UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Aspectos Dinâmicos e Ergódicos dos Intercâmbios de Intervalos

Danilo Antonio Caprio

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto
Fevereiro - 2011

Caprio, Danilo Antonio.
Aspectos dinâmicos e ergódicos dos intercâmbios de intervalos / Danilo Antonio Caprio. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2011.
59 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Ali Messaoudi
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Análise de intervalos (Matemática). 3. Teoria ergódica. I. Messaoudi, Ali. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

DANILO ANTONIO CAPRIO

Aspectos dinâmicos e ergódicos dos intercâmbios de intervalos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em _Matemática_, área de _Geometria e Sistemas Dinâmicos_ junto ao Programa de Pós-Graduação em _Matemática_ do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dr. _Ali Messaoudi___________
Professor Assistente Doutor
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Profª. Dr. _Milton Edwin Cobo Cortez_
Professor Doutor
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. _Vanderlei Minori Horita____
Professor Assistente Doutor
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, _28_de _Fevereiro_ de 2011.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, deixo meus sinceros agradecimentos:

Ao meu orientador, professor Ali Messaoudi, pela paciência e por toda instrução e atenção concedida a mim durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu pai Antonio e à minha mãe Eliana pela confiança, apoio e esforços para sempre me proporcionar bons estudos.

Aos professores que fizeram parte da banca examinadora, Vanderlei Minori Horita e Milton Edwin Cobo Cortez.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

À todos aqueles que foram meus professores durante a graduação e a pós-graduação, dando a mim uma excelente formação acadêmica.

Aos meus amigos da pós-graduação.

Ao pessoal da banda Savagery e da república Kurupi pela disponibilidade pra tomar uma cerveja nos momentos em que eu mais precisava de uma folga dos intercâmbios de intervalos e da teoria ergódica.

O princípio criador reside na matemática; a sua certeza é absoluta, enquanto se trata de matemática abstrata, mas diminui na razão direta de sua concretização.

(Albert Einstein)

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a dinâmica dos intercambio de intervalos. Em particular, mostraremos que se uma aplicação intercâmbio de intervalos é $\mathbb{Q}-$linearmente independente e é irredutível então ela é minimal.
Estudaremos também as propriedades dinâmicas da indução de Rauzy-Veech e provaremos que quase todo intercâmbio de intervalos é unicamente ergódico (prova de Boshernitzan).

Palavras-Chave: Intercâmbio de intervalos, condição de Keane, propriedade P, unicidade ergódica.

Abstract

In this work we study the dynamic of the map interval exchange. In particular, we show that if the interval exchange is $\mathbb{Q}-$lineally independent and irreducible then it is minimal.
We also study some dynamical proprieties of the Rauzy-Veech induction and we prove that almost all interval exchange is uniquely ergodic (proof of Boshernitzan).

Keywords: Interval exchange, Keane condition, property P, uniquely ergodic.

Sumário

Introdução

Dado um intervalo semi-aberto $X = [a, b[$, particione X em r subintervalos X_i, $i = 1, \ldots, r$ semi-abertos à direita e tome um automorfismo T de X, onde T permuta tais intervalos. Assim T é chamada de intercâmbio de intervalos.

Na década de 70, Michael Keane [4] conjecturou que todo intercâmbio de intervalos minimal é unicamente ergódico, ou seja, que a medida de Lebesgue é a única medida boreliana de probabilidade invariante sob todo intercâmbio de intervalos minimal definido no intervalo $[0, 1[$, e chegou que isso era verdade para $r = 2, 3$.

No entanto, Keyne e Newton [7] deram um contra-exemplo para $r = 5$ e duas probabilidades invariantes e ergódicas. Assim, eles conjecturaram que independência racional garantiria ergodicidade única. Novamente, um contra-exemplo fora dado por Keane [5] com $r = 3$ e duas probabilidades invariantes e ergódicas. Assim, Keane conjecturou que quase todo intercâmbio de intervalos é unicamente ergódico.

Em 1982, Howard Masur [9] e William A. Veech [12] provaram, de forma independente, tal conjectura.

Em 1983, Kerckhoff [6] apresentou uma demonstração para a unicidade ergódica dos intercâmbios de intervalos, sendo publicada somente em 1985.

Neste trabalho estudaremos os aspectos dinâmicos e ergódicos dos intercâmbios de intervalos. Em particular, estudaremos a unicidade ergódica de tais intercâmbios, dada por Michael Boshernitzan [1] em 1985, baseado em teoria de grafos.

Este trabalho será organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1 veremos algumas definições em sistemas dinâmicos e também o Teorema de Recorrência de Poincaré.

No Capítulo 2 definiremos o que é uma aplicação intercâmbio de intervalos, exibindo alguns exemplos. Também estudaremos a indução de Rauzy-Veech e uma condição, chamada condição de Keane, que permitirá demonstrarmos que quase todo intercâmbio de intervalos é minimal.

No Capítulo 3 definiremos uma propriedade, que chamaremos de propriedade P, que será crucial para demonstrar que quase todo intercâmbio de intervalos é unicamente ergódico. No entanto, para demonstrarmos este resultado, precisaremos de duas etapas. A primeira etapa será demonstrar que se um intercâmbio de intervalos satisfaz a propriedade P então ele é unicamente ergódico, que será demonstrado neste mesmo capítulo. A outra etapa será apresentada no Capítulo 6, provando que quase todo intercâmbio de intervalos satisfaz a propriedade P.

Contudo, para finalizarmos o Capítulo 6, serão necessários algumas definições e resultados no espaço métrico dos intercâmbios de intervalos e ferramentas em teoria de grafos, os quais serão apresentados nos capítulos 4 e 5.

Capítulo 1

Algumas definições elementares

Veremos neste capítulo, algumas definições e resultados que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Seja X um conjunto e $T : X \longrightarrow X$ uma transformação. O par (X, T) é chamado sistema dinâmico. Se X for espaço topológico e T for contínua, dizemos que (X, T) é um sistema dinâmico topológico. Se em X temos uma σ-álgebra e $T : X \longrightarrow X$ é mensurável, então dizemos que (X, T) é mensurável.

Seja (X, T) um sistema dinâmico e $x \in X$. A orbita de x é dada por $O(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, onde $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n-vezes}$.

Definição 1.0.1 *Seja (X, T) um sistema dinâmico. Dizemos que (X, T) é minimal se a órbita de todo ponto de X for densa em X, ou seja, se*

$$\overline{O(x)} = X, \quad \forall x \in X.$$

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida positivo, onde $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra e $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma medida, e $T : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável de $(X, \mathcal{M})$. Dizemos que T é uma transformação de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ que preserva medida, ou que μ é uma medida invariante sob T, se $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{M}$. Dizemos também que $A \in \mathcal{M}$ é T-invariante se $T^{-1}(A) = A$ e, dizemos que μ é ergódica se $\mu(A) = 0$ ou se $\mu(X \backslash A) = 0$, $\forall A \in \mathcal{M}$, T-invariante.

Seja (X, T) um sistema dinâmico mensurável. Dizemos que T é unicamente ergódica se existir uma única medida boreliana de probabilidade invariante sob T.

Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $T : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável. Sejam $A \in \mathcal{M}$ e $\Gamma_y = \{n \in \mathbb{N}^* : T^n(y) \in A\}$, $y \in A$. Se $\Gamma_y \neq \emptyset$ então dizemos que y é um ponto recorrente de A por T.

Denotemos por $\Omega_A = \{y \in A : \Gamma_y = \emptyset\}$ o conjunto dos pontos não recorrentes de A por T.

Teorema 1.0.1 ***(Teorema de recorrência de Poincaré)***
Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida positiva finita, $T : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva medida e $A \in \mathcal{M}$. Então quase todo ponto de A é recorrente de A por T.

Demonstração: Seja $\Omega = \Omega_A$.

Sejam $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $T^n(x) \in X \setminus A$, então $x \in T^{-n}(X \setminus A)$. Assim,

$$x \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad T^n(x) \notin A, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x \in T^{-n}(X \setminus A), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\Omega = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(X \setminus A) \right)$$

e disto, segue que $\Omega \in \mathcal{M}$.

Assim, $(T^{-n}(\Omega))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{M}$ tal que $\mu(\Omega) = \mu(T^{-n}(\Omega))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $(T^{-n}(\Omega))_{n \in \mathbb{N}}$ é disjunto dois a dois.
De fato, suponhamos que exista $y \in X$ tal que $y \in T^{-r}(\Omega) \cap T^{-s}(\Omega)$, com $s, r \in \mathbb{N}$ e $s > r$. Disso temos que $T^r(y) \in \Omega \subset A$ e que $T^{s-r}(T^r(y)) = T^s(y) \in \Omega \subset A$. Logo $T^r(y)$ é um ponto recorrente de A por T, o que contradiz o fato de $T^r(y) \in \Omega$.

Com isso, temos

$$\mu(X) \geq \mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\Omega) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu \left(T^{-n}(\Omega) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\Omega).$$

Como por hipótese μ é uma medida finita sobre X, segue que $\mu(\Omega) = 0$.

$\square$

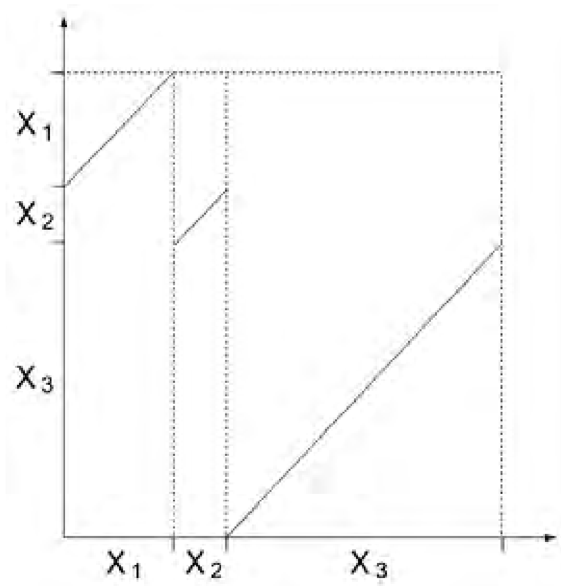
Capítulo 2

A aplicação intercâmbio de intervalos e algumas propriedades

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, r\}$, onde $r \in \mathbb{N}$. Seja $\{X_j, j \in \mathcal{A}\}$, onde X_j são intervalos, uma partição de X.

Definição 2.0.2 *Uma aplicação Intercâmbio de Intervalos, ou simplesmente um intercâmbio de intervalos, é uma função bijetiva, $T : X \longrightarrow X$, que é uma translação de cada subintervalo X_j.*

Exemplo 2.0.1 *Um exemplo de um intercâmbio de intervalos é dado pelo seguinte gráfico:*



Tal função pode ser determinada a partir de um vetor que determina o comprimento destes subintervalos e de uma combinação na ordem dos subintervalos da partição. De fato, seja Λ_r, com $r \in \mathbb{N}$ e $r \geq 2$, o cone positivo em $\mathbb{R}^r$, ou seja, $\Lambda_r = \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{R}^r | \lambda_i > 0, \forall i = 1, \ldots, r\}$. Tomemos então um vetor $\lambda = (\lambda_j)_{j \in \mathcal{A}} \in \Lambda_r$ onde λ_j representa o comprimento do subintervalo X_j.

Seja $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ um par de bijeções $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ onde π_0 descreve a ordem dos subintervalos X_j antes de um iterado da aplicação T e π_1 descreve a ordem dos subintervalos depois, isto é, $\pi_0(i) = j$ implica que o intervalo X_j encontra-se na posição i da esquerda para direita e $\pi_1(i) = j$ implica que o intervalo $T(X_i)$ encontra-se na posição j. Assim, podemos representar π da seguinte forma:

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \ldots & \alpha_r^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_r^1 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_j^\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(j)$ para $\epsilon \in \{0, 1\}$ e $j \in \mathcal{A}$.
As vezes, para facilitar notações, usaremos simplesmente $\tau \in \mathbf{G}_r$ ($\tau = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}$) no lugar de π, onde $\mathbf{G}_r$ é o conjunto das permutações do conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, r\}$.

Exemplo 2.0.2 *Seja* $\tau = (2, 4, 1) \in \mathrm{G}_4$*,* $\lambda \in \Lambda_4$ *e suponhamos que*

$$\pi_0(1) = 2, \quad \pi_0(2) = 1, \quad \pi_0(3) = 4 \quad e \quad \pi_0(4) = 3.$$

Daí, por definição temos

$$\alpha_1^0 = \pi_0^{-1}(1) = 2, \quad \alpha_2^0 = \pi_0^{-1}(2) = 1, \quad \alpha_3^0 = \pi_0^{-1}(3) = 4 \quad e \quad \alpha_4^0 = \pi_0^{-1}(4) = 3.$$

Logo

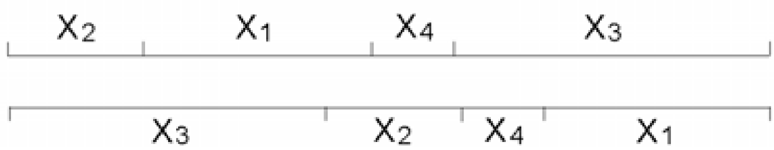
$$\pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

e pela permutação τ*, temos*

$$\pi_1(1) = \pi_1\left(\pi_0^{-1}(2)\right) = \tau(2) = 4, \quad \pi_1(2) = \pi_1\left(\pi_0^{-1}(1)\right) = \tau(1) = 2,$$

$$\pi_1(3) = \pi_1\left(\pi_0^{-1}(4)\right) = \tau(4) = 1 \quad e \quad \pi_1(4) = \pi_1\left(\pi_0^{-1}(3)\right) = \tau(3) = 3.$$

Para melhor entendimento desse exemplo, veja o seguinte esboço:



Definição 2.0.3 *Chamaremos de monodromia invariante do par* $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ *o ponto*

$$p = (\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1), \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(2), \ldots, \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(r)).$$

Notemos que dado um par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$, podemos encontrar outro $\pi' = (\pi_0', \pi_1')$ de tal forma que a monodromia invariante seja a mesma para π e π'. De fato, basta tomarmos uma bijeção $\phi : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ e definirmos

$$\pi_\epsilon' = \pi_\epsilon \circ \phi, \qquad \epsilon \in \{0, 1\}.$$

Isto é, π e π' possuem a mesma monodromia invariante. Sendo assim, dado um intercâmbio de intervalos (λ, π), podemos encontrar um par (λ', π'), onde $\lambda'_{\alpha'} = \lambda_{\phi(\alpha')}$, $\alpha' \in \mathcal{A}$, tal que este represente o mesmo intercâmbio de intervalos, ou seja, podemos normalizar a ordem, escolhendo $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, r\}$ e $\pi_0 = id$. No entanto, esta notação esconde os papéis simétricos de π_0 e π_1, além de não ser invariante para o algoritmo de indução, o qual será apresentado mais adiante.

Para cada $\lambda \in \Lambda_r$ seja $\beta_0 = 0$, $\beta_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \lambda_i$, $X_j = [\beta_{j-1}, \beta_j[$, $j = 1, \ldots, r$ e $X = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{r} X_j = [0, \beta_r[$.

Para cada $\lambda \in \Lambda_r$ e $\tau \in \mathbf{G}_r$, seja $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_r') \in \Lambda_r$, na qual $\lambda_i' = \lambda_{\tau^{-1}(i)}$. Consequentemente, definimos β_j' e X_j'. Considere a aplicação $T : X \longrightarrow X$ definida por

$$Tx = x - \beta_{j-1} + \beta'_{\tau(j)-1}, \qquad x \in X_j, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Assim, T permuta os sub-intervalos X_j de acordo com a permutação τ, ou seja, $T(X_j) = X'_{\tau(j)}$. Sendo assim, usaremos o par (λ, τ) para representarmos uma transformação intercâmbio de intervalos T, ou ainda, algumas vezes usaremos o par (λ, π) para representarmos o mesmo.

Definição 2.0.4 *Seja* $\tau \in \mathbf{G}_r$ *uma permutação de um par* $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ *qualquer* $(\tau = \pi_1 \circ \pi_0^{-1})$. *Dizemos que* τ *é redutível se existe* $k \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ *tal que*

$$\tau(\{1, 2, \ldots, k\}) = \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Caso contrário, dizemos que τ *é irredutível.*

No Exemplo (2.0.2) temos τ irredutível. Vejamos um exemplo onde τ é redutível.

Exemplo 2.0.3 *Sejam* $\tau = (2, 1) \in \mathrm{G}_3$, $\lambda \in \Lambda_3$ *e suponhamos que*

$$\pi_0(1) = 1, \quad \pi_0(2) = 2 \quad e \quad \pi_0(3) = 3.$$

Daí, por definição temos

$$\alpha_1^0 = \pi_0^{-1}(1) = 1, \quad \alpha_2^0 = \pi_0^{-1}(2) = 2 \quad e \quad \alpha_3^0 = \pi_0^{-1}(3) = 3;$$

e pela permutação τ, temos

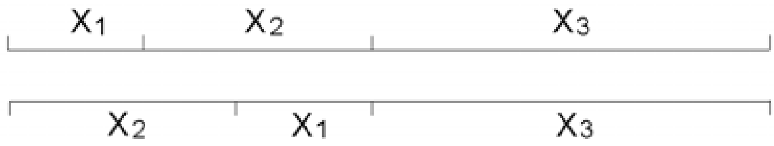
$$\pi_1(1) = \pi_1\left(\pi_0^{-1}(1)\right) = \tau(1) = 2, \quad \pi_1(2) = \pi_1\left(\pi_0^{-1}(2)\right) = \tau(2) = 1$$

$$e \quad \pi_1(3) = \pi_1\left(\pi_0^{-1}(3)\right) = \tau(3) = 3.$$

Nesse caso, temos que existe $k = 2 < 3 = r$ tal que

$$\tau(\{1, 2, \ldots, k\}) = \tau(\{1, 2\}) = \{\tau(1), \tau(2)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\} = \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Portanto τ é redutível. Para melhor entendimento desse exemplo, veja o seguinte esboço:



Assim, caso a permutação τ seja redutível, qualquer que seja $\lambda \in \Lambda_r$, o subintervalo

$$J = \bigcup_{\pi_0(j) \leq k} X_j = \bigcup_{\pi_1(j) \leq k} X_j$$

e o seu complementar, são invariantes por T. Isso significa que T se decompõe em outras duas transformações. Logo, dado um par π qualquer, conseguimos decompô-lo em pares irredutíveis. Assim, podemos restringir nossos estudos ao conjunto dos pares irredutíveis.

Obviamente, uma aplicação intercâmbio de intervalos (λ, τ) não pode ser minimal caso τ seja redutível.

2.1 Vetores de translação

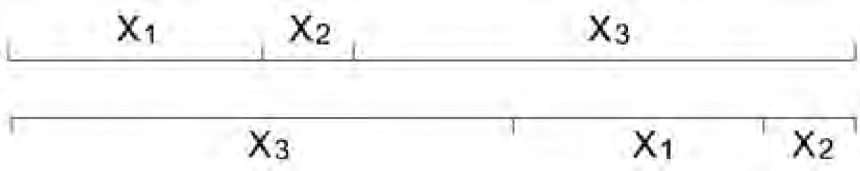
Dado $\pi = (\pi_0, \pi_1)$, definimos $\Omega_\pi : \mathbb{R}^{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ por:

$$\Omega_\pi(\lambda) = \omega \quad \text{com} \quad \omega_\alpha = \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta. \tag{2.1}$$

Então, a transformação em intercâmbio de intervalos T correspondente é dada por

$$T(x) = x + \omega_\alpha, \text{ para } x \in X_\alpha.$$

Exemplo 2.1.1 *Tome o intercâmbio de intervalos dado pela figura abaixo.*



Desta forma temos

$$\pi_0(1) = 1, \quad \pi_0(2) = 2, \quad \pi_0(3) = 3, \quad \pi_1(1) = 2, \quad \pi_1(2) = 3 \quad e \quad \pi_1(3) = 1.$$

Com isso, temos

$$\Omega_\pi(\lambda) = \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

onde

$$\omega_1 = \sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(1)=2} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(1)=1} \lambda_\beta = \lambda_3,$$

$$\omega_2 = \sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(2)=3} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(2)=2} \lambda_\beta = \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_3 \quad e$$

$$\omega_3 = \sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(3)=1} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(3)=3} \lambda_\beta = \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2.$$

Chamaremos ω de vetor translação de T. Note que a matriz $(\Omega_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ de Ω_π é dada por

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad \pi_1(\alpha) > \pi_1(\beta) \quad \text{e} \quad \pi_0(\alpha) < \pi_0(\beta) \\ -1 & \text{se} \quad \pi_1(\alpha) < \pi_1(\beta) \quad \text{e} \quad \pi_0(\alpha) > \pi_0(\beta) \\ 0 & \text{para todos os outros casos.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Lema 2.1.1 *O produto escalar* $\lambda \cdot \omega = 0$.

Demonstração: De fato,

$$\lambda \cdot \omega = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha \omega_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha \left(\sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\beta \right) =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \tag{2.3}$$

Sejam $\epsilon \in \{0,1\}$ e $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ bijeções. Sejam $A_1^\epsilon = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A} : \pi_\epsilon(\alpha) > \pi_\epsilon(\beta)\}$ e $A_2^\epsilon = \{(\gamma,\theta) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A} : \pi_\epsilon(\gamma) < \pi_\epsilon(\theta)\}$.

Assim, $A_1^\epsilon \bigcap A_2^\epsilon = \emptyset$, $A_1^\epsilon \bigcup A_2^\epsilon = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \setminus \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ e

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\pi_\epsilon(\beta) < \pi_\epsilon(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta = \sum_{(\alpha,\beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta. \tag{2.4}$$

Por outro lado, temos

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = \sum_{(\alpha,\beta) \in A_1^\epsilon \bigcup A_2^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta = \sum_{(\alpha,\beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta + \sum_{(\gamma,\theta) \in A_2^\epsilon} \lambda_\gamma \lambda_\theta =$$

$$= \sum_{(\alpha,\beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta + \sum_{(\theta,\gamma) \in A_1^\epsilon} \lambda_\theta \lambda_\gamma = 2 \sum_{(\alpha,\beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta. \tag{2.5}$$

Assim, de (2.3), (2.4) e (2.5) segue que

$$\lambda \cdot \omega = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 0.$$

□

2.2 A indução de Rauzy-Veech

Consideremos o par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ e o par (λ, τ) com $\tau = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}$. Para cada $\epsilon \in \{0, 1\}$, denotemos por $\alpha(\epsilon)$ o último símbolo na expressão de π_ϵ, ou seja,

$$\alpha(\epsilon) = \pi_\epsilon^{-1}(r) = \alpha_r^\epsilon.$$

Assumindo que os intervalos $X_{\alpha(0)}$ e $X_{\alpha(1)}$ possuam comprimentos diferentes; dizemos que (λ, π) tem o tipo 0 se $\lambda_{\alpha(0)} > \lambda_{\alpha(1)}$ e tipo 1 se $\lambda_{\alpha(0)} < \lambda_{\alpha(1)}$.

Sendo assim, seja Y o subintervalos de X obtido pela remoção do mais curto desses dois intervalos, ou seja:

$$Y = \begin{cases} X \setminus T(X_{\alpha_{(1)}}), & \text{se } (\lambda, \pi) \text{ tem o tipo } 0, \\ X \setminus X_{\alpha_{(0)}}, & \text{se } (\lambda, \pi) \text{ tem o tipo } 1. \end{cases}$$

A indução de Rauzy-Veech de T é a função primeiro retorno $\widehat{R}(T)$ para o subintervalo Y. Temos assim uma nova transformação em intercâmbio de intervalos. Vamos definir mais detalhadamente como funciona tal indução.

Se (λ, π) tem tipo 0, definimos $Y_i = X_i$ para $i \neq \alpha(0)$ e $Y_{\alpha(0)} = X_{\alpha(0)} \setminus T(X_{\alpha(1)})$. Tais intervalos formam uma partição de Y e $T(Y_i) \subset J$, para todo $i \neq \alpha(1)$. Sendo assim, $\widehat{R}(T) = T$ restrito a esses $Y_i's$, com $i \neq \alpha(1)$. Por outro lado,

$$T(Y_{\alpha(1)}) = T(X_{\alpha(1)}) \subset X_{\alpha(0)} \quad \Longrightarrow \quad T^2(Y_{\alpha(1)}) \subset T(X_{\alpha(0)}) \subset Y.$$

Assim, temos $\widehat{R}(T) = T^2$ restrito à $Y_{\alpha(1)}$. Veja a figura (2.1).

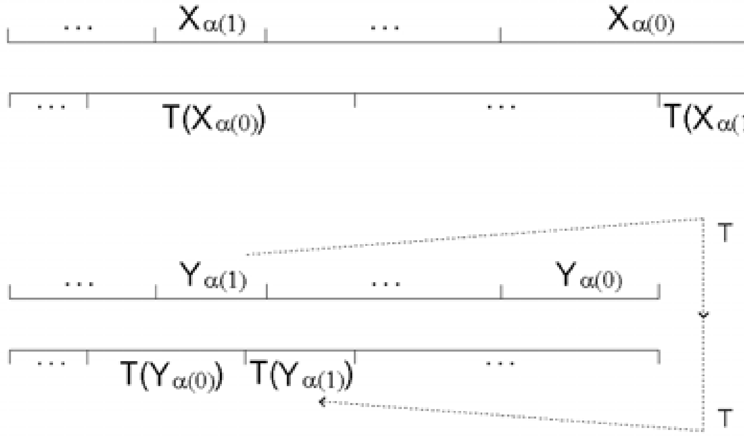
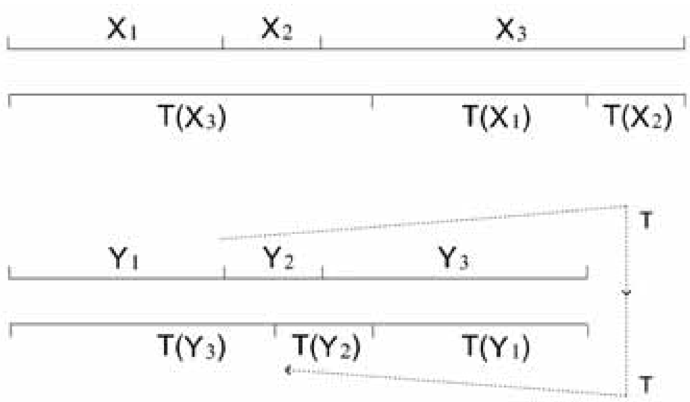


Figura 2.1: Indução de Rauzy-Veech para (λ, τ) do tipo 0.

Um exemplo para esse caso é representado pelo seguinte intercâmbio de três intervalos:



Se (λ, π) tem tipo 1, definimos $Y_{\alpha(0)} = T^{-1}(X_{\alpha(0)})$, $Y_{\alpha(1)} = X_{\alpha(1)} \setminus Y_{\alpha(0)}$ e $Y_i = X_i$, para os outros valores de i. Desta forma, $T(Y_i) \subset Y$ para todo $i \neq \alpha(0)$ e, então, $\widehat{R}(T) = T$ restritos a esses $Y_i's$, com $i \neq \alpha(0)$. Por outro lado,

$$T^2(Y_{\alpha(0)}) = T(X_{\alpha(0)}) \subset Y.$$

Assim, temos $\widehat{R}(T) = T^2$ restrito à $Y_{\alpha(0)}$. Veja a figura (2.2).

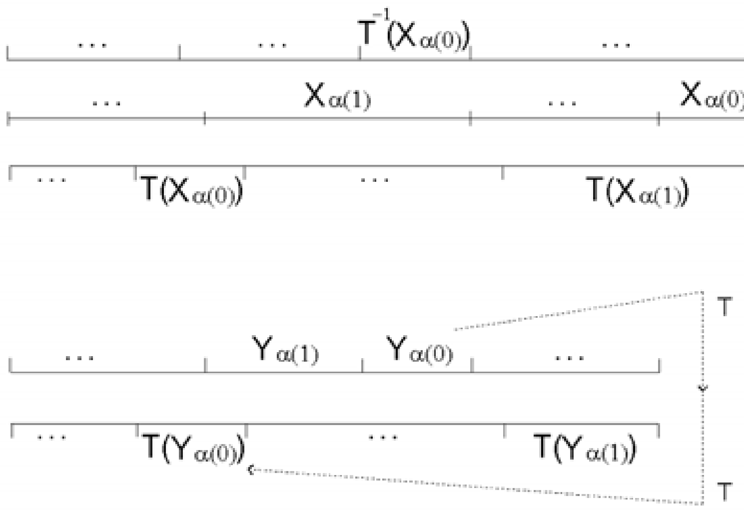
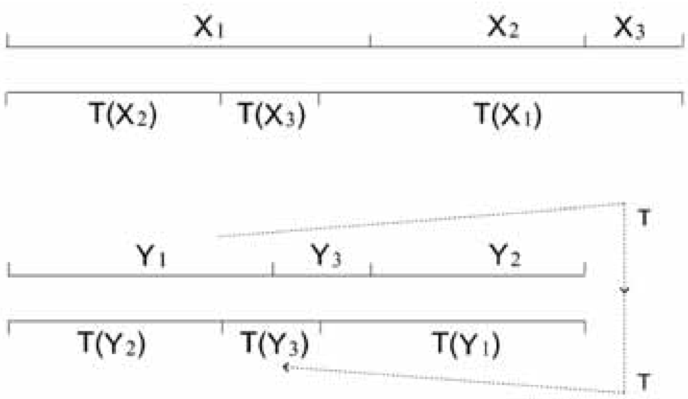


Figura 2.2: Indução de Rauzy-Veech para (λ, τ) do tipo 1.

E agora um exemplo para esse outro caso é representado pelo seguinte intercâmbio de três intervalos:



Agora, expressaremos a função $T \mapsto \widehat{R}(T)$ em termos de coordenadas (λ, π) no espaço das transformações em intercâmbio de intervalos.

1) Se (λ, π) tem tipo 0, então a transformação $\widehat{R}(T)$ é descrita por (λ', π'), tal que: $\lambda' = (\lambda'_j)_{j \in \mathcal{A}}$, onde

$$\lambda'_j = \lambda_j \quad \text{para} \quad j \neq \alpha(0), \quad \text{e} \quad \lambda'_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha(0)} - \lambda_{\alpha(1)} \tag{2.6}$$

e

$$\pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^0_1 & \dots & \alpha^0_{k-1} & \alpha^0_k & \alpha^0_{k+1} & \dots & \dots & \alpha(0) \\ \alpha^1_1 & \dots & \alpha^1_{k-1} & \alpha(0) & \alpha(1) & \alpha^1_{k+1} & \dots & \alpha^1_{r-1} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\alpha_j^{0\prime} = \alpha_j^0 \ \text{ e } \ \alpha_j^{1\prime} = \begin{cases} \alpha_j^1 & \text{se} \quad j \leq k \\ \alpha(1) & \text{se} \quad j = k+1 \\ \alpha_{j-1}^1 & \text{se} \quad j > k+1 \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $k \in \{1, \ldots, r-1\}$ está definido por $\alpha_k^1 = \alpha(0)$.

2) Analogamente, se (λ, π) tem tipo 1, então a transformação $\widehat{R}(T)$ é descrita por (λ', π'), tal que:
$\lambda' = (\lambda'_j)_{j \in \mathcal{A}}$, onde

$$\lambda'_j = \lambda_j \ \text{ para } \ j \neq \alpha(1), \ \text{ e } \ \lambda'_{\alpha(1)} = \lambda_{\alpha(1)} - \lambda_{\alpha(0)} \tag{2.8}$$

e

$$\pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \ldots & \alpha_{k-1}^0 & \alpha(1) & \alpha(0) & \alpha_{k+1}^0 & \ldots & \alpha_{r-1}^0 \\ \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_{k-1}^1 & \alpha_k^1 & \alpha_{k+1}^1 & \ldots & \ldots & \alpha(1) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\alpha_j^{0\prime} = \begin{cases} \alpha_j^0 & \text{se} \quad j \leq k \\ \alpha(0) & \text{se} \quad j = k+1 \\ \alpha_{j-1}^0 & \text{se} \quad j > k+1 \end{cases} \ \text{ e } \ \alpha_j^{1\prime} = \alpha_j^1 \tag{2.9}$$

onde $k \in \{1, \ldots, r-1\}$ está definido por $\alpha_k^0 = \alpha(1)$.

Definição 2.2.1 *Dizemos que o vetor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in \Lambda_r$ é irracional, ou que λ_j , $j \in \mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, r\}$, são racionalmente independente, se $\sum_{j=1}^{r} n_j \lambda_j \neq 0$ para todo vetor inteiro não nulo $(n_j)_{j \in A} \in \mathbb{Z}^r$.*

Notemos que a função indução $\widehat{R}(T)$ não está definida quando os intervalos $X_{\alpha(0)}$ e $X_{\alpha(1)}$ possuem o mesmo comprimento, ou seja, quando $\lambda_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha(1)}$. Queremos considerar $\widehat{R}$ como um sistema dinâmico nos espaço das transformações em intercâmbio de intervalos. Para isso, devemos restringir $\widehat{R}$ a um subconjunto invariante de (λ, π) tal que os iterados $\widehat{R}^n(\lambda, \pi)$ estejam bem definidos, isto é, $\lambda_{\alpha(0)}^n \neq \lambda_{\alpha(1)}^n$, para todo $n \geq 1$. Uma possibilidade para esse subconjunto é o dos vetores $\lambda \in \Lambda^r$ tal que λ é racionalmente independentes, já que essa condição é invariante para iterados de (2.6) e (2.8). De fato, sejam (λ, π) do tipo 0, com λ racionalmente independente, e $(n_j)_{j \in \mathcal{A}} \in \mathbb{Z}^r$ um vetor não nulo. Daí, temos:

$$\sum_{j\in\mathcal{A}} n_j\lambda'_j = \sum_{\substack{j\in\mathcal{A}\\ j\neq\alpha(0)}} n_j\lambda_j + n_{\alpha(0)}(\lambda_{\alpha(0)} - \lambda_{\alpha(1)}) =$$

$$= \sum_{\substack{j\in\mathcal{A}\\ j\neq\alpha(0),\alpha(1)}} n_j\lambda_j + n_{\alpha(0)}\lambda_{\alpha(0)} + \lambda_{\alpha(1)}(n_{\alpha(1)} - n_{\alpha(0)}) \neq 0,$$

já que todos os coeficientes dos $\lambda_i's$ são inteiros, não nulos (desde que tomamos $(n_j)_{j\in\mathcal{A}} \in \mathbb{Z}^r$ não nulo) e λ é racionalmente independente.

Analogamente mostramos para (λ,π) do tipo 1.

Consequentemente, concluímos que se (λ,π) é racionalmente independente então todos os iterados $\widehat{R}^n(\lambda,\pi)$ estão definidos.

Keane observou que, mesmo que o conjunto do vetores racionalmente independentes $\lambda \in \Lambda^r$ possui medida de Lebesgue total em $\mathbb{R}^n$, existem pares (λ,π), λ racionalmente independente pelos quais os iterados de $\widehat{R}$ existem, ou seja, Keane observou que independência racional é uma condição um pouco forte.

Assim, veremos uma condição, que chamaremos de condição de Keane, e provaremos que de fato independência racional é mais forte que tal condição.

Seja ∂X_γ a extremidade esquerda de cada subintervalo X_γ, $\gamma \in \mathcal{A}$. Relembrando que a extremidade esquerda de X coincide com a origem, então

$$\partial X_\gamma = \sum_{\substack{\eta\in\mathcal{A};\\ \pi_0(\eta)<\pi_0(\gamma)}} \lambda_\eta,$$

representa a extremidade esquerda de cada subintervalo X_γ. Note que se $\pi_0(\beta) = 1$ então $T(\partial X_\alpha) = \partial X_\beta$ para $\alpha = \pi_1^{-1}(1)$.

Definição 2.2.2 *Dizemos que um par (λ,π) satisfaz a condição de Keane se as órbitas destas extremidades são tão disjuntas quanto é possível elas serem, ou seja, se*

$$T^m(\partial X_\alpha) \neq \partial X_\beta, \quad \text{para todo } m \geq 1 \text{ e } \alpha,\beta \in \mathcal{A}, \quad \text{com } \pi_0(\beta) \neq 1. \tag{2.10}$$

Proposição 2.2.1 *As seguintes propriedades são válidas:*

1) *Se o par (λ,π) satisfaz a condição de Keane então o par $\widehat{R}(\lambda,\pi) = (\lambda',\pi')$ está bem definido e π é irredutível. .*

2) *A condição de Keane (2.10) não é afetada se restringirmos ao caso $\pi_1(\alpha) > 1$, em vez de $\pi_0(\beta) \neq 1$.*

Demonstração:

Fato 1)**:** Suponha que $\widehat{R}$ não esteja bem definido. Assim, teríamos $\lambda_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha(1)}$, o que implicaria que $T(\partial X_{\alpha(1)}) = \partial X_{\alpha(0)}$, contradizendo o fato de (λ, π) satisfazer a condição de Keane.

Agora se supormos que π é redutível então seja $k \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ tal que $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, 2, \ldots, k\}) = \{1, 2, \ldots, k\}$. Assim, existe $\alpha \in \{k+1, k+2, \ldots, r\}$ tal que $T(\partial X_\alpha) = \partial X_{k+1}$, o que contradiz o fato de o par (λ, π) satisfazer a condição de Keane.

Fato 2)**:** De fato, tomemos como hipótese que

$$T^m(\partial X_\alpha) \neq \partial X_\beta, \text{ para todo } m \geq 1 \text{ e } \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \text{ com } \pi_1(\alpha) > 1.$$

Sendo assim, temos π irredutível (demonstração análoga à afirmação anterior).

Queremos provar que vale a condição de Keane, ou seja, queremos provar que vale

$$T^m(\partial X_\alpha) \neq \partial X_\beta, \text{ para todo } m \geq 1 \text{ e } \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \text{ com } \pi_0(\beta) \neq 1.$$

Mas se $\pi_1(\alpha) > 1$, então (2.10) é satisfeita por hipótese. Suponhamos então, por absurdo, que $\pi_1(\alpha) = 1$ e $\pi_0(\beta) \neq 1$, mas $T^m(\partial X_\alpha) = \partial X_\beta$, com $\alpha \neq \beta$.

Assim, temos $\partial X_\alpha \neq \partial X_\beta$ pois $\alpha \neq \beta$ e temos também $T(\partial X_\alpha) \neq \partial X_\beta$ pois $T(\partial X_\alpha) = 0$ e $\partial X_\beta > 0$.

Sendo assim, temos $m > 1$, o que implica $m - 1 > 0$.

Seja $\gamma \in \mathcal{A}$ tal que $T(\partial X_\alpha) = 0 = \partial X_\gamma$. Então temos $T^{m-1}(\partial X_\gamma) = \partial X_\beta$. Além disso, $\pi_1(\gamma) > 1$, pois $\pi_0(\gamma) = 1$ e sabemos que π é irredutível.
Portanto, existem $\gamma, \beta \in \mathcal{A}$ tal que $T^{m-1}(\partial X_\gamma) = \partial X_\beta$ com $\pi_1(\gamma) > 1$, o que é um absurdo pois contraria a hipótese.
Logo, vale (2.10).

□

Observe que a propriedade (2.10) é invariante para iterados de $\widehat{R}$ já que as órbitas de $\widehat{R}(T)$ estão contidas nas órbitas de T. Sendo assim, a condição de Keane é suficiente para garantir a existência de todos iterados $(\lambda^n, \pi^n) = \widehat{R}^n(\lambda, \pi)$, $n \geq 0$.

O próximo resultado mostra que, assumindo a irredutibilidade de π, a condição de Keane é de fato mais geral do que a independência racional.

Proposição 2.2.2 *Se λ é racionalmente independente e π é irredutível então (λ, π) satisfaz a condição de Keane.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que o par (λ,π) não satisfaz a condição de Keane, logo existem $m \geq 1$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, com $\pi_0(\beta) > 1$, tal que $T^m(\partial X_\alpha) = \partial X_\beta$.

Seja β_j, $0 \leq j \leq m$, tal que $T^j(\partial X_\alpha) \in X_{\beta_j}$. Temos assim $\beta_0 = \alpha$ e $\beta_m = \beta$. Note que

$$\begin{aligned} T(\partial X_\alpha) &= \partial X_\alpha + \omega_\alpha \\ T^2(\partial X_\alpha) = T(T(\partial X_\alpha)) &= T(\partial X_\alpha) + \omega_{\beta_1} = \partial X_\alpha + \omega_\alpha + \omega_{\beta_1} \\ &\vdots \\ \partial X_\beta = T^m(\partial X_\alpha) &= \partial X_\alpha + \omega_\alpha + \omega_{\beta_1} + \ldots + \omega_{\beta_{m-1}}, \end{aligned}$$

onde $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{A}}$ é o vetor translação definido em (2.1). Daí,

$$\partial X_\beta - \partial X_\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} \omega_{\beta_j},$$

ou seja,

$$\sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_m)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{\pi_1(\gamma)<\pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma)<\pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma.$$

Daí, segue que

$$\sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_m)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma)<\pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma,$$

e então, têm-se

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma)<\pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=1}^{m} \sum_{\pi_0(\gamma)<\pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma = 0.$$

Mas essa última igualdade pode ser escrita como

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{A}} n_\gamma \lambda_\gamma = 0,$$

onde

$$n_\gamma = \sharp\{0 \leq j < m : \pi_1(\beta_j) > \pi_1(\gamma)\} - \sharp\{0 < j \leq m : \pi_0(\beta_j) > \pi_0(\gamma)\}.$$

No entanto, temos por hipótese que λ é racionalmente independente. Sendo assim, segue que $n_\gamma = 0$, para todo $\gamma \in \mathcal{A}$. Sejam

$$B = \max_{0<j\leq m} \{\pi_0(\beta_j)\}, \quad C = \max_{0\leq j<m} \{\pi_1(\beta_j)\} \quad \text{e} \quad D = \max\{B, C\}.$$

Desta forma, temos $D \geq B \geq \pi_0(\beta_m) = \pi_0(\beta) > 1$.

Como π é irredutível, deve existir γ tal que

$$\pi_0(\gamma) < D \leq \pi_1(\gamma).$$

Da relação anterior e da construção de D temos $\pi_1(\beta_j) \leq \pi_1(\gamma)$ para todo $0 \leq j < m$, e assim $\{0 \leq j < m : \pi_1(\beta_j) > \pi_1(\gamma)\} = \emptyset$.
Como $n_\gamma = 0$, temos $\{0 < j \leq m : \pi_0(\beta_j) > \pi_0(\gamma)\} = \emptyset$ e, assim, $\pi_0(\beta_j) \leq \pi_0(\gamma) < D$ para todo $0 < j \leq m$.

De modo análogo, prova-se que $\pi_1(\beta_j) < D$ para todo $0 \leq j < m$. De fato,

como $D > 1$ e π é irredutível, deve existir γ tal que

$$\pi_1(\gamma) < D \leq \pi_0(\gamma).$$

Da relação anterior e da construção de D temos $\pi_0(\beta_j) \leq \pi_0(\gamma)$ para todo $0 < j \leq m$, e assim $\{0 < j \leq m : \pi_0(\beta_j) > \pi_0(\gamma)\} = \emptyset$.
Como $n_\gamma = 0$, temos $\{0 \leq j < m : \pi_1(\beta_j) > \pi_1(\gamma)\} = \emptyset$ e, assim, $\pi_1(\beta_j) \leq \pi_1(\gamma) < D$ para todo $0 \leq j < m$.

Assim, provamos que $\pi_0(\beta_j) < D$ para todo $0 < j \leq m$ e que $\pi_1(\beta_j) < D$ para todo $0 \leq j < m$, o que é um absurdo, pois contraria a definição de D.

Portanto, (λ, π) satisfaz a condição de Keane.

$\square$

Proposição 2.2.3 *Se (λ, π) satisfaz a condição de Keane então T é minimal.*

Antes de demonstrarmos tal Proposição, precisaremos dos seguintes resultados.

Lema 2.2.1 *Dado qualquer subintervalo $J = [a, b[\subset X_\alpha$, para algum $\alpha \in \mathcal{A}$, deve existir uma partição finita $\{J_j : 1 \leq j \leq k\}$ e inteiros $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ tal que*

1. $T^i(J_j) \cap J = \emptyset$ para todo $0 < i < n_j$ e $1 \leq j \leq k$;

2. cada $T^{n_j}_{|_{J_j}}$ *é uma translação de* J_j *para algum subintervalo de* J*;*

3. os intervalos $T^{n_j}(J_j)$*,* $1 \leq j \leq k$ *são disjuntos dois a dois.*

Demonstração: Seja A a união do conjunto das extremidades $\{a, b\}$ de J com o conjunto das extremidades dos intervalos X_α. Seja $B \subset J$ o conjunto dos pontos $z \in J$ para o qual deve existir algum $m \geq 1$ tal que $T^i(z) \notin J$ para todo $0 < i < m$ e $T^m(z) \in A$.

A função $B \ni z \mapsto T^m(z) \in A$ é injetiva. De fato, sejam $z_1, z_2 \in J$ e $m_1, m_2 \geq 1$ tal que $T^{m_1}(z_1) = T^{m_2}(z_2) \in A$. Se $m_1 = m_2$, então, desde que T é bijetora, segue que $z_1 = z_2$ e, assim, a injetividade de tal função. Sem perda de generalidade, suponhamos então que $m_1 < m_2$. Daí, $T^{m_2 - m_1}(z_2) = z_1 \in J$ e $1 \leq m_2 - m_1 < m_2$, contradizendo a escolha de m_2. Disso segue que $m_1 = m_2$ e que tal função é injetora.

Consequentemente, como A é finito, segue que B também é finito. Portanto, consideremos uma partição de J determinada pelos pontos de B.

Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré (1.0.1), para cada elemento $J_j = [a_j, b_j[$ desta partição, deve existir $n_j > 0$ tal que $T^{n_j}(J_j)$ intercepta J. Consideraremos n_j o menor possível.

Da definição de B, os $T^{n_j}(J_j)$, $1 \leq j \leq k$, são disjuntos dois a dois. De fato, se existissem J_i e J_j, com $y \in T^{n_i}(J_i) \cap T^{n_j}(J_j) \neq \emptyset$, então existem $x_i \in J_i$ e $x_j \in J_j$, tal que $T^{n_i}(x_i) = T^{n_j}(x_j) = y$. Como $n_i \neq n_j$, pois caso contrário teríamos da bijetividade de T que $x_i = x_j$, o que não acontece, pois $J_i \cap J_j = \emptyset$ por construção. Sem perda de generalidade, suponhamos então que $n_i > n_j$, e assim temos $T^{n_i - n_j}(x_i) = x_j \in J$, contradizendo a definição de n_i. Logo $T^{n_j}(J_j)$, $1 \leq j \leq k$, são disjuntos.

□

Corolário 2.2.1 *A partir das hipóteses do Lema (2.2.1), o conjunto* $\hat{J}$*, formado pela união de todos os iterados futuros de* J*, é uma união finita de intervalos e é também um conjunto invariante, ou seja,* $T(\hat{J}) = \hat{J}$*.*

Demonstração: A primeira afirmação segue direto da primeira parte do Lema (2.2.1):

$$\hat{J} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(J) = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=0}^{n_j - 1} T^i(J_j).$$

Da bijeção de T, observe que

$$\sum_{j=1}^{k} | T^{n_j}(J_j) |= \sum_{j=1}^{k} | J_j |=| J |.$$

onde $| \cdot |$ representa o comprimento dos intervalos.

Daí, usando os itens 2. e 3. do Lema anterior, segue que

$$J = \bigcup_{j=1}^{k} T^{n_j}(J_j).$$

Assim

$$T(\hat{J}) = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{n_j} T^i(J_j) = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=0}^{n_j-1} T^i(J_j) = \hat{J},$$

ou seja, $\hat{J}$ é um conjunto invariante.

$\square$

Lema 2.2.2 *Se (λ, π) satisfaz a condição de Keane então T não possui pontos periódicos.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que existe $m \geq 1$ e $x \in X$ tal que $T^m(x) = x$. Defina $\beta_j \in \mathcal{A}$, $0 \leq j \leq m$, tal que $T^j(x) \in X_{\beta_j}$. Seja J o conjunto de todos os $y \in X$ tais que $T^j(y) \in X_{\beta_j}$ para todo $0 \leq j < m$, ou seja,

$$J = \{y \in X : T^j(y) \in X_{\beta_j}, 0 \leq j < m\} =$$

$$= \{y \in X : T^0(y) \in X_{\beta_0}, T^1(y) \in X_{\beta_1}, \ldots, T^{m-1}(y) \in X_{\beta_{m-1}}\}$$

$$= \{y \in X : T^0(y) \in X_{\beta_0}\} \cap \{y \in X : T^1(y) \in X_{\beta_1}\} \cap \ldots \cap \{y \in X : T^{m-1}(y) \in X_{\beta_{m-1}}\} =$$

$$= T^{-0}(X_{\beta_0}) \cap T^{-1}(X_{\beta_1}) \cap \ldots \cap T^{-(m-1)}(X_{\beta_{m-1}}).$$

Desta forma, J é união finita de subintervalos de X_{β_0} e, além disso, $J \neq \emptyset$ já que $x \in J$. Seja J_x o tal subintervalo que contém x. Assim, por construção de J, existe $0 \leq i < m$ tal que $T^{m-1}(\partial X_{\beta_i}) = \partial J_x$. Como $T^m(x) = x$, segue que

$$T^m(T^{m-1}(\partial X_{\beta_i})) = T^m(\partial J_x) = \partial J_x = T^{m-1}(\partial X_{\beta_i}),$$

ou seja, $T^m(\partial X_{\beta_i}) = \partial X_{\beta_i}$.

Se $\pi_0(\beta_i) > 1$ então contradiz a condição de Keane. Assim, $\pi_0(\beta_i) = 1$. Portanto, existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que $T(\partial X_{\alpha_0}) = 0 = \partial X_{\beta_i}$. Como π é irredutível temos $\partial X_{\alpha_0} > 0$, ou seja, $\pi_0(\alpha_0) > 1$. Por outro lado, pela injetividade da T temos

$$\begin{cases} T(\partial X_{\alpha_0}) = \partial X_{\beta_i} \\ T^m(\partial X_{\beta_i}) = \partial X_{\beta_i} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T(\partial X_{\alpha_0}) = \partial X_{\beta_i} \\ T^m(T(\partial X_{\alpha_0})) = T^m(\partial X_{\beta_i}) = \partial X_{\beta_i} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T(T^m(\partial X_{\alpha_0})) = \partial X_{\beta_i} = T(\partial X_{\alpha_0}) \Longrightarrow T^m(\partial X_{\alpha_0}) = \partial X_{\alpha_0},$$

o que é um absurdo, pois contradiz a condição de Keane. Sendo assim, provamos que não existe ponto periódico.

□

Demonstração da Proposição (2.2.3):

Suponhamos que exista $x \in X$ tal que o conjunto $\{T^n(x) : n \geq 0\}$ não seja denso em X, ou seja, $\overline{\{T^n(x) : n \geq 0\}} \neq X$. Sejam $J = [a, b[\subset X_\alpha$, para algum $\alpha \in \mathcal{A}$, tal que $J \cap \{T^n(x) : n \geq 0\} = \emptyset$ e $\hat{J}$ a união de todos iterados futuros de J. Pelo Corolário (2.2.1), esta é uma união finita de intervalos completamente invariante por T.

Afirmamos que $\hat{J}$ não pode ser da forma $[0, \hat{b}[$. De fato, suponhamos que seja desta forma. Considere $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A} : X_\alpha \subset \hat{J}\}$. Se $\mathcal{B} \neq \emptyset$, temos $\pi_0(\mathcal{B}) \neq \{1, 2, \ldots, k\}$, para algum $k \in \mathcal{A}$, com $k < r$, já que $\hat{J}$ não intercepta a órbita de x. Como $\hat{J}$ é invariante, temos $\pi_1(\mathcal{B}) = \{1, 2, \ldots, k\}$, e assim

$$\pi_0^{-1}(\{1, 2, \ldots, k\}) = \mathcal{B} = \pi_1^{-1}(\{1, 2, \ldots, k\}).$$

Mas isso contradiz a irredutibilidade de π, já que irredutibilidade é uma consequência de satisfazer a condição de Keane. Sendo assim $\mathcal{B} = \emptyset$, ou seja, $\hat{J} \subset X_\alpha$, onde $\pi_0(\alpha) = 1$. Por invariância temos $\hat{J} \subset T(X_\alpha)$ também e, portanto, $\pi_1(\alpha) = 1$. Mas isso também contradiz a irredutibilidade de π. Com isso, provamos tal afirmação.

Como consequência, e usando o Corolário (2.2.1), $\hat{J}$ é uma união finita e disjunta de subintervalos de X, onde existe pelo menos um subintervalo do tipo $[\hat{a}, \hat{b}[$, com $\hat{a} > 0$.

Se $T^n(\hat{a}) \neq \partial X_\beta$ para todo $n \geq 0$ e $\beta \in \mathcal{A}$, então, pela continuidade de T e invariância de $\hat{J}$, $T^n(\hat{a})$ será extremidade de algum dos subintervalos disjuntos de $\hat{J}$, para todo $n \geq 0$. Como

$\hat{J}$ possui um número finito de componentes conexa, segue que T deve possuir ponto periódico, o que não pode acontecer de acordo com o Lema (2.2.2).

Analogamente, não pode acontecer $T^n(\hat{a}) \neq T(\partial X_\alpha)$ para todo $n \leq 0$ e $\alpha \in \mathcal{A}$.

Assim, existem $n_1 \leq 0 \leq n_2$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ tal que

$$T^{n_1}(\hat{a}) = T(\partial X_\alpha) \quad \text{e} \quad T^{n_2}(\hat{a}) = \partial X_\beta. \tag{2.11}$$

Se $\partial X_\beta > 0$ então a condição de Keane é contraditado, pois

$$T^{n_2 - n_1 + 1}(\partial X_\alpha) = T^{n_2}(T^{1-n_1}(\partial X_\alpha)) = T^{n_2}(\hat{a}) = \partial X_\beta.$$

Se $\partial X_\beta = 0$ então $n_2 > 0$, pois tomamos $\hat{a} > 0$. E mais, $\partial X_\beta = T(\partial X_\gamma)$, para algum $\gamma \in \mathcal{A}$ $(\pi_1(\gamma) = 1)$. Desta forma, (2.11) permanece válido se substituirmos β por γ e n_2 por $n_2 - 1$. Pelo fato da irredutibilidade, temos $\gamma \neq \beta$, logo $\partial X_\gamma > 0$, e novamente a condição de Keane é contraditado, pois

$$T^{n_2 - n_1}(\partial X_\alpha) = T^{n_2 - 1}\left(T^{1-n_1}(\partial X_\alpha)\right) = T^{n_2 - 1}(\hat{a}) = \partial X_\gamma, \qquad \pi_0(\gamma) \neq 1.$$

Portanto, não existe $x \in X$ tal que $\overline{\{T^n(x) : n \geq 0\}} \neq X$. Sendo assim, T é minimal.

$\square$

Assim, das Proposições (2.2.2) e (2.2.3) obtemos o próximo teorema.

Teorema 2.2.1 *Se τ é irredutível e λ é irracional então $T = (\lambda, \tau)$ é minimal.*

Ou seja, para quase todo λ, supondo τ irredutível, temos $T = (\lambda, \tau)$ minimal.

Capítulo 3

A Propriedade P

Nesse capítulo iremos definir uma propriedade, a qual chamaremos de Propriedade P, que será fundamental para demonstrarmos que quase todo intercâmbio de intervalos é unicamente ergódico, onde primeiramente demonstraremos que se um intercâmbio de intervalos satisfaz a Propriedade P então tal intercâmbio é unicamente ergódico e depois, usando ferramentas em teoria de grafos, provaremos que quase todo intercâmbio de intervalos satisfaz a Propriedade P.

Definição 3.0.3 *Um conjunto infinito $A \subset \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ é essencial se para todo inteiro $l \geq 2$ existir um número real $\lambda > 1$ de tal forma que o sistema*

$$\begin{cases} n_{i+1} > 2n_i, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq l-1; \\ n_l < \lambda n_1; \\ n_i \in A, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq l \end{cases} \tag{3.1}$$

tenha um número infinito de soluções $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$.

Exemplo 3.0.1 *Um exemplo trivial de conjunto essencial é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.*

Um outro exemplo de conjunto essencial é dado por $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, onde

$$a_1 = 3 \text{ e } a_{n+1} = 2a_n + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

De fato, fixe um inteiro $l \geq 2$ qualquer e seja $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+l}\} \subset A$, para um $n \in \mathbb{N}$, arbitrário. Daí, por construção de A, temos que

$$a_{n+i+1} = 2a_{n+i} + 1 > 2a_{n+i}, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, l-1.$$

Se encontrarmos um valor real $\lambda(l) = \lambda > 1$, tal que $a_{n+l} < \lambda a_{n+1}$, então provamos que A é essencial.
Observe que

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 1 = 2(a_{n+1} + 1) - 1\\
a_{n+3} &= 2a_{n+2} + 1 = 2(2a_{n+1} + 1) + 1 = 4a_{n+1} + 3 = 2^2(a_{n+1} + 1) - 1\\
a_{n+4} &= 2a_{n+3} + 1 = 2(2^2(a_{n+1} + 1) - 1) + 1 = 2^3(a_{n+1} + 1) - 1.
\end{aligned}$$

Com isso, provamos por indução finita que

$$a_{n+l} = 2^{l-1}(a_{n+1} + 1) - 1.$$

Tome $\lambda = 2^l$. Daí, temos

$$\lambda = 2^l = 2^{l-1}2 = 2^{l-1}(1+1) > 2^{l-1}\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = 2^{l-1}\left(\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda a_{n+1} > 2^{l-1}(a_{n+1} + 1) - 1 = a_{n+l},$$

para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Logo A é essencial.

Exemplo 3.0.2 *Um exemplo de conjunto não essencial é o conjunto $E = \{2^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$. De fato, fixe um número inteiro $l \geq 2$ e seja $\lambda \in]1, +\infty[$ arbitrário. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que*

$$2^{2^n}2^{2^n} = 2^{2^n+2^n} = 2^{2^n 2} = 2^{2^{n+1}} > \lambda 2^{2^n}$$

para todo $n \geq n_0$. Basta tomarmos n_0 tal que $2^{2^{n_0}} > \lambda$.
Sendo assim, qualquer que seja a $l-$upla $(n_1, n_2, \ldots, n_l) \in E^n$ que satisfaça (3.1), devemos ter $n_l < 2^{2^{n_0+1}}$, pois caso contrário teríamos $n_l \geq \lambda n_1$.

Daí, como n_l é limitado temos que existe um número finito soluções $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ em E^n que satisfaça (3.1).

Logo E não é essencial.

Observe que no Exemplo (3.0.1) o conjunto A é essencial, porém a distância de seus elementos consecutivos vai aumentando, mas já no conjunto E do Exemplo (3.0.2) a distância de seus termos consecutivos também vai aumentando, porém muito mais rápido que no conjunto A, e vimos que o conjunto E não é essencial.

Assim, podemos dizer que, geometricamente, um conjunto infinito $A \subset \mathbb{N}$ é essencial se para qualquer que seja o inteiro $l \geq 2$ tivermos infinitas $l-$uplas (ou "bloquinhos"com l elementos)

$\{n_1, n_2, \ldots, n_l\} \subset A$ de tal forma que seus termos dois-a-dois consecutivos (n_i e n_{i+1}, $i = 0, \ldots, l-1$) vão ficando relativamente um distante do outro, mas não muito rápido, porém os seus extremos (n_1 e n_l) sejam relativamente próximos.

Dado uma aplicação intercâmbio de intervalos $T = (\lambda, \tau)$, denotemos por $m(T) = \min_{1 \le i \le r} \lambda_i$. Assim, temos $0 < m(T) \le 1/r$, onde $r = \sharp\mathcal{A}$. Para todo inteiro $n \ge 1$, $T^n : X \longrightarrow X$ é também uma aplicação intercâmbio de intervalos. Denotemos por $(\lambda^{(n)}, \tau^{(n)})$ tal aplicação. Além disso, todas as possíveis descontinuidades de T^n têm a forma

$$T^{-k}(\beta_i), \qquad \text{onde} \qquad 0 \le k \le n-1 \qquad \text{e} \qquad 1 \le i \le r-1. \tag{3.2}$$

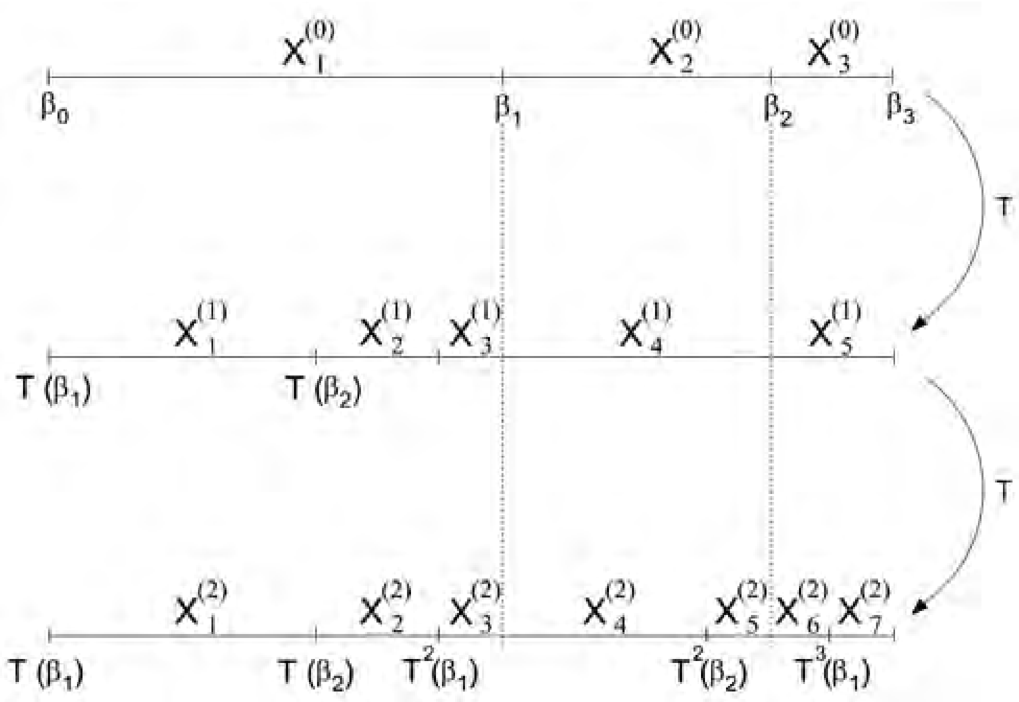
Consideraremos que a partição

$$0 = \beta_0^{(n)} < \beta_1^{(n)} < \beta_2^{(n)} < \ldots < \beta_{r(n)}^{(n)} = \beta_r, \qquad \beta_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j^{(n)},$$

correspondente à $\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{r(n)}^{(n)})$, é gerada por todos os pontos em (3.2), mesmo que T^n seja contínua em algum deles. Denote por $m(T^n) = \min_{1 \le i \le r(n)} \lambda_i^{(n)}$.

Exemplo 3.0.3 *Seja o seguinte intercâmbio de intervalos:*

Com isso, temos



Isto é, as possíveis descontinuidades de T^2 são β_1, β_2, $T^{-1}(\beta_1)$ e $T^{-1}(\beta_2)$ já que β_1 e β_2 são as descontinuidades de T em X e T^n carrega as descontinuidades de T^{n-1} para todo $n \geq 2$. Assim, as possíveis descontinuidades de T definindo em $T(X)$ são β_1, β_2, $T(\beta_1)$ e $T(\beta_2)$.

Definição 3.0.4 *Uma aplicação intercâmbio de intervalos T tem a Propriedade P se para algum $\epsilon > 0$ o conjunto*

$$A(T, \epsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} : m(T^n) \geq \frac{\epsilon}{n} \right\}$$

for essencial.

Tal definição é motivada pelo próximo teorema.

Teorema 3.0.2 *Seja T uma aplicação intercâmbio de intervalos minimal que satisfaz a Propriedade P. Então T é unicamente ergódica.*

Antes de demonstrarmos tal teorema, precisaremos dos seguintes pré-requisitos.
Para cada $r \in \mathbb{N}^*$, seja

$$\Lambda_{r,1} = \left\{ \lambda \in \Lambda_r : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Assim, para cada $r \in \mathbb{N}^*$ e para cada $\lambda \in \Lambda_{r,1}$, podemos considerar uma partição de $X = [0, 1[$ dada por

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i, \quad \text{onde} \quad X_i = [\beta_{i-1}, \beta_i[\quad \text{e} \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j.$$

Tal partição será denotada pelo par (r, λ).

Por $\max(\lambda)$ denotemos o comprimento do maior intervalos X_i, ou seja,

$$\max(\lambda) = \max_{1 \leq i \leq r} \lambda_i.$$

A Definição (3.0.4) é uma motivação para o Teorema (3.0.2) pois na década de 80 Michael Boshernitzan conjecturou que se o intercâmbio de intervalos T não é unicamente ergódico então

$$\lim_{n \to \infty} n \min(T^n) = 0.$$

Esse resultado foi provado em 1987 por Veech [13]. Assim, tal conjectura nos diz que para um intercâmbio de intervalos T ser unicamente ergódico é suficiente que o tamanho de cada um dos subintervalos λ_i^n, $1 \leq i \leq r(n)$, vão diminuindo com uma mesma frequência, conforme cada iterada de T, ou seja, não podemos ter um subintervalo diminuindo muito mais rápido do que um outro subintervalo.

Proposição 3.0.4 *Seja T uma aplicação intercâmbio de intervalos minimal em $[0,1[$. Suponhamos que T não é unicamente ergódica. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer que seja a partição (k,λ) com $\max(\lambda) < \delta$, temos $\sum_{i \in J} \lambda_i > 1 - \epsilon$, onde o conjunto $J = J((k,\lambda),\epsilon)$ é o conjunto de todos os inteiros i, com $1 \leq i \leq k$, para o qual existe uma medida de Borel normalizada μ_i, invariante sob T tal que $\mu_i(X_i) < \epsilon\lambda_i = \epsilon\eta(X_i)$, onde η denota a medida de Lebesgue em $[0,1]$.*

Demonstração: Como T não é unicamente ergódica, existe outra medida de Borel μ, ergódica, normalizada e invariante sob T, com $\mu \neq \eta$, onde η é a medida de Lebesgue.

Para demonstrarmos a proposição, usaremos o fato de que se μ é ergódica, então sua decomposição de Lebesgue é trivial, ou seja, μ é singular em relação à η ($\mu \perp \eta$) ou μ é absolutamente contínua em relação à η ($\mu \ll \eta$).
(Caso 1) $\mu \perp \eta$.

Afirmação: Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer que seja a partição (k,λ) com $\max(k,\lambda) < \delta$, têm-se $\sum_{i \in J} \lambda_i \leq \epsilon$, onde $J = \{1 \leq i \leq k : \mu(X_i) \geq \epsilon\lambda_i\}$. De fato, como μ é singular, existe um boreliano C tal que $\eta(C) = \mu([0,1[\backslash C) = 0$.
Logo existe um conjunto $D = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$, onde os D_j são intervalos abertos, tal que $\eta(D) < \epsilon/4$ e $\mu([0,1[\backslash D) < \epsilon^2/2$. Tome $\delta = \epsilon/8n$ e uma partição (k,λ) tal que $\max(\lambda) < \delta$. Considere os conjuntos $J_1 = \{1 \leq i \leq k : D \cap X_i \neq \emptyset\}$, $J_2 = J \backslash J_1$ e $J_3 = \{i \in J_1 : X_i \not\subset D\}$.
Então

$$\sum_{i \in J_1} \lambda_i \leq \eta(D) + \eta\left(\bigcup_{i \in J_1} X_i \setminus D\right) \leq \frac{\epsilon}{4} + \bigcup_{i \in J_1} \eta\left(X_i \setminus D\right) = \frac{\epsilon}{4} + \sum_{i \in J_3} \eta(X_i \setminus D) \leq \frac{\epsilon}{4} + \sum_{i \in J_3} \delta.$$

Se $i \in J_3$ então $X_i \cap D_j \neq \emptyset$, para algum $j \in \{1,\ldots,n\}$ e ainda, existe no máximo um inteiro $l \in J_3$, com $l \neq i$, tal que $X_l \cap D_j \neq \emptyset$. De fato, supõe que existem $l, l' \in J_3$, com $l, l' \neq i$, tais que

$$X_l \cap D_j \neq \emptyset, \quad X_{l'} \cap D_j \neq \emptyset \quad \text{e} \quad l \neq l'.$$

Como D_j é um intervalo aberto e X_i, X_l e $X_{l'}$ são intervalos disjuntos, segue que $X_\alpha \subset D_j$, para algum $\alpha \in \{i, l, l'\} \subset J_3$, o que é um absurdo.

Assim, provamos que para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, D_j intercepta no máximo dois intervalos distintos X_i e $X_{i'}$, com $i, i' \in J_3$.

Defina o conjunto $J_3^j = \{i \in J_3 : X_i \cap D_j \neq \emptyset\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Daí, temos que

$$\bigcup_{j=1}^{n} J_3^j = J_3$$

e que J_3^j possui no máximo 2 elementos, visto o que provamos. Assim,

$$\sum_{i \in J_3} \delta \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in J_3^j} \delta \leq \sum_{j=1}^{n} 2\delta = 2n\delta.$$

Portanto, temos

$$\sum_{i \in J_1} \lambda_i \leq \frac{\epsilon}{4} + \sum_{i \in J_3} \delta \leq \frac{\epsilon}{4} + 2n\delta = \frac{\epsilon}{4} = 2n\frac{\epsilon}{8n} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, temos

$$\sum_{i \in J_2} \lambda_i \leq \sum_{i \in J_2} \frac{1}{\epsilon}\mu(X_i) = \frac{1}{\epsilon}\mu\left(\bigcup_{i \in J_2} X_i\right) \leq \frac{1}{\epsilon}\mu\left([0,1[\backslash D\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalmente, obtemos

$$\sum_{i \in J} \lambda_i \leq \sum_{i \in J_1} \lambda_i + \sum_{i \in J_2} \lambda_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

como queríamos demonstrar.

(Caso 2) $\mu \ll \eta$.

Se $\mu \neq \eta$ então existe um conjunto Boreliano A, invariante sob T com $0 < \eta(A) < 1$.

Sejam $B = [0,1[\backslash A$, $a = \eta(A)$ e $b = \eta(B)$. Daí, tome μ_1 e μ_2 medidas de Borel, normalizadas e invariantes sob T definidas por

$$d\mu_1 = \frac{1}{a}\mathcal{X}_A d\eta \quad \text{ e } \quad d\mu_2 = \frac{1}{b}\mathcal{X}_B d\eta.$$

Daí, por construção, temos $\mu_1 \perp \mu_2$. Assim, de modo análogo ao que foi demonstrado para o caso onde tínhamos $\mu \perp \eta$, segue que existe $\delta^1 > 0$ tal que para qualquer que seja a partição (k, λ), com $\max\limits_{1 \leq i \leq k} \mu_2(X_i) < \delta_1$, temos $\sum\limits_{i \in (J^1)^c} \mu_2(X_i) \leq \frac{\epsilon^2}{2}$, onde $(J^1)^c = \{1 \leq i \leq k : \mu_1(X_i) \geq \epsilon\mu_2(X_i)\}$.

De fato, como $\mu_1 \perp \mu_2$, existe um boreliano C^1 tal que $\mu_2(C^1) = \mu_1([0,1[\backslash C^1) = 0$. Logo, existe um conjunto $D^1 = \bigcup\limits_{j=1}^{n_1} D_j^1$, onde D_j^1 são intervalos abertos, tal que $\mu_2(D^1) < \frac{\epsilon^2}{8}$ e $\mu_1([0,1[\backslash D^1) < \frac{\epsilon^3}{4}$.

Tome $\delta^1 = \frac{\epsilon^2}{16n_1}$ e uma partição (k, λ) tal que $\max\limits_{1 \leq i \leq k} \mu_2(X_i) < \delta^1$. Considere os conjuntos

$$J_1^1 = \{1 \leq i \leq k : D^1 \cap X_i \neq \emptyset\}, \quad J_2^1 = {J^1}^c \setminus J_1^1 \quad \text{e} \quad J_3^1 = \{i \in J_1^1 : X_i \not\subset D\}.$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, chegamos que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$, D_j^1 intercepta no máximo dois intervalos distintos X_i e $X_{i'}$, com $i, i' \in J_3^1$. Portanto, temos

$$\sum_{i \in J_1^1} \mu_2(X_i) \leq \mu_2(D^1) + \mu_2\left(\bigcup_{i \in J_1^1} X_i \setminus D^1\right) \leq \frac{\epsilon^2}{8} + \sum_{i \in J_1^1} \mu_2(X_i \setminus D^1) =$$

$$= \frac{\epsilon^2}{8} + \sum_{i \in J_3^1} \mu_2(X_i \setminus D^1) \leq \frac{\epsilon^2}{8} + \sum_{i \in J_3^1} \delta^1 \leq \frac{\epsilon^2}{8} + 2n_1\delta^1 = \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Por outro lado, temos

$$\sum_{i \in J_2^1} \mu_2(X_i) \leq \sum_{i \in J_2^1} \frac{1}{\epsilon}\mu_1(X_i) = \frac{1}{\epsilon}\mu_1\left(\bigcup_{i \in J_2^1} X_i\right) \leq \frac{1}{\epsilon}\mu_1([0, 1[\setminus D^1) \leq \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Portanto,

$$\sum_{i \in (J^1)^c} \mu_2(X_i) \leq \sum_{i \in J_1^1} \mu_2(X_i) + \sum_{i \in J_2^1} \mu_2(X_i) \leq \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4} = \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Analogamente, usando o fato que $\mu_2 \perp \mu_1$, provamos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta^2 > 0$ tal que qualquer que seja a partição (k, λ), com $\max\limits_{1 \leq i \leq k} \mu_1(X_i) < \delta^2$, temos que $\displaystyle\sum_{i \in (J^2)^c} \mu_1(X_i) \leq \frac{\epsilon^2}{2}$, onde $(J^2)^c = \{1 \leq i \leq k : \mu_2(X_i) \geq \epsilon\mu_1(X_i)\}$.

Sejam os conjuntos

$$J_1 = \{1 \leq i \leq k : \mu_1(X_i) < \epsilon\lambda_i\} \quad \text{e} \quad J_2 = \{1 \leq i \leq k : \mu_2(X_i) < \epsilon\lambda_i\}.$$

Daí, temos que $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. De fato, suponhamos que existe $j \in J_1 \cap J_2$. Logo

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_1(X_j) = \dfrac{1}{a}\eta(X_j \cap A) < \epsilon\lambda_j \\ \\ \mu_2(X_j) = \dfrac{1}{b}\eta(X_j \cap B) < \epsilon\lambda_j \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \eta(X_j \cap A) < a\epsilon\lambda_j \\ \\ \eta(X_j \cap B) < b\epsilon\lambda_j \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda_j = \eta(X_j) = \eta(X_j \cap (A \cup B)) = \eta(X_j \cap A) + \eta(X_j \cap B) <$$

$$< a\epsilon\lambda_j + b\epsilon\lambda_j = (a + b)\epsilon\lambda_j = \epsilon\lambda_j \Longrightarrow \lambda_j < \epsilon\lambda_j,$$

o que é um absurdo. Logo $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

Sejam $\epsilon > 0$ arbitrário e $J = J_1 \cup J_2$. Assim, conseguimos determinar J^1, δ^1, J^2 e δ^2 como anteriormente.

Queremos provar que existe $\delta > 0$ tal que dada uma partição (k, λ) qualquer, com $\max(\lambda) < \delta$, temos $\sum\limits_{i \in J} > 1-\epsilon$ ou, semelhantemente, basta provarmos que $\sum\limits_{i \in J^c} \lambda_i \leq \epsilon$, com $J^c = J_1^c \cap J_2^c = \{1 \leq i \leq k : \mu_1(X_i) \geq \epsilon\lambda_i \text{ e } \mu_2(X_i) \geq \epsilon\lambda_i\}$.

Antes disso, provemos que $\{1, 2, \ldots, k\} = (J^1)^c \cup (J^2)^c$ e, portanto,

$$J^c = J_1^c \cap J_2^c \subset (J^1)^c \cup (J^2)^c.$$

De fato, basta provarmos que $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq (J^1)^c \cup (J^2)^c$. Suponhamos que exista

$$i \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ tal que } i \notin (J^1)^c \cup (J^2)^c \Longrightarrow i \in J^1 \cap J^2,$$

ou seja, temos

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}\eta(X_i \cap A) = \mu_1(X_i) < \epsilon\mu_2(X_i) = \dfrac{\epsilon}{b}\eta(X_i \cap B) \\ \\ \dfrac{1}{b}\eta(X_i \cap B) = \mu_2(X_i) < \epsilon\mu_1(X_i) = \dfrac{\epsilon}{a}\eta(X_i \cap A) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}\eta(X_i \cap A) < \dfrac{\epsilon}{b}\eta(X_i \cap B) \\ \\ \dfrac{-\epsilon}{a}\eta(X_i \cap A) < \dfrac{-1}{b}\eta(X_i \cap B) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{1-\epsilon}{a}\eta(X_i \cap A) < \frac{\epsilon - 1}{b}\eta(X_i \cap B),$$

o que não é verdade pois temos que

$$\frac{1-\epsilon}{a} > 0, \quad \frac{\epsilon-1}{b} < 0, \quad A \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup B = [0, 1[.$$

Portanto $\{1, 2, \ldots, k\} = (J^1)^c \cup (J^2)^c$ e assim temos $J_1^c \cap J_2^c \subset (J^1)^c \cup (J^2)^c$.

Tome $\delta = \min\{b\delta^1, a\delta^2\}$ e seja (k, λ) uma partição tal que $\max(\lambda) < \delta$. Assim, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, temos

$$\lambda_i < \delta \Longrightarrow \eta(X_i) < \delta \Longrightarrow \begin{cases} \eta(X_i \cap B) < \delta \\ \eta(X_i \cap A) < \delta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{b}\eta(X_i \cap B) < \dfrac{1}{b}\delta \leq \dfrac{1}{b}b\delta^1 = \delta^1 \\ \\ \dfrac{1}{a}\eta(X_i \cap A) < \dfrac{1}{a}\delta \leq \dfrac{1}{a}a\delta^2 = \delta^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mu_2(X_i) < \delta^1 \\ \mu_1(X_i) < \delta^2 \end{cases}, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \Longrightarrow \begin{cases} \max\limits_{1 \leq i \leq k}\{\mu_2(X_i)\} < \delta^1 \\ \max\limits_{1 \leq i \leq k}\{\mu_1(X_i)\} < \delta^2 \end{cases}.$$

Daí, temos

$$\sum_{i\in J^c}\lambda_i = \sum_{i\in J^c\cap((J^1)^c\cup(J^2)^c)}\lambda_i \leq \sum_{i\in J^c\cap(J^1)^c}\lambda_i + \sum_{i\in J^c\cap(J^2)^c}\lambda_i \leq$$

$$\leq \sum_{i\in J^c\cap(J^1)^c}\frac{1}{\epsilon}\mu_2(X_i) + \sum_{i\in J^c\cap(J^2)^c}\frac{1}{\epsilon}\mu_1(X_i) \leq \sum_{i\in(J^1)^c}\frac{1}{\epsilon}\mu_2(X_i) + \sum_{i\in(J^2)^c}\frac{1}{\epsilon}\mu_1(X_i) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon}\frac{\epsilon^2}{2} + \leq \frac{1}{\epsilon}\frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon,$$

finalizando assim a demonstração para o caso onde $\mu \perp \eta$.

$\square$

Demonstração do Teorema (3.0.2):

Seja $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação intercâmbio de intervalos, de r intervalos, minimal que satisfaz propriedade P. Suponhamos por absurdo que T não é unicamente ergódica. Sem perda de generalidade, suponha $X = [0, 1[$. Denotemos por η a medida de Lebesgue em $[0, 1]$.

Para cada $n \geq 1$, denotemos por $(r_n, \lambda^{(n)})$ a partição correspondente à aplicação intercâmbio de intervalos T^n, r_n sendo o número de intervalos $X_i^{(n)}$ permutados por T^n e $\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{r_n}^{(n)}) \in \Lambda_{r_n}$. Seja $\min(\lambda^{(n)}) = m(T^n) = \min_{1\leq i\leq r_n}\lambda_i^{(n)}$. Como T é minimal, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\max(\lambda^{(n)}) = 0. \tag{3.3}$$

De fato, se tivéssemos $\lim_{n\to\infty}\max\left(\lambda^{(n)}\right) > 0$, então teríamos $\max\left(\lambda^{(n)}\right) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso seguiria que existe um intervalo aberto $I \subset X$ tal que para cada iterado n de T, existe $i_n \in \{1, 2, \ldots, r_n\}$ tal que $I \subset X_{i_n}^{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para qualquer que seja $i = 1, \ldots, r-1$, temos $T^n(\beta_i) \notin I$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde β_i é a extremidade esquerda de cada X_i. Portanto, temos que a órbita de cada β_i está contida em $X \setminus I$, contrariando a minimalidade de T

Logo $r_{n+1} > r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e, portanto,

$$r_n > n, \quad \forall n \geq 1. \tag{3.4}$$

Para todo $n \geq 1$, seja $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{r_n}^{(n)}) \in \Lambda_{r_n}$ o vetor composto pelos valores $\lambda_i^{(n)}$, porém, arranjados em ordem não-decrescente. Seja $s_n = [r_n/2] + 1$ (onde $[y]$ denota o maior inteiro $\leq y$). Então

$$x_{s_n}^{(n)} = \frac{1}{r_n - s_n + 1}(r_n - (s_n - 1))x_{s_n}^{(n)} = \frac{1}{r_n - s_n + 1}\sum_{i=s_n}^{r_n} x_{s_n}^{(n)} \leq \frac{1}{r_n - s_n + 1}\sum_{i=s_n}^{r_n} x_i^{(n)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{r_n - s_n + 1} = \frac{1}{r_n - \left[\frac{r_n}{2}\right]} = \begin{cases} \dfrac{2}{r_n}, & \text{se } r_n \text{ for par,} \\ \\ \dfrac{2}{r_n + 1}, & \text{se } r_n \text{ for impar.} \end{cases}$$

Logo,

$$x_{s_n}^{(n)} \leq \frac{2}{r_n} < \frac{2}{n}. \tag{3.5}$$

Como T satisfaz a propriedade P então, para algum $\epsilon > 0$ o conjunto

$$A = A(T, \epsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \min(\lambda^{(n)}) \geq \frac{\epsilon}{n} \right\}$$

é essencial. Se $n \in A$ então, por (3.5), temos

$$\frac{\epsilon}{n} \leq x_1^{(n)} \leq x_2^{(n)} \leq \ldots \leq x_{s_n}^{(n)} \leq \frac{2}{n}. \tag{3.6}$$

Por (3.4) temos $r_n > n$. Assim

$$\sum_{i=1}^{s_n} x_i^{(n)} \geq \sum_{i=1}^{s_n} \frac{\epsilon}{n} = s_n \frac{\epsilon}{n} > \frac{r_n}{2} \frac{\epsilon}{n} > \frac{n}{2} \frac{\epsilon}{n} = \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.7}$$

Seja $l = [2/\epsilon] + 2$. Como A é essencial, existe $\lambda > 1$ tal que o sistema (3.1) têm infinitas soluções $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_l)$. Seja

$$A_1 = \{n_1 \in A : \text{existe uma solução } (n_1, n_2, \ldots, n_l) \text{ para o sistema (3.1)}\}.$$

Assim A_1 é um conjunto infinito. Seja

$$\epsilon_1 = \min\left(\frac{\epsilon}{2}; \frac{1}{2\lambda}\right).$$

Tomando esse ϵ_1, existe então um $\delta > 0$ satisfazendo as condições da Proposição (3.0.4). De (3.3), para um $n_1 \in A_1$ suficientemente grande, têm-se $\max(\lambda_i^{(n_1)}) < \delta$ e portanto, da Proposição (3.0.4), têm-se

$$\sum_{j \in J} \lambda_j^{n_1} > 1 - \epsilon_1 \tag{3.8}$$

onde J é o conjunto dos inteiros i, $1 \leq i \leq r_{n_1}$, para o qual existe uma medida de Borel μ_i, normalizada e invariante sob T tal que $\mu_i(X_i^{(n_1)}) < \epsilon_1 \lambda_i^{(n_1)}$. Fixe tal $n_1 \in A_1$. Assim,

$$(3.7) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{s_{n_1}} x_i^{(n_1)} > \frac{\epsilon}{2} \geq \epsilon_1 \quad \text{e} \quad (3.8) \Longrightarrow \sum_{j\in J} \lambda_j^{(n_1)} > 1 - \epsilon_1.$$

Logo existem um inteiro i, $1 \leq i \leq s_{n_1}$, e $v \in J$ tal que

$$x_i^{(n_1)} = \lambda_v^{(n_1)}.$$

De fato, se não existe $i : 1 \leq i \leq s_{n_1}$, e $v \in J$ tal que $x_i^{(n_1)} = \lambda_v^{(n_1)}$ então, isso significa que, $\forall i : 1 \leq i \leq s_{n_1}$, e $\forall j \in J$ têm-se $x_i^{(n_1)} \neq \lambda_j^{(n_1)}$. Disso, segue que para cada $j \in J$, existe $i : s_{n_1} + 1 \leq i \leq r_{n_1}$ tal que $\lambda_j^{(n_1)} = x_i^{(n_1)}$. Daí,

$$\sum_{j\in J} \lambda_j^{(n_1)} \leq \sum_{i=s_{n_1}+1}^{r_{n_1}} x_i^{(n_1)} = 1 - \sum_{i=1}^{s_{n_1}} x_i^{(n_1)} < 1 - \epsilon_1,$$

o que é um absurdo, pois contraria o fato (3.8).
Portanto, existe $v \in J$ tal que $\sum_{i=1}^{s_{n_1}} x_i^{(n_1)} \geq \eta(X_v^{(n_1)})$. Seja $Y = X_v^{(n_1)}$ e $y = \eta(Y)$. Então, por (3.6), tem-se $y < 2/n_1$ e como $v \in J$ tem-se

$$\mu(Y) < \epsilon_1 y \leq \frac{1}{2\lambda}\frac{2}{n_1} = \frac{1}{\lambda n_1} \tag{3.9}$$

para alguma medida de Borel μ, normalizada e invariante sob T.

Sejam $Y_{n_1+k} = \bigcup_{i=0}^{k}(T^{-i}(Y))$ e $Z_{n_1+k+1} = Y_{n_1+k+1} \setminus Y_{n_1+k}$ para todo inteiro $k \geq 0$. Sejam $y_i = \eta(Y_i)$ e $z_i = \eta(Z_i)$. Assim,

$$z_{n_1+1} \geq z_{n_1+2} \geq z_{n_1+3} \geq \ldots$$

e

$$y_m = y_n + \sum_{k=n+1}^{m} z_k \text{ para } m > n \geq n_1.$$

Como Y_k e Z_k são mensuráveis com respeito a partição $(r_k, \lambda^{(k)})$ para todo $k > n_1$ (ou seja, Y_k e Z_k são união de intervalos do tipo $X_i^{(k)}$), então ou $z_k = 0$ ou $z_k \geq \epsilon/k$, para todo $k \in A$, $k > n_1$.

Como $n_1 \in A_1 \subset A$, existem inteiros naturais $n_2, n_3, \ldots, n_l$ na qual satisfaz a definição (3.1). Supondo $z_{n_l} \neq 0$ chegamos em uma contradição:

$$1 \geq y_{n_l} > y_{n_l} - y_{n_1} = \sum_{k=n_1+1}^{n_l} z_k = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} z_k + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} z_k + \ldots + \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} z_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{l-1} \left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} z_k \right) \geq \sum_{j=1}^{l-1} \left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} z_{n_{j+1}} \right) = \sum_{j=1}^{l-1} [n_{j+1} - (n_j + 1 - 1)] z_{n_{j+1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{l-1} (n_{j+1} - n_j) z_{n_{j+1}} \geq \sum_{j=1}^{l-1} (n_{j+1} - n_j) \frac{\epsilon}{n_{j+1}} \tag{3.10}$$

Em (3.1), na definição de conjunto essencial, tem-se $n_{j+1} > 2n_j$, ou seja, $\frac{n_{j+1}}{2} > n_j$. Daí, em (3.10) segue:

$$1 \geq \sum_{j=1}^{l-1} (n_{j+1} - n_j) \frac{\epsilon}{n_{j+1}} \geq \sum_{j=1}^{l-1} \frac{n_{j+1}}{2} \frac{\epsilon}{n_{j+1}} = \frac{\epsilon(l-1)}{2} = \frac{\epsilon \left(\left[\frac{2}{\epsilon} \right] + 2 - 1 \right)}{2} > \frac{\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon} \right)}{2} = 1,$$

o que é um absurdo. Logo, $Y_n = Y_{n_l - 1}$ para todo $n \geq n_l$ e, portanto, da minimalidade de T temos $Y_{n_l-1} = [0, 1[$. Assim, de (3.9) e (3.1) obtemos:

$$\mu([0,1[) = \mu(Y_{n_l-1}) = \mu \left(\bigcup_{i=0}^{n_l - n_1 - 1} \left(T^{-i}(Y) \right) \right) \leq (n_l - n_1)\mu(Y) <$$

$$< (\lambda n_1 - n_1)\mu(Y) = (\lambda - 1) n_1 \mu(Y) \leq (\lambda - 1) n_1 \frac{1}{\lambda n_1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} < 1,$$

o que contradiz o fato de μ ser uma medida normalizada. Com isso, completamos a demonstração do Teorema.

$\square$

Nos próximos capítulos veremos algumas definições e alguns resultados que serão usados no Capítulo 6 para demonstrar que quase todo intercâmbio de intervalos satisfaz a propriedade P.

Capítulo 4

O Espaço Métrico dos Intercâmbio de Intervalos

Um espaço métrico dos intercâmbio de intervalos é um espaço de medida Ω (com uma medida finita μ) tal que cada ponto $\omega \in \Omega$ determina uma aplicação intercâmbio de intervalos

$$T_\omega : X_\omega \longrightarrow X_\omega; \qquad X_\omega = [0, \beta_\omega[; \qquad T_\omega = (\lambda_\omega, \tau_\omega);$$

$$\lambda_\omega = (\lambda_{\omega,1}, \lambda_{\omega,2}, \dots, \lambda_{\omega,r_\omega}) \in \Lambda_{r_\omega}; \qquad \sum_{i=1}^{r_\omega} \lambda_{\omega,i} = \beta_\omega;$$

e as funções r_ω, τ_ω, $\lambda_{i,\omega}$ (consequentemente β_ω) são mensuráveis em Ω (para $i > r_\omega$, tomemos $\lambda_{\omega,i} = 0$).

Para cada $\delta > 0$ e $n \geq 1$, denote por

$$U(n,\delta) = \left\{\omega \in \Omega : m\left(T_\omega^n\right) < \frac{\delta}{n}\right\} \quad \text{e} \quad u(n,\delta) = \mu(U(n,\delta)),$$

já que $U(n,\delta)$ é mensurável.

Definição 4.0.5 *Dizemos que Ω satisfaz a Propriedade Coletiva P se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e um conjunto essencial $A = A(\epsilon) \subset \mathbb{N}$ tal que $u(n,\delta) < \epsilon$, para todo $n \in A$.*

Lema 4.0.3 *Sejam (Ω, μ) um espaço de medida finita, com $\mu(\Omega) = 1$, $m, l \in \mathbb{N}$, $m, l \geq 2$, $\{U_1, U_2, \dots, U_{ml}\}$ uma família de ml conjuntos mensuráveis, $U_i \subset \Omega$, $i = 1, \dots, ml$, e $\alpha > 0$ uma constante real arbitrária na qual assumiremos que $\mu(U_i) \geq \alpha$, $\forall i = 1, \dots, ml$. Denote por U o conjunto de todos os $\omega \in \Omega$ para o qual a cardinalidade do conjunto $\{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq ml : \omega \in U_i\}$ é maior ou igual a l, ou seja, $U = \{\omega \in \Omega : (\sharp\{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq ml : \omega \in U_i\}) \geq l\}$. Então $\mu(U) \geq \dfrac{m\alpha - 1}{m - 1}$.*

Demonstração: Tome $\mathcal{X}_{U_i}$ como sendo a função característica em U_i, $i = 1, \ldots, ml$, $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{ml} \mathcal{X}_{U_i}$, $U' = \Omega \setminus U$ e $u = \mu(U)$. Seja $k = \min_{1 \le i \le ml} \mu(U_i)$. Então

$$\alpha ml \le kml = \sum_{i=1}^{ml} k \le \sum_{i=1}^{ml} \mu(U_i) = \sum_{i=1}^{ml} \int_\Omega \mathcal{X}_{U_i} d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^{ml} \mathcal{X}_{U_i} d\mu = \int_\Omega \mathcal{X} d\mu =$$

$$= \int_U \mathcal{X} d\mu + \int_{U'} \mathcal{X} d\mu \le ml\mu(U) + l\mu(U') = l(mu + 1 - u) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha ml \le l\left((m-1)u + 1\right) \Longrightarrow \alpha m - 1 \le (m-1)u \Longrightarrow u \ge \frac{\alpha m - 1}{m - 1}.$$

$\square$

Proposição 4.0.5 *Sejam (Ω, μ) um espaço de medida finito, $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto essencial, $\alpha > 0$ uma constante arbitrária de tal modo que para todo $n \in A$, um conjunto mensurável $U_n \subset \Omega$ é associado com $\mu(U_n) \ge \alpha$. Então existe um conjunto mensurável $V \subset \Omega$, $\mu(V) \ge \alpha$, tal que para todo $\omega \in V$ o conjunto $A_1(\omega) = \{n \in A : \omega \in U_n\}$ é essencial.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos assumir $\mu(\Omega) = 1$. Fixe $m, l \in \mathbb{N}$, $m, l \ge 2$. Desde que A é essencial, existe $\lambda = \lambda(m, l)$ tal que o sistema

$$\begin{cases} n_{i+1} > 2n_i \quad \text{para } 1 \le i \le ml - 1; \\ n_{ml} < \lambda n_1, \\ n_i \in A \quad \text{para } 1 \le i \le ml; \end{cases} \tag{4.1}$$

tem um número infinito de soluções $\overline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_{ml})$. Escolha uma sequência infinita de soluções $\overline{n}(j) = (n_1(j), n_2(j), \ldots, n_{ml}(j))$, $j \in \mathbb{N}$, tal que $n_{ml}(j) < n_1(j+1)$, $\forall j$. Então todos $n_i(j)$ são distintos e $1 \ge \mu(U_{n_i(j)}) \ge \alpha > 0$.

Pelo Lema (4.0.3), para todo $j \in \mathbb{N}$, existe um conjunto mensurável $U(j) \subset \Omega$, $\mu(U(j)) \ge \frac{m\alpha - 1}{m - 1}$, tal que para cada $\omega \in U(j)$, tem-se $(\sharp\{i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le ml : \omega \in U_{n_i(j)}\}) \ge l$.

Seja

$$U = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=i}^{\infty} U(j) \right),$$

ou seja, U é o conjunto dos $\omega \in \Omega$ na qual pertence a um número infinito de $U(j)$ e $\mu(U) \ge \frac{m\alpha - 1}{m - 1}$. De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$ tome $A_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} U(j)$. Assim, temos A_i mensurável, $A_i \supseteq A_{i+1}$ e $\mu(A_i) \ge \frac{m\alpha - 1}{m - 1}$. Então,

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} U(j)\right)\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty}\mu(A_i) \geq \lim_{i\to\infty}\frac{m\alpha-1}{m-1} = \frac{m\alpha-1}{m-1}.$$

Desta forma, para cada par de inteiros $m, l \geq 2$, obtemos um conjunto $U = U(m,l)$, com $\mu(U(m,l)) \geq \dfrac{m\alpha-1}{m-1}$.

Além disso, para todo $\omega \in U(m,l)$ e algum $\lambda = \lambda(m,l) > 1$, o sistema

$$\begin{cases} n_{i+1} > 2n_i & \text{para } \ 1 \leq i \leq l-1; \\ n_l < \lambda n_1, & \\ n_i \in A_1(\omega) & \text{para } \ 1 \leq i \leq l; \end{cases} \tag{4.2}$$

tem um número infinito de soluções $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$. De fato, $A_1(\omega) = \{n \in A : \omega \in U_n\}$. Se $\omega \in U(m,l) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} U(j)\right)$ então ω pertence a um número infinito de $U(j)$, digamos $\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U(j_i)$.

Mas para cada $U(j_i)$ que ω pertence, significa que $\sharp\{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq ml : \omega \in U_{n_k}(j_i)\} \geq l$, ou seja, para cada $j_i \in \mathbb{N}$, existem pelo menos l índices n_{k_α}, $1 \leq k_\alpha \leq ml$, tais que $\omega \in U_{n_{k_\alpha}}(j_i)$. Sendo assim, para cada j_i, $i \in \mathbb{N}$, tomemos os l primeiros índices k_α tais que $\omega \in U_{n_{k_\alpha}}(j_i)$ e reunamos todos esses índices em um conjunto que chamaremos de $B(m,l)$, ou seja,

$$B(m,l) = \{n_{k_1}(j_1), \ldots, n_{k_l}(j_1), n_{k_1}(j_2), \ldots, n_{k_l}(j_2), \ldots\}.$$

Identifiquemos $n_{k_a}(j_b) = \alpha_a^b$. Sendo assim, temos $B(m,l) = \{\alpha_1^1, \ldots, \alpha_l^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_l^2, \ldots\} \subset A_1(\omega)$, com $\alpha_{i+1}^j > 2\alpha_i^j$, para $1 \leq i \leq l-1$, e $\alpha_l^j < \alpha_1^{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, para cada $m, l \geq 2$ e $j \in \mathbb{N}$, existe $\lambda = \lambda(m,l)$ (definido em (4.1)) tal que

$$\begin{cases} \alpha_{i+1}^j > 2\alpha_i^j, & \text{para } \ 1 \leq i \leq l-1; \\ \alpha_l^{j+k} < \lambda\alpha_1^j, & \text{para algum } \ k \geq 0. \end{cases}$$

Como $B(m,l) \subset A_1(\omega)$, segue que (4.2) possui um número infinito de soluções.

Agora, para cada $m \geq 2$ seja $V(m) = \bigcap_{i=2}^{\infty}\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} U(m,j)\right)$. Então, $\mu(V(m)) \geq \dfrac{m\alpha-1}{m-1}$ e, para cada $\omega \in V(m)$ e $l \geq 2$, $\exists\lambda = \lambda(m,l)$ tal que o sistema (4.2) possua infinitas soluções, ou seja, $A_1(\omega)$ é essencial, $\forall\omega \in V(m)$ e $\forall m \geq 2$.

Sendo assim, o conjunto que procurávamos é $V = \bigcup_{m=2}^{\infty} V(m)$, já que $V \subset \Omega$ é mensurável, $A_1(\omega)$ é essencial para todo $\omega \in V$ e, ainda,

$$\mu(V) \geq \mu(V(m)) \geq \frac{m\alpha - 1}{m-1}, \text{ para todo } m \geq 2.$$

Daí, como $0 < \alpha \leq 1$, segue que a sequência $\left(\dfrac{m\alpha - 1}{m-1}\right)_{m \geq 2}$ é não decrescente e, portanto, temos

$$\mu(V) \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{m\alpha - 1}{m-1} \geq \alpha.$$

□

Teorema 4.0.3 *Seja Ω o espaço métrico dos intercâmbio de intervalos com uma medida finita μ. Se Ω satisfaz a propriedade coletiva P então para quase todo (com respeito a μ) $\omega \in \Omega$, T_ω satisfaz a Propriedade P.*

Demonstração: Desde que Ω satisfaz a Propriedade Coletiva P, temos que para todo $\epsilon > 0$ podemos achar $\delta > 0$ e um conjunto essencial $A \subset \mathbb{N}$ tal que $u(n, \delta) < \epsilon$, para todo $n \in A$.

Tome $\alpha = \mu(\Omega) - \epsilon$ e $U_n = \Omega \setminus U(n, \delta)$. Então todas as condições da Proposição (4.0.5) são satisfeitas e portanto existe um conjunto mensurável U, com $\mu(U) \geq \alpha$ tal que o conjunto $A_1(\omega)$ é essencial para todo $\omega \in U$.

Seja $\omega \in U$. Então, qualquer que seja $n \in A_1(\omega)$ temos que $\omega \notin U(n, \delta)$, já que $A_1(\omega) = \{n \in \mathbb{N} : \omega \in U_n\}$ e $U_n = \Omega \setminus U(n, \delta)$. Consequentemente, para qualquer que seja $n \in A_1(\omega)$, $m(T_\omega^n) \geq \dfrac{\delta}{n}$ e, portanto, T_ω satisfaz a Propriedade P.

Seja $B = \{\omega \in \Omega : T_\omega \text{ não satisfaz a Propriedade } P\}$. Assim, temos $B \subset \Omega \setminus U$ e, portanto, $\mu(B) \leq \mu(\Omega) - \mu(U) \leq \epsilon$ (já que $\mu(U) \geq \alpha = \mu(\Omega) - \epsilon$).

Como $\epsilon > 0$ é dado arbitrariamente, segue que $\mu(B) = 0$, concluindo, assim, a demonstração.

□

Teorema 4.0.4 *Seja Ω um espaço de medida dos intercâmbios de intervalos, com uma medida finita μ. Se Ω satisfaz a Propriedade Coletiva P e se para quase todo (com respeito à μ) $\omega \in \Omega$ tem-se T_ω minimal, então para quase todo $\omega \in \Omega$ tem-se que T_ω é unicamente ergódica.*

Demonstração: Segue direto do Teorema (3.0.2) e do Teorema (4.0.3).

□

Capítulo 5

Propriedades de Grafos

Definição 5.0.6 *Seja* V *um conjunto finito e* $A \subseteq V \times V = V^2 = \{(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$. *Então chamaremos o par* (V, A) *de grafo direto, onde* V *denotará o conjunto de vértices e* A *o conjunto de setas.*

Dado $v \in V$, sejam

$$(v, *) = \{u \in V : (v, u) \in A\} \qquad \text{e} \qquad (*, v) = \{u \in V : (u, v) \in A\}.$$

Definição 5.0.7 *Dado um grafo direto* (V, A), *seja a função real, não negativa,* $f : V \cup A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$\sum_{v \in V} f(v) = 1 \qquad e \qquad f(v) = \sum_{u \in (v,*)} f(v, u) = \sum_{u \in (*,v)} f(u, v),\ \forall v \in V.$$

Chamaremos f *de função peso do grafo* (V, A).

Definição 5.0.8 *Sejam* (V, A) *um grafo direto e* f *uma função peso de* (V, A). *Chamaremos de suporte da* f *o sub-grafo* $(V', A') \subseteq (V, A)$, *onde* $V' = \{v \in V : f(v) > 0\}$ *e* $A' = \{a \in A : f(a) > 0\}$.

Definição 5.0.9 *Seja* (V, A) *um grafo direto. Uma sequencia finita* $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *de* $k \geq 1$ *elementos diferentes em* V *forma um ciclo em* (V, A) *se* $(v_k, v_1) \in A$ *e se* $(v_i, v_{i+1}) \in A$ *para todo* $1 \leq i \leq k - 1$.

Observação 5.0.1 *Dado um ciclo* $\overline{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, *definimos a função peso* $g = f_{\overline{v}}$ *da seguinte forma:*

$$\begin{cases} g(v_i) = \dfrac{1}{k}, \quad \text{se} \quad 1 \leq i \leq k; \\ g(v_i, v_{i+1}) = \dfrac{1}{k}, \quad \text{se} \quad 1 \leq i \leq k-1; \\ g \equiv 0 \quad \text{nos} \quad \text{outros} \quad \text{vertices} \quad \text{e} \quad \text{nas} \quad \text{outras} \quad \text{setas} \quad \text{do} \quad \text{grafo} \quad (\mathrm{V}, \mathrm{A}). \end{cases}$$

Não distinguiremos dois ciclos $\overline{u}$ e $\overline{v}$ se $f_{\overline{u}} = f_{\overline{v}}$. Então cada um desses ciclos é uma permutação cíclica do outro.

Proposição 5.0.6 *Sejam (V, A) um grafo direto, $C(V, A)$ o conjunto de todos os ciclos de (V, A) e $F(V, A)$ o conjunto de todas as funções peso de (V, A). Então $F(V, A)$ é compacto e convexo e, o conjunto $f(V, A) = \{f_{\overline{v}} : \overline{v} \in C(V, A)\}$ é exatamente o conjunto de todos os pontos extremos de $F(V, A)$. Em particular $F(V, A) \neq \emptyset \Longleftrightarrow C(V, A) \neq \emptyset$.*

Definição 5.0.10 *Seja (V, A) um grafo direto. Dizemos que (V, A) satisfaz a propriedade de Poincaré se cada um de seus vertices pertencer a um ciclo.*
Se além disso cada uma de suas setas também pertencer à algum ciclo (ou seja, $\forall (v_1, v_2) \in A$, $v_1 \neq v_2$, $\exists$ um ciclo $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $k \geq 2$), então dizemos que (V, A) satisfaz a propriedade forte de Poincaré.

Proposição 5.0.7 *Um grafo direto (V, A) satisfaz a propriedade de Poincaré (respectivamente propriedade forte de Poincaré) se, e somente se, existe $f \in F(V, A)$ tal que para o suporte (V', A') de f temos $V = V'$ (respectivamente $A = A'$).*

Definição 5.0.11 *Seja (V, A) um grafo direto. Defina os seguintes conjuntos:*

$$V_1 = \{v \in V : \sharp(v, *) \geq 2\}, \qquad V_2 = \{v \in V : \sharp(*, v) \geq 2\},$$

$$V_3 = \{v \in V : (v, *) \cap V_2 \neq \emptyset\} \qquad e \qquad V_4 = V \setminus (V_1 \cup V_3).$$

Dizemos que um ciclo $\overline{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um ciclo distinto se $v_i \in V_4$, $\forall i = 1, \ldots, k$ (ou, equivalentemente, se $\sharp(v_i, *) = \sharp(*, v_i) = 1$, $\forall i = 1, \ldots, k$).

Teorema 5.0.5 *Seja f uma função peso no grafo direto (V, A). Suponhamos que o suporte de f coincide com (V, A) e que (V, A) não possui ciclos distintos. Então $\sharp\{f(v) : v \in V\} \leq 3(a-b)$, onde $a = \sharp A$ e $b = \sharp V$.*

Demonstração: Sejam V_1, V_2, V_3 e V_4, como na Definição (5.0.11).
Para todo $v \in V \setminus V_1$, defina v^* como sendo o único elemento de $(v, *)$.
Para cada $v \in V_4$, considere a sequencia $\{v_i\}$, onde $v_1 = v$ e $v_{i+1} = v_i^*$ para $i \geq 1$. Essa sequencia não é necessariamente infinita, desde que algum v_i pode pertencer a V_1.

Seja k o primeiro inteiro tal que $v_k \notin V_4$, $k \geq 2$. Tal k existe pois caso contrário a sequencia $\{v_i\}$ formaria um ciclo distinto. De fato, seja $v \in V_4$. Então, tome $v_1 = v$, $v_2 = v_1^*$, $v_3 = v_2^*$, $v_4 = v_3^*$, e assim sucessivamente. Disso, temos $(v_i, v_{i+1}) \in A, \forall i \geq 1$.
Tome a sequencia $\{v_i\}_i$ e suponhamos $\{v_i\}$ finita, ou seja, $\{v_i\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Como $\{v_i\}$ é finita, segue que $v_k \in V_1$, pois caso contrário existiria o elemento v_{k+1}. Mas como $v_k \in V_1$, segue que $v_k \notin V_4$.
Agora suponhamos $\{v_i\}$ infinita e suponhamos por absurdo que $v_i \in V_4$, $\forall i \geq 1$. Como (V, A) é grafo direto, segue que $\sharp V < \infty$. Assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \alpha < \beta$, tal que $v_\alpha = v_\beta$. Seja β o menor natural tal que isso é satisfeito. Daí, temos

$$(v_j, v_{j+1}) \in A, \quad \forall j = \alpha, \ldots, \beta \Longrightarrow \begin{cases} (v_j, v_{j+1}) \in A, & \forall j = \alpha + 1, \ldots, \beta \\ (v_\alpha, v_{\alpha+1}) = (v_\beta, v_{\alpha+1}) \in A \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (v_{\alpha+1}), \ldots, \beta \text{ é um ciclo distinto. Absurdo!}$$

Portanto, existe o primeiro k tal que $v_k \notin V_4$.

Como f é a função peso do grafo direto (V, A), temos

$$f(v) = f(v_1) = \sum_{u \in (v_1, *)} f(v_1, u) = f(v_1, v_1^*) = f(v_1, v_2) \text{ e}$$

$$f(v_2) = \sum_{u \in (v_2, *)} f(v_2, u) = f(v_2, v_2^*) = f(v_2, v_3) = \sum_{u \in (*, v_2)} f(u, v_2) = f(v_1, v_2) = f(v_1).$$

Portanto, $f(v_1) = f(v_2) = f(v_2, v_3)$.

Continuando dessa maneira, chegaremos que

$$f_(v_1) = f(v_2) = \ldots = f(v_{k-1})$$

e também

$$f(v_k) = \sum_{u \in (v_k, *)} f(v_k, u) = \sum_{(*, v_k)} f(u, v_k) = f(v_{k-1}, v_k) = f(v_{k-1}).$$

Portanto, $f(v) = f(v_i) = f(v_k)$, $1 \leq i \leq k$. Assim, provamos que para cada $v \in V_4$, existe $u \in V \setminus V_4 = V_1 \cup V_3$ tal que $f(v) = f(u)$.

Logo, $\sharp\{f(v) : v \in V\} = \sharp\{f(v) : v \in V_1 \cup V_3\} \leq \sharp(V_1 \cup V_3)$. Com isso, basta provarmos que $\sharp(V_1 \cup V_3) \leq 3(a-b)$.

Entretanto, temos

$$\sharp V_1 \leq \sum_{v \in V_1} (\sharp(v,*) - 1) \leq \sum_{v \in V_1} \sharp(v,*) - b \leq \sum_{v \in V} \sharp(v,*) - b = a - b.$$

Analogamente, temos $\sharp V_2 \leq a - b$. Além disso,

$$\sharp V_3 \leq \sum_{v \in V_2} \sharp(*,v) = \sum_{v \in V_2} (\sharp(*,v) - 1) + \sharp V_2 \leq (a-b) + (a-b) = 2(a-b).$$

Finalmente,

$$\sharp(V_1 \cup V_3) \leq \sharp V_1 + \sharp V_3 \leq (a-b) + 2(a-b) = 3(a-b).$$

Portanto, $\sharp\{f(v) : v \in V\} \leq 3(a-b)$.

$\square$

Capítulo 6

Unicidade Ergódica de Quase Todo Intercâmbio de Intervalos

Sejam $X = [0,1[$ e $T = (\lambda, \tau)$ um intercâmbio de intervalos $T : X \longrightarrow X$, na qual $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \Lambda_r$ e $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

Para todo $n \geq 1$, sejam $T^n = (\lambda^{(n)}, \tau^{(n)})$, $\lambda^{(n)} \in \Lambda_{r(n)}$, $\lambda_i^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$, $X_i^{(n)}$ $(1 \leq i \leq r(n))$, como foi visto anteriormente.

Lema 6.0.4 *O número $r(n)$ de intervalos $X_i^{(n)}$ é menor ou igual que $n(r-1)+1 \leq rn$, $\forall n \geq 1$.*

Demonstração: Em vista das possíveis descontinuidades de T^n serem dadas por (3.2), ou seja, dadas por

$$T^{-k}(\beta_j), \quad \text{onde} \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad \text{e} \quad 1 \leq i \leq r-1,$$

temos, então, que T^n possui no máximo $n(r-1)$ descontinuidades e, portanto, existem no máximo $n(r-1)+1$ intervalos $X_i^{(n)}$, ou seja, $r(n) \leq n(r-1)+1$.

□

Teorema 6.0.6 *O número de intervalos $X_i^{(n)}$ de diferentes comprimentos é menor ou igual que $3(r-1)$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Fixe $n \geq 1$ e defina o grafo direto como segue. Sejam $V = \{1, 2, \ldots, r(n)\}$ (assim temos uma correspondência injetiva entre V e os subintervalos $X_i^{(n)}$) e $A \subset V^2$, onde

$(i,j) \in A$ se, e somente se, $T(X_i^{(n)}) \cap X_j^{(n)} \neq \emptyset$. Tome $f : V \cup A \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(i) = \eta(X_i^{(n)})$, $\forall i \in V$, e $f(i,j) = \eta(T(X_i^{(n)}) \cap X_j^{(n)})$, $\forall (i,j) \in A$, onde η é a medida de Lebesgue.

Assim, temos que f é uma função peso no grafo direto (V, A) e seu suporte é o próprio grafo (V, A).

Facilmente, verificamos que $\forall i \in V$, tem-se

$$\sharp(i,*) = \sharp \left\{ j; 1 \leq j \leq r-1 : T^{-n}(\beta_j) \in \left] \beta_{i-1}^{(n)}, \beta_i^{(n)} \right[\right\} + 1.$$

De fato, seja $B(i) = \left\{ j; 1 \leq j \leq r-1 : T^{-n}(\beta_j) \in \left] \beta_{i-1}^{(n)}, \beta_i^{(n)} \right[\right\}$, $i \in V$. Daí,

$$\sharp B(i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{existe 1 subintervalo interceptando } X_i^{(n)},$$

$$\sharp B(i) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{existem 2 subintervalos interceptando } X_i^{(n)},$$

$$\sharp B(i) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \text{existem 3 subintervalos interceptando } X_i^{(n)},$$

e assim sucessivamente. Daí,

$$\sharp A - \sharp V = \sum_{i \in V} \sharp(i,*) - \sum_{i \in V} 1 = \sum_{i \in V} (\sharp(i,*) - 1) = \sum_{i \in V} \sharp B(i) \leq r - 1.$$

Agora, se (V, A) não possui ciclos distintos, podemos aplicar o Teorema (5.0.5) para completar a demonstração.

Se $T = (\lambda, \tau)$ é aperiódica, ou seja, todas as órbitas de T são infinitas, então (V, A) não possui ciclos distintos. Portanto, se λ é irracional e τ é irredutível, pelo Teorema (2.2.1) segue o resultado.

Isso também é válido se τ for redutível e λ continuar irracional.

Para ver isso, arrange o conjunto

$$\{s, 1 \leq s \leq r : \tau(\{1, \ldots, s\}) = \{1, \ldots, s\}\}$$

na sequencia crescente $0 = s_0 < 1 \leq s_1 < \ldots < s_k = r$, $k \geq 2$. Então X se decompõe em k subintervalos T-invariante Y_j, $1 \leq j \leq k$.

Se $s_j - s_{j-1} = 1$ então T restrito à Y_j é a aplicação identidade. Neste caso temos que Y_j é algum $X_i^{(n)}$ e seu comprimento sempre é o mesmo. Portanto o número de subintervalos em Y_j é sempre 1 para todo n.

Se $s_j - s_{j-1} \geq 2$ então T restrito à Y_j é um intercâmbio de intervalos de $s_j - s_{j-1}$ intervalos. Neste caso, usando raciocínio análogo ao que foi feito anteriormente, temos que o número de intervalos com comprimentos diferentes em Y_j é menor ou igual à $3(s_j - s_{j-1} - 1)$.

No pior das hipóteses temos que $s_j - s_{j-1} \geq 2$, para todo $j = 1, \ldots, k$, pois caso contrário não muda seu comprimento para qualquer que seja o n-ésimo iterado de T. Suponhamos então que $s_j - s_{j-1} \geq 2$ para todo $j = 1, \ldots, k$.

Assim, no pior das hipóteses temos que o número de intervalos $X_i^{(n)}$ de comprimentos diferentes é menor ou igual que $\sum_{j=1}^{k} 3(s_j - s_{j-1} - 1) = 3(r-k) \leq 3(r-2) \leq 3(r-1)$.

A tese do Teorema é válida para todos os $\lambda' s$, tanto racional quanto irracional, já que o conjunto dos $\lambda' s$ que satisfaz tal tese é um conjunto fechado.

□

Lema 6.0.5 *Sejam K um conjunto convexo e compacto num espaço linear E de dimensão finita, m a dimensão de K e assuma que ϕ é um funcional linear real em E, na qual não é constante em K. Então, para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, temos*

$$V_m\left(K \cap \phi^{-1}(I)\right) \leq \frac{\mid I \mid m}{\mid \phi(K) \mid} V_m(K),$$

onde $\mid I \mid$, $\mid \phi(K) \mid$ são os comprimentos de I e $\phi(K)$, respectivamente, e $V_m(\cdot)$ é um m-volume (gerado por alguma métrica quadrática definida positiva em E).

Demonstração: Fixe uma métrica quadrática definida positivamente em E na qual todos os volumes na demonstração façam sentido.

Como K é compacto, temos que $\phi(K)$ é um intervalo fechado $[M_1, M_2]$, $M_1 < M_2$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, tome $U(t) = \{u \in E : \phi(u) = t\} = \phi^{-1}(t)$ e $K(t) = U(t) \cap K$.

Desde que K não é paralelo a qualquer hiperplano $U(t)$, segue que a dimensão de $K(t) = \phi^{-1}(t) \cap K$ é menor ou igual que $(m-1)$.

Denote por $f(t) = V_{m-1}(K(t))$ o $(m-1)$-volume de $K(t)$ e seja $S = \max f(t)$.

O máximo é obtido em algum $t \in \phi(K)$ já que f é contínua no intervalo $\phi(K) = [M_1, M_2]$ e não está definido fora disso.

Existe $c > 0$ tal que para qualquer que seja o intervalo I, temos

$$V_m(K \cap \phi^{-1}(I)) = c \int_I f(t)dt \leq cS \mid I \mid$$

(de fato, $c = \| \, grad(\phi) \, \|^{-1} \sec \alpha$, onde $grad(\phi) E$ é o gradiente de ϕ e α é o ângulo agudo entre $grad(\phi)$ e o m-plano contendo K).

Também, é claro que

$$V_m(K) \geq \frac{c}{m} S(M_2 - M_1) = \frac{c}{m} S \mid \phi(K) \mid .$$

Com isso segue a desigualdade da tese.

□

Corolário 6.0.2 *Sejam E, K, m como foi dado no Lema anterior. Assuma que ϕ é um funcional linear real em E na qual é não negativo em K e tal que $\alpha = \sup_{u \in K} \phi(u) > 0$. Então para todo $\beta > 0$, temos*

$$V_m(K \cap \phi^{-1}[0, \beta]) \leq \frac{m\beta}{\alpha} V_m(K).$$

Demonstração: Como K é compacto, seja γ tal que

$$\phi(K) = [\gamma, \alpha], \qquad 0 \leq \gamma \leq \alpha.$$

Do Lema anterior, temos

$$V_m(K \cap \phi^{-1}([0, \beta])) \leq \frac{\beta m}{\alpha - \gamma} V_m(K).$$

Daí, segue os três seguintes casos:

(i) se $\beta \geq \alpha$ então

$$V_m(K \cap \phi^{-1}[0, \beta]) = V_m(K) \leq \frac{\beta}{\alpha} m V_m(K);$$

(ii) se $0 < \beta < \gamma$ então

$$V_m(K \cap \phi^{-1}[0, \beta]) = V_m(\emptyset) \leq \frac{\beta}{\alpha} m V_m(K);$$

(iii) se $0 \leq \gamma \leq \beta < \alpha$ então

$$V_m(K \cap \phi^{-1}[0, \beta]) = V_m(K \cap \phi^{-1}[\gamma, \beta]) \leq \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} m V_m(K) \leq \frac{\beta}{\alpha} m V_m(K).$$

De fato, se $\beta = \gamma$ então $\dfrac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = 0 \leq \dfrac{\beta}{\alpha}$. Agora, se $\beta > \gamma$, como $\gamma \geq 0$ temos

$$\alpha > \beta \implies \gamma\alpha \geq \gamma\beta \iff -\gamma\alpha \leq -\gamma\beta \iff \beta\alpha - \gamma\alpha \leq \beta\alpha - \gamma\beta \iff$$

$$\iff (\beta - \gamma)\alpha \leq \beta(\alpha - \gamma) \iff \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

concluindo assim, a demonstração do ultimo caso.

□

Teorema 6.0.7 *Para todo $\tau \in \mathrm{G}_r$ e para quase todo (em relação à μ) $\lambda \in \Lambda_r$, o intercâmbio de intervalos (λ, τ) possui a Propriedade P.*

Para provarmos o Teorema (6.0.7), basta provarmos que vale para quase todo $\lambda \in \Lambda_{r,1}$. De fato, para cada $\lambda \in \Lambda_r$, seja $\alpha = \alpha(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$. Daí, para cada $\lambda \in \Lambda_r$, temos que existe $\lambda' \in \Lambda_{r,1}$, onde cada $\lambda'_i = \dfrac{\lambda_i}{\alpha}$, $i = 1, \ldots, r$, e, sendo assim, $\lambda = \alpha\lambda'$. Assim, temos a seguinte afirmação:

Afirmação: Seja $\tau \in \mathrm{G}_r$. Então $T = (\lambda, \tau)$ satisfaz P se, e somente se, $T' = (\lambda', \tau)$ satisfaz P.
Demonstração: Se $T = (\lambda, \tau)$ satisfaz P, então existe $\epsilon > 0$ tal que o conjunto

$$A(T, \epsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : m(T^n) \geq \frac{\epsilon}{n} \right\}$$

é essencial. Disso, tomando $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{\alpha}$, segue que

$$A(T', \epsilon') = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : m((T')^n) \geq \frac{\epsilon'}{n} \right\}$$

é também essencial. A recíproca segue de forma análoga.

□

Fixe $\tau \in \mathrm{G}_r$ e denote por Ω o conjunto $\{(\lambda, \tau) : \lambda \in \Lambda_{r,1}\}$ dos intercâmbios de intervalos. Assim, podemos identificar Ω com $\Lambda_{r,1}$, de modo que Ω seja um espaço de medida (com respeito à medida μ).

Antes de demonstrarmos tal Teorema, vejamos o seguinte resultado que será essencial para sua demonstração.

Teorema 6.0.8 *Para cada inteiro $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$ temos*

$$\mu\left(\left\{ \omega \in \Omega : m(T_\omega^n) < \frac{\epsilon}{n} \right\}\right) = \mu\left(U(n, \epsilon)\right) = u(n, \epsilon) < 3r(r-1)^2\epsilon.$$

Tal estimativa independe de n. Em particular,

$$\lim_{\epsilon \to 0} u(n, \epsilon) = 0, \quad \textit{uniformemente em } n.$$

Demonstração: Fixe $n \geq 1$ e $\tau \in \mathrm{G}_r$.
Dado $\lambda \in \Lambda_{r,1}$, o intercâmbio de intervalos $T_\lambda = (\lambda, \tau)$ é determinado.
Sejam

$$T_\lambda^n = (\lambda^{(n)}(\lambda), \tau^{(n)}(\lambda)), \quad \lambda^{(n)}(\lambda) \in \Lambda_{r(n,\lambda)}, \quad \lambda_i^{(n)}(\lambda), \quad \beta_i^{(n)}(\lambda), \quad X_i^{(n)}(\lambda),$$

para $i = 1, \ldots, r(n, \lambda)$, e defina o grafo direto (V_λ, A_λ), como foi feito na demonstração do Teorema (6.0.6), ou seja,

$$V_\lambda = \{1, 2, \ldots, r(n)\} \quad \text{e} \quad A_\lambda = \Big\{(i, j) \in V^2 : T_\lambda(X_i^{(n)}(\lambda)) \cap X_j^{(n)}(\lambda) \neq \emptyset\Big\}.$$

Diremos que dois pontos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{r,1}$ são semelhantes, e denotaremos por $\lambda_1 \sim \lambda_2$, se $(V_{\lambda_1}, A_{\lambda_1}) = (V_{\lambda_2}, A_{\lambda_2})$. Isso pode acontecer e suas funções peso serem diferentes. Em particular, temos $r(n, \lambda_1) = r(n, \lambda_2)$.

Observe que dado $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{r,1}$, temos $\lambda_1 \sim \lambda_2$ se, e somente se, existe um automorfismo ϕ de $[0, 1[$ tal que

$$\phi(\beta_{i,k}^{(n+1)}(\lambda_1)) = \beta_{i,k}^{(n+1)}(\lambda_2) \quad \text{para} \quad 0 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq i \leq r - 1,$$

onde

$$\beta_{i,k}^{(n+1)}(\lambda) = T^{-k}(\beta_i^{(n+1)}(\lambda)) \in [0, 1[$$

são os pontos que determinam a partição de $[0, 1[$ correspondente à T_λ^{n+1}.

Como consequência dessa observação, se $\lambda_1 \sim \lambda_2$ então $r(m, \lambda_1) = r(m, \lambda_2)$ para $m = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Dado $\lambda_0 \in \Lambda_{r,1}$, o grafo $(V_{\lambda_0}, A_{\lambda_0})$ e a função peso f_{λ_0} são determinados. Dado qualquer outra função peso f do mesmo grafo, na qual o suporte de f é o grafo todo, existe um único $\lambda = \lambda(f) \in \Lambda_{r,1}$ tal que $\lambda \sim \lambda_0$ e $f = f_\lambda$. Assim, isso estabelece uma correspondência injetora entre o conjunto $S_{\lambda_0} = \{\lambda \in \Lambda_{r,1} : \lambda \sim \lambda_0\}$ e o conjunto F_{λ_0} de todas as funções peso em $(V_{\lambda_0}, A_{\lambda_0})$ cujo o suporte é o grafo todo. Em particular, as dimensões dos conjuntos convexos S_{λ_0} e F_{λ_0} são iguais.

Se essas dimensões forem $(r - 1)$ (o máximo possível) então diremos que λ_0 é genérico.

Um ponto $\lambda_0 \in \Lambda_{r,1}$ é genérico se, e somente se, $\lambda \sim \lambda_0$ para todo λ na vizinhança de λ_0. É fácil de verificar que cada $\lambda \in \Lambda_{r,1}$, com λ irracional, é genérico. Portanto quase todo $\lambda \in \Lambda_{r,1}$ é genérico.

Seja $\Lambda_{r,1}$ o conjunto dos pontos genéricos de $\Lambda_{r,1}$. A relação de equivalência $\sim$ determina uma partição finita de $\Lambda'_{r,1}$:

$$\Lambda'_{r,1} = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i, \qquad \Delta_i = S_{\lambda_i},$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ é um sistema maximal em $\Lambda'_{r,1}$ tal que $\lambda_i \not\sim \lambda_j$ para $i \neq j$.

Para cada $\lambda \in \Lambda_{r,1}$ sejam

$$\delta(\lambda) = \min_{u \in V_\lambda} f_\lambda(u) \quad \text{e} \quad U(n, \epsilon) = \left\{ \lambda \in \Lambda_{r,1} : \delta(\lambda) < \frac{\epsilon}{n} \right\}.$$

Defina $\Delta'_i = \Delta_i \cap U(n, \epsilon)$, $1 \leq i \leq m$. Provaremos que

$$\mu(\Delta'_i) < 3r(r-1)^2 \epsilon \mu(\Delta_i) \tag{6.1}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

Fixe i e seja $(V, A) = (V_{\lambda_i}, A_{\lambda_i})$. Então para todo $\lambda \in \Delta_i$ temos $(V_\lambda, A_\lambda) = (V, A)$.

O conjunto Δ_i é naturalmente identificado com o conjunto F_{λ_i} de todas as funções peso f em (V, A) na qual o suporte coincide com o próprio grafo (V, A).

Seja $r(n) = \sharp V$, já que $V = \{1, 2, \ldots, r(n)\}$. Então para cada $k \in V$, $f_\lambda(k)$ é um funcional linear em Δ_i.

Observe que

$$\sup_{f \in F_\lambda} f(k) = \sup_{\lambda \in \Delta_i} f_\lambda(k) \geq \frac{1}{r(n)}. \tag{6.2}$$

De fato, (V, A) possui a Propriedade de Poincaré ou, mais que isso, (V, A) possui a Propriedade Forte de Poincaré, em vista da Proposição (5.0.7). Portanto, existe um ciclo $\{k = k_1, k_2, \ldots, k_s\}$ na qual contem k e, da Observação (5.0.1), existe uma função peso g tal que $g(k) = \dfrac{1}{s} \geq \dfrac{1}{r(n)}$.

Desde que g pode ser aproximado por $(f_{\lambda_i} p + g(1-p)) \in F_{\lambda_i}$, $0 < p < 1$, a desigualdade (6.2) fica clara.

Para qualquer que seja λ_0 fixo, pelo Teorema (6.0.6), temos

$$\sharp\{f_{\lambda_0}(k) : k \in V\} \leq 3(r-1).$$

Portanto, o conjunto dos funcionais linear $\{f_\lambda(k) : k \in V\}$ em Δ_i possui no máximo $3(r-1)$ elementos distintos (suponhamos $g_1, g_2, \ldots, g_t$, onde $t \leq 3(r-1)$).

De (6.2), temos

$$\sup_{\lambda \in \Delta_i} g_j(k) \geq \frac{1}{r(n)},$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, t$. Pelo Corolário (6.0.2), tomando $\beta = \dfrac{\epsilon}{n}$ e $\alpha = \dfrac{1}{r(n)}$, temos

$$\mu\left(\left\{\lambda \in \Delta_i : g_j(\lambda) < \frac{\epsilon}{n}\right\}\right) \leq \frac{\epsilon}{n} \cdot \frac{dim(\Delta_i)}{\sup\limits_{\lambda \in \Delta_i} g_j(\lambda)} \leq \frac{\epsilon(r-1)r(n)}{n} \cdot \mu(\Delta_i) \leq$$
$$\leq \epsilon(r-1)r \cdot \mu(\Delta_i),$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, k$, desde que $r(n) \leq rn$, pelo Lema (6.0.4). Com isso, temos

$$\mu(\Delta_i') = \mu\left(\left\{\lambda \in \Delta_i : \min_{1 \leq j \leq t} g_j(\lambda) < \frac{\epsilon}{n}\right\}\right) \leq t\epsilon(r-1)r\mu(\Delta_i) \leq$$
$$\leq 3r(r-1)^2\epsilon\mu(\Delta_i),$$

completando assim a demonstração de (6.1).

Daí, temos

$$u(n,\epsilon) = \mu(U(n,\epsilon)) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\Delta_i') \leq 3r(r-1)^2\epsilon \sum_{i=1}^{m} \mu(\Delta_i) =$$
$$= 3\epsilon r(r-1)^2\mu(\Lambda_{r,1}') = 3r(r-1)^2\epsilon,$$

completando então, a demonstração do Teorema.

$\square$

Demonstração do Teorema (6.0.7): Do Teorema (6.0.8) segue que para todo $\epsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \dfrac{\epsilon}{3r(r-1)^2}$ e daí, teremos

$$u(n,\delta) < 3r(r-1)^2\delta = \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, por definição, Ω satisfaz a Propriedade Coletiva P e, portanto, pelo Teorema (4.0.3), para quase todo $\omega \in \Omega$, T_ω satisfaz a Propriedade P. Como $\tau \in \mathrm{G}_r$ é genérico, segue que para todo $\tau \in \mathrm{G}_r$ e para quase todo $\lambda \in \Lambda_{r,1}$, (λ, τ) satisfaz a Propriedade P, como queríamos demonstrar.

$\square$

Com isso, dos Teoremas (3.0.2) e (6.0.7), segue o seguinte resultado.

Teorema 6.0.9 *Se $\tau \in \mathrm{G}_r$ é irredutível, então para quase todo $\lambda \in \Lambda_r$, o intercâmbio de intervalos (λ, τ) é unicamente ergódico.*

Referências Bibliográficas

[1] M. BOSHERNITZAN. *A Condition for Minimal Interval Exchange Maps to be Uniquely Ergodic.* Duke Mathematical Journal, Vol. 52, No. 3, 723-752, 1985.

[2] G.V.S. COELHO *Unicidade ergódica das permutações de intervalos.* Dissertação de Mestrado, IM/UFRJ, 2000.

[3] I. P. CORNFELD, S. V. FANIN, YA. G. SINAI. *Ergodic Theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[4] M. KEANE. *Interval exchange transformation.* Math. Zeit., 141:25-31, 1975.

[5] M. KEANE. *Non-ergodic interval exchange transformation.* Israel J. Math. 2:188-196, 1977.

[6] S.P. KERCKHOFF *Simplicial systems for interval exchange maps and measured foliations.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 5:257-271, 1985.

[7] H. KEYNES, D. NEWTON. *A minimal, non-uniquely ergodic interval exchange transformation.* Math. Zeit., 148:101-105, 1976.

[8] R. MAÑÉ. *Introdução à teoria ergódica.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1983.

[9] H. MASUR. *Interval exchange transformations and measure foliations.* Ann. of Math., 115:168-200, 1982.

[10] K. OLIVEIRA *Um Primeiro Curso sobre teoria ergódica com aplicações.* Publicações do 25^0 CBM, Rio de Janeiro, 2005.

[11] W. A. VEECH. *Finite group extensions of irrational rotations.* Israel J. Math., 21:240-259, 1975.

[12] W. A. VEECH. *Gauss measure for transformations on the space of interval exchange maps.* Ann. of Math., 115:201-242, 1982.

[13] W. A. VEECH. *Boshernitzan's criterion for unique ergodicity of an interval exchange transformation.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 7:149-153, 1987.

[14] M. VIANA. *Ergodic theory and interval exchange maps.* Mat. Complut., 1:7-100, 2006.