



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Presidente Prudente

GUILHERME HENRIQUE HISPAGNOL BICHO

**APLICAÇÃO DE CÓPULAS BIVARIADAS EM ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA
COM DADOS CENSURADOS**

PRESIDENTE PRUDENTE

2024

GUILHERME HENRIQUE HISPAGNOL BICHO

**APLICAÇÃO DE CÓPULAS BIVARIADAS EM ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA
COM DADOS CENSURADOS**

Relatório Final de Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística da FCT/UNESP para aproveitamento na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala

PRESIDENTE PRUDENTE

2024

B583a Bicho, Guilherme Henrique Hispagnol
Aplicação de cópulas bivariadas em análise de sobrevivência
com dados censurados / Guilherme Henrique Hispagnol Bicho.
-- Presidente Prudente, 2024
69 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Estatística) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Fernando Antonio Moala

1. Cópulas. 2. Análise de Sobrevivência. 3. Dados
Censurados. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Guilherme Henrique Hispagnol Bicho

APLICAÇÃO DE CÓPULAS BIVARIADAS EM ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA COM DADOS CENSURADOS

Relatório de Final de Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito para obtenção de créditos na disciplina Trabalho de Conclusão do curso de graduação em Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Unesp, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: _____

Prof. Dr. Fernando Antonio Moala
Departamento de Estatística



Prof. Dr. Ricardo Puziol de Oliveira
Departamento de Estatística

Presidente Prudente, 06 de Dezembro de 2024.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Fernando Antonio Moala, que graças ao seu grande conhecimento tanto em aula quanto em orientação deste trabalho, pode me servir sobre os assuntos que eu lhe procurei para aprender, dando-me conhecimento e orientação.

Também gostaria de agradecer aos meus amigos do curso de Estatística pelo grande companheirismo ao longo do curso e, em menção honrosa, aos meus grandes amigos de fora da FCT, por suas valiosas contribuições e colaboração.

Por fim, agradeço à minha família incentivo constante e pelo apoio que me deram quando decidi mudar de curso, faculdade e cidade.

"Conhece-te a ti mesmo e conhecerás o universo e os deuses."

— Sócrates

RESUMO

O presente trabalho busca investigar distribuições de sobrevivência bivariadas utilizando a técnica de Cópulas. A modelagem com Cópulas é destacada pela facilidade relativa de estabelecer distribuições conjuntas a partir de distribuições marginais conhecidas. Primeiramente, são apresentadas as principais definições relacionadas à análise de sobrevivência e à modelagem por cópulas. Em particular, destacam-se as famílias de cópulas arquimedianas, que, por meio de suas funções geradoras, determinam a relação de dependência entre as variáveis analisadas. Por fim, serão testadas Cópulas bivariadas considerando as censuras presentes dos dados nas distribuições de probabilidade. A abordagem da Análise de Sobrevivência será baseada na Inferência Frequentista e com o uso de algumas distribuições de probabilidade conhecidas como a Exponencial Generalizada, a Weibull, Gama e Log-Normal.

Palavras-chave: cópulas arquimedianas, cópulas bivariadas, análise de sobrevivência, dados censurados.

ABSTRACT

The present study aims to investigate bivariate survival distributions using the Copula technique. Copula modeling is highlighted for its relative ease in establishing joint distributions from known marginal distributions. First, the main definitions related to survival analysis and copula modeling are presented. In particular, emphasis is given to Archimedean copula families, which determine the dependency relationship between the analyzed variables through their generator functions. Finally, bivariate copulas will be tested, taking into account the censored data present in the probability distributions. The approach to Survival Analysis will be based on Frequentist Inference, using some well-known probability distributions such as the Generalized Exponential, Weibull, Gamma, and Log-Normal.

Keywords: archimedean copulas, bivariate copulas, survival analysis, censored date.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diferentes tipos de censuras	21
Figura 2 – Distribuição Weibull com diferentes valores para o parâmetro de forma	22
Figura 3 – Comportamento da Log-Normal com diferentes valores para o parâmetro de forma	23
Figura 4 – Exponencial Generalizada com diferentes valores para o parâmetro de forma.	24
Figura 5 – Comportamento da Gama para diferentes parâmetros de forma	26
Figura 6 – Limite Inferior de Fréchet-Hoeffding (W)	31
Figura 7 – Limite Superior de Fréchet-Hoeffding (M)	32
Figura 8 – Scatterplot da densidade da Cópula FGM e da Conjunta FGM com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	36
Figura 9 – Contorno e Perspectiva da Cópula FGM com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	36
Figura 10 – Scatterplots da densidade da Cópula Gaussiana e da Conjunta Gaussiana com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	38
Figura 11 – Contorno e perspectiva da cópula Gaussiana com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	38
Figura 12 – Scatterplots da densidade da cópula Gumbel e da conjunta Gumbel com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	39
Figura 13 – Contorno e perspectiva da Cópula Gumbel com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	40
Figura 14 – Contorno da cópula Gumbel com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ para diferentes valores de θ	40
Figura 15 – Scatterplots da densidade da cópula Clayton e da conjunta Clayton com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	41
Figura 16 – Contorno e densidade conjunta da Clayton com parâmetro $\theta = 2$ e marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	41
Figura 17 – Contorno da cópula Clayton com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ para diferentes valores de θ	42
Figura 18 – Scatterplots da densidade da cópula Frank e da conjunta Frank com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	43
Figura 19 – Contorno e densidade conjunta da Frank com parâmetro $\theta = 4.8$ e marginais $\mathcal{N}(0, 1)$	43

Figura 20 – Contorno da cópula Frank com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ para diferentes valores de θ	44
Figura 21 – Histogramas e Boxplots	45
Figura 22 – Gráfico Scatterplot	46
Figura 23 – Kaplan-Meier para X , à esquerda, e Y , à direita	47
Figura 24 – Kaplan-Meier para X com as distribuições ajustadas	48
Figura 25 – Kaplan-Meier para Y com as distribuições ajustadas	49
Figura 26 – Risco para X	49
Figura 27 – Risco para Y	50
Figura 28 – Contorno e perspectivas da densidade Clayton com a distribuição Log-Normal	53
Figura 29 – Contorno e perspectivas da densidade Frank com distribuição Log-Normal	53
Figura 30 – Contorno e perspectivas da densidade Gumbel com distribuição Log-Normal	53
Figura 31 – Contorno e perspectivas da densidade Gaussiana com distribuição Log-Normal	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tempos	45
Tabela 2 – Média e Variância	46
Tabela 3 – Correlações entre o tempo de X e Y	46
Tabela 4 – Parâmetros, Intervalos de Confiança e testes AIC e BIC, para X e Y	51
Tabela 5 – Resultados das estimativas de máxima verossimilhança (EMV) para diferentes cópulas com marginais Log-Normal Bivariada	54

Lista de Abreviaturas e Siglas

EMV - Estimador de Máxima Verossimilhança

EEG - Geométrica Exponencial Estendida

fdp - Função Densidade de Probabilidade

fig. - Figura

FDA - Função de Distribuição Acumulada

FGM - Farlie-Gumbel-Morgenstern

Exp. Gen. - Exponencial Generalizada

Sumário

Lista de Ilustrações		9
Lista de tabelas		10
Lista de Abreviaturas e Siglas		11
1	INTRODUÇÃO	14
2	METODOLOGIA	16
3	ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA	17
3.1	Definições e relações básicas	17
3.2	Censuras	18
3.2.1	Censura à Esquerda	19
3.2.2	Censura à Direita	19
3.2.2.1	Censuras Tipo I	19
3.2.2.2	Censuras Tipo II	20
3.2.2.3	Censuras Aleatórias	20
3.3	Exemplos de Distribuições de Tempos de Vida	22
3.3.1	Distribuição Weibull	22
3.3.2	Distribuição Log-Normal	23
3.3.3	Distribuição Exponencial Generalizada	24
3.3.4	Distribuição Gama	25
3.4	Verossimilhança para Tempos com Dados Censurados	26
4	TEORIA DE CÓPULAS	29
4.1	Definição de Cópula	29
Teorema de Sklar		29
4.1.1	Densidade da Cópula	30
4.1.2	Limites de Fréchet-Hoeffding	31
4.2	Estruturas de Dependência	32
4.2.1	Correlação de Pearson	33
4.2.2	Correlação de Spearman	34

4.2.3	Tau de Kendall	34
4.3	Cópuas Arquimedianas	35
4.3.1	Cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern	35
4.4	Cópula Gaussiana	37
4.4.1	Cópula de Gumbel	38
4.4.2	Cópula de Clayton	40
4.4.3	Cópula de Frank	42
5	APLICAÇÃO A DADOS REAIS	45
5.1	Apresentação dos Dados	45
5.2	Análise Descritiva	45
5.3	Kaplan-Meier, risco e ajustes das distribuições	47
6	AJUSTES E ESTIMAÇÃO DAS CÓPULAS	52
	CONCLUSÕES	56
	REFERÊNCIAS	57
	Apêndice	59

1 INTRODUÇÃO

Copulas são funções que conectam distribuições multivariadas com suas distribuições marginais univariadas. Alternativamente, a partir de transformações, cópulas são funções de distribuição multivariada cujas marginais unidimensionais são uniformes no intervalo $[0, 1]$. Elas são ferramentas amplamente utilizadas em estudos cujo objetivo é avaliar a dependência entre as componentes de um vetor aleatório (Nelsen, 2006). No estudo de Achcar, J. A.; Moala, F. A.; Tarumoto, M. H.; Coladello, L. F. (2015), por exemplo, a cópula FGM foi utilizada para investigar a performance da distribuição Exponencial Generalizada Bivariada, que fora aplicada aos dados de McGilchrist e Aisbett (1991), que relataram um estudo relacionado a infecções renais, no qual foi registrada a recorrência de infecções em 38 pacientes renais que utilizavam máquinas portáteis de diálise; utilizando também as covariáveis presentes nos dados, como o sexo do paciente.

Similarmente Biondo, Thiago Ramos e Suzuki, Adriano Kamimura (2016) utilizaram a cópula Clayton para o mesmo conjunto de dados também com a distribuição Exponencial Generalizada Bivariada.

Lin e Ying (1993) introduziram um estimador não paramétrico da função de sobrevivência bivariada na presença de dados censurados, com boas propriedades estatísticas (consistência forte, convergência fraca para um processo gaussiano de média zero), o que o torna simples de ser aplicado na análise de dados de tempo de vida bivariados na presença de censura univariada.

Em Achcar, Jorge Alberto Cuevas, Jose Rafael Tovar e Moala, Fernando A. (2019) é sugerido o uso do estimador não paramétrico de Lin-Ying para a função de sobrevivência conjunta com censura univariada, como parte de uma nova abordagem gráfica de diagnóstico para comparar diferentes modelos paramétricos bivariados de tempo de vida, utilizando uma medida de dependência recente proposta por Ledwina (2015) para duas variáveis aleatórias.

Enquanto, no estudo de Tran, Q., Kidwell, K.M. & Tsodikov (2018), desenvolveram um modelo conjunto semiparamétrico que aborda o diagnóstico, a metástase latente e a morte por câncer, aplicando a máxima verossimilhança não paramétrica para avaliar os efeitos das covariáveis nos riscos associados aos eventos intermediários e à

morte, além de explorar a dependência existente entre esses eventos, aplicando esse modelo a dados provenientes de pacientes com câncer de próstata.

Para a Análise de Sobrevivência, tem-se muitos casos de variáveis dependentes agindo. Um exemplo é a ocorrência de doenças cardiovasculares, que podem estar relacionadas à idade ou à alimentação e outros hábitos do paciente.

Em suma, o estudo direcionar-se-á a dados provenientes de (Woolson e Lachenbruch (1980) e Lin e Ying (1993)), utilizando as técnicas da inferência frequentista paramétrica.

2 METODOLOGIA

A metodologia empregada será baseada nos métodos convencionais de Análise de Sobrevivência, como Kaplan-Meier, utilizando a Inferência Frequentista, com a construção do modelo bivariado por meio da aplicação de cópulas. Utilizando os dados presentes em (Woolson e Lachenbruch (1980) e Lin e Ying (1993)), que consistem em tempos de sobrevivência de dois tipos de enxertos de pele no mesmo paciente queimado, e considerando a censura à direita tipo I, utilizar-se-á a verossimilhança correspondente para estimar os parâmetros das distribuições, suas funções de sobrevivência e de risco. No total, nove distribuições foram testadas para as marginais X e Y , utilizando os critérios AIC e BIC. Em seguida, testadas as cópulas Clayton, Frank, Gumbel e Gaussiana, sendo a seleção delas também realizada com base nos critérios AIC e BIC.

No que se refere aos dados, os tempos são dependentes e pareados, dando assim sentido a aplicação das Cópulas.

O software empregado para a modelagem é o R, tendo o uso de dois pacotes para Análise de Sobrevivência: survival e muhaz.

3 Análise de Sobrevivência

A Análise de Sobrevivência define-se como o tempo até a ocorrência de um determinado evento de interesse, que pode ser entendido como tempo de falha, podendo ser a morte de um paciente ou a cura de uma doença (Colosimo, 2006). É amplamente utilizada na pesquisa científica, como na medicina e farmacologia. Para o estudo, as unidades estudadas são observadas a partir de um tempo inicial, denotado como t_0 .

Uma das áreas mais relevantes para a aplicação das ferramentas de análise de sobrevivência é a medicina. Em estudos sobre câncer de pulmão, por exemplo, é comum o uso de curvas de Kaplan-Meier para descrever a probabilidade de sobrevivência dos pacientes, além do modelo de riscos proporcionais de Cox para avaliar fatores prognósticos que influenciam essa probabilidade (Kaplan & Meier, 1958; Cox, 1972). Outra aplicação importante envolve técnicas de análise de riscos competitivos, que entenda-se como um evento cuja ocorrência impede a observação ou altera a probabilidade de ocorrência de um outro evento de interesse (Gooley et al., 1999).

3.1 Definições e relações básicas

O tempo até a quebra de uma máquina, a queima de um aparelho elétrico ou a morte causada por uma doença específica pode ser visto como uma variável aleatória, que segue uma distribuição específica. Essas distribuições de tempos de vida são descritas por três funções principais: a função densidade de probabilidade, a função de sobrevivência e a função de risco (LEE, 1992).

Essas três funções são matematicamente equivalentes, o que significa que, se conhecermos uma delas, podemos calcular, a partir dessa, as outras. Dito isso, se duas são conhecidas, a terceira é determinada.

Formalizando, teremos:

Função Densidade de Probabilidade (fdp):

Seja T uma variável aleatória contínua não negativa representando o tempo de vida. A função densidade de probabilidade (fdp) de T é denotada por $f(t)$ e é definida como:

$$f(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.1)$$

Consequentemente, a FDA é dita como:

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt. \quad (3.2)$$

Função de Sobrevivência (Survival Function):

A função de sobrevivência de T é denotada por $S(t)$ e é definida como a probabilidade de que T seja maior que t :

$$S(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(t)dt, \quad (3.3)$$

onde $F(t)$ é a função de distribuição acumulada de T .

Função Risco (Hazard Function):

A função risco de T , denotada por $h(t)$, é definida como a taxa instantânea de falha no tempo t , dado que T sobreviveu até t :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}, \quad (3.4)$$

onde $f(t)$ é a fdp, e $S(t)$ é a função de sobrevivência de T .

3.2 Censuras

Censura é um conceito importante em estudos de sobrevivência e confiabilidade. Refere-se à situação em que não temos informação completa sobre o tempo de ocorrência de um evento de interesse para todos os indivíduos ou unidades em estudo. Em vez disso, temos apenas informações parciais ou limitadas sobre esses tempos de ocorrência (Colosimo, 2006).

Em estudos de sobrevivência e confiabilidade, o evento de interesse pode ser a falha de um dispositivo, a morte de um paciente, o tempo até a recuperação, entre outros eventos que envolvem um período de tempo. A censura ocorre quando não sabemos exatamente quando esse evento ocorreu para alguns dos participantes do estudo (Colosimo, 2006).

Mesmo censurados, todos os resultados provenientes de um estudo de sobrevivência devem ser usados na análise estatística, pois (i) mesmo os dados sendo incompletos ainda apresentam informações e (ii) a omissão das censuras pode acarretar conclusões viciadas (Colosimo, 2006).

3.2.1 Censura à Esquerda

Dados Censurados à Esquerda ocorrem com menos frequência do que Dados Censurados à Direita. Eles acontecem quando não conhecemos o momento da ocorrência do evento, mas sabemos que a duração do evento é menor do que a observada. Em outras palavras, o evento de interesse já aconteceu quando o indivíduo foi observado (Colosimo, 2006).

Por exemplo, consideraremos que um antropólogo verifica com que idade as crianças de um certo lugar aprendem a realizar determinada tarefa – ler e escrever, por exemplo. Dado a situação, o tempo de falha é o tempo transcorrido entre o nascimento e o momento em que a criança desenvolve a habilidade de realizar essa tarefa. Supondo que há crianças já capazes de realizar essa tarefa, temos, então, censura à esquerda.

3.2.2 Censura à Direita

É quando o tempo entre o início do estudo e o evento é maior do que o tempo observado. Exemplificando, suponha que em um estudo sobre o tempo entre o diagnóstico de AIDS e o óbito, 193 pacientes foram acompanhados de 1986 a 2000. Durante esse período, ocorreram 92 óbitos, enquanto 101 pacientes permaneciam vivos até o final do estudo em dezembro de 2000, sem informações mais recentes disponíveis. Assim, registraram-se 92 eventos (óbitos) e 101 censuras à direita (pacientes ainda vivos). Isto é, ocorre quando o evento de interesse não foi observado até o final do estudo, como quando o período de estudo termina, os pacientes são perdidos de vista ou saem do estudo voluntariamente (Colosimo, 2006).

Há três tipos mais comuns de censuras à direita, sendo vistas a seguir.

3.2.2.1 Censuras Tipo I

Neste caso, cada unidade amostral tem um tempo específico de censura L_i fixado, pois nem todas as unidades iniciam o teste na mesma data. Com censura tipo

I, o número de unidades cujos tempos de vida são observados é uma variável aleatória.

Sejam $L_1, L_2, \dots, L_n$ os tempos de censura fixos para as unidades testadas. Os tempos de vida $T_1, T_2, \dots, T_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade $f(t)$ e função de sobrevivência $S(t)$.

O tempo de vida T_i da i -ésima unidade será observado se $T_i \leq L_i$, para $i = 1, \dots, n$. Os dados observados sob censura tipo I podem ser escritos como pares ordenados (t_i, δ_i) , onde:

$$t_i = \min(T_i, L_i)$$

e

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{se } T_i \leq L_i \text{ (não censurado)} \\ 0, & \text{se } T_i > L_i \text{ (censurado)} \end{cases}$$

onde t_i representa o menor valor entre o tempo de vida observado T_i e o tempo de censura L_i , e δ_i indica se o tempo de vida foi censurado ou não.

3.2.2.2 Censuras Tipo II

Se em uma amostra de n itens realizarmos o experimento até que um número r de falhas seja observado, então os $(n - r)$ itens restantes serão considerados como censura do tipo II. Logo, neste tipo de experimento, fixamos o número de falhas e o tempo de estudo será aleatório. Se todos os itens são postos em observação ao mesmo tempo, teremos censura simples do tipo II. Já a censura múltipla do tipo II ocorrerá se os indivíduos entrarem no estudo em momentos diferentes e teremos a censura após r falhas.

3.2.2.3 Censuras Aleatórias

Como expresse anteriormente, nas censuras do tipo I, o tempo de termino do estudo é fixo, e o número de falhas é aleatório. Na censura do tipo II, o número de falhas é fixo e o tempo de estudo é aleatório. Em ambos os casos, os tempos de

censura são determinados pelo planejamento. Entretanto, são comuns os casos em que os tempos de censura são aleatórios.

Se há uma data pré-fixada para o término do estudo, os tempos de censura serão aleatórios, embora se possa considerar censura múltipla do tipo I.

Em um processo de censura aleatória, T é definida como o tempo de falha e L como o tempo de censura, sendo T e L duas variáveis aleatórias independentes. Para cada indivíduo, temos o par (t_i, δ_i) , para $i = 1, 2, \dots, n$, em que:

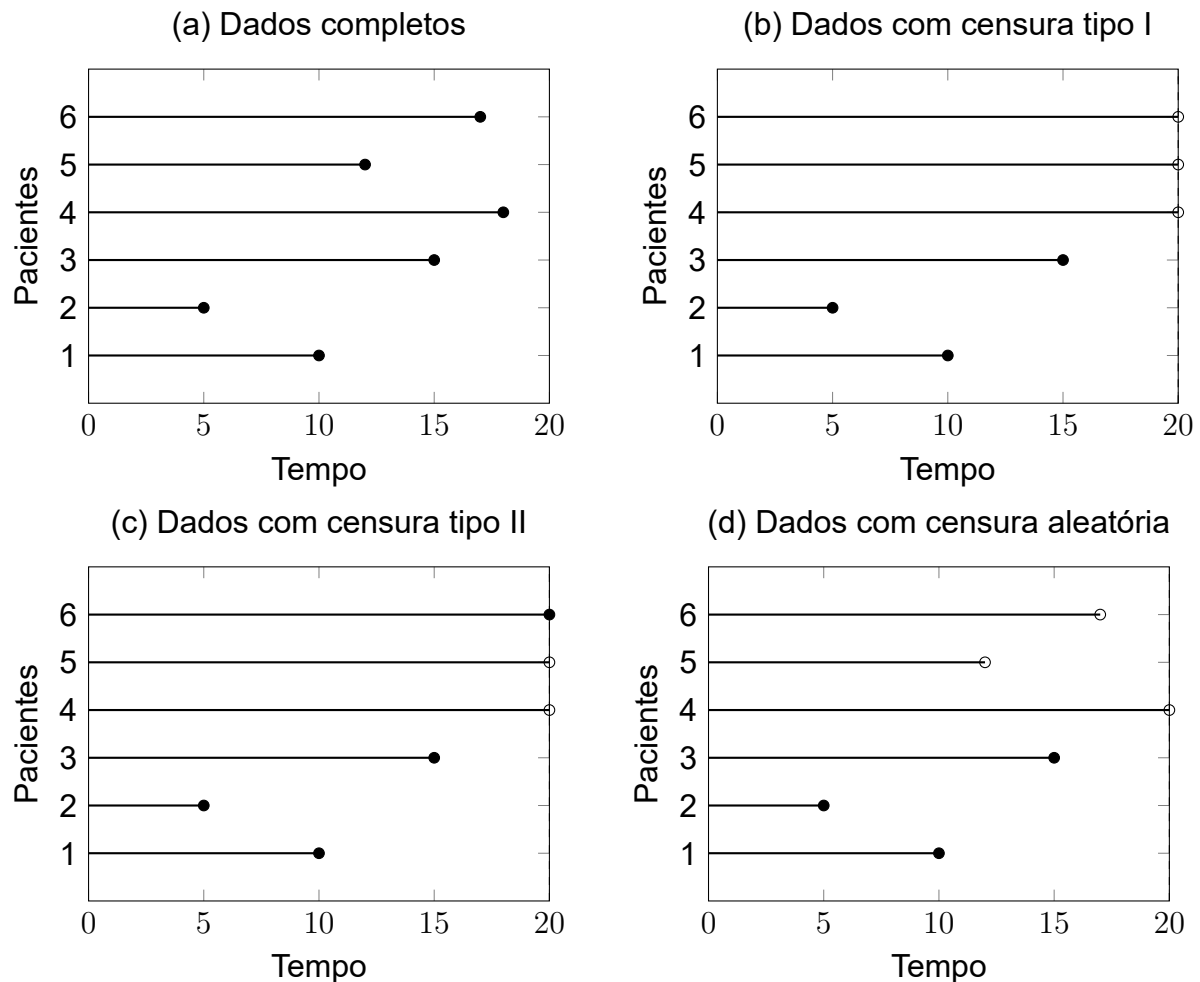
$$t_i = \min(T_i, L_i)$$

e

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{se } T_i \leq L_i \\ 0, & \text{se } T_i > L_i \end{cases}$$

A fig. 1 exemplifica os dados completos, censurados do tipo I e II e aleatórios.

Figura 1 – Diferentes tipos de censuras



Fonte: Colosimo (2006)

3.3 Exemplos de Distribuições de Tempos de Vida

Exemplificando, serão apresentados alguns exemplos de distribuições comumente conhecidas na literatura, como a Weibull, a Log-Normal, Exponencial Generalizada e a Gama, que serão uma das distribuições testadas.

3.3.1 Distribuição Weibull

A distribuição Weibull é uma distribuição de probabilidade contínua que tem suporte no conjunto dos reais positivos. Ela pode assumir formas assimétricas tanto com assimetria à direita quanto à esquerda, dependendo dos valores de seus parâmetros. A sua f.d.p., função de sobrevivência e função risco são dadas respectivamente por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}, \quad \text{para } t \geq 0$$

$$S(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta},$$

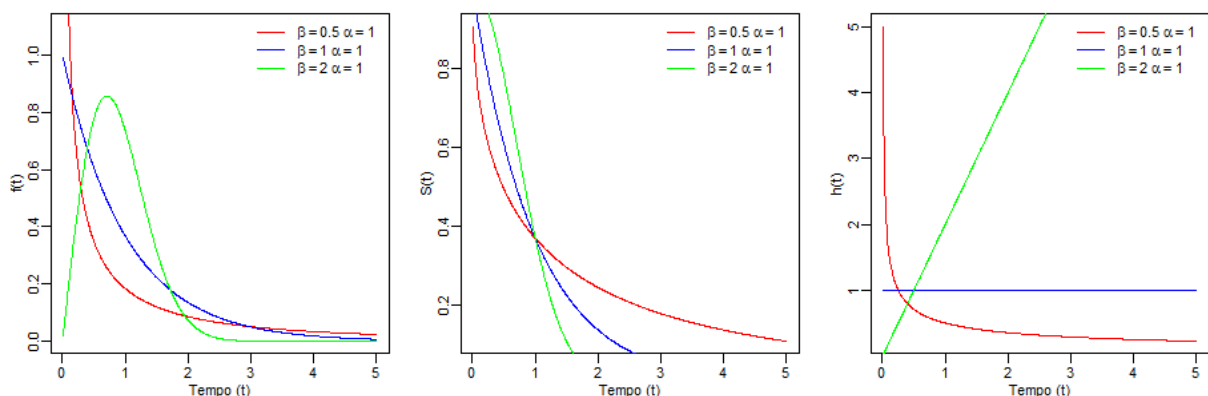
e

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1},$$

com $\alpha, \beta > 0$, onde α é o parâmetro de escala e β é o parâmetro de forma, que indica a velocidade de envelhecimento, isto é, a influência na taxa de falha.

Esta distribuição possui riscos crescentes para $\beta > 1$, decrescentes para $\beta < 1$ e constantes para $\beta = 1$, em que o modelo se reduz à distribuição Exponencial, e por isso se diz que a Exponencial é um caso particular da Weibull. Esse comportamento da distribuição pode ser visto na figura 2

Figura 2 – Distribuição Weibull com diferentes valores para o parâmetro de forma



Fonte: Próprio Autor

3.3.2 Distribuição Log-Normal

A distribuição log-normal é uma distribuição que descreve as variáveis cujos logaritmos são distribuídos de acordo com uma distribuição normal. Isso é útil em muitos contextos, incluindo a análise de tempos de falha de isolamentos elétricos e a investigação do tempo para o desenvolvimento de câncer de pulmão em fumantes.

Para uma variável aleatória T ter uma distribuição log-normal, sua transformação $Y = \ln(T)$ precisa seguir uma distribuição normal com uma média μ e uma variância σ^2 . As funções densidade de probabilidade e de sobrevivência dessa distribuição são definidas em termos da média e variância mencionadas acima.

A função densidade de probabilidade descreve a probabilidade de encontrar um valor específico de t , enquanto a função de sobrevivência descreve a probabilidade de que a variável aleatória exceda um valor específico de t . Ambas as funções dependem dos parâmetros μ e σ , e são relacionadas à função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.

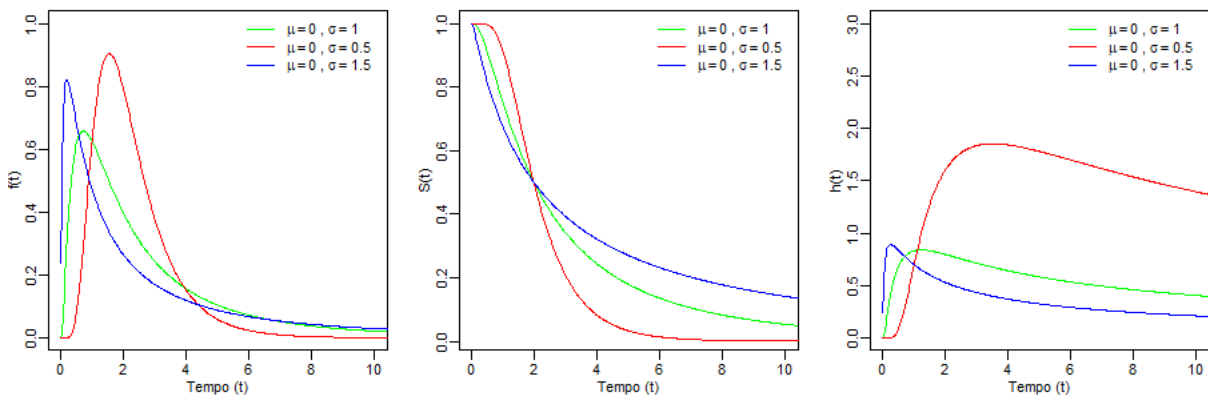
$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln(t) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

$$S(t) = 1 - \Phi \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right),$$

$$h(t) = \frac{1}{t\sigma} \cdot \frac{\phi \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right)}{1 - \Phi \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right)},$$

onde $\Phi(x)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão e $t > 0$. O comportamento da distribuição pode ser visto na figura 3

Figura 3 – Comportamento da Log-Normal com diferentes valores para o parâmetro de forma



Fonte: Próprio Autor

3.3.3 Distribuição Exponencial Generalizada

A Distribuição Exponencial Generalizada (Gupta & Kundu, 1999) é amplamente utilizada em análise de dados de sobrevivência, confiabilidade, e também em diversos campos, como engenharia e biologia, devido à sua flexibilidade para modelar tempos de vida e outras variáveis positivas.

É uma extensão da distribuição exponencial clássica e possui um parâmetro adicional que permite controlar a forma da distribuição, tornando-a mais adequada para modelar dados com caudas pesadas ou assimetria.

A distribuição Exponencial Generalizada tem dois parâmetros e tem função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \alpha (1 - \exp(-\lambda t))^{\alpha-1} \exp(-\lambda t)$$

em que $t > 0$, $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ são os parâmetros de forma e escala, respectivamente.

As funções de sobrevivência e de risco associadas a essa densidade são dadas, respectivamente, por:

$$S(t) = P(T > t) = 1 - (1 - \exp(-\lambda t))^\alpha$$

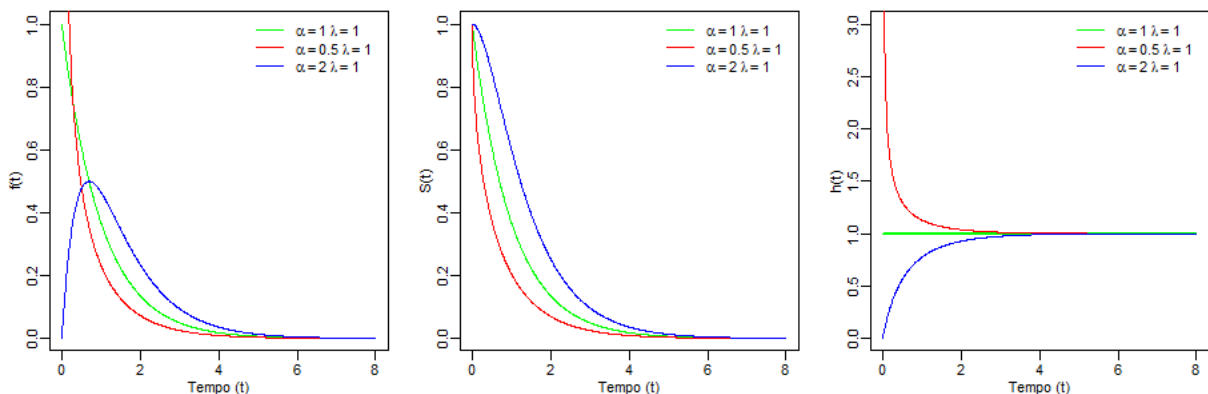
e

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\alpha (1 - \exp(-\lambda t))^{\alpha-1} \exp(-\lambda t)}{1 - (1 - \exp(-\lambda t))^\alpha}.$$

Essa distribuição é comumente utilizada para dados onde a distribuição exponencial não é suficiente para capturar a variabilidade observada, oferecendo um ajuste mais robusto em situações onde o comportamento da cauda é relevante.

A figura 4 mostra o comportamento da distribuição para diferentes valores de α .

Figura 4 – Exponencial Generalizada com diferentes valores para o parâmetro de forma.



3.3.4 Distribuição Gama

A Distribuição Gama é amplamente utilizada em análise de dados de sobrevivência, confiabilidade e diversas áreas aplicadas, como engenharia e ciências biomédicas, devido à sua flexibilidade para modelar tempos de vida e outras variáveis contínuas positivas.

Essa distribuição é caracterizada por dois parâmetros, permitindo modelar uma ampla variedade de formas e comportamentos, como distribuições assimétricas e caudas mais longas.

A função densidade de probabilidade (PDF) da distribuição Gama é dada por:

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)},$$

em que $t > 0$, $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma, $\beta > 0$ é o parâmetro de escala, e $\Gamma(\alpha)$ é a função gama, definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

As funções de sobrevivência e de risco associadas a essa densidade são dadas, respectivamente, por:

$$S(t) = P(T > t) = 1 - \frac{\gamma\left(\alpha, \frac{t}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)},$$

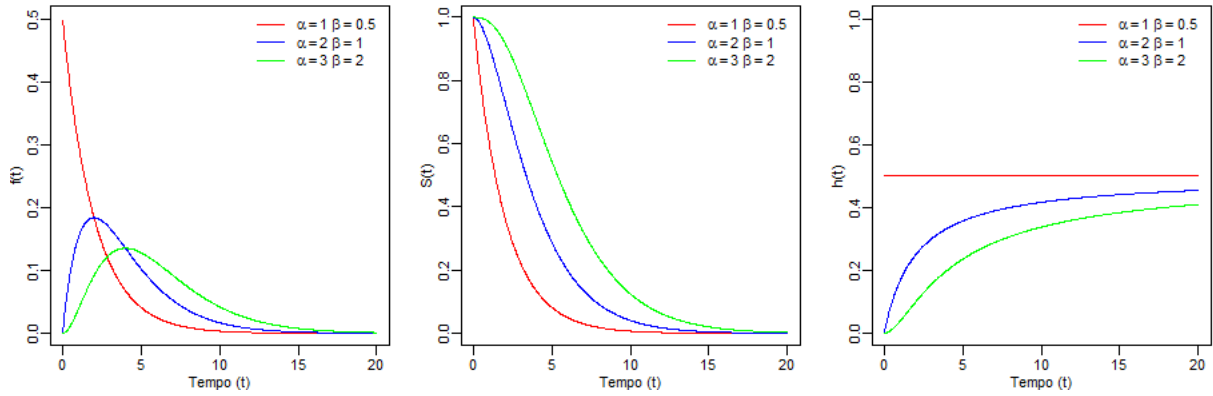
onde $\gamma\left(\alpha, \frac{t}{\beta}\right)$ é a função gama incompleta, e

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\frac{t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}}{1 - \frac{\gamma\left(\alpha, \frac{t}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)}}.$$

A distribuição Gama é frequentemente empregada em cenários onde é necessário capturar variabilidade e padrões complexos de dados, como tempos de falha em sistemas e processos biológicos, oferecendo um ajuste flexível e robusto.

Seu comportamento pode ser visualizado na figura 5

Figura 5 – Comportamento da Gama para diferentes parâmetros de forma



3.4 Verossimilhança para Tempos com Dados Censurados

Em análises de sobrevivência, é comum lidar com dados censurados, onde para alguns indivíduos a ocorrência do evento de interesse (como falha de um equipamento ou morte) não é observada até o final do período de estudo. Nestes casos, considera-se que os tempos de falha podem ser censurados à direita, à esquerda ou intervalarmente. Aqui, focaremos na censura à direita, que é o tipo mais comum.

Considere um conjunto de dados de n observações de tempos t_i , onde para cada i -ésima observação temos uma variável indicadora de censura δ_i , que assume o valor 1 se o tempo t_i corresponde a um evento observado e 0 se corresponde a um tempo censurado. Assim, a função de verossimilhança $L(\theta)$ pode ser expressa como:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f(t_i; \theta)^{\delta_i} S(t_i; \theta)^{1-\delta_i}] , \quad (3.5)$$

onde:

- $f(t_i; \theta)$ é a função densidade de probabilidade associada ao tempo de falha para os dados observados, com parâmetro(s) θ .
- $S(t_i; \theta) = P(T > t_i; \theta)$ é a função de sobrevivência para tempos censurados, que representa a probabilidade do evento ocorrer após t_i .

Esta formulação permite incorporar informações tanto de tempos observados quanto de tempos censurados. Para cada observação i , se o evento foi observado ($\delta_i = 1$), a verossimilhança utiliza a densidade $f(t_i; \theta)$. Para observações censuradas

($\delta_i = 0$), a verossimilhança usa a função de sobrevivência $S(t_i; \theta)$, que representa a probabilidade de sobrevivência além do tempo t_i .

A log-verossimilhança correspondente é dada por:

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n [\delta_i \log f(t_i; \theta) + (1 - \delta_i) \log S(t_i; \theta)].$$

A maximização da log-verossimilhança $\ell(\theta)$ em relação ao parâmetro θ fornece estimativas de máxima verossimilhança para modelos com dados censurados, permitindo uma análise robusta mesmo quando a observação do evento de interesse é incompleta para alguns indivíduos.

Agora, considerando o caso bivariado e que os tempos de vida T_1 e T_2 podem ser censurados de forma independente (Lawless, 1982). As n observações podem ser classificadas em quatro grupos:

- **C1:** Ambos t_{1i} e t_{2i} são tempos observados.
- **C2:** t_{1i} é um tempo de vida observado, enquanto t_{2i} é um tempo de censura (ou seja, sabemos que $T_{2i} \geq t_{2i}$).
- **C3:** t_{1i} é um tempo de censura e t_{2i} é um tempo de vida observado.
- **C4:** Ambos t_{1i} e t_{2i} são tempos de censura.

A função de verossimilhança para esses dados é dada por:

$$L = \prod_{i \in C1} f(t_{1i}, t_{2i}) \prod_{i \in C2} \left(-\frac{\partial S(t_{1i}, t_{2i})}{\partial t_{1i}} \right) \prod_{i \in C3} \left(-\frac{\partial S(t_{1i}, t_{2i})}{\partial t_{2i}} \right) \prod_{i \in C4} S(t_{1i}, t_{2i}), \quad (3.6)$$

onde $f(t_{1i}, t_{2i})$ é a densidade conjunta e $S(t_{1i}, t_{2i})$ é a função de sobrevivência conjunta. As derivadas parciais de S em relação a t_{1i} e t_{2i} refletem as probabilidades de censura de cada variável.

Podemos representar a presença de censura usando variáveis indicadoras δ_{1i} e δ_{2i} :

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } t_{ji} \text{ é um tempo de vida observado;} \\ 0, & \text{se } t_{ji} \text{ é um tempo censurado,} \end{cases}$$

para $j = 1, 2$ e $i = 1, \dots, n$.

Assim, reescrevemos 3.6 como:

$$\begin{aligned}
 L = & \prod_{i=1}^n f(t_{1i}, t_{2i})^{\delta_{1i}\delta_{2i}} \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\partial S(t_{1i}, t_{2i})}{\partial t_{1i}} \right)^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\partial S(t_{1i}, t_{2i})}{\partial t_{2i}} \right)^{(1-\delta_{1i})\delta_{2i}} \prod_{i=1}^n S(t_{1i}, t_{2i})^{(1-\delta_{1i})(1-\delta_{2i})}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Caso não haja censura nos dados, a verossimilhança em 3.5 e em 3.7 reduzem-se à densidade conjunta $L = \prod_{i=1}^n f(t_{1i}, t_{2i})$, pois sem censura o δ é igual a n .

4 Teoria de Cópulas

Cópulas são ferramentas probabilísticas utilizadas para modelar a dependência entre variáveis aleatórias. Em essência, uma cópula descreve como as distribuições marginais de várias variáveis aleatórias estão relacionadas entre si.

Uma interpretação simples é pensar em uma cópula como uma "ligação" que une as distribuições marginais de diferentes variáveis aleatórias para formar uma distribuição conjunta Haugh (2016). Ela captura a estrutura de dependência entre as variáveis, independentemente das distribuições marginais individuais (Nelsen, 2006).

4.1 Definição de Cópula

Definição 1. Uma cópula n -dimensional, $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, é uma função de distribuição acumulada (FDA) com marginais $U[0, 1]$, Haugh (2016).

Dito isso, seja o vetor aleatório $U = (U_1, \dots, U_n) \in [0, 1]^n$ com cópula n -dimensional, denotada por C , temos:

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \quad \forall u_i \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

O seguinte teorema, Sklar (1959), dá existência e unicidade à cópula $C(\cdot)$.

Teorema 1 (Teorema de Sklar). *Seja $H(\cdot)$ uma função de distribuição conjunta com marginais $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$. Então existe uma cópula n -dimensional $C(\cdot)$ tal que*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)), \quad \forall x_i \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Se $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ são todas contínuas, então $C(\cdot)$ é única; caso contrário, $C(\cdot)$ é unicamente determinada no conjunto $\text{Im}(F_{X_1}) \times \dots \times \text{Im}(F_{X_n})$, onde $\text{Im}(\cdot)$ representa a imagem de $(\cdot)$. Reciprocamente, se $C(\cdot)$ é uma cópula n -dimensional e $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ são funções de distribuição, então a função $H(\cdot)$ definida por (4.2) é uma função de distribuição conjunta n -dimensional.

Toma-se $U_i = F_{X_i}(X_i)$, com U_i sendo uma $\mathcal{U}(0, 1)$, tem-se que (4.2) é similar a

(4.1):

$$\begin{aligned}
F(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \\
U_i &= F_{X_i}(X_i), \therefore F_{X_i}(x_i) = u_i, \\
P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \\
C(u_1, \dots, u_n) &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \quad u_i \in [0, 1], \\
F(x_1, \dots, x_n) &= C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)). \quad \square
\end{aligned}$$

Fundamentos teóricos detalhados e descrições para o uso de cópuas podem ser encontrados em Joe (1997), Nelsen (2006) e Salvadori et al. (2007).

4.1.1 Densidade da Cópuas

Se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$ denotam a densidade conjunta e as densidades marginais de $x_1, x_2, \dots, x_n$, com função de distribuição $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, então a densidade conjunta pode ser escrita em termos das densidades marginais e da densidade da cópuas como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) \cdot c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)),$$

onde $c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}$ é a densidade de cópuas de $C(\cdot)$.

Analogamente, para o caso bivariado, temos:

$$\begin{aligned}
f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \\
f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial x \partial y} \\
f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} \tag{4.3} \\
f_{XY}(x, y) &= c(u, v) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) \\
\frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x) \cdot f_Y(y)} &= c(u, v)
\end{aligned}$$

Reescrevendo eq. (4.3), tem-se:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = c(F_X(x), F_Y(y)) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

onde $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y , respectivamente, e a função $c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$ é dita a densidade de cópuas, em

que $U = F_X(X)$ e $V = F_Y(Y)$. A densidade de cópias é também a função densidade de probabilidade conjunta para as variáveis U e V .

A seguinte interpretação, então, é que entender a dependência entre X e Y é equivalente a entender a dependência entre U e V , portanto, o problema se resume a especificar uma distribuição bivariada entre duas variáveis uniformemente distribuídas, isto é, uma cópia.

4.1.2 Limites de Fréchet-Hoeffding

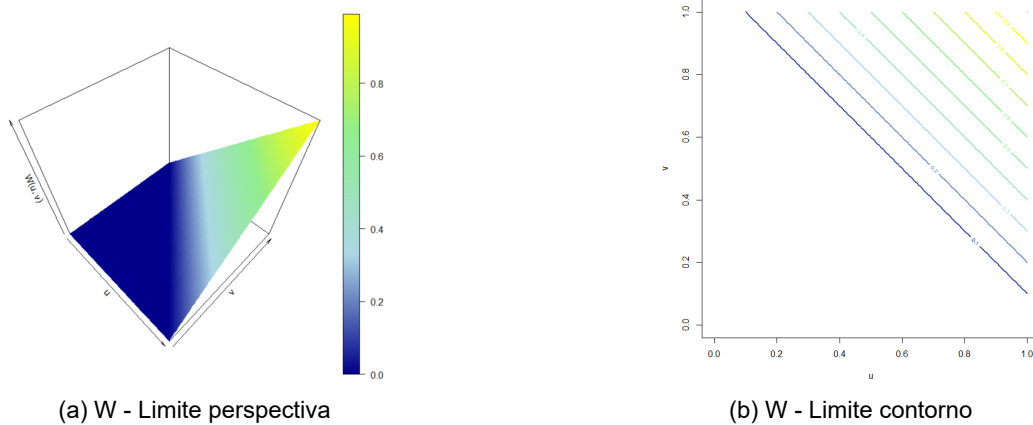
As funções $W(u, v) = \max(0, u + v - 1)$ e $M(u, v) = \min(u, v)$ são conhecidas como os limites de Fréchet-Hoeffding inferior e superior, respectivamente. Estas funções são exemplos de cópias bivariadas que limitam todas as outras cópias possíveis por baixo e por cima.

Especificamente, para qualquer cópia $C(u, v)$ em duas dimensões, temos a relação:

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v); \forall u, v \in [0, 1].$$

O limite inferior de Fréchet, $W(u, v)$, corresponde ao caso extremo onde existe uma dependência negativa perfeita entre as variáveis, também conhecida como contramonotonia. O gráfico de perspectiva e de contorno da W são dados na figura 6.

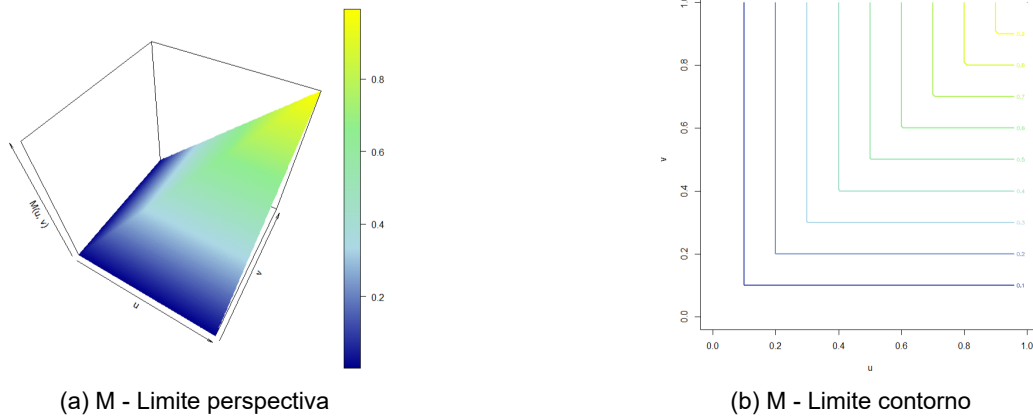
Figura 6 – Limite Inferior de Fréchet-Hoeffding (W)



Já o limite superior de Fréchet, $M(u, v)$, representa o caso de dependência positiva perfeita, ou comonotonia. O gráfico de perspectiva e de contorno da M são

dados na figura 7.

Figura 7 – Limite Superior de Fréchet-Hoeffding (M)



No caso multivariado, estas funções podem ser generalizadas para n dimensões. As cópias limítrofes são dadas por:

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \max \left(1 - n + \sum_{i=1}^n u_i, 0 \right)$$

e

$$M(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

de tal forma que:

$$W(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M(\mathbf{u}),$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Em suma, os limites definem a faixa de variabilidade que qualquer cópia pode assumir, permitindo-nos entender a extensão máxima da dependência entre variáveis.

4.2 Estruturas de Dependência

As estruturas de dependência descrevem como duas ou mais variáveis estão relacionadas. No contexto da estatística, entender essas dependências é crucial para modelagem e previsão. A dependência pode ser linear ou não linear, e as variáveis podem ser dependentes de maneira complexa.

Seja ∇ medida escalar de dependência. Quatro propriedades desejadas de ∇ são descritas por (Embrechts, McNeil & Straumann, 2002).

1. $\nabla(X, Y) = \nabla(Y, X)$, conhecida como a condição de simetria.
2. $\nabla(X, X) = 1$, conhecida como a condição de normalização.
3. Se $\nabla(X, Y) = 1$, então X e Y são comonotônicas. Se $\nabla(X, Y) = -1$, então X e Y são contramonotônicas.
4. $\nabla(f(X), g(Y)) = \nabla(X, Y)$ para qualquer transformação estritamente monotônica de X e Y .

4.2.1 Correlação de Pearson

A correlação linear de Pearson é uma medida que avalia a relação linear entre duas variáveis aleatórias, baseada na covariância entre elas e nos seus desvios padrão. Ela varia entre -1 e 1, onde $r = 1$ indica uma relação crescente perfeita, e $r = -1$ indica uma relação decrescente perfeita. Se as variáveis são independentes, a correlação é zero.

Ela é definida pela seguinte fórmula:

$$r = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}.$$

Embora popular pela sua facilidade de uso e compreensão intuitiva, a correlação de Pearson apresenta algumas deficiências, que podem ser vistas em Embrechts et al.(2002):

1. **Relações Não Lineares:** Pearson só detecta dependências lineares. Variáveis podem ser altamente dependentes de forma não linear e ainda assim apresentar uma correlação de Pearson próxima de zero.
2. **Independência e Correlação Zero:** Correlação zero não implica independência. Por exemplo, para $X = U$ e $Y = U^2$, a correlação é zero, mas X e Y são dependentes. Somente no caso em que X e Y são conjuntamente distribuídos normalmente, a ausência de correlação é equivalente à independência (Embrechts, McNeil e Straumann, 2002).

3. **Transformações Monotônicas Não Lineares:** Pearson não é invariante sob transformações monotônicas não lineares, porque depende não só da distribuição conjunta, mas também das distribuições marginais das variáveis (Cherubini, Luciano and Vecchiato, 2004; Embrechts, McNeil e Straumann, 2002).

4.2.2 Correlação de Spearman

A correlação de Spearman (ρ) é uma medida de dependência monotônica (não necessariamente linear) entre duas variáveis. Baseia-se na correlação de Pearson aplicada aos postos das variáveis, ao invés dos valores originais (Nelsen, 2006). A fórmula é:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

onde d_i é a diferença entre os postos das duas variáveis.

4.2.3 Tau de Kendall

O tau de Kendall (τ) é outra medida de associação que avalia a relação monotônica entre duas variáveis, baseando-se na concordância e discordância de pares de observações (Kruskal 1958; Hollander and Wolfe 2013; Lehmann 1975). Para um conjunto de n pares (X_i, Y_i) :

- **Pares Concordantes:** Se $(X_i < X_j \text{ e } Y_i < Y_j)$ ou $(X_i > X_j \text{ e } Y_i > Y_j)$.
- **Pares Discordantes:** Se $(X_i < X_j \text{ e } Y_i > Y_j)$ ou $(X_i > X_j \text{ e } Y_i < Y_j)$.

A fórmula do tau de Kendall é:

$$\tau = \frac{C - D}{\frac{1}{2}n(n - 1)},$$

onde C é o número de pares concordantes e D é o número de pares discordantes.

4.3 Cópulas Arquimedianas

Cópulas arquimedianas são funções usadas em teoria de probabilidade e estatística para modelar a dependência entre variáveis aleatórias. Elas são caracterizadas por uma função geradora, chamada função arquimediana, que é contínua, estritamente decrescente e convexa (Nelsen, 2006). As cópulas arquimedianas são populares devido à sua flexibilidade e simplicidade computacional, e incluem exemplos como as cópulas de Clayton, Gumbel e Frank. Essas cópulas permitem a construção de modelos multivariados a partir de marginais univariadas, facilitando a análise de dependência em dados complexos.

Serão apresentadas algumas cópulas dessa família, juntamente com a FGM e a Gaussiana, que podem ser encontradas em *Bivariate Generalized Exponential Distributions Based on Copula Functions* (Santos, C.A.; Moala, F. A.; Nadarajah, S.).

4.3.1 Cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern

A cópula FGM é dada por:

$$C_I(u_1, u_2) = u_1 u_2 [1 + \theta(1 - u_1)(1 - u_2)], \quad (4.4)$$

onde $u_1 = F_1(t_1)$ e $u_2 = F_2(t_2)$ e $-1 < \theta < 1$. Note que θ mede a dependência entre duas marginais. Sendo assim, se $\theta = 0$, temos variáveis aleatórias independentes.

Esta cópula é apropriada para modelar estruturas de dependência fraca (Nelsen, 2006).

O parâmetro de associação θ pode assumir diferentes valores dependendo da cópula, enquanto as medidas de associação, como o coeficiente de correlação de Pearson, geralmente são limitadas. O parâmetro θ está relacionado aos bem conhecidos coeficientes de associação Tau de Kendall (τ) e Rho de Spearman (ρ), pelas seguintes equações:

$$\tau = 4 \iint C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 = \frac{2\theta}{9}, \quad (4.5)$$

$$\rho = 12 \iint C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 3 = \frac{\theta}{3}. \quad (4.6)$$

O coeficiente de correlação varia claramente de $-\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{3}$.

Para a cópula FGM C_I dada na equação, a densidade correspondente da cópula c_I é:

$$c_I(u_1, u_2) = 1 + \theta(1 - 2u_1)(1 - 2u_2), \quad (4.7)$$

Seja (T_1, T_2) denotando as variáveis aleatórias emparelhadas com $(F_1(t_1), F_2(t_2))$ e $(f_1(t_1), f_2(t_2))$ denotando as correspondentes funções marginais cumulativas e de densidade, então a função de distribuição cumulativa conjunta e a densidade para as variáveis aleatórias T_1 e T_2 tornam-se

$$F_I(t_1, t_2) = C_I(F_1(t_1), F_2(t_2)) = F_1(t_1)F_2(t_2)[1 + \theta(1 - F_1(t_1))(1 - F_2(t_2))], \quad (4.8)$$

$$f_I(t_1, t_2) = f_1(t_1)f_2(t_2)[1 + \theta(1 - 2F_1(t_1))(1 - 2F_2(t_2))], \quad (4.9)$$

respectivamente. A função de sobrevivência bivariada $S_I(t_1, t_2)$ da cópula FGM é dada por:

$$S_I(t_1, t_2) = S_1(t_1)S_2(t_2)[1 + \theta F_1(t_1)F_2(t_2)], \quad (4.10)$$

onde $S_1(t_1)$ e $S_2(t_2)$ são as funções marginais de sobrevivência de T_1 e T_2 , respectivamente.

Figura 8 – Scatterplot da densidade da Cópula FGM e da Conjunta FGM com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$

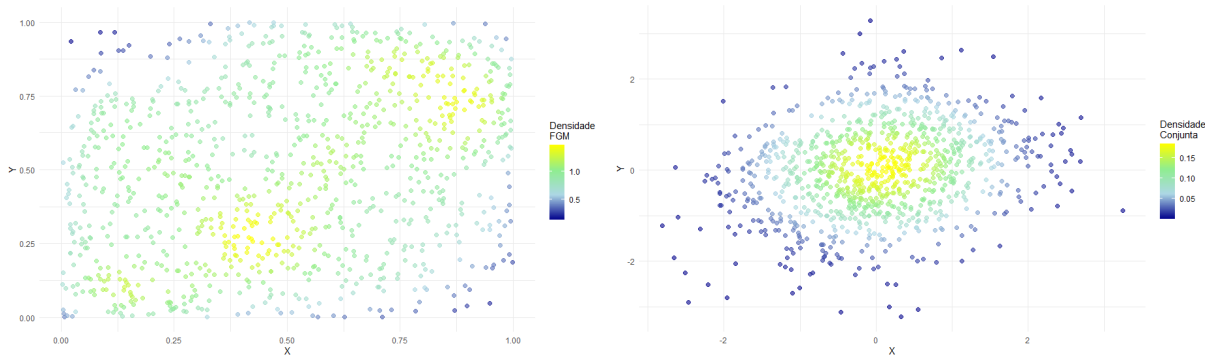
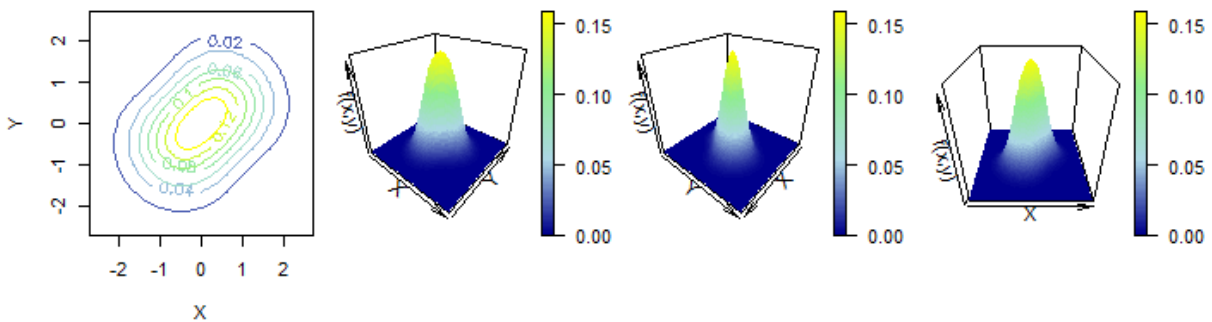


Figura 9 – Contorno e Perspectiva da Cópula FGM com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$



4.4 Cópula Gaussiana

A cópula Gaussiana é amplamente utilizada devido à sua capacidade de modelar estruturas de dependência simétrica entre variáveis aleatórias (Joe, H., 2014). Sua função de distribuição acumulada bivariada é dada por:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy, \quad (4.11)$$

onde:

- Φ_ρ é a função de distribuição conjunta de uma variável bivariada normal padrão com coeficiente de correlação ρ ;
- Φ^{-1} é a inversa da função de distribuição acumulada da normal padrão;
- $u_1 = F_1(t_1)$ e $u_2 = F_2(t_2)$ são as distribuições marginais uniformizadas;
- $-1 < \rho < 1$, sendo ρ o parâmetro de correlação da cópula Gaussiana.

O parâmetro ρ mede a dependência linear entre as variáveis. Se $\rho = 0$, as variáveis são independentes.

A densidade da cópula Gaussiana é obtida como:

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2}{2(1-\rho^2)}\right), \quad (4.12)$$

onde:

- $z_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ e $z_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ são as transformações inversas das marginais uniformes.

O coeficiente ρ da cópula Gaussiana está relacionado às medidas de associação, como o Tau de Kendall (τ) e o Rho de Spearman (ρ_S), pelas seguintes expressões:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho), \quad \rho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right). \quad (4.13)$$

A função de sobrevivência bivariada associada à cópula Gaussiana é:

$$S(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = 1 - F_1(t_1) - F_2(t_2) + C(F_1(t_1), F_2(t_2); \rho), \quad (4.14)$$

onde $F_1(t_1)$ e $F_2(t_2)$ são as funções de distribuição acumulada marginais.

Dado (T_1, T_2) como variáveis aleatórias emparelhadas com distribuições marginais $F_1(t_1)$ e $F_2(t_2)$ e densidades $f_1(t_1)$ e $f_2(t_2)$, a densidade conjunta é:

$$f(t_1, t_2) = c(F_1(t_1), F_2(t_2); \rho) f_1(t_1) f_2(t_2). \quad (4.15)$$

Figura 10 – Scatterplots da densidade da Cópula Gaussiana e da Conjunta Gaussiana com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$

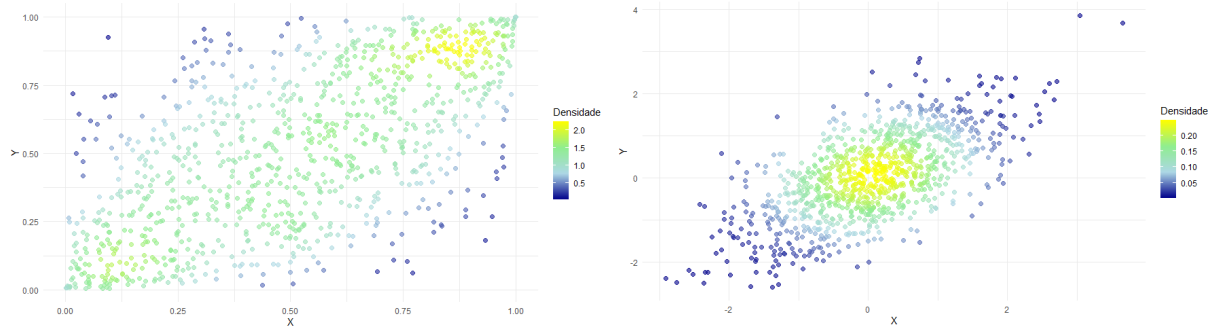
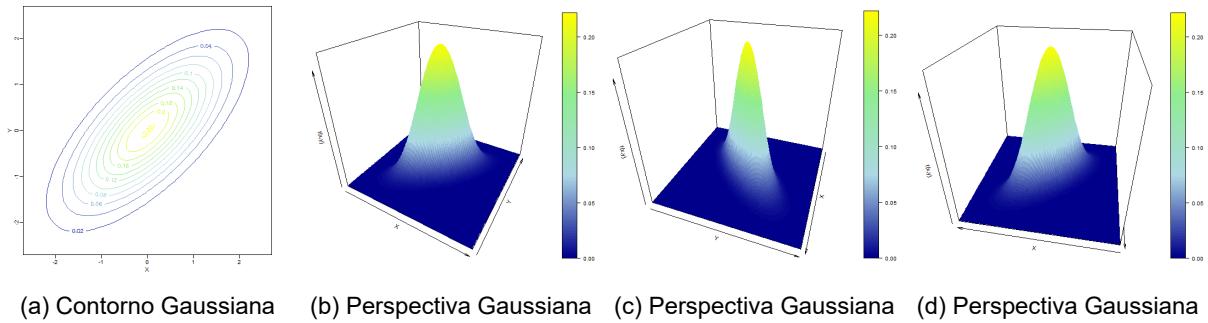


Figura 11 – Contorno e perspectiva da cópula Gaussiana com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$



4.4.1 Cópula de Gumbel

A cópula de Gumbel é amplamente utilizada para modelar estruturas de dependência com cauda superior, sendo uma cópula arquimediana (Nelsen, 2006). Sua forma cumulativa é dada por:

$$C(u_1, u_2) = \exp \left(- \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right), \quad (4.16)$$

onde θ é o parâmetro de dependência que varia no intervalo $[1, +\infty)$. Quanto maior o valor de θ , maior a dependência entre as variáveis nas caudas superiores.

A densidade dessa cópula é dada por:

$$c(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) \times \left(\frac{(\ln u_1 \ln u_2)^{\theta-1}}{(u_1 u_2) \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right)^{2-\frac{1}{\theta}}} \right). \quad (4.17)$$

O coeficiente Tau de Kendall (τ) é dado por:

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}, \quad (4.18)$$

enquanto o coeficiente Rho de Spearman (ρ) é dado por:

$$\rho = 1 - \frac{2}{\theta} \int_0^1 \frac{x^\theta - 1}{x - 1} dx. \quad (4.19)$$

Ambos os coeficientes capturam a dependência positiva entre as variáveis, sendo que valores mais altos de θ resultam em maior dependência de cauda.

Para um modelo de sobrevivência, a função de distribuição conjunta para duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 com distribuições marginais F_1 e F_2 é:

$$F(t_1, t_2) = \exp \left(- \left((-\ln F_1(t_1))^\theta + (-\ln F_2(t_2))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right). \quad (4.20)$$

A função de densidade conjunta para T_1 e T_2 é dada por:

$$f(t_1, t_2) = F(t_1, t_2) \times \left(\frac{(\ln F_1(t_1) \ln F_2(t_2))^{\theta-1}}{(F_1(t_1)F_2(t_2))((- \ln F_1(t_1))^\theta + (- \ln F_2(t_2))^\theta)^{2-\frac{1}{\theta}}} \right). \quad (4.21)$$

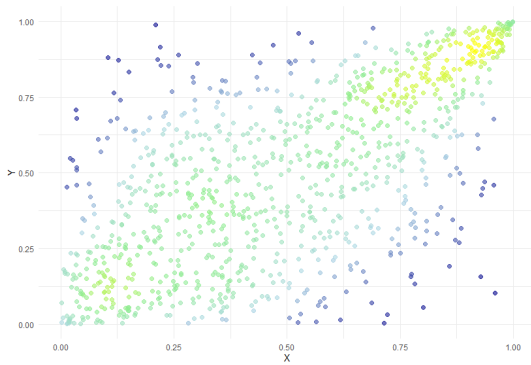
A função de sobrevivência conjunta para os tempos de vida T_1 e T_2 é:

$$S(t_1, t_2) = \exp \left(- \left((-\ln S_1(t_1))^\theta + (-\ln S_2(t_2))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right), \quad (4.22)$$

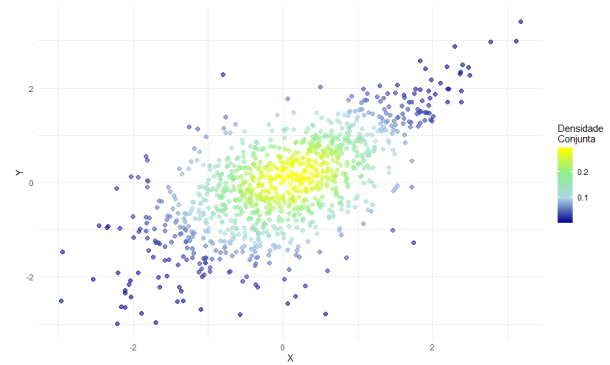
onde S_1 e S_2 são as funções de sobrevivência marginais das variáveis T_1 e T_2 .

Em fig. 12, vemos o comportamento da Clayton com parâmetro $\theta = 2$ e marginais $\mathcal{N}(0, 1)$, sendo o τ de Kendal 0.5. Enquanto em fig. 13 vemos o contorno e a densidade conjunta com as marginais normais padrão.

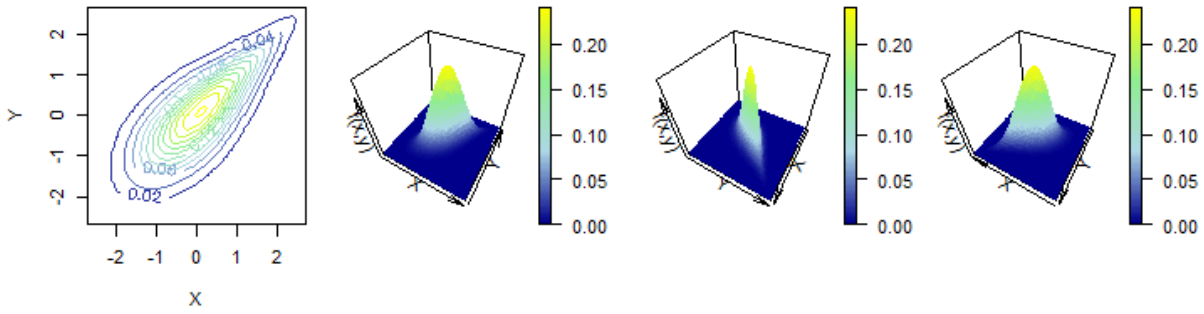
Figura 12 – Scatterplots da densidade da cópula Gumbel e da conjunta Gumbel com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$



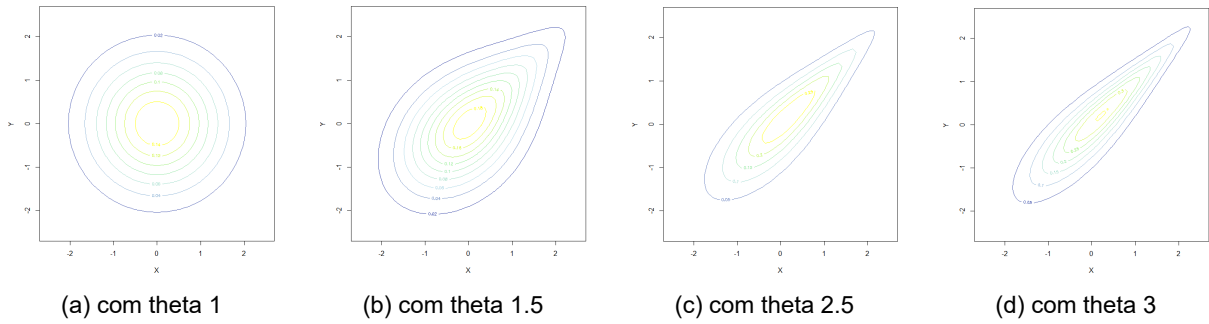
(a) Densidade da cópula Gumbel



(b) Densidade Conjunta Gumbel com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$

Figura 13 – Contorno e perspectiva da Cópula Gumbel com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ 

Em fig. 14, vemos os contornos da densidade com diferentes valores de θ .

Figura 14 – Contorno da cópula Gumbel com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ para diferentes valores de θ 

4.4.2 Cópula de Clayton

Uma cópula bem conhecida é a cópula de Clayton introduzida por Clayton (1978). A cópula de Clayton é uma cópula arquimediana assimétrica de dada por

$$C_{III}(u_1, u_2) = [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, \quad (4.23)$$

onde $\theta \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$. É estrita em $\theta \geq 0$.

A função de densidade $c_{III}(u_1, u_2)$ da cópula é dada por

$$c_{III}(u_1, u_2) = (\theta + 1)(u_1 u_2)^{-\theta-1} [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1]^{-(\frac{1}{\theta}+2)}. \quad (4.24)$$

A cópula de Clayton tem sido usada para estudar riscos correlacionados porque exibe uma forte dependência à esquerda e uma dependência relativamente fraca à direita. Observe que não permite dependência negativa entre as distribuições marginais. Além disso, quando $\theta = 0$ temos independência, enquanto $\theta \rightarrow \infty$ implica dependência positiva perfeita.

A relação entre o parâmetro θ e a medida Tau de Kendall (τ) é dada por:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}. \quad (4.25)$$

A função cumulativa conjunta da cópula de Clayton é dada por

$$F_{III}(t_1, t_2) = C_{III}(F_1(t_1), F_2(t_2)) = [F_1(t_1)^{-\theta} + F_2(t_2)^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, \quad (4.26)$$

e a correspondente função de densidade conjunta para T_1 e T_2 é dada por

$$f_{III}(t_1, t_2) = f_1(t_1)f_2(t_2)(F_1(t_1)F_2(t_2))^{-\theta-1} [F_1(t_1)^{-\theta} + F_2(t_2)^{-\theta} - 1]^{-(\frac{2}{\theta}+2)}. \quad (4.27)$$

A função de sobrevivência conjunta baseada na cópula de Clayton pode ser expressa como

$$S_{III}(t_1, t_2) = S_1(t_1)S_2(t_2) [S_1(t_1)^{-\theta} + S_2(t_2)^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}. \quad (4.28)$$

Em fig. 15, vemos o comportamento da Clayton com parâmetro $\theta = 2$ e marginais $\mathcal{N}(0, 1)$, sendo o τ de Kendal 0.5. Enquanto em fig. 16 vemos o contorno e a densidade conjunta com as marginais normais padrão.

Figura 15 – Scatterplots da densidade da cópula Clayton e da conjunta Clayton com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$

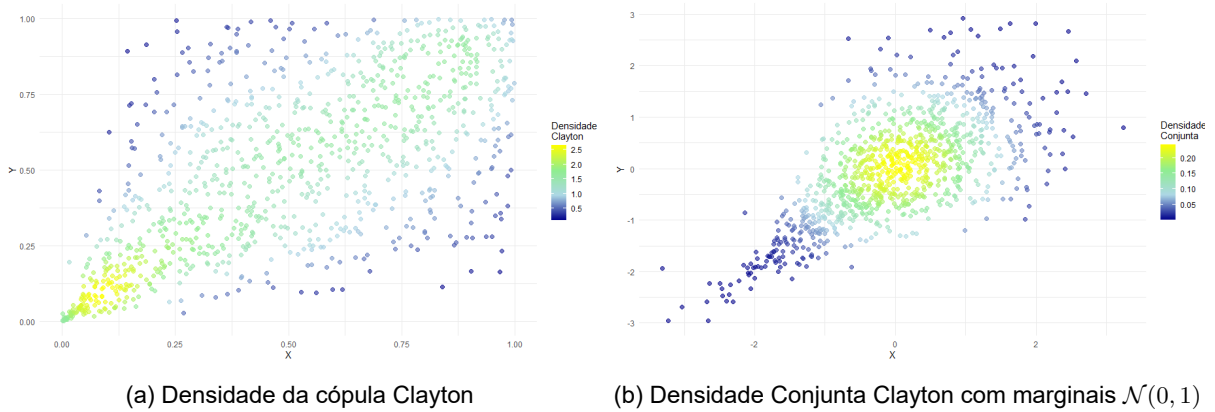
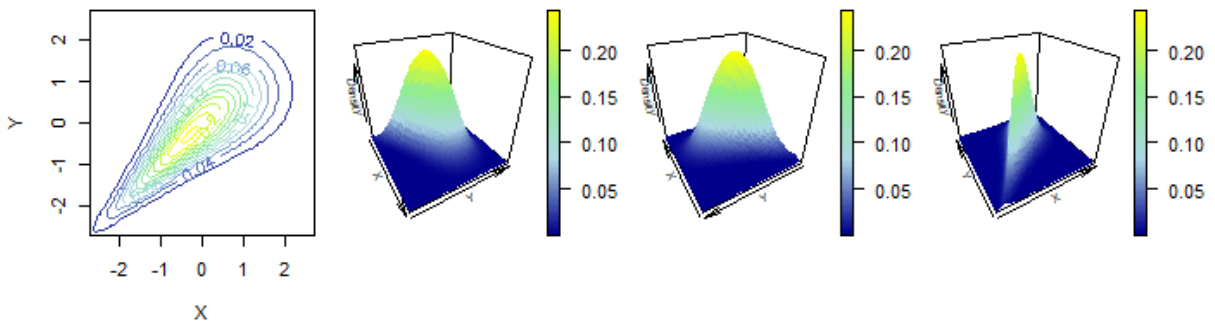
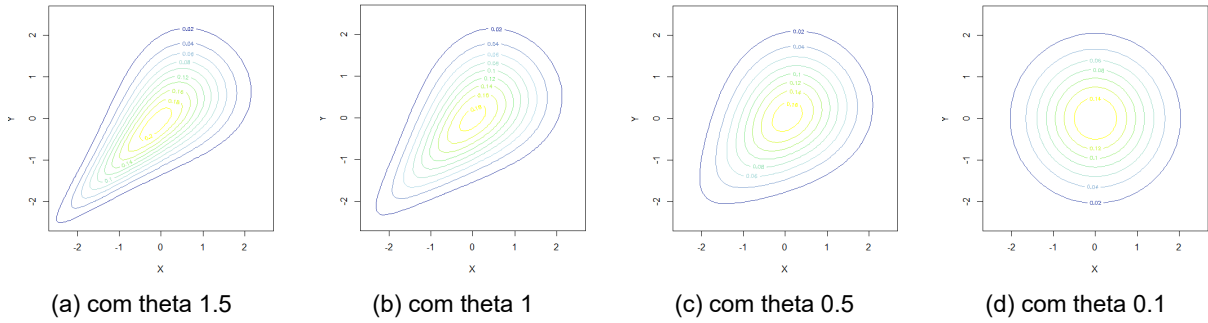


Figura 16 – Contorno e densidade conjunta da Clayton com parâmetro $\theta = 2$ e marginais $\mathcal{N}(0, 1)$



Em fig. 17, vemos os contornos da densidade com diferentes valores de θ .

Figura 17 – Contorno da cópula Clayton com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ para diferentes valores de θ



4.4.3 Cópula de Frank

Outra cópula alternativa é a cópula de Frank (Frank, 1979) que toma a forma:

$$C_{IV}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \quad (4.29)$$

com o parâmetro de dependência $\theta \neq 0$.

A função de densidade $c_{IV}(u_1, u_2)$ da cópula é dada por

$$c_{IV}(u_1, u_2) = -\theta(e^{-\theta} - 1) \frac{e^{-\theta(u_1+u_2)} + 1}{[(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) + e^{-\theta} - 1]^2}. \quad (4.30)$$

Diferentemente das cópulas de Clayton e Gumbel, a cópula de Frank permite modelar tanto dependência positiva quanto negativa nos dados. No entanto, é mais apropriada para dados que exibem dependência fraca na cauda.

A relação entre o parâmetro da cópula de Frank θ e os coeficientes Tau de Kendall (τ) e Rho de Spearman (ρ) é dada pelas equações, respectivamente:

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)], \quad (4.31)$$

$$\rho = 1 - \frac{12}{\theta} [D_1(\theta) - D_2(\theta)], \quad (4.32)$$

onde $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$ é uma função de Debye da k-ésima ordem.

A função cumulativa conjunta da cópula de Frank é dada por:

$$F_{IV}(t_1, t_2) = -\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{(e^{-\theta F_1(t_1)} - 1)(e^{-\theta F_2(t_2)} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \quad (4.33)$$

e a correspondente função de densidade conjunta para T_1 e T_2 é dada por

$$f_{IV}(t_1, t_2) = -\theta(e^\theta + 1)f_1(t_1)f_2(t_2) \exp\{-\theta[F_1(t_1)F_2(t_2)]\} \times \\ \times [(e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta F_1(t_1)} - 1)(e^{-\theta F_2(t_2)} - 1))]^2. \quad (4.34)$$

A função de sobrevivência conjunta pode ser expressa como:

$$S_{IV}(t_1, t_2) = S_1(t_1)S_2(t_2) \left[-\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta F_1(t_1)} - 1)(e^{-\theta F_2(t_2)} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Em fig. 18, vemos o comportamento da Frank com parâmetro $\theta = 4.8$ e marginais $\mathcal{N}(0, 1)$, sendo o τ de Kendal 0.5. Enquanto em fig. 19 vemos o contorno e a densidade conjunta com as marginais normais padrão.

Figura 18 – Scatterplots da densidade da cópula Frank e da conjunta Frank com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$

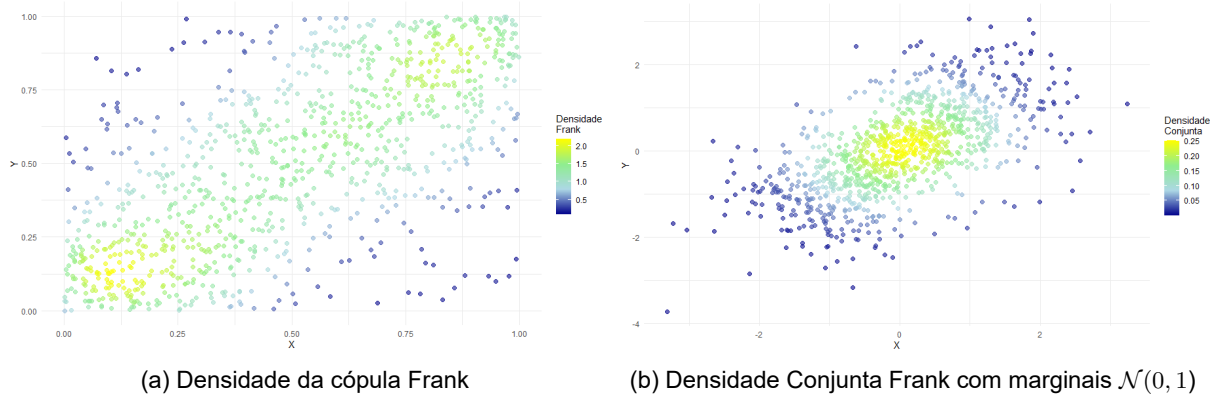
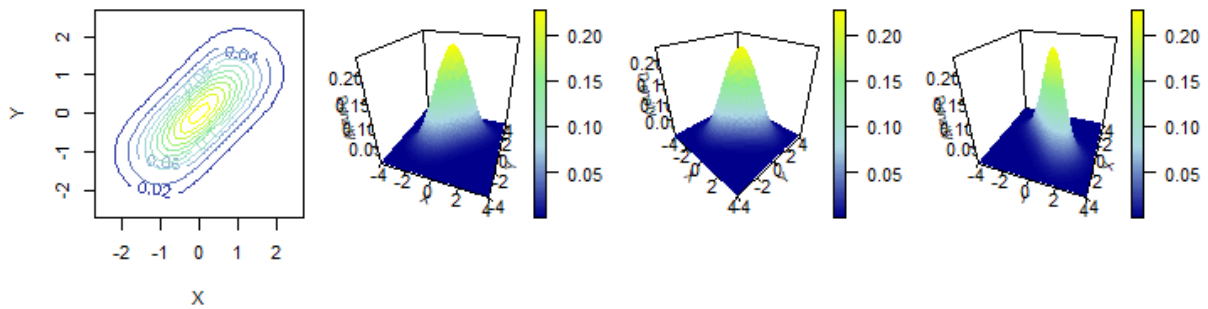
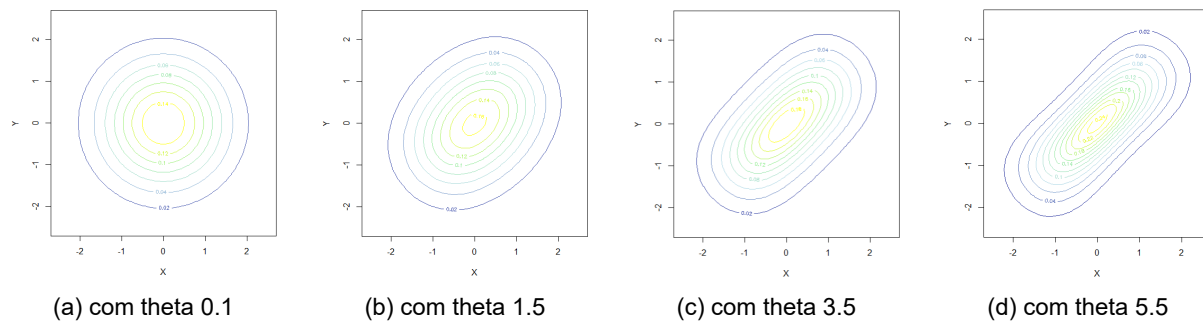


Figura 19 – Contorno e densidade conjunta da Frank com parâmetro $\theta = 4.8$ e marginais $\mathcal{N}(0, 1)$



Em fig. 20, vemos os contornos da densidade com diferentes valores de θ .

Figura 20 – Contorno da cópula Frank com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ para diferentes valores de θ 

5 Aplicação a Dados Reais

5.1 Apresentação dos Dados

Apresentamos um exemplo de aplicação com um conjunto de dados reais. A Tabela 1 apresenta os dados (Woolson e Lachenbruch (1980) e Lin e Ying (1993)) consistindo em tempos de sobrevivência de dois tipos de enxertos de pele no mesmo paciente queimado; i.e, X é referido como enxertos estreitamente combinados, Y como enxertos mal combinados em relação ao sistema de antígeno HL-A ([Human leukocyte antigen](#)).

Tabela 1 – Tempos

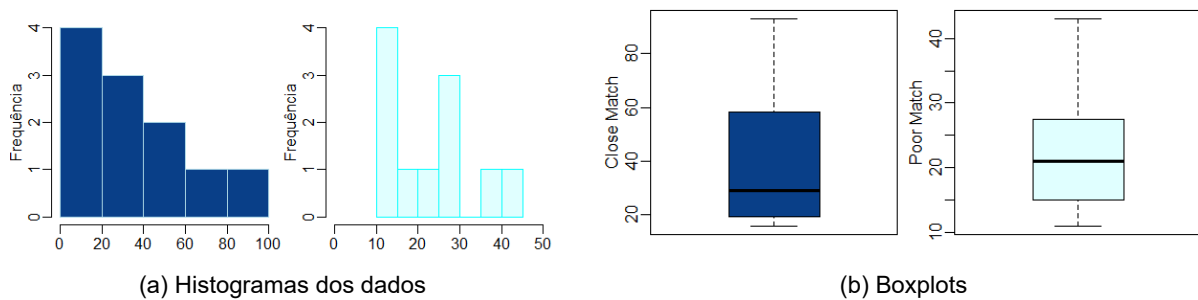
Paciente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Close Match (X)	37	19	57	93	16	22	20	18	63	29	60
Censura (δ_i)	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Poor Match (Y)	29	13	15	26	11	17	26	21	43	15	40
Censura (δ_i)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Próprio Autor

Onde 0 indica tempo censurado. Dito isso, Close Match possui dois dados censurados e nove completos; enquanto Poor Match possui todos os 11 dados completos.

5.2 Análise Descritiva

Figura 21 – Histogramas e Boxplots



Fonte: Próprio Autor

Os histogramas e boxplots mostram que "Close Match" tem dados mais espalhados, enquanto "Poor Match" é mais concentrado em valores baixos e com menor

variabilidade, sem conter outliers.

A média e a variância de cada t_i pode ser vista na seguinte tabela 2:

Tabela 2 – Média e Variância

Tempo	Média	Mediana	Desvio-Padrão
Close Match	39.45455	29.00	25.25614
Poor Match	23.27273	21.00	10.74329

Fonte: Próprio Autor

Foram feitos testes para avaliar a dependência entre os dois tempos pareados, que retornaram os seguintes resultados:

Tabela 3 – Correlações entre o tempo de X e Y .

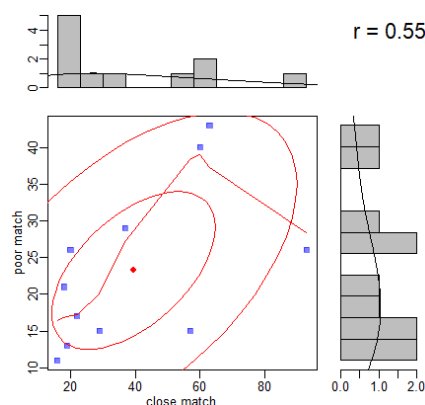
Método de Correlação	Valor da Correlação
Correlação de Pearson	0.547162
ρ de Spearman	0.6621074
τ de Kendall	0.5000858

Fonte: Próprio Autor

Para a correlação de Pearson (ρ), obtivemos aproximadamente 0.547162. Isso sugere que há uma correlação linear positiva moderada entre o tempo de X e o tempo de Y . A correlação de Spearman e Kendall, por outro lado, avaliam relações monotônicas entre variáveis, ou seja, se uma variável aumenta — ou diminui —, a outra tende a seguir o mesmo padrão, independentemente se é linear. A correlação de Spearman de cerca de 0.66 indica uma relação monotônica positiva um pouco mais forte do que a de Pearson, enquanto a de Kendall de 0.50 mostra uma relação monotônica positiva. Nota-se que $\rho \notin [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, portanto a Cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern não pode ser utilizada, como foi explicado em 4.6.

A figura 22 mostra o scatterplot, sendo Close Match X e Poor Match Y .

Figura 22 – Gráfico Scatterplot

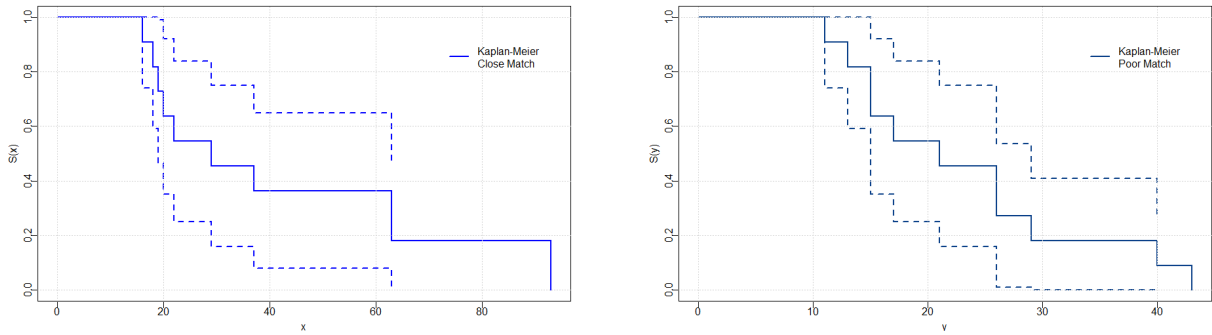


Fonte: Próprio Autor

5.3 Kaplan-Meier, risco e ajustes das distribuições

Primeiro, as curvas de Kaplan-Meier para Close Match (X) e Poor Match (Y), que pode ser vista na figura 23.

Figura 23 – Kaplan-Meier para X , à esquerda, e Y , à direita



Fonte: Próprio Autor

Toma-se 3.5 para estimar os parâmetros das distribuições para poder fazer os ajustes às curvas de Kaplan-Meier 23. Sendo assim, tem-se, para as distribuições testadas:

Weibull:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right) \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} \exp \left(-\frac{x^k}{\lambda} \right) \right]^{\delta_i} \cdot \left[\exp \left(-\frac{x^k}{\lambda} \right) \right]^{1-\delta_i}$$

Inversa Weibull:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\alpha x^{-\alpha-1} \exp(-x^{-\alpha}) \right]^{\delta_i} \left[1 - \exp(-x^{-\alpha}) \right]^{1-\delta_i}$$

Log-normal:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right]^{\delta_i} \cdot \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{1-\delta_i}$$

em que Φ é a acumulada do normal padrão:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

EEG:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\frac{\lambda \gamma e^{-\gamma x}}{[1 - (1 - \gamma)e^{-\gamma x}]^2} \right]^{\delta_i} \cdot \left[\frac{\gamma e^{-\gamma x}}{(1 - \gamma)e^{-\gamma x}} \right]^{1-\delta_i}$$

Exponencial:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\lambda e^{-\lambda x} \right]^{\delta_i} \cdot \left[e^{-\lambda x} \right]^{1-\delta_i}$$

Gama:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \right]^{\delta_i} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \right) \right]^{1-\delta_i}$$

em que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ Lindley:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\frac{\theta^2(1+x)}{(1+\theta)} e^{-\theta x} \right]^{\delta_i} \cdot \left[\left(\frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} \right) \right]^{1-\delta_i}$$

Exp.Gen.:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\alpha (1 - \exp(-\lambda x))^{\alpha-1} \cdot \exp(-\lambda x) \right]^{\delta_i} \cdot [(\exp(-\lambda x))^\alpha]^{1-\delta_i}$$

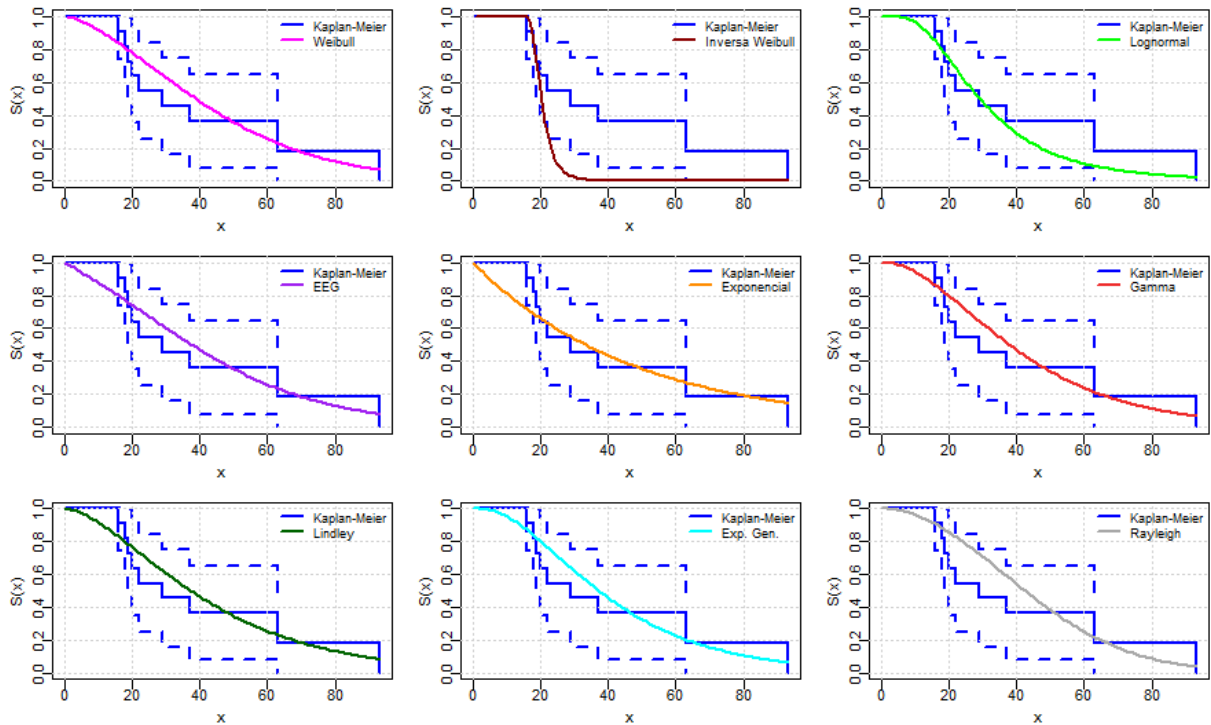
Rayleigh:

$$L = \prod_{n=i}^n \left[\frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \right]^{\delta_i} \cdot \left[\left(e^{x^2/(2\sigma^2)} \right) \right]^{1-\delta_i}$$

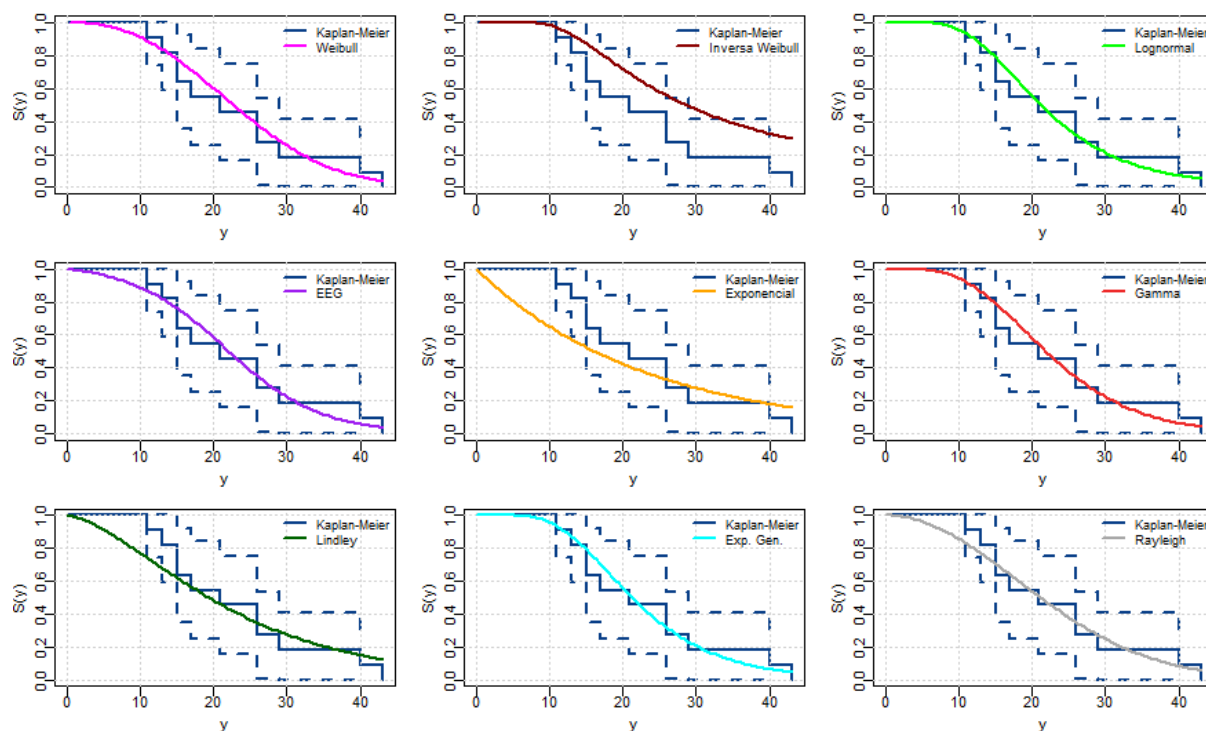
Nota-se que, para quando não há censura, a verossimilhança resumir-se-á a $L = \prod_{n=i}^n f(x)$.

Logo, ao se considerar os respectivos tempos e as respectivas censuras, os resultados são apresentados na Figura 24, para X , e na Figura 25, para Y .

Figura 24 – Kaplan-Meier para X com as distribuições ajustadas

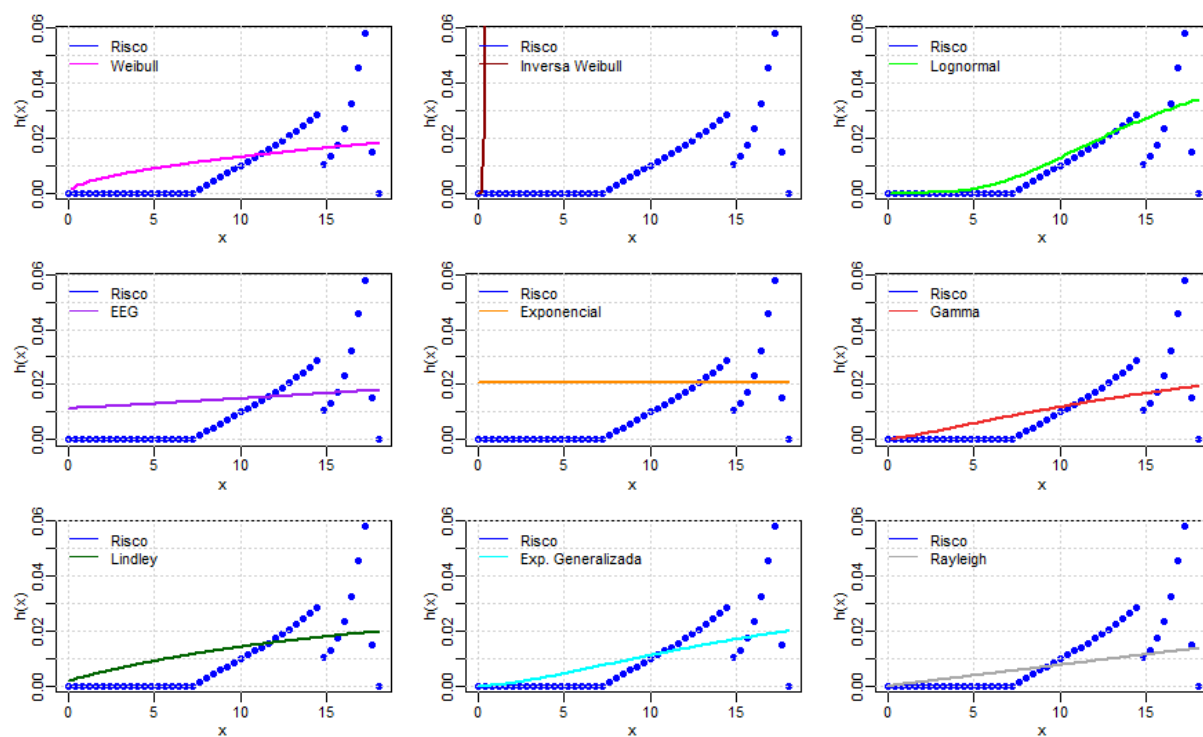


Fonte: Próprio Autor

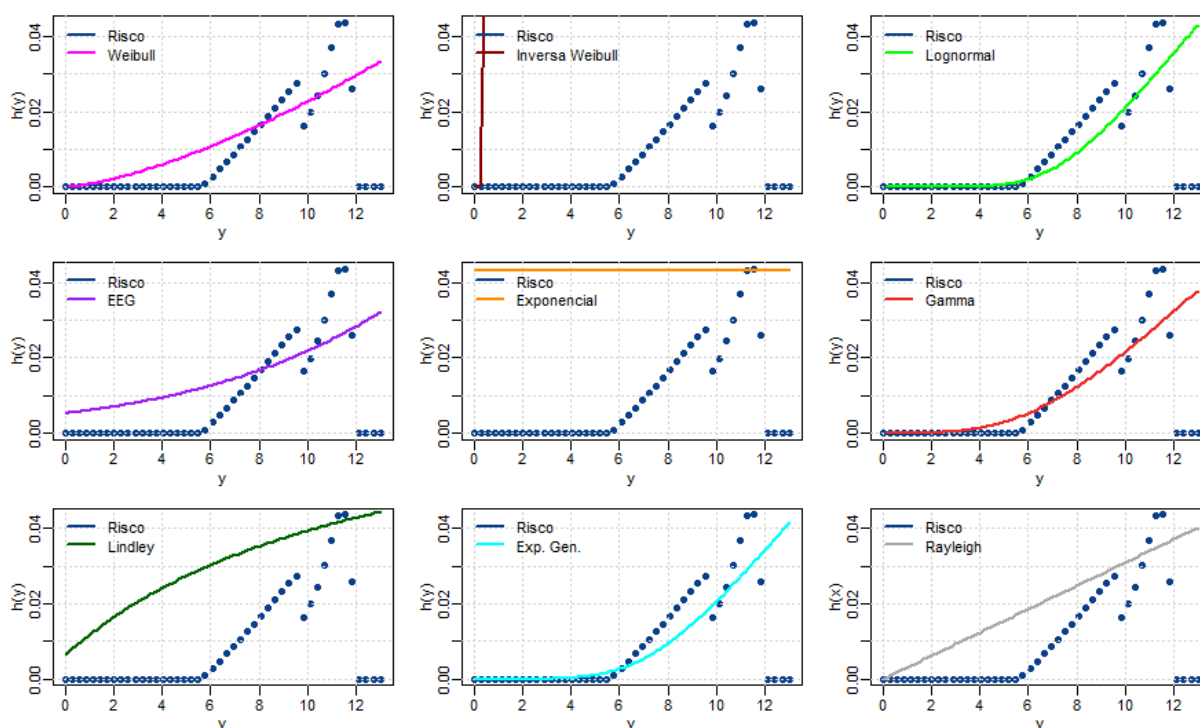
Figura 25 – Kaplan-Meier para Y com as distribuições ajustadas

Fonte: Próprio Autor

As funções de risco, que são apresentadas nas figuras 26 e 27:

Figura 26 – Risco para X 

Fonte: Próprio Autor

Figura 27 – Risco para Y 

Fonte: Próprio Autor

Pode-se concluir que a distribuição que melhor se ajusta para os dois tempos é a Log-Normal, pois é a as que melhor se ajusta aos dados empíricos, que são representados pelo tracejado (no Kaplan-Meier) e pontos (no Risco) na cor azul claro para o tempo de X ; enquanto para Y , representados pelo tracejado e pontos na cor azul escuro.

Tendo, então, na tabelas 4, os valores dos parâmetros das distribuições e seus intervalos de confiança calculados pelo método da máxima verossimilhança, juntamente com os valores de AIC e BIC para os ajustes das respectivas distribuições aos respectivos dados:

Tabela 4 – Parâmetros, Intervalos de Confiança e testes AIC e BIC, para X e Y

Distribuição	Parâmetros	EMV	Erro-padrão	I.C.	AIC	BIC
Log-Normal para X	μ_1	3.3720	0.1922	[2.9953; 3.7487]	87.3819	88.1777
	σ_1	0.5767	0.1358	[0.3104; 0.8428]		
Log-Normal para Y	μ_2	3.0537	0.1300	[2.7990; 3.3083]	83.8763	84.6721
	σ_2	0.4309	0.0918	[0.2509; 0.6109]		

Fonte: Próprio Autor

6 Ajustes e estimação das Cópulas

Após ajustar as distribuições marginais, pode-se fazer a estimação pelo método da máxima verossimilhança dado em 3.7. Considerando t_1 como x e t_2 como y , reescreve-se:

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i)^{\delta_{1i}\delta_{2i}} \times \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i} \right)^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \times \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial y_i} \right)^{(1-\delta_{1i})\delta_{2i}} \times \prod_{i=1}^n S(x_i, y_i)^{(1-\delta_{1i})(1-\delta_{2i})}. \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \\ f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial x \partial y} \\ f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} \\ f_{XY}(x, y) &= c(u, v) f_X(x) f_Y(y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{array}{c|c} \frac{d}{dx} F_{XY}(x, y) & \frac{d}{dy} F_{XY}(x, y) \\ \frac{d}{dx} C(F_X(x), F_Y(y)) & \frac{d}{dy} C(F_X(x), F_Y(y)) \\ \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x)} \cdot \frac{dF_X(x)}{dx} & \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_Y(y)} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ \frac{d}{dx} C(F_X(x), F_Y(y)) & \frac{d}{dy} C(F_X(x), F_Y(y)) \\ \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \cdot f_X(x) & \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \cdot f_Y(y) \end{array} \quad (6.3)$$

onde $u = F_X(x)$ e $v = F_Y(y)$.

$$E: \quad S(x, y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{XY}(x, y) \quad (6.4)$$

O processo do cálculo para o EMV bivariado censurado para cada cópula pode ser vista no APÊNDICE.

Portanto, para as cópulas Clayton, Frank, Gumbel e Gaussiana, os gráficos de contorno e perspectiva podem ser vistos nas figuras 28, 29, 30 e 31, respectivamente. Enquanto os resultados das estimações dos parâmetros e intervalos de confiança podem ser vistos na tabela ??.

Figura 28 – Contorno e perspectivas da densidade Clayton com a distribuição Log-Normal

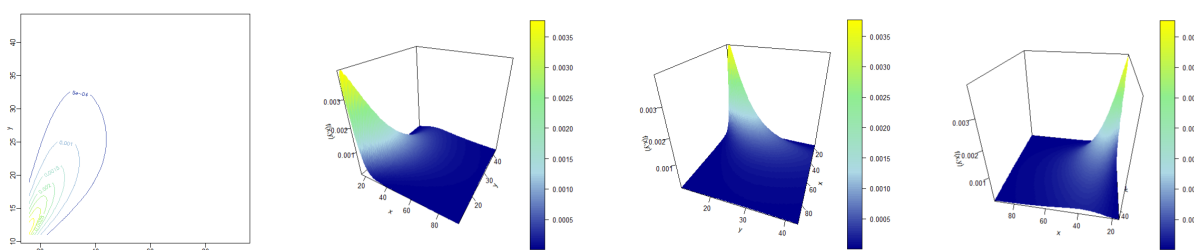


Figura 29 – Contorno e perspectivas da densidade Frank com distribuição Log-Normal

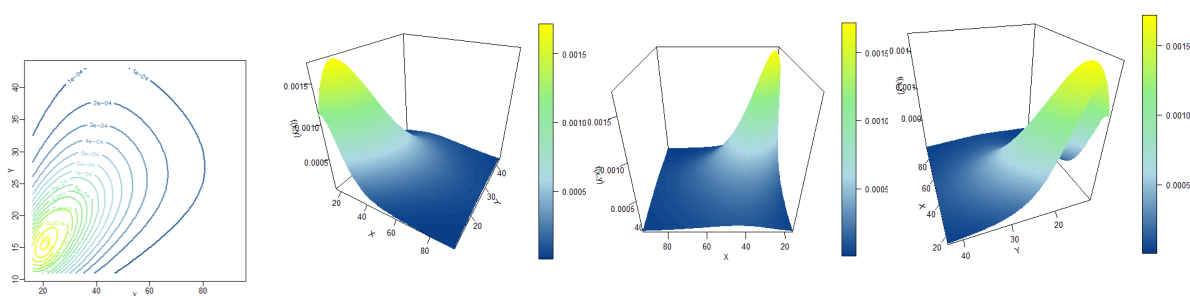


Figura 30 – Contorno e perspectivas da densidade Gumbel com distribuição Log-Normal

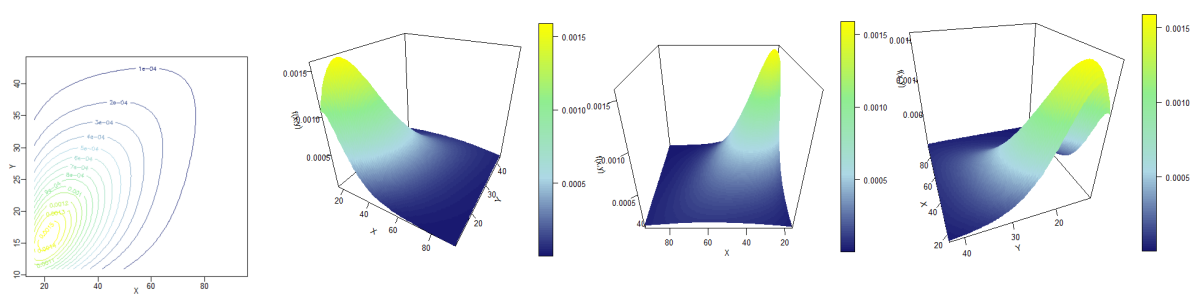


Figura 31 – Contorno e perspectivas da densidade Gaussiana com distribuição Log-Normal

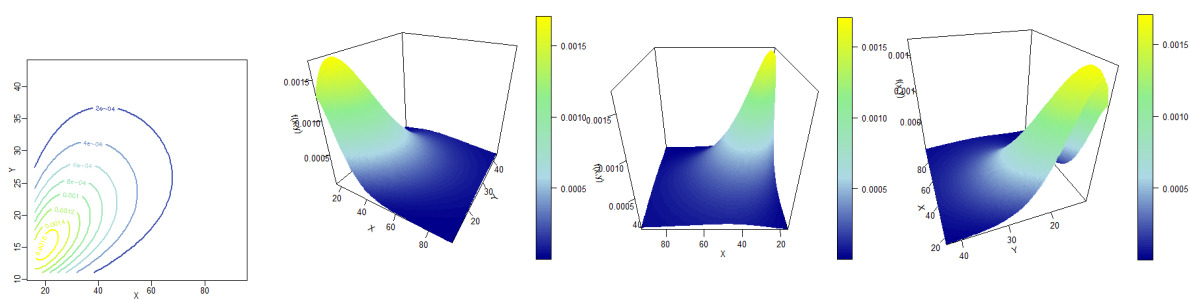


Tabela 5 – Resultados das estimativas de máxima verossimilhança (EMV) para diferentes cópulas com marginais Log-Normal Bivariada

Cópula com as Marginais	Parâmetro	EMV	Erro-padrão	L.I.	L.S.	AIC	BIC
Cópula Clayton com Log-Normal Bivariada	μ_1	3.3899	0.1705	3.0576	3.7222	162.4484	164.4378
	σ_1	0.5507	0.1695	0.3225	0.7788		
	μ_2	3.1020	0.1164	2.7878	3.4162		
	σ_2	0.5447	0.1603	0.3120	0.7774		
	θ	2.4367	1.2701	-0.05255	4.9261		
Cópula Frank com Log-Normal Bivariada	μ_1	3.4901	0.1696	3.1660	3.8142	181.9044	183.8939
	σ_1	0.5704	0.1165	0.3419	0.7988		
	μ_2	3.0721	0.1268	2.8234	3.3207		
	σ_2	0.4289	0.0881	0.2562	0.6016		
	θ	3.5169	1.8736	-0.1553	7.1891		
Cópula Gumbel com Log-Normal Bivariada	μ_1	3.4777	0.1773	3.1300	3.8253	182.1617	184.1512
	σ_1	0.5791	0.1220	0.3399	0.8183		
	μ_2	3.0768	0.1321	2.8179	3.3357		
	σ_2	0.4442	0.0917	0.2643	0.6240		
	θ	1.5801	0.4228	0.7514	2.4088		
Cópula Gaussiana com Log-Normal Bivariada	μ_1	3.4986	0.1769	3.1518	3.8455	181.3660	183.3555
	σ_1	0.5869	0.1251	0.3416	0.8321		
	μ_2	3.0536	0.1299	2.7990	3.3083		
	σ_2	0.4309	0.0918	0.2508	0.6109		
	ρ	0.6031	0.1918	0.2271	0.9791		

Há a presença de um intervalo de confiança fora do espaço paramétrico, no caso, o parâmetro θ para a Clayton e Frank com a Log-Normal Bivariada. A justificativa é o uso do método assintótico do EMV, que é para amostras grandes, enquanto o conjunto de dados é pequeno. O uso da técnica de Bootstrap poderia ter sido usado para melhor adequação dos intervalos.

CONCLUSÕES

O uso de Cópulas para modelar distribuições bivariadas é uma boa alternativa. Com o uso da ferramenta, pode-se estimar os parâmetros das funções bivariadas e encontrar a distribuição conjunta, resolvendo o problema para esses casos onde há dependência.

A Cópula de Clayton mostrou melhores resultados, o que pode ser visto nos valores dos critérios AIC e BIC.

A distribuição bivariadas Log-Normal se mostrou como boa alternativa para analisar tempos de vida bivariados. Porém, o uso da inferência frequentista não se adequou bem para esse caso com amostra pequena, tendo limites inferiores do intervalo de confiança fora do espaço paramétrico, o que pode ser corrigido pelo método de Bootstrap.

REFERÊNCIAS

- ACHCAR, J. A.; MOALA, F. A.; TARUMOTO, M. H.; COLADELLO, L. F. **Uma distribuição exponencial generalizada bivariada derivada de funções de cópula na presença de dados censurados e covariáveis**. *Pesquisa Operacional*, v. 35, n. 1, p. 165-186, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1590/0101-7438.2015.035.01.0165>.
- ACHCAR, J. A.; CUEVAS, J. R. T.; MOALA, F. A. **Use of Graphical Methods in the Diagnostic of Parametric Probability Distributions for Bivariate Lifetime Data in Presence of Censored Data**. *Journal of Data Science*, v. 17, n. 3, p. 445-480, 2019. DOI: [https://doi.org/10.6339/JDS.201907_17\(3\).0001](https://doi.org/10.6339/JDS.201907_17(3).0001).
- CLAYTON, D. **A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence**. *Biometrika*, (65), 141-151, 1978.
- COLOSIMO, A.; GIOLO, R. **Análise de sobrevivência aplicada**. Brasil: *Edgard Blucher*, 2006.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distribution. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, v. 41, p. 173-188, 1999.
- HAHN, Gerald J.; SHAPIRO, Samuel S. **Statistical Models in Engineering**. *Wiley series on systems engineering and analysis*, 1967. ISSN 0084-019X.
- HAUGH, Martin. An introduction to copulas. 29 jan. 2016, 28 mai. 2016. 21 p. Notas de Aula.
- JOE, H. **Multivariate Models and Dependence Concepts**, *Editora Chapman & Hall*, Londres, 1997.
- LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. New York: John Wiley, 1982.
- LEDWINA, T. (2015). Visualizing association structure in bivariate copulas using new dependence function. In: *Stochastic models, Statistics and their applications*, Ed: Steland, A.; Rafajlowicz, E.; Szajowski, K;. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 19-27
- LEE, E.T. *Statistical methods for survival data analysis*. Editora John Wiley e Sons, Nova Iorque, 1992.

LIN, D. Y.; YING, Z. A simple nonparametric estimator of the bivariate survival function under univariate censoring. *Biometrika*, v. 80, p. 573-581, 1993.

MALLER, R. A.; ZHOU, X. **Survival Analysis with Long-Term Survivors**. New York, NY: Wiley, 1996.

NELSEN, R. B. **An Introduction to Copulas**. 2nd ed. New York, NY: *Springer Series in Statistics*, 2006.

SKLAR, A. **Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges**. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, p. 8:229–231, 1959.

TRAN, Q. KIDWELL, K.M & TSODIKOV, A. A joint model of cancer incidence, metastasis, and mortality. *Lifetime Data Anal* 24, 385–406 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10985-017-9407-2>

WOOLSON, R. F.; LACHENBRUCH, P. A. Rank tests for censored matched pairs. *Biometrika*, v. 67, p. 597-606, 1980.

APÊNDICE

Clayton

De 4.23 aplica-se 4.3:

1. A densidade conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

2. $F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial x \partial y}$$

3. Aplicar a regra da cadeia:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$$

4. Escrever em termos de $c(u, v)$, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$:

$$f_{XY}(x, y) = c(u, v) f_X(x) f_Y(y)$$

5. A cópula de Clayton é definida como:

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

6. Calcular $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} &= (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} u^{-\theta-1} \\ \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left((u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} u^{-\theta-1} \right) \\ &= (1 + \theta) (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2} u^{-\theta-1} v^{-\theta-1} \end{aligned}$$

7. Substituir em $c(u, v)$:

$$c(u, v) = (1 + \theta) (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} u^{-\theta-1} v^{-\theta-1}$$

8. $\therefore$ a densidade conjunta é:

$$f_{XY}(x, y) = (1 + \theta) (F_X(x)^{-\theta} + F_Y(y)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} F_X(x)^{-\theta-1} F_Y(y)^{-\theta-1} f_X(x) f_Y(y) \quad (6.5)$$

Para $-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i}$, aplica-se 6.3

1. A derivada de $S_{XY}(x, y)$ em relação a x :

$$\frac{d}{dx} F_{XY}(x, y)$$

2. Substituir $S_{XY}(x, y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$, onde $F(x, y)$ é a cópula:

$$\frac{d}{dx} (1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y))$$

3. Derivar em relação a x :

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx} (1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)) \\ &= -\frac{dF_X(x)}{dx} + \frac{dS(x, y)}{dx} \end{aligned}$$

4. A derivada de $S(x, y)$ em relação a x pode ser calculada usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{dS(x, y)}{dx} &= \frac{d}{dx} (1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{XY}(x, y)) \\ &= -f_X(x) + \frac{dF_{XY}(x, y)}{dx} \end{aligned}$$

5. Substituir $F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ e aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{dF_{XY}(x, y)}{dx} = \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x)} \cdot \frac{dF_X(x)}{dx}$$

6. A derivada de $C(u, v)$ em relação a $u = F_X(x)$:

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} u^{-\theta-1}$$

7. Substituir os resultados na expressão para $\frac{d}{dx} F_{XY}(x, y)$:

$$\frac{d}{dx} F_{XY}(x, y) = -f_X(x) + (F_X(x)^{-\theta} + F_Y(y)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} F_X(x)^{-\theta-1} f_X(x) \quad (6.6)$$

Para $-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial y_i}$ é análogo, seguindo 6.3, resultado em:

$$\frac{d}{dy} F_{XY}(x, y) = -f_Y(y) + (F_X(x)^{-\theta} + F_Y(y)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} F_Y(y)^{-\theta-1} f_Y(y) \quad (6.7)$$

Por fim, substituindo 6.5, 6.6, 6.7 e 6.4 em 6.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
 L = & \prod_{i=1}^n \left((1 + \theta) (F_X(x)^{-\theta} + F_Y(y)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} F_X(x)^{-\theta-1} F_Y(y)^{-\theta-1} f_X(x) f_Y(y) \right)^{\delta_{1i} \delta_{2i}} \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(f_X(x) + (F_X(x)^{-\theta} + F_Y(y)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} F_X(x)^{-\theta-1} f_X(x) \right)^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(f_Y(y) + (F_X(x)^{-\theta} + F_Y(y)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} F_Y(y)^{-\theta-1} f_Y(y) \right)^{(1-\delta_{1i})\delta_{2i}} \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n (1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{XY}(x, y))^{(1-\delta_{1i})(1-\delta_{2i})}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Frank

De 4.29 aplica-se 4.3:

1. A densidade conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

2. $F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial x \partial y}$$

3. Aplicar a regra da cadeia:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$$

4. Escrever em termos de $c(u, v)$, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$:

$$f_{XY}(x, y) = c(u, v) f_X(x) f_Y(y)$$

5. A cópula de Frank é definida como:

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

6. Calcular $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$:

a) Primeiro, calcular a derivada parcial de $C(u, v)$ em relação a u :

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \frac{e^{-\theta u}(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)}$$

b) Em seguida, calcular $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$:

$$\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\theta^2 e^{-\theta(u+v)} (e^{-\theta} - 1)}{(e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1))^2}$$

7. Substituir em $c(u, v)$:

$$c(u, v) = \frac{\theta^2 e^{-\theta(u+v)} (e^{-\theta} - 1)}{(e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1))^2}$$

8. $\therefore$ a densidade conjunta é:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\theta^2 e^{-\theta(F_X(x) + F_Y(y))} (e^{-\theta} - 1)}{(e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta F_X(x)} - 1)(e^{-\theta F_Y(y)} - 1))^2} f_X(x) f_Y(y) \quad (6.9)$$

Para $-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i}$, aplica-se 6.3:

1. Substituir $S(x, y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{XY}(x, y)$:

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = -f_X(x) + \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x)} \cdot f_X(x)$$

2. A derivada parcial de $C(u, v)$ em relação a $u = F_X(x)$:

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \frac{e^{-\theta u}(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)}$$

3. Substituir os resultados:

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = -f_X(x) + \frac{e^{-\theta F_X(x)}(e^{-\theta F_Y(y)} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) \left(1 + \frac{(e^{-\theta F_X(x)} - 1)(e^{-\theta F_Y(y)} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)} f_X(x) \quad (6.10)$$

4. Para $-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial y_i}$, é análogo:

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = -f_Y(y) + \frac{e^{-\theta F_Y(y)}(e^{-\theta F_X(x)} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) \left(1 + \frac{(e^{-\theta F_X(x)} - 1)(e^{-\theta F_Y(y)} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)} f_Y(y) \quad (6.11)$$

Por fim, substituindo 6.9, 6.10, 6.11 e 6.4 em 6.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
 L = & \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta^2 e^{-\theta(F_X(x)+F_Y(y))} (e^{-\theta} - 1)}{(e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta F_X(x)} - 1)(e^{-\theta F_Y(y)} - 1))^2} f_X(x) f_Y(y) \right)^{\delta_{1i} \delta_{2i}} \times \\
 & \prod_{i=1}^n \left(f_X(x) + \frac{e^{-\theta F_X(x)} (e^{-\theta F_Y(y)} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) \left(1 + \frac{(e^{-\theta F_X(x)} - 1)(e^{-\theta F_Y(y)} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)} f_X(x) \right)^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \times \\
 & \prod_{i=1}^n \left(f_Y(y) + \frac{e^{-\theta F_Y(y)} (e^{-\theta F_X(x)} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) \left(1 + \frac{(e^{-\theta F_X(x)} - 1)(e^{-\theta F_Y(y)} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)} f_Y(y) \right)^{(1-\delta_{1i})\delta_{2i}} \times \\
 & \prod_{i=1}^n (1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y)))^{(1-\delta_{1i})(1-\delta_{2i})}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Gumbel

De 4.16 aplica-se 4.3:

1. A densidade conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

2. $F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial x \partial y}$$

3. Aplicar a regra da cadeia:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$$

4. Escrever em termos de $c(u, v)$, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$:

$$f_{XY}(x, y) = c(u, v) f_X(x) f_Y(y)$$

5. A cópula de Gumbel é definida como:

$$C(u, v) = \exp \left(- \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right)$$

6. Calcular $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} &= C(u,v) \cdot [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta-1} \cdot \frac{(-\ln u)^{\theta-1}}{u} \\ \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(C(u,v) \cdot [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta-1} \cdot \frac{(-\ln u)^{\theta-1}}{u} \right) \\ &= C(u,v) \cdot \frac{((- \ln u)(- \ln v))^{\theta-1}}{(uv) [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{2-\frac{1}{\theta}}}\end{aligned}$$

7. Substituir em $c(u,v)$:

$$c(u,v) = C(u,v) \cdot \frac{((- \ln u)(- \ln v))^{\theta-1}}{(uv) [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{2-\frac{1}{\theta}}}$$

8. $\therefore$ a densidade conjunta é:

$$\begin{aligned}f_{XY}(x,y) &= C(F_X(x), F_Y(y)) \times \\ &\times \frac{((- \ln F_X(x))(- \ln F_Y(y)))^{\theta-1}}{(F_X(x)F_Y(y)) [(-\ln F_X(x))^\theta + (-\ln F_Y(y))^\theta]^{2-\frac{1}{\theta}}} \times \\ &\times f_X(x)f_Y(y)\end{aligned}\tag{6.13}$$

Para $-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i}$, aplica-se a fórmula da cópula de sobrevivência Gumbel:

1. Substituir $S(x,y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y))$:

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = -f_X(x) + \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x)} \cdot f_X(x)$$

2. A derivada parcial de $C(u,v)$ em relação a $u = F_X(x)$:

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = \exp \left(- [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta} \right) \cdot \frac{(-\ln u)^{\theta-1}}{u} \cdot [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}-1}$$

3. Substituir os resultados:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} &= f_X(x) \cdot \left(1 - \exp \left(- [(-\ln F_X(x))^\theta + (-\ln F_Y(y))^\theta]^{1/\theta} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{(-\ln F_X(x))^{\theta-1}}{F_X(x)} \cdot [(-\ln F_X(x))^\theta + (-\ln F_Y(y))^\theta]^{\frac{1}{\theta}-1} \right)\end{aligned}\tag{6.14}$$

4. Para $-\frac{\partial S(x_i, y_i)}{\partial y_i}$, o processo é análogo:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} &= f_Y(y) \cdot \left(1 - \exp \left(- [(-\ln F_X(x))^\theta + (-\ln F_Y(y))^\theta]^{1/\theta} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{(-\ln F_Y(y))^{\theta-1}}{F_Y(y)} \cdot [(-\ln F_X(x))^\theta + (-\ln F_Y(y))^\theta]^{\frac{1}{\theta}-1} \right)\end{aligned}\tag{6.15}$$

Por fim, substituindo 6.13, 6.14, 6.15 e 6.4 em 6.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
 L = & \prod_{i=1}^n \left(C(F_X(x), F_Y(y)) \cdot \frac{((- \ln F_X(x))(- \ln F_Y(y)))^{\theta-1}}{(F_X(x)F_Y(y)) [(- \ln F_X(x))^\theta + (- \ln F_Y(y))^\theta]^{2-\frac{1}{\theta}}} \cdot f_X(x)f_Y(y) \right)^{\delta_{1i}\delta_{2i}} \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(f_X(x) \cdot \left(1 - \exp \left(- \left[(- \ln F_X(x))^\theta + (- \ln F_Y(y))^\theta \right]^{1/\theta} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \cdot \frac{(- \ln F_X(x))^{\theta-1}}{F_X(x)} \cdot \left[(- \ln F_X(x))^\theta + (- \ln F_Y(y))^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}-1} \right) \right)^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(f_Y(y) \cdot \left(1 - \exp \left(- \left[(- \ln F_X(x))^\theta + (- \ln F_Y(y))^\theta \right]^{1/\theta} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \cdot \frac{(- \ln F_Y(y))^{\theta-1}}{F_Y(y)} \cdot \left[(- \ln F_X(x))^\theta + (- \ln F_Y(y))^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}-1} \right) \right)^{(1-\delta_{1i})\delta_{2i}} \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y)) \right)^{(1-\delta_{1i})(1-\delta_{2i})}.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Gaussiana

De 4.11 aplica-se 4.3:

1. A densidade conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

2. $F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial x \partial y}$$

3. Aplicar a regra da cadeia:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y},$$

onde $u = F_X(x)$ e $v = F_Y(y)$. Então:

$$\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \Phi_\rho(x, y)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \Phi^{-1}(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi^{-1}(v)}{\partial v}. \tag{6.17}$$

4. Desenvolver:

- a) A segunda derivada mista de $\Phi_\rho(x, y)$ em relação a x e y é a densidade bivariada normal padrão $\phi_\rho(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_\rho(x, y)}{\partial x \partial y} = \phi_\rho(x, y). \quad (6.18)$$

- b) Derivada de $\Phi^{-1}(u)$ em relação a u :

$$\frac{\partial \Phi^{-1}(u)}{\partial u} = \frac{1}{\phi(u)},$$

- c) Derivada de $\Phi^{-1}(v)$ em relação a v :

$$\frac{\partial \Phi^{-1}(v)}{\partial v} = \frac{1}{\phi(v)},$$

- d) Se $x = \Phi^{-1}(u)$ e $y = \Phi^{-1}(v)$, reescreve-se, portanto:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))}{\phi(\Phi^{-1}(u))\phi(\Phi^{-1}(v))}.$$

5. As derivadas das acumuladas marginais são:

$$\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x); \quad \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y)$$

6. Substituir os resultados no cálculo da densidade conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

7. Substituir os resultados no cálculo da densidade conjunta:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= c(F_X(x), F_Y(y)) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) = \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (\Phi^{-1}(F_X(x))^2 + \Phi^{-1}(F_Y(y))^2 - 2\rho\Phi^{-1}(F_X(x))\Phi^{-1}(F_Y(y)))\right)}{\phi(\Phi^{-1}(F_X(x)))\phi(\Phi^{-1}(F_Y(y)))} \times \\ &\times f_X(x) \cdot f_Y(y). \end{aligned} \quad (6.19)$$

8. Reescrevendo $c(u, v)$:

$$c(u, v) = \frac{\phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))}{\phi(\Phi^{-1}(u))\phi(\Phi^{-1}(v))},$$

Então:

$$f_{XY}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{\phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))}{\phi(\Phi^{-1}(u))\phi(\Phi^{-1}(v))} \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

onde:

- $\phi_\rho(x, y)$ é a densidade bivariada normal padrão com correlação ρ :

$$\phi_\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right),$$

com $x = \Phi^{-1}(u)$ e $y = \Phi^{-1}(v)$.

- $\phi(z)$ é a densidade univariada normal padrão:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

Para $\frac{\partial S(x, y)}{\partial x}$, aplica-se a definição da cópula como $1 - F(x) - F(y) + F(x, y)$:

1. A derivada de $S(u, v)$ em relação a x :

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [1 - F(x) - F(y) + F(x, y)].$$

2. Substituir $F(x) = \Phi(x)$ e $F(x, y) = \Phi_\rho(x, y)$, onde Φ é a função normal padrão e Φ_ρ é a função de distribuição bivariada normal:

$$\frac{\partial}{\partial x} [1 - \Phi(x) - \Phi(y) + \Phi_\rho(x, y)].$$

3. Derivar termo a termo em relação a x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (1) - \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) - \frac{\partial}{\partial x} \Phi(y) + \frac{\partial}{\partial x} \Phi_\rho(x, y) \\ &= 0 - \phi(x) - 0 + \phi_\rho(x, y), \end{aligned}$$

onde $\phi(x)$ é a densidade normal padrão e $\phi_\rho(x, y)$ é a densidade bivariada normal.

4. Resultado final para $\frac{\partial S(x, y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = -\phi(x) + \phi_\rho(x, y).$$

1. Para $\frac{\partial S(x, y)}{\partial y}$, o raciocínio é análogo:

2. Resultado final para $\frac{\partial S(x, y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = -\phi(y) + \phi_\rho(x, y).$$

Por fim, substituindo 6.13, 6.14, 6.15 e 6.4 em 6.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
 L = & \prod_{i=1}^n \left(\frac{\phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))}{\phi(\Phi^{-1}(u)) \phi(\Phi^{-1}(v))} \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) \right)^{\delta_{1i} \delta_{2i}} \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(\phi(x) - \phi_{\rho}(x, y) \right)^{\delta_{1i}(1-\delta_{2i})} \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(\phi(x) - \phi_{\rho}(x, y) \right)^{(1-\delta_{1i})\delta_{2i}} \\
 & \times \prod_{i=1}^n \left(1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y)) \right)^{(1-\delta_{1i})(1-\delta_{2i})}.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$