,7556
8	279,7	0,9649	17,3477	338,3893	348,6995	-1,3138	1,7988	0,0017
9	304,1	0,9807	13,7054	343,3240	353,6342	-0,3968	1,5068	0,3679

Tabela 21. QMR, índice, res 0, AIC, BIC, EPM, Durbin-Watson e p-valor do teste de Breusch-Pagan para o ajuste do modelo autorregressivo para as vacas Holandesas

rep	QMR	índice	Residuo 0	AIC	BIC	EPM	DW	p-valor BP
1	483,3	0,9252	16,1385	327,3932	337,1981	-0,0723	1,7599	0,1357
2	364,1	0,9778	13,0997	312,6663	322,4713	-0,2593	1,8164	0,8671
3	214	0,9625	8,4665	285,0308	294,8357	0,3073	1,8127	0,0001
4	409,6	0,9232	13,1893	318,7894	328,5944	0,2246	1,7487	0,1075
5	561,2	0,9064	18,6623	335,1640	344,9690	0,1386	1,7345	0,0838
6	258,7	0,9545	10,6267	294,8948	304,6998	0,2701	1,3203	0,4419
7	327,4	0,8388	18,0914	307,1415	316,9465	0,4443	1,8596	0,4105
8	159,4	0,9620	12,0369	269,7137	279,5186	-0,0366	1,6242	0,3333
9	343,3	0,9381	10,4697	309,6074	319,4124	0,1238	1,8348	0,2218
10	280,4	0,9109	15,9529	299,0833	308,8883	0,1155	1,9162	0,2906
11	235	0,9172	21,9912	289,8984	299,7034	-0,5253	2,0481	0,7841

Tabela 22. QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único das vacas Flamengas

	QMR	AIC	BIC	DW	BP
sem auto	1035	2088,6470	2099,7583	2,2204	0,0001
com auto	1025,1	3687,1816	2096,8749	1,9621	0,0001
misto	16317	2929,7	2948,2	2,0826	0,0847

Tabela 23. QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único das vacas Guernsey-Gir

	QMR	AIC	BIC	DW	BP
sem auto	1453,7	3872,6715	3885,4958	2,1532	0,0001
com auto	1447,6	3870,4386	3883,2629	1,9599	0,0001
misto	22026	5337,9	5359,3	2,0330	0,0002

Tabela 24. QMR, AIC, BIC, DW e BP para o ajuste único das vacas Holandesas

	QMR	AIC	BIC	DW	BP
sem auto	1733,3	4271,8515	4284,8989	1,8416	0,0001
com auto	1725,9	4269,4042	4282,4516	1,9667	0,0001
misto	26903	5849,2	5870,9	1,6218	0,9241

5 CONCLUSÕES

Conclui-se neste estudo que, para o conjunto de dados de crescimento dos ratos e das vacas em muitas repetições, havia a necessidade de uma estrutura que corrigisse o problema da autocorrelação e heterocedasticidade. Nestes casos, o modelo autorregressivo de primeira ordem resolveu tais problemas. Quanto ao ajuste único, no caso em que houve autocorrelação, o modelo autorregressivo se mostrou melhor, considerando a maioria dos critérios nos dois conjuntos de dados estudados. Porém, como na maioria dos casos, a autocorrelação foi não significativa, o melhor ajuste foi o modelo de efeitos fixos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.19, n.6, p.716–723, 1974.

BARBOSA, M. Uma abordagem para análise de dados com medidas repetidas utilizando modelos lineares mistos. Piracicaba, 2009. 119p. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”.

BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear Regression Analysis and Its Applications**. United States of America: John Wiley and Sons, 1988. 365p.

BRACCINI NETO, J.; DIONELLO, N. J. L.; JUNIOR, P. S.; BONGALHARDO, D. C.; XAVIER, E. G. Análise de curvas de crescimento de aves de postura. **R. Soc. Bras. Zootec.**, v.25, n.1, p.1062–1073, 1996.

BRANDÃO, A. L. S. Modelos não-lineares para análise de dados longitudinais. Campinas, 1996. 137p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas.

BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. S. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. **Econometrica**, v.47, n.5, p.1287–1294, 1979.

BRODY, S. **Bioenergetics and growth**. New York: Reinhold Publishing, 1945. 1023p.

DE CARVALHO, L. R. Métodos para comparação de curvas de crescimento. Botucatu, 1996. 210p. Doutor em agrônoma - Faculdade de Ciências Agronômicas - UNESP.

CRAIG, B. A.; SCHINCKEL, A. P.; AQUINO, L. H. Nonlinear mixed effects model for swine growth. **The Professional Animal Scientist**, , n.17, p.256–260, 2001.

FIALHO, F. B. Interpretação da curva de crescimento de Gompertz. **Embrapa Suínos e Aves**, v.237, n.237, p.1–4, 1999.

FREITAS, A. R. Curvas de Crescimento na Produção Animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v.34, n.3, p.786–795, 2005.

GOONEWARDENE, L. A.; BERG, R. T.; HARDIN, R. T. A growth study of beef cattle. **Canadian Journal of Animal Science**, v.61, n.5, p.1041–1048, 1981.

KROLL, L. B.; TORNERO, M. T. T. Modelo de Gompertz com sazonalidade e autocorrelação nos erros para ajuste do crescimento ponderal em vaca leiteira. **Pesq. agropec. bras.**, v.29, n.5, p.707–711, 1994.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; AQUINO, L. H.; SILVA, F. F.; XAVIER, E. G. Análise de curvas de crescimento de aves de postura. **R. Soc. Bras. Zootec.**, v.25, n.1, p.1062–1073, 1996.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F.; AQUINO, L. H. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autorregressivos. **Ciência Rural**, v.35, n.2, p.422–427, 2005.

MEDEIROS, H. A.; AQUINO, L. H.; BEARZOTI, E.; FERREIRA, D. F. Avaliação da qualidade do ajuste da função Logística monofásica com estrutura de erros independentes e autorregressivos através de simulação. **Ciênc. Agrotec**, v.24, n.4, p.973–985, 2000.

MISCHAN, M. M. Análise Econométrica de crescimento de gado bovino. Botucatu, 1972. 210p. Doutor em ciências - Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas - UNESP.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de Séries Temporais**. São Paulo: ABE - Projeto Fisher, 2004. 535p.

NELDER, J. A. The fitting of a generalization of the logistic curve. **Biometrics**, v.17, n.1, p.89–110, 1961.

OLIVEIRA, H. N.; LOBO, R. B.; PEREIRA, C. S. Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da Raça Guzerá. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.35, n.9, p.1843–1851, 2000.

PASTERNAK, H.; SHALEV, B. A. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. **Growth, Development & Aging**, v.58, n.1, p.33–39, 1994.

PINHEIRO, J. C. Topics in Mixed Effects Models. Madison, 1994. 210p. Doctor of philosophy - University of Wisconsin.

PRUDENTE, A. A. Modelos não-lineares de regressão: alguns aspectos da teoria assintótica. Recife, 2009. 108p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco.

RATKOWSKY, D. A. **Nonlinear Regression Modeling**. New York: Marcel Dekker, 1983. 276p.

REGAZZI, A. J. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não-linear. **Revista Ceres**, v.287, n.50, p.9–26, 2003.

RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botanic**, v.10, n.1, p.290–300, 1959.

SANTOS, T. F. M. Valor em risco auto-regressivo condicional: o caso de índices brasileiros. Recife, 2006. 104p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, v.6, n.2, p.461–464, 1978.

SOUZA, G. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. Brasília: Embrapa-SPI/Embrapa-SEA, 1998. 489p.

STATISTICAL ANALYSIS SYSTEM (SAS). **9.12 versão para Windows**. Cary, NC, USA, 2000.

VON BERTALANFFY, L. Quantitative laws in metabolism and growth. **The Quarterly Review of Biology**, v.32, n.1, p.217–230, 1957.

WEISBERG, S. **Applied Linear Regression**. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005. 305p.

WINSOR, C. P. The Gompertz curve as a growth curve. **Proceedings of the National Academy of Science**, v.18, n.1, p.1–8, 1932.

APÊNDICES

Programas para o ajuste dos modelos de efeito fixo, autorregressivo e misto para

Modelo de efeito fixo

Ajuste sem autocorrelacao

/*

Dados de 2 sexos:

trat F = ratos femininos.

trat M = ratos masculinos.

x = idade em semanas. x varia de 1 a 26

rep = 5

O programa ajusta os modelos fixo e autoregressivo

da funcao Gompertz. para cada repeticao de cada tratamento.

*/

data fem;

trat='F';

r=5; n=26; ini=1; fin=26; h=1;

input x @;

do rep=1 to r;

```
input y @;
```

```
output;
```

```
end;
```

```
cards;
```

1	9.03	8.75	8.68	8.43	8.00
2	24.36	23.12	22.06	21.28	21.14
3	39.90	36.64	36.16	35.32	34.90
4	61.48	55.74	54.58	53.18	52.54
5	92.16	88.58	89.02	78.32	82.92
6	108.40	107.00	116.80	104.20	108.00
7	140.60	140.00	148.40	129.00	138.40
8	169.33	173.67	179.00	154.67	164.33
9	188.40	205.40	204.20	175.20	182.20
10	204.80	225.20	220.60	193.80	203.40
11	218.00	238.25	232.75	214.25	215.50
12	227.75	251.25	258.00	227.00	231.50
13	239.25	263.25	262.00	237.50	241.75
14	244.67	274.33	269.33	258.00	250.67
15	250.40	280.60	269.00	264.20	255.60
16	255.80	287.00	268.60	269.00	267.60
17	263.50	291.50	274.50	273.50	277.50
18	266.00	300.50	280.50	282.00	276.75
19	268.67	304.00	283.67	282.67	279.33
20	280.67	308.00	284.67	293.00	281.33
21	285.00	310.00	292.00	299.00	291.33
22	291.50	316.50	294.50	301.00	298.00
23	296.33	320.33	291.33	301.00	299.67
24	297.00	319.50	296.50	304.50	299.50
25	296.67	318.67	306.33	309.33	295.33

26	295.33	322.67	299.67	313.67	297.00
----	--------	--------	--------	--------	--------

;

data masc;

trat='M';

r=5; n=26; ini=1; fin=26; h=1;

input x @;

do rep=1 to r;

input y @;

output;

end;

cards;

1	8.98	8.78	8.60	8.58	8.23
2	23.10	21.90	21.82	21.16	20.76
3	37.36	36.24	35.32	35.06	34.84
4	66.38	64.38	61.50	61.40	59.38
5	105.72	102.98	99.84	98.16	89.14
6	149.20	133.60	137.00	141.80	123.40
7	194.00	164.20	178.60	172.80	154.00
8	245.00	201.00	233.33	216.33	194.00
9	286.40	236.00	264.40	260.60	233.20
10	316.60	260.80	295.80	296.80	266.20
11	343.50	291.00	318.75	329.50	294.25
12	369.75	319.00	346.25	351.00	311.50
13	387.00	336.25	362.50	359.25	324.25
14	409.33	361.67	379.33	382.33	342.00
15	415.40	376.80	385.60	395.20	374.80

16	420.20	391.60	397.40	406.80	369.40
17	431.00	405.50	407.00	421.50	379.50
18	445.25	413.75	415.50	424.75	394.50
19	448.00	419.67	423.33	430.67	396.67
20	450.67	428.33	422.33	437.33	399.67
21	462.00	437.33	432.33	452.33	407.33
22	464.75	444.75	436.75	461.00	406.25
23	466.33	453.00	441.00	462.67	413.67
24	464.00	454.50	452.00	470.50	422.00
25	470.00	453.67	460.33	476.67	432.67
26	478.00	466.00	462.67	490.67	437.33

;

title ' Gompertz ';

data conj; set fem masc ; run;

proc sort data=conj;

by trat rep; run;

title2 ' Modelo sem autocorrelacao ';

proc model data=conj breusch pagan; by trat rep;

parms a=260 b=1.1 c=0.1;

y=a*exp(-exp(b-c*x));

fit y / outall out=Gfixo outest=Gpar1 printall;

```
run;
```

```
data Gpar; set Gpar1; by trat rep;
```

```
keep trat rep a b c; run;
```

```
* Tabela x yo ye res;
```

```
data Gfyo;
```

```
set Gfixo; by trat rep;
```

```
if Type = PREDICT or Type = RESIDUAL then delete;
```

```
yo=y;
```

```
keep trat rep x yo;
```

```
run;
```

```
data Gfye;
```

```
set Gfixo; by trat rep;
```

```
if Type = ACTUAL or Type = RESIDUAL then delete;
```

```
ye=y;
```

```
keep trat rep x ye;
```

```
run;
```

```
data Gfres;
```

```
set Gfixo; by trat rep;
```

```
if Type = ACTUAL or Type = PREDICT then delete;
```

```
res=y;
```

```
keep trat rep x res;
```

```
run;
```

```
data Gfyr;
```

```
merge Gfyo Gfye Gfres;
run;
```

```
* GrÃ¡ficos;
```

```
proc gplot data=Gfyr; by trat rep;
    symbol1 v=star c=black interpol=;
    symbol2 v=point c=black i=splines l=1;
    symbol3 v=plus c=red interpol=;
    plot yo*x=1 ye*x=2 res*x=3 / overlay ;
run;
```

```
* EPM ;
```

```
data Gpyn; merge Gfyr Gpar nconj; by trat rep;
np=3;
keep trat rep a b c h n ini fin np x yo ye res ;
run;
```

```
data Gepm; set Gpyn; by trat rep;
retain sep ini;
if first.rep then sep=0;
sep + (yo-ye)/yo;
epm=sep*100/n;
if last.rep then output;
```

```
run;
```

```
data epm; set Gepm; by trat rep;  
  keep trat rep epm;  
run;
```

```
proc sort data=epm;  
by trat rep;  
run;
```

```
proc print data=epm;  
by trat rep;  
run;
```

```
proc sort data=epm;  
by trat;  
run;
```

```
proc means data=epm;  
by trat;  
run;
```

```
title2 ' Modelo auto-regressivo lag 1 ';
```

```
proc model data=conj breusch pagan; by trat rep;
```

```

parms a=350 b=1.1 c=0.1;
y=a*exp(-exp(b-c*x));
%ar( ar, 1, y );
fit y / outall out=Gauto outest=Gapar1 printall;
run;

```

* Tabela estimativas dos parametros ;

```

data Gapar; set Gapar1; by trat rep;
keep trat rep a b c arl1;
run;

```

* Tabela x yo ye res z;

```

data Gayo;
set Gauto; by trat rep;
if Type = PREDICT or Type = RESIDUAL then delete;
yo=y;
keep trat rep x yo;
run;

```

```

data Gaye;
set Gauto; by trat rep;
if Type = ACTUAL or Type = RESIDUAL then delete;
ye=y;
keep trat rep x ye;
run;

```

```

data Gares;

```

```

    set Gauto; by trat rep;
if Type = ACTUAL or Type = PREDICT then delete;
res=y;
keep trat rep x res;
run;

```

```

data nconj; set conj; by trat rep;
    if first.rep then output;
    keep trat rep n ini fin h; run;

```

```

data Gaz1; merge Gapar nconj; by trat rep;
    do x=ini to fin by h;
        z=a*exp(-exp(b-c*x));
        output;
    end;
run;

```

```

data Gaz; set Gaz1;
    keep trat rep x z; run;

```

```

data Gayrz;
    merge Gayo Gaye Gares Gaz;
run;

```

```

* GrÃ¡ficos;

```

```

proc gplot data=Gayrz; by trat rep;
    symbol1 v=star c=black interpol=;

```

```

symbol2 v=dot c=blue h=.5 w=.5 interpol=;
symbol3 v=plus c=red interpol=;
symbol4 v=point c=green interpol=join;
plot yo*x=1 ye*x=2 res*x=3 z*x=4 / overlay ;
run;

```

```

* EPM ;

```

```

data Gapyn; merge Gayrz Gapar nconj; by trat rep;
npa=4;
keep trat rep a b c arl1 h n ini fin npa x yo ye res z;
run;

```

```

data Gaepm; set Gapyn; by trat rep;
retain sep ini;
if first.rep then sep=0;
sep + (yo-ye)/yo;
epm=sep*100/n;
if last.rep then output;
run;

```

```

data aepm; set Gaepm; by trat rep;
keep trat rep epm;
run;

```



```
proc sort data=aepm;  
by trat rep;  
run;
```

```
proc print data=aepm;  
by trat rep;  
run;
```

```
proc sort data=aepm;  
by trat;  
run;
```

```
proc means data=aepm;  
by trat;  
run;
```