

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

FELIPE DOMINGUES SIMÕES

**Estudo de somas de normais truncadas para obtenção das propriedades dos gráficos de
controle ATTRIVAR**

Guaratinguetá
2020

Felipe Domingues Simões

Estudo de somas de normais truncadas para obtenção das propriedades dos gráficos de controle ATTRIVAR

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa

Coorientador: Prof^a. Dr^a. Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Guaratinguetá

2020

S593e	Simões, Felipe Domingues Estudo de somas de normais truncadas para obtenção das propriedades dos gráficos de controle ATTRIVAR / Felipe Domingues Simões – Guaratinguetá, 2020. 62 f : il. Bibliografia: f. 55-57 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2020. Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa Coorientadora: Prof^a Dr^a Marcela Aparecida G. Machado de Freitas 1. Gráficos (Engenharia). 2. Processo decisório por critério múltiplo. 3. Controle estatístico do processo. I. Título CDU 65.012.4(043)
-------	--

FELIPE DOMINGUES SIMÕES

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

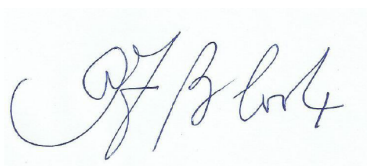
**PROGRAMA: ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO: MESTRADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Otávio José de Oliveira
Coordenador

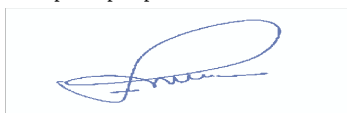
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA

Orientador / UNESP/FEG

participou por videoconferência



Prof. Dr. FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS

UNESP/FEG

participou por videoconferência



Prof. Dr. ROBERTO CAMPOS LEONI

AMAN

participou por videoconferência

DADOS CURRICULARES

FELIPE DOMINGUES SIMÕES

NASCIMENTO 18/08/1992 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO Marcos da Costa Simões
Helvana Domingues

2011 / 2017 Curso de Graduação em Engenharia de
Produção Mecânica
Faculdade de Engenharia de Guaratin-
guetá da Universidade Estadual Paulista

2018 / 2020 Curso de Mestrado em Engenharia de Pro-
dução
Faculdade de Engenharia de Guaratin-
guetá da Universidade Estadual Paulista

Dedico este trabalho especialmente à minha família.
Agradeço o apoio, dedicação e confiança ao longo
de todos esses anos de formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu irmão, Marcello, pelo companheirismo que foi fundamental em minha trajetória pessoal e acadêmica.

Agradeço aos meus pais, Marcos e Helvana, que sempre me apoiaram e garantiram as melhores condições para meus estudos e crescimento pessoal.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa, e minha co-orientadora, Prof. Dr. Marcela Aparecida Guerreiro Machado, pela dedicação na orientação acadêmica desde 2013, quando comecei minha iniciação científica, e pelo incentivo na busca pelo conhecimento e colaboração com a comunidade científica.

Aos funcionários, professores e colegas da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, pela influência positiva em minha formação e pelo empenho em manter a excelência dessa instituição de ensino.

Por fim, agradeço aos meus familiares e amigos que, de forma direta ou indireta, contribuíram com minha formação e conclusão deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001;
da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Processo nº 2018/07147-0

*"As convicções são inimigas mais perigosas
da verdade do que as mentiras."
(Friedrich Nietzsche)*

RESUMO

Gráficos de controle que utilizam dados amostrais por atributo e por variável (ATTRIVAR) são estudados para tornar o monitoramento da média mais econômico sem perder a eficiência. Neste trabalho, os cálculos envolvendo a soma de distribuições normais truncadas são estudados e um programa foi desenvolvido para calcular a eficiência de gráficos de controle ATTRIVAR. É proposto o gráfico de controle ATTRIVAR Trinomial no qual dados de atributo e variável são usados para controlar a média do processo. Primeiramente, dois limites especificados dividem a amostra em três categorias excluídas; ou seja, itens nas categorias A, B e AB são, respectivamente, itens com a característica de qualidade X menores do que o limite inferior, maiores do que o limite superior, ou nem menor do que o limite inferior e nem maior do que o limite superior. Dependendo do número de itens na amostra em cada categoria, é tomada uma das três decisões: o processo é considerado em controle, o processo é considerado fora de controle, ou todos os itens da amostra são medidos. Nesse último caso, a média amostral de X é usada para decidir o estado do processo. Esta mesma estratégia de monitoramento foi utilizada para propor um gráfico ATTRIVAR alternado bivariado para o monitoramento do vetor de médias de processos bivariados. Também é proposto o gráfico ATTRIVAR com a regra VCS (*Variable Charting Statistics*) no qual cada amostra é submetida a inspeções por atributo ou por variável. As versões trinomiais dos gráficos ATTRIVAR são mais eficientes no monitoramento da média do processo que os gráficos encontrados hoje na literatura e mais econômicos que os gráficos de controle por atributo para monitoramento da média.

PALAVRAS-CHAVE: Gráfico de controle. Distribuição normal truncada. ATTRIVAR.

ABSTRACT

Control charts that uses attribute and variable sample data (ATTRIVAR) are, recently, studied to make the monitoring of processes less expensive but still pretty efficient. In this paper, the calculation related to the sum of truncated normal distribution functions are studied and a computational script is developed to calculate the efficiency of ATTRIVAR control charts. It is proposed the Trinomial ATTRIVAR (T-ATTRIVAR) control chart where attribute and variable sample data are used to control the process mean. Firstly, two discriminating limits sort the sample items into three excluding categories; that is, items in categories A, B, or AB, are, respectively, items with quality characteristic X smaller than the lower discriminating limit, larger than the upper discriminating limit, or neither smaller than the lower discriminating limit nor larger than the upper discriminating limit. Depending on the number of sample items in each category, one of three decisions is made: the process is declared in-control, the process is declared out-of-control, or all sample items are also measured. In this last case, the sample mean of X is used to decide the state of the process. This same monitoring strategy was used to propose a Trinomial alternated bivariate ATTRIVAR chart to monitor the mean vector of bivariate processes. It is also proposed the ATTRIVAR control chart with the Variable Charting Statistics (VCS) rule with which each sample is submitted to an attribute inspection or a variable inspection. The trinomial versions of the ATTRIVAR control charts are more efficient in monitoring the process mean than those charts in the literature and they are more economic than the attribute charts to monitor the process mean.

KEYWORDS: Control chart. Truncated normal distribution. ATTRIVAR.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Publicações por ano para <i>mixed control chart</i>	18
Figura 2	Publicações por ano para <i>control charts e truncated distributions</i>	18
Figura 3	Representação de um gráfico de controle de $\bar{X}$	22
Figura 4	Gráfico de $\bar{X}$ com processo em controle	23
Figura 5	Gráfico de $\bar{X}$ com processo fora de controle	24
Figura 6	Gráfico por atributo np	25
Figura 7	Gráfico de controle ATTRIVAR	26
Quadro 1	Atividades realizadas para a conclusão da pesquisa	28
Figura 8	Gráfico de controle B-ATTRIVAR	31
Figura 9	Planilha para obter NMA_S para o gráfico B-ATTRIVAR (semente aleatória: 123)	34
Figura 10	Fluxograma do gráfico T-ATTRIVAR	36
Figura 11	Gráficos B- e T-ATTRIVAR ($n = 5$ esquerda e $n = 3$ direita)	37
Figura 12	Planilha para calcular NMA_S para T-ATTRIVAR (semente aleatória: 123)	38
Figura 13	Representação do gráfico de controle VCS-ATTRIVAR trinomial	40
Figura 14	Ilustração da cadeia de Markov do VCS-ATTRIVAR trinomial	41
Figura 15	Gráficos de comparação dos valores de NMA_C ($n = 5$ esquerda e $n = 3$ direita)	43
Figura 16	Gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Revisão da literatura	19
Tabela 2 – Valores de NMA_C e NMA_S para B-ATTRIVAR	33
Tabela 3 – Comparação entre valores de NMA para B-ATTRIVAR	47
Tabela 3 – Comparação entre valores de NMA para B-ATTRIVAR	48
Tabela 4 – Parâmetros dos gráficos ATTRIVAR	48
Tabela 5 – Comparação entre o T-ATTRIVAR e o np	49
Tabela 6 – Comparação entre T-ATTRIVAR, $\bar{X}_{rec}$ e $np_X - \bar{X}$	49
Tabela 7 – Comparação de NMA das versões trinomiais do gráfico ATTRIVAR	50
Tabela 8 – NMA para ATTRIVAR alternado bivariado	51
Tabela 9 – Comparação de gráficos bivariados	52

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATTRIVAR	Atributo e Variável
NMA	Número médio de amostras até o alarme
NMA_0	Número médio de amostras até o alarme falso
NMA_C	Número médio de amostras até o alarme calculado
NMA_S	Número médio de amostras até o alarme simulado
LIC	Limite inferior de controle
LSC	Limite superior de controle
LDI	Limite discriminante inferior
LDS	Limite discriminante superior
LSC_{np}	Limite superior de controle do gráfico np
VCS	Variable Charting Statistics

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Probabilidade do erro tipo I
β	Probabilidade do erro tipo II
μ_0	Média do processo em controle
μ_1	Média do processo fora de controle
$\bar{X}$	Média amostral da variável X
$\bar{Z}$	Média amostral da variável Z
Y_D	Número de itens rejeitados na inspeção por atributo
σ_0	Desvio-padrão do processo em controle
δ	Magnitude do deslocamento da média em desvios-padrão
ρ	Correlação entre X e Z
k	Fator de abertura dos limites de controle
Wy	Limite de alerta do gráfico por atributo
CLy	Limite de controle do gráfico por atributo
$R\$$	Unidade monetária Brasileira (Real)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	15
1.2	QUESTÕES DE PESQUISA E OBJETIVOS	16
1.2.1	Questões de pesquisa	16
1.2.2	Objetivos	16
1.3	DELIMITAÇÃO DO TRABALHO E JUSTIFICATIVAS	17
1.3.1	Delimitação do trabalho	17
1.3.2	Justificativas	17
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2	REVISÃO DA LITERATURA	21
2.1	GRÁFICOS DE CONTROLE	21
2.2	GRÁFICOS DE CONTROLE DE $\bar{X}$	21
2.3	GRÁFICOS DE CONTROLE POR ATRIBUTO	23
2.4	GRÁFICOS DE CONTROLE ATTRIVAR	25
2.5	SOMA DE DISTRIBUIÇÕES NORMAIS TRUNCADAS	26
3	MÉTODO DE PESQUISA	28
4	MODELOS TEÓRICOS, SIMULAÇÕES E RESULTADOS	29
4.1	PROGRAMA PARA CÁLCULO DE SOMA DE NORMAIS TRUNCADAS . . .	29
4.2	GRÁFICO DE CONTROLE ATTRIVAR BINOMIAL	30
4.3	GRÁFICO DE CONTROLE ATTRIVAR TRINOMIAL	34
4.4	GRÁFICO DE CONTROLE VCS-ATTRIVAR TRINOMIAL	39
4.5	GRÁFICO DE CONTROLE ATTRIVAR ALTERNADO BIVARIADO	42
5	CONCLUSÃO	53
5.1	VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS E RESPOSTAS ÀS QUESTÕES DE PES- QUISA	53
5.2	SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO	53
	REFERÊNCIAS	54
	APÊNDICE A – PROGRAMA EM LINGUAGEM R PARA O CÁLCULO DE SOMA DE NORMAIS TRUNCADAS	57

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O monitoramento estatístico de processos é o conjunto de técnicas e ferramentas utilizadas para detectar mudanças e perturbações nos processos industriais e não-industriais que afetam a qualidade do produto final (RAKITZIS *et al.*, 2019).

O controle da qualidade, feito principalmente por meio de gráficos de controle, é fundamental na indústria para garantir um processo livre de causas especiais de variabilidade e, portanto, mais eficiente e com menores custos de produção e mantendo, assim, as empresas competitivas no mercado (MASOOD; SHYEN, 2016).

O gráfico de controle por atributo foi desenvolvido originalmente para controlar processos nos quais a característica de qualidade monitorada do processo não pode ser medida em uma escala numérica contínua. Entretanto, a ideia principal de diversos estudos recentes é o monitoramento de características de qualidade do tipo variável por meio de gráficos de controle de atributo. Wu e Jiao (2008) foram os primeiros a propor um gráfico de controle de atributo para monitorar a média de uma variável contínua X . Basicamente, quando X é maior do que um limite de controle definido, a unidade da amostra é classificada como não conforme. Uma amostra de tamanho n com mais do que m unidades não-conformes (referidas como MON) é uma amostra vermelha. O gráfico MON gera um alarme de amostra fora de controle quando o intervalo entre duas amostras vermelhas é menor do que um determinado limite. Esse artigo inspirou outros estudos nos quais gráficos de controle de atributo são usados para monitorar a média, o vetor de médias, a variância e a matriz de covariâncias.

Wu *et al.* (2009) discutem o monitoramento de eixos com gráficos de controle np e com gráficos de controle de $\bar{X}$. Com o gráfico np, anéis de inspeção são usados para distinguir eixos conformes de não-conformes. Com o gráfico de controle de $\bar{X}$, um micrometro é usado para medir os diâmetros. Em relação aos custos de monitoramento, a inspeção por atributo geralmente supera o desempenho da inspeção por variável. Quinino, Ho e Trindade (2015), Quinino, Bessegato e Cruz (2017) e Aparisi, Epprecht e Mosquera (2018) também desenvolveram gráficos de controle de atributo para controlar a média de uma variável contínua. Ho e Quinino (2016) e Bezerra, Ho e Quinino (2018) exploraram a ideia de controlar a variância do processo com gráficos de atributo. Haridy *et al.* (2014) e Mosquera, Aparisi e Epprecht (2018) investigaram a eficiência de monitorar ambos, média e variância de uma variável contínua, com um gráfico de atributo. Recentemente, Zhou, Liu e Zheng (2020) propôs um gráfico similar ao gráfico MON, o qual foi projetado para detectar perturbações na média mais rapidamente. Ho e Costa (2015) e Melo, Ho e Medeiros (2017) construíram gráficos de controle de atributo para controlar vetores de média de processos bivariados. Mais recentemente, Machado, Ho e Costa (2018) estudaram a eficiência de gráficos de controle de atributo em sinalizar mudanças na matriz de covariâncias.

A ideia de trabalhar com dados amostrais de atributo e variável (dados ATTRIVAR) foi introduzida por Sampaio, Ho e Medeiros (2014). Nesse estudo, as amostras são divididas em dois subgrupos, de tal forma que, os itens do primeiro subgrupo é submetido a um teste do tipo passa/não-passa, e os

itens do segundo subgrupo são medidos. É simples a obtenção das propriedades dos gráficos ATTRIVAR quando os itens submetidos a inspeção por atributo não são os mesmos submetidos à inspeção por variável. Essa estratégia de inspeção também foi utilizada em Ho e Quinino (2016), Ho e Aparisi (2016) e Aparisi e Ho (2018). Em Aslam *et al.* (2015), os itens da amostra são submetidos a uma inspeção por atributo e, dependendo dos resultados, eles também são submetidos a inspeção por variável. Nesse caso, a média amostral de X decide o estado do processo. A inspeção por atributo sempre trunca a distribuição de probabilidade de X e, devido a isso, o desenvolvimento matemático para a obtenção de $\bar{X}$ não é trivial. Aslam *et al.* (2015) não se atentaram a esse fato, por consequência, eles obtiveram valores incorretos de NMA, vide Leoni e Costa (2019). Lembrando que o NMA é o número médio de amostras que o gráfico de controle precisa para sinalizar uma perturbação no processo. Ho e Aparisi (2016) usaram um algoritmo genético para obter os parâmetros ótimos do gráfico de controle de Aslam *et al.* (2015), isso é, os parâmetros que levam ao menor valor de NMA.

1.2 QUESTÕES DE PESQUISA E OBJETIVOS

1.2.1 Questões de pesquisa

Dada a importância de desenvolvimento de gráficos de controle eficientes no monitoramento de processos na indústria e a vantagem econômica de se utilizar gráficos de controle do tipo ATTRIVAR para diminuir os prejuízos com itens produzidos fora das especificações e reduzir os custos de inspeção de amostras, tem-se algumas questões que motivaram este trabalho:

- Como podem ser calculadas as somas das diferentes formas de distribuições normais truncadas para a obtenção das propriedades dos gráficos ATTRIVAR?
- Como é possível melhorar a eficiência dos gráficos de controle ATTRIVAR já apresentados na literatura?
- De que forma é possível utilizar gráficos ATTRIVAR para monitorar processos bivariados com uma eficiência maior do que a dos gráficos multivariados já existentes?
- Quais são os melhores ajustes para os parâmetros dos gráficos de controle ATTRIVAR?

1.2.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é investigar as propriedades dos gráficos de controle ATTRIVAR por meio do cálculo teórico de probabilidades, envolvendo a soma de variáveis que seguem distribuições normais truncadas, e validar os valores obtidos por meio de simulações computacionais. Nos diferentes cenários estudados, a eficiência de detecção dos gráficos é medida pelo número médio de amostras até o sinal (NMA).

O primeiro objetivo específico deste trabalho consiste em desenvolver um programa computacional para calcular o valor de NMA de gráficos de controle ATTRIVAR para diferentes cenários utilizando a linguagem de programação R.

O segundo objetivo específico deste trabalho é desenvolver novas regras para os gráficos de controle ATTRIVAR que tornem o monitoramento de média amostral e do vetor de médias mais eficiente.

O terceiro objetivo específico deste trabalho é realizar a análise de sensibilidade dos parâmetros de entrada dos gráficos de controle ATTRIVAR de forma a encontrar o conjunto de parâmetros que levam aos menores valores de NMA para cada cenário estudado.

1.3 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO E JUSTIFICATIVAS

1.3.1 Delimitação do trabalho

O estudo apresentado neste trabalho não possui restrições físicas ou geográficas visto que se baseia em modelos matemáticos e simulações utilizando a linguagem computacional.

Este trabalho tem como escopo de estudo, gráficos de controle para monitoramento da média de processos univariados, e o vetor de médias para processos bivariados, para o monitoramento de características de qualidade X que seguem uma distribuição normal, sem autocorrelação, e os parâmetros de média e variância do processo conhecidos. São considerados os erros estatísticos do tipo I (alarmes falsos) e do tipo II (não sinalizar um processo com perturbação na média).

1.3.2 Justificativas

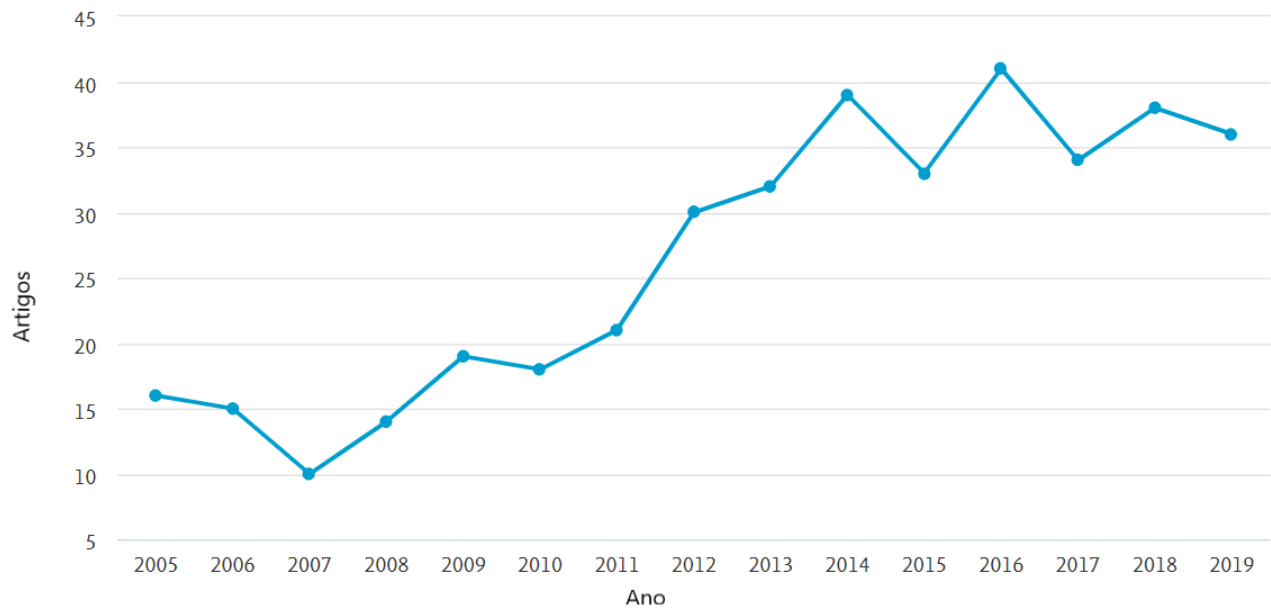
Os Gráficos de controle são uma das principais ferramentas de controle estatístico de processos (CEP) e o uso de tal técnica auxilia na redução da variabilidade e na melhoria do desempenho e manutenção da eficiência de processos de produção (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

O gráfico de controle que combina dados de inspeção por atributo e variável (ATTRIVAR) proporcionam uma vantagem econômica em relação aos gráficos tradicionais sem ter grandes reduções de eficiência (APARISI; HO, 2018; HO; APARISI, 2016).

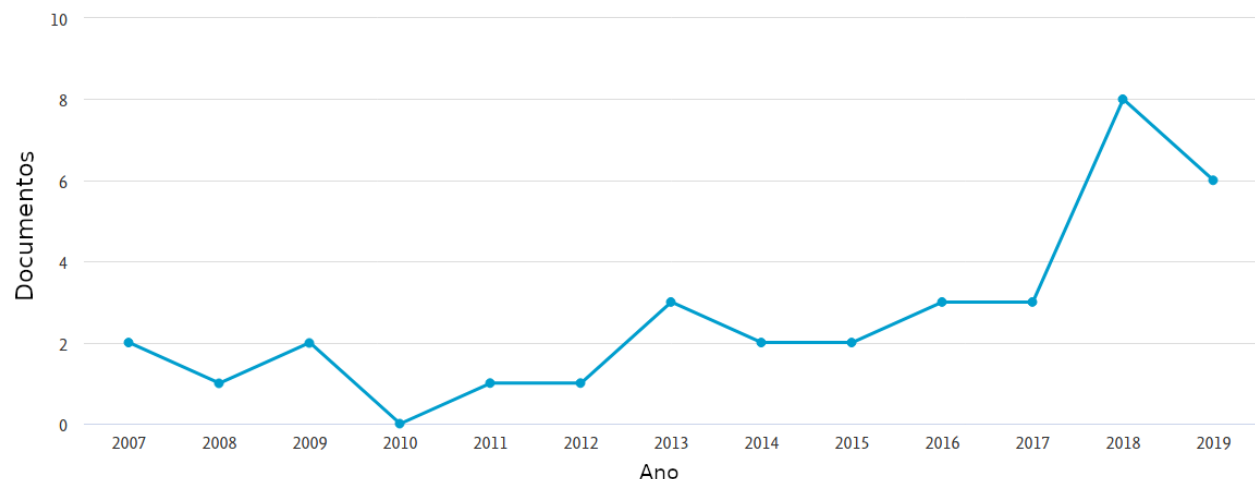
Utilizando a palavra-chave *mixed control chart* na busca por artigos na base de Scopus, com os resultados ilustrados na Figura 1, é possível observar um aumento no número de publicações nesse tema que indica um aumento do interesse dos autores no tema e um aumento da relevância dessa linha de pesquisa.

Os gráficos de controle ATTRIVAR que utilizam a mesma amostra na inspeção por atributo e na inspeção por variável apresentam uma maior complexidade em relação aos cálculos de probabilidade e obtenção dos valores teóricos de NMA. Essa complexidade nos cálculos advém do fato da inspeção por atributos truncar a distribuição normal dos elementos da amostra e, portanto, para calcular a distribuição da média dessa amostra é necessário o cálculo de soma de normais truncadas que não é trivial (HO; APARISI, 2016).

Poucos documentos são encontrados pela busca na literatura utilizando as palavras-chave *control charts* e *truncated distributions* e todos esses artigos encontrados são muito recentes, como pode ser observado na Figura 2. Isso indica que o estudo de distribuições truncadas com gráficos de con-

Figura 1 – Publicações por ano para *mixed control chart*

fonte: Produção do próprio autor.

Figura 2 – Publicações por ano para *control charts* e *truncated distributions*

fonte: Produção do próprio autor.

trole é muito recente e ainda pouco desenvolvida apresentando, assim, uma linha de pesquisa com potencial de desenvolvimento.

Visto que as pesquisas com gráficos de controle ATTRIVAR são hodiernas e vêm apresentando um grande potencial para a redução de custos no processo de monitoramento de processos e necessitam de avanço nos estudos de distribuições truncadas, este trabalho busca desenvolver um programa computacional para o cálculo de soma de diferentes distribuições normais truncadas auxiliando o desenvolvimento dessa linha de pesquisa além de propor novos gráficos de controle ATTRIVAR mais eficientes que aqueles já apresentados na literatura.

Com a revisão da literatura, foi possível dividir os artigos mais relevantes para este trabalho na Tabela 1 destacando o foco dos estudos de cada um deles.

Na Tabela 1, A coluna "[A]"mostra os artigos que trabalham com inspeções por atributo e a

Tabela 1 – Revisão da literatura

Autores	Ano	[A]	[V]	[Md]	[Var]	[MA]	[AD]	[Uni]	[Multi]
Wu e Jiao	2008	Sim	Não	Sim	Não	N/A	N/A	Sim	Não
Wu et al.	2009	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Sim	Não
Haridy et al.	2014	Sim	Não	Sim	Sim	N/A	N/A	Sim	Não
Sampaio, Ho e Medeiros	2014	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Sim	Não
Quinino, Ho e Trindade	2015	Sim	Não	Sim	Não	N/A	N/A	Sim	Não
Ho e Costa	2015	Sim	Não	Sim	Não	N/A	N/A	Não	Sim
Aslam et al.	2015	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Ho e Quinino	2016	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Não
Ho e Quinino	2016	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Ho e Aparisi	2016	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Não
Quinino, Bessegato Cruz	2017	Sim	Não	Sim	Não	N/A	N/A	Sim	Não
Melo, Ho e Medeiros	2017	Sim	Não	Sim	Não	N/A	N/A	Não	Sim
Aparisi, Epprecht e Mosquera	2018	Sim	Não	Sim	Não	N/A	N/A	Sim	Não
Bezerra, Ho e Quinino	2018	Sim	Não	Não	Sim	N/A	N/A	Sim	Não
Mosquera, Aparisi e Epprecht	2018	Sim	Não	Sim	Sim	N/A	N/A	Sim	Não
Machado, Ho e Costa	2018	Sim	Não	Não	Sim	N/A	N/A	Não	Sim
Aparisi e Ho	2018	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Não	Sim
Zhou, Liu e Zheng	2020	Sim	Não	Sim	Não	N/A	N/A	Sim	Não

fonte: Produção do Próprio Autor.

coluna "[V]"apresenta aqueles que estudam gráficos de controle por variável. A coluna "[Md]"mostra os trabalhos que estudam gráficos de controle para o monitoramento da média ou vetor de médias e a coluna "[Var]"apresenta aqueles que trabalham com o monitoramento da variabilidade dos processos. A coluna "[MA]"mostra os artigos que estudam, quando utilizadas inspeções por atributo e variável combinadas, gráficos de controle que usam a mesma amostra nos dois tipos de inspeção e a coluna "[AD]"apresenta aqueles que usam amostras diferentes nas inspeções. Por fim, a coluna "[Uni]"mostra os artigos que estudam o monitoramento de processos univariados e a coluna "[Multi]"apresenta aqueles que estudam o monitoramento de processos bivariados, trivariados ou multivariados. Os campos da Tabela 1 preenchidos por "N/A"indicam que essa classificação não se aplica ao estudo do artigo em questão.

Analisando a Tabela 1 é possível perceber a tendência dessa linha de pesquisa em estudar a combinação de inspeções por atributo e variável em gráficos de controle. Também é possível observar que apenas os artigos mais recentes trabalham com a mesma amostra nos dois tipos de inspeção, logo, esse tipo de gráfico de controle, que é abordado neste trabalho, é relevante e atual.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho possui mais quatro capítulos além dessa introdução. O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos dessa linha de pesquisa que são fundamentais para o entendimento deste trabalho. As definições de gráficos de controle por atributo, gráficos de controle por variáveis e o método para mensurar a eficiência dessas ferramentas é apresentada. Assim, as definições encontradas na literatura para gráficos de controle ATTRIVAR e a soma de distribuições normais truncadas também

são apresentada no Capítulo 2.

No Capítulo 3 são apresentados os métodos utilizados no desenvolvimento dessa pesquisa, evidenciando também as etapas realizadas até a conclusão deste trabalho. O Capítulo 4 é dedicado à apresentação do resultado dos valores de NMA obtido pelo programa computacional, o qual é comparado com os valores obtidos pela simulação. Também no Capítulo 4, são propostos, para o caso univariado, a versão Trinomial do gráfico de controle ATTRIVAR, e para o caso bivariado, o gráfico ATTRIVAR alternado é proposto e a eficiência desses gráficos são comparadas com os gráficos já propostos na literatura. No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros seguido das referências.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 GRÁFICOS DE CONTROLE

As variabilidades das características de qualidade dos processos originam-se de duas fontes, as causas naturais e as causas especiais. A variabilidade originada de causas naturais são inerentes aos processos de produção que sempre estará presente em todos os processos de produção. Já a variabilidade originada de causas especiais não são comuns ao processo e é possível identificar o fator que gera essa causa especial (AMIRI; ALLAHYARI, 2012).

Uma das mais importantes ferramentas do Controle Estatístico de Processos (CEP) é o gráfico de controle. Essa ferramenta é usada para monitorar um processo de tal forma que identifica estatisticamente a presença ou ausência de causas especiais na característica de qualidade. Se o gráfico de controle sinaliza a presença de causas especiais no processo monitorado, o processo é considerado fora de controle e, portanto, a produção deve ser interrompida para a investigação e eliminação da fonte dessas causas especiais. Caso o gráfico de controle não sinalize a presença de causas especiais no processo, diz-se que o processo está em controle (AMIRI; ALLAHYARI, 2012; MONTGOMERY, 2007).

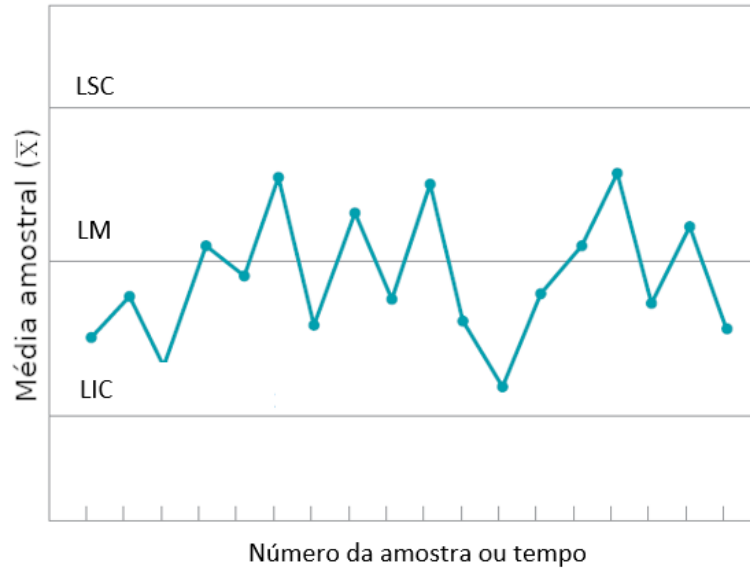
Quando gráficos de controle são utilizados para o monitoramento de uma característica de qualidade, amostras são coletadas em intervalos de tempo constantes. Assim, o número médio de amostras até o alarme (NMA) do gráfico de controle é muito utilizado para mensurar a eficiência de um gráfico em determinadas condições. Essa estatística indica o tempo médio que será decorrido com o processo desregulado até que o gráfico sinalize o desvio da média. Portanto, o gráfico mais eficiente é aquele que apresenta o menor valor de NMA para um determinado cenário (HAQ, 2013; KHAN *et al.*, 2017).

Para que seja justo realizar a comparação de eficiência entre dois gráficos de controle que utilizam regras de monitoramento distintas, deve-se primeiro ajustar os parâmetros de entrada de cada gráfico separadamente de forma que, quando o processo estiver em controle, ambos apresentem o mesmo número médio de amostras coletadas até um alarme falso (NMA_0). Com os parâmetros dos gráficos ajustados de forma que seus valores de NMA_0 sejam iguais, é adicionado um desvio de δ desvios-padrão na média do processo e compara-se os valores de NMA de cada gráfico e o que apresentar o menor valor de NMA é o mais eficiente para esse cenário. Portanto, os gráficos mais eficientes devem apresentar altos valores de NMA_0 , ou seja, poucos alarmes falsos, e apresentar baixos valores de NMA, ou seja, detectar rapidamente as perturbações na média do processo (FANG; WANG; DENG, 2013).

2.2 GRÁFICOS DE CONTROLE DE $\bar{X}$

Os gráficos de controle de $\bar{X}$ são os gráficos de controle por variável mais utilizados. Estes gráficos são usados para monitorar o processo e detectar a presença de causas especiais, por meio do valor da média amostral, antes que sejam produzidos muitos produtos que não atendem as especificações de qualidade. Quando uma ou mais observações amostrais são plotadas na região acima do limite superior de controle (LSC) ou abaixo do limite inferior de controle (LIC), o gráfico sinaliza que ocorreu

Figura 3 – Representação de um gráfico de controle de $\bar{X}$



fonte: adaptado de Montgomery (2007).

uma perturbação na média no processo e, portanto, este processo deve ser interrompido para que o processo seja investigado e seja identificada a fonte dessa perturbação (AMIRI; ALLAHYARI, 2012; MONTGOMERY, 2007). As expressões que definem LSC e LIC são apresentados, respectivamente, pelas equações (2.1) e (2.2), onde n é o tamanho da amostra, k é o fator de abertura dos limites de controle do gráfico de $\bar{X}$, $\hat{\mu}_0$ é a estimativa da média populacional ou valor alvo da característica de qualidade monitorada e $\hat{\sigma}_0$ é a estimativa do desvio-padrão do processo.

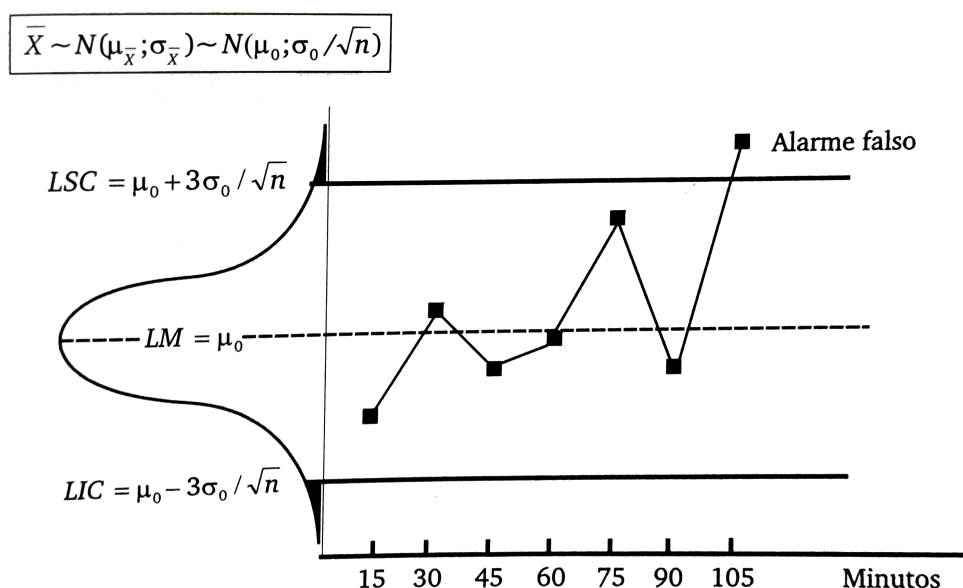
$$LSC = \hat{\mu}_0 + k \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \quad (2.1)$$

$$LIC = \hat{\mu}_0 - k \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \quad (2.2)$$

A representação típica de um gráfico de controle de $\bar{X}$ é ilustrada na Figura 3. Tal representação consiste em uma linha média (LM), que indica o valor alvo para característica de qualidade monitorada com o processo em controle, e os limites de controle, LIC e LSC , os quais dependem do parâmetro de entrada k , que por sua vez é determinado a partir da taxa de alarmes falsos (α) tolerável. Portanto, LIC e LSC ficam definidos de forma que quase todos os pontos das observações amostrais, quando o processo está em controle, são plotados entre estes limites (MONTGOMERY, 2007). Nos gráficos de controle de $\bar{X}$, os pontos plotados no gráfico são as médias dos valores da característica de qualidade de cada amostra de tamanho n . O tempo entre a coleta das amostras é igual ao longo do monitoramento (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

O monitoramento de processos por meio dos gráficos de controle funciona por meio de uma sequência de testes de hipótese. Para cada ponto plotado no gráfico, são sempre testadas duas hipóteses, H_0 : processo livre de causas especiais; H_1 : processo sob a influência de causas especiais (LEONI, 2015).

Quando o processo está sob controle, ou seja, a hipótese H_0 é verdadeira, o erro tipo I ocorre

Figura 4 – Gráfico de $\bar{X}$ com processo em controle

fonte: Costa, Epprecht e Carpinetti (2005).

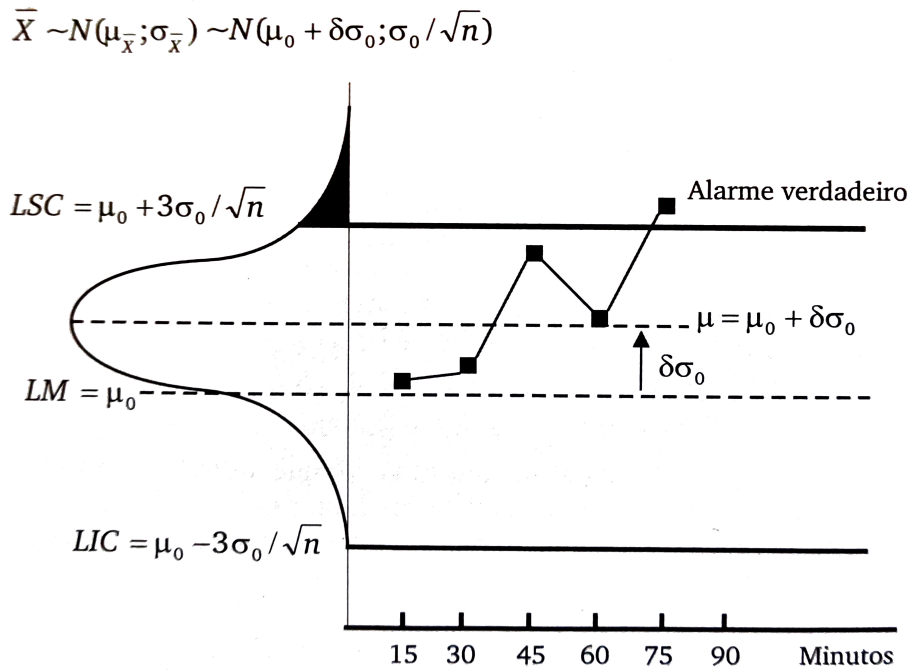
com probabilidade α considerando, equivocadamente, que o processo está fora de controle. No gráfico de controle de $\bar{X}$, o erro tipo I, ilustrado na Figura 4, ocorre quando um ponto é plotado na região de ação do gráfico quando o processo está em controle. Se um processo estiver fora de controle, ou seja, a hipótese H_1 é verdadeira, o erro tipo II ocorre com probabilidade β considerando, equivocadamente, que o processo está em controle. No gráfico de controle de $\bar{X}$ o erro tipo II, como pode ser exemplificado pelos quatro primeiros pontos no gráfico da Figura 5, ocorre toda vez que um ponto é plotado na região entre os limites de controle, sendo que o processo está fora de controle (LEONI, 2015).

A ocorrência do erro tipo I, durante o processo de monitoramento com gráficos de controle, é prejudicial pois leva à interrupção desnecessária do processo, causando desperdícios para o processo de produção. A sucessiva ocorrência de erros tipo II também prejudica o processo de produção pois pode levar a produção de diversos produtos que não atendem as especificações de qualidade até o gráfico sinalizar essa perturbação.

Os gráficos de controle por variável, como o gráfico de controle de $\bar{X}$, exigem a mensuração da característica de qualidade X de cada um dos itens da amostra. Esta inspeção pode ter um custo elevado, muitas vezes necessitando de uma equipe especializada ou até mesmo a destruição dos itens inspecionados (HO; APARISI, 2016).

2.3 GRÁFICOS DE CONTROLE POR ATRIBUTO

Não são todas as características de qualidade que podem ser expressadas por dados do tipo variável, ou seja, como um valor em uma escala numérica contínua. Algumas características de qualidade só podem ser analisadas de acordo com uma inspeção por atributo, ou seja, cada uma das observações da amostra serão classificadas de forma qualitativa de acordo com a característica de qualidade. Por

Figura 5 – Gráfico de $\bar{X}$ com processo fora de controle

fonte: Costa, Epprecht e Carpinetti (2005).

exemplo, na fabricação de frascos de vidro, podemos classificar cada um dos frascos como aprovados ou reprovados dependendo da presença de falhas como bolas ou imperfeições superficiais. Este é um exemplo de dados de atributo e um gráfico de controle que monitore a quantidade de itens reprovados em uma amostra é um exemplo de gráfico de controle por atributo. Esse tipo de gráfico de controle também é muito utilizado para o monitoramento da qualidade de serviços (MONTGOMERY, 2007).

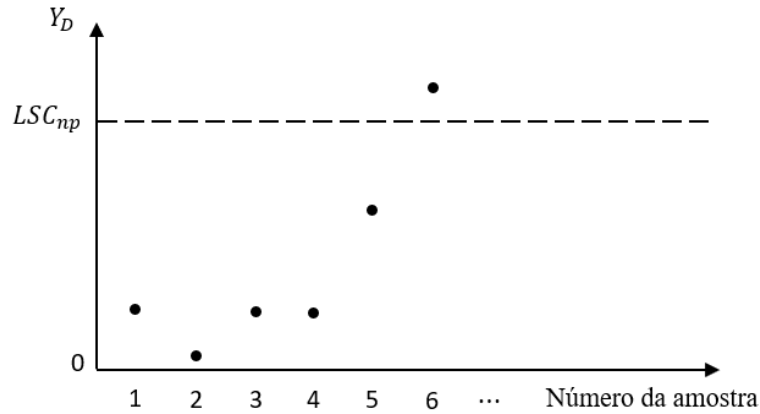
Os gráficos de controle por atributo geralmente são mais econômicos e seus procedimentos de inspeção são mais rápidos quando comparados com os gráficos de controle por variável. Os gráficos de controle por variável são, em geral, mais eficientes do que o gráfico por atributo, uma vez que este último não é tão informativo quanto o primeiro (MONTGOMERY, 2007; ZHOU; LIU; ZHENG, 2020).

Um dos gráficos de controle por atributo mais utilizados é o de controle do número de itens reprovados, também conhecido como gráfico de controle np . Este gráfico de controle monitora o número de itens reprovados nas amostras, e o processo é considerado fora de controle quando o número de itens reprovados em uma amostra é maior ou igual a um limite superior de controle (LSC_{np}). O LSC_{np} é definido segundo a expressão (2.3), onde n é o tamanho da amostra, p é a proporção de itens reprovados, e k_{np} é o fator de abertura do limite do gráfico np .

$$LSC_{np} = np + k_{np}\sqrt{np(1-p)} \quad (2.3)$$

O valor de k_{np} depende da taxa de alarmes falsos (α) tolerável quando o processo está em controle (MONTGOMERY, 2007).

A Figura 6 apresenta uma ilustração do gráfico de controle np , onde Y_D é o número de itens reprovados na inspeção por atributo em cada amostra.

Figura 6 – Gráfico por atributo np 

fonte: Produção do próprio autor.

Recentemente, alguns autores apresentaram gráficos de controle por atributo para monitorar características de qualidade do tipo variável. Quinino, Bessegato e Cruz (2017), propuseram um gráfico de controle de $\bar{X}$ que utiliza a inspeção por atributo para estimar e monitorar essa estatística. Já Aparisi, Epprecht e Mosquera (2018), propuseram um gráfico de controle que utiliza inspeções por atributo, classificando os itens da amostra em diversas categorias, para monitorar uma característica de qualidade do tipo variável de forma mais econômica.

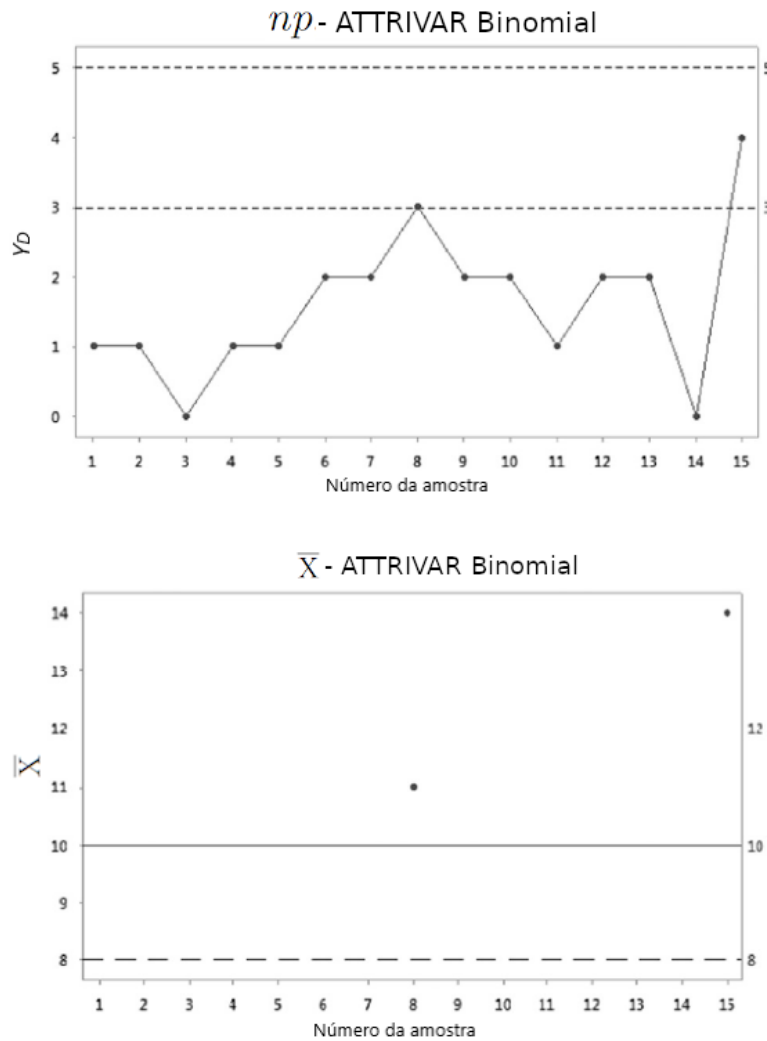
2.4 GRÁFICOS DE CONTROLE ATTRIVAR

Os gráficos de controle ATTRIVAR monitoram características de qualidade combinando o uso de gráficos de controle por atributo, como o gráfico np , e gráficos de controle por variável, como o gráfico de controle de $\bar{X}$ (HO; APARISI, 2016). O termo ATTRIVAR foi introduzido por Ho e Aparisi (2016) inspirados nos gráficos apresentados por Sampaio, Ho e Medeiros (2014) e Aslam *et al.* (2015). Em Ho e Aparisi (2016), o gráfico ATTRIVAR-1 (ou ATTRIVAR Binomial, como será denominado no capítulo 4) é apresentado.

Quando o gráfico de controle ATTRIVAR é utilizado para o monitoramento da média da característica de qualidade de um processo, são coletadas periodicamente amostras de tamanho n . Todos os n itens da amostra são submetidos à uma inspeção por atributo que classifica cada um dos itens como aprovados ou reprovados. Nessa etapa, já estão definidos o Limite Discriminante Superior (LDS) e o Limite Discriminante Inferior (LDI) que são projetados no dispositivo de inspeção por atributo de tal forma que o item da amostra é aprovado se $LDI < X < LDS$ e é reprovado se $X < LDI$ ou $X > LDS$.

Com a quantidade de itens reprovados Y_D , é construído um gráfico por atributo. Caso o valor Y_D seja maior ou igual ao limite de controle do gráfico de atributo (CLy), o processo é considerado fora de controle. Caso o valor de Y_D seja menor do que o valor do limite de alarme do gráfico de atributo (Wy), o processo é considerado em controle. Se $Y_D \geq Wy$ e $Y_D < CLy$, então é necessária uma investigação mais detalhada dessa amostra, logo todos os itens dessa mesma amostra (ou da próxima amostra no caso do gráfico VCS-ATTRIVAR) são mensurados e é calculada a média amostral $\bar{X}$.

Figura 7 – Gráfico de controle ATTRIVAR



fonte: adaptado de Ho e Aparisi (2016).

No gráfico de $\bar{X}$, o processo é considerado fora de controle caso $\bar{X} < LIC$ ou $\bar{X} > LSC$ e é considerado em controle quando $LIC \leq \bar{X} \leq LSC$. A Figura 7 apresenta uma representação de um gráfico de controle ATTRIVAR Binomial. É importante destacar que a inspeção por atributo revela informações sobre o valor X de todos os itens de uma amostra e, devido ao conceito de probabilidade condicional, as distribuições de probabilidade de X , que antes eram distribuições normais, agora são distribuições normais truncadas. Portanto, a distribuição de $\bar{X}$ de uma amostra que foi submetida a uma inspeção por atributo será resultante de uma soma de distribuições normais truncadas (SIMÕES; COSTA; MACHADO, 2020).

2.5 SOMA DE DISTRIBUIÇÕES NORMAIS TRUNCADAS

Como demonstrou Francis (1946), sendo uma variável aleatória X que segue uma distribuição de probabilidade normal com média μ e desvio-padrão σ_0 , podemos escrever a função densidade de

probabilidade $f(X)$ de acordo com a expressão (2.4).

$$f(X) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right] \quad (2.4)$$

Simplificando a expressão (2.4), utilizando $y = (X - \mu)/\sigma_0$, obtemos a expressão (2.5).

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \quad (2.5)$$

Então, pelo conceito de probabilidade condicional, uma distribuição normal truncada em $y_0 = (X_0 - \mu)/\sigma_0$ pode ser definida de acordo com a expressão (2.6).

$$f_1(y) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] / \int_{-\infty}^{y_0} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy & y \leq 0 \\ 0 & y > y_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ao somar, então, $(m + n)$ variáveis aleatórias que seguem a distribuição de probabilidade descrita em (2.6), será obtido como resultado a distribuição de probabilidade pela expressão (2.7).

$$f_{m+n}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x) f_n(y - x) dx \quad (2.7)$$

Como, no integrando, o primeiro fator zera quando $x > my_0$ e o segundo zera quando $(y - x) > ny_0$, então podemos reescrever (2.7) resultando na expressão (2.8).

$$f_{m+n}(y) = \int_{y-ny_0}^{my_0} f_m(x) f_n(y - x) dx \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) é, portanto, a fórmula geral para a distribuição densidade de probabilidade da soma de variáveis aleatórias que seguem distribuições normais truncadas (FRANCIS, 1946).

3 MÉTODO DE PESQUISA

Esta pesquisa foi elaborada utilizando uma abordagem quantitativa por meio do cálculo de probabilidades e a simulação computacional para obter os valores de NMA, que quantifica a eficiência, para diferentes cenários dos gráficos de controle ATTRIVAR (CAUCHICK; MORABITO; PUREZA, 2010).

Esta pesquisa é classificada como aplicada, quanto à natureza, por buscar a melhoria de processos de aplicação imediata na indústria e auxiliar de imediato na linha de pesquisa (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Quanto aos objetivos, esta pesquisa é classificada como axiomática normativa uma vez que busca propor novas regras para os gráficos de controle ATTRIVAR (CAUCHICK; MORABITO; PUREZA, 2010).

Quanto aos procedimentos, esta é uma pesquisa de modelagem e simulação pois são definidos modelos matemáticos para a obtenção dos valores de NMA para os gráficos de controles e esses valores são validados pela comparação com os valores obtidos por simulação computacional (CAUCHICK; MORABITO; PUREZA, 2010).

As atividades realizadas ao longo do desenvolvimento dessa pesquisa estão descritas no Quadro 1.

Quadro 1 – Atividades realizadas para a conclusão da pesquisa

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Revisão sistemática da literatura 2. Estudo de somas de normais truncadas 3. Elaboração do programa computacional 4. Validação dos resultados por simulação computacional 5. Elaboração de novos gráficos de controle ATTRIVAR 6. Comparação entre gráficos de controle 7. Elaboração das conclusões 8. Elaboração da Dissertação 9. Elaboração de artigos científicos |
|---|

fonte: Produção do próprio autor.

4 MODELOS TEÓRICOS, SIMULAÇÕES E RESULTADOS

4.1 PROGRAMA PARA CÁLCULO DE SOMA DE NORMAIS TRUNCADAS

Nesta seção, o programa desenvolvido para o cálculo do valor de NMA para os gráficos de controle ATTRIVAR Binomial é descrito em detalhes. Esse algoritmo foi escrito em linguagem de programação R devido a sua acessibilidade como um software de código aberto, a simplicidade de sintaxe e disponibilidade de funções e pacotes de estatística e cálculo (R CORE TEAM, 2020). Os pacotes da linguagem R "iterators", "MASS", "foreach", "parallel", "doParallel" e "cubature" que contém funções necessárias para os cálculos de soma de normais truncadas e para a simulação, foram também utilizados neste trabalho (NARASIMHAN *et al.*, 2020; MICROSOFT; WESTON, 2020; ANALYTICS; WESTON, 2019; VENABLES; RIPLEY, 2002).

Considerando um processo no qual todos os itens k de uma amostra de tamanho n têm um valor de característica de qualidade $X_k \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ que, de acordo com a primeira etapa do processo de monitoramento com um gráfico ATTRIVAR, podem ser classificados em três grupos, aqueles itens que $X_k < LDI$ são classificados como tipo A, aqueles itens que $LDI \leq X_k \leq LDS$ são classificados como tipo AB e aqueles itens que $X_k > LDS$ são classificados como tipo B. Em uma mesma amostra, o número de itens classificados como tipo A, AB e B são, respectivamente, Y_A , Y_{AB} e Y_B . A probabilidade de que um item da amostra será classificado como tipo A, AB e B são, respectivamente, $p_A = Pr[X_k < LDI]$, $p_{AB} = Pr[LDI \leq X_k \leq LDS]$ e $p_B = Pr[X_k > LDS]$.

O NMA_C é calculado pelo inverso da soma da probabilidade de um alarme durante o monitoramento do processo com um gráfico ATTRIVAR, como mostrado na expressão (4.1).

$$NMA_C = \frac{1}{P_1 + P_2} \quad (4.1)$$

Na equação (4.1), P_1 é a probabilidade de um alarme na primeira etapa do monitoramento com um gráfico ATTRIVAR Binomial, o gráfico por atributo, que é uma probabilidade binomial e pode ser definida com a expressão (4.2).

$$P_1 = Pr[Y_A + Y_B \geq CLy] = \sum_{m=CLy}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (p_A + p_B)^m p_{AB}^{(n-m)} \quad (4.2)$$

P_2 é a probabilidade de um alarme na segunda etapa do monitoramento com um gráfico ATTRIVAR Binomial, o gráfico de controle por variável. A equação (4.3) apresenta essa definição para P_2 .

$$P_2 = \sum_{i=0}^{CLy-1} \sum_{j=0}^{CLy-1} Pr[Y_A = i, Y_{AB} = (n-i-j), Y_B = j] P_{nij} \quad (4.3)$$

Na equação (4.3), $Pr[Y_A = i, Y_{AB} = (n-i-j), Y_B = j]$ representa a probabilidade de ir do primeiro estágio para o segundo estágio de monitoramento. $Pr[Y_A = i, Y_{AB} = (n-i-j), Y_B = j]$

é definida na equação (4.4).

$$Pr[Y_A = i, Y_{AB} = (n - i - j), Y_B = j] = \frac{n!}{i!(n - i - j)!j!} \cdot p_A^i \cdot p_{AB}^{(n-i-j)} \cdot p_B^j \quad (4.4)$$

P_{nij} é a probabilidade $Pr[(\bar{X}_k < LIC) \cup (\bar{X}_k > LSC)]$ quando $Y_A = i$, $Y_B = j$ e $Y_{AB} = (n - i - j)$. A equação (4.5) apresenta a definição de P_{nij} .

$$P_{nij} = \begin{cases} 1 - \int_{nLIC}^{nLSC} h(S_n|i, j, (n - i - j))dS_n & CLy > (i + j) \geq Wy \\ 0 & (i + j) < Wy \text{ ou } (i + j) \geq CLy \end{cases} \quad (4.5)$$

Na equação (4.5), a função $h(S_n|i, j, (n - i - j))$ representa a função densidade de probabilidade da soma de distribuições normais truncadas para $Y_A = i$, $Y_B = j$ e $Y_{AB} = (n - i - j)$. Então, para calcular P_{nij} é necessário encontrar a função densidade de probabilidade para todas as combinações de i e j que levam ao segundo estágio de monitoramento. As sete expressões gerais para obter o valor de $h(S_n|i, j, (n - i - j))$ foram apresentadas por Ho e Aparisi (2016). É importante destacar que todas as funções densidade de probabilidade h , para um caso geral de soma de variáveis que seguem distribuições normais truncadas S_n , são funções recursivas que o algoritmo vai chamando sequencialmente até o nível de uma soma de apenas duas distribuições normais truncadas S_2 .

Dessa forma, o algoritmo calcula primeiro P_1 utilizando uma função existente na linguagem R para cálculo de probabilidade multinomial. Então, o algoritmo analisa as combinações de i e j que levam o monitoramento do processo ao segundo estágio e calcula P_{nij} para essas combinações. Para calcular P_{nij} , o algoritmo utiliza uma função de integração na função recursiva h para uma dada média do processo $\hat{\mu}_0$ e desvio-padrão $\hat{\sigma}_0$. O código, em linguagem de programação R, com as funções recursivas que definem h são apresentadas no Apêndice A. A função que calcula probabilidades multinomiais é utilizada novamente para calcular P_2 . Finalmente, com os valores de P_1 e P_2 , o programa pode calcular NMA_C para o gráfico de controle ATTRIVAR Binomial com a equação (4.1).

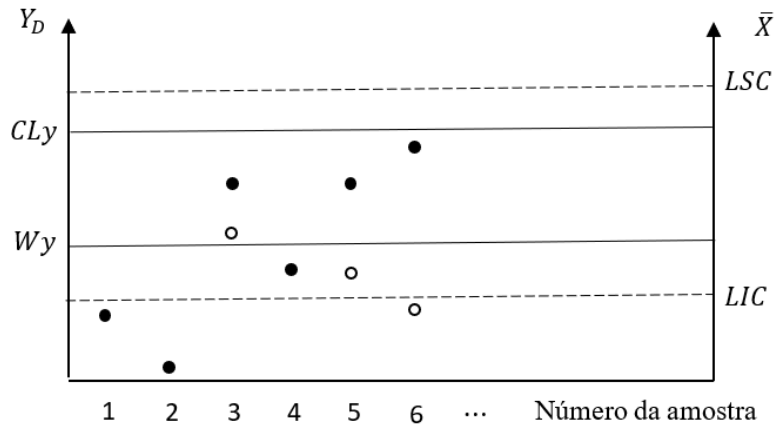
4.2 GRÁFICO DE CONTROLE ATTRIVAR BINOMIAL

O gráfico de controle ATTRIVAR Binomial (B-ATTRIVAR) é o tipo de gráfico no qual os itens da amostra são sempre submetidos a uma inspeção por atributo e, dependendo dos resultados, suas características de qualidade X são medidas também. Durante a inspeção por atributo, o número de itens reprovados Y_D é determinado um item é reprovado quando a característica de qualidade X é menor do que o limite discriminante inferior LDI ou é maior do que um limite discriminante superior LDS . Os limites LDI e LDS são definidos, respectivamente, pelas equações (4.6) e (4.7).

$$LDI = \hat{\mu}_0 - k_g \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \quad (4.6)$$

$$LDS = \hat{\mu}_0 + k_g \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \quad (4.7)$$

Figura 8 – Gráfico de controle B-ATTRIVAR



fonte: Produção do próprio autor.

Nas equações (4.6) e (4.7), k_g é o fator de abertura dos limites discriminantes.

Se Y_D é menor do que um limite de alarme Wy o processo é considerado em controle, se Y_D é maior ou igual a um limite de controle CLy o processo é considerado fora de controle. Entretanto, se Y_D é maior ou igual do que Wy , mas menor do que CLy , é necessário mais informações para decidir o estado do processo. Nesse caso, a inspeção vai para um nível mais complexo, no qual as características de qualidade X de todos os itens da amostra, aprovados e reprovados, são medidas. A estatística $\bar{X}$ é, então, usada para decidir o estado do processo.

A Figura 8 ilustra o gráfico B-ATTRIVAR. Os pontos pretos representam os valores de Y_D ; esses pontos foram plotados usando a escala na esquerda do gráfico. Toda vez que um ponto preto é plotado abaixo do limite de alarme Wy o processo é considerado em controle e toda vez que um ponto preto é plotado acima do limite de controle CLy o processo é considerado fora de controle. Caso contrário, as características de qualidade X dos itens da amostra são medidas e o $\bar{X}$ resultante também é plotado, mas agora como um ponto branco e usando a escala da direita do gráfico (vide amostras 3, 5 e 6). O processo é então considerado como em controle / fora de controle quando o ponto branco é plotado dentro/fora dos limites de controle [LIC ; LSC].

O gráfico de controle B-ATTRIVAR é semelhante ao gráfico de controle *Mixed* proposto por Aslam *et al.* (2015); a principal diferença é que no modelo deles, o limite discriminante inferior LDI foi descartado. O gráfico de controle B-ATTRIVAR e o gráfico de controle ATTRIVAR-1 discutido em Ho e Aparisi (2016) são iguais. O principal problema com o trabalho de Ho e Aparisi (2016) é que o algoritmo genético desenvolvido para obter os valores ótimos para os parâmetros do gráfico B-ATTRIVAR, assim como qualquer meta-heurística, não garante os valores ótimos para os parâmetros. É possível que o algoritmo genético não tenha sido bem parametrizado ou modelado, pois é sempre possível encontrar valores melhores para os parâmetros do gráfico B-ATTRIVAR, melhores no sentido que, com eles o tempo que o gráfico leva para sinalizar uma perturbação no processo é sempre menor do que o tempo que levaria usando os parâmetros encontrados pelo algoritmo genético.

É importante ressaltar que a distribuição de probabilidade de X de um item aprovado/reprovado é truncada, por causa disso, o desenvolvimento matemático para obter a distribuição de $\bar{X}$ é complexa. Ho e Aparisi (2016) apresentaram o procedimento geral para se obter a função densidade de proba-

bilidade de $S_n = \sum X$ quando a distribuição de X é truncada na cauda da esquerda, na cauda da direita ou centralmente truncada. O cálculo da probabilidade $Pr[S_n < S_0]$ exige muito tempo para ser concluído, por causa disso os autores obtiveram as propriedades do gráfico B-ATTRIVAR com a ajuda do algoritmo genético.

Com o intuito de obter uma compreensão maior das propriedades do gráfico de controle B-ATTRIVAR, foram desenvolvidos dois programas para calcular o número médio de amostras (NMA) que o gráfico B-ATTRIVAR precisa para detectar desvios na média do processo. O primeiro programa obtém o NMA_S por meio de simulação e o segundo programa calcula o valor exato de NMA_C da distribuição de $\bar{X}|Y_D$; a variável binomialmente distribuída Y_D é o número de itens aprovados pela inspeção por atributo.

Um parâmetro importante de desempenho do gráfico B-ATTRIVAR é $p_{\bar{X}}$ a taxa com que a característica de qualidade X é medida quando o processo está em controle. Esse parâmetro é dado pela expressão (4.8).

$$p_{\bar{X}} = \sum_{i=W_y}^{CL_y-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{(n-i)} \quad (4.8)$$

Na expressão (4.8), n é o tamanho da amostra, e $q = (1-p) = \Phi((LDS - \hat{\mu}_0)/\hat{\sigma}_0) - \Phi((LDI - \hat{\mu}_0)/\hat{\sigma}_0)$, onde $\hat{\mu}_0$ é a estimativa da média do processo em controle e $\hat{\sigma}_0$ é estimativa do desvio-padrão do processo. A magnitude do desvio na média do processo é quantificada em frações do desvio-padrão do processo; se μ_1 é a nova média após o desvio, então $\mu_1 = \hat{\mu}_0 + \delta\hat{\sigma}_0$. É importante ressaltar que, como o valor de $p_{\bar{X}}$ depende dos limites discriminantes, ele pode ser ajustado alterando o valor de k_g após serem definidos os limites Wy e CL_y .

Na Tabela 2, o NMA obtido por meio de simulação (NMA_S) e o NMA_C exato calculado com as distribuições $\bar{X}|Y_D$ são comparados. Para cada valor de NMA_S foram utilizados 100000 rodadas de simulação dos gráficos de controle até o alarme, ou seja, em cada rodada i da simulação, foram contabilizados o número de amostras inspecionadas (NA_i), assim, o cálculo de NMA_S é definido pela equação (4.9).

$$NMA_S = \frac{\sum_i NA_i}{100000} \quad (4.9)$$

As diferenças percentuais Δ entre os valores exatos e simulados de NMA são bem pequenas. Nas amostras de tamanho $n = 10$ e $n = 15$, o tempo de processamento para obter o valor exato de NMA é muito grande. Por causa disso, e baseado no fato de que as diferenças entre os valores simulados e exatos de NMA serem insignificantes, o valor de NMA para amostras grandes foi obtido apenas por simulação. Na Tabela 2, os intervalos de confiança (IC) foram feitos com a estatística t de Student pois o desvio-padrão dos valores de NMA_S não são conhecidos. Os intervalos de confiança foram calculados com 20 valores de NMA_S para cada cenário e um nível de confiança de 95%. Para todos os cenários analisados nessa tabela, utilizou-se $NMA_0 = 370, 4$.

Na Tabela 2, é possível observar que os valores de NMA_C calculados pelo programa computacional são muito próximos àqueles obtidos pela simulação. Os intervalos de confiança (IC) ficaram com uma margem de erro e_0 bem pequena e, mesmo assim, todos os valores de NMA_C estão dentro

Tabela 2 – Valores de NMA_C e NMA_S para B-ATTRIVAR

n	$p_{\bar{X}}$ (%)	δ	Wy	CLy	k_g	k	NMA_C	NMA_S	Δ (%)	IC (95%)
3	25	0,25	1	3	1,687	1,774	199,98	202,08	1,05	(199,429; 201,093)
3	25	0,5	1	3	1,687	1,774	69,60	69,88	0,40	(68,835; 70,067)
3	25	1	1	3	1,687	1,774	11,03	11,00	0,27	(10,967; 11,146)
3	25	1,25	1	3	1,687	1,774	5,48	5,48	0,00	(5,474; 5,514)
3	25	1,5	1	3	1,687	1,774	3,15	3,15	0,00	(3,135; 3,155)
3	25	2	1	3	1,687	1,774	1,53	1,53	0,00	(1,528; 1,537)
3	15	0,25	1	3	1,937	1,735	185,72	186,26	0,29	(184,774; 186,304)
3	15	0,5	1	3	1,937	1,735	61,81	61,99	0,29	(61,386; 61,936)
3	15	1	1	3	1,937	1,735	9,94	9,94	0,00	(9,873; 9,972)
3	15	1,25	1	3	1,937	1,735	5,03	5,05	0,40	(5,007; 5,040)
3	15	1,5	1	3	1,937	1,735	2,94	2,94	0,00	(2,935; 2,954)
3	15	2	1	3	1,937	1,735	1,48	1,48	0,00	(1,479; 1,487)
3	5	0,25	1	3	2,388	1,664	188,59	188,84	0,13	(187,598; 189,290)
3	5	0,5	1	3	2,388	1,664	63,68	63,83	0,24	(63,524; 63,929)
3	5	1	1	3	2,388	1,664	10,54	10,57	0,28	(10,535; 10,618)
3	5	1,25	1	3	2,388	1,664	5,38	5,38	0,00	(5,361; 5,402)
3	5	1,5	1	3	2,388	1,664	3,16	3,16	0,00	(3,144; 3,170)
3	5	2	1	3	2,388	1,664	1,57	1,57	0,00	(1,568; 1,575)
5	25	0,25	3	6	0,917	1,336	133,63	134,15	0,39	(133,543; 134,753)
5	25	0,5	3	6	0,917	1,336	33,61	33,82	0,64	(33,563; 33,821)
5	25	1	3	6	0,917	1,336	4,53	4,54	0,14	(4,512; 4,546)
5	25	1,25	3	6	0,917	1,336	2,41	2,41	0,10	(2,403; 2,421)
5	25	1,5	3	6	0,917	1,336	1,58	1,58	0,23	(1,575; 1,584)
5	25	2	3	6	0,917	1,336	1,08	1,08	0,12	(1,078; 1,081)
5	15	0,25	3	6	1,059	1,327	134,08	134,35	0,20	(133,400; 134,735)
5	15	0,5	3	6	1,059	1,327	33,90	33,96	0,19	(33,756; 34,086)
5	15	1	2	5	1,469	1,334	4,57	4,57	0,01	(4,566; 4,599)
5	15	1,25	2	5	1,469	1,334	2,42	2,44	0,70	(2,413; 2,435)
5	15	1,5	2	5	1,469	1,334	1,59	1,59	0,07	(1,581; 1,590)
5	15	2	2	5	1,469	1,334	1,08	1,08	0,10	(1,079; 1,082)
5	5	0,25	2	5	1,772	1,274	138,46	137,28	0,85	(137,720; 139,239)
5	5	0,5	2	5	1,772	1,274	36,06	35,99	0,20	(35,711; 36,133)
5	5	1	2	5	1,772	1,274	5,02	5,02	0,08	(5,010; 5,038)
5	5	1,25	2	5	1,772	1,274	2,66	2,67	0,23	(2,655; 2,674)
5	5	1,5	2	5	1,772	1,274	1,72	1,73	0,39	(1,718; 1,726)
5	5	2	2	5	1,772	1,274	1,12	1,12	0,34	(1,120; 1,123)

fonte: Produção do Próprio Autor.

dos respectivos intervalos de confiança, tal fato indica que o programa computacional funciona corretamente. Em alguns cenários da Tabela 2, ocorre $CLy = n + 1$ e isso indica que, nesses cenários, o limite CLy é desconsiderado, ou seja, o gráfico de controle só sinaliza uma perturbação no processo na segunda etapa do gráfico ATTRIVAR, o gráfico de $\bar{X}$.

Os resultados obtidos para NMA_C , na Tabela 2, parecem indicar que, para $n = 3$, os valores de NMA quando $p_{\bar{X}} = 15\%$ são menores do que os valores para $p_{\bar{X}} = 25\%$ e $p_{\bar{X}} = 5\%$, isso indica que existe um valor para $p_{\bar{X}}$ no intervalo $[5\%; 25\%]$ que minimiza o NMA. Logo, é possível afirmar, a partir do que foi observado na Tabela 2 para $n = 3$, que a relação entre a frequência de inspeções por

Figura 9 – Planilha para obter NMA_S para o gráfico B-ATTRIVAR (semente aleatória: 123)

B-ATTRIVAR Chart simulation		
Entrada		
μ	=	1000
σ	=	20
n	=	5
k_g	=	1,312
W_y	=	3
C_{Ly}	=	5
k	=	1,294
δ	=	1
Rodadas	=	3000
Saída		
$p\bar{X}$	=	4,97%
NMA0	=	376,81
NMA _S	=	5,22
Simular NMA0 Simular NMA_S Novo		

fonte: Produção do próprio autor.

variável e a eficiência do gráfico de controle não é linear. Entretanto, quando $n = 5$, a Tabela 2 indica que quanto maior a frequência de inspeções por variável, maior é a eficiência do gráfico de controle B-ATTRIVAR.

Na Tabela 3, o NMA_{GA} obtido com o algoritmo genético, publicado em Ho e Aparisi (2016), são comparados com os valores de NMA obtidos com o valor exato das distribuições de $\bar{X}|Y_D$. Ho e Aparisi (2016) não publicaram os valores dos parâmetros do gráfico que levam aos valores de NMA_{GA} , consequentemente, não foi possível comparar os parâmetros utilizados pelos autores com os parâmetros utilizados neste trabalho mas, mesmo assim, foi possível constatar que os valores de NMA obtidos pelo algoritmo genético não são ótimos.

A Figura 9 apresenta uma tela de saída de uma planilha em Excel (disponível em <http://www.fbranco.unifei.edu.br>) programada em linguagem VBA que obtém os valores de NMA_S por meio de simulação para um determinado cenário do gráfico B-ATTRIVAR.

4.3 GRÁFICO DE CONTROLE ATTRIVAR TRINOMIAL

Nesta seção, um novo gráfico de controle ATTRIVAR é proposto. A ideia principal deste novo gráfico ATTRIVAR é aproveitar a informação sobre o sentido da perturbação da média do processo já na inspeção por atributo, buscando assim, diminuir a taxa de alarmes falsos e diminuir os custos de monitoramento. O gráfico proposto aqui nesta seção é denominado ATTRIVAR Trinomial (T-ATTRIVAR) pois a inspeção por atributo classifica os itens da amostra em três grupos distintos e não em dois (aprovados e reprovados) como no gráfico ATTRIVAR Binomial.

Um desvio que aumenta a média do processo aumenta a probabilidade da inspeção por atributo classificar um item como defeituoso com o valor X sendo maior do que o Limite Discriminante Superior ($X > LDS$) e diminui a probabilidade da inspeção por atributo classificar o item como defeituoso com o valor de X sendo menor do que o Limite Discriminante Inferior ($X < LDI$). Comentários

similares podem ser feitos para desvios que diminuem a média do processo. Com amostras típicas de tamanho cinco ou próximo de cinco itens, parece razoável considerar que o processo está em controle toda vez que, entre os itens de uma amostra considerados defeituosos, dois deles foram classificados como defeituosos por indicadores diferentes: por exemplo, o primeiro foi reprovado pelo indicador não-passa ($X < LDI$), e o segundo foi reprovado pelo indicador passa ($X > LDS$). Quando o B-ATTRIVAR está em uso, esses dois tipos de defeitos não são discriminados e, independentemente de serem muito grandes ou muito pequenos, os itens são simplesmente classificados como defeituosos. Em geral, uma perturbação no processo desloca a média do processo para cima ou para baixo, conseqüentemente, é importante distinguir os itens defeituoso com $X > LDS$ daqueles defeituosos com $X < LDI$. A versão trinomial do gráfico de controle ATTRIVAR (T-ATTRIVAR) foi proposto com esse propósito.

Quando o gráfico T-ATTRIVAR está em uso, uma amostra de tamanho n é coletada e todos os n itens são classificados e três categorias excludentes por um teste passa/não-passa; os itens $X < LDI$ são reprovados pelo indicador não-passa e é classificado, então, na categoria A, os itens com $X > LDS$ são reprovados pelo indicador passa e é, então, classificado na categoria B, o restante dos itens com $LDI \leq X \leq LDS$ são classificados na categoria AB. O número de itens em cada uma das três categorias são Y_A , Y_B e Y_{AB} . Se $Y_A > 0$ e $Y_B > 0$; $Y_A = 0$ e $Y_B < Wy$; ou $Y_A < Wy$ e $Y_B = 0$, o processo é considerado em controle. Se $Y_A = 0$ e $Y_B \geq CLy$; ou $Y_A \geq CLy$ e $Y_B = 0$, o processo é considerado fora de controle. Em qualquer outro caso, os valores da característica de qualidade X de todos os itens da amostra são medidos e a estatística $\bar{X}$ é calculada; se o valor de $\bar{X}$ estiver no intervalo $[LIC; LSC]$, no qual LIC e LSC são os limites de controle do gráfico de $\bar{X}$, então o processo é considerado em controle, caso contrário, o processo é considerado fora de controle. O fluxograma, na Figura 10, explica como o gráfico de controle T-ATTRIVAR. A Figura 8 pode também representar o gráfico T-ATTRIVAR tornando $Y_D = Y_A$ toda vez que $Y_A > 0$ e $Y_B = 0$; $Y_D = Y_B$ toda vez que $Y_B > 0$ e $Y_A = 0$; e $Y_D = 0$ toda vez que $Y_A > 0$ e $Y_B > 0$.

Quando o gráfico T-ATTRIVAR está em uso, a taxa de amostras submetidas à inspeção por variável com o processo em controle é dada pela expressão (4.10).

$$p_{\bar{X}} = \sum_{i=Wy}^{CLy-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} P_A^i P_{AB}^{(n-i)} + \frac{n!}{i!(n-i)!} P_B^i P_{AB}^{(n-i)} \quad (4.10)$$

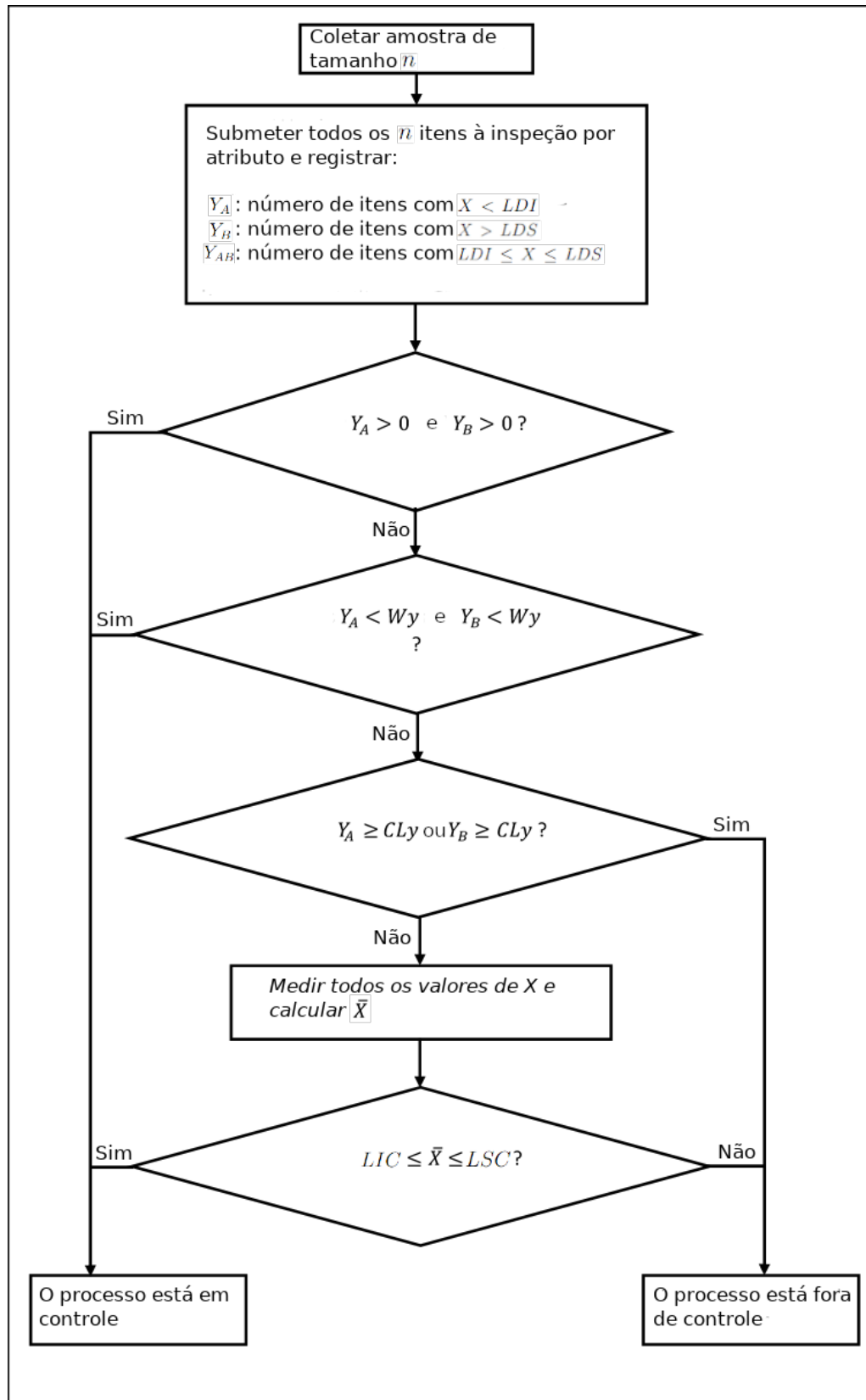
Onde $P_A = \Phi((LDI - \mu_0)/\sigma_0)$ e $P_B = 1 - \Phi((LDS - \mu_0)/\sigma_0)$ e $P_{AB} = (1 - P_A - P_B)$.

Na Figura 11, o desempenho dos gráficos B- e T- ATTRIVAR são comparados. Os parâmetros dos gráficos ATTRIVAR estão na Tabela 4. Todos os casos levam a um NMA_0 de 370,4.

De acordo com a Figura 11, o gráfico T-ATTRIVAR é altamente recomendado em duas situações:

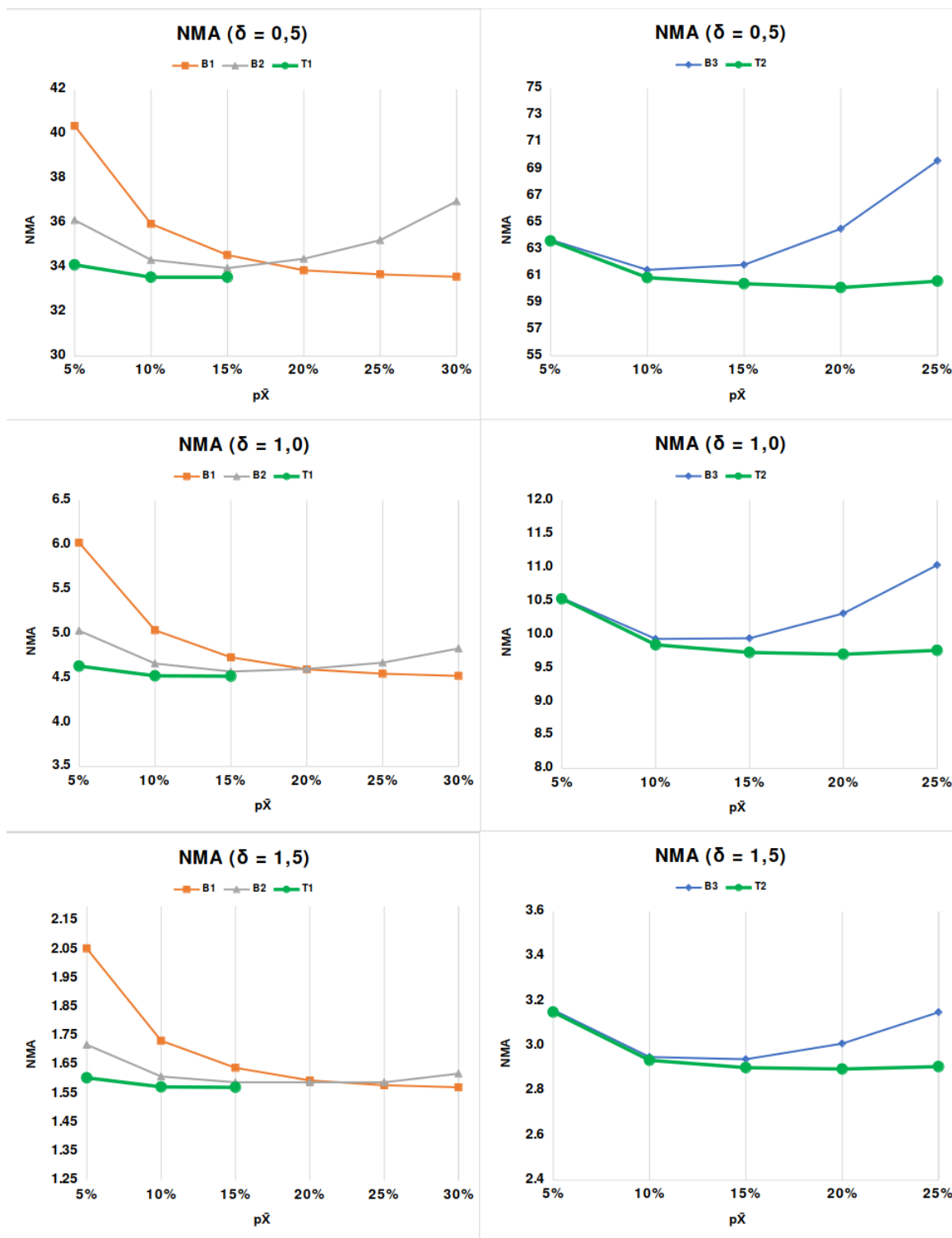
- a) Quando amostras de tamanho $n = 5$ são retirados do processo e não são permitidas muitas amostras a serem submetidas a inspeção por variável ($p_{\bar{X}}$ não pode exceder 15%). Não foi possível encontrar um projeto para o gráfico T-ATTRIVAR com os parâmetros T1 que atendam as condições $NMA_0 = 370,4$ e $p_{\bar{X}} > 15\%$.

Figura 10 – Fluxograma do gráfico T-ATTRIVAR



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 11 – Gráficos B- e T-ATTRIVAR ($n = 5$ esquerda e $n = 3$ direita)



fonte: Produção do próprio autor.

- b) Quando amostras de tamanho $n = 3$ são retiradas do processo e é permitido muitas amostras possam ser submetidas à inspeção por variável ($p\bar{x}$ acima de 15%).

Uma segunda planilha programada em VBA foi desenvolvida para obter o NMA_S do gráfico T-ATTRIVAR. A Figura 12 apresenta a tela da planilha programada em VBA (disponível em: <http://www.fbranco.unifei.edu.br>).

Figura 12 – Planilha para calcular NMA_S para T-ATTRIVAR (semente aleatória: 123)

T-ATTRIVAR Chart simulation		
Entrada		
μ	=	1000
σ	=	20
n	=	5
k_g	=	1,5688
W_y	=	2
Cl_y	=	5
k	=	1,3215
δ	=	1
Rodadas	=	3000
Saída		
$p\bar{X}$	=	5,00%
NMA0	=	371,89
NMAS	=	4,68
Simular NMA0		
Simular NMAS		
Novo		

fonte: Produção do próprio autor.

O gráfico T-ATTRIVAR pode ser comparado com o gráfico np e também com outros gráficos semelhantes já estudados na literatura. De fato, se os itens da amostra podem ser submetidos à inspeções com dispositivo do tipo passa/não-passa, então o gráfico de controle np pode ser usado para controlar a média do processo. O item da amostra é aprovado quando sua dimensão X é maior do que o limite discriminante inferior LDI e menor do que o limite discriminante superior LDS . O alarme ocorre quando o número de itens reprovados em uma amostra, Y_D , é maior do que o limite do gráfico, LSC_{np} . Para comparar os gráficos de controle em uma perspectiva econômica, a expressão (4.11) foi utilizada.

$$C_T(n) = C_a \times n + C_v \times n \times p_{\bar{X}} \quad (4.11)$$

Na expressão (4.11), $C_T(n)$ representa o custo total de amostragem do gráfico T-ATTRIVAR, C_a é o custo de inspeção por atributo por item, n é o tamanho da amostra, C_v é o custo de inspeção por variável por item e $p_{\bar{X}}$ é a taxa de amostras submetidas à inspeção por variável quando o processo está em controle. O gráfico T-ATTRIVAR com $n = 5$ sinaliza uma perturbação na média do processo mais rápido do que o gráfico np com $n = 12$ ($LSC = -LIC = 1,696$; $LSC_{np} = 4$). Como apenas 5% das amostras, quando o processo está em controle, do gráfico T-ATTRIVAR são submetidas a inspeção do tipo variável, a taxa entre o custo de inspeção por variável e inspeção por atributo pode ser até 28:1; se o custo de inspeção por atributo é R\$1, totalizando R\$12 o custo de amostragem com o gráfico np, então o custo de inspeção por variável pode ser até R\$28, uma vez que $C_T(5) = 1 \times 5 + 28 \times 5 \times 0,05 = 12$. A Tabela 5 também compara o gráfico T-ATTRIVAR com $n = 3$ e o gráfico np com $n = 6$ ($LSC = -LIC = 1,931$; $LSC_{np} = 2$). Nesse segundo caso, a taxa entre o custo de inspeção por variável e o custo de inspeção por atributo pode ser até 20:1. Como, geralmente, a taxa entre os custos de inspeção por variável e por atributo são menores do que 20:1 ou 28:1, o gráfico de controle T-ATTRIVAR é uma alternativa interessante ao gráfico np.

O gráfico $\bar{X}_{rec}$ proposto por Quinino, Ho e Trindade (2015) necessita que sejam adotados dois limites discriminantes para classificar os itens da amostra em três categorias excludentes; ou seja, itens nas categorias A, B ou AB, são, respectivamente, itens com a dimensão X menores do que o LDI , maiores do que o LDS , ou nem menores do que o LDI e nem maiores do que o LDS . Depois dessa etapa, as observações N_1 , N_2 e N_3 são, respectivamente, geradas aleatoriamente de distribuições $N(-N_1, 1)$, $N(N_2, 1)$ e $N(0, 1)$. Os valores N_1 , N_2 e N_3 são, respectivamente, o número de itens classificados como A, B e AB. A estatística monitorada $\bar{X}_{rec}$ é a média das observações N_1 , N_2 e N_3 . O gráfico T-ATTRIVAR com $n = 5$ e $p_{\bar{X}} = 5\%$ é mais eficiente do que o gráfico $\bar{X}_{rec}$ com $n = 6$, como apresentado na Tabela 6. É importante destacar que o gráfico $\bar{X}_{rec}$ é bem complicado de ser aplicado, uma vez que utiliza valores simulados.

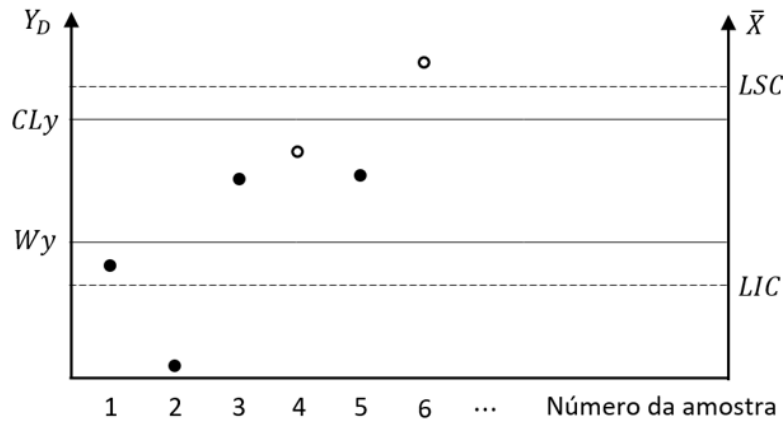
A ideia de monitorar a média do processo explorando dados amostrais de atributo e variável foi introduzida por Sampaio, Ho e Medeiros (2014). Com o gráfico $np_X - \bar{X}$, proposto por Sampaio, Ho e Medeiros (2014), em uso, as amostras de tamanho n são divididas em dois subgrupos n_1 e n_2 , de tal forma que, os n_1 itens do primeiro subgrupo são submetidos à inspeções por atributo e os n_2 itens do segundo subgrupo são medidos em uma inspeção por variável. Os itens do primeiro subgrupo são classificados em aprovados e reprovados, se o número de reprovados exceder um determinado limite, o segundo subgrupo é inspecionado, mas agora os itens do segundo subgrupo são medidos, resultando em um valor de $\bar{X}$ que é utilizado para decidir o estado do processo. O gráfico $np_X - \bar{X}$ com $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ e $p_{\bar{X}} = 25\%$, ou seja com um tamanho médio de amostra ($\bar{n}$) igual a 3, tem um desempenho inferior do que o gráfico T-ATTRIVAR com $n = 3$ e $p_{\bar{X}} = 20\%$, como mostra a Tabela 6.

A Tabela 6 foi construída com os valores de NMA do gráfico $\bar{X}_{rec}$ desenvolvido por Quinino, Ho e Trindade (2015). Em Sampaio, Ho e Medeiros (2014), apenas deslocamentos que aumentam a média do processo foram considerados para o cálculo de NMA do gráfico $np_X - \bar{X}$. Então, para uma comparação justa entre sua eficiência com a eficiência do gráfico T-ATTRIVAR, a Tabela 6 foi construída com o gráfico $np_X - \bar{X}$ bilateral, ou seja, a versão de $np_X - \bar{X}$ para perturbações que aumentam e perturbações que diminuem a média do processo.

4.4 GRÁFICO DE CONTROLE VCS-ATTRIVAR TRINOMIAL

Quando o gráfico de controle VCS (*Variable Charting Statistics*) ATTRIVAR trinomial é usado para o monitoramento da média de processos, a amostra de tamanho n é submetida a uma inspeção por atributo e cada um dos itens da amostra são classificados em três categorias A, B ou AB. Nessa inspeção por atributo, o item é classificado na categoria A se a característica de qualidade X for menor do que um limite discriminante inferior (LDI), o item é classificado na categoria B se a característica de qualidade X for maior que um limite discriminante superior (LDS) e o item é classificado na categoria AB se a característica de qualidade X estiver entre LDI e LDS . A quantidade de itens classificados na categoria A, B e AB são, respectivamente, Y_A , Y_B e Y_{AB} para cada amostra. Se em uma determinada amostra, $Y_A > 0$ e $Y_B = 0$ então o número de itens defeituosos Y_D será igual a Y_A . Se em uma determinada amostra, $Y_A = 0$ e $Y_B > 0$ então o número de itens defeituosos Y_D será igual a Y_B . Se em uma determinada amostra, $Y_A > 0$ e $Y_B > 0$ então o número de itens defeituosos Y_D será igual a zero. Se em uma determinada amostra, $Y_A = 0$ e $Y_B = 0$ então o número de itens

Figura 13 – Representação do gráfico de controle VCS-ATTRIVAR trinomial



fonte: Produção do próprio autor.

defeituosos Y_D também será igual a zero. Dependendo do resultado do número de itens defeituosos Y_D na inspeção por atributo, uma decisão é tomada sobre a situação do processo monitorado. Se Y_D é menor que um limite de alarme W_y , então o processo é considerado em controle e a próxima amostra será submetida também a uma inspeção por atributo. Se Y_D for maior ou igual a um limite de controle CL_y , então o processo é considerado fora de controle. Se Y_D for maior ou igual a W_y mas menor do que CL_y então o processo é considerado em controle, mas a próxima amostra será submetida a uma inspeção por variável. Neste último caso, quando uma variável é submetida a uma inspeção por variável, as características de qualidade X são medidas para todos os itens da amostra e a média amostral $\bar{X}$ é calculada e, dependendo desse valor, uma decisão é tomada sobre o processo. Caso $\bar{X}$ seja menor do que um limite inferior de controle LIC ou maior que um limite superior de controle LSC , então o processo é considerado fora de controle, caso contrário, o processo é considerado em controle e a próxima amostra será submetida a uma inspeção por atributo.

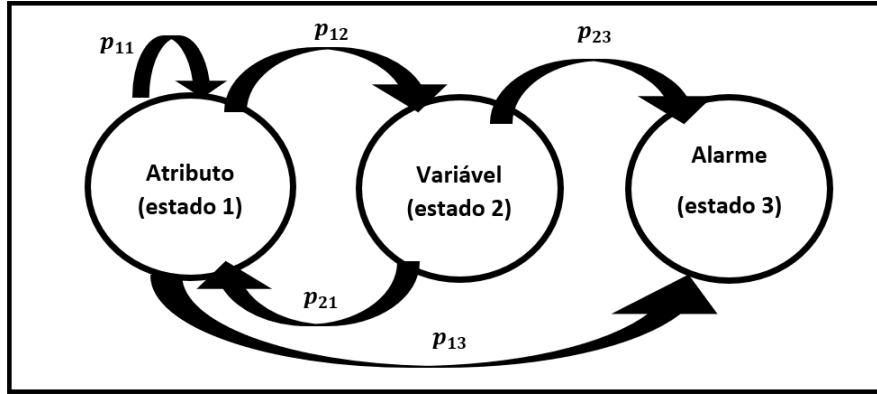
A Figura 13 ilustra um gráfico de controle VCS-ATTRIVAR trinomial em uso. Na Figura 13, as amostras 1, 2, 3 e 5 são submetidas a uma inspeção por atributo e utilizam a escala da esquerda do gráfico e as amostras 4 e 6 são submetidas a inspeções por variável e utilizam a escala da direita do gráfico.

É possível observar também, na Figura 13, que ocorre um alarme na amostra de número 6, já que essa foi submetida a uma inspeção por variável e o valor de $\bar{X}$ é maior do que LSC .

Para o VCS-ATTRIVAR trinomial, o valor de NMA foi calculado por meio de um modelo de cadeia de Markov. Nesse modelo são definidos, então, dois estado transientes, o estado 1: inspeção por atributo; o estado 2: inspeção por variável; e um estado absorvente: o alarme. A Figura 14 ilustra esses estados do modelo e as probabilidades de transição.

O modelo de cadeia de Markov também pode ser representado pela matriz de transição $R = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, na qual as probabilidades de transição são definidas em (4.12), (4.13), (4.14),

Figura 14 – Ilustração da cadeia de Markov do VCS-ATTRIVAR trinomial



fonte: Produção do próprio autor.

(4.15) e (4.16).

$$p_{12} = \sum_{i=W_y}^{CLy-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} P_A^i P_{AB}^{(n-i)} + \frac{n!}{i!(n-i)!} P_B^i P_{AB}^{(n-i)} \quad (4.12)$$

$$p_{13} = \sum_{i=CLy}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} P_A^i P_{AB}^{(n-i)} + \frac{n!}{i!(n-i)!} P_B^i P_{AB}^{(n-i)} \quad (4.13)$$

$$p_{11} = 1 - p_{12} - p_{13} \quad (4.14)$$

$$p_{21} = \Phi\left(\frac{LSC_{\bar{X}-\mu_0}}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{LIC_{\bar{X}-\mu_0}}{\sigma_0}\right) \quad (4.15)$$

$$p_{23} = 1 - p_{21} \quad (4.16)$$

O valor de NMA é então, utilizando as propriedades elementares de cadeias de Markov, apresentado na expressão (4.17).

$$NMA = \pi(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1} \quad (4.17)$$

Onde π é o vetor de probabilidades de estado-estável para os estados transientes para muitas rodadas com o processo em controle, apresentado na expressão (4.18)

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Onde $\pi_1 = \frac{1}{1+p_{12}}$ e $\pi_2 = \frac{p_{12}}{1+p_{12}}$ quando o processo está em controle. $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem 2, $\mathbf{Q}$ é a matriz de transição no qual os elementos associados ao estado absorvente foram deletados, e $\mathbf{1}$ é o vetor preenchido com valores 1.

Para o gráfico de controle VCS-ATTRIVAR trinomial a probabilidade de encontrar o processo na inspeção por variável $p_{\bar{X}}$ é igual a π_2 .

Para comparar a eficiência dos dois gráficos de controle apresentados neste trabalho, a Tabela 7 foi montada apresentando os valores de NMA calculados para cada um dos gráficos em diferentes cenários. Na Tabela 7, foram considerados os valores de $n = 3$ e $n = 5$ para o tamanho da amostra, os valores $p_{\bar{X}} \in [5\%; 15\%; 25\%]$ para a probabilidade de encontrar o processo na inspeção por variável e os valores $\delta \in [0, 25; 0, 5; 1; 1, 25; 1, 5; 2]$, para a magnitude de deslocamento da média do processo. Na Tabela 7, a última coluna representa a diferença percentual entre os valores de NMA para cada cenário.

É possível observar, pela Tabela 7, que em todos os cenários analisados a eficiência do gráfico T-ATTRIVAR é maior do que a do gráfico T-VCS-ATTRIVAR, na maioria dos casos a eficiência é mais de 10% maior. Para visualizar melhor a diferença entre os valores de NMA, a Figura 15 foi construída com gráficos apresentando alguns valores da Tabela 7.

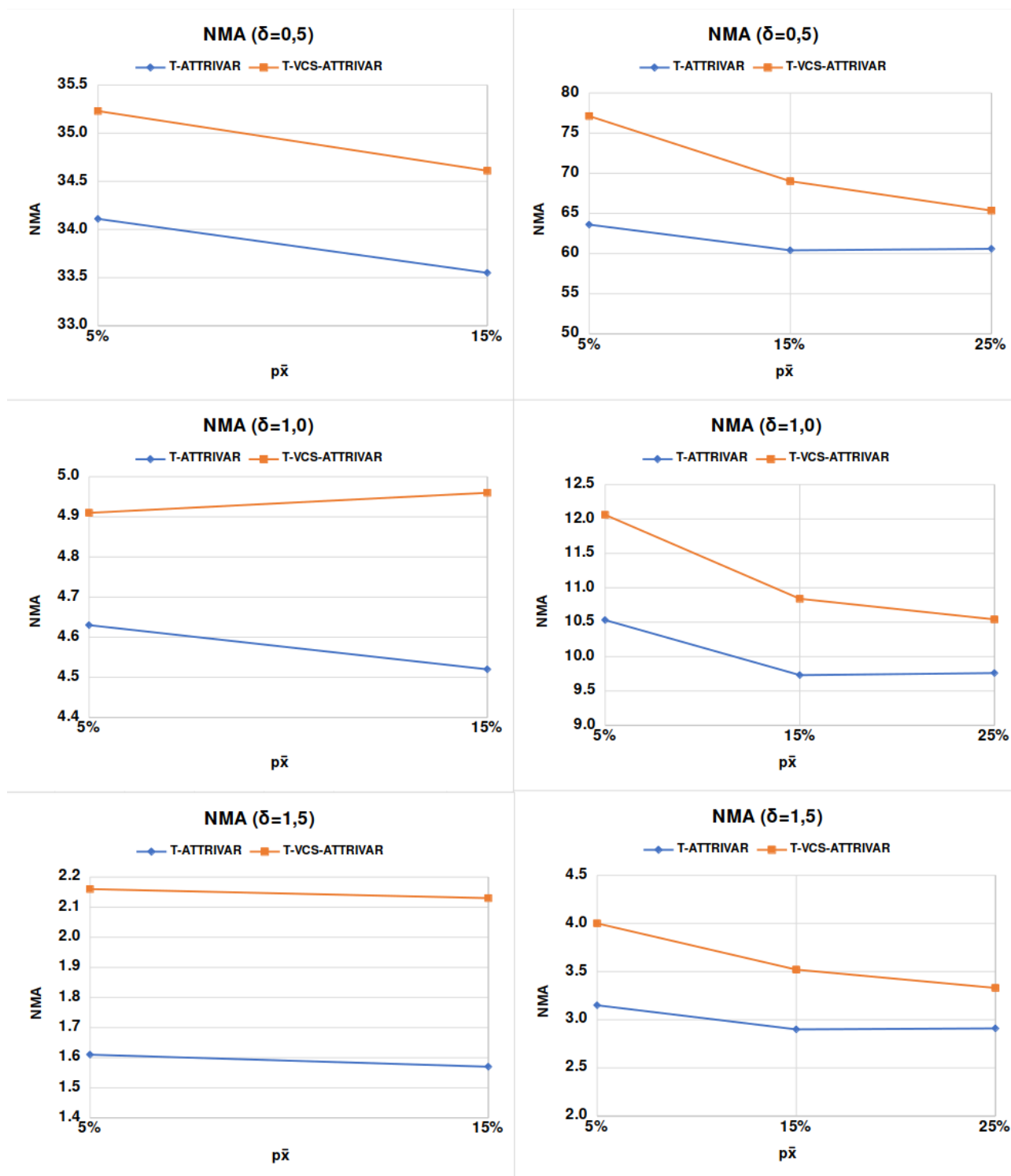
Na Figura 15, os gráficos do lado esquerdo são referentes aos cenários com $n = 5$ e os gráficos do lado direito são referentes aos cenários de $n = 3$.

4.5 GRÁFICO DE CONTROLE ATTRIVAR ALTERNADO BIVARIADO

O gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado é proposto para o monitoramento do vetor de médias de um processo com duas características de qualidade (X e Z), ou seja, um processo bivariado. Quando este gráfico está em uso, amostras de tamanho n são coletadas e todos os itens desta amostra são submetidos a inspeções por atributo que classificam os itens em três categorias excludentes A, B e AB, mas, inicialmente apenas para a característica de qualidade X. Um item é classificado como do tipo A se sua dimensão X for menor do que um limite discriminante inferior (LDI_X), ou é classificado como do tipo B se sua dimensão X for maior do que um limite discriminante superior (LDS_X), ou é classificado com do tipo AB se sua dimensão X está entre esses dois limites. O número de itens classificados como tipo A, B e AB são, respectivamente, Y_A , Y_B e Y_{AB} . O valor de rejeitados na inspeção por atributo (Y_D) é definido da mesma forma que o gráfico T-ATTRIVAR, ou seja, $Y_D = Y_A$ toda vez que $Y_A > 0$ e $Y_B = 0$; $Y_D = Y_B$ toda vez que $Y_B > 0$ e $Y_A = 0$; e $Y_D = 0$ toda vez que $Y_A > 0$ e $Y_B > 0$. Caso Y_D seja maior ou igual ao limite de controle do gráfico de atributo CLy , o processo é considerado fora de controle, caso seja menor do que o limite de alarme do gráfico por atributo Wy , o processo é considerado em controle e se $Wy \leq Y_D < Cly$, então os valores de X são medidos em todos os itens da amostra e $\bar{X}$ é utilizado para decidir o estado do processo. Nesse ultimo caso, se $LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}}$ então o processo é considerado em controle, caso contrário, é considerado fora de controle.

Se uma amostra foi analisada em relação a característica de qualidade X e foi decidido que o processo está em controle, a próxima amostra deve ser submetida ao mesmo procedimento de inspeção mas, agora, analisando a característica de qualidade Z. Dessa forma, a próxima amostra de tamanho n é coletada e todos os itens são submetidos a inspeção por atributo quanto a dimensão Z. Então, um item é classificado como do tipo A se sua dimensão Z for menor do que um limite discriminante inferior (LDI_Z), ou é classificado como do tipo B se sua dimensão Z for maior do que um limite discriminante superior (LDS_Z), ou é classificado com do tipo AB se sua dimensão Z está entre esses dois limites. O valor de rejeitados na inspeção por atributo (Y_D) é definido da mesma forma que o

Figura 15 – Gráficos de comparação dos valores de NMA_C ($n = 5$ esquerda e $n = 3$ direita)



fonte: Produção do próprio autor.

gráfico T-ATTRIVAR. Novamente, se Y_D é maior ou igual ao limite de controle do gráfico de atributo CLy , o processo é considerado fora de controle, caso seja menor do que o limite de alarme do gráfico por atributo Wy , o processo é considerado em controle e se $Wy \leq Y_D < CLy$, então os valores de Z são medidos em todos os itens da amostra e $\bar{Z}$ é utilizado para decidir o estado do processo. Nesse último caso, se $LIC_{\bar{Z}} \leq \bar{Z} \leq LSC_{\bar{Z}}$ então o processo é considerado em controle, caso contrário, é considerado fora de controle. Dessa forma, se uma amostra foi analisada em relação a característica de qualidade Z e foi considerada em controle, a próxima amostra será analisada quanto a dimensão X e assim sucessivamente, sempre alternando entre as duas dimensões de interesse.

Para ilustrar melhor esse processo, a Figura 16 mostra uma representação de um processo de monitoramento com o gráfico ATTRIVAR alternado bivariado. Na Figura 16 é possível perceber que os itens das amostras 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15, as amostras ímpares, são inspecionados apenas quanto a dimensão X , e os itens das amostras 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14, as amostras pares, são inspecionados apenas quanto a dimensão Z . Também é possível notar que a amostra 8 foi submetida à inspeção por atributo quanto a dimensão Z e como, para essa amostra, $Y_D = Wy$, então essa mesma amostra foi utilizada para calcular $\bar{Z}$, que por sua vez ficou entre os limites $LIC_{\bar{Z}}$ e $LSC_{\bar{Z}}$, indicando que o processo está em controle e, devido a isso, o monitoramento continuou. A amostra 15 foi submetida a inspeção por atributo quanto a dimensão X e como, para essa amostra $Wy < Y_D < CLy$, então essa mesma amostra também foi submetida a inspeção por variável, sendo calculado o valor de $\bar{X}$, que por sua vez é maior do que $LSC_{\bar{X}}$, logo, o processo foi considerado fora de controle. As demais amostras resultaram em valores de Y_D menores do que Wy indicando assim, logo na inspeção por atributo, que o processo está em controle sem utilizar a inspeção por variável.

Para realizar o cálculo de NMA_C para o gráfico ATTRIVAR alternado bivariado foi utilizada a fórmula apresentada por Leoni e Costa (2018). Nesse trabalho os autores estudam um gráfico de controle por atributo bivariado alternado e, por meio de cálculo de probabilidade, desenvolveram a equação (4.19).

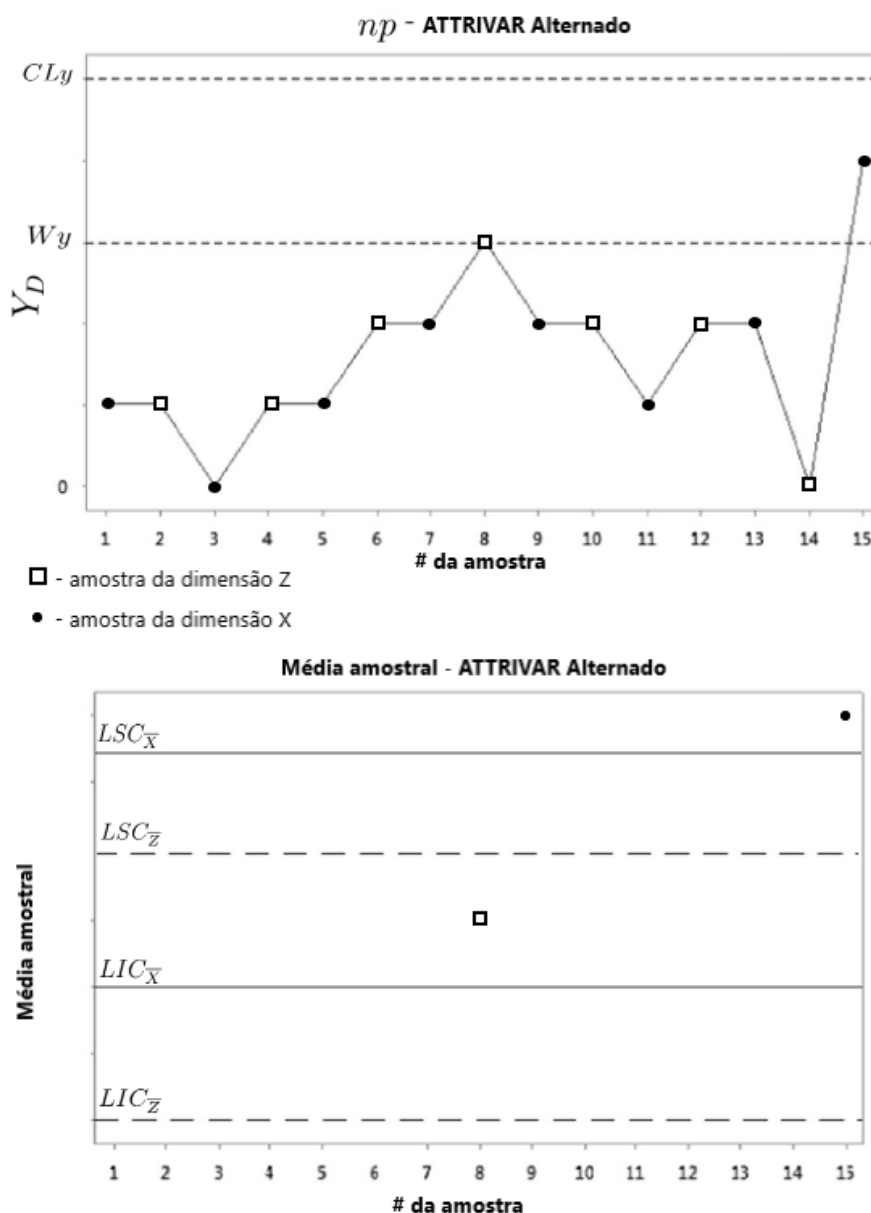
$$NMA = \frac{4 - (p_x + p_z)}{2(p_x + p_z - p_x p_z)} \quad (4.19)$$

No estudo de Leoni e Costa (2018), o valor p_x representa a probabilidade do gráfico por atributo utilizado por eles considerar o processo fora de controle com uma amostra da dimensão X e p_z a probabilidade do gráfico por atributo considerar o processo fora de controle com uma amostra da dimensão Z . Dessa forma, é possível generalizar a fórmula (4.19) para calcular o NMA de qualquer gráfico de controle alternado bivariado substituindo os valores de p_x e p_z pelos valores do poder do gráfico $(1 - \beta)$ analisando apenas a dimensão X e o poder do gráfico analisando apenas a dimensão Z respectivamente. Assim, utilizou-se a equação (4.20) para obter o valor calculado de NMA para o gráfico ATTRIVAR alternado bivariado.

$$NMA_C = \frac{4 - (Pd_x + Pd_z)}{2(Pd_x + Pd_z - Pd_x Pd_z)} \quad (4.20)$$

Na equação (4.20), Pd_x é o poder do gráfico ATTRIVAR trinomial quando apenas a dimensão X é analisada e Pd_z é o poder do gráfico ATTRIVAR trinomial quando apenas a dimensão Z é analisada.

Figura 16 – Gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado



fonte: Produção do próprio autor.

É possível perceber que o valor de NMA_C não depende da correlação ρ entre X e Z, assim como no gráfico desenvolvido por Leoni e Costa (2018).

Os valores de NMA_C foram calculados de acordo com a equação (4.20) e um programa em linguagem R foi desenvolvido para obter os valores simulados de NMA_S para o gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado. A Tabela 8 apresenta os resultados de NMA obtidos dessa forma com $n = 5$, $\rho = 0,7$, $W_y = 2$, $CL_y = 4$, $p_{\bar{X}} = 5\%$. A última coluna da Tabela 8 apresenta o erro percentual entre os valores de NMA_C e NMA_S , δ_X representa o deslocamento da média da característica de qualidade X e δ_Z representa o deslocamento da média da característica de qualidade Z. Observando a Tabela 8 é possível concluir que a diferença percentual entre o valor calculado e o valor obtido por simulação computacional é sempre menor do que 2% para todos os cenários analisados, logo, é possível validar a equação (4.20) e o programa utilizado para obter o resultado

calculado.

Os resultados de eficiência obtidos para o gráfico ATTRIVAR alternado bivariado também foram comparados com a eficiência do gráfico T^2 e os gráficos bivariados apresentados em Aparisi e Ho (2018). A Tabela 9 apresenta os resultados de NMA, com $n = 5$, para o gráfico ATTRIVAR alternado (Alt T-ATTRIVAR), o gráfico M-ATTRIVAR1, o gráfico M-ATTRIVAR3 e o gráfico T^2 .

Comparando os valores de NMA apresentados na Tabela 9, é possível concluir que o gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado é mais eficiente que os gráficos M-ATTRIVAR1, M-ATTRIVAR3 e T^2 apenas quando a correlação ρ é alta e a magnitude das perturbações nas médias de X e Z são semelhantes. Assim, considerando apenas a eficiência no monitoramento do processo, o uso do gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado seria recomendado apenas em processos bivariados nos quais há uma forte correlação entre as duas características de qualidade e sabe-se que as perturbações no processo deslocam a média das duas características de qualidade.

É possível, também, comparar o gráfico ATTRIVAR alternado bivariado com o gráfico de T^2 quanto aos custos de monitoramento. O custo total de inspeção para o gráfico ATTRIVAR alternado bivariado pode ser obtido pelas expressão (4.11) já que apenas uma característica de qualidade é analisada por vez neste método de monitoramento. O custo total de inspeção para o gráfico de T^2 , quando o processo é bivariado, pode ser obtido pela expressão (4.21), onde C_v é o custo de inspeção de uma variável de interesse em um item da amostra de tamanho n .

$$C_T(n) = C_v \times 2n \quad (4.21)$$

Assim, considerando o caso em que $n = 5$ e $p_{\bar{X}} = 5\%$ podemos encontrar a relação C_v/C_a torna igual os valores de $C_T(n)$ nas equações (4.11) e (4.21). Neste cenário, a relação C_v/C_a é igual a 20/39, ou seja, mesmo que o custo da inspeção por atributo seja aproximadamente o dobro da inspeção por variável ainda é mais vantajoso utilizar o gráfico ATTRIVAR alternado bivariado do que o gráfico de T^2 . Como o custo de inspeção por atributo geralmente é menor do que o custo de inspeção por variável, o gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado é mais econômico do que o gráfico de T^2 .

Tabela 3 – Comparação entre valores de NMA para B-ATTRIVAR

(continua)							
n	$\max p_{\bar{X}} (\%)$	δ	NMA_{GA}	Melhor $p_{\bar{X}} (\%)$	NMA_C	NMA_S	IC (95%)
3	25	0,25	189,84	10	185,2	185,19	(184,841; 186,377)
3	25	0,5	61,29	10	61,43	61,47	(61,015; 61,651)
3	25	1	10,19	10	9,93	9,88	(9,893; 9,971)
3	25	1,25	5,16	10	5,04	5,06	(5,017; 5,068)
3	25	1,5	3	10	2,95	2,96	(2,942; 2,965)
3	25	2	1,51	10	1,49	1,49	(1,487; 1,493)
3	15	0,25	189,84	10	185,2	185,19	(184,841; 186,377)
3	15	0,5	61,29	10	61,43	61,47	(61,015; 61,651)
3	15	1	10,19	10	9,93	9,88	(9,893; 9,971)
3	15	1,25	5,2	10	5,04	5,06	(5,017; 5,068)
3	15	1,5	3,03	10	2,95	2,96	(2,942; 2,965)
3	15	2	1,61	10	1,49	1,49	(1,487; 1,493)
3	5	0,25	192,85	5	188,59	188,84	(188,208; 189,699)
3	5	0,5	64,78	5	63,68	63,83	(63,286; 63,910)
3	5	1	11,65	5	10,54	10,57	(10,489; 10,591)
3	5	1,25	5,83	5	5,38	5,38	(5,367; 5,404)
3	5	1,5	3,36	5	3,16	3,16	(3,135; 3,161)
3	5	2	1,73	5	1,57	1,57	(1,565; 1,574)
5	25	0,25	139,68	25	133,63	134,15	(132,780; 134,284)
5	25	0,5	34,64	25	33,61	33,82	(33,497; 33,784)
5	25	1	4,61	25	4,53	4,54	(4,512; 4,550)
5	25	1,25	2,51	25	2,41	2,41	(2,404; 2,416)
5	25	1,5	1,59	25	1,58	1,58	(1,572; 1,582)
5	25	2	1,08	25	1,08	1,08	(1,078; 1,081)
5	15	0,25	140,04	15	134,08	134,35	(133,368; 134,605)
5	15	0,5	35,64	15	33,9	33,96	(33,838; 34,065)
5	15	1	4,78	15	4,6	4,59	(4,569; 4,612)
5	15	1,25	2,61	15	2,44	2,45	(2,439; 2,454)
5	15	1,5	1,71	15	1,6	1,6	(1,597; 1,606)
5	15	2	1,11	15	1,09	1,09	(1,086; 1,091)
5	5	0,25	145,48	5	138,46	137,28	(137,753; 139,395)
5	5	0,5	40,98	5	36,06	35,99	(35,855; 36,205)
5	5	1	5,29	5	5,02	5,02	(4,989; 5,030)
5	5	1,25	2,76	5	2,66	2,67	(2,647; 2,668)
5	5	1,5	2,25	5	1,72	1,73	(1,721; 1,730)
5	5	2	1,15	5	1,13	1,13	(1,124; 1,131)
10	25	0,25	79,55	25	-	73,93	(73,754; 74,322)
10	25	0,5	14,18	25	-	13,17	(13,144; 13,259)
10	25	1	1,99	25	-	1,84	(1,828; 1,841)
10	25	1,25	1,36	25	-	1,23	(1,229; 1,237)
10	25	1,5	1,06	25	-	1,05	(1,049; 1,055)
10	25	2	1,02	25	-	1	(1,000; 1,001)

Tabela 3 – Comparação entre valores de NMA para B-ATTRIVAR

n	$\max p_{\bar{X}} (\%)$	δ	NMA_{GA}	Melhor $p_{\bar{X}} (\%)$	NMA_C	NMA_S	(conclusão)
							IC (95%)
10	15	0,25	77,82	15	-	76,57	(76,169; 77,046)
10	15	0,5	14,31	15	-	13,96	(13,861; 13,965)
10	15	1	2,01	15	-	1,91	(1,906; 1,920)
10	15	1,25	1,36	15	-	1,27	(1,267; 1,274)
10	15	1,5	1,08	15	-	1,07	(1,068; 1,070)
10	15	2	1	15	-	1	(1,000; 1,002)
10	5	0,25	89,55	5	-	85,94	(85,836; 86,526)
10	5	0,5	19,27	5	-	16,92	(16,864; 17,009)
10	5	1	2,66	5	-	2,4	(2,384; 2,401)
10	5	1,25	1,76	5	-	1,49	(1,481; 1,491)
10	5	1,5	1,3	5	-	1,16	(1,155; 1,160)
10	5	2	1,04	5	-	1,01	(1,008; 1,010)
15	25	0,25	49,91	25	-	49,34	(49,386; 49,849)
15	25	0,5	7,62	25	-	7,47	(7,439; 7,503)
15	25	1	1,85	25	-	1,3	(1,230; 1,305)
15	25	1,25	1,15	25	-	1,05	(1,050; 1,057)
15	25	1,5	1,07	25	-	1,01	(1,007; 1,010)
15	25	2	1	25	-	1	(1,000; 1,001)
15	15	0,25	53,56	15	-	51,62	(51,575; 52,098)
15	15	0,5	9,52	15	-	8,12	(8,071; 8,142)
15	15	1	1,51	15	-	1,39	(1,386; 1,393)
15	15	1,25	1,31	15	-	1,09	(1,089; 1,096)
15	15	1,5	1,07	15	-	1,01	(1,010; 1,014)
15	15	2	1	15	-	1	(1,000; 1,001)
15	5	0,25	69,82	5	-	63,32	(63,012; 63,637)
15	5	0,5	13,23	5	-	11,25	(11,242; 11,320)
15	5	1	1,97	5	-	1,77	(1,770; 1,781)
15	5	1,25	1,54	5	-	1,22	(1,220; 1,228)
15	5	1,5	1,09	5	-	1,05	(1,050; 1,052)
15	5	2	1,01	5	-	1	(1,000; 1,001)

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 4 – Parâmetros dos gráficos ATTRIVAR

Gráfico	n	Wy	CLy
B1	5	1	5
B2	5	2	5
T1	5	2	5
B3	3	1	3
T2	3	1	3

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 5 – Comparação entre o T-ATTRIVAR e o np

δ	T-ATTRIVAR	np	T-ATTRIVAR	np
	$n = 5$	$n = 12$	$n = 3$	$n = 6$
0	370,40	370,40	370,40	370,40
0,25	134,67	232,29	188,49	254,35
0,5	34,11	75,57	63,60	103,56
1	4,63	6,63	10,53	13,66
1,25	2,46	2,80	5,37	5,98
1,5	1,61	1,60	3,15	3,13
2	1,09	1,04	1,57	1,42

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 6 – Comparação entre T-ATTRIVAR, $\bar{X}_{rec}$ e $np_X - \bar{X}$

δ	T-ATTRIVAR	$\bar{X}_{rec}$	T-ATTRIVAR	$np_X - \bar{X}$	T-ATTRIVAR	$np_X - \bar{X}$
	$n = 5$	$n = 6$	$n = 3$	$\bar{n} = 3$	$n = 3$	$\bar{n} = 3$
0	370,60	370,03	371,54	370,33	500,53	500,16
0,25	133,57	157,65	182,77	204,26	239,67	263,73
0,5	33,55	45,30	60,11	68,49	75,89	83,41
1	4,52	6,65	9,70	9,78	11,43	10,86
1,5	1,57	2,12	2,90	2,91	3,21	3,03
2	1,08	1,24	1,47	1,59	1,55	1,60

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 7 – Comparação de NMA das versões trinomiais do gráfico ATTRIVAR

n	$p_{\bar{X}}$	δ	T-ATTRIVAR	T-VCS-ATTRIVAR	$\Delta(\%)$
3	0,25	0,25	183,44	194,53	6,05
3	0,25	0,5	60,59	65,35	7,85
3	0,25	1	9,76	10,54	8,02
3	0,25	1,25	4,95	5,48	10,61
3	0,25	1,5	2,91	3,33	14,45
3	0,25	2	1,47	1,79	21,67
3	0,15	0,25	183,4	203,64	11,03
3	0,15	0,5	60,4	69,01	14,26
3	0,15	1	9,73	10,84	11,46
3	0,15	1,25	4,94	5,68	14,95
3	0,15	1,5	2,9	3,52	21,45
3	0,15	2	1,47	2,01	36,51
3	0,05	0,25	188,49	218,38	15,86
3	0,05	0,5	63,6	77,12	21,27
3	0,05	1	10,53	12,06	14,58
3	0,05	1,25	5,37	6,35	18,21
3	0,05	1,5	3,15	4	26,91
3	0,05	2	1,57	2,38	51,57
5	0,15	0,25	133,57	144,08	7,87
5	0,15	0,5	33,55	34,61	3,16
5	0,15	1	4,52	4,96	9,82
5	0,15	1,25	2,4	2,93	22,08
5	0,15	1,5	1,57	2,13	35,22
5	0,15	2	1,08	1,56	44,71
5	0,05	0,25	134,67	149,93	11,33
5	0,05	0,5	34,11	35,23	3,28
5	0,05	1	4,63	4,91	6,04
5	0,05	1,25	2,46	2,94	19,79
5	0,05	1,5	1,61	2,16	34,59
5	0,05	2	1,09	1,53	40,59

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 8 – NMA para ATTRIVAR alternado bivariado

δ_X	δ_Z	k_g	k	NMA _C	NMA _S	Erro
0,00	0,00	1,57	1,321	368,35	368,44	0,03%
0,00	0,25	1,57	1,321	196,47	197,38	0,46%
0,00	0,50	1,57	1,321	61,90	62,58	1,09%
0,00	0,75	1,57	1,321	20,97	20,68	1,41%
0,00	1,00	1,57	1,321	8,66	8,69	0,42%
0,00	1,50	1,57	1,321	2,70	2,70	0,12%
0,25	0,25	1,57	1,321	134,06	134,04	0,02%
0,25	0,50	1,57	1,321	54,06	54,59	0,98%
0,25	0,75	1,57	1,321	20,02	20,34	1,61%
0,25	1,00	1,57	1,321	8,50	8,53	0,31%
0,25	1,50	1,57	1,321	2,69	2,70	0,20%
0,50	0,50	1,57	1,321	34,00	33,95	0,13%
0,50	0,75	1,57	1,321	16,52	16,56	0,21%
0,50	1,00	1,57	1,321	7,84	7,85	0,07%
0,50	1,50	1,57	1,321	2,64	2,66	0,78%
0,75	0,75	1,57	1,321	11,03	10,99	0,39%
0,75	1,00	1,57	1,321	6,43	6,43	0,05%
0,75	1,50	1,57	1,321	2,50	2,48	0,70%
1,00	1,00	1,57	1,321	4,62	4,68	1,26%
1,00	1,50	1,57	1,321	2,24	2,23	0,46%
1,00	2,00	1,57	1,321	1,53	1,53	0,42%
1,50	1,50	1,57	1,321	1,60	1,59	0,81%
1,50	2,00	1,57	1,321	1,27	1,27	0,13%
2,00	2,00	1,57	1,321	1,09	1,09	0,14%

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 9 – Comparação de gráficos bivariados

ρ	δ_X	δ_Z	Alt T-ATTRIVAR	M-ATTRIVAR1	M-ATTRIVAR3	T^2
0,8	0,00	0,25	196,25	94,39	100,42	78,37
0,8	0,00	0,50	61,18	16,24	18,34	11,85
0,8	0,00	1,00	8,45	3,35	4,8	1,5
0,8	0,00	1,50	2,64	2,47	2,75	1,01
0,8	0,25	0,25	133,57	166,31	172,9	167,77
0,8	0,25	0,50	53,45	38,87	41,6	38,99
0,8	0,25	1,00	8,30	3,81	5,09	2,49
0,8	0,25	1,50	2,63	2,13	2,77	1,06
0,8	0,50	0,50	33,55	40,44	40,44	45,45
0,8	0,50	1,00	7,66	4,81	5,62	4,51
0,8	0,50	1,50	2,58	2,05	2,88	1,21
0,8	1,00	1,00	4,52	4,62	5,09	5,46
0,8	1,00	1,50	2,19	2,17	2,61	1,79
0,8	1,50	1,50	1,57	1,95	1,94	1,68
0,5	0,00	0,25	196,25	161,68	162,15	148,55
0,5	0,00	0,50	61,18	36,77	39,32	35,76
0,5	0,00	1,00	8,45	4,54	5,47	4,06
0,5	0,00	1,50	2,64	2,53	2,75	1,4
0,5	0,25	0,25	133,57	149,11	149,23	148,55
0,5	0,25	0,50	53,45	48,09	51,78	51,83
0,5	0,25	1,00	8,30	5,98	6,11	5,7
0,5	0,25	1,50	2,63	2,5	3,04	1,62
0,5	0,50	0,50	33,55	30,06	33,45	35,76
0,5	0,50	1,00	7,66	6	7,66	6,5
0,5	0,50	1,50	2,58	2,63	3,16	1,82
0,5	1,00	1,00	4,52	5,16	4,15	4,06
0,5	1,00	1,50	2,19	2,45	2,61	1,82
0,5	1,50	1,50	1,57	1,93	1,78	1,4
0,3	0,00	0,25	196,25	176,65	186,27	168,93
0,3	0,00	0,50	61,18	48,25	48,3	46,09
0,3	0,00	1,00	8,45	6,04	5,23	5,56
0,3	0,00	1,50	2,64	2,55	2,57	1,7
0,3	0,25	0,25	133,57	133,25	141,05	133,7
0,3	0,25	0,50	53,45	48,16	48,22	49,16
0,3	0,25	1,00	8,30	6,34	6,35	6,47
0,3	0,25	1,50	2,63	2,84	3,41	1,86
0,3	0,50	0,50	33,55	26,61	26,64	29,31
0,3	0,50	1,00	7,66	5,8	5,81	6,05
0,3	0,50	1,50	2,58	2,85	2,78	1,9
0,3	1,00	1,00	4,52	3,23	3,62	3,24
0,3	1,00	1,50	2,19	2,42	2,73	1,62
0,3	1,50	1,50	1,57	1,78	1,75	1,24

fonte: Produção do Próprio Autor.

5 CONCLUSÃO

5.1 VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS E RESPOSTAS ÀS QUESTÕES DE PESQUISA

É possível concluir que o trabalho alcançou os objetivos propostos inicialmente, obtendo um programa, desenvolvido em linguagem computacional R, capaz de calcular o NMA de gráficos de controle ATTRIVAR. Novos gráficos de controle ATTRIVAR foram propostos para o monitoramento da média de processos univariados e do vetor de médias para processos bivariados. A eficiência dos gráficos de controle ATTRIVAR foram comparadas e os melhores parâmetros dos gráficos foram sugeridos. Neste trabalho, foi discutido o projeto do gráfico B-ATTRIVAR, incluindo os projetos apresentados pelo GA desenvolvido por Ho e Aparisi (2016). Foram encontrados valores de NMA menores do que aqueles apresentados por Ho e Aparisi (2016) para o gráficos de controle B-ATTRIVAR. Para diversos cenários, a otimização pelo uso do GA gerou resultados com NMA correspondentes que são mais do que 10% maiores do que os que encontramos em nossos estudos com a computação dos NMA_C exatos. A versão trinomial do gráfico ATTRIVAR se mostrou mais eficiente do que a versão binomial, especialmente quando $n = 5$ e menos do que 15% das amostras em controle são submetidas a inspeção por variável, ou quando $n = 3$ e mais do que 15% das amostras em controle são submetidas a inspeção por variável. A versão trinomial do gráfico ATTRIVAR é uma alternativa mais econômica de monitoramento quando comparado ao gráfico np para o monitoramento da média do processo.

Foi analisada também a eficiência de duas versões trinomiais de gráficos de controle ATTRIVAR, o gráfico T-ATTRIVAR e o T-VCS-ATTRIVAR. Observou-se que, para todos os cenários considerados o gráfico T-ATTRIVAR é mais eficiente que o gráfico T-VCS-ATTRIVAR. Na maioria dos cenários a eficiência do gráfico T-ATTRIVAR foi mais do que 10% maior do que a eficiência do gráfico T-VCS-ATTRIVAR.

No monitoramento de processos bivariados, o gráfico de controle ATTRIVAR alternado bivariado é mais econômico que o gráfico de T^2 mesmo que o custo de inspeção por atributo seja até o dobro do custo de inspeção por variável quando $n = 5$ e $p_{\bar{x}} = 5\%$. Porém o gráfico bivariado proposto só é mais eficiente que aqueles já estudados anteriormente quando há forte correlação entre as duas características de qualidade e quando há desvio semelhante nas duas médias. É evidente, portanto, que, nas versões trinomiais dos gráficos ATTRIVAR, o procedimento de realizar a inspeção por variável na mesma amostra que foi realizada a inspeção por atributo torna o procedimento de monitoramento do processo mais eficiente.

5.2 SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO

Como continuidade deste trabalho, sugere-se avaliar um modelo do gráfico T-ATTRIVAR no qual apenas os itens classificados como do tipo A ou do tipo B são medidos na segunda etapa de monitoramento. Sugere-se, também, estender o estudo para o monitoramento da variância de processos. Desta forma podendo propor novos gráficos de controle ATTRIVAR trinomiais para monitorar a variância dos processos.

REFERÊNCIAS

- AMIRI, A.; ALLAHYARI, S. Change point estimation methods for control chart postsignal diagnostics: a literature review. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 28, n. 7, p. 673–685, 2012. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/qre.1266>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- ANALYTICS, R.; WESTON, S. **Iterators**: provides iterator construct. Melbourne, 2019. R package version 1.0.12. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=iterators>. Acesso em: 23 jul. 2020.
- APARISI, F.; EPPRECHT, E. K.; MOSQUERA, J. Statistical process control based on optimum gages. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 34, n. 1, p. 2–14, 2018. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/qre.2135>. Acesso em: 27 maio 2020.
- APARISI, F.; HO, L. L. M-attrivar: an attribute-variable chart to monitor multivariate process means. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 34, n. 2, p. 214–228, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/qre.2250>. Acesso em: 3 maio 2020.
- ASLAM, M. *et al.* A mixed control chart to monitor the process. **International Journal of Production Research**, v. 53, n. 15, p. 4684–4693, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00207543.2015.1031354>. Acesso em: 2 mar. 2020.
- BEZERRA, E. L.; HO, L. L.; QUININO, R. da C. Gs2: an optimized attribute control chart to monitor process variability. **International Journal of Production Economics**, v. 195, p. 287–295, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2017.10.023>. Acesso em: 22 jan. 2020.
- CAUCHICK, P.; MORABITO, R.; PUREZA, V. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. São Paulo: Atlas, 2005.
- FANG, J.; WANG, H.; DENG, W. Design of ewma control charts for assuring predetermined production process quality. **Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology**, v. 5, n. 10, p. 3010–3014, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.19026/rjaset.5.4615>. Acesso em: 28 mar. 2020.
- FRANCIS, V. On the distribution of the sum of n sample values drawn from a truncated normal population. **Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society**, Wiley Online Library, v. 8, n. 2, p. 223–232, 1946. Disponível em: <http://www.jstor.com/stable/2983565>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- HAQ, A. A new hybrid exponentially weighted moving average control chart for monitoring process mean. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 29, n. 7, p. 1015–1025, 2013. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/qre.1453>. Acesso em: 20 mar. 2020.
- HARIDY, S. *et al.* An attribute chart for monitoring the process mean and variance. **International Journal of Production Research**, v. 52, n. 11, p. 3366–3380, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00207543.2013.875234>. Acesso em: 2 mar. 2020.
- HO, L. L.; APARISI, F. Attrivar: optimized control charts to monitor process mean with lower operational cost. **International Journal of Production Economics**, v. 182, p. 472–483, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.09.011>. Acesso em: 20 mar. 2020.

- HO, L. L.; COSTA, A. Attribute charts for monitoring the mean vector of bivariate processes. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 31, n. 4, p. 683–693, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/qre.1628>. Acesso em: 15 mar. 2020.
- HO, L. L.; QUININO, R. da C. Combining attribute and variable data to monitor process variability: mix s2 control chart. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 87, n. 9-12, p. 3389–3396, 2016. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00170-016-8702-5.pdf>. Acesso em: 26 mar. 2020.
- KHAN, N. *et al.* A control chart for gamma distributed variables using repetitive sampling scheme. **Pakistan Journal of Statistics and Operation Research**, v. 13, n. 1, p. 47–61, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.18187/pjsor.v13i1.1390>. Acesso em: 13 maio 2020.
- LEONI, R. C. **Gráfico de Hotelling com esquemas especiais de amostragem para o monitoramento de processos bivariados autocorrelacionados**. 2015. 140 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP - Brasil, 2015.
- LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B. The shewhart attribute chart with alternated charting statistics to monitor bivariate and trivariate mean vectors. **Computers and Industrial Engineering**, v. 122, p. 273–282, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.06.003>. Acesso em: 15 jul. 2020.
- LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B. The performance of the truncated mixed control chart. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 48, n. 17, p. 4294–4301, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1494284>. Acesso em: 15 jul. 2020.
- MACHADO, M. A. G.; HO, L. L.; COSTA, A. F. B. Attribute control charts for monitoring the covariance matrix of bivariate processes. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 34, n. 2, p. 257–264, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/qre.2253>. Acesso em: 30 maio 2020.
- MASOOD, I.; SHYEN, V. B. E. Quality control in hard disc drive manufacturing using pattern recognition technique. **IOP Conf. Series: materials science and engineering**, v. 160, 2016. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/160/1/012008/pdf>. Acesso em: 22 jun. 2020.
- MELO, M. S.; HO, L. L.; MEDEIROS, P. G. Max d: an attribute control chart to monitor a bivariate process mean. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 90, n. 1-4, p. 489–498, 2017. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00170-016-9368-8.pdf>. Acesso em: 28 maio 2019.
- MICROSOFT; WESTON, S. **Foreach**: provides foreach looping construct. Melbourne, 2020. R package version 1.5.0. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=foreach>. Acesso em: 23 jul. 2020.
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. New York: John Wiley & Sons, 2007.
- MOSQUERA, J.; APARISI, F.; EPPRECHT, E. K. A global scheme for controlling the mean and standard deviation of a process based on the optimal design of gauges. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 34, n. 5, p. 718–730, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/qre.2282>. Acesso em: 23 maio 2020.
- NARASIMHAN, B. *et al.* **Cubature**: adaptive multivariate integration over hypercubes. Stanford, 2020. R package version 2.0.4.1. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=cubature>. Acesso em: 23 jul. 2020.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Editora Feevale, 2013.

QUININO, R. C.; BESSEGATO, L. F.; CRUZ, F. R. B. An attribute inspection control chart for process mean monitoring. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 90, n. 9-12, p. 2991–2999, 2017. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00170-016-9627-8.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2020.

QUININO, R. D. C.; HO, L. L.; TRINDADE, A. L. G. Monitoring the process mean based on attribute inspection when a small sample is available. **Journal of the Operational Research Society**, v. 66, n. 11, p. 1860–1867, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1057/jors.2014.102>. Acesso em: 26 mar. 2020.

R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

RAKITZIS, A. *et al.* An overview of synthetic-type control charts: Techniques and methodology. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 35, n. 7, p. 2081–2096, 2019. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/qre.2491>. Acesso em: 14 nov. 2019.

SAMPAIO, E. S.; HO, L. L.; MEDEIROS, P. G. D. A combined np x control chart to monitor the process mean in a two-stage sampling. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 30, n. 7, p. 1003–1013, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/qre.1528>. Acesso em: 16 mar. 2020.

SIMÕES, F. D.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. The trinomial attrivar control chart. **International Journal of Production Economics**, v. 224, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2019.107559>. Acesso em: 19 jun. 2020.

VENABLES, W. N.; RIPLEY, B. D. **Modern applied statistics with S**. Fourth. New York: Springer, 2002. ISBN 0-387-95457-0. Disponível em: <http://www.stats.ox.ac.uk/pub/MASS4>. Acesso em: 23 jul. 2020.

WU, Z.; JIAO, J. A control chart for monitoring process mean based on attribute inspection. **International Journal of Production Research**, v. 46, n. 15, p. 4331–4347, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00207540601126770>. Acesso em: 20 mar. 2020.

WU, Z. *et al.* An np control chart for monitoring the mean of a variable based on an attribute inspection. **International Journal of Production Economics**, v. 121, n. 1, p. 141–147, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2009.04.021>. Acesso em: 15 jul. 2020.

ZHOU, W.; LIU, N.; ZHENG, Z. A synthetic control chart for monitoring the small shifts in a process mean based on an attribute inspection. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 49, n. 9, p. 2189–2204, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1568491>. Acesso em: 22 maio 2020.

APÊNDICE A – PROGRAMA EM LINGUAGEM R PARA O CÁLCULO DE SOMA DE NORMAIS TRUNCADAS

```

library(cubature)

# Função Distribuição Normal Truncada tipo A:

dtrunca <- function(x, LDL = LIE, mean = media, sd = desvio){
  if(x < LDL){
    dnorm(x, mean = mean, sd = sd)/(integrate(dnorm,
      -Inf,
      (LDL-mean)/sd)$value)
  } else{
    0
  }
}

# Função Distribuição Normal Truncada tipo AB:

dtruncab <- function(x, LDL = LIE, UDL = LSE, mean = media, sd = desvio){
  if((x >= LDL) & (x <= UDL)){
    dnorm(x, mean = mean, sd = sd)/(integrate(dnorm,
      lower = LDL,
      upper = UDL, mean=mean, sd=sd)$value)
  } else{
    0
  }
}

# Função Distribuição Normal Truncada tipo B:

dtruncb <- function(x, UDL = LSE, mean = media, sd = desvio){
  if(x > UDL){
    dnorm(x, mean = mean, sd = sd)/(integrate(dnorm,
      (UDL-mean)/sd,
      Inf)$value)
  } else{
    0
  }
}

recursive.sumAB <- function(y, QAB = QuantTipoAB,
  LDL = LIE, UDL = LSE,
  mean = media,
  sd = desvio){
  dsoma2trunc <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){
    f <- function(x, LDL = LIE, UDL = LSE, mean = media,
      sd = desvio){
      if(QAB == 2){
        dtruncab(x)*dtruncab(y-x)
      } else if(QAB == 1){
        dtruncab(y)
      } else{
        recursive.sumAB(x, QAB = QAB-1 )*dtruncab(y-x)
      }
    }
  }
}

```

```

    }
    return(f)
  }
  integ <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE){
    if(QAB == 1){
      dtruncab(y)
    }else{
      adaptIntegrate(Vectorize(dsoma2trunc(y)),
        max(y-UDL, (QAB-1)*LDL), min(y-LDL, (QAB-1)*UDL),
        absError = 0.01)$integral
    }
  }
  return(integ(y))
}
recursive.sumA <- function(y, QA = QuantTipoA,
  LDL = LIE,
  UDL = LSE,
  mean = media,
  sd = desvio){
  dsoma2trunc <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){
    f <- function(x, LDL = LIE, UDL = LSE,
      mean = media,
      sd = desvio){
      if(QA == 2){
        dtrunca(x)*dtrunca(y-x)
      } else if(QA == 1){
        dtrunca(y)
      }else{
        recursive.sumA(x, QA = QA-1)*dtrunca(y-x)
      }
    }
    return(f)
  }
  integ <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE){
    if(QA == 1){
      dtrunca(y)
    }else{
      adaptIntegrate(Vectorize(dsoma2trunc(y)),
        y-LDL,
        (QA-1)*LDL,
        absError = 0.01)$integral
    }
  }
  return(integ(y))
}
recursive.sumB <- function(y, QB = QuantTipoB,
  LDL = LIE,
  UDL = LSE,
  mean = media,
  sd = desvio){
  dsoma2trunc <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){
    f <- function(x, LDL = LIE, UDL = LSE,
      mean = media,

```

```

sd = desvio){
  if(QB == 2){
    dtruncb(x)*dtruncb(y-x)
  } else if(QB == 1){
    dtruncb(y)
  }
  else{
    recursive.sumB(x,QB = QB-1)*dtruncb(y-x)
  }
}
return(f)
}
integ <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE){
  if(QB == 1){
    dtruncb(y)
  }else{
    adaptIntegrate(Vectorize(dsoma2trunc(y)),
      (QB-1)*UDL,
      y-UDL,
      absError = 0.01)$integral
  }
}
return(integ(y))
}
recursive.sumA_AB <- function(y, QA = QuantTipoA,
QAB = QuantTipoAB,
LDL = LIE,
UDL = LSE,
mean = media,
sd = desvio){
  dsoma2trunc <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){
    f <- function(x, LDL = LIE, UDL = LSE,
      mean = media,
      sd = desvio){
      recursive.sumAB(x,QAB = QAB)*recursive.sumA(y-x,QA = QA)
    }
    return(f)
  }
  integ <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE){
    integrate(Vectorize(dsoma2trunc(y)),
      max(QAB*LDL,
        y-QA*LDL),
      QAB*UDL)$value
  }
  return(integ(y))
}
recursive.sumB_AB <- function(y, QB = QuantTipoB,
QAB = QuantTipoAB,
LDL = LIE,
UDL = LSE,
mean = media,
sd = desvio){
  dsoma2trunc <- function(y, LDL = LIE,
    UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){

```

```

    f <- function(x, LDL = LIE, UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){
      recursive.sumAB(x,QAB = QAB)*recursive.sumB(y-x,QB = QB)
    }
    return(f)
  }
integ <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE){
  integrate(Vectorize(dsoma2trunc(y)),
  QAB*LDL,
  min(y-QB*UDL,
  QAB*UDL))$value
}

return(integ(y))
}

```

```

recursive.sumA_B <- function(y, QA = QuantTipoA,
QB = QuantTipoB,
LDL = LIE,
UDL = LSE,
mean = media,
sd = desvio){
  dsoma2trunc <- function(y, LDL = LIE,
  UDL = LSE,
  mean = media,
  sd = desvio){
    f <- function(x, LDL = LIE,
    UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){
      recursive.sumA(x,QA = QA)*recursive.sumB(y-x,QB = QB)
    }
    return(f)
  }
  integ <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE){
    integrate(Vectorize(dsoma2trunc(y)),
    -Inf,
    min(QA*LDL,
    y-QB*UDL))$value
  }
  return(integ(y))
}

```

```

recursive.sumA_B_AB <- function(y,QA = QuantTipoA,
QB = QuantTipoB,
QAB = QuantTipoAB,
LDL = LIE,
UDL = LSE,
mean = media,
sd = desvio){
  dsoma2trunc <- function(y, LDL = LIE,
  UDL = LSE,
  mean = media,
  sd = desvio){
    f <- function(x, LDL = LIE, UDL = LSE,
    mean = media,
    sd = desvio){

```

```

    recursive.sumA_AB(x, QA = QA, QAB = QAB)*recursive.sumB(y-x, QB = QB)
  }
  return(f)
}
integ <- function(y, LDL = LIE, UDL = LSE){
  integrate(Vectorize(dsoma2trunc(y)),
    -Inf,
    min(QA*LDL+QAB*UDL,
      y-QB*UDL))$value
}
return(integ(y))
}

```