

BRUNO CHAVES FRANCO

GRÁFICOS DE  $\bar{X}$  COM ESQUEMAS ESPECIAIS DE AMOSTRAGEM PARA O  
CONTROLE DE MÉDIAS QUE OSCILAM OU PARA O CONTROLE DE  
PROCESSOS QUE GERAM OBSERVAÇÕES AUTOCORRELACIONADAS

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
do Campus de Guaratinguetá, Universidade  
Estadual Paulista, para a obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Mecânica na área de  
Gestão e Otimização.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa  
Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Guaratinguetá  
2014

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F825g | <p>Franco, Bruno Chaves</p> <p>Gráficos de <math>\bar{X}</math> com esquemas especiais de amostragem para o controle de médias que oscilam ou para o controle de processos que geram observações autocorrelacionadas / Bruno Chaves Franco - Guaratinguetá, 2014</p> <p>105 f. : il.</p> <p>Bibliografia: f. 86-93</p> <p>Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014.</p> <p>Orientador: Prof. Dr Antonio Fernando Branco Costa</p> <p>Coorientadora: Profª Drª Marcela Aparecida Guerreiro Machado</p> <p>1. Autocorrelação (Estatística) 2. Amostragem (Estatística) I. Título</p> <p>CDU 519(043)</p> |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**BRUNO CHAVES FRANCO**

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA”**

**PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA  
ÁREA: GESTÃO E OTIMIZAÇÃO**

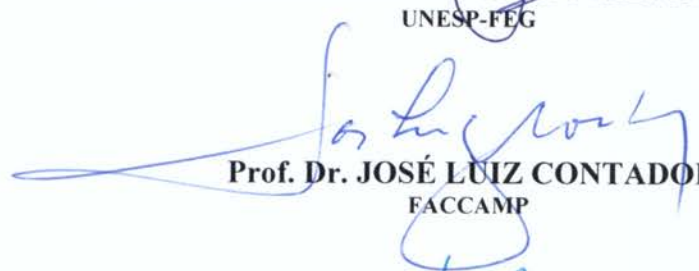
**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

  
**Prof. Dr. Edson Cocchieri Botelho**  
Coordenador

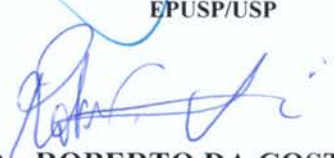
**BANCA EXAMINADORA:**

  
**Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA**  
Orientador/UNESP

  
**Prof. Dr. FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS**  
UNESP-FEG

  
**Prof. Dr. JOSÉ LUIZ CONTADOR**  
FACCAMP

  
**Prof.ª Dr.ª LINDA LEE HO**  
EPUSP/USP

  
**Prof. Dr. ROBERTO DA COSTA QUININO**  
UFMG

*Março de 2014*

## **DADOS CURRICULARES**

### **BRUNO CHAVES FRANCO**

|            |                                                                                                                                                             |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NASCIMENTO | 17.02.1982 – SÃO PAULO / SP                                                                                                                                 |
| FILIAÇÃO   | Oswaldo Antonio Franco<br>Marilda Meireles Chaves Franco                                                                                                    |
| 2003/2007  | Curso de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.             |
| 2009/2011  | Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.  |
| 2011/2014  | Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Doutorado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista. |
| 2013/2014  | Doutorado Sanduiche na Université de Nantes – França, realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil.  |

## **AGRADECIMENTOS**

A minha esposa Mariana, pelo incentivo e cumplicidade.

Aos meus pais que foram os grandes incentivadores para que eu continuasse meus estudos e jamais me permitiu esmorecer.

Ao Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa e Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Marcela Aparecida Guerreiro Machado pela orientação, dedicação, incentivo, apoio, paciência e amizade.

Ao Prof. Dr. Philippe Castagliola da Université de Nantes – França e Prof. Dr. Giovanni Celano da Università degli Studi di Catania – Itália, que me acolheram no exterior e contribuíram para que este trabalho se realizasse.

A CAPES, pelo fundamental suporte financeiro dispensado à execução desta pesquisa no Brasil

Ao CNPq (Programa Ciência sem Fronteiras) pelo suporte financeiro dispensado à execução de parte desta pesquisa na França.

Aos professores membros da banca de avaliação, pelas críticas e sugestões que contribuíram significativamente para melhorar a apresentação e qualidade do trabalho.

À FEG-UNESP, na pessoa dos professores, funcionários e amigos com quem tive a oportunidade de conviver, pelo estímulo, amizade e colaboração na realização deste trabalho.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para transformar este trabalho em realidade.

FRANCO, B. C. **Gráficos de  $\bar{X}$  com esquemas especiais de amostragem para o controle de médias que oscilam ou para o controle de processos que geram observações autocorrelacionadas.** 2014. 105p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

## RESUMO

Os gráficos de controle propostos por Shewhart supõem que as medidas da característica de qualidade são independentes e identicamente distribuídas e a média do processo não muda até a ocorrência de uma causa especial que a desloca de seu valor alvo. Nesta Tese são consideradas duas situações distintas da estabelecidas por Shewhart: (1) a média do processo apresenta um movimento oscilatório que independe da causa especial, isto é, a causa especial desloca a média do processo sem alterar o seu movimento oscilatório, (2) as observações dentro dos subgrupos racionais são dependentes. Tanto a dependência das observações quanto o movimento oscilatório da média do processo são descritas por um modelo AR(1). Para um melhor uso do gráfico de  $\bar{X}$  no controle de médias que oscilam são sugeridas amostras com itens igualmente espaçados, segundo o instante em que são produzidos e retirados da linha de produção. Para um melhor uso do gráfico de  $\bar{X}$  no controle de processos que geram observações autocorrelacionadas são sugeridas amostras com itens advindos de diferentes subgrupos racionais. Os esquemas propostos de formação das amostras melhoram o desempenho dos gráficos de  $\bar{X}$ .

**PALAVRAS-CHAVE:** Gráficos de Controle de Shewhart, Autocorrelação, Médias que Oscilam, Estratégia de Amostragem.

FRANCO, B. C.  **$\bar{X}$  Control Charts with special sampling schemes to control wandering processo or control process which generate autocorrelated observations.** 2014. 105p. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

### **ABSTRACT**

Control charts proposed by Shewhart assume that the measures of the quality characteristic are independent and identically distributed and the mean of the process does not change until the occurrence of a special cause that moves the mean from its target value. In this thesis are considered two different situations of established by Shewhart: (1) the process mean has an oscillatory behavior that is independent of the special cause, or, the special cause shifts the process mean without altering its oscillatory behavior, (2) observations within the rational subgroups are dependent. Both, the dependence of observations and oscillatory behavior of the process mean are described by an AR (1) model. For better use of the  $\bar{X}$  control chart to control wandering process, this study suggested samples with equally spaced items according to the instant they are produced and selected from the production line. Moreover, for control process, which the observations are autocorrelated, this study suggested samples with observations coming from different rational subgroups. The proposed samples schemes improve the performance of  $\bar{X}$  control charts.

**KEYWORDS:** Shewhart control chart, Autocorrelation, Wandering Means, Sampling strategy.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Medidas da Viscosidade corrigida por catalisador a partir de lotes sucessivos de resina de polímero.....                                                                                              | 15 |
| Figura 2 - Série de Medidas da Temperatura do Banho Químico .....                                                                                                                                                | 16 |
| Figura 3 – Artigos por ano.....                                                                                                                                                                                  | 17 |
| Figura 4 – Fator de impacto e quantidade de artigos relevantes ao estudo da Tese por periódico .....                                                                                                             | 17 |
| Figura 5 – Modelo de Pesquisa .....                                                                                                                                                                              | 21 |
| Figura 6 – Gráfico de Controle $\bar{X}$ – Ocorrência de um Alarme Falso.....                                                                                                                                    | 26 |
| Figura 7 – Gráfico de Controle $\bar{X}$ – Ocorrência de um Alarme Verdadeiro .....                                                                                                                              | 27 |
| Figura 8 – Tempo de ciclo esperado $E(T)$ para o modelo de Duncan (1956) .....                                                                                                                                   | 31 |
| Figura 9 – Procedimento para construção da amostra composta .....                                                                                                                                                | 42 |
| Figura 10 – $NMA$ vs. $n$ para gráfico de $\bar{X}$ com o uso das estratégias de amostragem 0-skip, 1-skip, 2-skip e composta. $\phi = 0,9$ , $\delta = 0,5$ , $NMA0 = 370,4$ e $n = \{4; 5; 6; 8; 11\}$ . ..... | 50 |
| Figura 11 – $NMA$ vs. $n$ para gráfico de $\bar{X}$ com o uso das estratégias de amostragem 0-skip, 1-skip, 2-skip e composta. $\phi = 0,5$ , $\delta = 0,5$ , $NMA0 = 370,4$ e $n = \{4; 5; 6; 8; 11\}$ . ..... | 50 |
| Figura 12 – Estratégia de amostragem baseada em subgrupos racionais .....                                                                                                                                        | 62 |
| Figura 13 – Estratégia de amostragem proposta (ESSI).....                                                                                                                                                        | 63 |
| Figura 14 – $NMA$ para estratégias $STD$ e $ESSI$ para $\psi = 0,1$ , $\phi = 0,9$ , $n = 6$ , $h = 1,0$ e $\delta = \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0\}$ .....                                                | 70 |
| Figura 15 – $E(L)$ para estratégias $STD$ e $ESSI$ , $\psi = 0,2$ .....                                                                                                                                          | 78 |
| Figura 16 – $E(L)$ para estratégias $STD$ e $ESSI$ , $\psi = 0,8$ .....                                                                                                                                          | 79 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1 – Principais gráficos de controle da literatura. ....                                                          | 23 |
| Quadro 2 – Principais gráficos de controle adaptativos .....                                                            | 24 |
| Quadro 3 – Referências de planejamento econômico-estatístico de gráficos de controle com dados independentes. ....      | 29 |
| Quadro 4 – Referências de planejamento econômico-estatístico de gráficos de controle com dados autocorrelacionados..... | 29 |
| Quadro 5 – Trabalhos relacionados ao modelo autoregressivo de primeira ordem - AR(1)....                                | 33 |
| Quadro 6 – Trabalhos relacionados ao modelo autoregressivo de segunda ordem - AR(2) ....                                | 34 |
| Quadro 7 – Trabalhos relacionados ao modelo autoregressivo de médias móveis de primeira ordem ARMA(1,1) .....           | 34 |
| Quadro 8 – Trabalhos relacionados ao modelo em que a média do processo oscila.....                                      | 35 |
| Quadro 9 – Propostas para o monitoramento de processos em que a média do processo oscila .....                          | 36 |
| Quadro 10 – Níveis para os parâmetros de planejamento econômico.....                                                    | 53 |
| Quadro 11 – Níveis para os parâmetros de planejamento econômico.....                                                    | 73 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Valores selecionados de $C_3(n, \phi)$ para $n = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 11\}$ e $\phi = \{0,0; 0,1; \dots; 0,9\}$ .....                     | 43 |
| Tabela 2 – Valores do $NMA$ do gráfico de $\bar{X}$ para as estratégias de amostragem 0-skip, 1-skip, 2-skip, composta e $n = 4$ . ....             | 46 |
| Tabela 3 – Valores de $NMA$ do gráfico de $\bar{X}$ para as estratégias de amostragem 0-skip, 1-skip, 2-skip, composta e $n = 6$ . ....             | 47 |
| Tabela 4 – Valores de $NMA$ do gráfico de $\bar{X}$ para as estratégias de amostragem 0-skip, 1-skip, 2-skip, composta e $n = 11$ . ....            | 48 |
| Tabela 5 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado. ....                                                                     | 53 |
| Tabela 6 – Médias, mínimos e máximos de $E(L)$ e $\Delta_S$ estratificados por $\phi$ e $\delta$ .....                                              | 57 |
| Tabela 7 – Modelo de regressão para $\Delta_{2sk}$ .....                                                                                            | 58 |
| Tabela 8 – Modelo de regressão para $\Delta_{1sk}$ .....                                                                                            | 59 |
| Tabela 9 – Modelo de regressão para $\Delta_{comp}$ .....                                                                                           | 59 |
| Tabela 10 – Efeitos do erro de especificação (Subestimação (U):–15% / Superestimação (O):+15%) dos parêmtros significantes de processo e custo..... | 61 |
| Tabela 11 – Valores de $NMA$ para as estratégias ESSI e STD, $n = 2$ . ....                                                                         | 67 |
| Tabela 12 – Valores de $NMA$ para as estratégias ESSI e STD, $n = 6$ . ....                                                                         | 68 |
| Tabela 13 – Valores de $NMA$ para as estratégias ESSI e STD, $n = 10$ . ....                                                                        | 69 |
| Tabela 14 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado. ....                                                                    | 74 |
| Tabela 15 – Médias, mínimos máximos de $E(L)$ e $\Delta_{ESSI}$ estratificados por $\delta$ e $\phi$ para $\psi = 0,2$ .<br>.....                   | 77 |
| Tabela 16 – Médias, mínimos máximos de $E(L)$ e $\Delta_{ESSI}$ estratificados por $\delta$ e $\phi$ para $\psi = 0,8$ .<br>.....                   | 77 |
| Tabela 17 – Modelo de regressão para $\Delta_{ESSI}$ .....                                                                                          | 80 |
| Tabela 18 – Efeitos do erro de especificação (Subestimação (U):–15% / Superestimação (O):+15%) dos parêmtros significantes de processo e custo..... | 82 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|                        |                                                                     |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| <i>AR(1)</i>           | Autoregressivo de primeira ordem                                    |
| <i>ARMA</i>            | Média móvel autoregressivo                                          |
| <i>ARMA(1,1)</i>       | Modelo autoregressivo e de médias móveis de primeira ordem          |
| <i>CEP</i>             | Controle Estatístico do Processo                                    |
| <i>CUSUM</i>           | <i>Cumulative sum</i>                                               |
| <i>DS</i>              | <i>Double sampling</i>                                              |
| <i>ESSI</i>            | <i>Equally spaced samples items</i>                                 |
| <i>EWMA</i>            | <i>Exponentially weighted moving average</i>                        |
| <i>EWMAS</i>           | Média móvel ponderada exponencialmente para processos estacionários |
| <i>GWMA</i>            | Média móvel geralmente ponderada                                    |
| <i>i.i.d</i>           | Idêntico e independentemente distribuído                            |
| <i>LR</i>              | <i>Likelihood Ratio</i>                                             |
| <i>LA</i>              | Limites de Atenção                                                  |
| <i>LC</i>              | Limites de Controle                                                 |
| <i>LM</i>              | Linha média                                                         |
| <i>LIC</i>             | Limite inferior de controle                                         |
| <i>LSC</i>             | Limite superior de controle                                         |
| <i>MCUSUM</i>          | <i>Multivariate Cumulative Sum</i>                                  |
| <i>MEWMA</i>           | <i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Average</i>           |
| <i>NMA</i>             | Número médio de amostras até o sinal                                |
| <i>NMA<sub>0</sub></i> | Número médio de amostras até o sinal durante o período em controle  |
| <i>RL</i>              | Comprimento da corrida                                              |
| <i>SSC</i>             | Gráfico de controle de causa especial                               |
| <i>STD</i>             | Estratégia padrão com subgrupo racional                             |
| <i>TES</i>             | Tempo esperado até o sinal                                          |
| <i>TMAF</i>            | Tempo médio até a ocorrência de um alarme falso                     |
| <i>VP</i>              | <i>Variable parameters</i>                                          |
| <i>VSI</i>             | <i>Variable sample interval</i>                                     |
| <i>VSL</i>             | <i>Variable sample limits</i>                                       |
| <i>VSS</i>             | <i>Variable sample size</i>                                         |
| <i>VSIL</i>            | <i>Variable sample interval and limits</i>                          |
| <i>VSSL</i>            | <i>Variable sample size and limits</i>                              |
| <i>VSRT</i>            | Taxa de amostragem variável em intervalos fixos                     |
| <i>s-skip</i>          | Estratégia de amostragem s-skip                                     |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                    |                                                                             |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $C_0$              | Custo de investigação de um alarme falso                                    |
| $C_1$              | Custo de identificar e remover uma causa especial                           |
| $H_0$              | Hipótese nula                                                               |
| $H_1$              | Hipótese alternativa                                                        |
| $T_1$              | Tempo necessário para encontrar identificar e remover a causa especial      |
| $T^2$              | Gráfico de Hotelling                                                        |
| $V_0$              | Lucro líquido por hora de operação no estado sob controle                   |
| $V_1$              | Lucro líquido por hora de operação no estado fora de controle               |
| $\bar{X}$          | Média amostral                                                              |
| $\mu_0$            | Valor-alvo da média do processo                                             |
| $\sigma_0$         | Desvio-padrão do processo                                                   |
| $\sigma^2$         | Variância                                                                   |
| $h$                | Intervalo de tempo entre retirada de amostras                               |
| $E(X)$             | Esperança do valor de $X$                                                   |
| $M$                | Custo horário da penalidade associada à produção no estado fora de controle |
| $P$ ou $1 - \beta$ | Poder de detecção do gráfico de controle                                    |
| $R$                | Amplitude                                                                   |
| $S$                | Desvio-padrão amostral                                                      |
| $X$                | Medida da característica da qualidade                                       |
| $Z$                | Transformada forma padrão da distribuição normal                            |
| $a$                | Custo fixo de retirada de uma amostra                                       |
| $b$                | Custo variável de extração de um item da amostra                            |
| $c$                | Número de defeitos ou de não-conformidades em uma amostra                   |
| $g$                | Constante de tempo proporcional ao tamanho da amostra                       |
| $k$                | Fator de abertura dos limites de controle                                   |
| $n$                | Tamanho de amostra                                                          |
| $np$               | Número de unidades defeituosas ou não-conformes                             |
| $p$                | Proporção de unidades defeituosas ou não-conformes                          |
| $u$                | Número de defeitos ou de não-conformidades por unidade                      |
| $\alpha$           | Probabilidade de alarme falso – Erro Tipo I                                 |
| $\beta$            | Probabilidade de não detecção – Erro Tipo II                                |
| $\delta$           | Magnitude do deslocamento da média                                          |
| $\delta$           | Magnitude do desvio da média                                                |
| $\varepsilon$      | Erro aleatório                                                              |
| $\theta$           | Coeficiente de oscilação da média amostral                                  |
| $\lambda$          | Taxa de falhas                                                              |
| $\mu$              | Média do processo                                                           |
| $\sigma$           | Desvio-padrão                                                               |
| $\tau$             | Tempo esperado entre a retirada da $i$ -ésima amostra inspecionada          |
| $\psi$             | Grau de oscilação da média                                                  |
| $\omega$           | Erro aleatório adicional                                                    |
| $\phi$             | Coeficiente de correlação                                                   |

## SUMÁRIO

|              |                                                                                                                                                                            |           |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO.....</b>                                                                                                                                                     | <b>14</b> |
| 1.1          | CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA.....                                                                                                                                          | 14        |
| 1.2          | RELEVÂNCIA DO TEMA E O CARÁTER INÉDITO DO TRABALHO .....                                                                                                                   | 16        |
| 1.3          | OBJETIVOS .....                                                                                                                                                            | 19        |
| 1.4          | DELIMITAÇÃO DO TEMA .....                                                                                                                                                  | 19        |
| 1.5          | MÉTODO DE PESQUISA.....                                                                                                                                                    | 20        |
| 1.6          | ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....                                                                                                                                                 | 21        |
| <b>2</b>     | <b>GRÁFICOS DE CONTROLE.....</b>                                                                                                                                           | <b>23</b> |
| 2.1          | DESEMPENHO ESTATÍSTICO DE GRÁFICOS DE CONTROLE .....                                                                                                                       | 25        |
| 2.2          | DESEMPENHO ECONÔMICO DE GRÁFICOS DE CONTROLE .....                                                                                                                         | 28        |
| <b>2.2.1</b> | <b>Modelo de Duncan para o Gráfico de <math>\bar{X}</math> .....</b>                                                                                                       | <b>30</b> |
| 2.3          | GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS<br>AUTOCORRELACIONADOS.....                                                                                         | 32        |
| <b>2.3.1</b> | <b>Gráfico de <math>\bar{X}</math> para o monitoramento de processos com observações<br/>autocorrelacionadas.....</b>                                                      | <b>36</b> |
| <b>2.3.2</b> | <b>Gráfico de <math>\bar{X}</math> para o monitoramento de processos autocorrelacionados em que a<br/>média oscila .....</b>                                               | <b>38</b> |
| <b>3</b>     | <b>GRÁFICO DE <math>\bar{X}</math> COM A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM COMPOSTA<br/>PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS COM OBSERVAÇÕES<br/>AUTOCORRELACIONADAS .....</b>         | <b>42</b> |
| 3.1          | ANÁLISE DE DESEMPENHO ESTATÍSTICO.....                                                                                                                                     | 45        |
| 3.2          | ANÁLISE DE DESEMPENHO ECONÔMICO .....                                                                                                                                      | 51        |
| <b>3.2.1</b> | <b>Modelo econômico .....</b>                                                                                                                                              | <b>51</b> |
| <b>3.2.2</b> | <b>Análise numérica .....</b>                                                                                                                                              | <b>52</b> |
| <b>3.2.3</b> | <b>Erro de especificação dos parâmetros de processo e custo .....</b>                                                                                                      | <b>60</b> |
| <b>4</b>     | <b>GRÁFICO DE <math>\bar{X}</math> COM A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM <i>ESSI</i> PARA O<br/>MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS EM<br/>QUE A MÉDIA OSCILA.....</b> | <b>62</b> |
| 4.1          | ANÁLISE DE DESEMPENHO ESTATÍSTICO .....                                                                                                                                    | 66        |
| 4.2          | ANÁLISE DE DESEMPENHO ECONÔMICO .....                                                                                                                                      | 71        |
| <b>4.2.1</b> | <b>Modelo econômico .....</b>                                                                                                                                              | <b>71</b> |
| <b>4.2.2</b> | <b>Análise numérica .....</b>                                                                                                                                              | <b>73</b> |
| <b>4.2.3</b> | <b>Erro de especificação dos parâmetros de processo e custo .....</b>                                                                                                      | <b>81</b> |

|          |                                                                                                                                                                                                                             |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS .....</b>                                                                                                                                                                  | <b>83</b>  |
| 5.1      | VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS .....                                                                                                                                                                                             | 83         |
| 5.2      | CONCLUSÕES .....                                                                                                                                                                                                            | 83         |
| 5.3      | SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS .....                                                                                                                                                                                      | 85         |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>                                                                                                                                                                                      | <b>86</b>  |
|          | <b>APÊNDICE A – Código computacional para Gráfico de <math>\bar{X}</math> no monitoramento de processos com observações autocorrelacionados .....</b>                                                                       | <b>94</b>  |
|          | <b>APÊNDICE B – Código computacional para o planejamento econômico-estatístico do Gráfico de <math>\bar{X}</math> para o monitoramento de processos com observações autocorrelacionados.....</b>                            | <b>96</b>  |
|          | <b>APÊNDICE C – Código computacional para Gráfico de <math>\bar{X}</math> tradicional no monitoramento de processos em que a média oscila .....</b>                                                                         | <b>97</b>  |
|          | <b>APÊNDICE D – Código computacional para Gráfico de <math>\bar{X}</math> com a estratégia de amostragem proposta para o monitoramento de processos em que a média oscila .....</b>                                         | <b>100</b> |
|          | <b>APÊNDICE E – Código computacional para o planejamento econômico-estatístico do Gráfico de <math>\bar{X}</math> com a estratégia de amostragem proposta para o monitoramento de processos em que a média oscila .....</b> | <b>102</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Itens advindos dos sistemas de produção, como já argumentava Shewhart (1926), são sempre diferentes uns dos outros devido a uma variabilidade natural presente em todos os processos produtivos e atribuída as causas aleatórias. Para redução das causas aleatórias é necessário um profundo conhecimento de todo o processo produtivo e autonomia para mudanças nos procedimentos, pessoas, padrões, ou mesmo de tecnologia.

Além das causas aleatórias os processos ainda estão sujeitos às causas especiais, impossíveis de serem previstas, como a quebra de um componente da máquina que a faz vibrar, oscilações na corrente elétrica que geram instabilidade no sistema de pressão do equipamento, etc.

Na criação de um produto surgem às especificações de projeto, que estabelecem os valores nominais e as tolerâncias das características de qualidade. Um produto é conforme quando as medidas das suas características de qualidade estão dentro das faixas de tolerância. As causas especiais devem ser eliminadas com rapidez, pois com elas no processo surgem, em geral, itens que não atendem as especificações, itens não conformes. Para a detecção das causas especiais surgiram os gráficos de controle.

Quando Shewhart (1926) propôs os gráficos de controle fez a suposição de que a variabilidade das observações da característica de qualidade é constante e as observações estão centradas em um valor conhecido como “valor ajustado” da média do processo. As causas especiais deslocam a média do processo e, dependendo das especificações, o processo passa a produzir itens não conformes. Elas devem ser identificadas e eliminadas com rapidez, especialmente se gerarem muitos itens não conformes.

Para alguns processos, a suposição de Shewhart, de que a média do processo permanece constante ao longo do tempo, não é válida. Um exemplo é o processo de produção de resina de polímero, objeto de estudo de Vander *et al.* (1992), em que a polimerização ocorre em cinco linhas de reação descontínua que funcionam em paralelo e partilham as matérias primas.

Os reatores trabalham de forma assíncrona dentro de um ciclo de lote com etapas definidas e a viscosidade, uma característica chave da qualidade do polímero, é corrigida por meio de catalisadores durante o processo de reação, porém é medida ao completar cada lote. A quantidade de catalisador utilizada num dado lote é determinada com base nos desvios da média

(valor-alvo) observados de lotes anteriores e por este motivo a média do processo apresenta um movimento oscilatório.

A Figura 1 apresenta as medidas de viscosidade corrigidas a partir de lotes sucessivos de um processo de produção de resina de polímero. O deslocamento para baixo em torno do lote 84 pode ter sido evitado se detectado por um regime de vigilância, porém um gráfico de controle padrão pode não ter detectado a mudança, pois este tipo de processo apresenta um movimento oscilatório que independe da causa especial

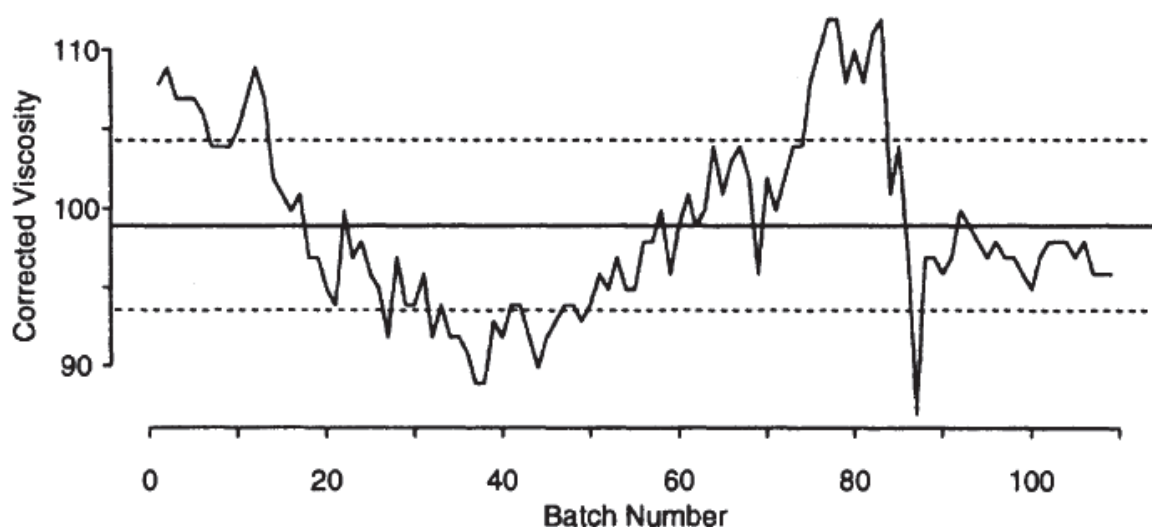


Figura 1 – Medidas da Viscosidade corrigida por catalisador a partir de lotes sucessivos de resina de polímero  
(Fonte: Vander, 1996, p. 40)

Reynolds *et al.* (1996) foram os pioneiros na investigação do efeito desta oscilação no desempenho dos gráficos de controle.

Outra suposição para o emprego dos gráficos de controle, realizada por Shewhart (1926), é a de que as medidas da característica de qualidade são independentes e identicamente distribuídas, ou seja, cada medida da característica de qualidade é igual ao valor da média do processo a menos de um erro aleatório.

No entanto, com a instalação de sensores dentro dos sistemas produtivos, tem havido um crescente aumento na aquisição de dados, permitindo medir as características de qualidade com maior frequência.

Costa *et al.* (2005) apresentam um exemplo de monitoramento da temperatura de um banho químico (Figura 2) com alto nível de dependência entre as observações, o suficiente para comprometer o desempenho do gráfico de controle de Shewhart. A Figura 2 apresenta 150 medições sucessivas da temperatura de um banho químico (efetuadas a cada três minutos), cujo

valor-alvo é 225°C, evidenciando que o problema da dependência entre observações não se restringe a processos contínuos e por batelada: processos discretos altamente automatizados, frequentes hoje em dia, também costumam produzir dados com observações correlacionadas entre si.

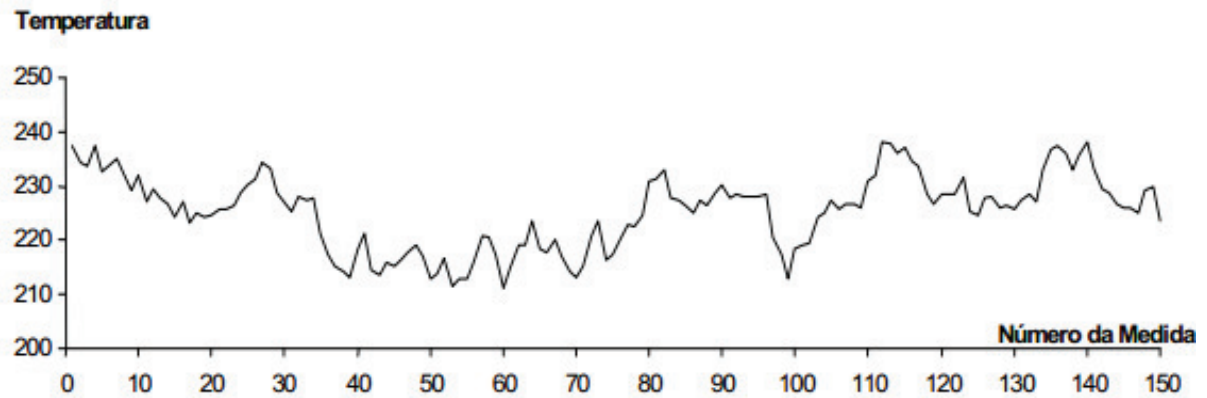


Figura 2 - Série de Medidas da Temperatura do Banho Químico  
(Fonte: COSTA *et al.*, 2005, p.164)

Em geral, medidas da característica de qualidade de itens sequenciais, segundo o instante em que foram produzidos, apresentam algum grau de dependência e esta autocorrelação pode aumentar caso as medidas sejam realizadas em um curto espaço de tempo, gerando novos desafios no uso dos gráficos de controle.

## 1.2 RELEVÂNCIA DO TEMA E O CARÁTER INÉDITO DO TRABALHO

Tanto a autocorrelação quanto o movimento oscilatório da média afetam o desempenho dos gráficos de controle e os primeiros estudos sobre o assunto são da década de 70. A Figura 3 apresenta a quantidade anual de artigos que tratam da autocorrelação e do movimento oscilatório da média. Os dados da Figura 1 foram extraídos da *Web of Knowledge* através das palavras chave: AR(1), ARMA, *auto correlated*, *autocorrelation*, *autoregressive*, *correlated data*, *correlation*, *first order autoregressive models*, *time series*.

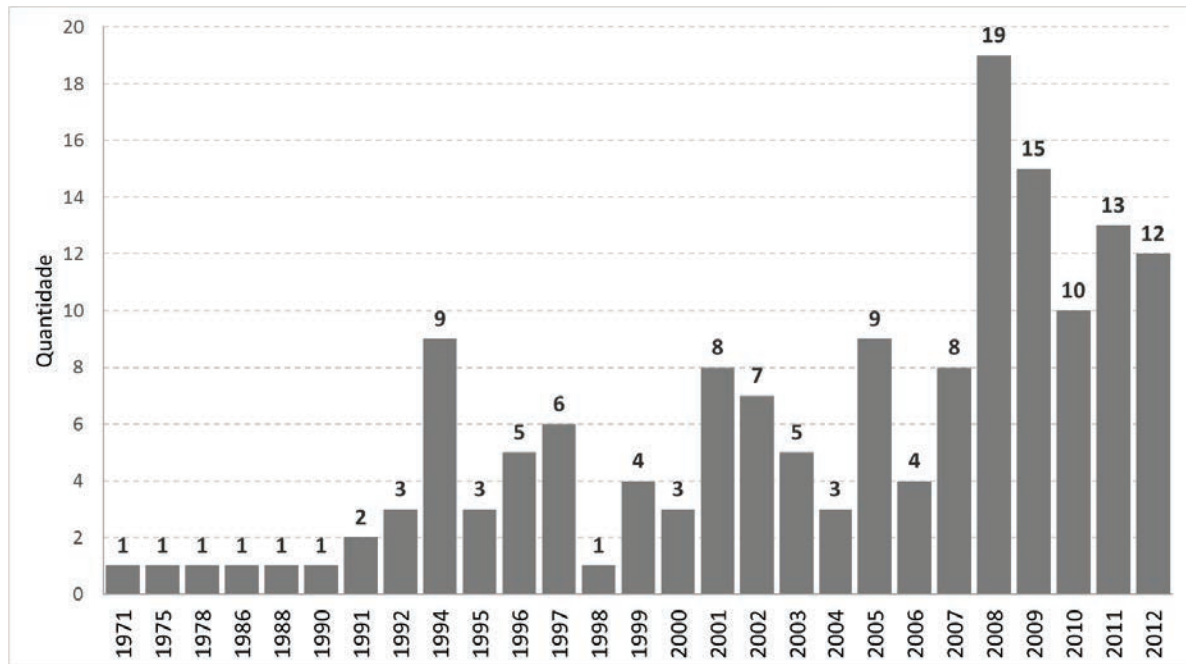


Figura 3 – Artigos por ano

Para o melhor entendimento do problema da pesquisa e a estruturação do referencial teórico desta Tese foram identificados os trabalhos relevantes, dentro desta base de artigos, como apresentado da Figura 4.

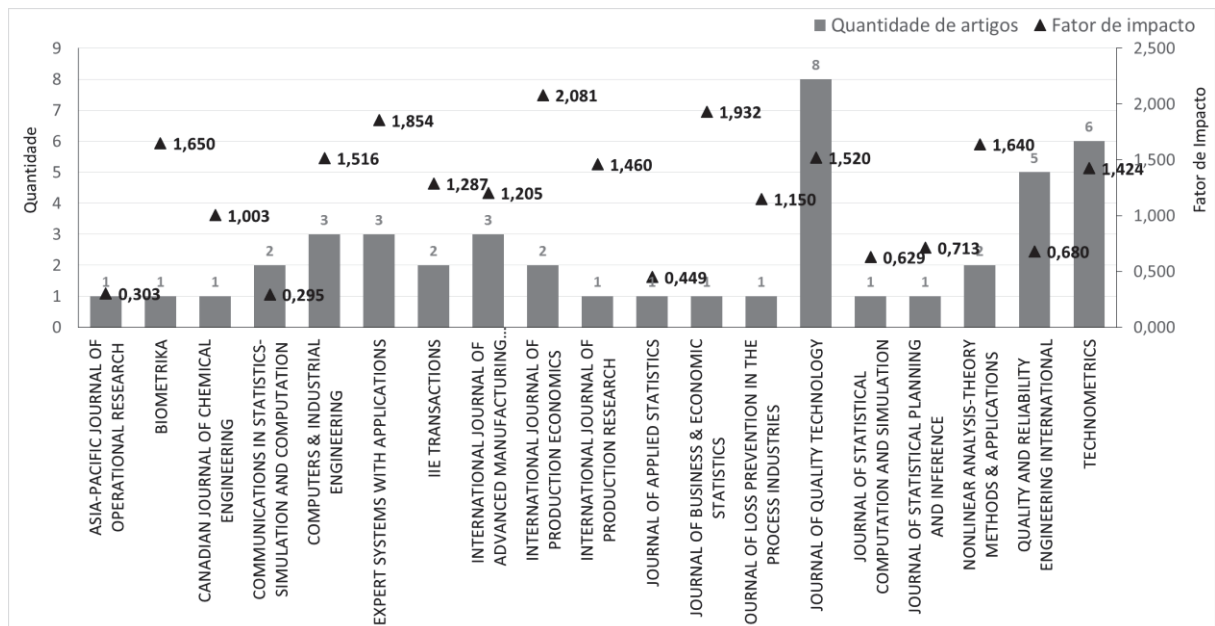


Figura 4 – Fator de impacto e quantidade de artigos relevantes ao estudo da Tese por periódico

O efeito da autocorrelação no desempenho dos gráficos de controle tem sido estudado por pesquisadores como Vasilopoulos e Stamboulis (1978), Montgomery e Mastrangelo (1991),

Alwan e Radson (1992), Hoerl e Palm (1992), Schneider e Pruett (1994), English *et al.* (2000), Castagliola e Tsung (2005), Pacella e Semeraro (2007), Costa e Claro (2008) e Soleimani *et al.* (2009).

O efeito do movimento oscilatório da média no desempenho dos gráficos de controle tem sido estudado por pesquisadores como Reynolds *et al.* (1996), Vander (1996), VanBrackle e Reynolds Jr. (1997), Reynolds Jr. e Lu (1997), Lu e Reynolds (1999a, 1999b, 2001), Apley e Tsung (2002), Apley e Lee (2003), Costa e Claro (2008), Lin e Chou (2008), Lin (2009) e Sheu e Lu (2008, 2010). Entretanto, poucas foram às estratégias propostas para melhorar este desempenho.

Costa e Castagliola (2011) foram os primeiros pesquisadores a proporem novas estratégias de amostragem com o objetivo de se melhorar as propriedades estatísticas dos gráficos de controle em uso no monitoramento de processos autocorrelacionados. Eles propuseram uma relaxação na aplicação do conceito de subgrupos racionais, em que, de acordo com o instante de produção, os itens da amostra devem ser os mais próximos possíveis.

Com o objetivo de reduzir a autocorrelação, Costa e Castagliola (2011) sugerem a composição das amostras com itens não sequenciais segundo o instante em que foram produzidos, denominada estratégia de amostragem *s-skip*.

Em processos cuja média oscila, a adoção do conceito de subgrupos racionais na seleção dos itens da amostra reduz drasticamente o desempenho dos gráficos de controle em sinalizar deslocamentos da média devido a uma ou mais causas especiais.

Esta Tese propõe duas estratégias de amostragem para melhorar o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  no monitoramento de processos autocorrelacionados:

(1) adoção de amostras compostas (*mixed*), para processos com observações autocorrelacionadas, que em síntese, propõe que a média amostral em cada instante de inspeção é calculada por meio da combinação de medidas da característica de qualidade de duas amostras consecutivas, cada uma baseada em subgrupos racionais;

(2) estratégia ESSI (do inglês *Equally Spaced Samples Items*) para processos autocorrelacionados em que a média oscila, que em síntese, propõe a adoção de amostras com itens igualmente espaçados, segundo o instante em que são produzidos e retirados da linha de produção.

E devido a estrutura proposta para as duas estratégias, esta Tese traz como contribuição original a ruptura de um importante paradigma no controle estatístico do processos, ou seja, o conceito de subgrupo racional para a formação da amostra no monitoramento de processos autocorrelacionados.

### 1.3 OBJETIVOS

Portanto, o objetivo desta Tese é propor novos esquemas de amostragens que melhoram o desempenho do gráfico de controle  $\bar{X}$  na presença de observações autocorrelacionadas ou de médias que oscilam.

Para a realização desse objetivo são descritos os seguintes objetivos específicos:

- Propor novas estratégias de amostragem para o monitoramento de processos com observações autocorrelacionadas e de processos em que a média oscila;
- Para processo cujas observações são autocorrelacionadas, comparar o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com aplicação da nova estratégia proposta frente ao desempenho dos gráficos de  $\bar{X}$  com estratégia de amostragem *s-skip*;
- Para processos em que a média oscila, comparar o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com aplicação da nova estratégia proposta frente ao desempenho dos gráficos de  $\bar{X}$  com estratégia de amostragem baseada em subgrupo racional;

### 1.4 DELIMITAÇÃO DO TEMA

Os resultados obtidos são válidos apenas para o caso de processos cujas observações se ajustam a uma distribuição normal, devido à grande ocorrência desta distribuição em situações reais. Além do fato do teorema central do limite garantir que mesmo que os dados não sejam normalmente distribuídos, a média dos dados converge para uma distribuição normal conforme o número de dados aumenta, desempenhando papel importante nos métodos de inferência estatística.

Esta Tese abordará apenas uma característica de qualidade  $X$  a ser monitorada por meio de gráficos de controle  $\bar{X}$  e a dependência entre observações de  $X$ , ou a oscilação da média da distribuição de  $X$  com o tempo, é regida pelo modelo autoregressivo de primeira ordem -  $AR(1)$ , que segundo Castillo (2002), é frequentemente usado para representar processos de produção em que são aplicadas técnicas de controle estatístico do processo. A presença de autocorrelação de primeira ordem pode ser detectada usando o teste de Durbin e Watson (1950).

Outra delimitação está no fato de não haver evidências na literatura para assumir que a causa especial influencia o movimento oscilatório da média ou mesmo a autocorrelação entre amostras. Portanto nesta Tese supõe-se que o deslocamento da média do processo devido a uma

causa especial independe do movimento oscilatório da média ou do modelo de autocorrelação adotado, alterando apenas a média da distribuição de  $X$ .

E por fim, esta Tese não abordará erros do sistema de medição pois seu foco está no efeito da autocorrelação no desempenho dos gráficos de controle.

## 1.5 MÉTODO DE PESQUISA

Esta pesquisa é classificada, segundo Bertrand e Fransoo (2002), como pesquisa axiomática normativa, pois tem como objetivo gerar soluções no domínio de um modelo específico e garantir que a solução obtida forneça uma visão sobre o problema definido pelo modelo, envolvendo desde a elaboração conceitual, a construção do modelo e sua solução. Este tipo de pesquisa é usado para desenvolver políticas, estratégias e ações para melhorar os resultados da literatura na busca de soluções melhores para problemas e/ou comparar diferentes estratégias possíveis para a sua solução.

Para operacionalizar a pesquisa, esta Tese utiliza como método a Modelagem/Simulação, que segundo Morábito e Pureza (2009), aborda investigações quantitativas em que modelos de relações causais entre variáveis controladas e desempenho são desenvolvidos e analisados. Sua construção é baseada em um conjunto de variáveis que variam em domínios específicos com relações causais que definem a sua interdependência.

O modelo básico que norteia a construção do método de pesquisa deste Tese é o método de Modelagem/Simulação desenvolvido por Arenales *et al.* (2007).

Com o objetivo de melhor apresentar as etapas de pesquisa, a Figura 5 detalha o método desde a caracterização do problema de pesquisa, passando pela formulação do modelo, análise e interpretação dos resultados até a avaliação dos resultados frente ao escopo do problema e sua aderência ao problema real.



Figura 5 – Modelo de Pesquisa

## 1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta Tese está dividida em quatro capítulos, além deste introdutório.

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação da estrutura dos gráficos de controle e suas medidas de desempenho estatístico e econômico, bem como uma revisão da literatura acerca de gráficos de controle no monitoramento de processos autocorrelacionados, e a descrição do gráfico de  $\bar{X}$  para processos com observações autocorrelacionadas e processos autocorrelacionados em que a média oscila.

As descrições das estratégias de amostragem propostas nesta Tese e suas análises de desempenho estatístico e econômico encontram-se nos Capítulos 3 e 4.

Finalmente, no Capítulo 5 estão as conclusões do estudo e sugestões para futuras pesquisas.

Nos Apêndices são encontrados os códigos computacionais desenvolvidos em VBA (*Visual Basic for Applications*) para *MS Excel*:

- APÊNDICE A – Código computacional para Gráfico de  $\bar{X}$  no monitoramento de processos com observações autocorrelacionados tradicional e com o uso da estratégia de amostragem proposta;
- APÊNDICE B – Código computacional para o planejamento econômico-estatístico do Gráfico de  $\bar{X}$  no monitoramento de processos com observações autocorrelacionandas;
- APÊNDICE C – Código computacional para Gráfico de  $\bar{X}$  tradicional no monitoramento de processos em que a média oscila;
- APÊNDICE D – Código computacional para Gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia de amostragem proposta para o monitoramento de processos em que a média oscila;
- APÊNDICE E – Código computacional para o planejamento econômico-estatístico do Gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia de amostragem proposta para o monitoramento de processos em que a média oscila.

## 2 GRÁFICOS DE CONTROLE

A aplicação dos gráficos de controle no monitoramento de processos possui duas fases distintas: a construção e a utilização. A primeira fase, de construção, tem como objetivo estabelecer os parâmetros que comporão o gráfico de controle, e para isso é necessário um estudo aprofundado do comportamento do processo para o estabelecimento dos parâmetros que represente sua realidade, bem como da necessidade de melhorias para realizar a transição da primeira fase para a segunda fase. A segunda fase, de utilização, tem como objetivo monitorar o processo através de observações realizadas na linha de produção através da coleta de amostras em intervalos de tempo pré-determinado, calcular uma estatística adequada e plotar pontos correspondentes dos valores desta estatística em um gráfico para verificar se o processo permanece em controle, em caso do processo estar fora de controle há a necessidade de pará-lo para realizar os ajustes necessários (KOUTRAS, 2007; WOODALL, 2000).

Segundo Montgomery (2004), os gráficos de controle são divididos em duas categorias: gráficos de controle por variáveis e/ou por atributos (Quadro 1). Classificados em univariados (uma característica de qualidade) ou multivariados (mais de uma característica de qualidade). Neste último caso, deve-se distinguir entre gráficos de controle para medidas correlacionadas e gráficos de controle para medidas independentes. Especificamente se as observações sucessivas são dependentes tem-se o gráfico de controle para processos autocorrelacionados, enquanto que se as observações sucessivas são independentes tem-se o gráfico de controle para processos não autocorrelacionados ou independentes. (KOUTRAS, 2007).

Quadro 1 – Principais gráficos de controle da literatura.

| Gráfico de Controle | Função                                                                                                                                                                                                         | Característica da qualidade a ser monitorada    |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $\bar{X}$ e $R$     | Monitorar, em paralelo, a média amostral ( $\bar{X}$ ) e a amplitude ( $R$ )                                                                                                                                   | Por variável                                    |
| $\bar{X}$ e $S$     | Monitorar, em paralelo, a média amostral ( $\bar{X}$ ) e o desvio-padrão amostral ( $S$ )                                                                                                                      | Por variável                                    |
| $p$                 | Monitorar a proporção de unidades defeituosas ou não-conformes                                                                                                                                                 | Por atributo                                    |
| $np$                | Monitorar o número de unidades defeituosas ou não-conformes                                                                                                                                                    | Por atributo                                    |
| $c$                 | Monitorar o número de defeitos ou de não-conformidades em uma amostra                                                                                                                                          | Por atributo                                    |
| $u$                 | Monitorar número de defeitos ou de não-conformidades por unidade                                                                                                                                               | Por atributo                                    |
| EWMA                | Do inglês <i>Exponentially weighted moving average</i> , é destinado a monitorar a média ponderada exponencialmente das observações incorporar diretamente o comportamento passado no ponto presente.          | Por variável e por atributo                     |
| CUSUM               | Do inglês <i>Cumulative sum</i> , é destinado a monitorar processos quando uma causa identificável no sistema, gera uma pequena e constante variação na média ( $\bar{X}$ ) ou na variabilidade ( $R$ ou $S$ ) | Variável aleatória contínua e Atributo discreto |

Em todos estes gráficos de controle os parâmetros de projeto (tamanho da amostra  $n$ , intervalo de amostragem  $h$  e fator de abertura dos limites de controle  $k$ ) são fixos ( $FP$ ). Segundo De Magalhães *et al.* (2006), Reynolds *et al.* (1988), Prabhu *et al.* (1994,1997), Costa (1994,1997,1999), Park e Reynolds (1999) e De Magalhães *et al.* (2002), parâmetros de projeto adaptativos melhoraram o desempenho dos gráficos de Shewhart (Quadro 2).

Quadro 2 – Principais gráficos de controle adaptativos

| Gráfico de Controle | Estratégia Adaptativa                                                                                                                |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| VSL                 | do inglês <i>Variable sample limits</i> , consiste em variar os limites de controle.                                                 |
| VSI                 | do inglês <i>Variable sample interval</i> , consiste em variar o intervalo de amostragem.                                            |
| VSS                 | do inglês <i>Variable sample size</i> , consiste em variar o tamanho da amostra.                                                     |
| VSIL                | do inglês <i>Variable sample interval and limits</i> , consiste em variar tanto o intervalo de amostragem e os limites de controle.  |
| VSSI                | do inglês <i>Variable sample size and interval</i> , consiste em variar tanto o tamanho da amostra quanto o intervalo de amostragem. |
| VSSL                | do inglês <i>Variable sample size and limits</i> , consiste em variar tanto o tamanho da amostra quanto os limites de controle.      |
| VP                  | do inglês <i>Variable parameters</i> , consiste em variar todos os parâmetros de projeto.                                            |

Outro gráfico de controle encontrado na literatura é o gráfico de controle com amostragem dupla (DS – do inglês *Double Sampling*), que foi introduzido por Daudin (1992).

Como no gráfico de controle de Shewhart, retiram-se amostras com tamanho fixo  $n$  em intervalos regulares de amostragem  $h$ , porém esta retirada é feita em dois estágios: no primeiro,  $n_1$  itens da amostra são inspecionados, e caso a estatística calculada estiver dentro dos Limites de Advertência (LA), a amostragem é interrompida. Se a estatística calculada como as  $n_1$  observações estiver fora dos Limites de Controle (LC), sendo  $LC > LA$ , o gráfico de controle sinaliza um desajuste no processo. Caso a estatística calculada com as  $n_1$  observações esteja entre LA e LC, a amostragem entra no segundo estágio, quando então se inspecionam os  $n_2$  itens restantes da amostra,  $n = n_1 + n_2$ . Se a estatística obtida com as  $n$  observações estiver fora dos limites de controle o gráfico sinaliza um desajuste do processo.

Os gráficos de controle multivariados não são o foco desta Tese; sugere-se a leitura dos trabalhos de Lowry e Montgomery (1995) e Mason e Young (2002).

## 2.1 DESEMPENHO ESTATÍSTICO DE GRÁFICOS DE CONTROLE

O gráfico de controle equivale a testar a hipótese  $H_0: \mu = \mu_0$  (processo em controle) e  $H_1: \mu \neq \mu_0$  (processo fora de controle), em que  $\mu_0$  é o valor-alvo da média do processo, cuja característica de qualidade de interesse  $X$  é uma variável com distribuição normal  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ , sendo  $\sigma_0$  o desvio-padrão do processo.

Uma vez definida a característica de qualidade, retiram-se amostras do processo segundo o conceito dos subgrupos racionais; isto é, os itens que compõem as amostras são coletadas em um espaço curto de tempo reduzindo o risco da ocorrência de causas especiais durante a coleta da amostra.

O monitoramento do processo requer uma retirada periódica de amostras de tamanho  $n$  e o cálculo da estatística  $\bar{X}$  (média amostral) (MONTGOMERY, 2004). Se a distribuição da característica de qualidade  $X$  for normalmente distribuída, a distribuição de  $\bar{X}$  também o será. Caso contrário, pelo Teorema Central do Limite, a distribuição de  $\bar{X}$ , com boa precisão, se aproximará de uma normal.

Supondo que os valores de  $X$  são normalmente distribuídos, a esperança de  $\bar{X}$  coincidirá com a média do processo  $\mu$ ,  $E(\bar{X}) = \mu$  (COSTA *et al.*, 2005). A linha média ( $LM$ ) do gráfico de  $\bar{X}$  é igual a  $\mu_0$ , e os limites superior e inferior de controle ( $LSC$  e  $LIC$ ) são definidos:

$$LSC = \mu_0 + k \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

$$LM = \mu_0 \quad (2)$$

$$LIC = \mu_0 - k \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

em que  $k > 1$  é fator de abertura dos limites de controle.

Valores de  $\bar{X}$  dentro dos limites de controle, leva a aceitação da hipótese  $H_0$ . Valores de  $\bar{X}$  fora dos limites de controle, leva a rejeição da hipótese  $H_0$ , gerando a investigação de causas especiais.

Na Figura 6 tem-se um cenário de um processo sob controle, pois a distribuição de  $\bar{X}$  está centrada no valor alvo da média do processo, isto é,  $\mu_{\bar{X}} = \mu_0 = LM$ . Neste cenário tem-se o risco  $\alpha$  de sinalizar indevidamente a existência de uma causa especial.

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2/n)$$

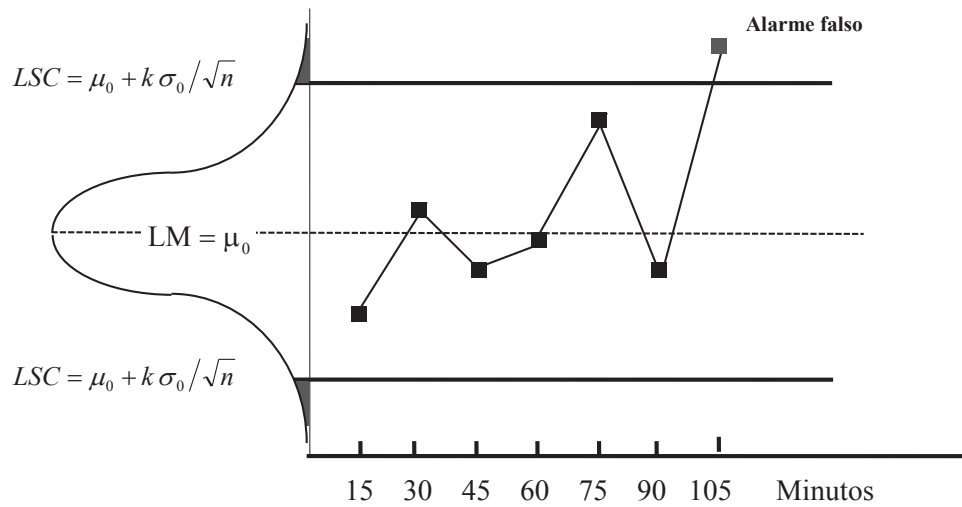


Figura 6 – Gráfico de Controle  $\bar{X}$ – Ocorrência de um Alarme Falso  
(Fonte: adaptada de COSTA et al., 2005, p.29)

A consequência de ordem prática associada ao risco  $\alpha$  é a intervenção no processo quando o mesmo está isento de causas especiais, ocasionando custos indesejáveis pela interrupção do processo, além do risco de desajustar um processo que estava ajustado.

Na linguagem de gráficos de controle diz-se tratar de um alarme falso. O risco  $\alpha$  não depende do tamanho da amostra ( $n$ ), depende apenas do fator de abertura dos limites de controle ( $k$ ) (COSTA *et al.*, 2005)

$$\alpha = Pr[|Z| > k | Z \sim N(0,1)]. \quad (4)$$

A Figura 7 tem-se um cenário de um processo fora de controle, pois a distribuição de  $\bar{X}$  não está centrada no valor alvo da média do processo, isto é,  $\mu_{\bar{X}} = \mu_0 + \delta\sigma_0 > \mu_0$ . Neste cenário tem-se o risco  $\beta$  do gráfico de controle de  $\bar{X}$  de não sinalizar o deslocamento da média do processo de  $\mu_0$  para  $\mu_0 + \delta\sigma_0$ .

$$\beta = Pr[|Z + \delta\sigma_0| < k | Z \sim N(0,1)]. \quad (5)$$

A Figura 7, adaptada de Costa *et al.* (2005), ilustra a inércia do gráfico de  $\bar{X}$  em sinalizar o deslocamento da média do processo; o sinal só ocorre quando o 5º ponto, que correspondente a média da 5ª amostra, cai na região de ação do gráfico.

$$\bar{X} \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_0^2/n)$$

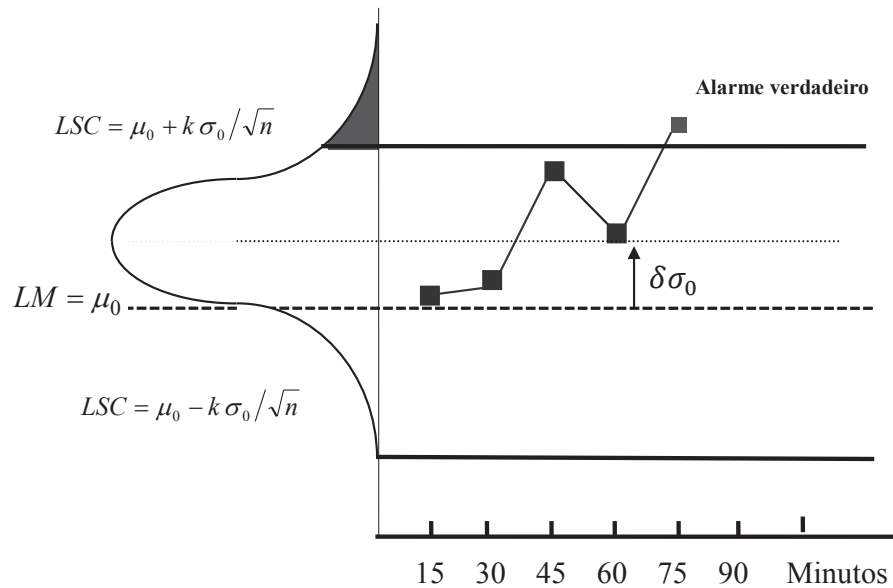


Figura 7 – Gráfico de Controle  $\bar{X}$ – Ocorrência de um Alarme Verdadeiro  
(Fonte: adaptada de COSTA et al., 2005, p.70)

Esta inércia está relacionada com o desempenho dos gráficos de controle que é medido pelo Número Médio de Amostras até o Sinal ( $NMA$ ), ou seja, o número médio de amostras até o sinal disparado por um valor de  $\bar{X}$  acima do LSC ou um valor de  $\bar{X}$  abaixo do LIC.

Com o processo em controle o  $NMA$  é denominado de  $NMA_0$ , ( $NMA_0 = 1/\alpha$ ). O  $NMA_0$  grande garante poucos alarmes falsos, e geralmente adota-se  $k = 3$ , que leva a um risco  $\alpha$  de 0,27% ( $NMA_0 = 370,4$ ), ou seja, em média tem-se um alarme falso a cada 370,4 amostras.

Quando o processo está fora de controle é desejável que o  $NMA$  seja pequeno, de modo a garantir uma rápida detecção da causa especial;  $NMA = 1/(1 - \beta)$ .

A suposição mais importante no uso dos gráficos de controle é a de independência das observações. Se houver níveis, mesmo que baixos, de autocorrelação entre as observações os gráficos de controle convencionais podem apresentar um desempenho ruim tanto na forma de demasiados alarmes falsos quanto na demora em detectar uma causa especial, pois a autocorrelação afeta diretamente os riscos  $\alpha$  e  $\beta$ , como será melhor explicado na seção 2.3.

Os objetivos conflitantes de minimizar o tempo de detecção de alterações no processo e a frequência de alarmes falsos torna, segundo Epprecht e Leiras (2007), o planejamento do gráfico de controle um problema de otimização. Pois a determinação do tamanho da amostra  $n$ , do intervalo de tempo entre retirada de amostras consecutivas  $h$ , e do fator de abertura dos

limites de controle  $k$ , influenciam de maneira diferente o desempenho dos gráficos de controle e os custos de monitoramento, que, como enfatizado por Celano (2011) devem ser levados em consideração quando do planejamento dos gráficos de controle.

Por exemplo, uma amostra  $n$  maior melhora o desempenho do gráfico, contudo o custo de inspeção se eleva. Outra maneira de melhorar o desempenho do gráfico é estreitar os limites de controle, reduzindo o valor de  $k$ , porém leva a um aumento na incidência de alarmes falsos e, conseqüentemente, os custos com a investigação de possíveis causas especiais se eleva e pode levar ao descrédito do gráfico de controle. Diminuindo  $h$  reduz-se o tempo de detecção da causa especial aumentando os custos com inspeção e a incidência de alarmes falsos.

## 2.2 DESEMPENHO ECONÔMICO DE GRÁFICOS DE CONTROLE

O uso dos gráficos de controle requer a seleção preliminar correta de seus parâmetros  $(n, k, h)$ . Segundo Chen (2003), o planejamento econômico dos gráficos de controle consiste em desenvolver um modelo de custo para um determinado tipo de processo de fabricação e, em seguida, determinar os parâmetros ótimos dos gráficos de controle, minimizando em longo prazo o custo esperado com monitoramento do processo.

O primeiro modelo matemático para o planejamento econômico dos gráficos de controle, foi proposto por Duncan (1956), mas esta abordagem pode levar a um número excessivo de alarmes falsos com a consequência do aumento da variabilidade do processo devido à frequentes paralisações e reinicializações do mesmo para desnecessários ajustes, como mencionado por Woodall (1985).

Com o objetivo de controlar o risco  $\alpha$  no planejamento econômico, Saniga (1989) e Saniga *et al.* (1995) apresentaram o projeto econômico-estatístico de um gráfico de controle, onde as restrições estatísticas que limitam o número esperado de falsos alarmes são impostas ao processo de otimização de custos.

Muitos pesquisadores dedicaram suas pesquisas ao planejamento econômico dos gráficos de controle, tanto para processos com observações independentes (Quadro 3) quanto para processo com observações autocorrelacionados (Quadro 4).

Quadro 3 – Referências de planejamento econômico-estatístico de gráficos de controle com dados independentes.

| Referência                        | Modelo Econômico                                 | Gráfico      | Planejamento          |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------|--------------|-----------------------|
| Duncan (1971)                     | Duncan (1956)                                    | $\bar{X}$    | Econômico             |
| Montgomery <i>et al.</i> (1995),  | Lorenzen e Vance (1986)                          | EWMA         | Econômico-estatístico |
| Torng <i>et al.</i> (1995),       | Lorenzen e Vance (1986)                          | EWMA         | Econômico-estatístico |
| Prabhu <i>et al.</i> (1997),      | Duncan (1956)                                    | Adaptativo   | Econômico-estatístico |
| Chou <i>et al.</i> (2000)         | Duncan (1956) e Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989) | $\bar{X}$    | Econômico-estatístico |
| De Magalhães <i>et al.</i> (2001) | Duncan (1956)                                    | Adaptativo   | Econômico             |
| Rohleder e Silver (2002)          | Duncan (1956)                                    | $\bar{X}$    | Econômico             |
| Wu <i>et al.</i> (2004)           | Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989)/ Duncan (1956)  | $\bar{X}$    | Econômico-estatístico |
| Wu <i>et al.</i> (2006)           | Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989)                 | $\bar{X}$    | Econômico-estatístico |
| Chen e Chen (2007)                | Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989)                 | EWMA e CUSUM | Econômico-estatístico |
| Jiao e Helo (2008)                | Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989)                 | CUSUM        | Econômico-estatístico |
| Shamsuzzaman <i>et al.</i> (2009) | Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989)                 | $\bar{X}$    | Econômico-estatístico |
| Chen e Yeh (2009)                 | Rahim e Banerjee (1993)                          | $\bar{X}$    | Econômico-estatístico |
| Torng <i>et al.</i> (2009a).      | Duncan (1956)                                    | Adaptativo   | Econômico-estatístico |
| Celano (2009)                     | Lorenzen e Vance (1986)                          | Adaptativo   | Econômico-estatístico |
| Celano <i>et al.</i> (2009)       | Lorenzen e Vance (1986)                          | Adaptativo   | Econômico-estatístico |
| Celano (2010)                     | Lorenzen e Vance (1986)                          | EWMA         | Econômico-estatístico |
| Castagliola <i>et al.</i> (2011)  | Lorenzen e Vance (1986)                          | EWMA         | Econômico-estatístico |

Quadro 4 – Referências de planejamento econômico-estatístico de gráficos de controle com dados autocorrelacionados.

| Referência                  | Modelo Econômico               | Gráfico    | Planejamento          |
|-----------------------------|--------------------------------|------------|-----------------------|
| Chou <i>et al.</i> (2001a), | Duncan (1956)                  | $\bar{X}$  | Econômico             |
| Chou <i>et al.</i> (2001b), | Duncan (1956)                  | $\bar{X}$  | Econômico-estatístico |
| Liu <i>et al.</i> (2002)    | Alexander <i>et al.</i> (1995) | $\bar{X}$  | Econômico             |
| Chen <i>et al.</i> (2007)   | Costa (1997, 2001)             | Adaptativo | Econômico             |
| Chen e Chiou (2005),        | Bai e Lee (1998)               | Adaptativo | Econômico             |
| Torng <i>et al.</i> (2009b) | Lorenzen e Vance (1986)        | Adaptativo | Econômico-estatístico |
| Costa e Claro (2009)        | Duncan (1956)                  | $\bar{X}$  | Econômico             |
| Franco <i>et al.</i> (2013) | Duncan (1956)                  | $\bar{X}$  | Econômico             |

Revisões abrangentes a respeito de modelos econômicos e econômico-estatísticos são encontrados em: Montgomery (1980), Vance (1983), Svoboda (1991), Ho e Case (1994), Keats *et al.* (1997), e Ho e Trindade (2009).

### 2.2.1 Modelo de Duncan para o Gráfico de $\bar{X}$

O modelo econômico proposto por Duncan (1956), assume que:

- O processo inicia em controle com  $\mu = \mu_0$  e após um certo tempo aleatório de operação surge uma causa especial que desloca a média do processo para  $\mu_0 \pm \delta\sigma_0$ ;
- A ocorrência da causa especial tem distribuição de Poisson, com parâmetro  $\lambda$ ;
- Quando o processo sai do estado sob controle, ele permanece neste estado até que a causa especial seja detectada e eliminada.
- Quando um ponto é plotado na região de rejeição do gráfico de controle uma investigação de causas especiais é iniciada; durante esta investigação, o processo continua operando devido a possibilidade de ser um alarme falso.
- O ciclo de produção possui quatro períodos: (1) o período em controle, (2) o período fora de controle, (3) o tempo para retirar uma amostra e interpretar os resultados, e (4) o tempo para encontrar a causa especial.

O tempo médio entre o instante da retirada da última amostra antes da ocorrência da causa especial e o instante da ocorrência da causa especial é dado por:

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda \cdot h) \cdot e^{-\lambda \cdot h}}{\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot h})}, \quad (6)$$

O tempo esperado entre a ocorrência da causa especial e o instante em que o gráfico de controle dá o alarme é  $h \cdot NMA - \tau$ , o tempo para retirada de uma amostra e interpretação dos resultados é dado por  $n \cdot g$ , em que  $g$  (horas/item inspecionado) é uma constante de tempo proporcional ao tamanho da amostra.

Uma vez detectada a causa especial, é determinado empiricamente através de dados históricos um tempo  $T_1$  (horas) necessário para identificar e remover a causa especial. A rapidez com que se identifica e remove a causa especial dependerá do conhecimento acerca do processo e dos planos de ações.

Tempo total esperado do ciclo  $E(T)$  em horas, ilustrado na Figura 8, é dado por:

$$E(T) = 1/\lambda + h \cdot NMA - \tau + g \cdot n + T_1 \quad (7)$$

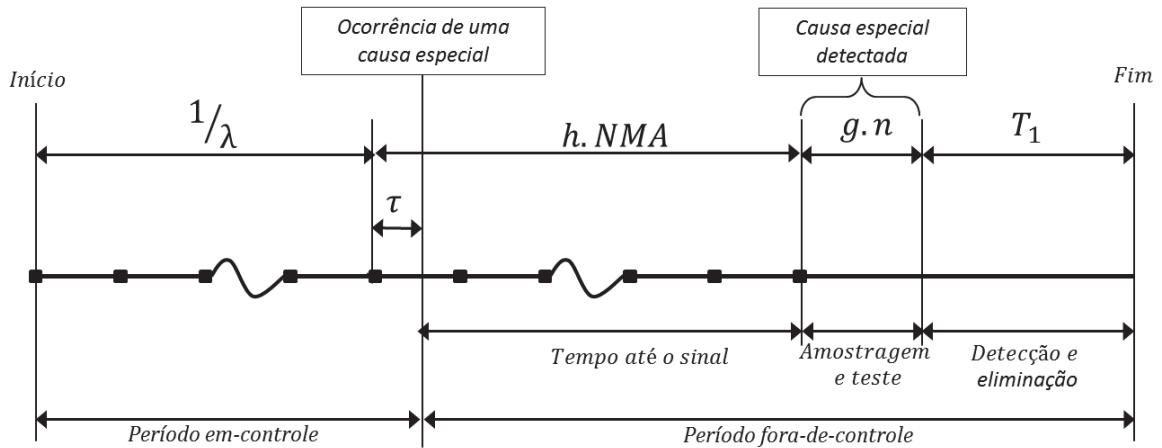


Figura 8 – Tempo de ciclo esperado  $E(T)$  para o modelo de Duncan (1956)

O número esperado de amostras dentro de um ciclo é igual ao comprimento esperado do ciclo  $E(T)$  dividido pelo intervalo de tempo entre retirada de amostras  $h$ , ou  $E(T)/h$ .

No modelo de Duncan ainda tem-se os seguintes parâmetros:

- Lucro líquido por hora de operação no estado em controle  $V_0$  (\$/h);
- Lucro líquido por hora de operação no estado fora de controle  $V_1$  (\$/h);
- Custo de retirada de uma amostra de tamanho  $n$  dado por  $a + b.n$ , em que,  $a$  (\$/n) o custo fixo de retirada de uma amostra (Ex.: equipamento de medição, manutenção do equipamento de medição, área de produção alocada para o monitoramento, entre outros) e  $b$  (\$/item inspecionado) o custo variável de extração de um item da amostra (Ex.: tempo despedido de mão-de-obra, amostra danificadas no monitoramento, entre outros);
- $C_1$  (\$) o custo de identificar e remover uma causa especial;
- $C_0$  (\$/alarme falso) o custo de um alarme falso
- $S$  o número esperado de amostras antes do surgimento da causa especial, dado por:

$$S = \frac{e^{-\lambda h}}{(1 - e^{-\lambda h})}. \quad (8)$$

O lucro líquido esperado por ciclo é dado por:

$$E(C) = V_0 \cdot \frac{1}{\lambda} + V_1(h.NMA - \tau + g.n + T_1) - C_1 - C_0 \cdot \alpha \cdot S - (a + b.n) \cdot \frac{E(T)}{h} \quad (9)$$

O lucro líquido esperado é obtido dividindo-se o lucro líquido esperado em um ciclo  $E(C)$  pelo comprimento esperado do ciclo  $E(T)$ :

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{V_0 \frac{1}{\lambda} + V_1(h.NMA - \tau + g.n + T_1) - C_1 - C_0.\alpha.S}{\frac{1}{\lambda} + h.NMA - \tau + g.n + T_1} - \frac{a+b.n}{h} \quad (10)$$

Definindo  $M = V_0 - V_1$ , segue que:

$$E(A) = V_0 - \frac{a+b.n}{h} - \frac{M.(h.NMA - \tau + g.n + T_1) + C_1 + C_0.\alpha.S}{\frac{1}{\lambda} + h.NMA - \tau + g.n + T_1} \quad (11)$$

ou

$$E(A) = V_0 - E(L) \quad (12)$$

$E(L)$  é o custo horário esperado com o de monitoramento do processo, em função dos parâmetros de projeto do gráfico de controle ( $n$ ,  $h$  e  $k$ ).

$$E(L) = \frac{a+b.n}{h} + \frac{M.(h.NMA - \tau + g.n + T_1) + C_1 + C_0.\alpha.S}{\frac{1}{\lambda} + h.NMA - \tau + g.n + T_1} \quad (13)$$

Maximizar o lucro líquido esperado por hora  $E(A)$ , é equivalente a minimizar  $E(L)$ .

### 2.3 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Quando o gráfico de controle está em uso, há um pressuposto de que os valores das observações da característica de qualidade são independentes. Porém em muitos processos, a adoção de subgrupos racionais leva a uma forte autocorrelação entre as observações, ou seja, observações da característica de qualidade  $X$  retirados da linha de produção mais próximas umas das outras no tempo tendem a ser mais parecidas do que aquelas mais distantes, e vários modelos auto regressivos têm sido usados para descrever este comportamento, geralmente descrito por séries temporais da família ARIMA.

De fato, em muitos processos contínuos e discretos a autocorrelação está presente e reduz o desempenho do gráfico de controle (PSARAKIS e PAPALEONIDA, 2007).

Para se detectar a presença da autocorrelação pode-se usar o teste Durbin-Watson, que consiste em calcular a soma ponderada dos resíduos de uma análise de regressão, de tal forma que seja possível detectar algum padrão no seu comportamento. Este teste é baseado na suposição de que os erros no modelo de regressão são gerados por um processo autoregressivo de primeira ordem. (MONTGOMERY *et al.*, 2001)

Caso do leitor interessado em modelos de séries temporais para gráficos de controle citados nesta Tese, pode encontrar uma revisão em Claro (2008).

Um dos modelos utilizados para descrever a autocorrelação entre observações é o modelo autoregressivo de primeira ordem -  $AR(1)$ , cuja a  $j$ -ésima observação da  $i$ -ésima amostra é autocorrelacionada com a  $(j - 1)$ -ésima observação, através do coeficiente de autocorrelação  $\phi$ , modelado por:

$$X_{i,j} - \mu_0 = \phi(X_{i,j-1} - \mu_0) + \varepsilon_{i,j} \text{ para } j = \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Seguindo Alwan e Radson (1992), assume-se que o intervalo de amostragem  $h$  é selecionado de tal modo que garanta a independência entre  $X_{i,n}$  e  $X_{i+1,1}$ , portanto a observação  $X_{i,1}$  sofre influência apenas de seu erro aleatório  $\varepsilon_{i,j} \sim N(0; \sigma_0^2)$ . Artigos que tratam dos gráficos de controle para processos autocorrelacionados estão no Quadro 5.

Quadro 5 – Trabalhos relacionados ao modelo autoregressivo de primeira ordem -  $AR(1)$

| Referência                      | Estudo realizado                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Montgomery e Mastrangelo (1991) | Investigaram a estratégia de aumentar a abertura dos limites de controle do gráfico de $\bar{X}$ para melhorar o desempenho estatístico.                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Alwan e Radson (1992)           | Investigaram o impacto da autocorrelação no erro <i>Tipo I</i> do gráfico de $\bar{X}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Runger e Willemain (1995)       | Demonstraram que os gráficos $\bar{X}$ e <i>CUSUM</i> tem melhor desempenho comparado com métodos baseados em <i>ARIMA</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Yang e Yang (2006)              | Propuseram uma combinação dos gráficos de Shewhart baseado em resíduos e o <i>simple cause-selecting</i> , proposto por Zhang (1997), no monitoramento da média de uma característica de qualidade $X$ no primeiro passo do processo e da média de uma característica de qualidade $Y$ em um segundo passo, em que as observações de $X$ é descrito pelo modelo $AR(1)$ e as observações de $Y$ descrito como uma função de transferência de $X$ . |
| Costa e Castagliolla (2011)     | Introduziram a ideia de modificar as regras de subgrupo racional através da construção de amostras com itens não-vizinhos, a fim de reduzir a dependência entre as observações, e aplicaram a estratégia de amostragem no gráfico de $\bar{X}$ .                                                                                                                                                                                                   |
| Costa e Claro (2008)            | Estudaram o desempenho do gráfico de $\bar{X} - DS$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Lwin (2011)                     | Estudou a estimação de parâmetros para gráficos <i>EWMA</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Costa e Machado (2011)          | Propuseram a abordagem de cadeias de Markov para estudar o desempenho dos gráficos de $\bar{X} - VP$ e $\bar{X} - DS$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Bagshaw e Johnson (1975)        | Demonstram o efeito da autocorrelação em gráficos <i>CUSUM</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Lin <i>et al.</i> (2011)        | Propuseram um modelo para o monitoramento em tempo real, a fim de reconhecer padrões não naturais em presença de autocorrelação.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

Outro modelo estudado na literatura é o autoregressivo de segunda ordem -  $AR(2)$ , cuja  $j$ -ésima observação da  $i$ -ésima amostra ( $X_{i,j}$ ) possui uma autocorrelação com as  $(j - 1)$ -ésima ( $X_{i,j-1}$ ) e  $(j - 2)$ -ésima ( $X_{i,j-2}$ ) observações, através dos coeficientes de autocorrelação  $\phi_1$  e  $\phi_2$  respectivamente.

$$X_{i,j} - \mu_0 = \phi_1(X_{i,j-1} - \mu_0) + \phi_2(X_{i,j-2} - \mu_0) + \varepsilon_{i,j} \text{ para } j = \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } i = 1, 2, \dots (15)$$

Estudos relacionados a este modelo estão no Quadro 6.

Quadro 6 – Trabalhos relacionados ao modelo autoregressivo de segunda ordem - AR(2)

| Referência                       | Estudo realizado                                                                                                                         |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vasilopoulos e Stamboulis (1978) | Investigaram a estratégia de aumentar a abertura dos limites de controle do gráfico de $\bar{X}$ para melhorar o desempenho estatístico. |
| English <i>et al.</i> (2000)     | Investigaram o desempenho dos gráficos $\bar{X}$ e <i>EWMA</i>                                                                           |

Um terceiro modelo encontrado na literatura, é o modelo autoregressivo de médias móveis de primeira ordem – ARMA(1,1), que é equivalente a um modelo autoregressivo de primeira ordem AR(1) com erro aleatório adicional, cuja  $j$ -ésima observação da  $i$ -ésima possui uma correlação linear com a  $(j - 1)$ -ésima observação ( $X_{i,j-1}$ ) e o  $(j - 1)$ -ésimo erro aleatório ( $\varepsilon_{i,j-1}$ ), em que  $\phi$  é o coeficiente de autocorrelação entre observações e  $\theta$  é o coeficiente de oscilação da média amostral relacionado ao erro adicional autocorrelacionado, descrito como:

$$X_{i,j} - \mu_0 = \phi(X_{i,j-1} - \mu_0) + \theta\varepsilon_{i,j-1} + \varepsilon_{i,j} \text{ para } j = \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } i = 1, 2, \dots (16)$$

Estudos relacionados a este modelo estão no Quadro 7.

Quadro 7 – Trabalhos relacionados ao modelo autoregressivo de médias móveis de primeira ordem ARMA(1,1)

| Referência                     | Estudo realizado                                                                                                                        |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wardell <i>et al.</i> (1994)   | Estudaram as propriedades do gráfico de controle <i>special-cause</i> , proposto por Alwan e Roberts (1988).                            |
| Appley e Tsung (2002)          | Apresentaram as diretrizes para o projeto do gráfico de controle $T^2$ autoregressivo.                                                  |
| Costa e Claro (2008)           | Estudaram o desempenho do gráfico de $\bar{X} - DS$                                                                                     |
| Bagshaw e Johnson (1975)       | Demonstram o efeito da autocorrelação em gráficos <i>CUSUM</i> .                                                                        |
| Harris e Ross (1991)           | Investigaram o efeito da autocorrelação nos gráficos <i>CUSUM</i> e <i>EWMA</i>                                                         |
| Noorossana e Vaghefi (2006)    | Estudaram o desempenho de gráficos de controle <i>MCUSUM</i> na presença da autocorrelação.                                             |
| Pacella e Semeraro (2007)      | Usaram rede neural recorrente para detectar o processo de mudança da média em processos autocorrelacionados.                            |
| Soleimani <i>et al.</i> (2009) | Estudaram o desempenho dos gráficos <i>EWMA</i> e $T^2$ quando o efeito da autocorrelação é ignorada.                                   |
| Mertens <i>et al.</i> (2009)   | Aplicaram o gráfico <i>CUSUM</i> para monitorar processos autocorrelacionados na produção agropecuária.                                 |
| Apley e Lee (2003)             | Investigaram a estratégia de aumentar a abertura dos limites de controle do gráfico <i>EWMA</i> para melhorar o desempenho estatístico. |

Em todos esses estudos a média do processo é uma variável que pode assumir apenas dois valores (duas situações): um valor alvo e um valor fora do alvo resultante da ocorrência de uma causa especial.

Reynolds Jr. *et al.* (1996) foram os pioneiros a assumir que a média do processo pode oscilar mesmo sob controle, e descrevem a oscilação da média como um modelo autoregressivo de primeira ordem AR(1) com erro aleatório adicional:

$$\mu_i - \mu_0 = \phi(\mu_{i-1} - \mu_0) + \omega_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

cujas médias do processo  $\mu_i$  da  $i$ -ésima amostra ( $\bar{X}_i$ ) possui uma correlação linear  $\phi$  com a média do processo  $\mu_{i-1}$  da  $(i - 1)$ -ésima amostra ( $\bar{X}_{i-1}$ ) e  $\omega_i$  é o erro aleatório no instante  $i$ .

Desde então o monitoramento de processos com médias que oscilam têm sido estudados por diversos pesquisadores, ver o Quadro 8.

Quadro 8 – Trabalhos relacionados ao modelo em que a média do processo oscila

| Referência                        | Estudo realizado                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Reynolds Jr. <i>et al.</i> (1996) | Apresentaram um estudo das propriedades do gráfico de $\bar{X} - VSI$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Lu e Reynolds Jr. (1999a, 1999b)  | Recomendaram a combinação do gráfico de Shewhart residual com <i>EWMA</i> para as observações originais, com o objetivo de facilitar a interpretação dos resultados e melhorar o desempenho na detecção de desvios em relação à média e/ou a variância do processo, especialmente para baixos a moderados níveis de autocorrelação.                                                                                                                           |
| Vander (1996)                     | Utilizou a estatística <i>LR</i> (do inglês <i>Likelihood Ratio</i> ) e comparou o desempenho entre os gráficos <i>CUSUM</i> , <i>EWMA</i> e $\bar{X}$ , concluindo que o gráfico <i>CUSUM</i> pode ser projetado para obter melhor desempenho em processos em que a média oscila, além de constatar que gráficos de $\bar{X}$ , muitas vezes têm um desempenho muito pior que os outros esquemas.                                                            |
| VanBrackle Jr. e Reynolds (1997)  | Mostraram que altos níveis de autocorrelação e oscilação da média afetam profundamente o desempenho dos gráficos <i>EWMA</i> e <i>CUSUM</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Lu e Reynolds (2001)              | Demonstraram que gráficos <i>CUSUM</i> , na presença de autocorrelação, oferecem o mesmo desempenho que o gráfico <i>EWMA</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Wang (2009)                       | Propôs a utilização do gráfico <i>EWMA</i> para resíduos, que apresentou bom desempenho para detectar pequenas mudanças na média.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Sheu e Lu (2008, 2010)            | Usaram o gráfico de Média Móvel Geralmente Ponderada ( <i>GWMA</i> ), proposto por Sheu e Lin (2003), e os resultados mostraram que este tipo de gráfico tem um desempenho superior aos gráficos <i>EWMA</i> para detectar pequenas mudanças da média e da variância do processo.                                                                                                                                                                             |
| Lin e Chou (2008)                 | Demonstraram que o gráfico $\bar{X} - VSR$ se mostrou mais eficiente do que gráficos de controle $\bar{X}$ , $\bar{X} - VSI$ e $\bar{X} - VSS$ na detecção de desvios na média do processo. No entanto seu desempenho é reduzido quando o nível de autocorrelação ou a oscilação da média é alta.                                                                                                                                                             |
| Lin (2009)                        | Demostrou que gráficos adaptativos <i>VP</i> geralmente possui melhor desempenho na detecção de pequenas desvios na média do que o gráfico de $\bar{X}$ ou outros gráficos adaptativos quando a autocorrelação está próximo do caso independente, mas para níveis de autocorrelação altos, a complexidade dos gráficos <i>VP</i> apresenta um efeito negativo e o gráfico <i>CUSUM</i> passa a ter melhor desempenho na detecção de pequenos desvios da média |
| Lin <i>et al.</i> (2012)          | Desenvolveram o planejamento econômico do gráfico <i>ARMA</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Franco <i>et al.</i> (2012)       | Desenvolveram o planejamento econômico do gráfico $\bar{X}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

No Quadro 9 seguem alguns artigos em que os autores propõem novas estratégias para o monitoramento de médias que oscilam.

Quadro 9 – Propostas para o monitoramento de processos em que a média do processo oscila

| Referência                 | Estudo realizado                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Jiang <i>et al.</i> (2000) | Propuseram o gráfico de Média Móvel Autoregressivo ( <i>ARMA Chart</i> ) que demonstrou possuir o mesmo desempenho que gráficos <i>EWMA</i> sem a presença da autocorrelação, e ainda apresentou melhor desempenho que gráficos de <i>special-cause</i> . Que posteriormente Jiang e Tsui (2001) Investigaram a estratégia de aumentar a abertura dos limites de controle do gráfico <i>ARMA</i> para melhorar o desempenho estatístico. |
| Apley e Tsung (2002)       | Aplicaram o gráfico $T^2$ , destinado para processos multivariados, no monitoramento de processos autocorrelacionados univariados e demonstraram que para determinados intervalos dos parâmetros do modelo <i>ARMA</i> (1,1), o gráfico autoregressivo $T^2$ tem substancialmente melhor desempenho do que gráficos de Shewhart e <i>CUSUM</i> .                                                                                         |
| Zou <i>et al.</i> (2008)   | Propuseram um novo método, chamado de taxa de amostragem variável em horários fixos ( <i>VSRFT</i> - do inglês <i>Variable Sampling Rate at Fixed Times</i> ), o qual mostrou melhor desempenho, em média, do que gráficos $\bar{X}$ , e um desempenho compatível com os gráficos $\bar{X} - VSI$ .                                                                                                                                      |

### 2.3.1 Gráfico de $\bar{X}$ para o monitoramento de processos com observações autocorrelacionadas

A média de uma característica de qualidade  $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$  é monitorada por meio do gráfico de  $\bar{X}$ , e em cada instante  $i = 1, 2, \dots, n$  observações de  $X$  são coletadas consecutivamente e as observações  $\{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}$ , ajustam-se a um modelo *AR*(1),  $X_{i,j} - \mu_0 = \phi(X_{i,j-1} - \mu_0) + \varepsilon_{i,j}$ , em que  $\phi$  é conhecido como o grau de autocorrelação. Alwan e Radson (1992), assume que o intervalo entre amostragens  $h$  é tal que garanta a independência entre  $X_{i,j}$  e  $X_{i+1,j}$ .

Para observações de amostras que se ajustam ao modelo *AR*(1) os limites do gráfico de controle são:

$$LSC = \mu_0 + k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}C_2(n, \phi)} \quad (18)$$

$$LIC = \mu_0 - k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}C_2(n, \phi)} \quad (19)$$

e  $C_2(n, \phi)$  é a função definida em Alwan e Radson (1992) como:

$$C_2(n, \phi) = \sqrt{\frac{n}{n + \sum_{j=1}^{n-1} 2(n-j)\phi^j}} = \sqrt{\frac{n}{n + 2\left(\frac{\phi^{n+1} - n\phi^2 + (n-1)\phi}{(\phi-1)^2}\right)}} \quad (20)$$

Após a ocorrência de uma causa especial, a média do processo passa de  $\mu_0$  para  $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ . E o risco  $\beta$  é dado por:

$$\beta = Pr[|z + \delta\sqrt{n} \cdot C_2(n, \phi)| < k | Z \sim N(0,1)] , \quad (21)$$

Se um processo com fator de abertura dos limites de controle  $k = 3$ , tamanho da amostra  $n = 5$ , magnitude do desvio da média  $\delta = 1$  e grau de autocorrelação  $\phi = 0,5$ , é monitorado através do gráfico de  $\bar{X}$ , tem-se, através da expressão (27),  $C_2(5,0,5) = 0,6704$ , que aumenta em cerca de 20% o erro *Tipo II* ( $\beta = 0,77$ ) se comparado com o processo cuja as observações são independentes, pois  $C_2(5,0) = 1$ , reduzindo a expressão (21) para a expressão (5) na seção 2.1, obtendo o erro *Tipo II*  $\beta = 0,93$ .

Este aumento de 20% no erro *Tipo II* reduz drasticamente o desempenho do gráfico em detectar a alteração da média, o  $NMA = 1/(1 - \beta)$  aumenta de 4,49 para 14,99.

Para se reduzir o efeito negativo da autocorrelação no desempenho de gráficos de  $\bar{X}$ , Costa e Castagliola (2011) propuseram uma estratégia de amostragem sistemática, denominanda como “*s-skip*”, na qual a amostra é formada por meio da coleta de um item da linha de produção e então “pula-se”  $s = 0, 1, 2, \dots$  itens consecutivos antes de se selecionar o próximo item que irá compor a amostra,  $s = 0$  (*0-skip*) corresponde a estratégia tradicional baseada em subgrupos racionais.

As observações da amostra passam a ser descritas pelo seguinte modelo:

$$X_{i,j} - \mu_0 = \phi^{s+1}(X_{i,j-s-1} - \mu_0) + \varepsilon_{i,j} \text{ para } j = \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } i = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Como a sequência de observações  $\{X_{i,1}, X_{i,s+2}, X_{i,2s+3}, X_{i,3s+4}, \dots\}$  é descrita por um modelo AR(1) com parâmetro  $\phi^{s+1}$ , no cálculo do  $NMA$  basta trocar o  $C_2(n, \phi)$  por  $C_2(n, \phi^{s+1})$ .

Costa e Castagliola (2011) mostraram que: a) a estratégia *s-skip* melhora o desempenho dos gráficos de  $\bar{X}$ ; b) a maior parte do efeito da autocorrelação é minimizada por meio, apenas, de dois “saltos” ( $s = 2$ ) no caso de autocorrelação moderada ( $\phi = 0.5$ ), ou três “saltos” ( $s = 3$ ) no caso de autocorrelação alta ( $\phi \geq 0.7$ ). Eles advertem que  $s > 0$  pode romper o conceito de subgrupos racionais prejudicando o desempenho estatístico do gráfico.

### 2.3.2 Gráfico de $\bar{X}$ para o monitoramento de processos autocorrelacionados em que a média oscila

Quando implementado o gráfico de controle de  $\bar{X}$  para o monitoramento de processos autocorrelacionados em que a média oscila, duas consecutivas amostras  $\{X_{i-1,1}, \dots, X_{i-1,n}\}$  e  $\{X_{i,1}, \dots, X_{i,n}\}$  são coletadas a cada intervalo de tempo  $h$ . Para reduzir a probabilidade de uma mudança de média durante a coleta de uma amostra, os itens pertencentes ao mesmo subgrupo são recolhidos o mais próximo possível, segundo o conceito de subgrupos racionais.

Então assumindo que uma observação genérica  $X_{i,j}$  pode ser escrita como  $X_{i,j} = \mu_i + \varepsilon_{i,j}$ , para  $i \in \{1, 2, \dots\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , em que  $X_{i,j} \sim N(\mu_0, \sigma_X^2)$  e  $\varepsilon_{i,j} \sim N(0, \sigma_0^2)$  é o  $j$ -ésimo erro aleatório do instante  $i$  de amostragem.

Seguindo a abordagem de Reynolds *et al.* (1996) supõe-se que a média do processo  $\mu(i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots\}$ , oscila continuamente ao longo do tempo de acordo com um modelo autoregressivo de primeira ordem AR(1):

$$\mu_i - \mu_0 = \phi^h(\mu_{i-1} - \mu_0) + \omega_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

em que o parâmetro  $\phi^h$  representa a autocorrelação entre  $\mu_{i-1}$  e  $\mu_i$ , os valores da média do processo da  $i$ -ésima e  $(i - 1)$ -ésima amostras ( $\bar{X}_i$  e  $\bar{X}_{i-1}$ ) e  $\omega_i \sim N(0, \sigma_\omega^2)$ .

Como Alwan e Radson (1992), assume-se que o intervalo de amostragem  $h$  entre duas amostras consecutivas é selecionado tão longo que garanta a independência entre  $\mu_{i-1}$  e  $\mu_i$ , para  $i = 1, 2, \dots$ , e a partir da teoria de séries temporais, se  $i = 0$  então  $\mu_{i=0} \sim N(\mu_0, \sigma_\mu^2)$  tem-se:

$$\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma_\omega^2}{(1 - \phi^{2h})}. \quad (24)$$

Por definição:

$$\sigma_X^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_0^2 = \frac{\sigma_\omega^2}{(1 - \phi^{2h})} + \sigma_0^2. \quad (25)$$

Assim o efeito da autocorrelação e da oscilação da média no desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  pode ser avaliado em termos de diferentes valores de  $\phi$  e  $\psi$ , respectivamente, em que

$$\psi = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma_0^2} \quad (26)$$

e  $\sigma_\mu^2$  pode ser definido como uma função de  $\psi$ :

$$\sigma_\mu^2 = \sigma_0^2 \frac{\psi}{(1-\psi)}. \quad (27)$$

A  $i$ -ésima média amostral  $\bar{X}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots\}$ , é igual a  $\bar{X}_i = \mu_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j}$  ou  $\bar{X}_i \sim N(\mu_0, \sigma_{\bar{X}}^2)$  em que a variância  $\sigma_{\bar{X}}^2$  é igual a:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_\mu^2 + \frac{\sigma_0^2}{n} = \sigma_0^2 \left( \frac{\psi}{1-\psi} \right) + \frac{\sigma_0^2}{n} = \sigma_0^2 \left( \frac{\psi}{1-\psi} + \frac{1}{n} \right). \quad (28)$$

E os limites de controle *LSC* e *LIC* do gráfico de  $\bar{X}$  são definidos por:

$$LSC = \mu_0 + k\sigma_{\bar{X}}, \quad (29)$$

$$LIC = \mu_0 - k\sigma_{\bar{X}}, \quad (30)$$

em que  $k > 0$  é o fator de abertura dos limites de controle.

Os artigos que tratam do monitoramento de processos com médias que oscilam (Reynolds *et al.*, 1996; Lu e Reynolds, 1999a, 1999b, 2001; Lin e Chou, 2008; Zou *et al.*, 2008; Lin, 2009; Costa e Machado, 2011), assumem que o deslocamento da média é tanto maior quanto maior for a variância  $\sigma_\mu^2$  do movimento oscilatório da média, isto é,  $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_X = \mu_0 + \delta\sqrt{\sigma_\mu^2 + \sigma_0^2}$ .

Porém não existe evidências práticas para assumir que o deslocamento da média é maior quando a média do processo oscila. Mais lógico assumir que a magnitude do deslocamento da media independe do seu movimento oscilatório, ou seja, supondo que quando uma causa especial ocorre a média do processo muda de  $\mu_0$  para  $\mu_0 + \delta\sigma_0$  em que  $\delta$  é o desvio padronizado da média. Se  $\delta = 0$  o processo é considerado como em controle e, se  $\delta \neq 0$  o processo é considerado como fora de controle.

Neste trabalho, a sensibilidade estatística do gráfico de controle de  $\bar{X}$  é medida pelo *NMA*.

Como discutido por Costa e Machado (2011), o *NMA* do gráfico de controle  $\bar{X}$  na presença de autocorrelação pode ser calculado por meio de uma abordagem de cadeia de Markov, em que,

- Assume-se que  $\mu_i$  está um intervalo fixo  $\mu_i \in [\mu_0 - c\sigma_\mu; \mu_0 + c\sigma_\mu]$  em que  $c$  é a constante prédefinida suficientemente grande para que garanta uma cobertura

conveniente para a distribuição de  $\bar{X}$  em torno de  $\mu_0$ , e neste trabalho assume-se  $c = 7$ .

- O intervalo  $2c\sigma_\mu$  é dividido em  $2m + 1$  sub-intervalos de  $\Delta = 2\rho\sigma_\mu$  em que  $\rho = \frac{c}{2m+1}$ .

E a cada amostra  $i$ , um estado transiente genérico  $s \in \{-m, m\}$  da cadeia de Markov consiste de um ponto  $\bar{X}_i \in [LCL, UCL]$  plotado no gráfico de controle com média  $\mu_i$ , em que  $\mu_0 + s\sigma_\mu - \frac{\Delta}{2}\sigma_\mu < \mu_i < \mu_0 + s\sigma_\mu + \frac{\Delta}{2}\sigma_\mu$ . Qualquer que seja o valor da média  $\mu_i$ , o estado absorvente é alcançado quando o gráfico de controle sinaliza um desvio da média, ou seja,  $\bar{X}_i \notin [LCL, UCL]$ . A matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}$  de tamanho  $(2m + 2) \times (2m + 2)$  da cadeia de Markov é dada por

$$\mathbf{P} = \left( \begin{array}{ccccc|c} p(-m, -m) & \dots & p(-m, 0) & \dots & p(-m, m) & p(-m, m+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(0, -m) & \dots & p(0, 0) & \dots & p(0, m) & p(0, m+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(m, -m) & \dots & p(m, 0) & \dots & p(m, m) & p(m, m+1) \\ \hline 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

em que  $\mathbf{Q}_{(2m+1) \times (2m+1)}$  é a matriz de probabilidades de transição, o vetor  $\mathbf{r}_{(2m+1) \times 1}$  satisfaz  $\mathbf{r} = \mathbf{1} - \mathbf{Q}\mathbf{1}$ , (ou seja, as linhas de probabilidades de  $\mathbf{P}$  devem somar 1) com  $\mathbf{1}_{(2m+1) \times 1} = (1, 1, \dots, 1)^T$  e  $\mathbf{0}_{(2m+1) \times 1} = (0, 0, \dots, 0)^T$ . Então cada amostra  $i$ , a probabilidade de transição  $p(r, s)$  do estado transiente  $r \in \{-m, m\}$  para o estado transiente  $s \in \{-m, m\}$ , é igual a

$$p(r, s) = Pr[\mu_0 + s\sigma_\mu - \rho\sigma_\mu < (1 - \phi^h)\mu_0 + \phi^h(\mu_0 + r\sigma_\mu) + \omega_i(t) < \mu_0 + s\sigma_\mu + \rho\sigma_\mu] \quad (32) \\ \times Pr[|\bar{X}_i - \mu_0| < k\sigma_{\bar{X}} \mid \bar{X}_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0 + s\sigma_\mu, \sigma_0^2/n)].$$

isolando  $\omega_i(t)$ , o resultado é

$$p(r, s) = Pr[s\sigma_\mu - \phi^h r\sigma_\mu - \rho\sigma_\mu < \omega_i(t) < s\sigma_\mu - \phi^h r\sigma_\mu + \rho\sigma_\mu] \quad (33) \\ \times Pr[|\bar{X}_i - \mu_0| < k\sigma_{\bar{X}} \mid \bar{X}_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0 + s\sigma_\mu, \sigma_0^2/n)],$$

Usando a expressão (27), tem-se

$$p(r, s) = Pr\left[\frac{\sigma_\omega}{\sqrt{1-\phi^{2h}}}(s - \phi^h r - \rho) < \omega_i(t) < \frac{\sigma_\omega}{\sqrt{1-\phi^{2h}}}(s - \phi^h r + \rho)\right] \quad (34) \\ \times Pr[|\bar{X}_i - \mu_0| < k\sigma_{\bar{X}} \mid \bar{X}_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0 + s\sigma_\mu, \sigma_0^2/n)],$$

e, lembrando que  $\omega_i(t) \sim N(0, \sigma_\omega^2)$ , tem-se

$$p(r, s) = \left[ \Phi\left(\frac{s - \phi^h r + \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) - \Phi\left(\frac{s - \phi^h r - \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) \right] \times \left[ \Phi\left(\frac{\mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} - \mu_0 - \delta\sigma_0 - s\sigma_\mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - k\sigma_{\bar{X}} - \mu_0 - \delta\sigma_0 - s\sigma_\mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right) \right]. \quad (35)$$

Usando simultaneamente as expressões (27) e (28) pode-se introduzir a variável  $\psi$  na segunda parte da expressão (35).

$$p(r, s) = \left[ \Phi\left(\frac{s - \phi^h r + \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) - \Phi\left(\frac{s - \phi^h r - \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) \right] \times \left[ \Phi\left(\frac{k\sigma_0 \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi} + \frac{1}{n}} - \delta\sigma_0 - s\sigma_0 \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi}}}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-k\sigma_0 \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi} + \frac{1}{n}} - \delta\sigma_0 - s\sigma_0 \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi}}}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right) \right]. \quad (36)$$

Os termos  $\sigma_0$  se cancelam e obtém-se

$$p(r, s) = \left[ \Phi\left(\frac{s - \phi^h r + \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) - \Phi\left(\frac{s - \phi^h r - \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) \right] \times \left[ \Phi\left(\frac{k \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi} + \frac{1}{n}} - \delta - s \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-k \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi} + \frac{1}{n}} - \delta - s \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \right], \quad (37)$$

ou, o equivalente

$$p(r, s) = \left[ \Phi\left(\frac{s - \phi^h r + \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) - \Phi\left(\frac{s - \phi^h r - \rho}{\sqrt{1 - \phi^{2h}}}\right) \right] \times \left[ \Phi\left(k \sqrt{1 + \frac{n\psi}{1-\psi}} - \delta\sqrt{n} - s \sqrt{\frac{n\psi}{1-\psi}}\right) - \Phi\left(-k \sqrt{1 + \frac{n\psi}{1-\psi}} - \delta\sqrt{n} - s \sqrt{\frac{n\psi}{1-\psi}}\right) \right]. \quad (38)$$

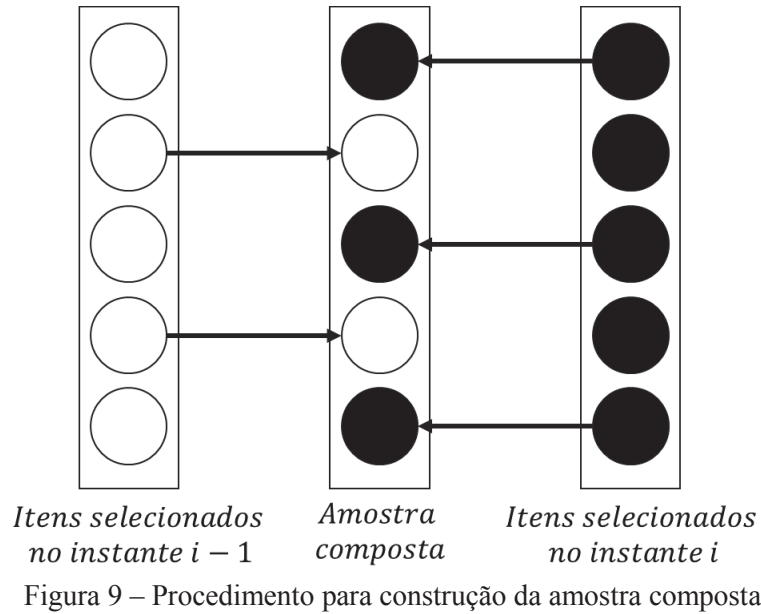
Das propriedades da cadeia de Markov (ver Çinlar, 1975) o NMA pode ser calculado pela expressão:

$$NMA = \mathbf{q}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}, \quad (39)$$

em que  $\mathbf{q}_{(2m+1) \times 1} = (q_{-m}, \dots, q_0, \dots, q_m)^T$  é o vetor das probabilidades iniciais, definido por  $q_s = Pr[|\mu_0 - \mu_{(s)}| < \rho\sigma_\mu \mid \mu(i) \sim N(\mu_0; \sigma_\mu^2)]$ , resultando em  $q_s = [\Phi(s + \rho) - \Phi(s - \rho)]$ .

### 3 GRÁFICO DE $\bar{X}$ COM A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM COMPOSTA PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS COM OBSERVAÇÕES AUTOCORRELACIONADAS

Uma nova estratégia de amostragem é proposta nesta Tese, denominada composta (no inglês *mixed*), para processos com observações autocorrelacionadas, que em síntese, propõe que a média amostral em cada instante de inspeção é calculada por meio da combinação de medidas da característica de qualidade de duas amostras consecutivas, cada uma baseada em subgrupos racionais, seguindo o procedimento ilustrado na Figura 9.



A amostra composta contém  $n_{i-1}$  itens que são retirados do processo no instante  $i - 1$  e por  $n_i$  itens que são retirados do processo no instante  $i$ . Seja  $\bar{Y}_i$ , a média da  $i$ -ésima amostra composta, então:

$$\bar{Y}_i = \frac{n_{i-1}}{n} \times \underbrace{\frac{1}{n_{i-1}} \sum_{t=1}^{n_{i-1}} X_{i-1,2t}}_{\bar{X}'_{i-1}} + \frac{n_i}{n} \times \underbrace{\frac{1}{n_i} \sum_{t=1}^{n_i} X_{i,2t-1}}_{\bar{X}'_i}, \quad (40)$$

em que  $\bar{X}'_{i-1}$  e  $\bar{X}'_i$  são as medias das observações da amostra composta  $i$  dos itens retirados do processo nos instantes  $i - 1$  e  $i$ , respectivamente.

Se a amostra composta  $i$  for constituída por  $n$  itens, se  $n$  for par, então  $n_{i-1} = n_i = n/2$ , caso contrário,  $n_{i-1} = (n - 1)/2, n_i = (n + 1)/2$ .

Assumindo que  $\bar{X}'_{i-1}$  e  $\bar{X}'_i$  são independentes, a variância de  $\bar{Y}_i$  é igual a

$$\sigma_{\bar{Y}_i}^2 = \left(\frac{n_{i-1}}{n}\right)^2 \cdot \sigma_{\bar{X}_{i-1}}^2 + \left(\frac{n_i}{n}\right)^2 \cdot \sigma_{\bar{X}_i}^2. \quad (41)$$

E usando o fato de que  $\sigma_{\bar{X}_{i-1}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n_{i-1}C_2^2(n_{i-1}, \phi^2)}$  e  $\sigma_{\bar{X}_i}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n_iC_2^2(n_i, \phi^2)}$ , tem-se que

$$\sigma_{\bar{Y}_i}^2 = \left(\frac{n_{i-1}}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{n_{i-1}C_2^2(n_{i-1}, \phi^2)} + \left(\frac{n_i}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{n_iC_2^2(n_i, \phi^2)}. \quad (42)$$

Isolando  $\sigma_0^2/n$  na expressão (42) pode-se obter

$$\sigma_{\bar{Y}_i}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n} \cdot \left( \frac{n_{i-1}}{n} \cdot \frac{1}{C_2^2(n_{i-1}, \phi^2)} + \frac{n_i}{n} \cdot \frac{1}{C_2^2(n_i, \phi^2)} \right), \quad (43)$$

e definindo

$$C_3(n, \phi) = \left( \frac{n_{i-1}}{n} \cdot \frac{1}{C_2^2(n_{i-1}, \phi^2)} + \frac{n_i}{n} \cdot \frac{1}{C_2^2(n_i, \phi^2)} \right)^{-1/2}, \quad (44)$$

então  $\sigma_{\bar{Y}_i}^2$  pode ser reescrita como:

$$\sigma_{\bar{Y}_i}^2 = \frac{\sigma_0^2}{nC_3^2(n, \phi)}. \quad (45)$$

Para melhor ilustrar a dependência de  $C_3(n, \phi)$  em função de  $n$ , a Tabela 1 apresenta os valores de  $C_3$  para  $n = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 11\}$  e  $\phi = \{0,0; 0,1; \dots; 0,9\}$ . Observa-se que para cada valor de  $n$ , a função  $C_3(n, \phi)$  aumenta quando  $\phi$  diminui, e quando não existe autocorrelação,  $\phi = 0$ , tem-se  $C_2^2(n_{i-1}, \phi^2) = C_2^2(n_i, \phi^2) = 1$ , portanto  $C_3(n, \phi) = 1$ ,  $\sigma_{\bar{Y}_i}^2 = \sigma_0^2/n$ .

Tabela 1 – Valores selecionados de  $C_3(n, \phi)$  para  $n = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 11\}$  e  $\phi = \{0,0; 0,1; \dots; 0,9\}$

| $\phi$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ | $n = 6$ | $n = 7$ | $n = 8$ | $n = 11$ |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 0,0    | 1,0000  | 1,0000  | 1,0000  | 1,0000  | 1,0000  | 1,0000  | 1,0000   |
| 0,1    | 0,9967  | 0,9950  | 0,9940  | 0,9934  | 0,9929  | 0,9925  | 0,9919   |
| 0,2    | 0,9869  | 0,9806  | 0,9765  | 0,9739  | 0,9720  | 0,9705  | 0,9678   |
| 0,3    | 0,9713  | 0,9578  | 0,9486  | 0,9426  | 0,9383  | 0,9352  | 0,9292   |
| 0,4    | 0,9506  | 0,9285  | 0,9120  | 0,9015  | 0,8938  | 0,8882  | 0,8776   |
| 0,5    | 0,9258  | 0,8944  | 0,8687  | 0,8528  | 0,8406  | 0,8318  | 0,8151   |
| 0,6    | 0,8980  | 0,8575  | 0,8209  | 0,7990  | 0,7812  | 0,7686  | 0,7440   |
| 0,7    | 0,8682  | 0,8192  | 0,7706  | 0,7426  | 0,7181  | 0,7012  | 0,6665   |
| 0,8    | 0,8372  | 0,7809  | 0,7195  | 0,6858  | 0,6537  | 0,6324  | 0,5854   |
| 0,9    | 0,8058  | 0,7433  | 0,6690  | 0,6303  | 0,5901  | 0,5646  | 0,5037   |

Os limites de controle do gráfico de  $\bar{X}$  que utiliza amostras compostas são:

$$LSC = \mu_0 + k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}C_3(n, \phi)}, \quad (46)$$

$$LIC = \mu_0 - k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}C_3(n, \phi)}. \quad (47)$$

Para  $k = 3$ ,  $n = 5$ ,  $\phi = 0,5$ ,  $\mu_0 = 5$  e  $\sigma_0 = 1$  e amostras tomadas segundo o critério de subgrupos racionais tem-se  $C_2(5; 0,5) = 0,6704$ ,  $LSC = 7,0012$  e  $LIC = 2,9987$ . Para amostras compostas os limites de controle se estreitam  $C_3(5; 0,5) = 0,8687$ ,  $LSC = 6,5444$  e  $LIC = 3,4555$ .

Se uma causa especial ocorre entre os instantes  $i - 1$  e  $i$ , tem-se que

$$\bar{X}'_{i-1} \sim N(\mu_0, \sigma_{\bar{X}'_{i-1}}) \text{ com } \sigma_{\bar{X}'_{i-1}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_{i-1}}C_2(n_{i-1}, \phi^2)}, \quad (48)$$

$$\bar{X}'_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_{\bar{X}'_i}) \text{ com } \sigma_{\bar{X}'_i} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}C_2(n_i, \phi^2)}. \quad (49)$$

Para a primeira amostra composta construída depois da ocorrência da causa especial  $\bar{Y}_i \sim N(\mu_0 + \frac{n_i}{n}\delta\sigma_0, \sigma_{\bar{Y}_i})$ , o risco  $\beta_1$  é dado por:

$$\beta_1 = \Pr\left[\left|Z + \frac{n_i}{n} \cdot \delta\sqrt{n} \cdot C_3(n, \phi)\right| < k | Z \sim (0,1)\right]. \quad (50)$$

Para as sucessivas amostras compostas  $\bar{Y}_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_{\bar{Y}_i})$ , o risco  $\beta$  é dado por:

$$\beta = \Pr\left[\left|Z + \delta\sqrt{n} \cdot C_3(n, \phi)\right| < k | Z \sim (0,1)\right], \quad (51)$$

com  $\beta_1 > \beta$ . Finalmente, se  $RL$  é o comprimento da corrida (do inglês *Run Length*) do gráfico de  $\bar{X}$  para o monitoramento da média  $\bar{Y}_i$  da amostra composta, então tem-se  $P(RL = 1) = 1 - \beta_1$ ,  $P(RL = 2) = \beta_1(1 - \beta)$ ,  $P(RL = 3) = \beta_1\beta(1 - \beta)$ ,  $P(RL = 4) = \beta_1\beta^2(1 - \beta)$  e, generalizando,

$$P(RL = l) = \begin{cases} 1 - \beta_1 & \text{se } l = 1 \\ \beta_1\beta^{l-2}(1 - \beta) & \text{se } l > 1 \end{cases}. \quad (52)$$

O  $NMA$  pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} NMA &= 1 \times (1 - \beta_1) + 2 \times \beta_1(1 - \beta) + 3 \times \beta_1\beta(1 - \beta) + 4 \times \beta_1\beta^2(1 - \beta) + \dots \\ &= 1 - \beta_1 + \beta_1(1 - \beta) \sum_{l=2}^{\infty} l\beta^{l-2}, \end{aligned} \quad (53)$$

Usando o fato de que  $\sum_{l=2}^{\infty} l\beta^{l-2} = \frac{2-\beta}{(1-\beta)^2}$ , a expressão (53) pode ser reescrita como:

$$NMA = \beta_1 \left( \frac{2-\beta}{1-\beta} - 1 \right) + 1 = \frac{\beta_1}{(1-\beta)} + 1. \quad (54)$$

Se a causa especial ocorrer antes da primeira amostra, então  $\beta_1 = \beta$  e a expressão (54) reduz para  $NMA = 1/(1 - \beta)$ .

### 3.1 ANÁLISE DE DESEMPENHO ESTATÍSTICO

Nesta seção compara-se o desempenho do gráfico de controle de  $\bar{X}$  tradicional com outros gráficos de controle de  $\bar{X}$ : um em que a amostra é formada por meio da seleção de um item da linha de produção e  $s = 1,2$  itens subsequentes não, antes de se selecionar o próximo item que irá compor a amostra e outro em que as amostras são construídas por itens retirados do processo em diferentes instantes de tempo (amostras compostas).

Avalia-se a influência do coeficiente de autocorrelação ( $\phi$ ), do tamanho da amostra ( $n$ ) e da magnitude do desvio da média ( $\delta$ ) no desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com a implementação da estratégia de amostragem composta em comparação com as estratégias baseada em subgrupo racional (*0-skip*) e as estratégias *1-skip* e *2-skip*. Além disso, para esta análise assume-se que o coeficiente de autocorrelação  $\phi$  não se altera quando o processo sai de um estado sob controle para um estado fora de controle estatístico, e para garantir que o processo não gere excessivos alarmes falsos é fixado  $NMA_0 = 370,4$ . Portanto, sem perder a generalidade da análise, consideram-se os seguintes cenários:

- $\phi = \{0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$
- $\delta = \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 1,0; 1,5; 2,0\}$
- $n = \{4; 6; 11\}$

Com o propósito de analisar o desempenho estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  calcula-se o risco  $\beta$ , através da expressão (21), obtendo o  $NMA = 1/(1 - \beta)$  para as estratégias de amostragem *0-skip*, *1-skip* e *2-skip*. Entretanto para a estratégia de amostragem composta o  $NMA$  está associado ao risco  $\beta_1$ , da primeira amostra, expressão (50), e ao risco  $\beta$  das sucessivas amostras compostas, expressão (51), obtendo o  $NMA$  através da expressão (54).

As Tabelas 2, 3 e 4 apresentam os valores do  $NMA$  para  $\phi = \{0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ ,  $\delta = \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 1,0; 1,5; 2,0\}$ ,  $NMA_0 = 370,4$  e  $n = \{4; 6; 11\}$ .

Tabela 2 – Valores do  $NMA$  do gráfico de  $\bar{X}$  para as estratégias de amostragem  $0\text{-skip}$ ,  $1\text{-skip}$ ,  $2\text{-skip}$ ,  $composta$  e  $n = 4$ .

|                |                 | $\phi$ |        |        |        |        |        |
|----------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                |                 | 0,0    | 0,1    | 0,3    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
| $\delta = 0,1$ |                 |        |        |        |        |        |        |
|                | $0\text{-skip}$ | 308,43 | 315,86 | 328,24 | 337,82 | 345,14 | 350,69 |
|                | $1\text{-skip}$ | 308,43 | 309,21 | 315,16 | 325,43 | 337,40 | 348,38 |
|                | $2\text{-skip}$ | 308,43 | 308,50 | 310,52 | 317,58 | 330,52 | 346,04 |
|                | $Composta$      | 308,55 | 309,07 | 312,94 | 319,38 | 326,72 | 333,76 |
| $\delta = 0,3$ |                 |        |        |        |        |        |        |
|                | $0\text{-skip}$ | 119,67 | 133,87 | 162,86 | 191,42 | 218,21 | 242,28 |
|                | $1\text{-skip}$ | 119,67 | 121,07 | 132,44 | 155,59 | 190,02 | 231,83 |
|                | $2\text{-skip}$ | 119,67 | 119,81 | 123,47 | 137,47 | 169,08 | 221,89 |
|                | $Composta$      | 120,19 | 121,12 | 128,34 | 141,62 | 159,09 | 178,69 |
| $\delta = 0,5$ |                 |        |        |        |        |        |        |
|                | $0\text{-skip}$ | 43,89  | 52,11  | 71,14  | 93,20  | 117,41 | 142,62 |
|                | $1\text{-skip}$ | 43,89  | 44,68  | 51,25  | 66,07  | 92,04  | 131,23 |
|                | $2\text{-skip}$ | 43,89  | 43,97  | 46,03  | 54,31  | 75,65  | 121,04 |
|                | $Composta$      | 44,61  | 45,13  | 49,24  | 57,27  | 68,83  | 83,23  |
| $\delta = 0,7$ |                 |        |        |        |        |        |        |
|                | $0\text{-skip}$ | 18,25  | 22,45  | 33,01  | 46,60  | 63,11  | 82,11  |
|                | $1\text{-skip}$ | 18,25  | 18,64  | 22,00  | 30,09  | 45,85  | 73,29  |
|                | $2\text{-skip}$ | 18,25  | 18,29  | 19,32  | 23,61  | 35,67  | 65,73  |
|                | $Composta$      | 19,05  | 19,31  | 21,39  | 25,62  | 32,05  | 40,63  |
| $\delta = 1,0$ |                 |        |        |        |        |        |        |
|                | $0\text{-skip}$ | 6,30   | 7,91   | 12,28  | 18,52  | 26,95  | 37,68  |
|                | $1\text{-skip}$ | 6,30   | 6,45   | 7,73   | 11,02  | 18,16  | 32,57  |
|                | $2\text{-skip}$ | 6,30   | 6,32   | 6,70   | 8,37   | 13,45  | 28,36  |
|                | $Composta$      | 7,16   | 7,26   | 8,04   | 9,70   | 12,37  | 16,18  |
| $\delta = 1,5$ |                 |        |        |        |        |        |        |
|                | $0\text{-skip}$ | 2,00   | 2,41   | 3,62   | 5,52   | 8,38   | 12,43  |
|                | $1\text{-skip}$ | 2,00   | 2,04   | 2,36   | 3,26   | 5,41   | 10,44  |
|                | $2\text{-skip}$ | 2,00   | 2,00   | 2,10   | 2,53   | 3,96   | 8,89   |
|                | $Composta$      | 2,87   | 2,89   | 3,09   | 3,53   | 4,27   | 5,40   |
| $\delta = 2,0$ |                 |        |        |        |        |        |        |
|                | $0\text{-skip}$ | 1,19   | 1,31   | 1,72   | 2,41   | 3,52   | 5,20   |
|                | $1\text{-skip}$ | 1,19   | 1,20   | 1,30   | 1,59   | 2,37   | 4,36   |
|                | $2\text{-skip}$ | 1,19   | 1,19   | 1,22   | 1,35   | 1,84   | 3,72   |
|                | $Composta$      | 2,00   | 2,01   | 2,08   | 2,24   | 2,50   | 2,91   |

Tabela 3 – Valores de  $NMA$  do gráfico de  $\bar{X}$  para as estratégias de amostragem  $0-skip$ ,  $1-skip$ ,  $2-skip$ , composta e  $n = 6$ .

|                |          | $\phi$ |        |        |        |        |        |
|----------------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                |          | 0,0    | 0,1    | 0,3    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
| $\delta = 0,1$ |          |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$ | 295,75 | 305,00 | 320,68 | 333,12 | 342,76 | 350,04 |
|                | $1-skip$ | 295,75 | 296,72 | 304,12 | 317,08 | 332,57 | 347,02 |
|                | $2-skip$ | 295,75 | 295,85 | 298,35 | 307,15 | 323,61 | 343,95 |
|                | Composta | 295,88 | 296,61 | 302,10 | 311,53 | 322,62 | 333,33 |
| $\delta = 0,3$ |          |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$ | 99,55  | 113,76 | 144,28 | 176,60 | 208,94 | 239,26 |
|                | $1-skip$ | 99,55  | 100,93 | 112,31 | 136,42 | 174,97 | 225,98 |
|                | $2-skip$ | 99,55  | 99,68  | 103,31 | 117,43 | 151,13 | 213,51 |
|                | Composta | 100,04 | 101,08 | 109,34 | 125,61 | 148,97 | 177,38 |
| $\delta = 0,5$ |          |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$ | 33,40  | 40,68  | 58,58  | 81,31  | 108,61 | 139,25 |
|                | $1-skip$ | 33,40  | 34,08  | 39,90  | 53,66  | 80,06  | 125,17 |
|                | $2-skip$ | 33,40  | 33,47  | 35,26  | 42,66  | 63,06  | 112,89 |
|                | Composta | 34,07  | 34,57  | 38,74  | 47,62  | 61,95  | 82,18  |
| $\delta = 0,7$ |          |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$ | 13,21  | 16,66  | 25,92  | 39,10  | 56,92  | 79,46  |
|                | $1-skip$ | 13,21  | 13,53  | 16,29  | 23,27  | 38,34  | 68,76  |
|                | $2-skip$ | 13,21  | 13,24  | 14,08  | 17,64  | 28,39  | 59,90  |
|                | Composta | 13,95  | 14,19  | 16,15  | 20,52  | 28,13  | 39,95  |
| $\delta = 1,0$ |          |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$ | 4,50   | 5,72   | 9,29   | 14,99  | 23,68  | 36,12  |
|                | $1-skip$ | 4,50   | 4,60   | 5,58   | 8,23   | 14,65  | 30,02  |
|                | $2-skip$ | 4,50   | 4,51   | 4,80   | 6,08   | 10,31  | 25,24  |
|                | Composta | 5,28   | 5,36   | 6,05   | 7,66   | 10,67  | 15,82  |
| $\delta = 1,5$ |          |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$ | 1,57   | 1,86   | 2,78   | 4,42   | 7,23   | 11,81  |
|                | $1-skip$ | 1,57   | 1,59   | 1,82   | 2,50   | 4,32   | 9,49   |
|                | $2-skip$ | 1,57   | 1,57   | 1,64   | 1,94   | 3,06   | 7,77   |
|                | Composta | 2,31   | 2,33   | 2,51   | 2,92   | 3,73   | 5,23   |
| $\delta = 2,0$ |          |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$ | 1,08   | 1,15   | 1,43   | 2,00   | 3,07   | 4,94   |
|                | $1-skip$ | 1,08   | 1,08   | 1,14   | 1,34   | 1,96   | 3,97   |
|                | $2-skip$ | 1,08   | 1,08   | 1,09   | 1,17   | 1,52   | 3,28   |
|                | Composta | 1,67   | 1,68   | 1,76   | 1,92   | 2,23   | 2,78   |

Tabela 4 – Valores de  $NMA$  do gráfico de  $\bar{X}$  para as estratégias de amostragem  $0-skip$ ,  $1-skip$ ,  $2-skip$ ,  $composta$  e  $n = 11$ .

|                |            | $\phi$ |        |        |        |        |        |
|----------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                |            | 0,0    | 0,1    | 0,3    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
| $\delta = 0,1$ |            |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$   | 235,68 | 251,58 | 280,59 | 306,18 | 328,31 | 346,10 |
|                | $1-skip$   | 235,68 | 237,32 | 250,04 | 273,67 | 304,98 | 338,73 |
|                | $2-skip$   | 235,68 | 235,84 | 240,07 | 255,41 | 286,37 | 331,20 |
|                | $Composta$ | 235,94 | 237,41 | 248,83 | 269,95 | 297,28 | 325,18 |
| $\delta = 0,3$ |            |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$   | 44,42  | 54,70  | 80,59  | 115,75 | 163,05 | 222,13 |
|                | $1-skip$   | 44,42  | 45,38  | 53,60  | 73,36  | 113,72 | 194,48 |
|                | $2-skip$   | 44,42  | 44,51  | 47,04  | 57,52  | 87,27  | 171,00 |
|                | $Composta$ | 45,10  | 45,96  | 53,25  | 70,21  | 102,07 | 155,19 |
| $\delta = 0,5$ |            |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$   | 11,13  | 14,57  | 24,69  | 41,75  | 71,28  | 121,28 |
|                | $1-skip$   | 11,13  | 11,44  | 14,19  | 21,65  | 40,66  | 95,78  |
|                | $2-skip$   | 11,13  | 11,16  | 11,98  | 15,57  | 27,63  | 77,07  |
|                | $Composta$ | 11,93  | 12,20  | 14,62  | 20,90  | 35,09  | 66,13  |
| $\delta = 0,7$ |            |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$   | 4,02   | 5,28   | 9,35   | 17,19  | 33,09  | 65,91  |
|                | $1-skip$   | 4,02   | 4,13   | 5,14   | 8,08   | 16,65  | 48,28  |
|                | $2-skip$   | 4,02   | 4,03   | 4,32   | 5,66   | 10,62  | 36,53  |
|                | $Composta$ | 4,85   | 4,95   | 5,84   | 8,28   | 14,45  | 30,49  |
| $\delta = 1,0$ |            |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$   | 1,60   | 1,96   | 3,20   | 5,91   | 12,31  | 28,46  |
|                | $1-skip$   | 1,60   | 1,63   | 1,91   | 2,80   | 5,72   | 19,34  |
|                | $2-skip$   | 1,60   | 1,60   | 1,69   | 2,07   | 3,62   | 13,83  |
|                | $Composta$ | 2,41   | 2,44   | 2,70   | 3,44   | 5,48   | 11,69  |
| $\delta = 1,5$ |            |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$   | 1,02   | 1,07   | 1,29   | 1,90   | 3,63   | 8,92   |
|                | $1-skip$   | 1,02   | 1,03   | 1,06   | 1,21   | 1,86   | 5,78   |
|                | $2-skip$   | 1,02   | 1,03   | 1,03   | 1,08   | 1,37   | 4,07   |
|                | $Composta$ | 1,63   | 1,64   | 1,72   | 1,92   | 2,42   | 4,05   |
| $\delta = 2,0$ |            |        |        |        |        |        |        |
|                | $0-skip$   | 1,00   | 1,00   | 1,02   | 1,16   | 1,72   | 3,74   |
|                | $1-skip$   | 1,00   | 1,00   | 1,00   | 1,01   | 1,15   | 2,51   |
|                | $2-skip$   | 1,00   | 1,00   | 1,00   | 1,00   | 1,04   | 1,88   |
|                | $Composta$ | 1,27   | 1,28   | 1,36   | 1,52   | 1,78   | 2,39   |

O efeito negativo da autocorrelação no desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  se reduz com a seleção de itens da amostra ou com o uso da amostra composta. Segundo a Tabela 3, para  $n = 5$ , observações com autocorrelação  $\phi = 0,9$  e  $\delta = 0,5$ , para amostras formadas segundo o critério de subgrupos racionais (*0-skip*) o  $NMA = 139,25$ . Com a seleção dos itens da amostra este valor se reduz para 125,17 (*1-skip*) e 112,89 (*2-skip*). Com a adoção de amostra composta o  $NMA$  se reduz ainda mais, para 82,18.

Segundo as Tabelas 2, 3 e 4, para  $\delta < 1.0$  a adoção de amostras compostas sempre melhora o desempenho do gráfico de controle de  $\bar{X}$ , exceto para o caso em que  $\phi = 0$ ,  $\beta_1 > \beta$ .

Para deslocamentos moderados da média ( $1,0 \leq \delta \leq 1,5$ ), com níveis moderados a altos de autocorrelação ( $\phi > 0,3$ ) a adoção de amostras compostas é melhor que a estratégia de seleção dos itens da amostra, mesmo que este desempenho reduza a medida que  $n$  aumenta.

Para grandes deslocamentos da média,  $\delta > 1,5$ , amostras compostas são melhores que as amostras tradicionais (*0-skip*) apenas na presença de níveis elevados de autocorrelação, ( $\phi \geq 0,7$ ) se o tamanho da amostra  $n$  for grande ( $n \geq 8$ ), e para pequenos valores de tamanho da amostra  $n$ , os resultados alcançados com amostras compostas estendem para níveis moderados de autocorrelação, ( $\phi \geq 0,5$ ).

Adoção de amostras compostas é sempre melhor que a estratégia de seleção de itens da amostra em que um item é selecionado e o subsequente não (*1-skip*).

Os valores de  $NMA$  apresentados nas Tabelas 2, 3 e 4 mostram que o desempenho da do gráfico de  $\bar{X}$  com a adoção de amostra composta em comparação com a estratégia de seleção de itens da amostra em que um item é selecionado e os dois subsequentes não (*2-skip*) é influenciado por três fatores ( $n, \phi, \delta$ ), que em particular, o desempenho da estratégia de amostragem composta reduz quando  $\delta$  e  $n$  aumentam,  $\phi$  diminui, por exemplo, para  $(n, \phi, \delta) = (4; 0,7; 0,5)$   $NMA = 68,83$  (75,64) para as estratégias com amostra composta (*2-skip*), veja Tabela 2 e para  $(n, \phi, \delta) = (11; 0,7; 0,5)$ ,  $NMA = 35,09$  (27,63) para as estratégias com amostra composta (*2-skip*), veja Tabela 4.

Se  $\phi \leq 0,5$ , a estratégia de amostragem *2-skip* sempre supera a estratégia com amostra composta, todavia para pequenos valores de  $\delta$  a adoção de amostras compostas tem melhor desempenho que a estratégia *2-skip*, por exemplo, para  $(n, \phi, \delta) = (4; 0,7; 0,3)$ ,  $NMA = 159,09$  (169,08) para as estratégias com amostra composta (*2-skip*), veja Tabela 2, podendo ser estendido para  $\phi \geq 0,7$  dependendo do tamanho da amostra  $n$  selecionanda. Para grandes valores de  $\delta$  este desempenho é limitado para  $\phi \geq 0,9$ , por exemplo, para  $(n, \phi, \delta) =$

(4; 0,9; 2,0),  $NMA = 2,91$  (3,72) para as estratégias com amostra composta (2-skip), veja Tabela 2.

As Figuras 8 e 9 mostram que para  $\delta = 0,5$  o efeito de  $n$  vs.  $NMA$  para alta ( $\phi = 0,9$ ) e moderada ( $\phi = 0,5$ ) autocorrelação positiva o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  aumenta com o aumento de  $n$ .

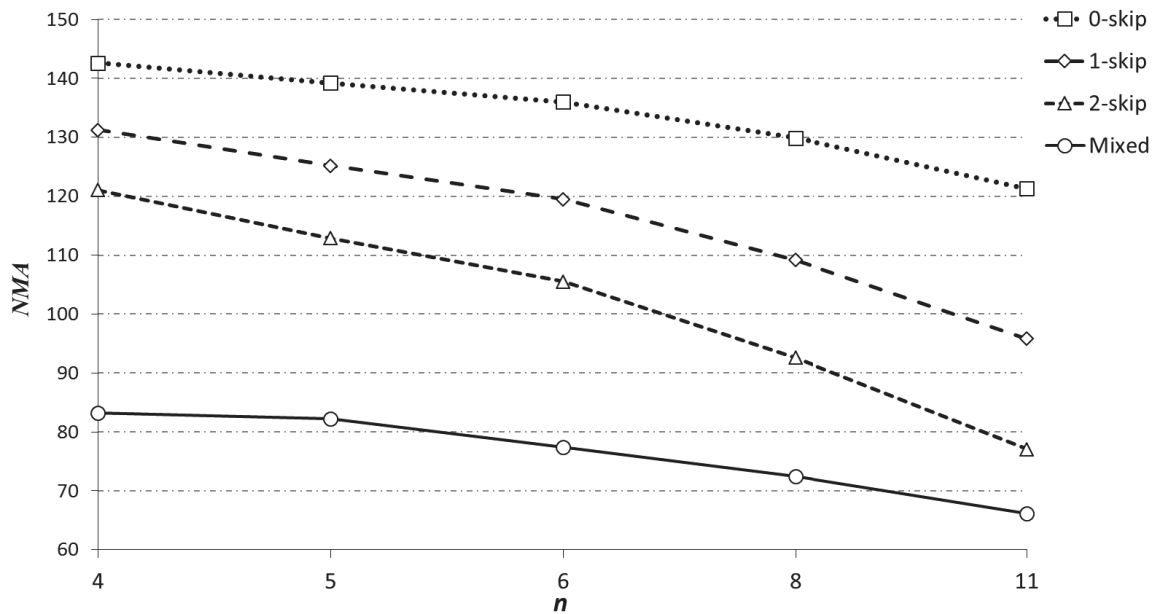


Figura 10 –  $NMA$  vs.  $n$  para gráfico de  $\bar{X}$  com o uso das estratégias de amostragem 0-skip, 1-skip, 2-skip e composta.  $\phi = 0,9$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $NMA_0 = 370,4$  e  $n = \{4; 5; 6; 8; 11\}$ .

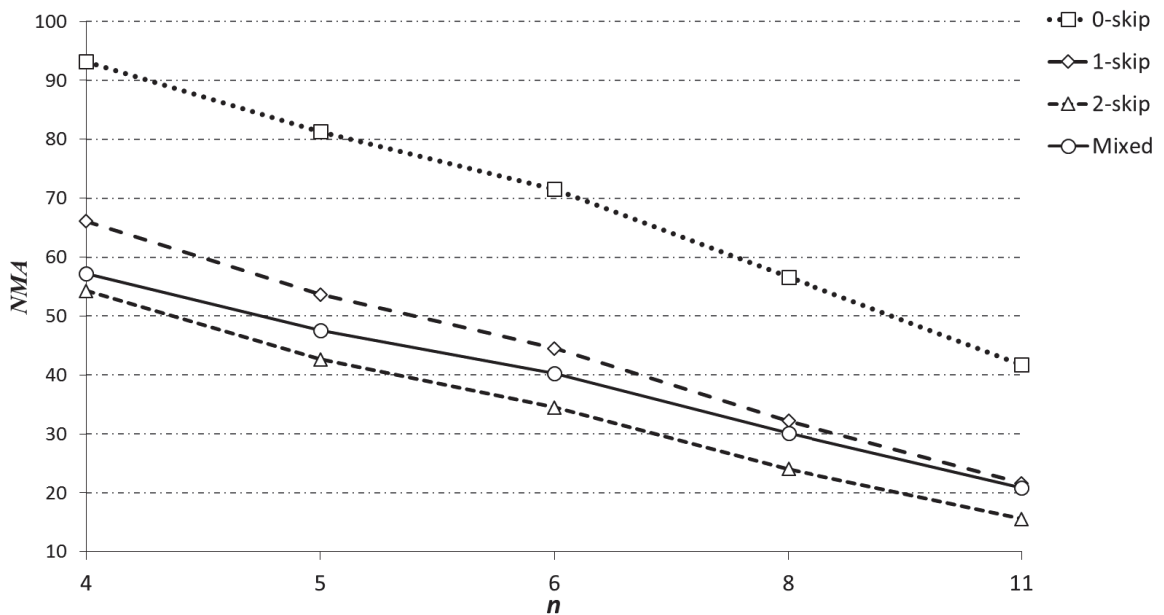


Figura 11 –  $NMA$  vs.  $n$  para gráfico de  $\bar{X}$  com o uso das estratégias de amostragem 0-skip, 1-skip, 2-skip e composta.  $\phi = 0,5$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $NMA_0 = 370,4$  e  $n = \{4; 5; 6; 8; 11\}$ .

Finalmente, é interessante notar que o gráfico de controle com a adoção de amostras compostas tem um desempenho mais robusto quando na presença da autocorrelação. Se denominar  $\Delta NMA(\delta, n) = \max_{\phi}[NMA(\delta, n|\phi)] - \min_{\phi}[NMA(\delta, n|\phi)]$  a diferença de  $NMA$  vs.  $\phi$  para uma seleção de  $(\delta, n)$ :  $\Delta NMA(\delta, n)$  observa-se que esta diferença sempre será menor quando adotada amostras compostas, por exemplo, para  $(\delta, n) = (1, 0; 6)$ ,  $\Delta NMA(\delta, n) = 15,82 - 5,28 = 10,54$  para amostras compostas e  $\Delta NMA(\delta, n) = 25,24 - 4,50 = 20,74$  para estratégia de amostragem *2-skip*, além de grandes diferenças esperadas quando comparada com as estratégias *1-skip* e *0-skip*. Esta robustez pode levar os profissionais de qualidade a adotar amostras compostas quando há falta de conhecimento sobre o nível de autocorrelação ou este nível está oscilando durante o processo.

### 3.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO ECONÔMICO

Nesta seção investiga-se o desempenho econômico do gráfico de  $\bar{X}$  com o esquema de amostragem em que os itens da amostra são selecionados (*s-skip*), proposta por Costa e Castagliola (2011), e com a adoção de amostras compostas.

O objetivo deste estudo é entender quais processos e fatores de custo orientam a seleção da estratégia de amostragem e ainda quantificar os ganhos associadas ao custo de monitoramento da qualidade esperado por hora. Além de analisar os efeitos da imprecisão na estimativa dos parâmetros de custo e processo que podem resultar em um planejamento de gráfico de controle de qualidade inferior.

#### 3.2.1 Modelo econômico

O modelo econômico adotado é o de Duncan, já apresentado na seção 2.2.1. A expressão (13) do custo esperado  $E(L)$  sofre uma pequena alteração devido ao uso de amostras com itens selecionados (*s-skip*), em que o tempo para retirada de uma amostra e interpretação dos resultados é dado por  $n_{prod} \cdot g$ , sendo  $n_{prod} = n \cdot (1 + s) - s$  o número de itens produzidos necessários para a construção de uma amostra de tamanho  $n$  e  $s$  o número de itens consecutivos não selecionados  $s = 0, 1, 2$  antes de selecionar o próximo item que irá compor a amostra;  $g$  horas por item inspecionado.

O planejamento econômico-estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  é um problema de otimização cuja função objetivo a ser minimizada é o  $E(L)$ , e se denominar  $\Omega = \{n, h, k\}$  como uma solução de planejamento viável, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\min_{\Omega} E(L) \quad (55)$$

S.A.

$$\alpha = \alpha_0 \quad (56)$$

$$g \cdot n_{prod} \leq h \leq 50 \quad (57)$$

$$n \in \{1, 2, \dots, 20\} \quad (58)$$

A restrição (56) representa a restrição estatística que fixa o número esperado de falsos alarmes. A restrição (57) garante que o intervalo de amostragem  $h$  é grande o suficiente para permitir que o conjunto de observações  $n_{prod}$  da característica de qualidade de interesse possam ser medidas.

O limite superior  $h \leq 50$  para a restrição (57) é fixado devido ao fato de que quanto maior o intervalo de amostragem, maior será o tempo esperado para detecção de um desajuste do processo, podendo levar a uma produção excessiva de itens não-conformes até que o processo seja parada e ajustado.

E sem perda de generalidade, supõe-se que a taxa de produção não se restringe a coleta de dados e procedimento de medição.

Um procedimento de busca exaustiva é usado para selecionar o melhor conjunto de parâmetros de projeto  $\Omega^* = \{n^*, h^*, k^*\}$  para cada estratégia de amostragem. O valor ótimo  $k^*$  é imediatamente derivado da restrição (56), devido a definição de  $\alpha_0 = 0,27\%$ : e como consequência,  $k^* = 3,0$ . Então, o procedimento de busca seleciona o dois parâmetros que restam  $(n^*, h^*)$  de acordo com o passo-a-passo do algoritmo apresentado no Apêndice B.

### 3.2.2 Análise numérica

Para comparar o desempenho econômico do gráfico de  $\bar{X}$  com o uso das estratégias de amostragem composta (*comp*), 0-skip (*0sk*), 1-skip (*1sk*) e 2-skip (*2sk*), foram criados 128 cenários organizados de acordo com o planejamento de experimentos fatorial fracionado  $2_V^{10-3}$  (relação definidora  $M = \phi\delta\lambda g$ ,  $C_0 = \delta\lambda gT_1$ ,  $C_1 = \phi\lambda ga$ ), pois permite estimar eficientemente os efeitos principais, bem como as interações de segunda ordem e utilizar as interações de

ordem superior (considerado neste trabalho como negligenciável) como uma estimativa do termo de ruído (Simpson e Keats, 1995).

Dez parâmetros de processo e custo são variados em dois níveis, cujos valores são adaptados do exemplo apresentado por Montgomery (2004, pag. 469), codificados como Nível Baixo (-1) e Nível Alto (1), para obtenção dos valores ótimos dos parâmetros de projeto que minimize o custo horário esperado de monitoramento  $E(L)$ , ver Quadro 10.

Quadro 10 – Níveis para os parâmetros de planejamento econômico.

| Variáveis | Nível Baixo (-1) | Nível Alto (1) |
|-----------|------------------|----------------|
| $\phi$    | 0,2              | 0,8            |
| $\delta$  | 0,5              | 2              |
| $\lambda$ | 0,01             | 0,05           |
| $g$       | 0,0167           | 0,1            |
| $T_1$     | 0,167            | 0,5            |
| $a$       | 0,5              | 1,5            |
| $b$       | 1                | 10             |
| $M$       | 10               | 100            |
| $C_0$     | 10               | 30             |
| $C_1$     | 30               | 60             |

A Tabela 5 apresenta os resultados de  $n^*$ ,  $h^*$  e  $E(L)$  para os 128 cenários do plano experimental em ordem padrão, de cada estratégia de amostragem investigada.

Os resultados apresentados na Tabela 5 mostram que a adoção de amostras compostas melhora o desempenho econômico do gráfico de  $\bar{X}$ . O efeito positivo de reduzir a autocorrelação selecionando um item e os dois subsequentes não (*2-skip*) é contrabalançada pela necessidade de coleta de grandes conjuntos de itens para construir a amostra, o que resulta em intervalos de amostragem maiores e longos períodos de produção em um estado fora de controle.

Tabela 5 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado.

| Ord | $\phi$ | $\delta$ | $\lambda$ | $g$ | $T_1$ | $a$ | $b$ | $M$ | $C_0$ | $C_1$ | Composta |       |        | 1-skip |       |        | 2-skip |       |        | 0-skip |       |        |
|-----|--------|----------|-----------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|-------|----------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|
|     |        |          |           |     |       |     |     |     |       |       | $n^*$    | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ |
| 1   | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 20       | 2,20  | 20,86  | 20     | 2,38  | 19,60  | 20     | 2,50  | 18,99  | 20     | 1,90  | 24,29  |
| 2   | 1      | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 2        | 1,06  | 7,46   | 2      | 1,10  | 8,40   | 2      | 1,08  | 8,26   | 2      | 1,11  | 8,55   |
| 3   | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 3        | 5,17  | 2,04   | 4      | 8,56  | 1,71   | 4      | 8,76  | 1,69   | 5      | 9,34  | 1,84   |
| 4   | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 2        | 1,00  | 5,62   | 2      | 0,81  | 6,87   | 8      | 3,14  | 6,33   | 2      | 0,75  | 7,37   |
| 5   | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 20       | 15,58 | 9,70   | 20     | 12,91 | 9,47   | 20     | 12,08 | 9,31   | 20     | 50,00 | 9,99   |
| 6   | 1      | -1       | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 2        | 0,11  | 58,57  | 2      | 0,11  | 67,55  | 2      | 0,11  | 66,19  | 2      | 0,11  | 69,07  |
| 7   | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 3        | 0,71  | 12,95  | 4      | 1,18  | 10,75  | 4      | 1,21  | 10,78  | 5      | 1,29  | 11,57  |
| 8   | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 2        | 2,14  | 5,80   | 2      | 1,85  | 6,37   | 8      | 6,74  | 6,07   | 2      | 1,77  | 6,59   |
| 9   | -1     | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 20       | 2,23  | 21,86  | 20     | 3,91  | 23,41  | 20     | 5,81  | 26,73  | 20     | 2,00  | 25,26  |
| 10  | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 2        | 1,08  | 7,59   | 2      | 1,12  | 8,51   | 2      | 1,11  | 8,37   | 2      | 1,14  | 8,65   |
| 11  | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 3        | 5,13  | 1,79   | 4      | 8,52  | 1,49   | 4      | 8,74  | 1,49   | 5      | 9,27  | 1,60   |
| 12  | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 2        | 1,01  | 6,12   | 2      | 0,82  | 7,46   | 2      | 0,88  | 7,13   | 2      | 0,76  | 7,88   |

Tabela 5 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado. (Continuação...).

| Ord | $\phi$ | $\delta$ | $\lambda$ | $g$ | $T_1$ | $a$ | $b$ | $M$ | $C_0$ | $C_1$ | Composta |       |        | 1-skip |       |        | 2-skip |       |        | 0-skip |       |        |
|-----|--------|----------|-----------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|-------|----------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|
|     |        |          |           |     |       |     |     |     |       |       | $n^*$    | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ |
| 13  | -1     | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 20       | 32,02 | 9,93   | 20     | 23,06 | 9,82   | 20     | 21,43 | 9,75   | 2      | 50,00 | 10,02  |
| 14  | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 2        | 0,20  | 61,56  | 2      | 0,30  | 76,12  | 2      | 0,40  | 78,73  | 2      | 0,20  | 72,63  |
| 15  | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 3        | 0,72  | 15,33  | 3      | 0,90  | 14,16  | 2      | 0,57  | 14,68  | 4      | 1,05  | 14,51  |
| 16  | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 2        | 1,89  | 4,65   | 2      | 1,62  | 5,31   | 2      | 1,71  | 5,13   | 2      | 1,54  | 5,54   |
| 17  | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 20       | 2,20  | 21,10  | 20     | 2,39  | 19,84  | 20     | 2,51  | 19,24  | 20     | 1,90  | 24,52  |
| 18  | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 2        | 1,04  | 7,44   | 2      | 1,08  | 8,39   | 2      | 1,07  | 8,25   | 2      | 1,10  | 8,54   |
| 19  | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 3        | 5,23  | 2,08   | 4      | 8,64  | 1,74   | 4      | 8,85  | 1,72   | 5      | 9,42  | 1,87   |
| 20  | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 2        | 1,01  | 5,99   | 2      | 0,82  | 7,25   | 8      | 3,16  | 6,65   | 2      | 0,76  | 7,74   |
| 21  | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 20       | 15,86 | 9,71   | 20     | 13,14 | 9,48   | 20     | 12,29 | 9,32   | 20     | 50,00 | 9,99   |
| 22  | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 2        | 0,12  | 59,53  | 2      | 0,11  | 68,35  | 2      | 0,11  | 67,02  | 2      | 0,11  | 69,83  |
| 23  | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 3        | 0,71  | 14,29  | 4      | 1,20  | 12,15  | 4      | 1,23  | 12,18  | 5      | 1,30  | 12,97  |
| 24  | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 2        | 2,15  | 5,85   | 2      | 1,86  | 6,41   | 8      | 6,82  | 6,13   | 2      | 1,77  | 6,62   |
| 25  | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 20       | 2,24  | 22,14  | 20     | 3,91  | 23,65  | 20     | 5,81  | 26,93  | 20     | 2,00  | 25,52  |
| 26  | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 2        | 1,10  | 7,62   | 2      | 1,15  | 8,53   | 2      | 1,13  | 8,40   | 2      | 1,17  | 8,67   |
| 27  | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 3        | 5,11  | 1,81   | 4      | 8,50  | 1,51   | 4      | 8,72  | 1,51   | 5      | 9,25  | 1,63   |
| 28  | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 2        | 1,01  | 6,38   | 2      | 0,81  | 7,70   | 2      | 0,87  | 7,38   | 2      | 0,75  | 8,11   |
| 29  | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 20       | 32,46 | 9,93   | 20     | 23,34 | 9,82   | 20     | 21,67 | 9,75   | 2      | 50,00 | 10,02  |
| 30  | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 2        | 0,20  | 61,86  | 2      | 0,30  | 76,23  | 2      | 0,40  | 78,82  | 2      | 0,20  | 72,79  |
| 31  | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 3        | 0,73  | 16,75  | 3      | 0,92  | 15,57  | 2      | 0,59  | 16,12  | 4      | 1,07  | 15,92  |
| 32  | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 2        | 1,94  | 4,76   | 2      | 1,67  | 5,41   | 2      | 1,76  | 5,23   | 2      | 1,58  | 5,63   |
| 33  | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 20       | 2,26  | 21,04  | 20     | 2,44  | 19,74  | 20     | 2,56  | 19,12  | 20     | 1,95  | 24,55  |
| 34  | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 2        | 1,56  | 8,38   | 2      | 1,84  | 9,22   | 2      | 1,77  | 9,10   | 2      | 1,94  | 9,34   |
| 35  | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 3        | 5,82  | 1,95   | 5      | 11,17 | 1,53   | 5      | 11,35 | 1,52   | 6      | 11,67 | 1,65   |
| 36  | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | -1    | 1     | 2        | 1,18  | 6,83   | 12     | 4,06  | 7,91   | 9      | 3,72  | 6,91   | 2      | 0,89  | 8,87   |
| 37  | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 20       | 37,53 | 9,96   | 20     | 22,84 | 9,84   | 20     | 19,48 | 9,74   | 2      | 50,00 | 10,04  |
| 38  | 1      | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 2        | 0,15  | 65,18  | 2      | 0,14  | 74,75  | 2      | 0,15  | 73,32  | 2      | 0,14  | 76,32  |
| 39  | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 3        | 0,81  | 15,66  | 4      | 1,32  | 12,96  | 4      | 1,36  | 12,97  | 6      | 1,64  | 13,68  |
| 40  | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 2        | 2,33  | 5,11   | 12     | 8,10  | 5,60   | 9      | 7,09  | 5,09   | 2      | 1,95  | 6,10   |
| 41  | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 20       | 2,30  | 22,57  | 20     | 3,91  | 23,92  | 20     | 5,81  | 27,13  | 20     | 2,00  | 26,02  |
| 42  | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 2        | 1,49  | 8,24   | 2      | 1,73  | 9,12   | 2      | 1,67  | 9,00   | 2      | 1,81  | 9,25   |
| 43  | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | 1     | 1     | 3        | 5,97  | 2,25   | 5      | 11,48 | 1,87   | 4      | 9,86  | 1,87   | 6      | 11,97 | 1,98   |
| 44  | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 2        | 1,20  | 6,74   | 2      | 0,97  | 8,29   | 3      | 1,39  | 7,86   | 2      | 0,90  | 8,80   |
| 45  | -1     | -1       | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 20       | 19,16 | 9,78   | 20     | 16,39 | 9,61   | 20     | 16,08 | 9,51   | 20     | 50,00 | 10,02  |
| 46  | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 2        | 0,20  | 67,34  | 2      | 0,30  | 79,94  | 2      | 0,40  | 81,65  | 2      | 0,20  | 78,24  |
| 47  | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 3        | 0,81  | 15,26  | 3      | 1,01  | 13,82  | 3      | 1,05  | 14,39  | 4      | 1,15  | 14,04  |
| 48  | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 2        | 2,65  | 6,24   | 2      | 2,35  | 6,87   | 7      | 6,89  | 6,51   | 2      | 2,25  | 7,10   |
| 49  | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 20       | 2,26  | 21,28  | 20     | 2,45  | 19,99  | 20     | 2,57  | 19,36  | 20     | 1,95  | 24,78  |
| 50  | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 2        | 1,54  | 8,37   | 2      | 1,83  | 9,21   | 2      | 1,76  | 9,10   | 2      | 1,92  | 9,34   |
| 51  | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 3        | 5,88  | 1,98   | 5      | 11,25 | 1,56   | 5      | 11,43 | 1,55   | 6      | 11,75 | 1,69   |
| 52  | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 2        | 1,20  | 7,18   | 12     | 4,08  | 8,23   | 9      | 3,74  | 7,23   | 2      | 0,90  | 9,23   |
| 53  | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | 1     | 20       | 38,21 | 9,96   | 20     | 23,24 | 9,84   | 20     | 19,82 | 9,74   | 2      | 50,00 | 10,04  |
| 54  | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 2        | 0,15  | 65,94  | 2      | 0,15  | 75,32  | 2      | 0,15  | 73,92  | 2      | 0,15  | 76,87  |
| 55  | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | 1     | 3        | 0,82  | 16,97  | 4      | 1,34  | 14,33  | 4      | 1,37  | 14,34  | 6      | 1,67  | 15,05  |
| 56  | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 2        | 2,35  | 5,17   | 12     | 8,21  | 5,67   | 9      | 7,18  | 5,17   | 2      | 1,96  | 6,15   |
| 57  | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 20       | 2,31  | 22,84  | 20     | 3,91  | 24,15  | 20     | 5,81  | 27,33  | 20     | 2,00  | 26,28  |
| 58  | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 2        | 1,51  | 8,26   | 2      | 1,76  | 9,14   | 2      | 1,70  | 9,02   | 2      | 1,84  | 9,26   |
| 59  | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 3        | 5,95  | 2,27   | 4      | 9,60  | 1,90   | 4      | 9,85  | 1,89   | 6      | 11,96 | 2,00   |
| 60  | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 2        | 1,19  | 7,00   | 2      | 0,97  | 8,54   | 3      | 1,39  | 8,13   | 2      | 0,90  | 9,04   |
| 61  | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 20       | 19,41 | 9,78   | 20     | 16,59 | 9,61   | 20     | 16,26 | 9,51   | 20     | 50,00 | 10,02  |
| 62  | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | 1     | 2        | 0,20  | 67,63  | 2      | 0,30  | 80,06  | 2      | 0,40  | 81,74  | 2      | 0,20  | 78,40  |
| 63  | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 3        | 0,83  | 16,67  | 3      | 1,04  | 15,24  | 3      | 1,07  | 15,78  | 4      | 1,18  | 15,45  |
| 64  | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | 1     | 2        | 2,72  | 6,31   | 2      | 2,41  | 6,94   | 7      | 7,02  | 6,57   | 2      | 2,31  | 7,16   |
| 65  | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 2        | 49,99 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,24  |
| 66  | 1      | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 2        | 0,84  | 67,95  | 2      | 0,83  | 77,79  | 2      | 0,83  | 76,30  | 2      | 0,83  | 79,40  |
| 67  | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 3        | 4,64  | 14,47  | 4      | 7,84  | 11,47  | 4      | 8,03  | 11,26  | 5      | 8,65  | 12,86  |
| 68  | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 2        | 11,63 | 4,39   | 2      | 10,14 | 5,22   | 2      | 10,56 | 4,95   | 2      | 9,71  | 5,54   |
| 69  | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 20       | 10,74 | 93,63  | 20     | 9,65  | 90,48  | 20     | 9,32  | 88,51  | 20     | 19,21 | 98,66  |
| 70  | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 2        | 49,99 | 10,38  | 2      | 50,00 | 10,39  | 2      | 50,00 | 10,39  | 2      | 50,00 | 10,39  |
| 71  | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 3        | 14,18 | 8,33   | 4      | 18,22 | 7,37   | 4      | 18,31 | 7,28   | 4      | 18,08 | 7,92   |
| 72  | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 2        | 1,52  | 33,66  | 2      | 1,29  | 40,15  | 2      | 1,36  | 38,08  | 2      | 1,22  | 42,66  |
| 73  | -1     | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 2        | 50,00 | 10,20  | 2      | 50,00 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,20  | 2      | 50,00 | 10,23  |

Tabela 5 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado (Continuação...).

| Ord | $\phi$ | $\delta$ | $\lambda$ | $g$ | $T_1$ | $a$ | $b$ | $M$ | $C_0$ | $C_1$ | Composta |       |        | 1-skip |       |        | 2-skip |       |        | 0-skip |       |        |
|-----|--------|----------|-----------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|-------|----------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|
|     |        |          |           |     |       |     |     |     |       |       | $n^*$    | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ | $n^*$  | $h^*$ | $E(L)$ |
| 74  | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 2        | 0,84  | 68,13  | 2      | 0,83  | 77,95  | 2      | 0,83  | 76,50  | 2      | 0,84  | 79,54  |
| 75  | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 3        | 4,65  | 14,41  | 4      | 7,88  | 11,70  | 4      | 8,09  | 11,72  | 5      | 8,67  | 12,95  |
| 76  | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 2        | 11,92 | 4,63   | 2      | 10,41 | 5,44   | 2      | 10,85 | 5,18   | 2      | 9,97  | 5,75   |
| 77  | -1     | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 20       | 11,96 | 94,47  | 20     | 11,42 | 92,18  | 20     | 11,68 | 91,09  | 20     | 22,14 | 98,93  |
| 78  | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 2        | 50,00 | 10,37  | 2      | 50,00 | 10,38  | 2      | 50,00 | 10,38  | 2      | 50,00 | 10,39  |
| 79  | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 3        | 17,87 | 8,98   | 4      | 21,98 | 8,25   | 3      | 17,16 | 8,19   | 4      | 22,14 | 8,67   |
| 80  | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 2        | 1,52  | 32,95  | 2      | 1,29  | 39,69  | 2      | 1,37  | 37,88  | 2      | 1,21  | 41,95  |
| 81  | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 2        | 49,99 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,24  |
| 82  | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 2        | 0,84  | 68,02  | 2      | 0,83  | 77,83  | 2      | 0,83  | 76,35  | 2      | 0,83  | 79,44  |
| 83  | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 3        | 4,66  | 14,76  | 4      | 7,87  | 11,77  | 4      | 8,06  | 11,56  | 5      | 8,68  | 13,16  |
| 84  | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 2        | 11,69 | 4,41   | 2      | 10,19 | 5,24   | 2      | 10,61 | 4,97   | 2      | 9,76  | 5,56   |
| 85  | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 20       | 10,92 | 93,74  | 20     | 9,81  | 90,63  | 20     | 9,47  | 88,70  | 20     | 19,52 | 98,68  |
| 86  | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 2        | 49,99 | 10,38  | 2      | 50,00 | 10,39  | 2      | 50,00 | 10,39  | 2      | 50,00 | 10,39  |
| 87  | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 3        | 14,39 | 8,36   | 4      | 18,48 | 7,41   | 4      | 18,58 | 7,33   | 4      | 18,35 | 7,96   |
| 88  | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 2        | 1,54  | 34,71  | 2      | 1,31  | 41,09  | 2      | 1,38  | 39,05  | 2      | 1,24  | 43,55  |
| 89  | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 2        | 50,00 | 10,20  | 2      | 50,00 | 10,21  | 2      | 50,00 | 10,20  | 2      | 50,00 | 10,23  |
| 90  | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 2        | 0,85  | 68,28  | 2      | 0,84  | 78,06  | 2      | 0,84  | 76,61  | 2      | 0,84  | 79,64  |
| 91  | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 3        | 4,66  | 14,68  | 4      | 7,90  | 11,99  | 4      | 8,11  | 12,00  | 5      | 8,70  | 13,23  |
| 92  | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 2        | 11,94 | 4,64   | 2      | 10,43 | 5,45   | 2      | 10,86 | 5,20   | 2      | 9,99  | 5,76   |
| 93  | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 20       | 12,14 | 94,55  | 20     | 11,57 | 92,29  | 20     | 11,83 | 91,21  | 20     | 22,46 | 98,95  |
| 94  | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 2        | 50,00 | 10,37  | 2      | 50,00 | 10,38  | 2      | 50,00 | 10,38  | 2      | 50,00 | 10,39  |
| 95  | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 3        | 18,17 | 9,00   | 4      | 22,32 | 8,28   | 3      | 17,44 | 8,22   | 4      | 22,50 | 8,70   |
| 96  | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 2        | 1,55  | 34,06  | 2      | 1,31  | 40,68  | 2      | 1,39  | 38,89  | 2      | 1,24  | 42,92  |
| 97  | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | 1     | -1    | 2        | 49,99 | 10,22  | 2      | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,22  | 2      | 50,00 | 10,25  |
| 98  | 1      | -1       | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 2        | 0,88  | 69,28  | 2      | 0,88  | 79,10  | 2      | 0,87  | 77,63  | 2      | 0,88  | 80,70  |
| 99  | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 3        | 4,71  | 14,40  | 4      | 7,93  | 11,31  | 4      | 8,12  | 11,10  | 5      | 8,72  | 12,70  |
| 100 | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 2        | 12,25 | 4,70   | 2      | 10,73 | 5,52   | 2      | 11,16 | 5,26   | 2      | 10,30 | 5,84   |
| 101 | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | 1     | 20       | 11,17 | 94,10  | 20     | 9,96  | 91,04  | 20     | 9,59  | 89,12  | 20     | 20,92 | 98,88  |
| 102 | 1      | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 2        | 49,99 | 10,39  | 2      | 50,00 | 10,40  | 2      | 50,00 | 10,40  | 2      | 50,00 | 10,41  |
| 103 | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 3        | 18,39 | 9,02   | 4      | 21,88 | 8,24   | 4      | 21,91 | 8,17   | 4      | 22,37 | 8,70   |
| 104 | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 2        | 1,55  | 33,08  | 2      | 1,32  | 39,75  | 2      | 1,39  | 37,62  | 2      | 1,24  | 42,32  |
| 105 | -1     | -1       | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 2        | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,26  |
| 106 | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 2        | 0,88  | 69,13  | 2      | 0,87  | 78,99  | 2      | 0,87  | 77,53  | 2      | 0,88  | 80,58  |
| 107 | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 3        | 4,74  | 14,90  | 4      | 8,00  | 12,11  | 4      | 8,21  | 12,12  | 5      | 8,78  | 13,34  |
| 108 | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 2        | 12,04 | 4,49   | 2      | 10,53 | 5,33   | 2      | 10,97 | 5,06   | 2      | 10,09 | 5,65   |
| 109 | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 20       | 11,72 | 94,21  | 20     | 11,23 | 91,88  | 20     | 11,51 | 90,78  | 20     | 21,19 | 98,82  |
| 110 | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 2        | 50,00 | 10,40  | 2      | 50,00 | 10,41  | 2      | 50,00 | 10,41  | 2      | 50,00 | 10,41  |
| 111 | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 3        | 14,84 | 8,42   | 4      | 19,06 | 7,50   | 4      | 19,37 | 7,45   | 4      | 18,77 | 8,01   |
| 112 | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | 1     | 2        | 1,58  | 34,82  | 2      | 1,34  | 41,60  | 2      | 1,42  | 39,76  | 2      | 1,27  | 43,90  |
| 113 | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 2        | 49,99 | 10,22  | 2      | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,22  | 2      | 50,00 | 10,25  |
| 114 | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | -1    | 1     | 2        | 0,88  | 69,34  | 2      | 0,88  | 79,14  | 2      | 0,87  | 77,67  | 2      | 0,88  | 80,74  |
| 115 | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 3        | 4,73  | 14,70  | 4      | 7,96  | 11,61  | 4      | 8,15  | 11,40  | 5      | 8,76  | 12,99  |
| 116 | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 2        | 12,31 | 4,72   | 2      | 10,78 | 5,54   | 2      | 11,21 | 5,27   | 2      | 10,35 | 5,86   |
| 117 | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 20       | 11,35 | 94,20  | 20     | 10,12 | 91,18  | 20     | 9,74  | 89,29  | 20     | 21,26 | 98,90  |
| 118 | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | -1    | 2        | 49,99 | 10,39  | 2      | 50,00 | 10,40  | 2      | 50,00 | 10,40  | 2      | 50,00 | 10,41  |
| 119 | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 3        | 18,66 | 9,04   | 4      | 22,20 | 8,27   | 4      | 22,23 | 8,20   | 4      | 22,71 | 8,72   |
| 120 | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 2        | 1,57  | 34,14  | 2      | 1,34  | 40,69  | 2      | 1,41  | 38,60  | 2      | 1,26  | 43,23  |
| 121 | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 2        | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,23  | 2      | 50,00 | 10,26  |
| 122 | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 2        | 0,88  | 69,26  | 2      | 0,88  | 79,08  | 2      | 0,87  | 77,63  | 2      | 0,88  | 80,67  |
| 123 | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 3        | 4,75  | 15,17  | 4      | 8,02  | 12,39  | 4      | 8,23  | 12,40  | 5      | 8,80  | 13,62  |
| 124 | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 2        | 12,07 | 4,50   | 2      | 10,55 | 5,34   | 2      | 10,99 | 5,07   | 2      | 10,11 | 5,66   |
| 125 | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 20       | 11,90 | 94,29  | 20     | 11,38 | 91,99  | 20     | 11,65 | 90,89  | 20     | 21,50 | 98,83  |
| 126 | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 2        | 50,00 | 10,40  | 2      | 50,00 | 10,41  | 2      | 50,00 | 10,41  | 2      | 50,00 | 10,41  |
| 127 | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | -1    | 3        | 15,09 | 8,45   | 4      | 19,36 | 7,54   | 4      | 19,66 | 7,49   | 4      | 19,07 | 8,05   |
| 128 | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 2        | 1,61  | 35,90  | 2      | 1,37  | 42,57  | 2      | 1,45  | 40,75  | 2      | 1,29  | 44,83  |

Definindo a diferença percentual de custo  $\Delta_S$  ( $S = \{comp, 1sk, 2sk\}$ ), versus a estratégia *0sk*, como:

$$\Delta_S = 100 \cdot \frac{E(L)_S - E(L)_{0sk}}{E(L)_{0sk}}, \quad (59)$$

pode-se calcular a economia de custos alcançável por meio do uso de uma estratégia de amostragem  $S = \{comp, 1sk, 2sk\}$  em comparação com a estratégia de amostragem baseada em subgrupos racionais *0sk*, em que um valor negativo de  $\Delta_S$  corresponde ao ganho econômico da estratégia investigada em comparação com a estratégia baseada em subgrupos racionais.

Deste modo, é possível observar que a estratégia de amostragem composta é a estratégia mais econômica para 74 casos dos 128 cenários com uma economia média de 6,19% em comparação com a estratégia *0-skip*. E a estratégia de amostragem *2-skip* é a segunda melhor estratégia: sendo a estratégia mais econômica em 42 casos com uma economia média de 6,15% em comparação com a estratégia *0-skip*.

Já a estratégia de amostragem *1-skip* supera as outras estratégias em 12 casos com uma economia média de 4,79% em comparação com a estratégia *0-skip*. E a estratégia de amostragem *0-skip*, baseada em subgrupos racionais, nunca supera as estratégias *1-skip*, *2-skip* e composta na presença de qualquer nível de autocorrelação.

A Tabela 6 apresenta o custo horário médio, mínimo e máximo esperado de  $E(L)$  e o ganho econômico  $\Delta_S$  estratificados por  $\delta$  e  $\phi$ .

Para todas as estratégias de amostragem investigadas há um o aumento do custo horário esperado de monitoramento com o aumento do nível de autocorrelação  $\phi$ , seja qual for o valor de  $\delta$ .

Para  $\{\phi, \delta\} = \{0,2; 0,5\}$  a média de custo horário esperado de monitoramento quando adotado amostras compostas é 33,98 \$/hora e 37,61 \$/hora para  $\{\phi, \delta\} = \{0,8; 0,5\}$ : isto é, em média o percentual de aumento do custo é de 10,7% devido ao elevado grau de autocorrelação. Para a estratégia *2-skip* a média de custo é de 33,21 \$/hora para  $\{\phi, \delta\} = \{0,2; 0,5\}$  e 42,82 \$/hora para  $\{\phi, \delta\} = \{0,8; 0,5\}$ : neste caso, o aumento médio de custo percentual devido ao elevado grau de autocorrelação é de 28,9%.

Tabela 6 – Médias, mínimos e máximos de  $E(L)$  e  $\Delta_S$  estratificados por  $\phi$  e  $\delta$ 

|                 | Média        |              | Min.         |              | Max.         |              |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                 | $\phi = 0.2$ | $\phi = 0.8$ | $\phi = 0.2$ | $\phi = 0.8$ | $\phi = 0.2$ | $\phi = 0.8$ |
| $\delta = 0.5$  |              |              |              |              |              |              |
| $E(L)_{comp}$   | 33.98        | 37.61        | 9.70         | 7.44         | 94.55        | 69.34        |
| $E(L)_{1sk}$    | 33.29        | 43.12        | 9.47         | 8.39         | 92.29        | 80.06        |
| $E(L)_{2sk}$    | 33.21        | 42.82        | 9.31         | 8.25         | 91.21        | 81.74        |
| $E(L)_{std}$    | 36.06        | 43.43        | 9.99         | 8.54         | 98.95        | 80.74        |
| $\Delta_{comp}$ | -5.12        | -10.13       | -14.31       | -15.24       | -0.28        | -0.11        |
| $\Delta_{1sk}$  | -6.13        | -0.71        | -19.58       | -2.19        | -0.22        | 4.80         |
| $\Delta_{2sk}$  | -5.53        | -1.41        | -22.14       | -4.17        | 5.81         | 8.40         |
| $\delta = 2.0$  |              |              |              |              |              |              |
| $E(L)_{comp}$   | 10.22        | 12.67        | 1.79         | 4.39         | 16.97        | 35.90        |
| $E(L)_{1sk}$    | 8.74         | 15.00        | 1.49         | 5.22         | 15.57        | 42.57        |
| $E(L)_{2sk}$    | 8.76         | 14.22        | 1.49         | 4.95         | 16.13        | 40.75        |
| $E(L)_{std}$    | 9.35         | 15.90        | 1.60         | 5.54         | 15.92        | 44.83        |
| $\Delta_{comp}$ | 9.86         | -19.36       | 3.46         | -23.67       | 17.80        | -11.60       |
| $\Delta_{1sk}$  | -6.62        | -5.69        | -10.93       | -10.89       | -1.37        | -3.08        |
| $\Delta_{2sk}$  | -6.67        | -11.01       | -12.59       | -22.09       | 2.51         | -7.20        |

Portanto a seleção da melhor estratégia de amostragem depende do coeficiente de autocorrelação  $\phi$ , pois quando  $\{\phi, \delta\} = \{0,2; 0,5\}$  a estratégia *1-skip* tem em média o melhor desempenho, ( $\Delta_{1sk} = -6,13\%$ ). Para  $\{\phi, \delta\} = \{0,2; 2,0\}$  as estratégias *1-skip* e *2-skip* são quase equivalentes:  $\Delta_{1sk} = -6,62\%$  e  $\Delta_{2sk} = -6,67\%$ , e a estratégia composta tem o pior desempenho, ( $\Delta_{comp} = -5,12\%$ ). Por outro lado, quando o coeficiente de autocorrelação é alto a estratégia composta é preferida dentre as outras, pois, de fato, quando  $\{\phi, \delta\} = \{0,8; 0,5\}$ :  $\Delta_{comp} = -10,13\%$ ,  $\Delta_{1sk} = -0,71\%$  e  $\Delta_{2sk} = -1,41\%$ , e para  $\{\phi, \delta\} = \{0,8; 2,0\}$ :  $\Delta_{comp} = -19,36\%$ ,  $\Delta_{1sk} = -5,69\%$  e  $\Delta_{2sk} = -11,01\%$ .

Estes resultados indicam uma interação entre  $\phi$  e  $\delta$ , e contabilizar a presença de interação entre os fatores é essencial em um estudo no qual vários parâmetros são considerados, e a melhor abordagem para testar se os fatores de custo e processo e/ou suas interações são significativas na diferença de desempenho entre as estratégias de amostragem, consiste em construir uma tabela de análise de variâncias (*ANOVA*) do plano experimental para cada variável resposta de interesse.

Vale ressaltar que correu uma única replicação para cada cenário investigado porque o modelo de custo é determinista e a estrutura de confundimento do projeto de experimentos de resolução *V* confunde os principais efeitos com a quarta ordem de interação, e também confunde as interações de segunda ordem com de terceira da ordem.

Com a implementação da *ANOVA* é possível determinar os fatores significativos bem como suas interações que explicam uma parte significativa da variabilidade associada a cada

diferença percentual de custo  $\Delta_S$  e ainda ajustar a um modelo de regressão de variáveis codificadas (MONTGOMERY *et al.*, 2001), que é muito útil para prever dentro de uma região de interesse, a diferença no desempenho econômico entre as estratégias *1-skip*, *2-skip* e composta quando comparadas com a estratégia *0-skip*.

Estas variáveis codificadas são muito úteis para determinar o tamanho relativo dos efeitos do fator na variável resposta através do seu coeficiente de regressão associado, em que, por exemplo, a variável codificada  $X_\phi \in [-1; 1]$  para o fator  $\phi$  pode ser calculada como:

$$X_\phi = \frac{\phi - \frac{\phi_L + \phi_H}{2}}{\frac{\phi_L - \phi_H}{2}}, \quad (60)$$

em que  $(\phi_L; \phi_H) = (0,2; 0,8)$ .

As Tabelas 7, 8 e 9 mostram para cada  $\Delta_S$  os fatores significativos e as interações de segunda ordem, bem como os coeficientes  $R^2$ ,  $R_{adj}^2$  e a equação do modelo de regressão, sendo que a verificação da adequação do modelo ao problema não apresentou qualquer anomalia nos resíduos. Assim estes resultados permitem concluir que para os cenários investigados, o modelo de regressão ajusta-se melhor as estratégias *1-skip* e composta do que para a estratégia *2-skip*. De fato,  $R^2 = 0,89$  (0,97) e  $R_{adj}^2 = 0,87$  (0,97) para estratégias *1-skip* (composta), e para estratégia *2-skip* o resultado é  $R^2 = 0,76$  e  $R_{adj}^2 = 0,73$ .

Tabela 7 – Modelo de regressão para  $\Delta_{2sk}$

|                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Principais efeitos | Interações de segunda ordem |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| Fatores significantes                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $\delta$           | $(\phi \times \delta)$      |
|                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $\lambda$          | $(\lambda \times g)$        |
|                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $g$                | $(\lambda \times M)$        |
|                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $M$                | $(g \times b)$              |
|                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                    | $(g \times M)$              |
|                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                    | $(b \times M)$              |
| $R^2 = 0,76$                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |
| $R^2_{adj} = 0,73$                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |
| Modelo*                                                                                                       | $\hat{\Delta}_{2sk} = -6,15 - 0,054 \cdot x_\phi - 2,68 \cdot x_\delta + 1,06 \cdot x_\lambda + 2,10 \cdot x_g - 0,20 \cdot x_b - 0,95 \cdot x_M$<br>$- 2,11 \cdot x_\phi x_\delta - 1,13 \cdot x_\lambda x_b + 1,08 \cdot x_\lambda x_M - 1,64 \cdot x_g x_b + 1,60 \cdot x_g x_M - 1,12 \cdot x_b x_M$ |                    |                             |
| * O fatores não significativos $\phi$ e $b$ foram adicionados ao modelo respeitando o princípio da hierarquia |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |

A magnitude do deslocamento da média  $\delta$ , a taxa de falha  $\lambda$  e o custo horário da penalidade associada à produção no estado fora de controle  $M$  são fatores significativos seja qual for a estratégia de amostragem selecionada, e o coeficiente de autocorrelação  $\phi$  influencia significativamente  $\Delta_{1sk}$  e  $\Delta_{comp}$ , mas não  $\Delta_{2sk}$ , que pode ser explicado pelo fato da estratégia de amostragem *2-skip* mitigar fortemente o efeito da autocorrelação ( $\phi \rightarrow \phi^3$ ).

Tabela 8 – Modelo de regressão para  $\Delta_{1sk}$ 

| Principais efeitos    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Interações de segunda ordem |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Fatores significantes | $\phi$                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $(\phi \times \delta)$      |
|                       | $\delta$                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $(\phi \times M)$           |
|                       | $\lambda$                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $(\delta \times b)$         |
|                       | $g$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $(\delta \times M)$         |
|                       | $b$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $(\lambda \times b)$        |
|                       | $M$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $(\lambda \times M)$        |
|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $(g \times b)$              |
|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $(g \times M)$              |
| $R^2 = 0,89$          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                             |
| $R^2_{adj} = 0,87$    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                             |
| Modelo                | $\hat{\Delta}_{1sk} = -4,79 + 1,59. x_{\phi} - 1,36. x_{\delta} + 1,04. x_{\lambda} + 1,00. x_g + 0,20. x_b$<br>$-1,31. x_M - 1,12. x_{\phi} x_{\delta} + 1,03. x_{\phi} x_M - 0,80. x_{\delta} x_b + 0,83. x_{\delta} x_M$<br>$-1,17. x_{\lambda} x_b + 1,01. x_{\lambda} x_M - 0,76. x_g x_b + 0,74. x_g x_M$ |                             |

O custo variável de extração de uma observação  $b$  é um fator significativo para  $\Delta_{1sk}$  e  $\Delta_{comp}$ , pois estas duas estratégias permitem uma maior retirada de amostras do a estratégia *2-skip*, tornando assim o valor esperado do custo horário de monitoramento sensível a  $b$ .

Outro fato relevante é o tempo  $g$  de extração e interpretação dos resultados de uma observação ser um fator significativo positivamente para  $\Delta_{1sk}$  e  $\Delta_{2sk}$ , isto é, um aumento de  $g$  reduz o desempenho econômico das estratégias *1-skip* e *2-skip*, com maior efeito em  $\Delta_{2sk}$  (2,10) do que  $\Delta_{1sk}$  (1,00), pois devido ao fato da necessidade de produzir uma maior quantidade de itens  $n_{prod}$  (seção 3.2.1) para que seja possível a extração de uma amostra de tamanho  $n$ .

Tabela 9 – Modelo de regressão para  $\Delta_{comp}$ 

|                       |                                                                                                                                                                                                                                                          | Principais efeitos | Interações de segunda ordem |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| Fatores significantes |                                                                                                                                                                                                                                                          | $\phi$             | $(\phi \times \delta)$      |
|                       |                                                                                                                                                                                                                                                          | $\delta$           | $(\phi \times \lambda)$     |
|                       |                                                                                                                                                                                                                                                          | $\lambda$          | $(\delta \times \lambda)$   |
|                       |                                                                                                                                                                                                                                                          | $b$                | $(\delta \times b)$         |
|                       |                                                                                                                                                                                                                                                          | $M$                | $(\delta \times M)$         |
| <hr/>                 |                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |
| $R^2 = 0,97$          |                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |
| $R^2_{adj} = 0,97$    |                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |
| <hr/>                 |                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |
| Modelo                | $\hat{\Delta}_{mix} = -6,19 - 8,56. x_{\phi} + 1,44. x_{\delta} + 0,94. x_{\lambda} + 0,70. x_b - 2,46. x_M -$<br>$-6,05. x_{\phi} x_{\delta} + 1,45. x_{\phi} x_{\lambda} - 1,39. x_{\delta} x_{\lambda} - 2,08. x_{\delta} x_b + 1,74. x_{\delta} x_M$ |                    |                             |
| <hr/>                 |                                                                                                                                                                                                                                                          |                    |                             |

Ainda se analisar os coeficientes de regressão para  $X_\phi$  e  $X_M$  dos modelos de regressão  $\hat{\Delta}_{1sk}$ ,  $\hat{\Delta}_{2sk}$  e  $\hat{\Delta}_{comp}$ , pode-se observar que para a estratégia de amostragem composta o ganho econômico em relação a estratégia *0-skip* (um valor negativo de  $\Delta_{comp}$ ) é maior em comparação com as estratégias *1-skip* e *2-skip*, pois se aumentar o grau de autocorrelação aumenta o ganho econômico devido ao peso de  $-8,56$  para o modelo de regressão  $\hat{\Delta}_{comp}$ , contra  $+1,59$  e  $-0,054$  para  $\hat{\Delta}_{1sk}$ ,  $\hat{\Delta}_{2sk}$  respectivamente. O que também pode ser observado para um aumento do custo

horário da penalidade associada à produção no estado fora de controle  $M$ , pois um aumento de  $M$  aumenta o ganho econômico devido ao peso de  $-2,46$  para o modelo de regressão  $\hat{\Delta}_{comp}$ , contra  $-1,31$  e  $-0,95$  para  $\hat{\Delta}_{1sk}$ ,  $\hat{\Delta}_{2sk}$  respectivamente.

Diversas interações de segunda ordem estão presentes nos modelos de regressão para  $\hat{\Delta}_{1sk}$ ,  $\hat{\Delta}_{2sk}$  e  $\hat{\Delta}_{comp}$ , e é importante ressaltar que a interação  $(\phi \times \delta)$  possui os maiores valores de coeficiente de regressão. Esta interação é negativa para os três modelos de regressão e tem maior influência para a estratégia com amostras composta. Por outro lado, quando  $\delta$  é grande, a estratégia com amostras composta tem desempenho superior em relação a estratégia *0-skip* apenas para elevados níveis de autocorrelação  $\phi$ .

Os parâmetros de processo e custo influenciam a estratégia com amostras composta, de maneira a obter uma vantagem econômica, com a redução do custo horário esperado de monitoramento em comparação com a estratégia *0-skip* (um valor negativo de  $\Delta_{comp}$ ), que mostra mais uma vez a robustez desta estratégia, em termos de ganho econômico mesmo na presença de uma variação desses parâmetros.

### 3.2.3 Erro de especificação dos parâmetros de processo e custo

A imprecisão na estimativa dos parâmetros de custo e processo pode resultar em um planejamento de gráfico de controle de qualidade inferior, e uma investigação sobre os efeitos desta má especificação dos parâmetros significativos pode ser desenvolvida de acordo com a abordagem apresentada por Nenes e Tagaras (2006).

Então uma análise de sensibilidade é desenvolvida para investigar o efeito o erro de especificação dos parâmetros  $\phi$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $b$  e  $M$ , da seguinte maneira:

- Passo 1: Assumir um erro de superestimação/subestimação igual a  $\pm 15\%$ ;
- Passo 2: Escolher um parâmetro de processo ou custo e aplicar a superestimação/subestimação;
- Passo 3: Realizar o procedimento de otimização em todos os 128 cenários obtendo o custo esperado de monitoramento  $E(L)$  para o conjunto “ótimo” das variáveis de  $\Omega_{esp}^* = \{n_{esp}^*, h_{esp}^*\}$  para cada estratégia de amostragem;
- Passo 4: Comparar percentualmente os resultados de custo obtidos com a superestimação/subestimação do parâmetro escolhido com os resultados de custo já obtidos sem qualquer erro de especificação (Tabela 5), calculando a penalidade média e máxima do custo horário esperado de monitoramento.

- Passo 5: Voltar ao passo 2 caso ainda tenha parâmetros de custo e processo que não foram investigados quanto a uma superestimação ou subestimação.

A Tabela 10 apresenta os valores da média e máxima porcentagem de penalidade em custo para cada erro de especificação dos parâmetros de processo e custo.

Tabela 10 – Efeitos do erro de especificação (Subestimação (U): -15% / Superestimação (O): +15%) dos parâmetros significantes de processo e custo.

|               | composta                           |                                     | 1-skip                             |                                     | 2-skip                             |                                     | 0-skip                             |                                     |
|---------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
|               | Penal.<br>média do<br>custo<br>(%) | Penal.<br>máxima<br>do custo<br>(%) | Penal.<br>média do<br>custo<br>(%) | Penal.<br>máxima<br>do custo<br>(%) | Penal.<br>média do<br>custo<br>(%) | Penal.<br>máxima<br>do custo<br>(%) | Penal.<br>média do<br>custo<br>(%) | Penal.<br>máxima<br>do custo<br>(%) |
| $\phi$ (U)    | -0,18                              | 0,00                                | -3,28                              | -0,02                               | -4,82                              | -0,01                               | -2,12                              | -0,01                               |
| (O)           | 0,21                               | 1,49                                | 2,82                               | 14,51                               | 3,85                               | 27,66                               | 2,00                               | 5,06                                |
| $\delta$ (U)  | 10,62                              | 23,43                               | 11,88                              | 32,68                               | 11,48                              | 33,29                               | 11,29                              | 27,88                               |
| (O)           | -7,87                              | -0,09                               | -9,58                              | -0,05                               | -9,83                              | -0,05                               | -9,25                              | -0,04                               |
| $\lambda$ (U) | -5,98                              | -0,07                               | -6,03                              | -0,05                               | -6,17                              | -0,05                               | -5,57                              | -0,05                               |
| (O)           | 5,36                               | 9,44                                | 5,40                               | 10,03                               | 5,53                               | 9,80                                | 4,96                               | 9,79                                |
| $g$ (U)       | -0,19                              | 0,00                                | -0,46                              | 0,01                                | -0,64                              | 0,00                                | -0,21                              | 0,00                                |
| (O)           | 0,20                               | 2,83                                | 0,46                               | 6,07                                | 0,60                               | 7,73                                | 0,23                               | 2,19                                |
| $b$ (U)       | -3,83                              | -0,58                               | -3,74                              | -0,58                               | -3,72                              | -0,58                               | -3,62                              | -0,15                               |
| (O)           | 3,46                               | 6,47                                | 3,36                               | 6,45                                | 3,34                               | 6,42                                | 3,25                               | 6,53                                |
| $M$ (U)       | -10,03                             | -6,19                               | -10,23                             | -5,66                               | -10,26                             | -5,64                               | -10,42                             | -5,88                               |
| (O)           | 9,46                               | 14,40                               | 9,68                               | 14,40                               | 9,72                               | 14,40                               | 9,87                               | 14,68                               |

Os resultados apresentados na Tabela 10 mostram que a estratégia com amostras compostas é mais robusta que as outras estratégias pois sofre menor penalidade média do custo quando há um erro de especificação do coeficiente de autocorrelação  $\phi$ , com uma penalidade média do custo igual a -0,18% (0,21%) para uma subestimação (superestimação) deste parâmetro. Que pode também ser observado para  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $g$  e  $M$ , com uma atenção especial a estimativa de  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $M$ , porque os erros na estimativa destes parâmetros de processo e custo levam a uma penalidade média significativa no custo.

E uma possível solução para transpor os problemas associados ao erro de especificação deste parâmetros seria realizar o planejamento econômico com  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $M$  aleatórios, como realizado para  $\delta$  em Celano (2009) e Celano *et al.* (2011).

#### 4 GRÁFICO DE $\bar{X}$ COM A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM ESSI PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS EM QUE A MÉDIA OSCILA

A oscilação da média em processos autocorrelacionados em que a média oscila é descrita por um modelo autorregressivo de primeira ordem com um erro aleatório adicional, como apresentado na seção 2.3.2. Devido ao fato da autocorrelação estar associada à média do processo e não as suas observações, as estratégias de amostragem *s-skip* e composta (*mixed*) apresentadas nas seções 2.3.1 e 3, respectivamente, não são aplicáveis.

Então, com o objetivo de melhorar o desempenho dos gráficos de  $\bar{X}$  no monitoramento de processos autocorrelacionados em que a média oscila, esta Tese sugere uma nova estratégia de amostragem, denominada ESSI (do inglês *Equally Spaced Samples Items*), a qual não se utiliza o conceito de subgrupo racional, em que, ao invés de selecionar itens do processo para compor a amostra em um curto espaço de tempo - Figura 12, a estratégia proposta seleciona itens do processo para compor a amostra em tempos igualmente espaçados, segundo o instante em que são produzidos, ou seja, a retirada de um item a cada intervalo  $h/n$ , compondo uma amostra de tamanho  $n$  em um intervalo  $h$ , como ilustrado na Figura 13.

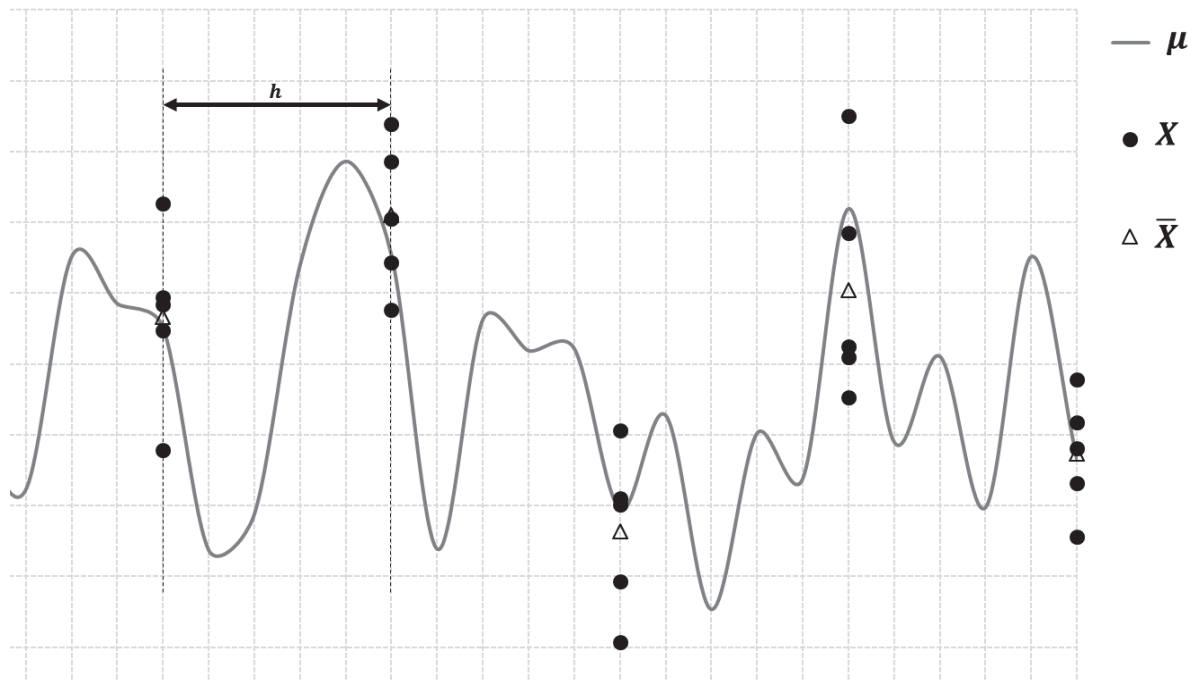


Figura 12 – Estratégia de amostragem baseada em subgrupos racionais

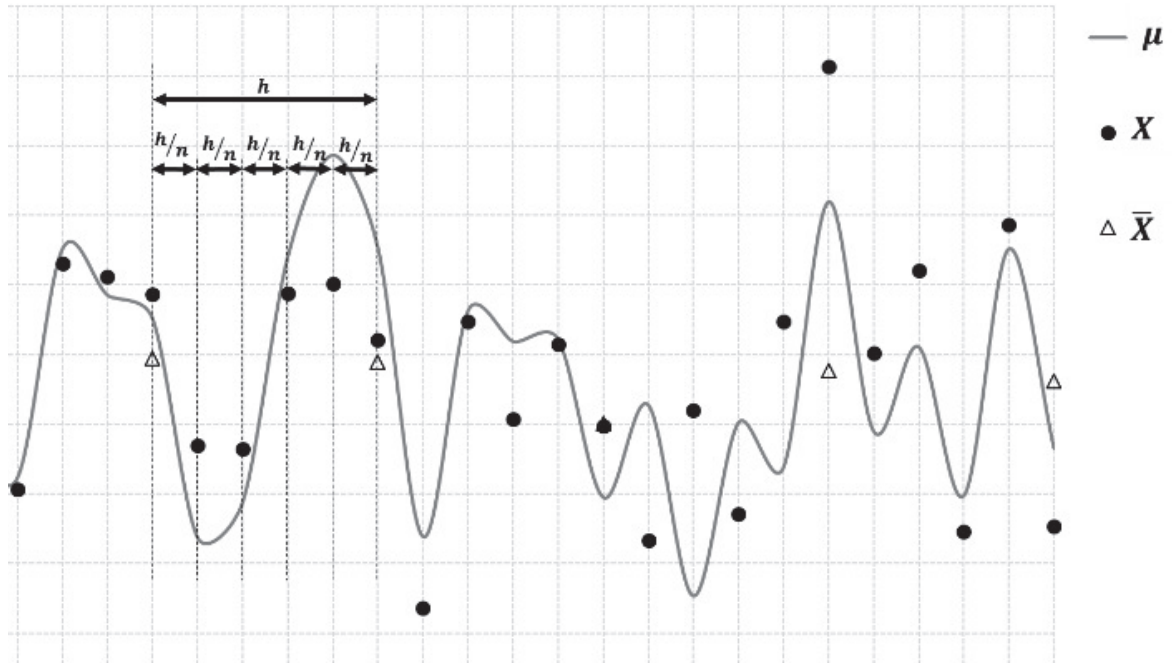


Figura 13 – Estratégia de amostragem proposta (ESSI)

As observações de  $X$  dos  $n$  itens retirados da linha de produção em intervalos de tempo igualmente espaçados de tamanho  $h/n$ , são descritos pelo modelo:

$$X_{i,j} = \mu_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots\} \text{ e } j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (61)$$

em que  $\varepsilon_{i,j} \sim N(0, \sigma_0^2)$  é o erro aleatório e  $\mu_{i,j}$  é a média do processo no instante  $i$  e descrita pelo seguinte modelo:

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} \mu_{i,1} = \left(1 - \phi^{\frac{h}{n}}\right) \cdot \mu_0 + \phi^{\frac{h}{n}} \cdot \mu_{(i-1),n} + \omega_{i,1} & \text{para } i \in \{1, 2, \dots\} \\ \mu_{i,j} = \left(1 - \phi^{\frac{h}{n}}\right) \cdot \mu_0 + \phi^{\frac{h}{n}} \cdot \mu_{i,(j-1)} + \omega_{i,j} & \text{para } i \in \{1, 2, \dots\} \text{ e } j \in \{2, \dots, n\} \end{cases} \quad (62)$$

O parâmetro  $\phi^{\frac{h}{n}}$  representa a autocorrelação entre  $\mu_{i,(j-1)}$  e  $\mu_{i,j}$ , os valores da média do processo quando da retirada do  $j$ -ésimo e  $(j-1)$ -ésimo item da  $i$ -ésima amostra e  $\omega_{i,j} \sim N(0, \sigma_\omega^2)$ .

Da teoria de séries temporais, para  $i = 0$ ,  $\mu_{i=0,t} \sim N(\mu_0, \sigma_\mu^2)$  então:

$$\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma_\omega^2}{\left(1 - \phi^{2\frac{h}{n}}\right)}. \quad (63)$$

A média amostral  $\bar{X}_i$  da  $i$ -ésima amostra de tamanho  $n$ , pode ser descrita como:

$$\bar{X}_i = \bar{\mu}_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j} \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots\} \text{ e } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (64)$$

em que  $\bar{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_{i,j}$ . Segundo Alwan e Radson (1992) o desvio padrão de  $\sigma_{\bar{\mu}}(n_t)$  é dado por:

$$\sigma_{\bar{\mu}}(n_t) = \frac{\sigma_{\mu}}{\sqrt{n_t} C_2(n_t, \phi^{h/n})} \quad (65)$$

com

$$C_2(n_t, \phi^{h/n}) = \sqrt{\frac{n}{n_t + \sum_{j=1}^{n_t-1} 2(n_t - j) \phi^{j \cdot h/n}}} = \sqrt{\frac{n}{n_t + 2 \left( \frac{\phi^{h+1/n} - n_t \phi^{2 \cdot h/n} + (n_t - 1) \phi^{h/n}}{(\phi^{h/n} - 1)^2} \right)}} \quad (66)$$

Portanto:

$$\sigma_{\bar{X}}(n_t) = \sqrt{\sigma_{\bar{\mu}}^2(n_t) + \frac{\sigma_0^2}{n_t}} = \sqrt{\frac{\sigma_{\mu}^2}{n_t \cdot C_2^2(n_t, \phi^{h/n})} + \frac{\sigma_0^2}{n_t}} \quad (67)$$

Usando a expressão (27) tem-se

$$\sigma_{\bar{X}}(n_t) = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \left( \frac{\psi}{1-\psi} \right)}{n_t C_2^2(n_t, \phi^{h/n})} + \frac{\sigma_0^2}{n_t}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\psi}{(1-\psi) n_t C_2^2(n_t, \phi^{h/n})} + \frac{1}{n_t}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_t} \cdot C_4(n_t, \psi, \phi^{h/n})}, \quad (68)$$

em que

$$C_4(n_t, \psi, \phi^{h/n}) = \left[ 1 + \frac{\psi}{(1-\psi) C_2^2(n_t, \phi^{h/n})} \right]^{-1} \quad (69)$$

A estratégia ESSI é avaliada considerando que a causa especial ocorre em um instante  $t^*$  qualquer,  $0 < t^* < h$ , entre duas observações consecutivas. Parte dos itens da amostra serão retirados do processo antes da causa especial ( $n_{t^*}$ ) e outra parte após sua ocorrência ( $n - n_{t^*}$ ):

$$\begin{aligned} \bar{X}'_{i, n_{t^*}} &\sim N(\mu_0, \sigma_{\bar{X}}(n_{t^*})), \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots\}, \\ \bar{X}'_{i, n-n_{t^*}} &\sim N(\mu_0 + \delta \sigma_0, \sigma_{\bar{X}}(n - n_{t^*})) \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots\}, \end{aligned} \quad (70)$$

A média amostral no instante  $i$  é dada por

$$\bar{X}'_i = \frac{n_{t^*}}{n} \times \underbrace{\frac{1}{n_{t^*}} \sum_{j=1}^{n_{t^*}} X_{i,j}}_{\bar{X}'_{i,n_{t^*}}} + \frac{n-n_{t^*}}{n} \times \underbrace{\frac{1}{n-n_{t^*}} \sum_{j=1}^{n-n_{t^*}} X_{i,j}}_{\bar{X}'_{i,n-n_{t^*}}}, \quad (71)$$

Do fato de  $\sigma_{\bar{X}'_{i,n_{t^*}}}^2 = \sigma_{\bar{X}}^2(n_{t^*})$  e  $\sigma_{\bar{X}'_{i,n-n_{t^*}}}^2 = \sigma_{\bar{X}}^2(n-n_{t^*})$  serem independentes tem-se para a primeira amostra:

$$\sigma_{\bar{X}'_i}^2 = \left(\frac{n_{t^*}}{n}\right)^2 \sigma_{\bar{X}}^2(n_{t^*}) + \left(\frac{n-n_{t^*}}{n}\right)^2 \sigma_{\bar{X}}^2(n-n_{t^*}). \quad (72)$$

No entanto, não é possível saber quando em que momento dentro da primeira amostra ocorreu a causa especial, então, assume-se que a distribuição da ocorrência da causa especial dentro de um intervalo  $h$  é uniforme. Para a primeira amostra após a ocorrência da causa especial o risco  $\beta_1(j), j = 1, \dots, n$ , é dado por:

$$\beta_1(j) = \Phi\left(\frac{+k\sigma_{\bar{X}}(n) - \frac{j\delta\sigma_0}{n}}{\sqrt{\left(\frac{j}{n}\right)^2 \sigma_{\bar{X}}^2(j) + \left(\frac{n-j}{n}\right)^2 \sigma_{\bar{X}}^2(n-j)}}\right) - \Phi\left(\frac{-k\sigma_{\bar{X}}(n) - \frac{j\delta\sigma_0}{n}}{\sqrt{\left(\frac{j}{n}\right)^2 \sigma_{\bar{X}}^2(j) + \left(\frac{n-j}{n}\right)^2 \sigma_{\bar{X}}^2(n-j)}}\right). \quad (73)$$

Usando a expressão (68) tem-se:

$$\beta_1(j) = \Phi\left(\frac{+k \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n} \cdot C_4(n_t, \psi, \phi^{h/n})} - \frac{j\delta\sigma_0}{n}}{\sqrt{\left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{j \cdot C_4^2(j, \psi, \phi^{h/n})} + \left(\frac{n-j}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{(n-j) \cdot C_4^2(n-j, \psi, \phi^{h/n})}}}\right) - \Phi\left(\frac{-k \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n} \cdot C_4(n_t, \psi, \phi^{h/n})} - \frac{j\delta\sigma_0}{n}}{\sqrt{\left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{j \cdot C_4^2(j, \psi, \phi^{h/n})} + \left(\frac{n-j}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{(n-j) \cdot C_4^2(n-j, \psi, \phi^{h/n})}}}\right),$$

Cancelando os termos  $\sigma_0$ :

$$\beta_1(j) = \Phi\left(\frac{+k \cdot \frac{n}{\sqrt{n} \cdot C_4(n, \psi, \phi^{h/n})} - j\delta}{\sqrt{\frac{j}{C_4^2(j, \psi, \phi^{h/n})} + \frac{n-j}{C_4^2(n-j, \psi, \phi^{h/n})}}}\right) - \Phi\left(\frac{-k \cdot \frac{n}{\sqrt{n} \cdot C_4(n, \psi, \phi^{h/n})} - j\delta}{\sqrt{\frac{j}{C_4^2(j, \psi, \phi^{h/n})} + \frac{n-j}{C_4^2(n-j, \psi, \phi^{h/n})}}}\right). \quad (74)$$

Uma vez que assume-se uma distribuição uniforme discreta com probabilidade de  $1/n$  para a ocorrência de uma causa especial, o risco  $\beta_1$  para a primeira amostra é dado por:

$$\beta_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \beta_1(j). \quad (75)$$

A partir da segunda amostra, depois da ocorrência da causa especial,  $\bar{X}$  passa a ser  $\bar{X} \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_{\bar{X}}(n))$  e o risco  $\beta$  associado é dado por:

$$\beta = \Phi\left(k - \delta\sqrt{n} \cdot C_4(n, \psi, \phi^{h/n})\right) - \Phi\left(-k - \delta\sqrt{n} \cdot C_4(n, \psi, \phi^{h/n})\right), \quad (76)$$

e, é evidente que  $\beta_1 > \beta$ .

Finalmente, se  $RL$  é o comprimento da corrida (do inglês *Run Length*) do gráfico de controle para o monitoramento da estatística  $\bar{X}_i$ , então  $P(RL = 1) = 1 - \beta_1$ ,  $P(RL = 2) = \beta_1(1 - \beta)$ ,  $P(RL = 3) = \beta_1\beta(1 - \beta)$ ,  $P(RL = 4) = \beta_1\beta^2(1 - \beta)$  e, generalizando,

$$P(RL = l) = \begin{cases} 1 - \beta_1 & \text{se } l = 1 \\ \beta_1\beta^{l-2}(1 - \beta) & \text{se } l = 2, 3, \dots \end{cases}. \quad (77)$$

Portanto, o  $NMA$  pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} NMA &= 1 \times (1 - \beta_1) + 2 \times \beta_1(1 - \beta) + 3 \times \beta_1\beta(1 - \beta) + 4 \times \beta_1\beta^2(1 - \beta) + \dots \\ &= 1 - \beta_1 + \beta_1(1 - \beta) \sum_{l=2}^{\infty} l\beta^{l-2}, \end{aligned} \quad (78)$$

o qual pode ser simplificado para:

$$NMA = \frac{\beta_1}{1 - \beta} + 1. \quad (79)$$

Se uma causa especial ocorrer antes da primeira amostra, então  $\beta_1 = \beta$  e a expressão (79) reduz-se para  $NMA = 1/(1 - \beta)$ .

#### 4.1 ANÁLISE DE DESEMPENHO ESTATÍSTICO

Nesta seção analisa-se a influência da oscilação da média ( $\psi$ ), do coeficiente de autocorrelação ( $\phi$ ), do tamanho da amostra ( $n$ ) e da magnitude do desvio da média ( $\delta$ ) no desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com o esquema de amostragem ESSI e compara-se com o gráfico de  $\bar{X}$  com esquema de amostragem com itens amostrais selecionados segundo o conceito dos subgrupos racionais (STD). Nesta análise assume-se que  $\psi$ ,  $\phi$  e  $\delta$  não se alteram quando o processo sai de controle. As Tabelas 11, 12 e 13 foram construídas para  $NMA_0 = 370,4$ ,  $\psi = \{0,1; 0,5; 0,9\}$ ,  $\phi = \{0,1; 0,5; 0,9\}$ ,  $\delta = \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0\}$ ,  $n = \{2; 6; 10\}$ ,  $h = \{0,3; 1,0; 3,0\}$ .

Com o propósito de analisar o desempenho estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  calcula-se  $NMA$ , como apresentado na seção 2.3.2, para a estratégia de amostragem STD. Para a estratégia ESSI o  $NMA$  está associado ao risco  $\beta_1$ , da primeira amostra, expressão (75), e ao risco  $\beta$  das

sucessivas amostras, expressão (76). O NMA para o gráfico de  $\bar{X}$  quando empregada a estratégia ESSI é dado pela expressão (79).

Tabela 11 – Valores de NMA para as estratégias ESSI e STD,  $n = 2$ .

|                |      | $\phi = 0,1$ |              |              | $\phi = 0,5$ |              |              | $\phi = 0,9$ |              |              |
|----------------|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                |      | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ |
| $h = 0,3$      |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 109,33       | 202,13       | 330,88       | 113,60       | 219,59       | 339,26       | 136,23       | 271,31       | 354,70       |
|                | ESSI | 106,32       | 186,82       | 322,85       | 107,92       | 193,75       | 327,07       | 108,60       | 196,58       | 328,67       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 24,30        | 74,39        | 248,17       | 26,60        | 90,20        | 269,58       | 35,09        | 142,92       | 314,07       |
|                | ESSI | 23,14        | 62,34        | 227,23       | 23,70        | 66,99        | 236,54       | 23,94        | 68,95        | 240,18       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 7,57         | 30,17        | 171,26       | 8,45         | 39,90        | 198,44       | 10,47        | 71,83        | 262,42       |
|                | ESSI | 7,37         | 23,50        | 146,66       | 7,56         | 25,75        | 156,78       | 7,64         | 26,73        | 160,86       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 3,21         | 14,02        | 115,72       | 3,47         | 19,55        | 142,34       | 3,83         | 36,36        | 211,46       |
|                | ESSI | 3,41         | 10,50        | 93,28        | 3,49         | 11,60        | 101,92       | 3,52         | 12,08        | 105,49       |
| $h = 1$        |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 108,11       | 196,67       | 327,75       | 109,32       | 202,10       | 330,88       | 118,81       | 235,51       | 345,02       |
|                | ESSI | 103,02       | 170,98       | 311,25       | 106,31       | 186,79       | 322,83       | 108,31       | 195,38       | 328,00       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 23,55        | 69,24        | 240,41       | 24,29        | 74,36        | 248,14       | 28,96        | 105,17       | 285,32       |
|                | ESSI | 22,01        | 52,60        | 203,81       | 23,14        | 62,32        | 227,19       | 23,84        | 68,11        | 238,64       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 7,21         | 26,77        | 161,63       | 7,57         | 30,16        | 171,22       | 9,15         | 48,94        | 219,73       |
|                | ESSI | 6,99         | 18,99        | 123,01       | 7,37         | 23,49        | 146,61       | 7,61         | 26,31        | 159,13       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 3,06         | 11,93        | 106,33       | 3,21         | 14,01        | 115,67       | 3,63         | 24,48        | 164,19       |
|                | ESSI | 3,26         | 8,38         | 74,18        | 3,41         | 10,50        | 93,24        | 3,51         | 11,87        | 103,97       |
| $h = 3$        |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 107,98       | 196,16       | 327,51       | 108,15       | 196,82       | 327,84       | 111,55       | 211,91       | 335,94       |
|                | ESSI | 100,58       | 157,69       | 298,60       | 103,34       | 172,61       | 312,59       | 107,53       | 192,10       | 326,10       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 23,46        | 68,74        | 239,79       | 23,57        | 69,40        | 240,63       | 25,55        | 83,22        | 260,89       |
|                | ESSI | 21,19        | 45,28        | 181,38       | 22,12        | 53,55        | 206,36       | 23,56        | 65,85        | 234,37       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 7,16         | 26,40        | 160,84       | 7,22         | 26,89        | 161,90       | 8,09         | 35,65        | 187,19       |
|                | ESSI | 6,71         | 15,81        | 102,61       | 7,02         | 19,42        | 125,47       | 7,51         | 25,20        | 154,38       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 3,04         | 11,68        | 105,53       | 3,07         | 12,01        | 106,60       | 3,37         | 17,17        | 131,18       |
|                | ESSI | 3,16         | 6,93         | 58,88        | 3,28         | 8,57         | 76,10        | 3,47         | 11,33        | 99,85        |

Tabela 12 – Valores de NMA para as estratégias ESSI e STD,  $n = 6$ .

|                |      | $\phi = 0,1$ |              |              | $\phi = 0,5$ |              |              | $\phi = 0,9$ |              |              |
|----------------|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                |      | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ |
| $h = 0,3$      |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 52,36        | 179,86       | 329,77       | 60,21        | 204,00       | 338,73       | 91,01        | 264,73       | 354,53       |
|                | ESSI | 46,16        | 154,07       | 318,93       | 49,05        | 166,32       | 325,18       | 50,28        | 171,15       | 327,44       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 8,38         | 59,62        | 245,57       | 10,50        | 78,17        | 268,14       | 16,12        | 133,98       | 313,58       |
|                | ESSI | 7,32         | 43,56        | 218,68       | 7,88         | 50,08        | 232,00       | 8,13         | 52,82        | 237,02       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 2,53         | 22,94        | 168,26       | 2,90         | 33,20        | 196,59       | 3,45         | 64,59        | 261,61       |
|                | ESSI | 2,77         | 15,25        | 137,73       | 2,92         | 18,03        | 151,77       | 2,98         | 19,25        | 157,29       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 1,31         | 10,37        | 113,03       | 1,35         | 15,70        | 140,54       | 1,36         | 31,04        | 210,44       |
|                | ESSI | 1,83         | 6,84         | 85,95        | 1,88         | 8,08         | 97,65        | 1,91         | 8,64         | 102,40       |
| $h = 1,0$      |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 49,92        | 171,63       | 326,37       | 52,35        | 179,81       | 329,75       | 68,38        | 223,79       | 344,70       |
|                | ESSI | 39,97        | 122,89       | 298,11       | 46,15        | 154,01       | 318,89       | 49,75        | 169,11       | 326,50       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 7,53         | 53,14        | 237,26       | 8,38         | 59,58        | 245,52       | 12,28        | 94,58        | 284,38       |
|                | ESSI | 6,20         | 29,48        | 180,19       | 7,32         | 43,53        | 218,61       | 8,02         | 51,65        | 234,91       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 2,32         | 19,13        | 158,08       | 2,52         | 22,92        | 168,21       | 3,14         | 42,32        | 218,41       |
|                | ESSI | 2,48         | 9,75         | 101,60       | 2,77         | 15,24        | 137,66       | 2,95         | 18,73        | 154,95       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 1,28         | 8,26         | 103,21       | 1,31         | 10,36        | 112,98       | 1,37         | 20,31        | 162,79       |
|                | ESSI | 1,73         | 4,49         | 58,23        | 1,83         | 6,83         | 85,89        | 1,90         | 8,40         | 100,38       |
| $h = 3,0$      |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 49,66        | 170,92       | 326,13       | 50,00        | 171,84       | 326,49       | 56,63        | 193,81       | 335,20       |
|                | ESSI | 33,85        | 83,09        | 252,53       | 40,60        | 126,42       | 300,92       | 48,35        | 163,45       | 323,79       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 7,41         | 52,52        | 236,62       | 7,56         | 53,33        | 237,49       | 9,60         | 70,21        | 259,05       |
|                | ESSI | 5,17         | 15,98        | 118,49       | 6,31         | 30,90        | 184,92       | 7,74         | 48,49        | 228,96       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 2,28         | 18,71        | 157,26       | 2,32         | 19,26        | 158,37       | 2,76         | 28,81        | 184,94       |
|                | ESSI | 2,22         | 5,21         | 55,24        | 2,51         | 10,27        | 105,71       | 2,88         | 17,35        | 148,49       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 1,27         | 7,99         | 102,38       | 1,28         | 8,34         | 103,50       | 1,34         | 13,44        | 129,06       |
|                | ESSI | 1,64         | 2,71         | 27,74        | 1,74         | 4,71         | 61,21        | 1,87         | 7,77         | 94,87        |

Tabela 13 – Valores de NMA para as estratégias ESSI e STD,  $n = 10$ .

|                |      | $\phi = 0,1$ |              |              | $\phi = 0,5$ |              |              | $\phi = 0,9$ |              |              |
|----------------|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                |      | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ | $\psi = 0,1$ | $\psi = 0,5$ | $\psi = 0,9$ |
| $h = 0,3$      |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 39,08        | 174,78       | 329,59       | 48,04        | 200,67       | 338,59       | 79,85        | 263,36       | 354,50       |
|                | ESSI | 32,09        | 146,65       | 318,33       | 35,12        | 159,93       | 324,84       | 36,41        | 165,16       | 327,16       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 5,79         | 56,60        | 245,07       | 7,61         | 75,76        | 267,84       | 12,08        | 132,11       | 313,48       |
|                | ESSI | 4,93         | 39,92        | 217,44       | 5,42         | 46,62        | 231,20       | 5,63         | 49,45        | 236,37       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 1,81         | 21,53        | 167,67       | 2,04         | 31,88        | 196,21       | 2,30         | 63,02        | 261,45       |
|                | ESSI | 2,19         | 13,79        | 136,47       | 2,31         | 16,57        | 150,90       | 2,37         | 17,79        | 156,56       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 1,11         | 9,68         | 112,50       | 1,12         | 14,93        | 140,17       | 1,11         | 29,86        | 210,23       |
|                | ESSI | 1,65         | 6,22         | 84,93        | 1,69         | 7,44         | 96,92        | 1,71         | 7,99         | 101,78       |
| $h = 1,0$      |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 36,12        | 165,75       | 326,07       | 39,06        | 174,73       | 329,57       | 56,81        | 221,36       | 344,63       |
|                | ESSI | 25,68        | 112,40       | 296,28       | 32,08        | 146,59       | 318,30       | 35,85        | 162,95       | 326,19       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 4,99         | 49,79        | 236,60       | 5,78         | 56,56        | 245,02       | 9,08         | 92,46        | 284,19       |
|                | ESSI | 3,99         | 25,50        | 177,15       | 4,93         | 39,89        | 217,37       | 5,54         | 48,24        | 234,20       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 1,68         | 17,64        | 157,35       | 1,81         | 21,51        | 167,62       | 2,17         | 40,98        | 218,15       |
|                | ESSI | 1,96         | 8,36         | 99,00        | 2,19         | 13,78        | 136,40       | 2,34         | 17,26        | 154,17       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 1,10         | 7,57         | 102,58       | 1,11         | 9,66         | 112,45       | 1,12         | 19,44        | 162,51       |
|                | ESSI | 1,57         | 3,95         | 56,38        | 1,65         | 6,21         | 84,87        | 1,70         | 7,76         | 99,72        |
| $h = 3,0$      |      |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| $\delta = 0,5$ | STD  | 35,79        | 164,99       | 325,82       | 36,21        | 166,00       | 326,19       | 44,05        | 189,86       | 335,04       |
|                | ESSI | 19,37        | 66,85        | 243,53       | 26,33        | 116,31       | 299,30       | 34,38        | 156,83       | 323,39       |
| $\delta = 1,0$ | STD  | 4,88         | 49,14        | 235,95       | 5,03         | 49,99        | 236,84       | 6,85         | 67,59        | 258,68       |
|                | ESSI | 3,16         | 11,77        | 108,95       | 4,08         | 26,95        | 182,15       | 5,30         | 44,99        | 228,06       |
| $\delta = 1,5$ | STD  | 1,66         | 17,21        | 156,52       | 1,69         | 17,78        | 157,64       | 1,95         | 27,47        | 184,49       |
|                | ESSI | 1,77         | 3,99         | 49,20        | 1,99         | 8,87         | 103,30       | 2,28         | 15,88        | 147,53       |
| $\delta = 2,0$ | STD  | 1,10         | 7,31         | 101,74       | 1,10         | 7,65         | 102,87       | 1,12         | 12,71        | 128,64       |
|                | ESSI | 1,49         | 2,28         | 24,24        | 1,58         | 4,16         | 59,47        | 1,68         | 7,14         | 94,07        |

Na Tabela 11 observa-se o efeito negativo do aumento da oscilação da média ( $\psi$ ) no desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD, por exemplo, para  $\psi = 0,1$ ,  $\phi = 0,1$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $h = 0,3$ ,  $NMA = 109,33$  e quando  $\psi = 0,9$   $NMA = 330,88$ , isto é, uma redução de desempenho na ordem de  $-202,64\%$ . O desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia ESSI é afetado da mesma maneira, porém há uma melhora de desempenho se comparado com o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD de  $-2,75\%$  para  $\psi = 0,1$  e  $-2,43\%$  para  $\psi = 0,9$ .

O aumento da autocorrelação  $\phi$  intensificada o efeito da oscilação da média, por exemplo da Tabela 11, para  $\psi = 0,9$ ,  $\delta = 0,5$  e  $h = 1,0$ , quando  $\phi$  aumenta de 0,1 para 0,9 há um aumento do NMA de 327,75 para 345,02 ( $+5,27\%$ ) para o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD

um aumento de +5,38% do NMA de 311,25 ( $\phi = 0,1$ ) para 328,00 ( $\phi = 0,9$ ) para o gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia ESSI.

Uma análise da influência do intervalo de amostragem  $h$  demonstra que um aumento de  $h$  melhora do desempenho estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  com as estratégias STD e ESSI, por exemplo da Tabela 12, quando  $h$  aumenta de 0,3 (para  $\psi = 0,9$ ,  $\phi = 0,5$  e  $\delta = 1,0$ ) para 3,0 o NMA reduz de 268,14 para 237,49 quando usada estratégia STD e reduz de 232,00 para 184,92 quando usada estratégia ESSI.

O aumento do tamanho da amostra  $n$  melhora o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégias STD e ESSI. Por exemplo, da Tabela 11 ( $n = 2$ ) e da Tabela 12 ( $n = 10$ ), para  $\psi = 0,5$ ,  $\phi = 0,9$  e  $\delta = 1,0$  há uma redução do NMA de -12,08% (-29,17%), de 105,17 (68,11) para 92,46 (48,24), respectivamente, para as estratégias STD (ESSI). Este melhor desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI é explicado pelo fato da estratégia ESSI ser capaz de obter mais informações a respeito da oscilação da média através  $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j}$  se comparado com a estratégia STD que apenas pode contar com  $\bar{X}_i = \mu_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{i,j}$ .

Para  $\delta < 1,5$  o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI tem melhor desempenho que o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD, entretanto, para grandes desvios da média ( $\delta \geq 1,5$ ), a estratégia STD torna-se melhor que a estratégia ESSI para uma oscilação da média de moderada a baixa ( $\psi \leq 0,5$ ), ver Figura 14.

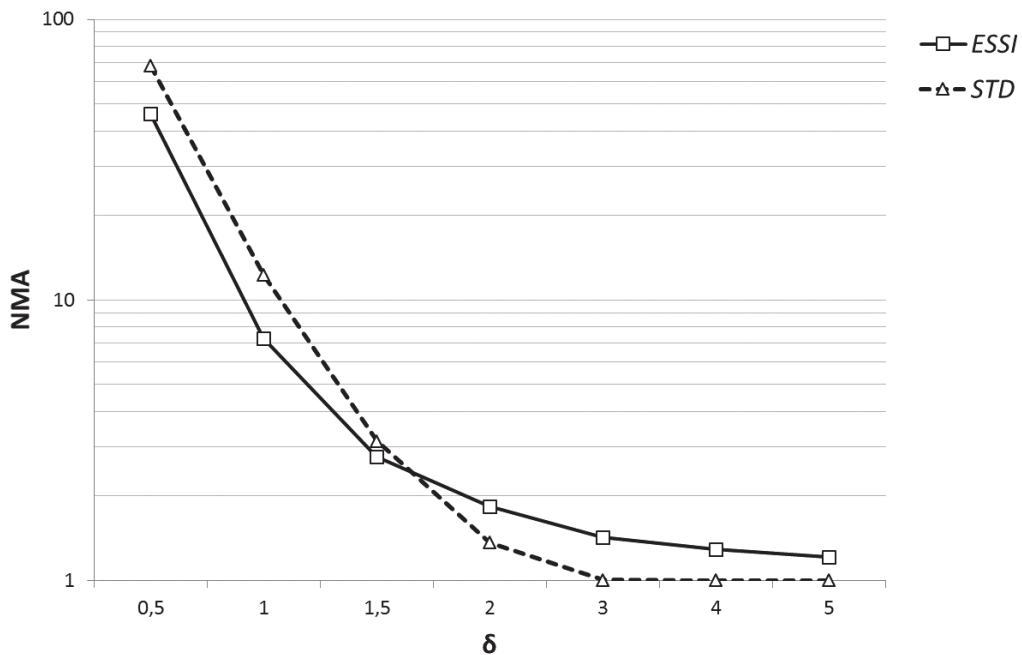


Figura 14 – NMA para estratégias STD e ESSI para  $\psi = 0,1$ ,  $\phi = 0,9$ ,  $n = 6$ ,  $h = 1,0$  e  $\delta = \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0\}$ .

No caso de  $\delta \geq 1,5$ , a presença de uma probabilidade  $\beta_1 > \beta$  do erro do *Tipo II* para a primeira amostra deteriora o desempenho estatístico associado à estratégia ESSI. Geralmente, tem-se um bom desempenho da estratégia de amostragem ESSI à medida que  $n$  e  $h$  aumentam e  $\psi$  e  $\phi$  diminuem.

Finalmente, é interessante notar que o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI tem um desempenho estatístico mais robusto do que o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD na presença da oscilação da média  $\psi$  e da autocorrelação  $\phi$ . Se denominar  $\Delta NMA(\delta, n, h, \phi) = \max_{\psi}[NMA(\delta, n, h, \phi|\psi)] - \min_{\psi}[NMA(\delta, n, h, \phi|\psi)]$  a diferença de  $NMA$  vs.  $\psi$  para uma seleção  $(\delta, n, h, \phi)$ : O  $\Delta NMA(\delta, n, h, \phi)$  observa-se que esta diferença sempre será menor quando adotada a estratégia ESSI por exemplo, para  $(\delta, n, h, \phi) = (1,5; 10; 1; 0,5)$ ,  $\Delta NMA(\delta, n, h, \phi) = 136,40 - 2,19 = 134,21$  para a estratégia ESSI e  $\Delta NMA(\delta, n) = 167,62 - 1,81 = 165,81$  para a estratégia STD. Esta robustez pode levar os profissionais de qualidade a adotar a estratégia ESSI quando há falta de conhecimento sobre o nível de oscilação e autocorrelação da média ou este nível está oscilando durante o processo.

## 4.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO ECONÔMICO

Nesta seção investiga-se o desempenho econômico do gráfico de  $\bar{X}$  com estratégias STD, baseada em subgrupos racionais, e com estratégia ESSI.

O objetivo deste estudo é entender quais processos e fatores de custo orientam a seleção da estratégia de amostragem e ainda quantificar os ganhos associadas ao custo de monitoramento da qualidade esperado por hora. Além de analisar os efeitos da imprecisão na estimativa dos parâmetros de custo e processo que podem resultar em um planejamento de gráfico de controle de qualidade inferior.

### 4.2.1 Modelo econômico

O modelo econômico adotado é o de Duncan, já apresentado na seção 2.2.1. Como mencionado na seção 3.2.1 o planejamento econômico-estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  é um problema de otimização cuja função objetivo a ser minimizada é o  $E(L)$ , e se denominar  $\Omega = \{n, h, k\}$  como uma solução de planejamento viável, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\min_{\Omega} E(L) \quad (80)$$

S.A.

$$\alpha = \alpha_0 \quad (81)$$

$$g \times n \leq h \leq 50 \quad (82)$$

$$n \in \{1, 2, \dots, 20\} \quad (83)$$

A restrição (81) representa a restrição estatística que fixa o número esperado de falsos alarmes. A restrição (82) garante que o intervalo de amostragem  $h$  é grande o suficiente para permitir que o conjunto de observações  $n$  da característica de qualidade de interesse possam ser medidas.

O limite superior  $h \leq 50$  para a restrição (82) é fixado devido ao fato de que quanto maior o intervalo de amostragem, maior será o tempo esperado para detecção de um desajuste do processo, podendo levar a uma produção excessiva de itens não-conformes até que o processo seja parado e ajustado.

E sem perda de generalidade, supõe-se que a taxa de produção não se restringe a coleta de dados e procedimento de medição.

Para o planejamento econômico-estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  para o monitoramento de processos com observações autocorrelacionadas, apresentado na seção 3.2, foi usado um procedimento de busca exaustiva para selecionar o melhor conjunto de parâmetros de projeto  $\Omega^* = \{n^*, h^*, k^*\}$ . Porém devido a utilização de uma cadeia de Markov para o cálculo do  $NMA$  e  $NMA_0$  quando usada a estratégia STD, o uso do procedimento de busca exaustiva torna-se inviável devido ao grande esforço computacional necessário, aumentando em demasia o tempo de resposta do modelo.

O valor ótimo  $k^*$  é imediatamente derivado da restrição (81), devido a definição de  $\alpha_0 = 0,27\%$ : e como consequência,  $k^* = 3,0$ . Então, o procedimento de busca seleciona os dois parâmetros que restam  $(n^*, h^*)$ .

O procedimento de busca adotado é o Algoritmo Genético que, segundo Grupe e Jooste (2004), apresenta algumas limitações, pois não garante a resolução de um problema de uma forma otimizada, porém oferece bons resultados em um menor esforço computacional (tempo de execução).

A aplicação desta técnica no planejamento-econômico de gráficos de controle já é conhecida e traz bons resultados, como pode-se observar em: Celano e Ficheira (1999), Chou *et al.* (2005), Chou *et al.* (2006), Vommi e Seetalab (2007a, 2007b), Chou *et al.* (2008), Torng *et al.* (2009a, 2009b), Chen e Yeh (2009), Kaya (2009a, 2009b) e Franco *et al.* (2012).

No Apêndice E pode ser encontrado o algoritmo implementado.

#### 4.2.2 Análise numérica

Para comparar o desempenho econômico do gráfico de  $\bar{X}$  com o uso das estratégias de amostragem ESSI e STD, foram criados 128 cenários organizados de acordo com o planejamento de experimentos fatorial fracionado  $2_{IV}^{11-4}$ , (relação definidora  $b = \psi\phi\delta a$ ,  $M = \phi\delta\lambda g$ ,  $C_0 = \psi\delta\lambda T_1$ ,  $C_1 = \psi\phi\delta\lambda g T_1 a$ ), pois permite estimar eficientemente os efeitos principais, bem como as interações de segunda ordem e utilizar as interações de ordem superior (considerado neste trabalho como negligenciável) como uma estimativa do termo de ruído (Simpson e Keats, 1995).

Onze parâmetros de processo e custo são variados em dois níveis, cujos valores são adaptados do exemplo apresentado por Montgomery (2004, pag. 469), codificados como Nível Baixo (-1) e Nível Alto (1), para obtenção dos valores ótimos dos parâmetros de projeto que minimize o custo de monitoramento  $E(L)$ , ver Quadro 11.

Quadro 11 – Níveis para os parâmetros de planejamento econômico.

| Variáveis | Nível Baixo (-1) | Nível Alto (1) |
|-----------|------------------|----------------|
| $\psi$    | 0,2              | 0,8            |
| $\phi$    | 0,2              | 0,8            |
| $\delta$  | 0,5              | 2              |
| $\lambda$ | 0,01             | 0,05           |
| $g$       | 0,0167           | 0,1            |
| $T_1$     | 0,167            | 0,5            |
| $a$       | 0,5              | 1,5            |
| $b$       | 1                | 10             |
| $M$       | 10               | 100            |
| $C_0$     | 10               | 30             |
| $C_1$     | 30               | 60             |

A Tabela 14 apresenta os resultados de  $n^*$ ,  $h^*$  e  $E(L)$  para os 128 cenários do plano experimental em ordem padrão, de cada estratégia de amostragem investigada.

Os resultados apresentados na Tabela 14 mostram que retirando itens da amostra igualmente espaçados de acordo com o instante em que são produzidos melhora o desempenho econômico do gráfico de  $\bar{X}$ .

Tabela 14 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado.

| Ord. | $\psi$ | $\phi$ | $\delta$ | $\lambda$ | $g$ | $T_1$ | $a$ | $b$ | $M$ | $C_0$ | $C_1$ | $n_{ESSI}^*$ | $h_{ESSI}^*$ | $E(L)_{ESSI}$ | $n_{STD}^*$ | $h_{STD}^*$ | $E(L)_{STD}$ |
|------|--------|--------|----------|-----------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|-------|--------------|--------------|---------------|-------------|-------------|--------------|
| 1    | -1     | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 19           | 12,30        | 69,12         | 2           | 0,96        | 76,56        |
| 2    | 1      | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 3            | 0,20         | 53,97         | 2           | 0,24        | 52,58        |
| 3    | -1     | 1      | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 2            | 2,14         | 8,60          | 2           | 1,45        | 8,55         |
| 4    | 1      | 1      | -1       | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 2            | 48,71        | 10,34         | 2           | 49,74       | 10,35        |
| 5    | -1     | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 4            | 6,35         | 2,17          | 4           | 5,72        | 2,30         |
| 6    | 1      | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 12           | 47,75        | 7,69          | 2           | 49,77       | 10,04        |
| 7    | -1     | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 2            | 2,75         | 17,39         | 4           | 5,51        | 17,66        |
| 8    | 1      | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 2            | 0,35         | 22,72         | 2           | 0,32        | 37,57        |
| 9    | -1     | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 2            | 48,60        | 10,40         | 2           | 47,32       | 10,41        |
| 10   | 1      | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 2            | 49,10        | 10,04         | 2           | 49,59       | 10,04        |
| 11   | -1     | 1      | -1       | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 5            | 0,23         | 73,53         | 2           | 0,17        | 75,28        |
| 12   | 1      | 1      | -1       | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 2            | 49,42        | 100,25        | 2           | 49,86       | 100,28       |
| 13   | -1     | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 3            | 0,75         | 15,66         | 4           | 0,77        | 15,40        |
| 14   | 1      | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 16           | 15,82        | 75,04         | 2           | 1,32        | 93,33        |
| 15   | -1     | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 3            | 22,79        | 9,32          | 3           | 21,33       | 9,50         |
| 16   | 1      | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 10           | 49,74        | 9,60          | 2           | 5,24        | 9,91         |
| 17   | -1     | -1     | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 2            | 47,97        | 10,25         | 2           | 49,53       | 10,27        |
| 18   | 1      | -1     | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 2            | 1,96         | 9,67          | 2           | 1,91        | 9,82         |
| 19   | -1     | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 2            | 0,17         | 33,30         | 2           | 0,27        | 40,14        |
| 20   | 1      | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 2            | 1,55         | 94,86         | 2           | 2,20        | 96,16        |
| 21   | -1     | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 3            | 1,48         | 6,38          | 4           | 1,86        | 6,57         |
| 22   | 1      | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 15           | 16,67        | 36,80         | 2           | 0,97        | 55,18        |
| 23   | -1     | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 3            | 18,42        | 4,93          | 3           | 16,49       | 5,12         |
| 24   | 1      | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 2            | 2,48         | 6,40          | 2           | 1,61        | 6,90         |
| 25   | -1     | -1     | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 19           | 29,60        | 98,45         | 2           | 48,82       | 100,10       |
| 26   | 1      | -1     | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 3            | 0,45         | 94,31         | 2           | 0,26        | 89,84        |
| 27   | -1     | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 2            | 49,95        | 10,02         | 2           | 49,92       | 10,03        |
| 28   | 1      | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 2            | 49,18        | 10,40         | 2           | 48,54       | 10,41        |
| 29   | -1     | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 3            | 3,06         | 5,95          | 3           | 2,73        | 6,11         |
| 30   | 1      | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 2            | 48,49        | 10,28         | 2           | 47,80       | 10,36        |
| 31   | -1     | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 2            | 1,34         | 38,53         | 3           | 2,43        | 40,75        |
| 32   | 1      | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 4            | 0,26         | 57,99         | 2           | 0,34        | 76,31        |
| 33   | -1     | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 19           | 13,04        | 69,35         | 2           | 0,84        | 76,54        |
| 34   | 1      | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 2            | 0,40         | 59,43         | 2           | 0,40        | 60,75        |
| 35   | -1     | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 2            | 0,90         | 8,25          | 2           | 1,73        | 8,51         |
| 36   | 1      | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 2            | 48,68        | 10,34         | 2           | 49,87       | 10,35        |
| 37   | -1     | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 4            | 6,25         | 1,93          | 4           | 5,58        | 2,06         |
| 38   | 1      | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 12           | 49,26        | 7,84          | 2           | 48,29       | 10,05        |
| 39   | -1     | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 3            | 3,96         | 18,09         | 3           | 4,09        | 18,19        |
| 40   | 1      | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 2            | 0,23         | 21,95         | 2           | 0,34        | 37,49        |
| 41   | -1     | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 2            | 49,14        | 10,39         | 2           | 49,59       | 10,39        |
| 42   | 1      | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 2            | 49,94        | 10,04         | 2           | 49,63       | 10,04        |
| 43   | -1     | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 2            | 0,15         | 67,84         | 3           | 0,48        | 84,00        |
| 44   | 1      | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 2            | 49,81        | 100,25        | 2           | 45,98       | 100,30       |
| 45   | -1     | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 4            | 0,80         | 18,28         | 4           | 0,91        | 18,11        |
| 46   | 1      | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 16           | 15,51        | 74,71         | 2           | 1,47        | 93,23        |
| 47   | -1     | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 3            | 18,12        | 8,87          | 3           | 16,33       | 9,05         |
| 48   | 1      | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 10           | 49,80        | 9,71          | 2           | 11,42       | 9,99         |
| 49   | -1     | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | -1    | 2            | 49,92        | 10,24         | 2           | 48,46       | 10,27        |
| 50   | 1      | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | 1     | 2            | 2,04         | 9,72          | 2           | 2,48        | 9,86         |
| 51   | -1     | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | 1     | 3            | 0,23         | 35,52         | 2           | 0,33        | 42,35        |
| 52   | 1      | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | -1    | 2            | 2,24         | 95,55         | 2           | 1,51        | 95,65        |
| 53   | -1     | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | 1     | 3            | 1,66         | 7,07          | 3           | 1,36        | 7,13         |
| 54   | 1      | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | -1    | 15           | 16,74        | 36,75         | 2           | 1,16        | 55,44        |
| 55   | -1     | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | -1    | 3            | 18,08        | 4,73          | 3           | 16,25       | 4,93         |
| 56   | 1      | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | 1     | 2            | 1,78         | 6,25          | 2           | 1,97        | 7,10         |
| 57   | -1     | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | 1     | 1     | 19           | 30,76        | 98,58         | 2           | 49,44       | 100,11       |

Tabela 14 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado. (Continuação...)

| Ord. | $\psi$ | $\phi$ | $\delta$ | $\lambda$ | $g$ | $T_1$ | $a$ | $b$ | $M$ | $C_0$ | $C_1$ | $n_{ESSI}^*$ | $h_{ESSI}^*$ | $E(L)_{ESSI}$ | $n_{STD}^*$ | $h_{STD}^*$ | $E(L)_{STD}$ |
|------|--------|--------|----------|-----------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|-------|--------------|--------------|---------------|-------------|-------------|--------------|
| 58   | 1      | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | -1    | -1    | 2            | 0,39         | 91,23         | 2           | 0,48        | 93,00        |
| 59   | -1     | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | 1     | -1    | 2            | 48,78        | 10,02         | 2           | 49,96       | 10,02        |
| 60   | 1      | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | -1    | 1     | 2            | 49,21        | 10,41         | 2           | 48,97       | 10,41        |
| 61   | -1     | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | -1  | -1    | -1    | 3            | 2,72         | 4,89          | 3           | 2,44        | 5,05         |
| 62   | 1      | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | -1  | 1     | 1     | 2            | 49,42        | 10,30         | 2           | 49,51       | 10,36        |
| 63   | -1     | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | 1   | 1   | -1    | 1     | 2            | 1,21         | 40,84         | 3           | 1,94        | 42,74        |
| 64   | 1      | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | -1  | -1  | 1   | 1     | -1    | 2            | 0,11         | 47,93         | 2           | 0,14        | 78,42        |
| 65   | -1     | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 3            | 0,30         | 38,72         | 2           | 0,23        | 39,48        |
| 66   | 1      | -1     | -1       | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 2            | 1,59         | 94,16         | 2           | 1,13        | 95,69        |
| 67   | -1     | 1      | -1       | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | 1     | -1    | 2            | 49,92        | 10,26         | 2           | 46,78       | 10,30        |
| 68   | 1      | 1      | -1       | -1        | -1  | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 2            | 24,97        | 9,99          | 2           | 49,75       | 10,01        |
| 69   | -1     | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 3            | 17,19        | 4,59          | 3           | 16,16       | 4,95         |
| 70   | 1      | -1     | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | -1  | -1  | 1     | 1     | 16           | 18,11        | 4,09          | 2           | 2,40        | 7,22         |
| 71   | -1     | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | -1    | 1     | 3            | 1,34         | 7,81          | 6           | 2,43        | 7,85         |
| 72   | 1      | 1      | 1        | -1        | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 2            | 1,24         | 54,48         | 2           | 1,76        | 65,78        |
| 73   | -1     | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 19           | 49,49        | 9,97          | 2           | 49,70       | 10,04        |
| 74   | 1      | -1     | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 2            | 48,29        | 10,43         | 2           | 49,04       | 10,43        |
| 75   | -1     | 1      | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | 1     | 2            | 49,99        | 100,08        | 2           | 46,91       | 100,13       |
| 76   | 1      | 1      | -1       | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 2            | 1,04         | 97,17         | 2           | 0,88        | 97,24        |
| 77   | -1     | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 3            | 2,34         | 36,65         | 3           | 2,39        | 38,29        |
| 78   | 1      | -1     | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 3            | 0,67         | 61,82         | 2           | 0,21        | 59,45        |
| 79   | -1     | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 4            | 3,63         | 5,49          | 5           | 4,28        | 5,40         |
| 80   | 1      | 1      | 1        | 1         | -1  | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 2            | 48,16        | 10,33         | 2           | 48,90       | 10,38        |
| 81   | -1     | -1     | -1       | -1        | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 19           | 13,30        | 7,18          | 2           | 1,45        | 9,02         |
| 82   | 1      | -1     | -1       | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 2            | 45,92        | 10,39         | 2           | 48,57       | 10,38        |
| 83   | -1     | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 2            | 1,74         | 80,93         | 2           | 1,29        | 80,45        |
| 84   | 1      | 1      | -1       | -1        | 1   | -1    | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 2            | 0,35         | 60,27         | 2           | 0,23        | 67,55        |
| 85   | -1     | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | 1     | 3            | 4,45         | 16,21         | 3           | 4,03        | 17,44        |
| 86   | 1      | -1     | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 2            | 0,28         | 24,49         | 2           | 0,76        | 33,72        |
| 87   | -1     | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 4            | 6,60         | 2,31          | 5           | 7,47        | 2,27         |
| 88   | 1      | 1      | 1        | -1        | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 7            | 49,35        | 9,13          | 2           | 49,14       | 10,07        |
| 89   | -1     | -1     | -1       | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | 1   | -1    | 1     | 5            | 0,42         | 78,06         | 2           | 0,12        | 77,17        |
| 90   | 1      | -1     | -1       | 1         | 1   | -1    | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 2            | 49,23        | 100,27        | 2           | 49,76       | 100,30       |
| 91   | -1     | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 2            | 46,33        | 10,43         | 2           | 49,11       | 10,41        |
| 92   | 1      | 1      | -1       | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | 1     | 1     | 2            | 49,86        | 10,06         | 2           | 48,51       | 10,06        |
| 93   | -1     | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | 1   | -1  | 1     | -1    | 3            | 15,42        | 8,74          | 3           | 16,48       | 9,10         |
| 94   | 1      | -1     | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 14           | 18,03        | 8,59          | 2           | 49,88       | 10,01        |
| 95   | -1     | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 2            | 0,46         | 20,45         | 4           | 0,88        | 21,91        |
| 96   | 1      | 1      | 1        | 1         | 1   | -1    | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 2            | 1,18         | 92,31         | 2           | 2,90        | 97,01        |
| 97   | -1     | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 3            | 0,32         | 38,70         | 3           | 0,35        | 40,91        |
| 98   | 1      | -1     | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 2            | 1,75         | 94,35         | 2           | 0,78        | 97,16        |
| 99   | -1     | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 2            | 47,55        | 10,28         | 2           | 49,90       | 10,28        |
| 100  | 1      | 1      | -1       | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 2            | 20,54        | 9,99          | 2           | 49,98       | 10,00        |
| 101  | -1     | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 3            | 17,66        | 4,83          | 3           | 16,65       | 5,18         |
| 102  | 1      | -1     | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 16           | 18,62        | 3,89          | 2           | 1,57        | 6,85         |
| 103  | -1     | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 3            | 1,39         | 7,86          | 5           | 2,17        | 7,90         |
| 104  | 1      | 1      | 1        | -1        | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 3            | 1,58         | 61,17         | 2           | 1,22        | 64,71        |
| 105  | -1     | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | 1     | 2            | 49,64        | 10,04         | 2           | 49,83       | 10,05        |
| 106  | 1      | -1     | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 2            | 49,42        | 10,42         | 2           | 48,72       | 10,43        |
| 107  | -1     | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 2            | 47,18        | 100,08        | 2           | 49,78       | 100,12       |
| 108  | 1      | 1      | -1       | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | 1     | 2            | 1,50         | 98,00         | 2           | 1,50        | 98,24        |
| 109  | -1     | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 3            | 2,64         | 36,58         | 3           | 2,00        | 37,95        |
| 110  | 1      | -1     | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 4            | 0,49         | 60,91         | 2           | 0,18        | 61,17        |
| 111  | -1     | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 4            | 4,51         | 6,58          | 5           | 5,14        | 6,50         |
| 112  | 1      | 1      | 1        | 1         | -1  | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | -1    | 2            | 49,98        | 10,29         | 2           | 49,65       | 10,37        |
| 113  | -1     | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | 1     | 19           | 14,69        | 7,32          | 2           | 1,43        | 9,12         |
| 114  | 1      | -1     | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | -1    | 2            | 49,37        | 10,36         | 2           | 49,99       | 10,36        |

Tabela 14 – Resultados dos 128 cenários do experimento fatorial fracionado. (Continuação...)

| Ord. | $\psi$ | $\phi$ | $\delta$ | $\lambda$ | $g$ | $T_1$ | $a$ | $b$ | $M$ | $C_0$ | $C_1$ | $n_{ESSI}^*$ | $h_{ESSI}^*$ | $E(L)_{ESSI}$ | $n_{STD}^*$ | $h_{STD}^*$ | $E(L)_{STD}$ |
|------|--------|--------|----------|-----------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|-------|--------------|--------------|---------------|-------------|-------------|--------------|
| 115  | -1     | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | -1    | -1    | 2            | 1,08         | 77,63         | 2           | 0,87        | 79,76        |
| 116  | 1      | 1      | -1       | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | 1     | 2            | 0,25         | 56,74         | 2           | 0,44        | 70,05        |
| 117  | -1     | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | -1    | 3            | 4,36         | 16,23         | 3           | 4,01        | 17,45        |
| 118  | 1      | -1     | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | 1     | 2            | 0,48         | 25,15         | 2           | 0,33        | 28,34        |
| 119  | -1     | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | 1     | 4            | 6,76         | 2,61          | 5           | 7,84        | 2,57         |
| 120  | 1      | 1      | 1        | -1        | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | -1    | 7            | 49,53        | 9,05          | 2           | 49,78       | 10,06        |
| 121  | -1     | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | 1     | -1    | 3            | 0,19         | 74,56         | 2           | 0,17        | 75,73        |
| 122  | 1      | -1     | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | -1    | 1     | 2            | 48,27        | 100,28        | 2           | 49,62       | 100,30       |
| 123  | -1     | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | 1     | 1     | 2            | 48,97        | 10,41         | 2           | 49,07       | 10,42        |
| 124  | 1      | 1      | -1       | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | -1    | -1    | 2            | 48,68        | 10,06         | 2           | 49,37       | 10,06        |
| 125  | -1     | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | -1  | -1    | 1     | 3            | 20,24        | 9,29          | 3           | 22,88       | 9,55         |
| 126  | 1      | -1     | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | -1  | 1     | -1    | 15           | 17,19        | 8,10          | 2           | 49,86       | 10,00        |
| 127  | -1     | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | -1  | 1   | -1    | -1    | 3            | 0,73         | 20,21         | 4           | 0,82        | 21,76        |
| 128  | 1      | 1      | 1        | 1         | 1   | 1     | 1   | 1   | 1   | 1     | 1     | 2            | 1,66         | 92,97         | 2           | 3,40        | 97,21        |

Definindo a diferença percentual de custo  $\Delta_{ESSI}$ , entre a estratégia de amostragem ESSI e a estratégia de amostragem STD, como:

$$\Delta_{ESSI} = 100 \cdot \frac{E(L)_{ESSI} - E(L)_{STD}}{E(L)_{STD}} \quad (84)$$

pode-se calcular a economia de custo alcançável por meio do uso da estratégia ESSI em comparação com a estratégia de amostragem baseada em subgrupos racionais (STD), em que um valor negativo de  $\Delta_{ESSI}$  corresponde ao ganho econômico da estratégia ESSI em comparação com a estratégia STD.

Deste modo, é possível observar que a estratégia de amostragem ESSI é a estratégia mais econômica para 113 casos dos 128 cenários com uma economia média de 6,18% em comparação com a estratégia STD. Porém nos 15 casos restantes a estratégia de amostragem STD supera em média 1,55% a estratégia ESSI.

As Tabelas 15 e 16 apresentam o custo médio, mínimo e máximo esperado de  $E(L)$  e o ganho econômico  $\Delta_{ESSI}$  estratificados por  $\delta$  e  $\phi$ , para  $\psi = 0,2$  (Tabela 15) e  $\psi = 0,8$  (Tabela 16).

Para as estratégia STD e ESSI há um aumento do custo horário esperado de monitoramento com o aumento do grau de oscilação da média  $\psi$  e o grau de autocorrelação  $\phi$  seja qual for a magnitude do desvio da média  $\delta$ .

Tabela 15 – Médias, mínimos máximos de  $E(L)$  e  $\Delta_{ESSI}$  estratificados por  $\delta$  e  $\phi$  para  $\psi = 0,2$ .

|                 |     | Média    | Min.         | Máx.   |
|-----------------|-----|----------|--------------|--------|
|                 |     | $\delta$ | $\phi = 0.2$ |        |
| $E(L)_{ESSI}$   | 0,5 | 40,08    | 7,18         | 98,58  |
|                 | 2,0 | 12,22    | 1,93         | 36,65  |
| $E(L)_{STD}$    | 0,5 | 41,64    | 9,02         | 100,11 |
|                 | 2,0 | 12,67    | 2,06         | 38,29  |
| $\Delta_{ESSI}$ | 0,5 | -4,46    | -20,38       | 1,15   |
|                 | 2,0 | -3,89    | -7,30        | 1,68   |
|                 |     | $\delta$ | $\phi = 0.8$ |        |
| $E(L)_{ESSI}$   | 0,5 | 40,45    | 8,25         | 100,88 |
|                 | 2,0 | 13,50    | 2,31         | 40,84  |
| $E(L)_{STD}$    | 0,5 | 42,55    | 8,51         | 100,13 |
|                 | 2,0 | 14,01    | 2,27         | 42,74  |
| $\Delta_{ESSI}$ | 0,5 | -3,73    | -19,24       | 0,63   |
|                 | 2,0 | -2,01    | -7,11        | 1,78   |

Tabela 16 – Médias, mínimos máximos de  $E(L)$  e  $\Delta_{ESSI}$  estratificados por  $\delta$  e  $\phi$  para  $\psi = 0,8$ .

|                 |     | Média    | Min.         | Máx.   |
|-----------------|-----|----------|--------------|--------|
|                 |     | $\delta$ | $\phi = 0.2$ |        |
| $E(L)_{ESSI}$   | 0,5 | 48,10    | 9,67         | 100,30 |
|                 | 2,0 | 28,53    | 3,89         | 75,04  |
| $E(L)_{STD}$    | 0,5 | 48,20    | 9,82         | 100,30 |
|                 | 2,0 | 34,67    | 6,85         | 93,33  |
| $\Delta_{ESSI}$ | 0,5 | -0,25    | -2,89        | 4,98   |
|                 | 2,0 | -19,25   | -43,31       | 3,98   |
|                 |     | $\delta$ | $\phi = 0.8$ |        |
| $E(L)_{ESSI}$   | 0,5 | 49,00    | 9,99         | 100,30 |
|                 | 2,0 | 32,64    | 6,25         | 92,97  |
| $E(L)_{STD}$    | 0,5 | 50,40    | 10,00        | 100,30 |
|                 | 2,0 | 39,33    | 6,90         | 97,21  |
| $\Delta_{ESSI}$ | 0,5 | -2,01    | -19,00       | -0,01  |
|                 | 2,0 | -13,85   | -41,45       | -0,52  |

Para  $\{\psi, \phi, \delta\} = \{0,2; 0,2; 2\}$  a média de custo horário esperado de monitoramento quando adotada estratégia STD é 12,67 \$/hora e de 14,01 \$/hora para  $\{\psi, \phi, \delta\} = \{0,2; 0,8; 2\}$ : isto é em média o percentual de aumento do custo é de 10.6% devido ao elevado grau de autocorrelação  $\phi$ , e para um grau de oscilação da média de  $\psi = 0,8$  este custo médio aumenta 13,4%, evidenciando que um aumento do grau de autocorrelação aumenta o custo esperado de monitoramento.

Um fato interessante que pode ser observado, é a maior sensibilidade no custo de monitoramento para a estratégia ESSI para pequenos desvios da média ( $\delta = 0,5$ ), pois quando há um aumento do grau de oscilação da média  $\psi$ , por exemplo: para  $\{\psi, \phi, \delta\} = \{0,2; 0,2; 0,5\}$  a média de custo para estratégia ESSI é de 40,08 \$/hora e para  $\{\psi, \phi, \delta\} = \{0,8; 0,2; 0,5\}$  é de

48,10 \$/hora, isto é, em média o custo aumenta 20,0% devido ao elevado grau de oscilação da média. Para  $\{\psi, \phi, \delta\} = \{0,2; 0,2; 0,5\}$  a média de custo para estratégia STD é 41,64% \$/hora e para  $\{\psi, \phi, \delta\} = \{0,8; 0,2; 0,5\}$  é de 48,20 \$/hora, isto é, em média o custo aumenta 15,8% devido ao elevado grau de oscilação da média.

Este fato pode ser explicado pela presença de uma probabilidade  $\beta_1 > \beta$  do erro do *Tipo II* para a primeira amostra que deteriora o desempenho associado à estratégia ESSI, ilustrado nas Figuras 13 e 14 mostram o desempenho econômico do gráfico de  $\bar{X}$  com as estratégias ESSI e STD para diferentes valores de  $\delta = \{0,5; 1; 1,5; 2; 3; 4; 5\}$ , para  $\phi = 0,8$ ,  $\lambda = 0,0167$ ,  $T_1 = 0,5$ ,  $a = 1,5$ ,  $b = 10$ ,  $M = 100$ ,  $C_0 = 30$ ,  $C_1 = 60$ ,  $\psi = 0,2$  (Figura 15) e  $\psi = 0,8$  (Figura 16).

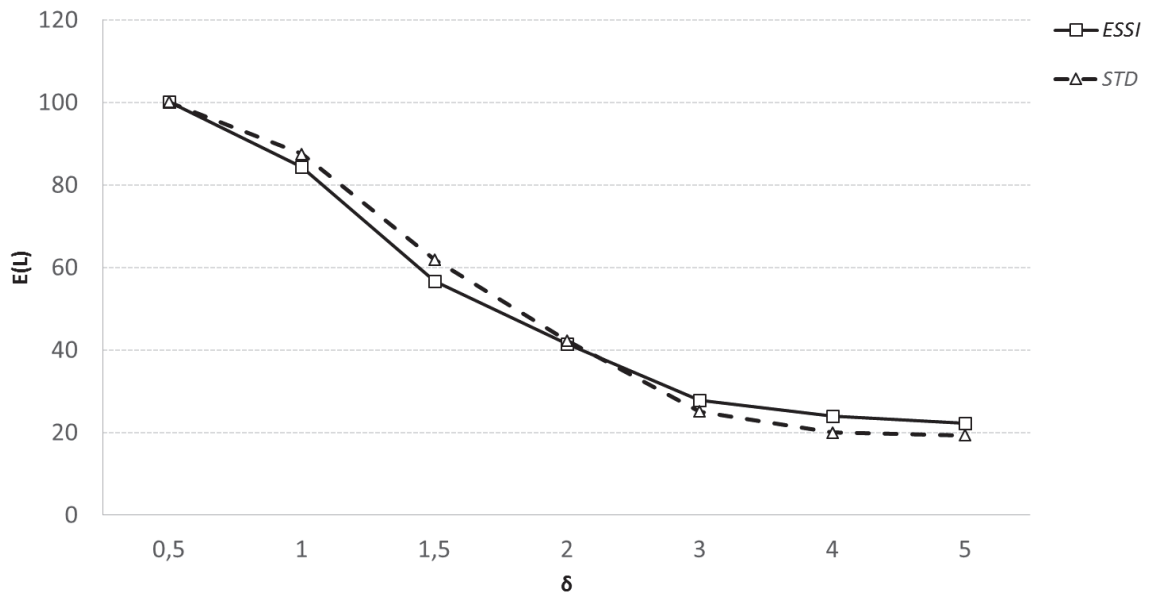


Figura 15 –  $E(L)$  para estratégias STD e ESSI,  $\psi = 0,2$ .

Para  $\delta > 2$  o gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia STD tem melhor desempenho econômico que o gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia ESSI para baixos níveis de oscilação da média, ver Figura 15. Para um alto nível de oscilação da média ( $\psi = 0,8$ ), Figura 16, o gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia ESSI tem melhor desempenho que o gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia STD, mesmo com o aumento de  $\delta$ .

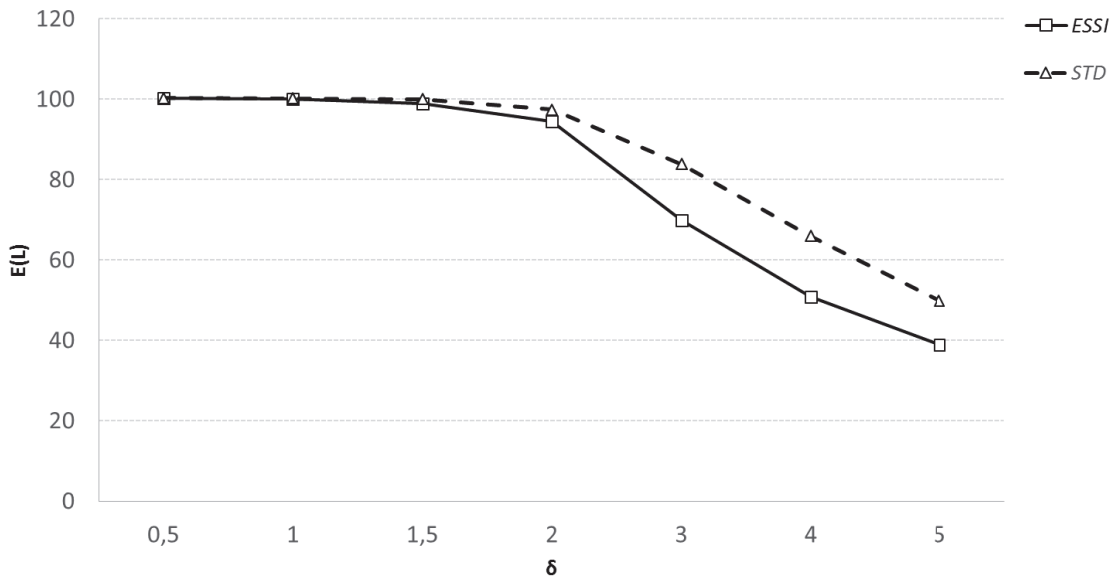


Figura 16 –  $E(L)$  para estratégias STD e ESSI,  $\psi = 0,8$ .

Estes resultados indicam a interação entre  $\psi$  e  $\delta$ , como já mencionado na seção 2.3.2, e contabilizar a presença de interação entre os fatores é essencial em um estudo no qual vários parâmetros são considerados, e a melhor abordagem para testar se os fatores de custo e processo e/ou suas interações são significativas na diferença de desempenho entre as estratégias de amostragem, consiste em construir uma tabela de análise de variâncias (ANOVA) do plano experimental para cada variável resposta de interesse.

Vale ressaltar que correu uma única replicação para cada cenário investigado porque o modelo de custo é determinista e a estrutura de confundimento do projeto de experimentos de resolução  $V$  confunde os principais efeitos com a quarta ordem de interação, e também confunde as interações de segunda ordem com de terceira da ordem.

Com a implementação da ANOVA é possível determinar os fatores significativos, bem como suas interações que explicam uma parte significativa da variabilidade associada a cada diferença percentual de custo  $\Delta_{ESSI}$ , e ainda ajustar a um modelo de regressão de variáveis codificadas (MONTGOMERY *et al.*, 2001), que é muito útil para prever dentro de uma região de interesse, a diferença no desempenho econômico-estatístico entre as estratégias ESSI e STD.

Estas variáveis codificadas são muito úteis para determinar o tamanho relativo dos efeitos do fator na variável resposta através do seu coeficiente de regressão associado, em que, por exemplo, a variável codificada  $X_\psi \in [-1; 1]$  para o fator  $\psi$  pode ser calculada como:

$$X_\psi = \frac{\psi - \frac{\psi_L + \psi_H}{2}}{\frac{\psi_L - \psi_H}{2}}, \quad (85)$$

em que  $(\psi_L; \psi_H) = (0,2; 0,8)$ .

A Tabela 17 mostra para  $\Delta_{ESSI}$  os fatores significantes e as interações de segunda ordem, bem como os coeficientes  $R^2$ ,  $R^2_{adj}$  e a equação do modelo de regressão, sendo que a verificação da adequação do modelo ao problema não apresentou qualquer anomalia nos resíduos.

Tabela 17 – Modelo de regressão para  $\Delta_{ESSI}$

|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                        | Principais efeitos | Interações de segunda ordem |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| Fatores significantes                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                    | $(\psi \times \delta)$      |
|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\psi$             | $(\psi \times \lambda)$     |
|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\delta$           | $(\phi \times \lambda)$     |
|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\lambda$          | $(\phi \times a)$           |
|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                        | $b$                | $(\phi \times b)$           |
|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                        | $M$                | $(\phi \times M)$           |
|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                    | $(a \times M)$              |
| $R^2 = 0,76$                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                    |                             |
| $R^2_{adj} = 0,62$                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                    |                             |
| Modelo*                                                                                           | $\hat{\Delta}_{ESSI} = -6,18 - 2,66X_{\psi} + 0,78X_{\phi} - 3,57X_{\delta} + 2,81X_{\lambda} + 1,43X_b - 1,42X_M$ $- 4,14X_{\psi}X_{\delta} + 1,43X_{\psi}X_{\lambda} - 1,35X_{\phi}X_{\lambda} + 1,67X_{\phi}X_a$ $+ 1,45X_{\phi}X_b - 2,27X_{\phi}X_M + 2,17X_aX_M$ |                    |                             |
| * O fator não significativo $\phi$ foi adicionado ao modelo respeitando o princípio da hierarquia |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                    |                             |

Estes resultados, apresentados na Tabela 17, permitem concluir que para os cenários investigados, o modelo de regressão pode explicar o comportamento econômico da estratégia ESSI em comparação com a estratégia STD, pois de fato,  $R^2 = 0.76$  e  $R^2_{adj} = 0.62$ .

Analisando os coeficientes de regressão para  $X_\psi$  (-2,66),  $X_\delta$  (-3,57),  $X_M$  (-1,42) do modelo de regressão  $\hat{\Delta}_{ESSI}$ , pode-se elevar o ganho econômico (um valor negativo de  $\Delta_{ESSI}$ ) da estratégia de amostragem ESSI em relação a estratégia STD, com um aumento de  $\psi$ ,  $\delta$  ou  $M$ . Porém se observar o coeficiente de regressão  $X_b$  (+1,43), um aumento do custo  $b$  variável de extração de uma observação de uma amostra de tamanho  $n$ , reduz o ganho econômico adquirido com a estratégia ESSI.

Outro fato relevante, são as diversas interações de segunda ordem presentes no modelo de regressão para  $\Delta_{ESSI}$ , e é importante ressaltar que a interação  $(\psi \times \delta)$  possui o maior valor de coeficiente de regressão, influenciando positivamente no desempenho da estratégia ESSI em comparação com a estratégia STD, quando empregadas no gráfico de  $\bar{X}$ .

E outro ponto a ser observado das interações de segunda ordem, está no fato de a interação  $(\psi \times \phi)$  não ser significativa, quando comparado o ganho econômico do gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia ESSI em comparação gráfico de  $\bar{X}$  com a estratégia STD, mesmo que esta interação piora o desempenho econômico da estratégia de amostragem ESSI e STD.

### 4.2.3 Erro de especificação dos parâmetros de processo e custo

Como já mencionado na seção 3.2.3, a imprecisão na estimativa dos parâmetros de custo e processo pode resultar em um planejamento de gráfico de controle de qualidade inferior, e uma investigação sobre os efeitos da má especificação dos parâmetros significantes pode ser desenvolvida de acordo com a abordagem apresentada por Nenes e Tagaras (2006).

Então uma análise de sensibilidade é desenvolvida para investigar o efeito o erro de especificação dos parâmetros  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $b$  e  $M$ , da seguinte maneira:

- Passo 1: Assumir um erro de superestimação/subestimação igual a  $\pm 15\%$ ;
- Passo 2: Escolher um parâmetro de processo ou custo e aplicar a superestimação/subestimação;
- Passo 3: Realizar o procedimento de otimização em todos os 128 cenários obtendo o custo esperado de monitoramento  $E(L)$  para o conjunto “ótimo” das variáveis de  $\Omega_{esp}^* = \{n_{esp}^*, h_{esp}^*\}$  para cada estratégia de amostragem;
- Passo 4: Comparar percentualmente os resultados de custo obtidos com a superestimação/subestimação do parâmetro escolhido com os resultados de custo já obtidos sem qualquer erro de especificação (Tabela 14), calculando a penalidade média e máxima do custo esperado de monitoramento.
- Passo 5: Voltar ao passo 2 caso ainda tenha parâmetros de custo e processo que não foram investigados quanto a uma superestimação ou subestimação.

A Tabela 18 apresenta os valores da média e máxima porcentagem de penalidade em custo para cada erro de especificação dos parâmetros de processo e custo. Os resultados mostram que a estratégia ESSI é mais robusta que a estratégia STD pois sofre menor penalidade média do custo, por exemplo, um erro de especificação do coeficiente de autocorrelação  $\phi$  tem penalidade média do custo igual a -0,25% (0,40%) para uma subestimação (superestimação) deste parâmetro para ESSI contra 4,62% (6,77%) para uma subestimação (superestimação) deste parâmetro para STD, ou seja, quando há uma erro de estimação do parâmetro  $\phi$  a influência no custo horário esperado de monitoramento para o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI é menor, sendo que para uma subestimação de  $\phi$  o custo horário esperado de monitoramento reduz em -0,25% para o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI e aumenta em média 4,62% para o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD.

O mesmo pode ser observado para um erro de especificação do grau de oscilação da média  $\psi$  em que o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD apresenta maior penalidade média do custo igual a 9,42% para uma superestimação deste parâmetro, e também para os parâmetros de taxa de falha  $\lambda$  (8,23%), custo variável de extração de uma observação  $b$  (6,92%) e o custo horário da penalidade associada à produção no estado fora de controle  $M$  (15,98%).

Tabela 18 – Efeitos do erro de especificação (Subestimação (U): -15% / Superestimação (O): +15%) dos parâmetros significantes de processo e custo.

|                      | <i>ESSI</i>                        |                                     | <i>STD</i>                         |                                     |
|----------------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
|                      | Penal.<br>média do<br>custo<br>(%) | Penal.<br>máxima<br>do custo<br>(%) | Penal.<br>média do<br>custo<br>(%) | Penal.<br>máxima<br>do custo<br>(%) |
| $\psi$ (U)<br>(O)    | -7,05<br>6,90                      | 11,16<br>55,26                      | -0,32<br>9,42                      | 39,99<br>57,14                      |
| $\phi$ (U)<br>(O)    | -0,25<br>0,40                      | 26,16<br>9,45                       | 4,62<br>6,77                       | 34,37<br>45,99                      |
| $\delta$ (U)<br>(O)  | 7,01<br>-7,74                      | 23,86<br>6,45                       | 12,07<br>-1,80                     | 48,96<br>28,94                      |
| $\lambda$ (U)<br>(O) | -4,90<br>3,57                      | 14,36<br>17,39                      | 1,52<br>8,23                       | 39,55<br>46,43                      |
| $b$ (U)<br>(O)       | -2,51<br>2,29                      | 14,65<br>22,06                      | 3,07<br>6,92                       | 45,77<br>45,74                      |
| $M$ (U)<br>(O)       | -13,11<br>9,85                     | 6,71<br>20,04                       | -8,41<br>15,98                     | 32,26<br>48,36                      |

É interessante notar que uma atenção especial deve ser dada na estimativa de  $\psi$ ,  $\delta$  e  $M$ , porque os erros na estimativa destes parâmetros de processo e custo levam a uma penalidade média significativa no custo. E uma possível solução para transpor os problemas associados à má especificação deste parâmetros seria realizar o planejamento econômico com  $\psi$ ,  $\delta$  e  $M$  aleatórios, como realizado para  $\delta$  em Celano (2009) e Celano *et al.* (2011).

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

### 5.1 VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS

Esta Tese teve como objetivo propor novos esquemas de amostragens que melhorem o desempenho do gráfico de controle  $\bar{X}$  na presença de observações autocorrelacionadas ou de médias que oscilam, e para isso foram delineados alguns objetivos específicos, com a proposição das estratégias de amostragem e sua análise de desempenho.

Em suma, esta Tese propôs duas novas estratégias de amostragem, a primeira denominada amostras compostas (no inglês *mixed*) destinada ao o monitoramento de processos com observações autocorrelacionadas e a segunda denominada ESSI (do inglês *equally spaced samples items*) destinada ao monitoramento de processos em que a média oscila.

As estratégias propostas foram implementadas para o gráfico de  $\bar{X}$  e seu desempenho estatístico e econômico foram avaliados.

Para processo cujas observações são autocorrelacionadas, foi realizado a comparação do desempenho econômico e estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  com aplicação da estratégia com amostras composta, 0-skip, 1-skip e 2-skip. Para processos em que a média oscila, foi realizado a comparação do desempenho econômico e estatístico do gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI e com a estratégia STD baseada em subgrupos racionais.

Tornando possível alcançar o objetivo principal como será concluído na seção 5.2.

### 5.2 CONCLUSÕES

Uma abordagem generalizada para a construção de um subgrupo racional é retirar itens produzidos consecutivos para minimizar a possibilidade da variabilidade dentro de uma amostra. Porém quando se trata de um processo autocorrelacionado a utilização do conceito de subgrupo racional para construção das amostras deteriora significativamente o desempenho do gráfico de controle, sendo esta apenas percebido no momento em que o processo é monitorado, aumentando o índice de alarmes falsos e levando a descrédito o gráfico de controle.

Com o objetivo de melhorar o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  no monitoramento de processos autocorrelacionados, esta Tese propôs a ruptura, em parte para processos com observações autocorrelacionadas e total para processos autocorrelacionados em que a média oscila, do conceito de subgrupos racionais.

Para o monitoramento de processos com observações autocorrelacionadas, a estratégia de amostragem composta baseou-se na combinação de itens de duas amostras consecutivas, baseadas em subgrupos racionais, tomadas a cada intervalo de amostragem  $h$ . O desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com a adoção de amostras compostas mostrou-se influenciado por três fatores  $(n, \phi, \delta)$ , apresentando melhor desempenho quando comparada as estratégia *s-skip*  $s = \{0,1,2\}$ , proposta por Costa e Castagliola (2011), de moderada a forte autocorrelação ( $\phi > 0,5$ ), tamanhos de amostras pequenas ( $n = 4, 5$ ) e pequenas magnitudes de deslocamentos da média ( $\delta \leq 0,5$ ). Entretanto, para valores maiores de  $n$  e  $\delta$ , o desempenho superior do gráfico de  $\bar{X}$  com a adoção de amostras compostas é limitado pela presença de forte autocorrelação ( $\phi > 0,7$ ).

Para o monitoramento de processos autocorrelacionados em que a média oscila, foi proposto a estratégia de amostragem ESSI (do inglês *equally spaced samples items*), que sugere a adoção de amostras com itens igualmente espaçados segundo o instante em que são produzidos e retirados da linha de produção.

A análise de desempenho econômico e estatístico mostrou que o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI é influenciado por cinco fatores  $(n, h, \delta, \square, \square\square)$ , e apresenta melhor desempenho quando comparado com o gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia STD para qualquer nível de oscilação da média ( $\square$ ). Sendo que este desempenho é reduzido para pequenos desvios da média ( $\delta < 0,5$ ), devido à possibilidade de ocorrência da causa especial no momento de formação da primeira amostra, que deteriora o desempenho estatístico e como consequência o desempenho econômico.

Vale ressaltar que o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com estratégia ESSI é melhorado quando aumenta o tamanho da amostra  $n$  e o intervalo de amostragem  $h$ , pois a amostra tende a ter maior informação a respeito do movimento oscilatório da média.

O desempenho apresentado do gráfico de  $\bar{X}$  com a utilização das estratégias de amostragem propostas levam a sugerir aos profissionais de qualidade a sua utilização no monitoramento de processos mesmo quando não há conhecimento exato do grau de autocorrelação entre observações e oscilação da média do processo.

### 5.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

As direções para futuras pesquisas são:

- Implementar as estratégias propostas para gráficos de controle EWMA e CUSUM, ou ainda gráficos de controle adaptativos;
- Investigar o efeito dos erros do sistema de medição com a aplicação das estratégias propostas, pois segundo Linna e Woodall (2001) raramente há menção explícita do efeito de erros de medição no uso dos gráficos de controle;
- Estudar a viabilidade de implementar as estratégias propostas para outros modelos de autocorrelação;
- Investigar se há dependência entre o deslocamento da média do processo devido a uma causa especial e o movimento oscilatório da média ou o modelo de autocorrelação adotado; e
- Implementar as estratégias propostas para gráficos de controle para o monitoramento de mais de uma característica de qualidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABUJIYA, M.R.; MUTTLAK H.A., Quality control chart for the mean using double rank set sampling, **Journal of Applied Statistics** 31 (2004), pp. 1185–1201.
- ALWAN, L. C., ROBERTS, H. V, Time-Series Modeling for Statistical Process Control. **Journal of Business & Economic Statistics**, v.6, n.1, p. 87-95, 1988.
- ALWAN, L. C.; RADSON, D., Time-series investigation of subsample mean charts. **IIIE Transactions**, v.24, p.66-80, 1992.
- APLEY, D. W.; TSUNG, F., The autoregressive  $T^2$  chart for monitoring univariate autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v.34, p.80-96, 2002.
- APLEY, D. W.; LEE, H. C., Design of exponentially weighted moving average control charts for autocorrelated processes with model uncertainty. **Technometrics**, v.45, p.187–198, 2003.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H., **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Editora Campus-Elsevier, 2007.
- BAGSHAW, M., JOHNSON, R. A., The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests II, **Technometrics** 17, 73–80, 1975
- BAI DS, LEE KT. An economic design of variable sampling interval X-bar control charts. *International Journal of Production Economics* v.64, p.54-57, 1998
- BAKER, K.R. Two process Models in the economic design of an X-chart. **AIIE Transactions**, v.3, n.4, p.257-263, 1971.
- BANERJEE, P. K., RAHIM, M. A. Economic design of X control charts under Weibull shock models. **Technometrics**, v.30, n.4, p.407–414, 1988.
- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C.; Modelling and Simulation: operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations & Production Management**, v.22, n.2, p.241-264, 2002.
- CASTAGLIOLA, P., CELANO, G. COSTA, A. F. B., FICHERA, S., Constrained economic design of S control charts for random process shifts. **International Journal of Quality & Reliability Management**, v.28 n.3, p.298 – 316, 2011.
- CASTAGLIOLA, P.; TSUNG, F. Autocorrelated statistical process control for non-normal situations. **Quality and Reliability Engineering International**, v.21, p. 131-161, 2005.
- CASTILLO, E. D. **Statistical Process Adjustment for Quality Control**. 1st ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 357 p., 2002.
- CELANO, G., On the constrained economic design of control charts: a literature review, **Produção**, v.21, n.2, p.223-234, 2011.
- CELANO, G. On the constrained economic-statistical design of control charts by the inspection workstation configuration. **International Journal of Quality and Engineering Technology**, v. 1, n. 3, p. 231-252, 2010.
- CELANO, G., Robust design of adaptive control charts for manual manufacturing / inspection workstations, **Journal of Applied Statistics** 36(2), 181-203, 2009.
- CELANO, G., COSTA, A.F.B., DE MAGALHAES, M.S., FICHERA, S., A stochastic shift model for economically designed charts constrained by the process stage configuration, **International Journal of Production Economics** 132(2), 315-325, 2011.

G. CELANO, A.F.B. COSTA, M.S. DE MAGALHAES, S. FICHERA, **Constrained economic design of a SPC procedure in a manual multi-task workstation**, Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Systems Management IESM 2009, Montreal (Canada), May 12-15, CD-ROM, ISBN: 978-2-9600532-2-7, 2009.

CELANO, G, FICHEIRA, S. Multiobjective economic design of an  $\bar{X}$  control chart. **Computers & Industrial Engineering**, v.37, n.1, p.129-132, 1999.

ÇINLAR, E., 1975. **Introduction to Stochastic Processes**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

CHEN, Y. K. An evolutionary economic-statistical design for VSI  $\bar{X}$  control charts under non-normality. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v.22, n.7-8, p.602–610, 2003.

CHEN, A.; CHEN, Y. K. Design of EWMA and CUSUM control charts subject to random shift sizes and quality impacts. **IIE Transactions**, v. 39, n. 12, p. 1127-1141, 2007.

CHEN, Y. K., CHIOU, K. C. Optimal design of VSI  $\bar{X}$  control charts for monitoring correlated sample. *Quality and Reliability Engineering International*, v.21, n.8, p.757–768, 2005.

CHEN, Y. K., HSIE, K. L., CHANG C. C. Economic design of the VSSI  $\bar{X}$  control charts for correlated data. **International journal Production Economics**, v.107, n.2, p.528–539, 2007.

CHEN, F. L., YEH, C. H. Economic statistical design of non-uniform sampling scheme  $\bar{X}$  control charts under non-normality and Gamma shock using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v.36, n.5, p.9488–9497, 2009.

CHOU, C-Y., CHEN, C-H., CHEN, C-H. Economic design of variable sampling intervals T2 control charts using genetic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v.30, n.2, p.233–242, 2005.

CHOU, C-Y., CHENG, J-C, LAI, W-T. Economic design of variable sampling intervals EWMA charts with sampling at fixed times using genetic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v.34, n.1, p.419–426, 2008.

CHOU, C-Y., CHEN, C-H., LIU, H-R. Economic-statistical design of  $\bar{X}$  chart for non-normal data by considering quality loss. **Journal of Applied Statistics**, v.27, n.8, p.939–951, 2000.

CHOU, C-Y., CHEN, C-H., LIU, H-R. Economic design of  $\bar{X}$  charts for nonnormally correlated data. **International Journal of Production Research**, v.39, n.9, p.1931–1941, 2001a.

CHOU, C-Y., CHEN, C-H., LIU, H-R. Economic Design of EWMA Charts with Variable Sampling Intervals. **Quality & Quantity**, v.40, n.6, p.879–896, 2006.

CHOU, C. Y., LIU, H. R., CHEN, C. H. Economic Design of Averages Control Charts for Monitoring a Process with Correlated Samples. **International Journal Advanced Manufacturing Technology**, v.18, n.1, p.49–53, 2001b.

COLLANI, E. The economic design of  $\bar{X}$ -control charts. In: **Anais do Proceedings of IASTED International Symposium on Reliability and Quality Control**. Paris, p.186-189, 1987.

COSTA, A.F.B., 2001. Economic design of  $\bar{X}$  charts with variable parameter: the Markov chain approach. **Journal of Applied Statistics** 28, 875–885.

COSTA, A.F.B.,  $\bar{X}$  charts with variable parameters, **Journal of Quality Technology**, 31, 408-416, 1999.

COSTA, A.F.B.,  $\bar{X}$  charts with variable sample size and sampling intervals, **Journal of Quality Technology**, 29, 197-204, 1997.

COSTA, A.F.B.,  $\bar{X}$  charts with variable sample size, **Journal of Quality Technology**, 26, 155-163, 1994.

COSTA, A. F. B.; CASTAGLIOLA, P., Effect of Measurement Error and Autocorrelation on the  $\bar{X}$ -bar Chart. **Journal of Applied Statistics**, v.38, n.4, p.661-673, 2011.

COSTA, A. F. B.; CLARO, F. A. E., Double sampling control chart for a first-order autoregressive and moving average process model. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v.39, n.5-6, p.521-542, 2008.

COSTA, A. F. B., CLARO, F. A. E. Economic design of Xbar control charts for monitoring a first order autoregressive process. **Brazilian Journal of Operations and Production Management**, v.6, n.2, p.07-26, 2009.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R., **Controle Estatístico de Qualidade**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2005. 334 p.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G., Variable parameter and double sampling  $\bar{X}$  charts in the presence of correlation: The Markov chain approach. **International Journal of Production Economics**, v.130, n.2, p.224-229, 2011.

COSTA NETO, P. L. O., **Estatística**. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

CLARO, F. A. E. **Gráficos de Controle de X para o monitoramento de processos autocorrelacionados**. 2008. 159 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.

DAUDIN, J. J., Double sampling X charts, **Journal of Quality Technology**, 24, 78-87, 1992.

DE MAGALHÃES, M.S., COSTA, A.F.B., EPPRECHT, E.K., Constrained optimization model for the design of an adaptive X chart, **International Journal of Production Research**, 40, 3199-3218, 2002.

DE MAGALHÃES, M. S., EPPRECHT, E. K., COSTA, A. F. B. Economic Design of a Vp X chart. **International Journal of Production Economics**, v.74, n.1, p.191–200, 2001.

DE MAGALHÃES, M. S, COSTA, A. F. B., MOURA NETO, F. D., **Análise de desempenho de uma classe de gráficos de controle adaptativos**. Anais do XXVI ENEGEP - Fortaleza, CE, Brasil, 9 a 11 de Outubro de 2006.

DUNCAN, A. J. The economic design of X chart when there is a multiplicity of assignable causes. **Journal of the American Statistical Association**, v. 66, n. 333, p. 107- 121, 1971.

DUNCAN, A. J. The economic design of X-charts used to maintain current control of a process. **Journal of the American Statistical Association**, v.51, n.274, p.228-242, 1956.

DURBIN, J.; WATSON, G. S., Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II, **Biometrika**, v.38, n. 1/2, p.159-177, 1951.

ENGLISH, J. R.; LEE, S. C.; MARTIN, T. W.; TILMON, C., Detecting changes in autoregressive processes with X-bar and EWMA charts. **IIE Transactions**, v.32, p.1103-1113, 2000.

EPPRECHT, E. K.; LEIRAS, A., Otimização conjunta de gráficos de X-barra - S ou X-barra - R: um procedimento de fácil implementação. **Produção**, v.17, n.3, p.520-535, 2007.

FRANCO, B. C.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G., Economic-statistical design of the  $\bar{X}$  chart used to control a wandering process mean using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v.39, p.12961–12967, 2012.

GIBRA, I. N. Economically Optimal Determination of the Parameters of  $\bar{X}$  Control Chart. **Management Science**, v.17, n.9, p.635-646, 1971.

GIBRA, I. N. Recent Developments in Control Chart Techniques. **Journal of Quality Technology**, v.7, n.4, p.183- 192, 1975.

GILBERT, K. C.; KIRBY, K.; HILD, C. R., Charting autocorrelated data: guidelines for practitioner. **Quality Engineering**, v.9, p.367-382, 1997.

- GRANT, E.; LEAVENWORTH, R., **Statistical Quality Control**. 7 th ed., Toronto: McGraw-Hill Book Company, 714 p., 1996.
- GRUPE, F. H., JOOSTE, S. Genetic algorithms A business perspective. **Information Management & Computer Security**, v.12, n.3, p.289-298, 2004
- HARRIS, T. J., ROSS, W. H., Statistical process control procedures for correlated observations. **Canadian Journal of Chemical Engineering** 69, 48–57, 1991.
- HO, C., CASE, K. E. Economic design of control-charts: a literature review for 1981-1991. **Journal of Quality Technology**, v.26, n.1, p.39-53, 1994.
- HO, L. L., TRINDADE, A. L. G. Economic design of an X chart for short-run production. **International Journal Production Economics**, v.120, n.2, p.613–624, 2009.
- HOERL, R. W., PALM, A. C. Discussion: integrating SPC and APC. **Technometrics**, v.34, n.3, p. 268-272, 1992.
- HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. **Techniques of Statistical Analysis**, p. 111-184, New York, McGraw Hill, 1947.
- HU, P. W. **Economic model of X control chart under non-Poisson process shift**. In Abstract, TIMS/ORSA Joint National Meeting, May 1987, San Francisco. pp. 14–16, 1984.
- JIAO, J. R.; HELO, P. T. Optimization design of a CUSUM control chart based on Taguchi's loss function. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 35, p. 1234-1243, 2008.
- JIANG, W.; TSUI, K.-L., Some properties of the ARMA control chart. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v.47, p.2073–2088, 2001.
- JIANG, W.; TSUI, K. L.; WOODALL, W. H., A new SPC monitoring method: The ARMA chart. **Technometrics**, v.42, n.4, p.399-410, 2000.
- KAYA, I. A genetic algorithm approach to determine the sample size for attribute control charts. **Information Sciences**, v.179, n.10, p.1552–1566, 2009a
- KAYA, I. A genetic algorithm approach to determine the sample size for control charts with variables and attributes. **Expert Systems with Applications**, v.36, n.5, p.8719–8734, 2009b.
- KEATS, J. B., DEL CASTILLO, E., COLLANI, E. V., SANIGA, E. M. Economic Modeling for Statistical Process Control. A Discussion on Statistically-Based Process Monitoring and Control. **Journal of Quality Technology**, v.29, n.2, p.144- 162, 1997.
- KNAPPENBERGER H. A., GRANDAGE, . H. E. Minimum Cost Quality Control Tests. **IIE Transactions**, v.1, n.1, p.24-32, 1969.
- KOUTRAS, M. V.; BERSIMIS S.; MARAVELAKIS, P. E., Statistical Process Control using Shewhart Control Charts with Supplementary Runs Rules. **Methodology and Computing in Applied Probability**, v.9, p.207–224, 2007.
- LIN, Y. C. The variable parameters control charts for monitoring autocorrelated processes. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v.38, n.4, p.729-749, 2009.
- LIN, Y. C.; CHOU, C. Y. The variable sampling rate control charts for monitoring autocorrelated processes. **Quality and Reliability Engineering International**, v.24, n.7, p.855-870, 2008.
- LIN, S.-N; CHOU, C.-Y; WANG, S.-L.; LIU, H.-R. Economic design of autoregressive moving average control chart using genetic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v.39, p.1793–1798, 2012.
- LIN, S.-Y., GUH, R.-S., SHIUE, Y.-R., Effective recognition of control chart patterns in autocorrelated data using a support vector machine based approach. **Computers & Industrial Engineering** v.61, p.1123–1134, 2011.

- LINNA, K., WOODALL, W.H., Effect of measurement error on shewhart control charts, **Journal of Quality Technology**, v.33, n.2, p. 213–222, 2001.
- LIU, H-R, CHOU, C-Y, CHEN, C-H. Minimum-loss design of x-bar charts for correlated data. **Journal of Loss Prevention in the Process Industries**, v.15, n.6, p.405–411, 2002.
- LORENZEN TJ, VANCE LC. The economic design of control charts: A unified approach. **Technometrics**, v.28, n.1, p.3-10, 1986.
- LOWRY, C. A.; MONTGOMERY, D. C. A review of multivariate control charts. **IIE Transactions**, v. 27, p. 800-810, 1995.
- LU, C. W.; REYNOLDS Jr, M. R., CUSUM Charts for Monitoring na Autocorrelated Process. **Journal of Quality Technology**, v.33, n.3, p.316-334, 2001.
- LU, C. W.; REYNOLDS Jr, M. R., EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v.31, n.2, p.166-188, 1999a.
- LU, C. W.; REYNOLDS Jr, M. R., EWMA control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v.31, n.3, p.259-274, 1999b.
- LWIN, T., Parameter estimation in first-order autoregressive model for statistical process monitoring in the presence of data autocorrelation. **Journal of Statistical Planning and Inference** v.141, p.2556-2575, 2011.
- MASON, R. L.; YOUNG, J. C. **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**. 1st. ed. Philadelphia: ASA-SIAM, 2002, 263p.
- MCINTYRE G. A., A method for unbiased selective sampling using ranked sets, **Australian Journal of Agricultural Research** v.3, p. 385–390, 1952.
- MERTENS, K., VAESSEN, I., LÖFFEL, J., KEMPS, B., KAMERS, B., ZOONS, J., DARIUS, P., DECUYPERE, E., DE BAERDEMAEKER, J., DE KETELAERE, B.,. An intelligent control chart for monitoring of autocorrelated egg production process data based on a synergistic control strategy. **Computers and Electronics in Agriculture** v.69, p.100–111, 2009.
- MONTGOMERY, D. C., The Economic Design of Control Charts: A Review and Literature Survey, **Journal of Quality Technology**, v.12, n.2, p. 75–87, 1980.
- MONTGOMERY, D. C., **Introduction to Statistical Quality Control**, 5ª edição, Wiley Sons, 2004.
- MONTGOMERY, D. C.; MASTRAGELO, C. M., Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data. **Journal of Quality Technology**, v.23, n.3, p.179-193, 1991.
- MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G., **Introduction to Linear Regression Analysis**. 3ª edição, New York: John Wiley & Sons, 2001.
- MONTGOMERY, D. C., TORNG, J. C., COCHRAN, J. K., LAWRENCE, F. P., Statistically constrained economic design of the EWMA control chart. **Journal of Quality Technology**, v.27, n.3, p.250–256, 1995.
- MORABITO, R.; PUREZA, V., **Modelagem e Simulação**. In: Miguel, P.A.C. (org.) Metodologia de Pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações. 248p., São Paulo: Campus, 2009.
- MORTARINO, C. Duncan's Model for X-Control Charts:Sensitivity Analysis to Input Parameters. **Quality and Reliability Engineering International**, v.26, n.1, p.17-26, 2010.
- MUTTLAK, H.A., Median ranked set sampling, **Journal of Applied Statistics Sciences** v.6, p. 245–255, 1997.
- MUTTLAK, H.A., Investigating the use of quartile ranked set samples for estimating the population mean, **Applied Mathematics and Computation** v.150, p. 543–554, 2004.

- MUTTLAK, H.A.; AL-SABAH, W.S., Statistical quality control based on ranked set sampling, **Journal of Applied Statistics** v.30, p. 1055–1078, 2003.
- NENES, G., TAGARAS, G., The economically designed CUSUM chart for monitoring short production runs. **International Journal of Production Research** v.44, p.1569-1587, 2006.
- NOOROSSANA, R., VAGHEFI, S. J. M., Effect of autocorrelation on performance of the MCUSUM control chart. **Quality and Reliability Engineering International** v.22, p.191–197, 2006.
- PACELLA, M.; SEMERARO, Q., Using recurrent neural networks to detect changes in autocorrelated processes for quality monitoring. **Computers & Industrial Engineering**, v.52, p.502–520, 2007.
- PARK, C., REYNOLDS, M.R., JR, Economic design of a variable sampling rate X chart, **Journal of Quality Technology** v.31, p.427-443, 1999.
- PRABHU, S. S., MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C. Economic-statistical design of an adaptive X chart. **International Journal of Production Economics**, v.49, n.1, p.1–15, 1997.
- PRABHU, S.S., MONTGOMERY, D.C. & RUNGER G.C., A combined adaptive sample size and sampling interval X control scheme, **Journal of Quality Technology**, v.26, p.164-176, 1994.
- PRABHU, S. S., RUNGER, G. C., KEATS, J. B. X chart with adaptive sample size. **International Journal of Production Research**, v.31, n.12, p.2895–2909, 1993.
- PSARAKIS, S., PAPALEONIDA, G. E. A., SPC procedures for monitoring autocorrelated processes. **Quality Technology and Quantitative Management** v.4, p.501–540, 2007.
- REYNOLDS, M.R., JR, AMIN, R.W. & NACHLAS, J.C., X charts with variable sampling intervals, **Technometrics** v.30, p.181-192, 1988.
- REYNOLDS JR, M. R.; ARNOLD, J. C.; BAIK, J. W., Variable Sampling Interval  $\bar{X}$  Charts in the Presence of Correlation. **Journal of Quality Technology**, v.28, n.1, p.12-30, 1996.
- REYNOLDS JR, M. R.; LU, C-W., Control charts for monitoring processes with autocorrelated data. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v.30, n.7, p. 4059-4067, 1997.
- ROHLEDER, T. R.; SILVER, E. A. Statistical Process Control subject to a labour resource constraint. **International Journal of Production Research**, v. 40, n. 14, p. 3337-3356, 2002.
- RUNGER, C. G.; WILLEMAIN, T. R. Model-based and Model-Free control of autocorrelated process. **Journal of Quality Technology**, v.27, p.283-292, 1995.
- SANIGA, E. M. Economic statistical control chart designs with an application to X and R charts. **Technometrics**, v.31, n.3, p.313–320, 1989.
- SANIGA, E. M., DAVIS, D. J., McWILLIAMS, T. P. Economic, Statistical and Economic- Statistical Design of Attribute Charts. **Journal of Quality Technology**, v.27, n.1, p.56-73, 1995.
- SCHNEIDER, H. & PRUETT, J. M., Control Charting Issues in the Process Industries. **Quality Engineering**, v.6, n.3, p. 347-373, 1994.
- SIMPSON, J. R., KEATS, J. B., Sensitivity study of the CUSUM control chart with an economic model. **International Journal of Production Economics** v.40, p.1-19, 1995.
- SHAMSUZZAMAN, M.; WU, Z.; ELIAS, S. M. R. Design of X & S control chart with optimal manpower deployment. **Computers & Industrial Engineering**, v. 56, p. 1589-1596, 2009.
- SHEU, S. H.; LIN, T. C., The generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean. **Quality Engineering**, v.16, n.2, p.209-231, 2003.

SHEU, S. H.; LU, S. L., Monitoring autocorrelated process mean and variance using GWMA chart based on residuals. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, v.25, n.6, p.781-792, 2008.

SHEU, S. H.; LU, S. L., Monitoring the mean of autocorrelated observations with generally weighted moving average control chart. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v.79, n.12, p.1393-1406, 2010.

SHEWHART, W. A., **Quality control charts**. Bell System Technical Journal, 1926.

SHEWHART, W. A., **Economic control of quality of manufactured product**. D. Van Nostrand Company, NY-EUA, 501 p., 1a ed., 1931.

SIMPSON, J. R., KEATS, J. B., Sensitivity study of the CUSUM control chart with an economic model. **International Journal of Production Economics** v.40, p.1-19, 1995.

SOLEIMANI, P.; NOOROSSANA, R.; AMIRI, A., Simple linear profiles monitoring in the presence of within profile autocorrelation. **Computers & Industrial Engineering**, v.57, p.1015-1021, 2009.

SVOBODA, L. **Economic Design of Control Charts: a Review and Literature Survey** (1979-1989). Statistical Process Control in Manufacturing, J. B. Keats e D. C. Montgomery (eds.), Marcel Dekker, New York, 1991.

TAGUCHI, G. **On-line Quality Control during Production**. Tokyo: Japanese Standards Association, 1981.

TAGUCHI, G., ELSAYED, E. A., HSIANG, T. C. **Engenharia de Qualidade em Sistemas de Produção**. São Paulo : McGraw Hill, 1990.

TORNG, J. C. C., COCHRAN, J. K., MONTGOMERY, D. C., LAWRENCE, F. P. Implementing statistically constrained economic EWMA control charts. **Journal of Quality Technology**, v.27, n.3, p.257-264, 1995.

TORNG, J. C. C., LEE, P. H., LIAO, N. Y. An economic-statistical design of double sampling X control chart. **International Journal Production Economics**, v.120, p.495-500, 2009a.

TORNG, J. C. C., LEE, P. H., LIAO, H. S., LIAO, N. Y. An economic design of double sampling X charts for correlated data using genetic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v.36, n.10, p.12621-12626, 2009b.

VANBRACKLE, L. N.; REYNOLDS JR, M. R., EWMA and CUSUM Control Charts in the Presence of Correlation. **Communications in Statistics-Simulation and Computation**, v.26, n.4, p.979-1008, 1997.

VANDER, W. S. A., Monitoring Processes That Wander Using Integrated Moving Average Models. **Technometrics**, v.38, n.2, p.139-151, 1996.

VANDER WIEL, S. A.; TUCKER, W. T.; FALTIN, F. W.; DOGANAKSOY, N., Algorithmic Statistical Process Control: Concepts and an Application, **Technometrics** v.34, p.286-297, 1992.

VASILOPOULOS, A. V.; STAMBOULIS, A. P., Modification of control chart limits in the presence of data correlation. **Journal of Quality Technology**, v.10, n.1, p.20-30, 1978.

VOMMI, V. B., SEETALAB, M. S. N. A simple approach for robust economic design of control charts. **Computers & Operations Research**, v.34, n.7, p.2001-2009, 2007a.

VOMMI, V. B., SEETALAB, M. S. N. A new approach to robust economic design of control charts. **Applied Soft Computing**, v.7, n.1, p.211-228, 2007b.

WARDELL, D. G.; MOSCOWITZ, H.; PLANTE, R. D. Run-Length distributions of special-cause control charts for correlated processes. **Technometrics**, v.36, p.3-17, 1994.

WANG, H-Y., A EWMA for monitoring stationary autocorrelated process. Conference Paper. **Anais: International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering**. IEEE, 2009.

WHEELER, D. J.; CHAMBERS, D. S., **Understanding Statistical Process Control**. 2nd ed., Ed. SPC Press, 406p, 1992.

WOODALL, W. H. The statistic design of quality control charts. **The Statistician**, v.34, n.2, 155–160, 1985.

WOODALL, W. H., Controversies and contradictions in statistical process control, **Journal of Quality Technology**, v.32, p.341–350, 2000.

WU, Z.; SHAMSUZZAMAN, M.; WANG, Q. Designs of control charts with optimal manpower deployment. **International Journal of Production Research**, v. 44, n. 9, p. 2119–2132, 2006.

WU, Z.; SHAMSUZZAMAN, M.; PAN, E. S. Optimization design of control charts based on Taguchi's loss function and random process shifts. **International Journal of Production Research**, v. 42, n. 2, p. 379–390, 2004.

YANG S.F., YANG C.M. An approach to controlling two dependent process steps with autocorrelated observations. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v.29, p.170–177, 2006.

YOURSTONE, S. A., ZIMMER, W. J. Non-normality and the design of control charts for averages. **Decision Science**, v.23, n.5, p.1099–1113, 1992.

ZHANG, N.F. Detection capability of residual control chart for stationary process data. **Journal of Applied Statistic** v.24, p.363–380, 1997

ZHANG, C. W., XIE, M., GOH, T. N. Economic design of cumulative count of conforming charts under inspection by samples. **International Journal of Production Economics**, v.111, n.1, p.93–104, 2008.

ZIMMER, W. J., BURR, I. W., Variables sampling plans based on non-normal populations. **Industrial Quality Control**, v.21, p.18–36, 1963.

ZOU, C.; WANG, Z.; TSUNG, F., Monitoring autocorrelated process using variable sampling schemes at fixed-times. **Quality and Reliability Engineering International**, v.24, n.1, p.55–69, 2008.

## APÊNDICE A – Código computacional para Gráfico de $\bar{X}$ no monitoramento de processos com observações autocorrelacionados

```
Public Function n_1(n) As Integer
```

```
    'Par
```

```
    If (n Mod 2) = 0 Then
```

```
        n_1 = n / 2
```

```
    Else 'ímpar
```

```
        n_1 = (n - 1) / 2
```

```
    End If
```

```
End Function
```

```
Public Function n_2(n) As Integer
```

```
    'Par
```

```
    If (n Mod 2) = 0 Then
```

```
        n_2 = n / 2
```

```
    Else 'Ímpar
```

```
        n_2 = (n + 1) / 2
```

```
    End If
```

```
End Function
```

```
Public Function C_2(skip, n, FI) As Double
```

```
    Dim FIs
```

```
    FIs = FI ^ (skip + 1)
```

```
    C_2 = Sqr(n / (n + 2 * ((FIs ^ (n + 1) - n * FIs ^ 2 + (n - 1) * FIs)) / (FIs - 1) ^ 2))
```

```
End Function
```

```
Public Function C_3(n, FI) As Double
```

```
    Dim skip, n1, n2 As Integer
```

```
    skip = 1
```

```
    n1 = n_1(n)
```

```
    n2 = n_2(n)
```

```
    C_3 = 1 / Sqr((n1 / (n * C_2(skip, n1, FI) ^ 2)) + (n2 / (n * C_2(skip, n2, FI) ^ 2)))
```

```
End Function
```

```
Public Function ANFA_skip(k) As Double
```

```
'NMA0 para estratégia skip
```

```
    Dim alfa As Double
```

```
    alfa = 2 * (1 - Application.WorksheetFunction.NormDist(k, 0, 1, True))
```

```
    ANFA_skip = 1 /
```

```
End Function
```

```
Public Function ANFA_mix(k) As Double
```

```
'NMA0 para estratégia mixed
```

```
    Dim alfa As Double
```

```
    alfa = 2 * (1 - Application.WorksheetFunction.NormDist(k, 0, 1, True))
```

```
    ANFA_mix = 1 / alfa
```

```
End Function
```

```
Public Function ARL_skip(skip, k, n, FI, SHIFT) As Double
```

```
'NMA para estratégia skip
```

```
    Dim beta, C As Double
```

```
    C = C_2(skip, n, FI)
```

```
    beta = Application.WorksheetFunction.NormDist(k - (SHIFT * Sqr(n) * C), 0, 1, True) -
```

```
Application.WorksheetFunction.NormDist(-k - (SHIFT * Sqr(n) * C), 0, 1, True)
```

```
    ARL_skip = 1 / (1 - beta)
```

```
End Function
```

```
Public Function ARL_mix(k, n, FI, SHIFT) As Double
```

```
'NMA para estratégia mixed
```

```
    Dim b1, b, C, n2 As Double
```

```
    n2 = n_2(n)
```

```
    C = C_3(n, FI)
```

```
    beta1 = Application.WorksheetFunction.NormDist(k - ((n2 / n) * SHIFT * Sqr(n) * C), 0, 1, True) -  
Application.WorksheetFunction.NormDist(-k - ((n2 / n) * SHIFT * Sqr(n) * C), 0, 1, True)
```

```
    beta = Application.WorksheetFunction.NormDist(k - (SHIFT * Sqr(n) * C), 0, 1, True) -  
Application.WorksheetFunction.NormDist(-k - (SHIFT * Sqr(n) * C), 0, 1, True)
```

```
    ARL_mix = (1 - beta1) + beta1 * (2 - beta) / (1 - beta)
```

```
End Function
```

## APÊNDICE B – Código computacional para o planejamento econômico-estatístico do Gráfico de $\bar{X}$ para o monitoramento de processos com observações autocorrelacionados

```
Public Function Cost_skip(skip, n, h, k, FI, SHIFT, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1) As Double
    Dim T, S, ARL, ANFA As Double
    n_prod = n * (skip + 1) - skip
    T = (1 - (1 + Lambida * h) * Exp(-Lambida * h)) / (Lambida * (1 - Exp(-Lambida * h)))
    S = Exp(-Lambida * h) / (1 - Exp(-Lambida * h))
    ANFA = ANFA_skip(k)
    ARL = ARL_skip(skip, k, n, FI, SHIFT)
    Cost_skip = ((a + (b * n)) / h) + ((M * (h * ARL - T + g * n_prod + T1) + C1 + (S * C0) / ANFA) /
    ((1 / Lambida) + h * ARL - T + g * n_prod + T1))
End Function
```

```
Public Function Cost_mix(n, h, k, FI, SHIFT, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1) As Double
    Dim T, S, ARL, ANFA As Double
    T = (1 - (1 + Lambida * h) * Exp(-Lambida * h)) / (Lambida * (1 - Exp(-Lambida * h)))
    S = Exp(-Lambida * h) / (1 - Exp(-Lambida * h))
    ARL = ARL_mix(k, n, FI, SHIFT)
    ANFA = ANFA_mix(k)
    Cost_mix = ((a + (b * n)) / h) + ((M * (h * ARL - T + g * n + T1) + C1 + (S * C0) / ANFA) / ((1 /
    Lambida) + h * ARL - T + g * n + T1))
End Function
```

```
Public Function Optimal_Values(strategy, skip, FI, SHIFT, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1) As
Variant
    Dim n, i, j, n_prod As Integer
    Dim k, h, aux As Double
    Dim S(4), S_star(4) As Variant
    S_star(4) = 100000
    For n = 2 To 20
        S(1) = n
        If strategy = 0 Then 'mix
            aux = g * S(1)
        Else 'skip
            n_prod = S(1) * (skip + 1) - skip
            aux = g * n_prod
        End If
        For h = aux To 50 Step 0.01
            S(2) = h
            S(3) = 3
            If strategy = 0 Then 'mix
                S(4) = Cost_mix(S(1), S(2), S(3), FI, SHIFT, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1)
            Else 'skip
                S(4) = Cost_skip(skip, S(1), S(2), S(3), FI, SHIFT, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1)
            End If
            If S(4) < S_star(4) Then
                For i = 1 To 4
                    S_star(i) = S(i)
                Next
            End If
        Next
    Next
    Optimal_Values = S_star
End Function
```

## APÊNDICE C – Código computacional para Gráfico de $\bar{X}$ tradicional no monitoramento de processos em que a média oscila

//Função para determinação do valor de  $k$  sob a restrição  $NMA_0 = 370.4$

Public Function get\_k\_std (PSY, FI, n, h) As Double

Dim PI(1 To 100), MI(1 To 100), NSA(1 To 100), Q(1 To 100, 1 To 100), BINV As Variant

Dim SIGE, SIGMI, SIGOMEGA, SIGXBAR, Delta, GRID, k, P1, P2, NMA As Double

Dim M, Overture, i, j, stop\_search As Integer

SIGE = 1 //Desvio padrão do erro

SIGMI = SIGE \* Sqr(PSY / (1 - PSY)) //Desvio padrão de  $\mu$

SIGOMEGA = SIGMI \* Sqr(1 - (FI ^ (2 \* h))) //Desvio padrão de  $\omega$

SIGXBAR = Sqr((SIGMI ^ 2) + ((SIGE ^ 2) / n)) //Desvio padrão de  $\bar{X}$

M = 100 //Número de estados da cadeia de Markov

Overture = 7 //Abertura da curva normal

Delta = (Overture \* SIGMI) / (M - 1) //Menor divisão da abertura da curva normal

//Gera a matriz de probabilidades iniciais da cadeia de Markov

For i = 1 To M

    //Média  $\mu$  no estado  $i$

    MI(i) = -Overture \* SIGMI + (i - 1) \* (2 \* Delta) + Delta

    PI(i) = NormDist((MI(i) + Delta) / SIGMI, 0, 1) - NormDist((MI(i) - Delta) / SIGMI, 0, 1)

Next

//Heurística para determinação dos limites de controle

GRID = 0.5

k = 2

stop\_search = 0 ' 0: Continua busca

While (stop\_search = 0) //se stop\_search = 1 então é finalizada a busca

    //Limites de controle

    UCL = k \* SIGXBAR

    LCL = -k \* SIGXBAR

    //Gera matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov

    For i = 1 To M

        //Média  $\mu$  no estado  $i$

        MI(i) = -Overture \* SIGMI + (i - 1) \* (2 \* Delta) + Delta

        For j = 1 To M

            //Média  $\mu$  no estado  $j$

            MI(j) = -Overture \* SIGMI + (j - 1) \* (2 \* Delta) + Delta

            //Probabilidade de transição  $C(I,J) = \Pr[M_j/M_i]$

            P1 = NormDist((MI(j) + Delta - ((FI ^ h) \* MI(i))) / SIGOMEGA, 0, 1)

            - NormDist((MI(j) - Delta - ((FI ^ h) \* MI(i))) / SIGOMEGA, 0, 1)

            //Probabilidade de  $\bar{X}$  fora dos limites de controle quando processo sob controle

            P2 = NormDist((UCL - MI(j)) / (SIGE / Sqr(n)), 0, 1)

            - NormDist((LCL - MI(j)) / (SIGE / Sqr(n)), 0, 1)

            Q(i, j) = -P1 \* P2

            If (i = j) Then

                Q(i, j) = Q(i, j) + 1

            End If

        Next

    Next

    //Calculo da matriz inversa de C em BINV

    BINV = MInverse(Q)

```

//Calculo do  $NMA_0$ 
NMA = 0
For i = 1 To M
    NSA(i) = 0
    For j = 1 To M
        NSA(i) = NSA(i) + BINV(i, j)
    Next
    NMA = NMA + PI(i) * NSA(i)
Next
//Constraint:  $NMA_0 \geq 370.4$ 
If NMA >= 370.4 Then
    //Se GRID é muito pequeno, parar busca
    If (GRID < 0.0001) Then
        stop_search = 1
    Else
        //Reduz o GRID para nova busca
        k = k - GRID
        GRID = GRID / 10
        //Atualiza k para nova busca
        k = k + GRID
    End If
Else
    //Atualiza k para nova busca
    k = k + GRID
End If
Wend

get_k_std = k

End Function

//Função para determinação de  $NMA$ 
Public Function get_NMA_std(PSY, FI, n, h, k, SHIFT) As Double

Dim PI(100), MI(100), NSA(100), Q(1 To 100, 1 To 100), BINV As Variant
Dim SIGE, SIGMI, SIGOMEGA, SIGXBAR, Delta, GRID, P1, P2, NMA As Double
Dim M, Overture, i, j, stop_search As Integer

SIGE = 1 //Desvio padrão do erro
SIGMI = SIGE * Sqr(PSY / (1 - PSY)) //Desvio padrão de  $\mu$ 
SIGOMEGA = SIGMI * Sqr(1 - (FI ^ (2 * h))) //Desvio padrão de  $\omega$ 
SIGXBAR = Sqr((SIGMI ^ 2) + ((SIGE ^ 2) / n)) //Desvio padrão de  $\bar{X}$ 
M = 100 //Número de estados da cadeia de Markov
Overture = 7 //Abertura da curva normal
Delta = (Overture * SIGMI) / (M - 1) //Menor divisão da abertura da curva normal

//Limites de controle
UCL = k * SIGXBAR
LCL = -k * SIGXBAR

//Gera a matriz de probabilidades iniciais da cadeia de Markov
For i = 1 To M
    //Média  $\mu$  no estado  $i$ 
    MI(i) = -Overture * SIGMI + (i - 1) * (2 * Delta) + Delta
    PI(i) = NormDist((MI(i) + Delta) / SIGMI, 0, 1) - NormDist((MI(i) - Delta) / SIGMI, 0, 1)

```

```

Next
//Gera matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov
For i = 1 To M
  //Média  $\mu$  no estado  $i$ 
  MI(i) = -Overture * SIGMI + (i - 1) * (2 * Delta) + Delta
  For j = 1 To M
    //Média  $\mu$  no estado  $j$ 
    MI(j) = -Overture * SIGMI + (j - 1) * (2 * Delta) + Delta
    //Probabilidade de transição  $C(I,J) = Pr[MI_j/MI_i]$ 
    P1 = NormDist((MI(j) + Delta - ((FI ^ h) * MI(i))) / SIGOMEGA, 0, 1)
        - NormDist((MI(j) - Delta - ((FI ^ h) * MI(i))) / SIGOMEGA, 0, 1)
    //Probabilidade de  $\bar{X}$  fora dos limites de controle quando processo fora de controle
    P2 = NormDist((UCL - MI(j) + SHIFT * SIGE) / (SIGE / Sqr(n)), 0, 1)
        - NormDist((LCL - MI(j) + SHIFT * SIGE) / (SIGE / Sqr(n)), 0, 1)
    Q(i, j) = -P1 * P2
    If (i = j) Then
      Q(i, j) = Q(i, j) + 1
    End If
  Next
Next
//Calculo da matriz inversa de C em BINV
BINV = MInverse(Q)
//Calculo do NMA
NMA = 0
For i = 1 To M
  NSA(i) = 0
  For j = 1 To M
    NSA(i) = NSA(i) + BINV(i, j)
  Next
  NMA = NMA + PI(i) * NSA(i)
Next
get_NMA_std = NMA

End Function

```

## APÊNDICE D – Código computacional para Gráfico de $\bar{X}$ com a estratégia de amostragem proposta para o monitoramento de processos em que a média oscila

//Função para determinação do valor de  $k$  sob a restrição  $NMA_0 = 370.4$

Public Function get\_k\_essi() As Double

Dim GRID, k, ANFA, Alfa As Double

Dim i, j, stop\_search As Integer

GRID = 0.1 'GRID

k = 3

stop\_search = 0 ' 0: Continua simulação

While (stop\_search = 0) 'se stop = 1 então para a simulação

Alfa = 2 \* (1 - Application.NormDist(k, 0, 1, True))

ANFA = 1 / Alfa

'Restrição:  $ARLo \geq 370.4$

If ANFA  $\geq 370.4$  Then

'se GRID é muito pequeno, parar simulação

If (GRID < 0.01) Then

stop\_search = 1

Else

'Reduz GRID para nova busca

k = k - GRID

GRID = GRID / 10

'k atualizado para nova busca

k = k + GRID

End If

Else

'k atualizado para nova busca

k = k + GRID

End If

Wend

get\_k\_essi = k

End Function

//Calculo do NMA

Public Function get\_NMA\_essi(Psy, FI, n, h, k, SHIFT) As Double

Dim SIGE, SIGXBAR, NMA As Double

Dim i As Integer

SIGE = 1 'Sigma Error

SIGXBAR = get\_SIGXBAR\_essi(Psy, FI, n, n, h) 'Sigma X Bar

'erro Tipo II Beta para a primeira amostra

beta1 = (1 / n) \* (Application.NormDist(k - (SHIFT \* SIGE / SIGXBAR), 0, 1, True) -

Application.NormDist(-k - (SHIFT \* SIGE / SIGXBAR), 0, 1, True))

For i = 1 To n - 1

SIGXBAR\_1s = Sqr(((i / n) ^ 2) \* (get\_SIGXBAR\_essi(Psy, FI, i, n, h) ^ 2) + (((n - i) / n) ^ 2) \* (get\_SIGXBAR\_essi(Psy, FI, n - i, n, h) ^ 2))

```

        beta1 = beta1 + (1 / n) * (Application.NormDist((k * SIGXBAR - (i * SHIFT * SIGE /
n)) / SIGXBAR_1s, 0, 1, True) - Application.NormDist((-k * SIGXBAR - (i * SHIFT * SIGE
/ n)) / SIGXBAR_1s, 0, 1, True))
    Next

```

```

'Erro Tipo II Beta
beta = Application.NormDist(k - (SHIFT * SIGE / SIGXBAR), 0, 1, True) -
Application.NormDist(-k - (SHIFT * SIGE / SIGXBAR), 0, 1, True)
NMA = (beta1 / (1 - beta)) + 1

```

```

get_NMA_essi = NMA

```

```

End Function

```

```

Public Function get_SIGXBAR_essi(Psy, FI, j, n, h) As Double

```

```

    Dim SIGE, SIGMI, SIGXBAR, SIGMIBAR, ARL As Double

```

```

    SIGE = 1 'Sigma Error
    SIGMI = SIGE * Sqr(Psy / (1 - Psy)) 'Sigma MI
    SIGMIBAR = SIGMI / (Sqr(j) * C_2(j, FI ^ (h / n)))
    get_SIGXBAR_essi = Sqr((SIGMIBAR ^ 2) + ((SIGE ^ 2) / n)) 'Sigma MI Bar

```

```

End Function

```

```

Public Function C_2(n, FI) As Double

```

```

    C_2 = Sqr(n / (n + 2 * ((FI ^ (n + 1) - n * FI ^ 2 + (n - 1) * FI)) / (FI - 1) ^ 2))

```

```

End Function

```

## APÊNDICE E – Código computacional para o planejamento econômico-estatístico do Gráfico de $\bar{X}$ com a estratégia de amostragem proposta para o monitoramento de processos em que a média oscila

Public Function Cost(n, h, ANFA, ARL, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1) As Double

Dim T, S As Double

$T = (1 - (1 + \text{Lambida} * h) * \text{Exp}(-\text{Lambida} * h)) / (\text{Lambida} * (1 - \text{Exp}(-\text{Lambida} * h)))$

$S = \text{Exp}(-\text{Lambida} * h) / (1 - \text{Exp}(-\text{Lambida} * h))$

$\text{Cost} = ((a + (b * n)) / h) + ((M * (h * \text{ARL} - T + g * n + T1) + C1 + (S * C0) / \text{ANFA}) / ((1 / \text{Lambida}) + h * \text{ARL} - T + g * n + T1))$

End Function

Public Function Optimal\_Values\_AG(strategy, PSY, FI, SHIFT, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1) As Variant

Dim tolerance, MR, CR As Double

Dim PS, GN As Integer

Dim r As Double

Dim pop(100, 4) As Double

Dim best(4) As Variant

Dim popaux(100, 4) As Double

Dim tournament(3, 2) As Double

Dim i As Integer

Dim j As Integer

Dim n, k, h As Double

Dim auxDate As Date

Dim aux As Double

Dim ARL As Double

Dim hLower, hUpper, nLower, nUpper As Double

Dim k\_ANFA(2) As Variant

Dim stopAG As Boolean

hUpper = 50

nLower = 2

nUpper = 20

PS = 50 'Tamanho da População: max = 50

GN = 70 'Número de gerações

CR = 0.8 'Probabilidade de Crossover

MR = 0.2 'Probabilidade de Mutação

Randomize

'População inicial

For i = 1 To PS

'restrição :  $1 < n < 20$

pop(i, 1) = nLower + Int((nUpper - nLower) \* Abs(Rnd)) 'n

'restrição :  $g.n \leq h < 50$

hLower = g \* pop(i, 1)

pop(i, 2) = hLower + (hUpper - hLower) \* Abs(Rnd) 'h

If strategy = 0 Then 'Estratégia ESSI

k\_ANFA = get\_k\_ESSI() 'k para restrição ARL\_0 = 370,4

```

    pop(i, 3) = k_ANFA(1)
    ARL = get_ARL_ESSI(Psy, FI, pop(i, 1), pop(i, 2), pop(i, 3), SHIFT) 'ARL
    pop(i, 4) = Cost(pop(i, 1), pop(i, 2), k_ANFA(2), ARL, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1) 'E(L)
Else 'Estratégia STD
    k_ANFA = get_k_std(Psy, FI, pop(i, 1), pop(i, 2)) 'k para restrição ARL_0 = 370,4
    pop(i, 3) = k_ANFA(1)
    ARL = get_ARL_std(Psy, FI, pop(i, 1), pop(i, 2), pop(i, 3), SHIFT) 'ARL
    pop(i, 4) = Cost(pop(i, 1), pop(i, 2), k_ANFA(2), ARL, Lambida, g, T1, a, b, M, C0, C1) 'E(L)
End If
Next i

'Melhores valores
best(4) = 10000
For i = 1 To PS
    If pop(i, 4) < best(4) Then
        For j = 1 To 4
            best(j) = pop(i, j)
        Next j
    End If
Next i

tolerance = 10000
generation = 1 'Geração corrente

Do While tolerance > 0.1 And (generation < GN)

    For i = 1 To PS
        'Teste para mutação
        If (Abs(Rnd) < MR) Then
            'Mutation
            'restrição:  $1 < n < 20$ 
            popaux(i, 1) = nLower + Int((nUpper - nLower) * Abs(Rnd)) 'n
            'restrição:  $g.n \leq h < 50$ 
            hLower = g * popaux(f1, 1)
            popaux(i, 2) = hLower + (hUpper - hLower) * Abs(Rnd) 'h
        End if
        'Teste para crossover
        If (Abs(Rnd) < MR) Then
            'Seleção para crossing-over por torneio
            tournament(1, 1) = Fix(Abs(Rnd) * PS) + 1
            tournament(1, 2) = pop(tournament(1, 1), 4)
            tournament(2, 1) = Fix(Abs(Rnd) * PS) + 1
            tournament(2, 2) = pop(tournament(2, 1), 4)
            tournament(3, 1) = Fix(Abs(Rnd) * PS) + 1
            tournament(3, 2) = pop(tournament(3, 1), 4)

            'Ordem crescent de E(L)
            For j = 1 To 2
                If tournament(j, 2) > tournament(j + 1, 2) Then
                    aux = tournament(j, 1)
                    tournament(j, 1) = tournament(j + 1, 1)
                    tournament(j + 1, 1) = aux

                    aux = tournament(j, 2)
                    tournament(j, 2) = tournament(j + 1, 2)
                    tournament(j + 1, 2) = aux
                End If
            Next j
        End If
    Next i
    generation = generation + 1
    tolerance = tolerance * 0.9

```

```

        tournament(j, 2) = tournament(j + 1, 2)
        tournament(j + 1, 2) = aux
        j = 0
    End If
Next j

fcr1 = tournament(1, 1)
fcr2 = tournament(2, 1)

'Crossover
If pop(fcr1, 1) < pop(fcr2, 1) Then
    popaux(i, 1) = pop(fcr1, 1) + Int((pop(fcr2, 1) - pop(fcr1, 1)) * Abs(Rnd) * CR) 'n
Else
    popaux(i, 1) = pop(fcr2, 1) + Int((pop(fcr1, 1) - pop(fcr2, 1)) * Abs(Rnd) * CR) 'n
End If

If pop(fcr1, 2) < pop(fcr2, 2) Then
    popaux(i, 2) = pop(fcr1, 2) + Int((pop(fcr2, 2) - pop(fcr1, 2)) * Abs(Rnd) * CR) 'h
Else
    popaux(i, 2) = pop(fcr2, 2) + Int((pop(fcr1, 2) - pop(fcr2, 2)) * Abs(Rnd) * CR) 'h
End If
End If
'Avaliação
If strategy = 0 Then 'Estratégia ESSI
    k_ANFA = get_k_ESSI() 'k para restrição ARL_0 = 370,4
    popaux(i, 3) = k_ANFA(1)
    ARL = get_ARL_ESSI(PSY, FI, popaux(i, 1), popaux(i, 2), popaux(i, 3), SHIFT) 'ARL
    popaux(i, 4) = Cost(popaux(i, 1), popaux(i, 2), k_ANFA(2), ARL, Lambida, g, T1, a, b, M, C0,
C1) 'E(L)
    Else 'STD Strategy
        k_ANFA = get_k_std(PSY, FI, popaux(i, 1), popaux(i, 2)) 'k para restrição ARL_0 = 370,4
        popaux(i, 3) = k_ANFA(1)
        ARL = get_ARL_std(PSY, FI, popaux(i, 1), popaux(i, 2), popaux(i, 3), SHIFT) 'ARL
        popaux(i, 4) = Cost(popaux(i, 1), popaux(i, 2), k_ANFA(2), ARL, Lambida, g, T1, a, b, M, C0,
C1) 'E(L)
    End If
    'Salva os melhor valor
    If popaux(i, 4) < best(4) Then
        For j = 1 To 4
            best(j) = popaux(i, j)
        Next j
    End If
Next

'Troca a população anterior pela nova e Calcula a tolerância de parada
For i = 1 To PS
    For j = 1 To 4
        pop(i, j) = popaux(i, j)
    Next j
Next i
tolerance = DesvP(pop)
generation = generation + 1
Loop
Optimal_Values_AG = best
End Function

```

'Calcula a média dos valores passados em um vetor  
 'Obrigatoriamente, o vetor deve utilizar a posição 0 (zero) (ex. 0..9)  
 Function AverageValue(ByRef Vector() As Double) As Double

Dim i As Integer  
 Dim cSum As Double

cSum = 0  
 For i = 1 To UBound(Vector) - 1  
     cSum = cSum + Vector(i, 4)  
 Next i  
 AverageValue = cSum / (UBound(Vector) - 1)

End Function

'Calcula o desvio padrao dos valores passados  
 'em um vetor. Obrigatoriamente, o vetor deve utilizar a posição 0 (zero) (ex. 0..9)  
 Function DesvP(ByRef Values() As Double) As Double

Dim Media As Double  
 Dim Sum As Currency  
 Dim value As Currency  
 Dim i As Integer

Media = AverageValue(Values())  
 Sum = 0  
 For i = 1 To UBound(Values) - 1  
     value = Values(i, 4)  
     value = value - Media  
     value = value ^ 2  
     Sum = Sum + value  
 Next i

Sum = Sum / IIf((UBound(Values) - 1) = 0, 1, (UBound(Values) - 1))  
 If Sum < 0 Then  
     Sum = Sum \* -1  
 End If  
 DesvP = Sqr(Sum)

End Function