

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2001



1110000462



***"Partículas de Spin Fracionário
em $2 + 1$ Dimensões com Spin
Não Paralelo ao Momento"***

ANGELO ANTONIO SOARES DE MELO

155



**PARTÍCULAS DE SPIN
FRACIONÁRIO EM 2+1 DIMENSÕES
COM SPIN NÃO PARALELO AO MOMENTO**

ANGELO ANTONIO SOARES DE MELO

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá da
Universidade Estadual Paulista para
a obtenção do título de Mestre em
Física.

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi
Coorientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá
2001

462
-- 462



24/01/02

R\$20,00

C

M420p

Melo, Angelo Antonio Soares de

Partículas de spin fracionário em 2+1 dimensões com spin não paralelo ao momento / Angelo Antonio Soares de Melo. – Guaratinguetá : [s.n.], 2001

94f. : il.

Bibliografia: f. 92-94

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2001

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

Co orientador: Prof Dr. Alvaro de Souza Dutra

1.Teoria de campos 2. Física de partículas elementares I. Título

CDU 530.145

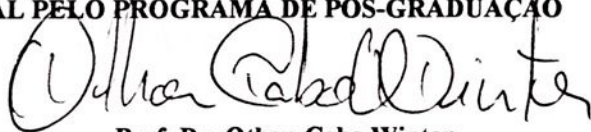
**“PARTÍCULAS DE SPIN FRACIONÁRIO EM 2 + 1 DIMENSÕES
COM SPIN NÃO PARALELO AO MOMENTO”**

ANGELO ANTONIO SOARES DE MELO

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

ESPECIALIDADE: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador / Unesp-Feg



Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO
Unesp-Feg



Prof. Dr. ANTONIO EDSON GONÇALVES
UEL/PR

Agosto de 2001

DADOS CURRICULARES

ANGELO ANTONIO SOARES DE MELO

NASCIMENTO 11.07.1973 – GUARATINGUETÁ / SP

FILIAÇÃO Maria Infância Soares de Melo

1994/1998 Curso de Graduação
Universidade Estadual Paulista – Campus de Guaratinguetá

1999/2001 Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado na
Universidade Estadual Paulista – Campus de Guaratinguetá



À minha mãe, que sempre me apoiou e estimulou.

Agradecimentos

Aos meus orientadores Prof. Dr. Denis Dalmazi e Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra, que viabilizaram e participaram ativamente neste trabalho.

A todos os colegas que de alguma forma contribuíram para a execução deste trabalho.



Este trabalho contou inicialmente com o apoio financeiro da PROPP-UNESP/CAPES de 03/1999 até 04/1999 e posteriormente da FAPESP (processo nº 98/15943-6) de 05/99 até 02/01



“O mais incompreensível do Universo é que ele seja compreensível”

(Albert Einstein)



Conteúdo

Lista de Figuras	10
Resumo	11
Abstract	12
1 Introdução	13
2 Spin e estatística em $2 + 1$ dimensões	16
2.1 O grupo de rotações e o momento angular	16
2.2 O grupo de Lorentz em $2 + 1$ dimensões	20
2.3 Estatística das partículas em $d = 2$	23
3 Quantização de Dirac	27
3.1 Partícula relativística de spin nulo	32
3.2 Uma lagrangiana quadrática via invariante de Casimir	36
3.2.1 Limite não relativístico	37
4 Uma ação simples para partículas de spin fracionário α	40
4.1 Caso particular $\alpha = \pm 1/2$	40
4.2 Caso particular $\alpha = \pm 1$	41
4.3 Spin arbitrário ($\alpha \in \mathbb{R}$)	42
4.4 Modelos mínimos	45
4.5 Modelos estendidos	47
4.5.1 Uma ação simples	48
4.5.2 Zitterbewegung	53



5	A ação para anyons com dupla polarização	59
6	Acoplamento com o campo eletromagnético externo	62
6.1	Partícula relativística de spin $1/2$	62
6.1.1	Equações de movimento	66
6.2	Partícula relativística de spin $1/2$ acoplada ao campo eletromagnético externo	66
6.3	Partículas de spin fracionário acopladas ao campo eletromagnético externo	69
7	Lagrangiana supersimétrica	72
7.1	Superálgebra de Poincarè	76
8	Conclusão	78
A	Notação	80
B	Variáveis Grassmannianas	82
B.1	Definição	82
B.2	Propriedades	82
B.3	Derivação e integração	83
B.4	Equações de Lagrange	85
B.5	Equações de Hamilton	85
B.5.1	Anti-parênteses de Poisson	86
B.6	Propriedades	87
C	Dedução de 4.32	88
D	Paridade e Inversão Temporal em $D = 2 + 1$	90
	Bibliografia	92

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica das parábolas à esquerda de (2.12) e região de validade de (2.12). (para $X > 0$).	19
2.2	Representação gráfica das parábolas à esquerda de (2.32) e região de validade de (2.32). (para $X \geq 0$).	22
2.3	Deslocamento da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi$	23
2.4	Deslocamento da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = \pi$	24
2.5	Deslocamento da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = -\pi$	24
D.1	Sistema de coordenadas do plano xy	90
D.2	Sistema de coordenadas com a inversão $x \rightarrow -x$ e $y \rightarrow -y$	91
D.3	Sistema de coordenadas obtido pela troca $x \rightarrow -x$	91



Melo, A. A. S. *Partículas de Spin Fracionário em 2+1 Dimensões com Spin não Paralelo ao Momento*. Guaratinguetá, 2001. 94 p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

RESUMO

Nesta dissertação estudamos uma ação para partículas de spin fracionário. Por meio de um modelo que faz uso dos invariantes quadráticos de Casimir da álgebra de Poincarè e de um número de variáveis extras do espaço de fase apenas o suficiente para garantir que álgebra de spin seja canônica, chega-se a uma ação simples que descreve partículas de spin fracionário. Mostramos neste trabalho que tal formulação não permite que o spin seja paralelo ao momento, ao contrário de outras formulações na literatura. Introduzimos diferentes extensões desse modelo incluindo interação com o campo eletromagnético externo, dupla polarização e supersimetria. O modelo com spin não paralelo ao momento se mostrou autoconsistente classicamente.

PALAVRAS CHAVE: Anyon, vínculos, spin fracionário, estatística intermediária, teoria de grupo, grupo de Poincarè, supersimetria.



Melo, A. A. S. *Fractional Spin Particles in 2+1 Dimensions with Noncollinear Spin and Momentum*. Guaratinguetá, 2001. 94 p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

ABSTRACT

In this master's thesis we study an action for a fractional spin particle. By using a model based on the Casimir quadratic invariants of the Poincaré algebra and a number of extra phase space variables only enough to guarantee the canonical spin algebra one gets a simple action that describes fractional spin particles. We show in this work that such formulation does not allow that spin and momentum be parallel, opposite to other formulations found in the literature. We introduce different extensions of this model that include external electromagnetic field interaction, double polarization and supersymmetry. The model with noncollinear spin and momentum proves to be selfconsistent at classical level.

KEYWORDS: Anyon, constraints, fractional spin, intermediate statistics, group theory, Poincaré groups, supersymmetry.

Capítulo 1

Introdução

Em $2 + 1$ dimensões existe a possibilidade do surgimento de partículas de spin e estatística fracionários, chamados anyons. Aparentemente certos estados de quase partículas que ocorrem em fenômenos planares como o efeito Hall quântico fracionário e supercondutividade a altas temperaturas têm propriedades semelhantes aos anyons [23, 34], o que torna esses modelos de grande interesse na física atual. Uma forma de obter anyons é por meio do acoplamento com um campo de Chern-Simons e não está claro se isso resulta em interações residuais levando a questão da existência de anyons como partículas livres relativísticas. Vários modelos têm sido propostos na literatura para descrever tais partículas e este trabalho baseia-se na extensão de um desses modelos.

Basicamente existem na literatura duas formulações usadas para descrever anyons relativísticos em primeira quantização.

Uma vez que em $2+1$ dimensões as partículas massivas de spin fracionário têm o mesmo número de graus de liberdade das partículas massivas de spin nulo, ou seja, o spin não representa grau de liberdade [14, 20], pode-se usar as mesmas variáveis de espaço-tempo $(x_\mu, p_\mu, \mu = 1, 2, \dots, D)$ usadas para partículas relativísticas de spin nulo para descrever anyons. Esta é a chamada formulação mínima.

Na formulação mínima o spin S_μ é paralelo ao momento p_μ . Essa é uma escolha conveniente, pois as partículas relativísticas em $2 + 1$ dimensões são caracterizadas pela massa e pela componente do spin ao longo do momento.

Assim o fato de o spin não representar grau de liberdade permite impor que a componente de S_μ não paralela a p_μ seja nula, tornando essa escolha a mais direta.

No entanto, esta formulação possui diversas desvantagens tais como o aparecimento de parênteses não canônicos como $\{x_\mu, x_\nu\} \neq 0$ e anomalias na álgebra de spin, isto é, $\{S_\mu, S_\nu\} = 0$ ao invés de $\{S_\mu, S_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} S^\alpha$ que é a álgebra usual do momento angular em $2 + 1$ dimensões. Alternativamente, é possível redefinir as coordenadas x_μ para que elas satisfaçam parênteses canônicos mas as novas coordenadas não se comportam como um vetor por transformação de Lorentz. Tais problemas dificultam a quantização do modelo.

A outra formulação, chamada de estendida, faz uso de variáveis extras do espaço de fase (q_i, π_j) de modo a garantir a realização da álgebra do momento angular para as componentes do spin e uma álgebra canônica para as coordenadas: $\{x_\mu, x_\nu\} = 0$. Tais formulações requerem a utilização de vínculos extras na teoria para que os graus de liberdade extras sejam eliminados sobrando apenas os correspondentes às partículas de spin nulo como na formulação anterior (mínima).

A grande desvantagem do formalismo estendido é que as lagrangianas obtidas são geralmente complicadas e nem todas as formulações estendidas são explicitamente covariantes de Poincarè.

Neste trabalho utilizaremos uma formulação estendida que faz uso do menor número possível de variáveis extras, ou seja, o espaço de fase é minimamente estendido, de modo a preservar sua estrutura canônica e a álgebra de spin. Isto nos leva a mais simples lagrangiana conhecida na literatura para a partícula livre de spin fracionário em $2 + 1$ dimensões. Tal formulação foi sugerida em [12, 16].

Outra característica desta formulação é que, diferentemente da formulação mínima, ela não permite que o spin seja paralelo ao momento, ou seja, trabalhamos o tempo todo com o spin não paralelo ao momento.

Em [12] foi estudada apenas a teoria sem interação. O objetivo básico desta dissertação é ampliar os estudos feitos em [12] introduzindo interação com campo eletromagnético externo (Capítulo 6), Supersimetria (Capítulo 7) e dupla

polarização (Capítulo 5) confirmando a autoconsistência da formulação minimamente estendida de [12, 16].

No Capítulo 2 damos uma explicação sobre o porquê da possibilidade de anyons em $2 + 1$ dimensões sob o ponto de vista da teoria de grupos e da estatística. No Capítulo 3 introduzimos o formalismo de Dirac para sistemas vinculados de forma reduzida dando o exemplo de uma partícula relativística de spin nulo que também servirá para introduzir o método de obtenção da ação por meio dos invariantes de Casimir da álgebra de Poincarè. No Capítulo 4 discutimos a ação para partículas de spin fracionário obtida por meio dos invariantes de Casimir mostrando que quando tomamos os casos particulares de spin $1/2$ e 1 as equações de movimento podem ser escritas em função do invariante de Casimir relacionado ao spin. Mostramos também a equivalência de soluções compactas e não compactas obtidas em [12] e [16] por meio de uma mudança de variáveis. Além disso, damos uma descrição dos formalismos mínimo e estendido, usados atualmente na formulação de anyons, e demonstramos que o spin não pode ser paralelo ao momento no modelo minimamente estendido que adotamos, isto é, com $S^\mu S_\mu \leq 0$. No Capítulo 5 estudamos o caso de dupla polarização por meio da introdução de um vínculo quadrático. No capítulo 6 estudamos a partícula relativística de spin $1/2$ e seu acoplamento com o campo eletromagnético externo por meio de um modelo supersimétrico o que leva, por analogia, ao acoplamento não mínimo da partícula de spin fracionário com o campo eletromagnético externo. Concluimos no Capítulo 7 com a adição de supersimetria ao modelo levando a uma ação supersimétrica no espaço-tempo e a realização da superálgebra de Poincarè $N = 1$ em $2 + 1$ dimensões.



Capítulo 2

Spin e estatística em $2 + 1$ dimensões

2.1 O grupo de rotações e o momento angular

Em duas dimensões espaciais, ao contrário de dimensões mais altas as possibilidades para o spin e estatística das partículas não se restringe aos casos de férmions e bósons, não sendo o momento angular necessariamente quantizado em unidades inteiras ou semi-inteiras de $\hbar$. Veremos que essas partículas podem obedecer estatísticas intermediárias entre bósons e férmions, o que resulta diretamente das propriedades do espaço em duas dimensões. Partículas que obedecem tais estatísticas são chamadas de anyons.

Embora anyons não sejam partículas reais, desde que só existem em duas dimensões, certos sistemas físicos podem ser considerados em aproximação como bidimensionais. Assim por exemplo, em certos sistemas de matéria condensada a interface entre dois filmes finos de diferentes semicondutores pode ser considerada bidimensional. No caso do efeito Hall quântico fracionário, por exemplo, tem sido observado certos estados que possuem spin e carga fracionárias e estatística intermediária como mencionamos na introdução.

Do ponto de vista teórico a não quantização do momento angular em duas dimensões espaciais pode ser verificada diretamente da análise das representações irredutíveis do grupo que gera rotações.



Vamos comparar o grupo das rotações em três dimensões $SO(3)$ com o grupo de rotações em duas dimensões $SO(2)$.

Consideremos primeiro o grupo $SO(3)$. Designando os geradores infinitesimais do grupo $SO(3)$ como J_1 , J_2 e J_3 temos (vide, por exemplo, [33]):

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \quad (2.1)$$

onde J_3 será identificado também com o gerador do subgrupo $SO(2)$ de rotações no plano xy .

Definindo os operadores $J_{\pm}$ como

$$J_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 \pm iJ_2), \quad (2.2)$$

obtemos as relações de comutação

$$[J_+, J_-] = J_3; \quad [J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (2.3)$$

Além disso, temos as relações de hermiticidade

$$J_i^{\dagger} = J_i; \quad J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}; \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

Podemos definir também o operador de Casimir $\vec{J}^2$ de $SO(3)$ tal que ele comute com todos os geradores do grupo:

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_+J_- + J_-J_+ + J_3^2; \quad (2.5)$$

$$\vec{J}^2 = J_+J_+^{\dagger} + J_-J_-^{\dagger} + J_3^2. \quad (2.6)$$

Usando (2.3) obtemos

$$2J_+J_- = \vec{J}^2 - J_3(J_3 - 1); \quad 2J_-J_+ = \vec{J}^2 - J_3(J_3 + 1). \quad (2.7)$$

Vamos agora determinar o espectro de autovalores de $\vec{J}^2$ e J_3 . Denotaremos os autovalores de $\vec{J}^2$ e de J_3 por X e m respectivamente. Como $\vec{J}^2$ e

J_3 comutam eles podem ser diagonalizados simultaneamente da mesma maneira que J_+J_- e J_-J_+ .

Assim vemos que $\vec{J}^2$ pode ser escrito como a soma de operadores hermitianos positivo definidos que comutam entre si, vide (2.6), portanto deve ser um operador hermitiano positivo definido. Assim, para uma representação unitária, os autovalores de $\vec{J}^2$ devem ser reais e não negativos. O operador J_3 é hermitiano também e deve ter autovalores reais. Assim podemos escrever

$$\vec{J}^2 |X, m\rangle = X |X, m\rangle \quad (X \geq 0, X \in \mathbb{R}), \quad (2.8)$$

e

$$J_3 |X, m\rangle = m |X, m\rangle \quad (m \in \mathbb{R}). \quad (2.9)$$

Usando (2.7) temos

$$2J_-J_+ |X, m\rangle = [X - m(m+1)] |X, m\rangle; \quad (2.10)$$

$$2J_+J_- |X, m\rangle = [X - m(m-1)] |X, m\rangle. \quad (2.11)$$

Como $J_+J_- = J_+J_+^\dagger$ e $J_-J_+ = J_-J_-^\dagger$ os autovalores de J_+J_- e J_-J_+ são positivo definidos. Isso implica em

$$X - m(m \pm 1) \geq 0. \quad (2.12)$$

Vamos então determinar os valores de X e m que satisfazem (2.12) e que ao mesmo tempo são consistentes com as relações de comutação do $SO(3)$. Usando tais relações obtemos

$$\langle X, m' | [J_3, J_+] |X, m\rangle = (m' - m) \langle X, m' | J_+ |X, m\rangle = \langle X, m' | J_+ |X, m\rangle, \quad (2.13)$$

de onde concluímos que sucessivos autovalores m de J_3 devem diferir por uma unidade:

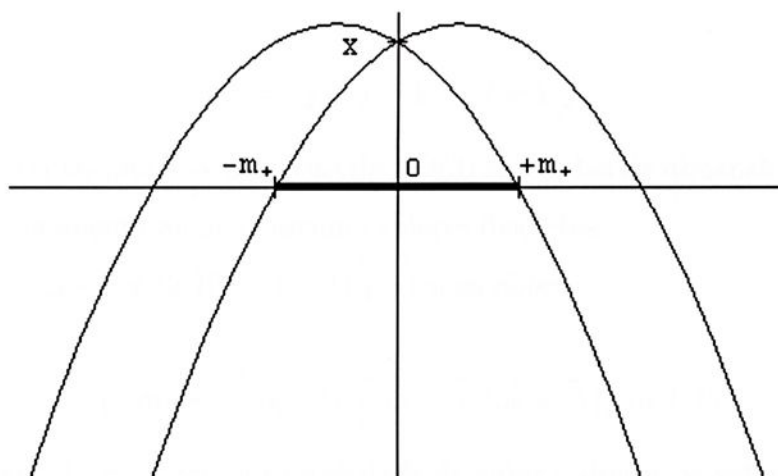


Figura 2.1: Representação gráfica das parábolas à esquerda de (2.12) e região de validade de (2.12). (para $X > 0$).

$$m' - m = 1. \quad (2.14)$$

Para valores não negativos de X é possível satisfazer as duas desigualdades (2.12) simultaneamente com valores reais de m se e apenas se m tiver um limite superior positivo m_+ e um limite inferior negativo $-m_+$ (ver figura 2.1):

$$-m_+ \leq m \leq m_+; \quad (2.15)$$

$$m_+ = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + X}. \quad (2.16)$$

De (2.16) temos

$$X = m_+ (m_+ + 1). \quad (2.17)$$

Como dois autovalores diferentes dentro da mesma representação irredutível diferem por um inteiro (vide (2.14)), então $m_+ - (-m_+) = 2m_+$ deve ser um inteiro não negativo, portanto m_+ deve ser inteiro ou semi-inteiro não negativo. Na física utilizamos freqüentemente a notação $m_+ \equiv j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Podemos identificar os autovetores $|j, m\rangle$ com a base do momento angular para uma dada representação unitária de $SO(3)$, onde para um dado valor de j teremos $2j + 1$ valores de m :

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j. \quad (2.18)$$

Portanto as representações unitárias de $SO(3)$ são todas de dimensão finita igual a $2j + 1$ e o momento angular assume valores discretos.

Das equações (2.10) – (2.11) podemos obter

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (2.19)$$

Os operadores J_+ e J_- têm a propriedade de subir e descer os valores de m por uma unidade.

Para o grupo $SO(2)$, como só temos o gerador J_3 não temos as condições impostas por (2.12) e (2.14) e portanto não há quantização do momento angular em duas dimensões espaciais. Como $J_3^{\dagger} = J_3$ os autovalores ' m ' podem ser quaisquer números reais.

2.2 O grupo de Lorentz em 2 + 1 dimensões

Do ponto de vista relativístico devemos olhar para as representações irredutíveis do grupo de Lorentz em 2 + 1 dimensões, o qual, diferentemente do grupo $SO(3)$, devido à sua métrica $(+, -, -)$, possui representações unitárias irredutíveis infinitas e semi-infinitas.

Vamos então obter uma classificação para as representações unitárias de $SO(2, 1)$ em termos dos espectros de autovalores de seus operadores de Casimir $\vec{J}^2$ e do gerador J'_3 de seu sub-grupo compacto $SO(2)$. Os geradores de grupo J'_1 , J'_2 e J'_3 de $SO(2, 1)$ satisfazem as relações de comutação

$$[J'_\mu, J'_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\alpha} J'^\alpha, \quad (2.20)$$

que na nossa assinatura $(+, -, -)$ se traduz em

$$[J'_1, J'_2] = iJ'_0; \quad [J'_2, J'_0] = -iJ'_1; \quad [J'_0, J'_1] = -iJ'_2, \quad (2.21)$$

Definindo $J'_\pm$:

$$J'_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (iJ'_1 \pm J'_2), \quad (2.22)$$

obtemos as relações de comutação

$$[J'_+, J'_-] = J'_0; \quad [J'_0, J'_{\pm}] = \pm J'_{\pm}, \quad (2.23)$$

idênticas ao caso $SO(3)$. Mas para representações unitárias de $SO(2, 1)$ devemos ter

$$J'^{\dagger}_+ = -J'_-. \quad (2.24)$$

O operador invariante de Casimir de $SO(2, 1)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{J}'^2 &= J'^2_0 - J'^2_1 - J'^2_2 = J'^2_0 + J'_+ J'_- + J'_- J'_+ \\ &= J'^2_0 - J'_+ J'^{\dagger}_+ - J'_- J'^{\dagger}_-. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Notamos que $\vec{J}'^2$ não é mais uma soma de operadores hermitianos positivo definidos e portanto seus autovalores cobrem o domínio dos números reais. Usando (2.23) e lembrando que (2.24) implica que autovalores de $J'_+ J'_-$ e $J'_- J'_+$ devem ser reais e negativo definidos escrevemos $J_+ J_-$ e $J_- J_+$ como

$$-2J_+ J_- = 2J_+ J_+^{\dagger} = -\vec{J}^2 + J_0 (J_0 - 1); \quad (2.26)$$

$$-2J_- J_+ = 2J_- J_-^{\dagger} = -\vec{J}^2 + J_0 (J_0 + 1). \quad (2.27)$$

Definindo para o operador $\vec{J}'^2$:

$$\vec{J}'^2 |X, m\rangle = X |X, m\rangle \quad X \in \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

e, como no caso anterior

$$J'_0 |X, m\rangle = m |X, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}, \quad (2.29)$$

onde $|X, m\rangle$ é um autovetor simultâneo de $\vec{J}'^2$ e J'_0 , podemos escrever

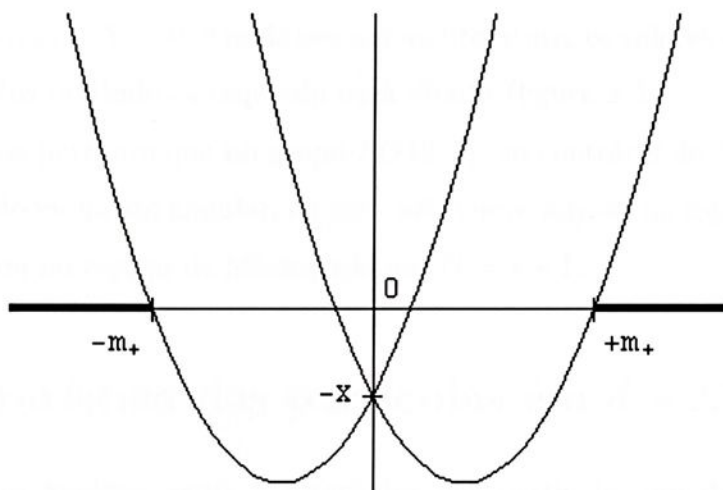


Figura 2.2: Representação gráfica das parábolas à esquerda de (2.32) e região de validade de (2.32). (para $X \geq 0$).

$$-2J_-J_+ |X, m\rangle = [-X + m(m+1)] |X, m\rangle; \quad (2.30)$$

$$-2J_+J_- |X, m\rangle = [-X + m(m-1)] |X, m\rangle, \quad (2.31)$$

o que implica

$$-X + m(m \pm 1) \geq 0. \quad (2.32)$$

Podemos então obter uma classificação completa para as representações unitárias de $SO(2,1)$ em termos dos autovalores de $\vec{J}^2$ e J_0' determinando os valores reais de X e m que satisfazem (2.32) e as relações de comutação (2.21). Como no caso $SO(3)$, as relações de comutação implicam em (2.13), ou seja, sucessivos valores de m devem diferir por uma unidade. Podemos dividir os casos que satisfazem à (2.32) em três.

Para o caso $X \leq -\frac{1}{4}$, m assume valores infinitos e sem limites¹.

Para o caso $-\frac{1}{4} < X < 0$, m pode assumir valores infinitos ilimitados ou infinitos limitados à esquerda ou à direita.

¹Para o modelo de anyons em que o spin não é paralelo ao momento teremos a seguinte relação entre X e o operador de spin $\hat{S}$: $\hat{S}^2 = -(s^2 + \frac{1}{4}) = X$, onde s é uma constante real. Portanto o modelo estudado nesta dissertação se restringe ao caso $X \leq -\frac{1}{4}$.

Para o caso $X \geq 0$, o mais comum na literatura, os valores de m assumem valores infinitos limitados à esquerda ou à direita (figura 2.2)².

Vemos portanto que no grupo $SO(2, 1)$, ao contrário do $SO(3)$, não há quantização do momento angular, ou seja, não temos anyons no espaço euclidiano $D = 3$ mas sim no espaço de Minkowski em $D = 2 + 1$.

2.3 Estatística das partículas em $d = 2$.

Vamos analisar agora a estatística das partículas em duas dimensões espaciais.

A noção de estatística é usualmente relacionada com o sinal que a função de onda adquire quando duas partículas são permutadas. Se a função de onda não muda de sinal, ela descreve um sistema bosônico, se ela ganha um sinal menos ela descreve um sistema fermiônico. Colocando de uma maneira mais geral, seguindo a apresentação de [24], se uma função de onda $\psi(1, 2)$ descreve duas partículas idênticas com momento angular definido, se movermos a partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo azimutal $\Delta\varphi$ (ver figura 2.3), a função de onda muda de acordo com

$$\psi(1, 2) \rightarrow \psi'(1, 2) = e^{i\nu\Delta\varphi}\psi(1, 2). \quad (2.33)$$

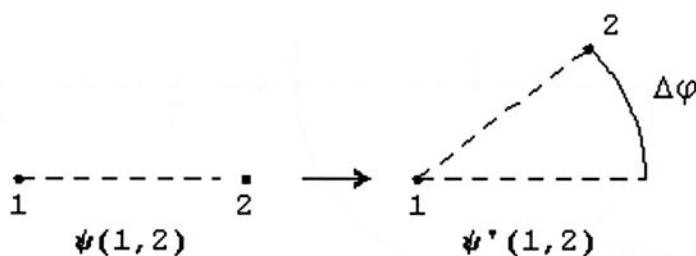


Figura 2.3: Deslocamento da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi$.

²Para modelos com spin paralelo ao momento temos $\hat{S}^2 = \alpha(\alpha - 1)$ e assim correspondem a $X \geq -\frac{1}{4}$.

A fase adquirida pela função de onda depende do parâmetro ν o qual é usualmente chamado de estatística. A princípio ν é um número real arbitrário como já foi observado ao comentarmos o grupo $SO(2)$ de rotações em 2 dimensões espaciais.

Consideremos agora a troca de posição entre duas partículas feita de duas maneiras diferentes:

i) Movendo a partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = \pi$ e depois realizando uma translação do centro de massa até alcançar a configuração inicial (ver figura 2.4);

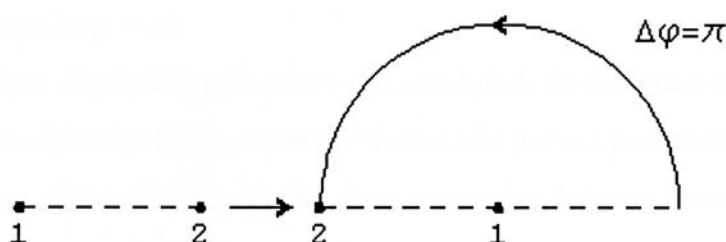


Figura 2.4: Deslocamento da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = \pi$.

ii) Movendo a partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = -\pi$ e depois realizando uma translação do centro de massa até alcançar a configuração inicial (ver figura 2.5).

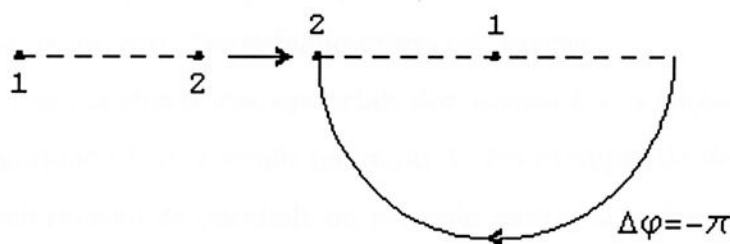


Figura 2.5: Deslocamento da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = -\pi$.

No primeiro caso a função de onda adquire uma fase $\exp(i\pi\nu)$ e no segundo caso ela ganha uma fase $\exp(-i\pi\nu)$. Existe uma grande diferença entre

estas operações em duas dimensões e as mesmas operações em dimensões mais altas. Em $D \geq 3$ sempre é possível deformar de forma contínua a transformação i) de forma a alcançar ii) não sendo possível distinguir as duas. Isto significa que em $D \geq 3$ devemos ter

$$e^{i\pi\nu} = e^{-i\pi\nu}. \quad (2.34)$$

Isso só é possível se $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, ou seja, a estatística não pode ser arbitrária. Pela troca de duas partículas a função de onda não muda se ν for par (estatística bosônica) e ganha um sinal se ν for ímpar (estatística fermiônica) (vide (2.33) para $\Delta\varphi = \pi$).

Em duas dimensões não existe a possibilidade de deformar continuamente o caminho i) no caminho ii) já que as partículas não podem passar uma pela outra. Assim em duas dimensões i) e ii) são duas operações fisicamente e matematicamente distintas e (2.34) não é necessariamente válido e ν pode ter qualquer valor real arbitrário. Assim não temos apenas bósons ou férmions em $D = 2 + 1$ mas também partículas de estatística intermediária (anyons). Outra consequência disso é que em duas dimensões não é suficiente especificar as configurações inicial e final para descrever completamente um sistema; também é necessário especificar como as diferentes trajetórias se cruzam. Ou seja, a evolução temporal das partículas não pode ser negligenciada. Este fato implica que para classificar e descrever anyons, a representação do grupo de permutações deve ser substituído por outro mais complexo, denominado grupo de tranças.

Uma das características essenciais dos anyons é a violação das simetrias discretas de paridade P e reversão temporal T. No exemplo de duas partículas, sob uma transformação de paridade ou reversão temporal, a fase adquirida pela função de onda $\psi(1, 2)$ muda de acordo com

$$e^{\pm i\pi\nu} \rightarrow e^{\mp i\pi\nu}, \quad (2.35)$$

para os casos i) e ii) respectivamente, e para $\nu \neq 0, 1$ ocorre uma violação de P e T. Esta quebra da simetria discreta é usada experimentalmente para indicar a presença ou ausência de anyons em fenômenos bidimensionais.

Existem várias formas de obter um modelo que descrevam anyons, por exemplo, utilizando o acoplamento com um campo de Chern-Simons o que leva a formulação não local de anyons. Outra forma não local utiliza o modelo sigma não linear $O(3)$. Naturalmente somos levados a questão: Como formular anyons ou mesmo partículas relativísticas de spin fracionário em $2+1$ dimensões de forma local? Qual a equação de movimento para tais partículas? É nesse contexto que se insere nosso trabalho.

Tecnicamente utilizaremos o método de Dirac para sistemas vinculados que será introduzido no próximo capítulo e argumentos baseados em teoria de grupos.



Capítulo 3

Quantização de Dirac

Como ferramenta básica nesta dissertação usaremos o método de Dirac para sistemas vinculados e um conhecimento elementar do grupo de (super)Poincarè. Nesta primeira seção faremos um resumo do método de Dirac cujo objetivo é tornar este trabalho autoconsistente de forma que o leitor das seções posteriores não tenha que recorrer a textos demasiadamente técnicos ou longos sobre quantização de sistemas vinculados. Além disso este tema pode ser encontrado em excelentes trabalhos na literatura [13, 18, 31].

O formalismo hamiltoniano desempenha um papel importante na física teórica pois sua utilização em mecânica clássica pode ser naturalmente generalizada para a mecânica quântica (quantização canônica). Todavia uma desvantagem do formalismo hamiltoniano é que nele o tempo é uma coordenada que ocupa um papel privilegiado se comparado com as coordenadas espaciais. Dessa forma a covariância por transformações de Poincarè, um dos princípios básicos da relatividade, não é explícita e deve ser verificada cuidadosamente sobre os estados físicos do sistema em estudo. Em contrapartida, no formalismo lagrangiano a teoria pode quase sempre ser formulada de forma explicitamente covariante de Poincarè. Os dois formalismos podem ser todavia relacionados através de uma transformação de Legendre.

Vamos examinar o processo de passagem do formalismo lagrangiano para o formalismo hamiltoniano. Assumindo um número finito N de graus de liberdade denotamos as coordenadas do sistema físico por q_n , $n = 1, \dots, N$. As velocidades

são dadas por $dq_n/dt = \dot{q}_n$ e, embora não seja o caso mais geral, vamos admitir que a lagrangiana seja uma função das coordenadas e das velocidades $L = L(q_n, \dot{q}_n)$.

Partindo da ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (3.1)$$

obtemos, por meio do princípio variacional de ação estacionária, as equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_n}. \quad (3.2)$$

Passamos do espaço de configurações de $2N$ coordenadas $(q_n, \dot{q}_n)$ para o espaço de fase, também de $2N$ coordenadas (q_n, p_m) , a partir das leis de transformação $\dot{q}_n = \dot{q}_n(q_m, p_l)$ provenientes da definição dos momentos canônicos

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (3.3)$$

Nem sempre todas as velocidades podem ser obtidas como função dos momentos invertendo-se (3.3). Para cada velocidade indeterminada teremos uma identidade da forma

$$\varphi_a(q, p) = 0, \quad (3.4)$$

onde $a = 1, \dots, M$ e M é o número de momentos que não podem ser obtidos como função das velocidades. As identidades (3.4) são chamadas de **vínculos primários**.

De qualquer forma, mesmo com a existência de vínculos a hamiltoniana canônica pode ser obtida a partir da lagrangiana via transformada de Legendre

$$H(q, p) = p_n \dot{q}_n - L, \quad (3.5)$$

onde usamos a convenção de Einstein com índices repetidos sendo somados. Cada coordenada do espaço de fase evolui no tempo de acordo com as equações de Hamilton abaixo, que são equivalentes a (3.2),

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}; \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \quad (3.7)$$

e que podem ser escritas de uma forma compacta por meio de parênteses de Poisson

$$\dot{g} = \{g, H\}, \quad (3.8)$$

onde $g = g(q, p)$ e

$$\{A, B\} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial q_n} \frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n} \frac{\partial B}{\partial q_n} \right), \quad (3.9)$$

onde N é a metade da dimensão do espaço de fase.

Evidentemente os vínculos levam a restrições sobre as variações das coordenadas do espaço de fase, em outras palavras, elas não podem variar independentemente, o que deveria se refletir nas equações hamiltonianas de movimento. Isto sugere uma modificação da hamiltoniana canônica para uma chamada hamiltoniana primária H^* que incorpore os vínculos. Como qualquer combinação linear¹ de vínculos primários é igual a zero, podemos adicioná-los à hamiltoniana com coeficientes a princípio arbitrários u_a , obtendo

$$H^* = H + u_a \varphi_a; \quad a = 1, \dots, m. \quad (3.10)$$

A hamiltoniana acima leva em conta explicitamente a não independência das coordenadas do espaço de fase devido aos vínculos primários. Entretanto elas introduzem um grau de indeterminação nas novas equações de movimento via coeficientes u_a . A seguir tentaremos determinar os coeficientes u_a .

Embora os vínculos sejam nulos, seus parênteses de Poisson com outras variáveis em geral não são nulos, de modo que só podemos fazê-los iguais a zero

¹Obviamente poderíamos adicionar potências mais altas nos vínculos primários mas tais termos extras não contribuiriam para as equações de movimento

após o cálculo dos parênteses de Poisson. Por essa razão, Dirac introduziu o conceito de fracamente nulo [13]

$$\varphi_a \approx 0. \quad (3.11)$$

Como a equação acima é válida num instante qualquer t devemos impor a manutenção dos vínculos primários no tempo:

$$\dot{\varphi}_a = \{\varphi_a, H^*\} = \{\varphi_a, H\} + u_{a'} \{\varphi_a, \varphi_{a'}\} \approx 0. \quad (3.12)$$

Eliminando o caso em que (3.12) resulta em inconsistência, o que significa que a lagrangiana original leva a equações de movimento inconsistentes, estas equações podem conduzir a três situações distintas:

- i) satisfeita identicamente, *i.e.*, $0 = 0$;
- ii) leva a equações independentes dos coeficientes u_a , isto é, $\{\varphi_a, \varphi_{a'}\} \approx 0$
- iii) leva a equações que impõem restrições sobre os coeficientes u_a .

As equações do segundo tipo resultam em vínculos que não são consequência direta da definição de momento mas envolvem as equações de movimento, por isso são denominadas **vínculos secundários**. Eles impõem novas condições de consistência $\tilde{\varphi}_j \approx 0$ ($j = 1, \dots, R$), o que leva a outra equação

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \{\tilde{\varphi}, H\} + u_{a'} \{\tilde{\varphi}, \varphi_{a'}\} \approx 0. \quad (3.13)$$

Este processo é repetido até não haver mais novos vínculos, resultando no final em uma série de vínculos secundários e equações para os coeficientes u_a .

Além de serem separados em primários e secundários, os vínculos Φ_A , $A = 1, \dots, M, M+1, \dots, M+R$, podem ser classificados em duas classes. Os de primeira classe ϕ_a , $a = 1, \dots, k$ e os de segunda classe χ_α onde $\alpha = 1, \dots, j$ tal que $j + k = M + R$.

Podemos definir qualquer grandeza R que seja função das coordenadas do espaço de fase como **primeira classe** se ela possuir parênteses de Poisson fracamente nulo com todos os vínculos:

$$\{R, \Phi_A\} \approx 0, \quad (3.14)$$

caso contrário ela será chamada de **segunda classe**.

Assim, os vínculos, independentemente de serem primários ou secundários serão classificados como de primeira classe ou segunda classe de acordo com seus parênteses de Poisson com todos os demais. Tal classificação está intimamente ligada com a determinação de alguns dos coeficientes u_a até então indeterminados como segue. Separando os vínculos primários em dois grupos de primeira e de segunda classe, respectivamente $\phi_{\bar{a}}$, $\chi_{\bar{a}}$ e analogamente para os multiplicadores $u_a = (u_{\bar{a}}, u_{\bar{\alpha}})$ podemos escrever as equações de movimento para uma grandeza qualquer $g(q_l, p_m)$ como

$$\dot{g} = \{g, H + u_{\bar{a}}\phi_{\bar{a}}\} + u_{\bar{\alpha}}\{g, \chi_{\bar{\alpha}}\}. \quad (3.15)$$

Impondo a manutenção no tempo dos vínculos de segunda classe, isto é, $\dot{\chi}_{\bar{\beta}} = 0$ nós podemos determinar os coeficientes $u_{\bar{\alpha}} = (C^{-1})^{\bar{\alpha}\beta}\{\chi_{\bar{\beta}}, H\}$, onde $(C^{-1})^{\alpha\beta}$ é a inversa da matriz formada pelos parênteses de Poisson entre os vínculos de segunda classe:

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_{\alpha}, \chi_{\beta}\}. \quad (3.16)$$

Após a determinação dos coeficientes $u_{\bar{\alpha}}$, a equação (3.15) pode ser escrita como

$$\dot{g} = \{g, H_1 + u_{\bar{\alpha}}\chi_{\bar{\alpha}}\} = \{g, H\}_D, \quad (3.17)$$

onde, de acordo com Dirac, introduzimos os novos parênteses abaixo:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_{\alpha}\}(C^{-1})^{\alpha\beta}\{\chi_{\beta}, B\}. \quad (3.18)$$

Estes novos parênteses propostos por Dirac têm todas as propriedades dos parênteses de Poisson e, como consequência direta de sua adoção, os vínculos de segunda classe se tornam fortemente nulos, $\chi_{\alpha} = 0$, podendo então ser excluídos da teoria, o que leva a uma redução direta do número de graus de liberdade. Com os novos parênteses tudo se passa, vide (3.17), como se $H^* = H_1$ e $\chi = 0$ identicamente. Note que a definição (3.18) é tal que se substituirmos, por exemplo, B por qualquer vínculo de segunda classe temos

$$\begin{aligned}
\{A, \chi_\gamma\}_D &= \{A, \chi_\gamma\} - \{A, \chi_\alpha\} (C^{-1})^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, \chi_\gamma\} \\
&= \{A, \chi_\gamma\} - \{A, \chi_\alpha\} (C^{-1})^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} \\
&= \{A, \chi_\gamma\} - \{A, \chi_\alpha\} \delta_\gamma^\alpha \\
&= \{A, \chi_\gamma\} - \{A, \chi_\gamma\} = 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, não faz diferença se $\chi_\alpha = 0$ antes ou depois de calcularmos os novos parênteses. As equações de movimento formuladas com os novos parênteses são exatamente iguais as equações de Hamilton originais. Ao contrário dos multiplicadores hamiltonianos $u_{\tilde{\alpha}}$ dos vínculos de segunda classe, que são completamente determinados nesse processo, os multiplicadores hamiltonianos u_a permanecem indeterminados o que transporta tal indeterminação para as equações de movimento. Isso é uma consequência da existência de simetrias locais, dependentes do tempo, também chamadas simetrias de gauge. Na prática isso significa que existem coordenadas espúrias na teoria que podem ser eliminadas (fixação de gauge). No processo de quantização da teoria hamiltoniana, mudamos as coordenadas do espaço de fase para operadores e trocamos os parênteses por comutadores e a função de onda deve ser aniquilada pelos vínculos de primeira classe:

$$\hat{\phi}_i \psi = 0. \quad (3.19)$$

3.1 Partícula relativística de spin nulo

Para ilustrar a idéia básica do procedimento a ser adotado nas seções em que trataremos de anyons tomaremos como exemplo a partícula livre relativística de spin zero. Podemos escrever sua ação de forma proporcional ao comprimento da linha do universo que ela percorre. Adotando, por razões dimensionais sua massa como constante de proporcionalidade:

$$S = -m \int ds = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}, \quad (3.20)$$

onde $ds^2 = dx_\mu(\tau) dx^\mu(\tau) = \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu (d\tau)^2$.

As coordenadas $x_\mu(\tau)$ correspondem à representação paramétrica da curva traçada pela partícula relativística conforme ela se movimenta no espaço-tempo, portanto τ não representa o tempo físico, que é dado por x_0 , e sim um tempo fictício. Dessa forma é esperado que ela possua simetria na reparametrização de tempo fictício. Fazendo $\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$ e $x_\mu(\tau) \rightarrow \tilde{x}_\mu(\tilde{\tau})$ temos

$$\frac{d}{d\tau} \rightarrow \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \frac{d}{d\tilde{\tau}}; \quad d\tau \rightarrow \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} d\tilde{\tau}; \quad \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} \rightarrow \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \frac{d\tilde{x}_\mu(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}}.$$

Substituindo na ação ficamos com

$$S = -m \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} \left| \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \right| d\tilde{\tau} \sqrt{\frac{d\tilde{x}_\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}}},$$

onde $\tilde{\tau}_i = \tilde{\tau}(\tau_i)$.

Vemos portanto que o funcional S é invariante por reparametrizações do tempo fictício que são monotônicas crescentes $d\tilde{\tau}/d\tau > 0$ e preservam os extremos: $\tilde{\tau}_i = \tilde{\tau}(\tau_i) = \tau_i$; ou monotônicas decrescentes $d\tilde{\tau}/d\tau < 0$ e trocam os extremos: $\tilde{\tau}(\tau_2) = \tau_1$ e $\tilde{\tau}(\tau_1) = \tau_2$.

Apesar da ação ser invariante, a quantidade $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu$ não o é, já que sob a transformação $\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$ temos $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu \rightarrow (d\tilde{\tau}/d\tau)^2 (dx_\mu/d\tilde{\tau})(dx^\mu/d\tilde{\tau})$. No entanto, é sempre possível fazer uma escolha de reparametrização de forma que tenhamos $(d\tilde{\tau}/d\tau) = k / \left(\sqrt{(dx_\mu/d\tilde{\tau})(dx^\mu/d\tilde{\tau})} \right)$, onde k é uma constante. Dessa forma $\dot{x}^2 \rightarrow k$, ou seja, isso resulta na condição de gauge: $d(\dot{x}^2)/d\tau = 0$. Abaixo veremos que essa é uma condição de gauge natural do ponto de vista das equações de movimento.

Da ação (3.20) temos a lagrangiana

$$L = -m \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}. \quad (3.21)$$

Da lagrangiana acima obtemos os momentos canônicos

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}}. \quad (3.22)$$

Dado que $\dot{p}_\mu = \partial L / \partial x^\mu = 0$ isto leva à equação de movimento para x_μ :

$$\ddot{x}_\mu - \frac{(\ddot{x} \cdot \dot{x})}{\dot{x}^2} \dot{x}_\mu = 0. \quad (3.23)$$

Impondo $d(\dot{x}^2)/d\tau = 0$ na equação acima, recaímos na equação de movimento conhecida para a partícula livre $\ddot{x}_\mu = 0$.

A simetria por reparametrizações $\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$ é local e foi interpretada acima como uma transformação de gauge. A ação (3.20) é invariante também por transformações globais, isto é, independente de τ . Nesse conjunto de transformações temos o grupo de Poincaré em D dimensões. Ou seja, translações e rotações do espaço-tempo. Infinitesimalmente temos respectivamente

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu; \quad (3.24)$$

$$\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu, \quad (3.25)$$

onde ϵ^μ e $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ são parâmetros infinitesimais independentes do tempo. Podemos torná-los dependentes do tempo e utilizar o teorema de Noether para determinar as quantidades conservadas:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu = p_\mu \dot{\epsilon}^\mu; \quad (3.26)$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu = -\frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} (\dot{\omega}^{\mu\nu} x_\nu + \omega^{\mu\nu} \dot{x}_\nu) = p_\mu \omega^{\mu\nu} x_\nu. \quad (3.27)$$

Dessa forma a variação da ação é proporcional a derivadas temporais dos parâmetros infinitesimais das transformações, e de acordo com o teorema de Noether as quantidades que multiplicam tais derivadas correspondem às cargas conservadas. Reescrevendo-as em termos de coordenadas e momento temos de (3.26) e (3.27)

$$\dot{P}^\mu = 0, \quad P_\mu = p_\mu; \quad (3.28)$$

$$J_{\mu\nu} = 0, \quad J_{\mu\nu} = p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu. \quad (3.29)$$

A partir dos parênteses de Poisson básicos

$$\{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu}; \quad (3.30)$$

$$\{x_\mu, x_\nu\} = 0; \quad (3.31)$$

$$\{p_\mu, p_\nu\} = 0, \quad (3.32)$$

nós podemos verificar que tais constantes de movimento geram a álgebra clássica de Poincarè em D dimensões

$$\{P^\mu, P^\nu\} = 0; \quad (3.33)$$

$$\{J^{\mu\nu}, P^\sigma\} = P^\mu \eta^{\nu\sigma} - P^\nu \eta^{\mu\sigma}; \quad (3.34)$$

$$\{J^{\mu\nu}, J^{\sigma\rho}\} = \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma}. \quad (3.35)$$

É importante notar que a álgebra de Poincarè acima possui dois invariantes de Casimir quadráticos que são combinações quadráticas de geradores que comutam com todos os geradores da álgebra. Um deles depende explicitamente da dimensão do espaço-tempo e está relacionado com o spin da partícula. O outro Casimir $P_\mu P^\mu$, possui a mesma forma para qualquer valor de D e fixa a massa da partícula. Como no caso em questão não há spin, o único invariante de Casimir relevante é $P_\mu P^\mu$. Pode-se verificar facilmente que

$$\{P_\mu P^\mu, J_{\mu\nu}\} = 0 = \{P_\mu P^\mu, P_\nu\}. \quad (3.36)$$

Voltando a definição do momento (3.22), vemos que temos D equações que poderiam ser usadas para determinar as D velocidades $\dot{x}_\mu$ em função dos D momentos p_μ , mas apenas $D - 1$ dessas equações são de fato independentes, e, portanto, uma das velocidades não poderá ser invertida em função dos momentos e conseqüentemente teremos um vínculo primário associado com a não independência de tais equações. Note que o lado direito de (3.22) é tal que a seguinte equação (vínculo) é satisfeita:

$$\varphi = p^2 - m^2 \approx 0. \quad (3.37)$$

A hamiltoniana total é a soma da hamiltoniana canônica, nula neste caso, com uma combinação linear dos vínculos primários. Portanto

$$H_1 = \frac{e}{2} (p^2 - m^2), \quad (3.38)$$

onde o multiplicador hamiltoniano e é uma função arbitrária do tempo como os coeficientes u_a da seção anterior. Como H_1 não depende de x_μ , é evidente que

$\dot{\varphi} = 0$ e não há vínculos secundários nesse caso. Note o fato, também trivial, que φ é um vínculo de primeira classe. Em geral, vínculos de primeira classe estão associados a simetrias locais (dependentes do tempo) da ação. No caso em questão corresponde a simetria por reparametrizações do tempo fictício $\tau \rightarrow \tau(\tilde{\tau})$.

Partindo para a quantização, usando-se o operador $\hat{p}_\mu = -i\partial/\partial x^\mu$ no lugar do momento e exigindo que a função de onda seja aniquilada pelos vínculos de primeira classe

$$(\hat{p}^2 - m^2) \psi = 0, \quad (3.39)$$

obtemos a equação de Klein-Gordon para a partícula relativística de spin zero e massa m em D dimensões. Como $P_\mu P^\mu$ é um invariante de Casimir tal equação garante que os estados físicos pertençam a uma representação irredutível do grupo de Poincaré caracterizada por possuir massa m .

3.2 Uma lagrangiana quadrática via invariante de Casimir

A ação (3.20) tem a inconveniência de depender de forma não linear das velocidades $\dot{x}_\mu$, o que dificulta, por exemplo, o seu uso no cálculo do propagador numa integral de trajetória. Podemos obter uma ação equivalente classicamente a (3.20) porém com dependência quadrática nas velocidades através do seguinte procedimento que será adotado no caso de anyons. Note que a hamiltoniana (3.38) H_1 nada mais é do que uma combinação dos invariantes de Casimir relevantes. Ou seja, $P_\mu P^\mu$. Tal fato garante algebricamente, vide (3.36), que os geradores de Poincaré serão constantes de movimento $\dot{J}_{\mu\nu} = \{J_{\mu\nu}, H_1\} = 0 = \dot{P}_\nu = \{P_\nu, H_1\}$. Dessa forma, mesmo desconhecendo a origem geométrica da ação (3.20) poderíamos ter sugerido que a hamiltoniana da teoria fosse $(e/2)(p^2 - m^2)$. Podemos obter a lagrangiana via transformação de Legendre da hamiltoniana (3.38)

$$L = p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_e \dot{e} - H_1, \quad (3.40)$$

onde agora introduzimos o campo conhecido como einbein $e(\tau)$ e seu momento conjugado π_e no espaço de fase da teoria.

Usando a equação de movimento para p_μ : $\partial L/\partial p^\mu = \dot{x}_\mu - ep_\mu = 0$ e substituindo-a de volta na lagrangiana ficamos com a lagrangiana quadrática nas velocidades

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2e} + \frac{em^2}{2}. \quad (3.41)$$

Eliminado o einbein e através de suas equações de movimento e substituindo de volta na lagrangiana (3.41) deduzimos (3.21) o que mostra a equivalência clássica entre (3.41) e (3.21)². A lagrangiana (3.41) também leva à equação de Klein-Gordon, o que demonstra sua equivalência quântica com a lagrangiana (3.21). De fato, analisando a lagrangiana (3.41) vemos que agora é possível inverter todas as velocidades $\dot{x}_\mu$ em função dos momentos e poderíamos pensar que ela não possui o vínculo $p^2 + m^2 \approx 0$. Entretanto temos o vínculo $\pi_e = \partial L/\partial \dot{e} = 0$ que advém da impossibilidade de invertermos $\dot{e} = \dot{e}(e, \pi_e)$. Impondo a manutenção no tempo desse vínculo primário $\{\pi_e, (e/2)(p^2 - m^2)\} \approx 0$ somos levados a $p^2 + m^2 \approx 0$ como vínculo secundário. Ou seja, agora temos um vínculo primário $\pi_e \approx 0$ e um secundário $p^2 - m^2 \approx 0$, ambos de primeira classe.

3.2.1 Limite não relativístico

É fácil comprovar que (3.38) fornece o limite não relativístico correto $H_1 \rightarrow \vec{p}^2/2m$. É conveniente fixarmos o gauge do tempo próprio

$$\chi = x_0 - \tau \approx 0. \quad (3.42)$$

Como $\{\chi, \varphi\} = \{x_0 - \tau, p^2 - m^2\} = 2p_0$ não é fracamente nulo, ambos χ e φ são agora vínculos de segunda classe. Definindo $\chi_1 \equiv \varphi$; $\chi_2 \equiv \chi$ temos os parênteses de Dirac (vide (3.18))

²Na verdade temos duas soluções de sinais diferentes para o einbein o que leva a lagrangiana (3.21) a menos de um sinal. As equações de movimento para $x_\mu(\tau)$ são as mesmas para ambos os sinais.

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_a\} (C^{-1})^{ab} \{\chi_b, B\}, \quad (3.43)$$

onde

$$(C^{-1})^{ab} = \frac{1}{2p_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com o uso de tais parênteses os vínculos $\chi_1 = 0 = \chi_2$ podem ser impostos fortemente nulos. Assim $H_1 = 0$ fortemente, e a dinâmica torna-se trivial, em particular

$$\dot{\chi} = \dot{x}_0 - 1 = \{\chi, H_1\}_D = 0. \quad (3.44)$$

Entretanto $\dot{x}_0 = 1$ está em contradição com

$$\dot{x}_0 = \{x_0, H_1\}_D = 0. \quad (3.45)$$

O problema reside na dependência explícita no tempo do vínculo χ . Esse problema pode ser contornado passando-se da condição de gauge explícita no tempo $x_0 - \tau = 0$ para $\tilde{x}_0 = 0$ através de uma transformação canônica $x_0 \rightarrow \tilde{x}_0 = x_0 - \tau$, com as demais coordenadas do espaço de fase inalteradas. Tal transformação é gerada por

$$F = -p_0\tau + \sum_A \tilde{q}_A p_A, \quad (3.46)$$

onde a soma sobre o índice A corresponde a todas as coordenadas do sistema, exceto x_0 . Dessa forma a hamiltoniana muda para

$$H_1 \rightarrow H_1 - \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{e}{2} (p^2 - m^2) + p_0. \quad (3.47)$$

Após a fixação de gauge $\tilde{x}_0 = x_0 - \tau = 0$ os vínculos de segunda classe $\chi_1 = x_0 = 0$ e $\chi_2 = p^2 - m^2 = 0$ são eliminados através de parênteses de Dirac, e assim a dinâmica é dada por

$$H_1 = p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (3.48)$$

Note agora que não há mais contradição $\dot{\tilde{x}}_0 = 0 = \{\tilde{x}_0, H_1\}_D$.

Restituindo a velocidade da luz $H_1 = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ e tomando o limite não relativístico ($c \rightarrow \infty$) temos

$$H_1 = mc^2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{(mc)^2} \right]^{1/2} \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (3.49)$$

Reproduzimos a energia de uma partícula não relativística livre.



Capítulo 4

Uma ação simples para partículas de spin fracionário α

4.1 Caso particular $\alpha = \pm 1/2$

Partindo da equação de Dirac em $2 + 1$ dimensões

$$(i\hat{\sigma} \cdot \partial \pm m) \psi = 0. \quad (4.1)$$

Usando $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$, e o fato de que em $D = 2 + 1$ o operador $\hat{S}_\mu$ se reduz a um conjunto de matrizes 2×2 que pode ser escrito na forma

$$\hat{S}_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \hat{S}^{\alpha\beta} = -i\epsilon_{\mu\alpha\beta} \frac{[\hat{\sigma}_\alpha, \hat{\sigma}_\beta]}{4} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_\mu, \quad (4.2)$$

onde usamos a álgebra $[\hat{\sigma}_\alpha, \hat{\sigma}_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}_\gamma$ com as matrizes de Pauli na representação abaixo

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Sendo fácil verificar que as componentes do spin satisfazem a álgebra do momento angular $[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma$.

Temos então

$$\left(\hat{S}_\mu \hat{p}^\mu \pm \frac{1}{2} m \right) \psi = 0. \quad (4.4)$$

Tal equação pode ser escrita na forma

$$\left(\hat{P} \cdot \hat{S} + \alpha m \right) \psi = 0, \quad (4.5)$$

onde $\alpha = \pm 1/2$.

4.2 Caso particular $\alpha = \pm 1$

A partícula de spin 1 pode ser descrita pela ação de Maxwell-Chern-Simons

$$S = \int \left[-\frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4} + \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\gamma} \partial_\mu A_\nu A_\gamma \right] d^3x, \quad (4.6)$$

onde θ é uma constante com dimensão de massa e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Obtendo as equações de movimento ficamos com

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} + \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Se definirmos

$$F^\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

teremos

$$\partial_\beta \varepsilon^{\beta\nu\alpha} F_\nu + \theta F^\alpha = 0. \quad (4.9)$$

Substituindo $p_\mu = i\partial_\mu$ e usando a representação adjunta da álgebra de Poincaré para o operador de spin $(S^b)_{ac} = i\varepsilon^b_{ac}$ na equação temos

$$(p \cdot S)_b^a F^b + \theta F^a = 0. \quad (4.10)$$

Para determinar θ multiplicamos (4.9) por ∂_α obtendo

$$\partial_\alpha F^\alpha = 0. \quad (4.11)$$

Agora multiplicamos (4.9) por $\varepsilon_\alpha^{\delta\varepsilon} \partial_\varepsilon$ ficando com

$$-\partial^2 F^\delta - \theta^2 F^\delta = 0. \quad (4.12)$$

Usando $p_\mu = i\partial_\mu$ podemos escrever a equação acima como $(p^2 - m^2) F^\delta = 0$ com $\theta = \pm m$ e portanto de (4.10) temos

$$(S \cdot p)_b^a F^b \pm m F^a = 0, \quad (4.13)$$

que pode ser escrita na forma $(S \cdot p + \alpha m)_b^a F^b = 0$. Concluimos que temos uma partícula de massa $m = |\theta|$, e $\alpha = \pm 1$ é seu spin, respectivamente para $\theta > 0$ e $\theta < 0$.

Veremos a seguir que a quantidade $S^\mu P_\mu$ tem uma interpretação bem definida em relação a álgebra do grupo de Poincaré em 2+1 dimensões, a qual será fundamental na formulação relativística de partículas livres de spin fracionário para valores arbitrários de α .

Por último note que, como no caso anterior $\alpha = \pm 1/2$, temos também para $\alpha = \pm 1$ que a álgebra $sl(2, \mathbb{R})$ das componentes do spin $(S^b)_{ac} = -i\varepsilon_{ac}^b$ é satisfeita:

$$\begin{aligned} [S^a, S^e]_{bd} &= (S^a)_{bc} (S^e)^c_d - (S^e)_{bc} (S^a)^c_d \\ &= i^2 (\varepsilon_{bc}^a \varepsilon_d^{ec} - \varepsilon_{bc}^e \varepsilon_d^{ac}) \\ &= i^2 (\delta_d^a \delta_b^e - \delta^{ae} \delta_{bd} - \delta_d^e \delta_b^a + \delta^{ea} \delta_{bd}) \\ &= i^2 \varepsilon_f^{ae} \varepsilon_{db}^f = i\varepsilon_f^{ae} (S^f)_{bd} \\ [S^a, S^e] &= i\varepsilon^{aec} S_c. \end{aligned}$$

4.3 Spin arbitrário ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Em $D = 2 + 1$ dimensões o grupo de Poincaré possui 6 geradores

$$G_K = (J_0, J_1, J_2, P_0, P_1, P_2), \quad K = 1, \dots, 6,$$

cujas álgebra clássica em termos de parênteses de Poisson pode ser escrita como

$$\{J_\mu, J_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} J^\alpha; \quad (4.14)$$

$$\{J_\mu, P_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} P^\alpha; \quad (4.15)$$

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0, \quad (4.16)$$

onde J_μ são as componentes duais dos geradores de rotação do espaço-tempo $J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha} J^{\nu\alpha}/2$, com $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -)$ e $\epsilon_{012} = +1$ e P_μ são as componentes dos geradores de translação. Os invariantes de Casimir quadráticos são dados por combinações bilineares de geradores $C^{KL}G_KG_L$ que comutam com todos os geradores da álgebra, ou seja, determinamos os C^{KL} a partir das equações

$$\{G_M, C^{KL}G_KG_L\} = 0. \quad (4.17)$$

Para o grupo de Poincarè em $2+1$ temos duas soluções para os C^{KL} que resultam nos invariantes de Casimir $P_\mu P^\mu$ e $J_\mu P^\mu$.

Podemos decompor as componentes duais de momento angular total J_μ em componentes duais de momento angular orbital L_μ e de spin S_μ por meio de

$$J_\mu = L_\mu + S_\mu. \quad (4.18)$$

Como vimos nos exemplos de spin $1/2$ e spin 1 em teoria de campos em $2+1$ dimensões, é natural que tanto S_μ como L_μ satisfaçam a álgebra canônica de momento angular separadamente

$$\{S_\mu, S_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} S^\alpha; \quad (4.19)$$

$$\{L_\mu, L_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} L^\alpha. \quad (4.20)$$

E além disso, os parênteses abaixo

$$\{L_\mu, S_\nu\} = 0, \quad (4.21)$$

garantem que a álgebra de Lorentz (4.14) seja satisfeita.

Tais parênteses podem ser realizados num espaço de fase de coordenadas canônicas (x_μ, p_ν) e coordenadas canônicas extras q_i, π_j , $i, j = 1, \dots, K$ com os parênteses não nulos:

$$\{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu};$$

$$\{q_i, \pi_j\} = \delta_{ij},$$

e demais parênteses nulos. Para isso basta identificarmos

$$\begin{aligned} L_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\alpha} x^\nu p^\alpha; \\ P_\nu &= p_\nu; \\ S_\mu &= S_\mu(q_i, \pi_j), \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde a dependência das componentes de spin nas coordenadas canônicas extras $S_\mu(q_i, \pi_j)$ deve ser tal que a álgebra (4.19) seja satisfeita. Note que (4.22) implica em $J \cdot P = S \cdot P$. O número K de pares de coordenadas extras depende do número de graus de liberdade representado pelo spin. Ao estudarmos o grupo de rotação em $d = 3$ e $d = 2$ dimensões notamos que uma representação irredutível do $SO(3)$ com spin j possui $2j + 1$ estados enquanto que em duas dimensões, como o $SO(2)$ possui apenas um gerador, em cada representação irredutível temos apenas um estado indicando que o spin não representa grau de liberdade em $d = 2$. De fato, vide [20], independente do valor do spin as partículas elementares de spin fracionário em $D = 2 + 1$ dimensões possuem apenas um estado de polarização. Isso significa, que as coordenadas extras (q_i, π_j) não são a princípio necessárias e que o espaço de fase necessário para descrever partículas de spin fracionário em $2 + 1$ dimensões pode ser o mesmo utilizado para partículas de spin nulo (vide capítulo 2), ou seja, apenas (x_μ, p_ν) . Essa descrição chamaremos de **mínima** como já foi dito na introdução. Se por ventura quisermos introduzir coordenadas canônicas extras tais coordenadas devem ser espúrias e esses modelos chamaremos de **estendidos**. Quando $K = 1$ e $S_\mu = S_\mu(q, \pi)$ teremos um modelo **minimamente estendido**.

4.4 Modelos mínimos

Modelos mínimos foram considerados em [6, 20, 29]. Baseado na álgebra de Poincarè, seguindo idéias de [11], podemos fazer uma análise independente de modelo das consequências físicas de trabalharmos num espaço de fase reduzido. Seguindo [28], primeiramente notamos que tanto para modelos mínimos como estendidos os valores da massa (m) e da polarização (α) da partícula são fixados pelos invariantes de Casimir

$$P^\mu P_\mu - m^2 = 0; \quad (4.23)$$

$$J^\mu P_\mu + \alpha m = 0. \quad (4.24)$$

O momento angular total é dado pelo momento angular orbital mais o spin, que a princípio pode ser uma função de x_μ e p_μ

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha} x^\nu p^\alpha + S_\mu(x, p). \quad (4.25)$$

No entanto, calculando o parênteses de Poisson entre J_μ e p_ν e usando (4.15) temos

$$\{\epsilon_{\mu\nu\alpha} x^\nu p^\alpha + S_\mu(x, p), p_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} p^\alpha + \{S_\mu(x, p), p_\nu\}. \quad (4.26)$$

Para que a álgebra seja mantida o segundo termo do lado direito deve ser nulo. Usando as relações canônicas entre x_μ e p_ν , $\{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu}$ e $\{p_\mu, p_\nu\} = 0$, concluímos que S_μ deve ser função apenas de p_μ . Ficamos então com os geradores

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha} x^\nu p^\alpha + S_\mu(p); \quad (4.27)$$

$$P_\mu = p_\mu. \quad (4.28)$$

Podemos sempre decompor o spin em componentes ortogonal e paralela ao momento. A componente paralela é fixada pelo segundo invariante de Casimir (4.24) enquanto que a componente ortogonal ao momento linear é em princípio arbitrária

$$S_\mu = \alpha \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}} + \epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\nu p^\alpha,$$

onde $A_\mu = A_\mu(p)$ é uma função arbitrária a princípio. A forma mais geral possível para os parênteses de Poisson das variáveis canônicas é

$$\{p_\mu, p_\nu\} = 0; \quad (4.29)$$

$$\{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu}; \quad (4.30)$$

$$\{x_\mu, x_\nu\} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha} R^\alpha, \quad (4.31)$$

onde (4.29) é necessária para que a invariância translacional não seja quebrada, (4.30) define as variáveis canonicamente conjugadas e R^α é uma função a princípio arbitrária de x_μ e p_ν . Seguindo [28] impomos o fechamento da álgebra de Poincaré e que sejam válidas as identidades de Jacobi envolvendo as variáveis canônicas obtemos a relação (vide apêndice C):

$$R_\mu = \alpha \frac{p_\mu}{(p^2)^{3/2}} + \epsilon_\mu{}^{\nu\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial p^\nu} \quad (4.32)$$

De (4.31) e (4.32) vemos que é sempre possível redefinir as coordenadas $x_\mu \rightarrow \tilde{x}_\mu - A_\mu$ de forma a absorver toda dependência de R_μ e S_μ em A_μ tal que terminamos com o spin totalmente paralelo ao momento $S_\mu = \alpha p_\mu / \sqrt{p^2}$ como acontece em [6, 21, 29]. As novas coordenadas se comportam como vetores perante as rotações de Lorentz:

$$\{J_\mu, \tilde{x}_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} \tilde{x}^\alpha. \quad (4.33)$$

Porém, possuem parênteses não nulos entre si:

$$\{\tilde{x}_\mu, \tilde{x}_\nu\} = \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\mu} - \frac{\partial x_\mu}{\partial p_\nu} = \alpha \epsilon_{\mu\nu\gamma} \frac{p^\gamma}{(p^2)^{3/2}}. \quad (4.34)$$

No processo de quantização os parênteses se tornam comutadores e assim concluiremos que as diferentes coordenadas espaciais da partícula de spin fracionário não poderão ser medidas simultaneamente, ou seja, a partícula não pode ser localizada num ponto. As equações rotacionais (4.34) podem ser resolvidas quebrando explicitamente a covariância de Lorentz, assim temos uma solução do tipo monopolo no espaço dos momentos

$$\tilde{x}_\mu = \alpha \epsilon_{\mu 0 i} \frac{p^0 p^2 p^i}{(p^2)^{3/2} |p^0| (|p^0| + \sqrt{p^2})}. \quad (4.35)$$

Alternativamente podemos trabalhar com coordenadas que possuem parênteses nulos entre si (localizadas) mas que não se transformam como vetores perante o grupo de Lorentz. De qualquer forma a covariância explícita é quebrada na formulação mínima. É importante salientar que, como $S_\mu = S_\mu(p)$ as componentes do spin não satisfazem à álgebra (4.19) e sim $\{S_\mu, S_\nu\} = 0$ [5, 28], ou seja, quanticamente teremos componentes de spin comutantes, ao contrário do que naturalmente esperamos e, ao contrário do que acontece nos exemplos mais conhecidos de $\alpha = \pm 1/2$ (espinor de Dirac) e $\alpha = \pm 1$ (fóton topologicamente massivo) que já apresentamos. Mesmo assim tais modelos tem sido considerados na literatura [5, 6, 9, 21].

4.5 Modelos estendidos

Como vimos na seção anterior, nos modelos mínimos as componentes do tri-vetor de spin satisfazem relações de comutação anômalas, ao invés da álgebra (4.19) de momento angular. Outra desvantagem é que a covariância explícita de Poincaré é quebrada. Como a análise anterior foi independente de modelo e baseada apenas em covariância de Poincaré e identidades de Jacobi, não há como evitar tais problemas na formulação mínima. Uma possível alternativa é estendermos o espaço de fase introduzindo coordenadas espúrias q_i, π_j , $i, j = 1, \dots, K$ definindo os chamados modelos estendidos. É natural, como veremos, definir tais modelos [11] partindo de suas hamiltonianas. Eventualmente obteremos a lagrangiana via transformada de Legendre inversa.

A hamiltoniana é construída por uma combinação dos invariantes de Casimir o que garante por construção (vide (4.17)) que os geradores do grupo de Poincaré corresponderão a cargas conservadas da teoria. Em geral, podemos escrever

$$H = \frac{e}{2} (p^2 - m^2) + \sigma (S_\mu (q_i, \pi_j) p^\mu + \alpha m) + \sigma_k \chi_k, \quad (4.36)$$

onde e, σ e σ_k , $k = 1, \dots, t$ são multiplicadores hamiltonianos e χ_k são vínculos extras necessários para a contagem de graus de liberdade.

4.5.1 Uma ação simples

Em $D = 2 + 1$ dimensões, como já mencionamos, o spin não representa graus de liberdade propagantes. Isto é, uma partícula de spin nulo, $1/2$ ou 1 com sinal da energia definido tem apenas um grau de liberdade. O aumento do spin (ou polarização) não implica em aumento do número de graus de liberdade em $2 + 1$ dimensões. No formalismo de sistemas vinculados os invariantes de Casimir serão implementados através de vínculos de primeira classe

$$\phi_1 = p^2 - m^2 \approx 0, \quad \phi_2 = S \cdot P + \alpha m \approx 0. \quad (4.37)$$

Como o vínculo $\phi_2 \approx 0$ é de primeira classe então poderemos fixar um gauge associado a simetria local por ele gerada o que permite a eliminação de dois graus de liberdade, um através do vínculo em si e outro através da condição de gauge. Portanto se estendermos o espaço de fase de forma mínima introduzindo apenas um par de variáveis canonicamente conjugadas q, π não haverá necessidade de vínculos extras além de ϕ_2 . Essa foi a atitude tomada nos trabalhos [12, 16]. Evidentemente devemos nos certificar que um par de variáveis conjugadas é suficiente também para a realização da álgebra $sl(2, \mathbb{R})$ do momento angular (4.19). Para realizar a álgebra do momento angular no espaço de fase estendido, assumindo que $S_\mu(q, \pi)$ seja uma função analítica das coordenadas do espaço de fase, podemos tentar determiná-la por meio de um Ansatz da forma [12]

$$S_\mu = \pi f_\mu(q) + g_\mu(q), \quad (4.38)$$

onde as funções $f_\mu(q)$ e $g_\mu(q)$ serão determinadas impondo que (4.38) satisfaça à álgebra $sl(2, \mathbb{R})$ (4.21). Assim chegamos a duas equações diferenciais não lineares

$$f_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \frac{df^\alpha}{dq} f^\beta; \quad (4.39)$$

$$g_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \frac{dg^\alpha}{dq} f^\beta. \quad (4.40)$$

Analisando a equação (4.39) é possível obter as seguintes condições que devem ser satisfeitas para qualquer solução f_μ :

$$f^2 = 0; \quad f'^2 = -1; \quad f'' \cdot f = 1. \quad (4.41)$$

Usando as equações (4.39) e (4.40) e as relações (2.12) podemos determinar $g_\mu(q)$. Fazendo o produto vetorial entre $f_\mu(q)$ e $g_\mu(q)$ chegamos a

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha} f^\nu g^\alpha = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} f^\nu \varepsilon^\alpha_{\beta\gamma} g'^\beta f^\gamma = - (f \cdot g') f_\mu. \quad (4.42)$$

Como $f_\alpha = \varepsilon_{\alpha\mu\nu} f'^\mu f^\nu$, isto permite concluir

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha} f^\nu (g^\alpha + k f'^\alpha) = 0, \quad (4.43)$$

onde $k = - (f \cdot g')$.

Fazendo o produto vetorial de (4.43) com um vetor arbitrário a_β resulta em

$$\begin{aligned} \varepsilon_\gamma^{\beta\mu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} a_\beta f^\nu (g^\alpha + k f'^\alpha) &= 0; \\ f_\gamma (g \cdot a + k f' \cdot a) - f \cdot a (g_\gamma + k f'_\gamma) &= 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

ou seja,

$$g_\mu = -k f'_\mu + \frac{(g \cdot a + k f' \cdot a)}{f \cdot a} f_\mu. \quad (4.45)$$

Para o caso particular em que $a_\mu = f''_\mu$ então $f \cdot a = 1$, portanto existe pelo menos uma escolha de a_μ em que $f \cdot a \neq 0$ o que torna a demonstração acima válida. É fácil ver que (4.45) de fato satisfaz (4.40). Portanto a solução mais geral de (4.40) pode ser escrita como

$$g_\alpha = -k f'_\alpha + r(q) f_\alpha, \quad (4.46)$$

onde $r(q)$ é uma função arbitrária de q .

Como $(q, \pi) \rightarrow (q, \pi + r(q))$ é uma transformação canônica que muda a lagrangiana por uma derivada total no tempo podemos redefinir π de forma a incorporar $r(q)$ sem alterar a dinâmica do sistema. Podemos então escrever a solução para S_μ como

$$S_\mu = \pi f_\mu + s f'_\mu, \quad (4.47)$$

onde s é uma constante real arbitrária e $f_\mu(q)$ pode ser qualquer solução de (4.39). Usando as condições (4.41) temos para a solução (4.47)¹

$$S^\mu S_\mu = -s^2. \quad (4.48)$$

Note que $S^\mu S_\mu$ é constante pois é um Casimir da álgebra $sl(2, \mathbb{R})$.

Para completar nosso modelo minimamente estendido precisamos apenas encontrar soluções para (4.39). A utilização das condições (4.41) nos auxilia na obtenção de uma solução particular para (4.39). Assim, por exemplo, temos de [26] a solução **compacta** ($0 \leq q \leq 2\pi$)

$$f_\mu = (1, -\cos q, \sin q), \quad (4.49)$$

e de [12] temos a solução **não compacta** ($-\infty < q < \infty$)

$$f_\mu = a_\mu q^2 + b_\mu q + c_\mu, \quad (4.50)$$

onde $a_\mu = (1, 0, -1)$, $b_\mu = (-1, 1, 1)$ e $c_\mu = \frac{1}{2}(1, -1, 0)$ são constantes escolhidas de modo a satisfazer a equação (4.39).

A seguir mostraremos que as duas soluções acima podem ser relacionadas via transformação de coordenadas que nos permitirá também obter um conjunto infinito de soluções à partir de (4.49) ou (4.50).

Vamos considerar que diferentes soluções de (4.39) podem estar relacionadas por meio de uma mudança de variáveis $q \rightarrow u(q)$ de forma que a nova solução obedeça a equação (4.39) na nova variável u .

¹Quanticamente temos um problema de ordenamento na definição de $\hat{S}_\mu$. Usando o ordenamento de Weyl: $\hat{S}_\mu = \frac{1}{2}(\hat{\pi}\hat{f}_\mu + \hat{f}_\mu\hat{\pi}) + s f'(\hat{q})$ temos

$$\hat{S}^\mu \hat{S}_\mu = -\left(s^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Esse resultado é típico da representação irredutível de $SO(2, 1)$ conhecida como contínua principal (vide nota de rodapé à página 23).

Podemos testar esta hipótese tentando obter novas soluções de (4.39) por meio de uma mudança de variáveis. Escrevendo a função f_μ como

$$f_\mu(q) = g(u(q)) \tilde{f}_\mu(u(q)), \quad (4.51)$$

substituímos na equação (4.39) obtendo

$$\tilde{f}_\mu(u) = g(u) \frac{du}{dq} \epsilon_{\mu\alpha\beta} \frac{d\tilde{f}^\alpha(u)}{du} \tilde{f}^\beta(u). \quad (4.52)$$

Impondo que (4.39) deva ser satisfeita na nova variável u chegamos a

$$g(u) \frac{du}{dq} = 1. \quad (4.53)$$

Portanto vemos que f_α se transforma como um vetor contravariante sob a mudança de coordenadas de q para $u(q)$:

$$f_\alpha(q) = \frac{dq}{du} \tilde{f}_\alpha(u(q)). \quad (4.54)$$

Como ilustração tomamos o exemplo (k é uma constante)

$$g(u) = u^{k-1}, \quad (4.55)$$

quando então a equação (4.53) se torna

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{u^k}{k} \right) = 1, \quad (4.56)$$

o que resulta na mudança de coordenadas (r abaixo é uma constante):

$$q = \frac{u^k}{k} + r, \quad (4.57)$$

conseqüentemente

$$\tilde{f}_\mu(u) = u^{1-k} f_\mu(q(u)). \quad (4.58)$$

Usando a transformação acima na solução (4.50) chegamos a

$$\tilde{f}_\mu(u) = a_\mu \left(\frac{u^{1+k}}{k^2} + \frac{2ur}{k} + u^{1-k}r^2 \right) + b_\mu \left(\frac{u}{k} + u^{1-k}r \right) + c_\mu (u^{1-k}). \quad (4.59)$$

Esta solução obedece a equação (4.39) na variável u mostrando que é possível gerar novas soluções a partir de outra pré-existente. Isto sugere que as soluções compactas de [26] poderiam estar relacionadas às soluções não compactas de [12] por meio de uma mudança de variáveis, assim chegamos a $u(q)$:

$$u(q) = \phi + 2 \arctan(2q - 1), \quad (4.60)$$

onde ϕ é uma constante arbitrária a princípio. A equação (4.53) resulta em

$$g = \left(\frac{du}{dq} \right)^{-1} = q^2 - q + \frac{1}{2}. \quad (4.61)$$

Se tomarmos a solução compacta como $\tilde{f}_\mu$ em (4.51) após a introdução de (4.60) e (4.61) ficamos com

$$f_\mu = \left(q^2 - q + \frac{1}{2} \right) (1, -\cos[\phi + 2 \arctan(2q - 1)], \sin[\phi + 2 \arctan(2q - 1)]). \quad (4.62)$$

Escolhendo $\phi = \frac{\pi}{2}$ resulta na solução para f_μ na variável q :

$$f_\mu = (q^2 - q + 1/2, q - 1/2, q - q^2).$$

Que é a solução obtida em [12] mostrando portanto a relação direta entre as soluções de [26] e [12], que é um dos resultados originais desta dissertação. Não sabemos todavia se qualquer solução de (4.39) poderá ser obtida a partir das soluções já conhecidas via mudança de variáveis.

Tendo a hamiltoniana procedemos agora com a passagem do formalismo hamiltoniano para o formalismo lagrangiano. Obtendo-se os momentos em função das velocidades via equações de Hamilton e substituindo na transformada de Legendre inversa temos

$$L = p \cdot \dot{x} + \pi \dot{q} - \frac{e}{2} (p^2 - m^2) - \sigma ((\pi f_\mu + s f'_\mu) p^\mu + \alpha m). \quad (4.63)$$

Eliminando p_μ através de $\partial L/\partial p_\mu = 0$ temos

$$L = \frac{1}{2e} (\dot{x}^2 + \sigma^2 f'^2 s^2 - 2\sigma \dot{x}^\mu (\pi f_\mu + s f'_\mu)) + \frac{em^2}{2} + \pi \dot{q} - \sigma \alpha m. \quad (4.64)$$

Esta lagrangiana pode ser simplificada por meio da equação de movimento $\partial L/\partial \pi = 0$, de onde tiramos

$$\sigma = \frac{e\dot{q}}{\dot{x} \cdot f}. \quad (4.65)$$

Substituindo (4.65) em (4.64) ficamos com

$$L = \frac{1}{2e} \left(\dot{x}_\mu - \frac{es\dot{q}f'_\mu}{f \cdot \dot{x}} \right)^2 + \frac{em^2}{2} - \frac{\alpha me\dot{q}}{f \cdot \dot{x}}. \quad (4.66)$$

No caso particular em que S_μ é um vetor tipo luz ($s = 0$) teremos a lagrangiana

$$L_0 = \frac{\dot{x}^2}{2e} + \frac{em^2}{2} - \frac{\alpha me\dot{q}}{f \cdot \dot{x}}. \quad (4.67)$$

A qual é a lagrangiana mais simples da literatura capaz de descrever uma partícula livre de spin fracionário em $2 + 1$ dimensões. Pode-se notar que quando $\alpha = 0$ (4.67) se reduz ao caso da partícula de spin nulo (3.41), como era esperado. Usando as equações de movimento podemos estudar quais mudanças a introdução do termo de spin acarretou no sistema da partícula livre de spin nulo como veremos em (4.5.2) a seguir.

Por fim note que sob a transformação de coordenadas $q \rightarrow u(q)$, f'_μ se transforma como um escalar assim como $\dot{q}/f \cdot \dot{x}$:

$$\frac{\dot{q}}{f \cdot \dot{x}} \rightarrow \frac{\dot{u}(dq/du)}{\tilde{f} \cdot \dot{x}(dq/du)} = \frac{\dot{u}}{\tilde{f} \cdot \dot{x}}, \quad (4.68)$$

ou seja, a lagrangiana se transforma como um escalar sob mudanças de coordenadas $q \rightarrow u(q)$.

4.5.2 Zitterbewegung

Partindo da hamiltoniana

$$H = \frac{e}{2} (p^2 - m^2) + \sigma ((\pi f_\mu + s f'_\mu) p^\mu + \alpha m), \quad (4.69)$$

obtêm-se as equações de movimento

$$\pi = -\frac{s f' \cdot p + \alpha m}{f \cdot p}; \quad (4.70)$$

$$p^2 - m^2 = 0; \quad (4.71)$$

$$\dot{p}_\mu = 0; \quad (4.72)$$

$$\dot{q} = \sigma f \cdot p; \quad (4.73)$$

$$\dot{x}_\mu = e p_\mu + \sigma S_\mu. \quad (4.74)$$

A equação (4.72) nos garante que a partícula é livre.

Podemos usar os parênteses de Poisson entre S_μ e a hamiltoniana (4.69) e a álgebra (4.19) para obter uma equação de movimento para S_μ :

$$\dot{S}_\mu = \{S_\mu, H\} = \sigma \{S_\mu, S_\alpha\} p^\alpha$$

$$\dot{S}_\mu = \sigma \epsilon_{\mu\alpha\beta} S^\beta p^\alpha. \quad (4.75)$$

Esta equação implica em $d(S^2)/dt = 0$ como era esperado, já que de (4.47) e (4.39) temos que $S^2 = -s^2 = \text{constante}$. Observe que $f_\mu(q)$ pode ser qualquer solução das equações diferenciais ordinárias não lineares (4.39).

A primeira vista a equação (4.75) não apresenta fácil solução, mas podemos obter outra equação derivando-a:

$$\ddot{S}_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \left(\dot{S}^\beta p^\alpha \sigma + S^\beta p^\alpha \dot{\sigma} \right). \quad (4.76)$$

Substituindo (4.75) em (4.76) ficamos com (admitindo $\sigma \neq 0$):

$$\ddot{S}_\mu = \epsilon_{\mu\alpha}{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma\theta} p^\alpha p^\gamma S^\theta \sigma^2 + \dot{S}_\mu \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \quad (4.77)$$

Usando a propriedade do tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{\mu\alpha}{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma\theta} = \eta_{\mu\gamma} \eta_{\alpha\theta} - \eta_{\mu\theta} \eta_{\gamma\alpha}, \quad (4.78)$$

podemos simplificar a equação, de forma que teremos

$$\ddot{S}_\mu = -(\alpha m p_\mu + m^2 S_\mu) \sigma^2 + \dot{S}_\mu \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \quad (4.79)$$

Se fixarmos o gauge de modo que $\dot{\sigma} = 0 = \dot{\epsilon}$ a equação obtida é análoga a equação de um oscilador harmônico com deslocamento da origem

$$\ddot{S}_\alpha + \omega^2 S_\alpha = -\alpha m \sigma^2 p_\alpha, \quad (4.80)$$

onde a frequência de oscilação é identificada com

$$\omega = m |\sigma|. \quad (4.81)$$

A solução geral de (4.80) é dada pela solução geral da homogênea mais uma solução particular da não homogênea

$$S_\alpha(t) = A_\alpha \cos(\omega t) + B_\alpha \sin(\omega t) - \frac{\alpha}{m} p_\alpha. \quad (4.82)$$

Como esta solução foi obtida a partir da equação de segunda ordem e não da equação original, é necessário verificar se ela satisfaz também a equação (4.75), para isso derivamos (4.82) e igualamos a (4.75) de onde obtemos

$$\cos(\omega t) [\omega B_\alpha - \sigma \epsilon_{\alpha\mu\gamma} p^\mu A^\gamma] - \sin(\omega t) [\omega A_\alpha + \sigma \epsilon_{\alpha\mu\gamma} p^\mu B^\gamma] = 0. \quad (4.83)$$

Como cada um dos termos de (4.83) deve se anular obtemos a seguinte solução geral de (4.83):

$$B_\alpha = \epsilon_{\alpha\mu\gamma} p^\mu d^\gamma; \quad (4.84)$$

$$A_\alpha = -\frac{\sigma}{\omega} (p \cdot dp_\alpha - p^2 d_\alpha), \quad (4.85)$$

onde d^γ é um vetor constante relacionado às condições iniciais do problema cuja componente paralela a p^γ não pode ser determinada.

Podemos agora escrever a solução geral da equação (4.75) para $\dot{\sigma} = 0$:

$$S_\alpha(t) = \frac{\sigma}{\omega} (p^2 d_\alpha - p \cdot dp_\alpha) \cos(\omega t) + \epsilon_{\alpha\mu\gamma} p^\mu d^\gamma \sin(\omega t) - \frac{\alpha}{m} p_\alpha. \quad (4.86)$$

A partir de (4.86) podemos obter também a solução para x_μ substituindo-a na equação (4.74):

$$\dot{x}_\mu = ep_\mu + \sigma \left[\frac{\sigma}{\omega} (p^2 d_\mu - p \cdot dp_\mu) \cos(\omega t) + \epsilon_{\mu\beta\gamma} p^\beta d^\gamma \sin(\omega t) - \frac{\alpha}{m} p_\mu \right]. \quad (4.87)$$

Integrando (4.87) chegamos à solução

$$x_\mu(t) = x_\mu(0) + \left(e - \frac{\alpha}{m}\sigma\right) p_\mu t + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2 (p^2 d_\mu - p \cdot dp_\mu) \sin(\omega t) + \quad (4.88) \\ - \frac{\sigma}{\omega} (\epsilon_{\mu\beta\gamma} p^\beta d^\gamma) \cos(\omega t),$$

onde os dois primeiros termos podem ser interpretados como o movimento retilíneo uniforme do centro de massa da partícula e os dois últimos como o movimento oscilatório (Zitterbewegung) em torno do centro de massa de forma análoga ao que ocorre com a equação de Dirac.

Devemos verificar também se a solução (4.88) é causal. Para isso, usando a métrica $(+, -, -)$, devemos ter $\dot{x}^2 \geq 0$. Calculando $\dot{x}^2$ temos

$$\dot{x}^2 = \left(e - \frac{\alpha\sigma}{m}\right)^2 m^2 + \sigma^2 (p^2 d^2 - (p \cdot d)^2). \quad (4.89)$$

O primeiro termo à direita de (4.89) é positivo. Para o segundo termo podemos reescrevê-lo usando a solução (4.86):

$$S^2 = \alpha^2 + (p^2 d^2 - (p \cdot d)^2) \quad (4.90)$$

$$- (s^2 + \alpha^2) = (p^2 d^2 - (p \cdot d)^2). \quad (4.91)$$

Substituindo (4.91) em (4.89) chegamos a

$$\dot{x}^2 = \left(e - \frac{\alpha\sigma}{m}\right)^2 m^2 - \sigma^2 (s^2 + \alpha^2). \quad (4.92)$$

Ou seja, para que a solução seja causal devemos ter

$$e^2 m^2 - 2e\alpha\sigma m - \sigma^2 s^2 \geq 0. \quad (4.93)$$

Portanto a escolha de gauge $\dot{e} = 0 = \dot{\sigma}$ embora permita a existência de soluções causais das equações de movimento, para isso basta escolher a constante 'e' grande o suficiente para satisfazer (4.93), não exclui soluções não causais em princípio.

A equação (4.91) é a única restrição sobre o vetor constante d^γ . Uma das conseqüências imediatas é que nessa escolha de gauge ($\dot{e} = 0 = \dot{\sigma}$) sempre teremos o movimento de Zitterbewegung. O único caso em que seria possível não haver Zitterbewegung seria com o vetor p_μ paralelo à d_μ , ou seja, com p_μ paralelo à S_μ . Assim, definindo

$$d_\mu \equiv k p_\mu, \quad (4.94)$$

onde k é uma constante. Substituindo em (4.91) teríamos

$$s = \pm i\alpha, \quad (4.95)$$

o que resultaria em uma lagrangiana não real (vide (4.64)), a menos que assumíssemos $s = 0 = \alpha$, mas neste caso não haveria spin. Vemos pois, que com a escolha de gauge $\dot{\sigma} = \dot{e} = 0$; ($\sigma \neq 0$) e com $S^2 < 0$ o Zitterbewegung deve existir sempre para qualquer $\alpha \neq 0$.

Pode-se estender a prova acima para os casos de um gauge genérico. Partindo da equação de movimento para $x(t)$ e derivando-se em relação à t :

$$\ddot{x}_\mu = \dot{e} p_\mu + \dot{\sigma} S_\mu + \sigma^2 \varepsilon_{\mu\gamma\beta} p^\gamma S^\beta. \quad (4.96)$$

Usando $\ddot{x}_\mu = 0$ para que não haja Zitterbewegung e fazendo o produto vetorial com p^α temos

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha} (\dot{e} p^\nu + \dot{\sigma} S^\nu + \sigma^2 \varepsilon^{\mu\gamma\beta} p_\gamma S_\beta) p^\alpha = 0, \quad (4.97)$$

ou seja,

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha} S^\nu p^\alpha = -\frac{\sigma^2}{\dot{\sigma}} (m^2 S_\mu + \alpha m p_\mu). \quad (4.98)$$

Multiplicando os dois lados por $\varepsilon_{\mu\varepsilon\delta} p^\varepsilon$ ficamos com

$$p_\delta \left(-\frac{\sigma^4}{\dot{\sigma}^2} \alpha m^3 - \alpha m \right) = S_\delta \left(\frac{\sigma^4}{\dot{\sigma}^2} m^4 + m^2 \right). \quad (4.99)$$

A expressão acima implica que S_α é paralelo a p_α :

$$S_\alpha = -\frac{\alpha}{m} p_\alpha. \quad (4.100)$$

No entanto, nesse caso teríamos novamente

$$S^2 = \alpha^2 = -s^2, \quad (4.101)$$

o que levaria novamente a uma ação não real pois $s = \pm i\alpha$. Portanto, demonstramos que, para $S^2 \leq 0$, o Zitterbewegung deve sempre existir independente da escolha de gauge, contanto que $\sigma \neq 0$. Para $\sigma = 0$ o Zitterbewegung desaparece mas não sabemos ao certo se tal gauge pode ser rigorosamente definido. Da mesma forma S_μ nunca será paralelo a p_μ em modelos com $S^2 < 0$, independentemente da escolha de gauge.

Capítulo 5

A ação para anyons com dupla polarização

Para obter uma ação para anyons com dupla polarização ao invés de usarmos o vínculo ϕ_2 linear em p_μ usaremos

$$(S \cdot p)^2 - (\alpha m)^2 = 0, \quad (5.1)$$

de forma que teremos a hamiltoniana modificada

$$H = \frac{e}{2} (p^2 - m^2) + \sigma [(S \cdot p)^2 - (\alpha m)^2]. \quad (5.2)$$

Isto leva a uma simetria de paridade e inversão temporal¹ ($S \cdot p \rightarrow -S \cdot p$), que no caso anterior não existia, resultando em duas equações para x_μ e $q(t)$ de acordo com o sinal que adotarmos de (5.1) para $S \cdot P$:

$$\dot{x}_\mu = ep_\mu \pm (2\alpha m) \sigma S_\mu; \quad (5.3)$$

$$\dot{q} = \pm (2\alpha m) \sigma f \cdot p. \quad (5.4)$$

¹Para partículas de spin fracionário, as inversões temporal e de paridade levam a uma mudança de sinal na helicidade. Por exemplo, como o momento angular orbital é dado por $L_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} x^\nu p^\alpha$, teremos $(L_0, L_x, L_y) \rightarrow (L_0, -L_x, -L_y)$ por inversão temporal ($t \rightarrow -t$), enquanto que $(p_0, p_x, p_y) \rightarrow (-p_0, p_x, p_y)$, assim, assumindo que S_μ se transforma como L_μ , temos $S \cdot p \rightarrow -S \cdot p$. O mesmo é válido para a transformação de paridade $x \rightarrow -x$ (vide apêndice D).

Repetindo o processo feito para o anyon de uma polarização obtemos a lagrangiana a partir da hamiltoniana

$$L = p \cdot \dot{x} + \pi \dot{q} + \pi_e \dot{e} + \pi_\sigma \dot{\sigma} - H; \quad (5.5)$$

$$L = p \cdot \dot{x} + \pi \dot{q} - \frac{e}{2} (p^2 - m^2) - \sigma [(S \cdot p)^2 - (\alpha m)^2]. \quad (5.6)$$

Usando as equações $\partial L / \partial p_\mu = 0$, $\partial L / \partial \pi = 0$ e $\partial L / \partial \sigma = 0$ eliminamos as variáveis p_μ , π e σ chegando a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2e} \left(\dot{x}_\mu - \frac{e s \dot{q} f'_\mu}{f \cdot \dot{x}} \right)^2 + \frac{em^2}{2} + \alpha me \left| \frac{\dot{q}}{f \cdot \dot{x}} \right|. \quad (5.7)$$

Como verificação de autoconsistência note que o vínculo (5.1) é obtido a partir da lagrangiana (5.7) como segue. Por exemplo, para $s = 0$, usando as expressões dos momentos π e p_μ teremos

$$\begin{aligned} |f \cdot \dot{x}| &= \frac{\alpha me}{\pi} \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}}; \\ f \cdot p &= \frac{f \cdot \dot{x}}{e}. \end{aligned}$$

Tomando o quadrado das duas expressões obtemos o vínculo $(S \cdot p)^2 - (\alpha m)^2 = 0$.

Vamos agora analisar as equações de movimento para S_μ e x_μ . Usando as equações hamiltonianas e fixando o gauge como

$$\dot{\sigma} = 0 = \dot{e}. \quad (5.8)$$

Temos uma equação para S_μ como no caso anterior:

$$\dot{S}_\mu = 2\sigma (S \cdot p) \epsilon_{\mu\alpha\beta} S^\beta p^\alpha. \quad (5.9)$$

Podemos então derivar e chegar em uma equação de segunda ordem fácil de resolver:

$$\ddot{S}_\mu = 4(\sigma \alpha m)^2 (S \cdot p p_\mu - p^2 S_\mu). \quad (5.10)$$

Definindo a frequência como

$$2|\sigma|\alpha m^2 \equiv \omega, \quad (5.11)$$

e substituindo em (5.10) ficamos com uma equação diferencial de segunda ordem semelhante a (4.80):

$$\ddot{S}_\mu + \omega^2 S_\mu = \pm 4\sigma^2 (\alpha m)^3 p_\mu. \quad (5.12)$$

Resolvendo como no caso anterior e impondo que a solução deva satisfazer também a equação de primeira ordem (5.9) chegamos a solução geral para $S_\alpha(t)$ que é dada por

$$S_\alpha^\pm(t) = \pm \frac{2\sigma\alpha m}{\omega} (p^2 d_\alpha - p \cdot dp_\alpha) \cos(\omega t) + \epsilon_{\alpha\mu\gamma} p^\mu d^\gamma \sin(\omega t) \pm \frac{\alpha}{m} p_\alpha. \quad (5.13)$$

Observe que a simetria gerada pelo vínculo (5.1) causa diferenças entre as equações para os casos de uma polarização (equações (4.75) e (4.80)) e dupla polarização (equações (5.9) e (5.10)) o que resulta em duas soluções distintas tanto para $S_\alpha(t)$ como para $x_\mu(t)$.

Usando estas soluções em

$$\dot{x}_\mu^\pm = ep_\mu \pm (2\alpha m) \sigma S_\mu^\pm, \quad (5.14)$$

teremos como soluções para $x_\mu(t)$:

$$x_\mu^\pm(t) = x_\mu(0) + (e + 2\sigma\alpha^2) p_\mu t + \left(\frac{2\sigma\alpha m}{\omega} \right)^2 (p^2 d_\mu - p \cdot dp_\mu) \sin(\omega t) + \mp \frac{2\sigma\alpha m}{\omega} \epsilon_{\mu\alpha\gamma} p^\alpha d^\gamma \cos(\omega t). \quad (5.15)$$

Ao quantizarmos o modelo com dupla polarização a função de onda ψ será uma combinação linear das soluções com polarização $+\alpha$ e $-\alpha$.

Pode-se observar também que, assim como no caso de polarização simples, o Zitterbewegung deve sempre estar presente na solução (se $\sigma \neq 0$), já que a mesma demonstração é válida para os dois casos.

Capítulo 6

Acoplamento com o campo eletromagnético externo

6.1 Partícula relativística de spin 1/2

Pode-se construir um modelo pseudoclássico¹ para partículas livres de spin 1/2 por meio da ação [2, 3]:

$$S = \int d\tau \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{em^2}{2} + i \left(\frac{\dot{x}_\alpha \psi^\alpha}{e} - m\psi^5 \right) \chi - i\psi_\mu \dot{\psi}^\mu - i\psi_5 \dot{\psi}^5 \right], \quad (6.1)$$

onde ψ^μ , ψ^5 e χ obedecem à álgebra de Grasmann.

Obtendo-se os momentos canônicos temos

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = -\frac{\dot{x}_\alpha}{e} + \frac{i\psi_\alpha \chi}{e}; \quad \pi_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0;$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\psi}^\mu} = -i\psi_\mu; \quad \pi_5 = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\psi}^5} = -i\psi_5; \quad \pi_\chi = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\chi}} = 0,$$

o que resulta nos vínculos primários

$$\phi_1 = \pi_\chi \approx 0; \quad \phi_2 = \pi_e \approx 0;$$

¹Pseudoclássico, pois utilizam-se variáveis comutantes (clássicas) e anticomutantes (grassmannianas).

$$\phi_{3\mu} = \pi_\mu + i\psi_\mu \approx 0; \quad \phi_4 = \pi_5 + i\psi_5 \approx 0.$$

A partir da hamiltoniana canônica

$$H_c = p_\alpha \dot{x}^\alpha + \pi_\mu \dot{\psi}^\mu + \pi_5 \dot{\psi}^5 - L; \quad (6.2)$$

$$H_c = -\frac{e}{2} [p^2 - m^2] + i [p_\alpha \psi^\alpha + m\psi^5] \chi, \quad (6.3)$$

obtêm-se a hamiltoniana total incluindo os vínculos primários

$$H = H_c + \lambda_1 \pi_\chi + \lambda_2 \pi_e + \lambda_3^\mu (\pi_\mu + i\psi_\mu) + \lambda_4 (\pi_5 + i\psi_5). \quad (6.4)$$

Procedemos agora à evolução temporal dos vínculos primários

$$\dot{\phi}_1 = \{\pi_\chi, H\} = p_\alpha \psi^\alpha + m\psi^5 = \phi_5 \approx 0; \quad (6.5)$$

$$\dot{\phi}_5 = \lambda_3^\mu p_\mu + \lambda_4 m = 0 \Rightarrow \lambda_4 = -\frac{\lambda_3^\mu p_\mu}{m}; \quad (6.6)$$

$$\dot{\phi}_2 = \{\pi_e, H\} = p^2 - m^2 = \phi_6 \approx 0; \quad (6.7)$$

$$\dot{\phi}_6 = 0; \quad (6.8)$$

$$\dot{\phi}_{3\mu} = \{\pi_\mu + i\psi_\mu, H\}_+ = 2\lambda_{3\mu} - p_\mu \chi = 0 \Rightarrow \lambda_{3\mu} = \frac{p_\mu \chi}{2}; \quad (6.9)$$

$$\dot{\phi}_4 = \{\pi_5 + i\psi_5, H\}_+ = 2\lambda_4 + m\chi = 0, \quad (6.10)$$

assim temos

$$\lambda_4 = -\frac{m\chi}{2}, \quad (6.11)$$

que é consistente com (6.6), (6.7) e (6.9).

Ficamos então com o conjunto de vínculos

$$\phi_1 = \pi_\chi \approx 0; \quad \phi_2 = \pi_e \approx 0; \quad \phi_{3\mu} = \pi_\mu + i\psi_\mu \approx 0;$$

$$\phi_4 = \pi_5 + i\psi_5 \approx 0; \quad \phi_5 = p_\alpha \psi^\alpha + m\psi^5 \approx 0; \quad \phi_6 = p^2 - m^2 \approx 0,$$

dos quais, são de segunda classe

$$\chi_{1\mu} = \pi_\mu + i\psi_\mu; \quad (6.12)$$

$$\chi_2 = \pi_5 + i\psi_5, \quad (6.13)$$

e serão usados para eliminar os momenta π_μ e π_5 do espaço de fase.

Devemos então usar antiparênteses de Dirac para eliminar esses vínculos. Os únicos antiparênteses de Dirac que diferem dos antiparênteses de Poisson são aqueles entre os férmions. Calculando os parênteses entre ψ^α e ψ^β ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 5$) temos

$$\{\psi^\alpha, \psi^\beta\}_{+D} = \{\psi^\alpha, \psi^\beta\}_+ - \{\psi^\alpha, \chi^a\}_+ C_{ab}^{-1} \{\chi^b, \psi^\beta\}_+ = \frac{i}{2} \eta^{\alpha\beta}, \quad (6.14)$$

onde

$$C_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

A partir desses antiparênteses conseguimos fechar a álgebra dos vínculos.

A ação é invariante pelo grupo de Poincarè e a análise da invariância de rotação de Lorentz fornece uma interpretação física para os ψ^μ . Fazendo as seguintes transformações infinitesimais:

$$\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu; \quad \delta \psi^\mu = \omega^{\mu\nu} \psi_\nu; \quad (6.16)$$

$$\delta e = 0; \quad \delta \psi^5 = 0; \quad \delta \chi = 0, \quad (6.17)$$

teremos para a variação da lagrangiana

$$\delta L = \dot{\omega}^{\mu\nu} \left[\frac{x_\nu}{e} (i\psi_\mu \chi - \dot{x}_\mu) - i\psi_\mu \dot{\psi}_\nu \right]. \quad (6.18)$$

Usando o teorema de Noether, e sendo o momento canônico de x_μ dado por $p_\mu = -\frac{\dot{x}_\mu}{e} + \frac{i\psi_\mu \chi}{e}$ vemos que as cargas conservadas que geram as simetrias de rotação são dadas por

$$J_{\mu\nu} = (p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu) - 2i\psi_\mu \psi_\nu. \quad (6.19)$$

A primeira parte corresponde ao momento angular orbital da partícula enquanto que o termo

$$2i\psi_\mu \psi_\nu \equiv S_{\mu\nu}, \quad (6.20)$$

corresponde ao spin da partícula.

Além de invariância global de Poincarè a partícula de spin 1/2 também é invariante por reparametrização temporal local, com as transformações dadas por

$$\delta x^\mu = \xi \dot{x}^\mu; \quad \delta e = \frac{d}{d\tau} (\xi e); \quad (6.21)$$

$$\delta \psi^\mu = \dot{\psi}^\mu \xi; \quad \delta \psi^5 = \dot{\psi}^5 \xi; \quad \delta \chi = \frac{d}{d\tau} (\chi \xi), \quad (6.22)$$

e por transformações de supersimetria locais, dadas por

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= i\psi^\mu \varepsilon; \quad \delta e = i\chi \varepsilon; \quad \delta \chi = \dot{\varepsilon}; \\ \delta \psi^\mu &= \frac{1}{2e} (\dot{x}^\mu + i\chi \dot{\psi}^\mu) \varepsilon; \quad \delta \psi^5 = \left[\frac{m}{2} - \frac{i}{me} \psi^5 \left(\dot{\psi}^5 - \frac{m}{2} \chi \right) \right] \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde ξ e ε são os parâmetros bosônicos e grassmannianos dependentes do tempo τ .

Essas simetrias locais estão relacionadas aos vínculos de primeira classe $\phi_6 = p^2 - m^2$ e $\phi_5 = p_\alpha \psi^\alpha + m\psi^5$, respectivamente.

6.1.1 Equações de movimento

Podemos então escolher duas condições de gauge particulares em que $\dot{\chi} = 0 = \dot{\epsilon}$ e obter as equações de movimento para a partícula de spin 1/2:

$$\dot{x}_\mu = \{x_\mu, H\}_D = \{x_\mu, H\} = -ep_\mu + i\psi_\mu\chi; \quad (6.24)$$

$$\dot{\psi}_\mu = \{\psi_\mu, H\}_{D+} = \{\psi_\mu, ip_\alpha\psi^\alpha\chi\}_{D+} = \frac{p_\mu\chi}{2}, \quad (6.25)$$

isto resulta em

$$\ddot{x}_\mu = i\ddot{\psi}_\mu\chi = 0. \quad (6.26)$$

Ou seja, para esta descrição pseudoclássica de partículas fermiônicas de spin 1/2 não conseguimos visualizar o Zitterbewegung (vide no entanto [25]) ao contrário do que se espera via equação de Dirac.

6.2 Partícula relativística de spin 1/2 acoplada ao campo eletromagnético externo

A lagrangiana para férmions acopladas com o campo eletromagnético externo pode ser construída a partir da lagrangiana para partículas livres fermiônicas (6.1). Acrescentando o termo de acoplamento mínimo eletromagnético temos $L_{\text{livre}} \rightarrow L_{\text{livre}} + q\dot{x}^\mu A_\mu$, onde q é a carga elétrica da partícula. Como já dissemos a ação (6.1) tem duas simetrias locais, isto é, reparametrização temporal e supersimetria. Embora o termo de acoplamento mínimo seja invariante por reparametrização temporal (6.22), não o é por supersimetria (6.23). Se quisermos manter a supersimetria da ação precisamos adicionar um termo para compensar sua variação. Assim, introduzindo ainda o termo não mínimo

$$ikqeF_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta = \frac{1}{2}kqeF_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}, \quad (6.27)$$

temos

$$L_{livre} \rightarrow L_{livre} + q [\dot{x}^\mu A_\mu + ikeF_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta], \quad (6.28)$$

onde o einbein e garante sua invariância por reparametrização temporal, e k é uma constante a ser fixada pela supersimetria, que está relacionada com a constante giromagnética da partícula. O termo (6.27) é o responsável pelo acoplamento entre o spin da partícula e o campo eletromagnético externo, onde usamos $S^{\mu\nu} = 2i\psi^\mu\psi^\nu$ (6.20).

Com isso teremos a lagrangiana

$$L = -\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{em^2}{2} + i \left(\frac{\dot{x}_\alpha \psi^\alpha}{e} - m\psi^5 \right) \chi - i\psi_\mu \dot{\psi}^\mu - i\psi_5 \dot{\psi}^5 - q\dot{x}^\alpha A_\alpha + ikqeF_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta. \quad (6.29)$$

Obtendo-se agora os momentos canônicos temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = p_\alpha = -\frac{\dot{x}_\alpha}{e} - qA_\alpha + \frac{i\psi_\alpha \chi}{e}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = \pi_e = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^\mu} = \pi_\mu = -i\psi_\mu; \quad \frac{\partial L}{\partial \psi^5} = \pi_5 = -i\psi_5; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = \pi_\chi = 0,$$

o que resulta nos vínculos primários

$$\phi_1 = \pi_\chi; \quad \phi_2 = \pi_e;$$

$$\phi_{3\mu} = \pi_\mu + i\psi_\mu; \quad \phi_4 = \pi_5 + i\psi_5.$$

A hamiltoniana canônica é dada por

$$H_c = p_\alpha \dot{x}^\alpha + \pi_\mu \dot{\psi}^\mu + \pi_5 \dot{\psi}^5 - L; \quad (6.30)$$

$$H_c = -\frac{e}{2} [P^2 - m^2 + 2ikqF_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta] - i [P_\alpha \psi^\alpha - m\psi^5] \chi, \quad (6.31)$$

onde $P_\alpha \equiv -p_\alpha - qA_\alpha$.

A hamiltoniana total é dada por

$$H = H_c + \lambda_1 \pi_\chi + \lambda_2 \pi_e + \lambda_3^\mu (\pi_\mu + i\psi_\mu) + \lambda_4 (\pi_5 + i\psi_5). \quad (6.32)$$

Fazendo a evolução temporal dos vínculos primários e lembrando que

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = qF_{\beta\alpha}; \quad \{P_\mu, F_{\alpha\beta}\} = \partial_\mu F_{\alpha\beta}, \quad (6.33)$$

temos

$$\dot{\phi}_1 = \{\pi_\chi, H\} = P_\alpha \psi^\alpha - m\psi^5 = \phi_5; \quad (6.34)$$

$$\dot{\phi}_5 = -eqP_\alpha F_\nu^\alpha \psi^\nu - eq\partial_\nu F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \psi^\nu - ikqF_{\alpha\nu} \psi^\nu \psi^\alpha \chi + \lambda_3^\mu P_\mu - \lambda_4 m \approx 0; \quad (6.35)$$

$$\dot{\phi}_2 = \{\pi_e, H\} = P^2 - m^2 + 2ikqF_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta = \phi_6 \approx 0; \quad (6.36)$$

$$\dot{\phi}_6 = -2iqP_\gamma F_\nu^\gamma \psi^\nu \chi - 2q\partial_\nu F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \psi^\nu \chi + 4ikq\lambda_3^\mu F_{\alpha\mu} \psi^\alpha \approx 0; \quad (6.37)$$

$$\dot{\phi}_{3\mu} = \{\pi_\mu + i\psi_\mu, H\}_+ = 2i\lambda_{3\mu} - 2iekqF_{\nu\alpha} \psi^\alpha - iP_\nu \chi \approx 0; \quad (6.38)$$

$$\dot{\phi}_4 = \{\pi_5 + i\psi_5, H\}_+ = 2i\lambda_4 + im\chi \approx 0. \quad (6.39)$$

Para que os vínculos sejam consistentes as condições (6.35) e (6.37) devem ser satisfeitas. Substituindo os multiplicadores $\lambda_{3\mu}$ e λ_4 e usando a identidade de Bianchi em (6.37), ficamos com

$$eqF_{\nu\alpha} \psi^\alpha P^\nu (k-1) + \phi_6 \approx F_{\alpha\mu} \psi^\alpha \chi P^\mu (k-1) \approx 0, \quad (6.40)$$

o que fixa o valor $k = 1$.

Um fato importante a ser notado foi a aparição em (6.37) de um termo completamente antissimétrico $\partial_\nu F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \psi^\nu$ vindo do spin, que se anula identicamente devido à identidade de Bianchi, e assim permite que a álgebra de vínculos feche sem impor nenhuma condição sobre as possíveis configurações de campo eletromagnético.

Concluindo, temos os vínculos de segunda classe

$$\chi_1 = \pi_\mu + i\psi_\mu; \quad (6.41)$$

$$\chi_2 = \pi_5 + i\psi_5, \quad (6.42)$$

e quatro vínculos de primeira classe, que são ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_5 e ϕ_6 .

Usando os parênteses de Dirac, tornamos os vínculos de segunda classe fortemente nulos e a álgebra entre os quatro vínculos de primeira classe fecha:

$$\{\phi_i, \phi_j\} \approx 0; \quad i, j = 1, 2, 5, 6 \quad (6.43)$$

6.3 Partículas de spin fracionário acopladas ao campo eletromagnético externo

Analogamente ao caso de spin 1/2 podemos construir uma ação para partículas de spin fracionário acopladas com o campo eletromagnético externo partindo de uma ação minimamente estendida para anyons livres. Temos também duas simetrias locais geradas pelos vínculos $\phi_1 = p^2 - m^2$ e $\phi_2 = S \cdot p + \alpha m$. Adicionamos então um termo de acoplamento mínimo e um termo de acoplamento de spin-campo eletromagnético que garanta as simetrias locais (vide (6.27)) da ação. Substituindo o termo de spin do caso anterior da partícula de spin 1/2, $S^{\mu\nu}$, por seu correspondente em 2+1 dimensões, $\varepsilon^{\mu\nu\gamma} S_\gamma$, e reescrevendo $QkeF_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = QkeF_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}S_\gamma = QkeF^\mu S_\mu$ teremos então a lagrangiana tentativa

$$L = p_\mu \dot{x}^\mu + \pi \dot{q} - \frac{e}{2} (p^2 - m^2) - \sigma (\pi f \cdot p + \alpha m) + Q (\dot{x}^\mu A_\mu + keF_\mu S^\mu), \quad (6.44)$$

onde Q é a carga elétrica da partícula e k é uma constante a ser determinada.

Eliminando p_μ e σ através dos vínculos lagrangianos ficamos com

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2e} + \frac{em^2}{2} - \frac{\alpha em\dot{q}}{f \cdot \dot{x}} + Q(\dot{x}^\mu A_\mu + keF_\mu S^\mu). \quad (6.45)$$

Calculando os momentos canônicos temos

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\dot{x}_\mu}{2} + QA_\mu + \frac{\alpha em\dot{q}f_\mu}{(f \cdot \dot{x})^2}; \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \pi = \frac{-\alpha em}{f \cdot \dot{x}}; \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = \pi_e = 0. \quad (6.48)$$

De (6.46) e (6.47) temos o vínculo primário $\phi_2 = \pi f \cdot P + \alpha m = S \cdot P + \alpha m \approx 0$ onde

$$P_\mu = p_\mu - QA_\mu, \quad (6.49)$$

e de (6.48) temos $\phi_3 = \pi_e \approx 0$.

A hamiltoniana canônica é dada por

$$H_c = p \cdot \dot{x} + \pi \dot{q} - L; \quad (6.50)$$

$$H_c = \frac{e}{2} (P^2 - m^2 - 2QkF_\mu S^\mu), \quad (6.51)$$

e a hamiltoniana total incluindo os vínculos primários é dada por

$$H = \frac{e}{2} (P^2 - m^2 - 2QkF_\mu S^\mu) + \lambda_1 (S_\mu P^\mu + \alpha m) + \lambda_2 \pi_e, \quad (6.52)$$

sendo

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = QF_{\alpha\beta}; \quad \{P_\mu, F_{\alpha\beta}\} = -\partial_\mu F_{\alpha\beta}. \quad (6.53)$$

Procedemos à evolução temporal dos vínculos:

$$\dot{\phi}_2 = \{S_\mu P^\mu + \alpha m, H\} = QeS^\mu P^\nu F_{\mu\nu} (1 - 2k) - QkeS_\mu S_\nu \partial^\mu F^\nu; \quad (6.54)$$

$$\dot{\phi}_3 = \{\pi_e, H\} = P^2 - m^2 - 2QkF_\mu S^\mu = \phi_1. \quad (6.55)$$

A evolução de ϕ_1 resulta também em (6.54). Nota-se que devido ao fato do spin não ser expresso em termos de grandezas fermiônicas, como no caso anterior, não foi possível usar a identidade de Bianchi para anular o último termo de (6.54), o que resulta em restrições ao campo eletromagnético. Uma das possíveis soluções para a equação (6.54) é

$$k = \frac{1}{2}, \quad (6.56)$$

e

$$S_\mu S_\nu \partial^\mu F^\nu = 0, \quad (6.57)$$

o que engloba soluções como campo constante e casos onde $\partial^\mu F^\nu$ seja antisimétrico.

Isso fecha a álgebra entre os três vínculos ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 mostrando que é possível o acoplamento com o campo eletromagnético externo pelo menos para os casos que obedecem à $S_\mu S_\nu \partial^\mu F^\nu = 0$. Ao mesmo tempo o vínculo $\phi_1 \approx 0$ se torna: $P^2 - m^2 - QF_\mu S^\mu \approx 0$ que possui a mesma forma da equação de Klein-Gordon para um férmion de Dirac no campo eletromagnético com constante giromagnética $g = 2$. A dedução de $g = 2$ para anyons acoplados com campos eletromagnéticos externos aparece em vários trabalhos da literatura [1, 5, 6, 22]. Mas em todos esses trabalhos, ao contrário do modelo utilizado aqui, o trivetor de spin S_μ é paralelo ao momento e não existe Zitterbewegung. Ou seja, conseguimos aparentemente um acoplamento consistente apesar do Zitterbewegung o que é um resultado original desta tese embora uma análise mais cuidadosa do limite não relativístico seja necessária.

Capítulo 7

Lagrangiana supersimétrica

Historicamente, uma das razões para se introduzir a supersimetria entre bósons e férmions, ou seja, colocar bósons e férmions na mesma representação irredutível (supermultiplete), foi o cancelamento de infinitos em teoria de campos. O objetivo era obter uma teoria finita sem precisarmos renormalizar os infinitos. Hoje em dia as aplicações de supersimetria são bastante amplas. Por exemplo, no capítulo 6 a supersimetria foi usada na formulação da partícula de spin 1/2 como simetria local (supergravidade). Onde tínhamos dois supermultipletos formados pelos companheiros supersimétricos (e, χ) e (x^μ, ψ^μ) respectivamente que se transformavam uns nos outros (vide (6.21)). Nesse exemplo não tínhamos supersimetria no espaço-tempo mas sim no espaço unidimensional do tempo fictício τ . Para formularmos anyons com supersimetria no espaço-tempo devemos substituir o espaço-tempo descrito por x_μ pelo superespaço-tempo descrito por (x^μ, θ^α) onde θ^α ($\alpha = 1, 2$) são variáveis Grassmannianas (vide apêndice B).

Uma lagrangiana supersimétrica no superespaço-tempo pode ser construída trocando a velocidade pela supervelocidade:

$$\dot{x}^\mu \rightarrow \dot{x}^\mu - \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} \dot{\theta}^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (7.1)$$

Vemos que, com essa modificação, se fizermos variações em x^μ e em θ^α da forma:

$$\delta_\epsilon x^\mu = \epsilon^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} \theta^\beta ; \quad \delta_\epsilon \theta^\alpha = \epsilon^\alpha, \quad (7.2)$$

com ε^α sendo variáveis grassmannianas constantes, teremos uma simetria

$$\delta_\varepsilon \left(\dot{x}^\mu - \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\rho} \dot{\theta}^\rho \right) = 0. \quad (7.3)$$

As transformações de supersimetria relacionam bósons com férmions como vemos pela presença de θ^β em $\delta_\varepsilon x^\mu$.

Substituindo a supervelocidade (7.1) na lagrangiana (4.67) obteremos a lagrangiana supersimétrica

$$L = \frac{1}{2e} \left(\dot{x}^\mu - \theta \sigma^\mu \dot{\theta} \right)^2 + \frac{em^2}{2} - \frac{\alpha me \dot{q}}{\left(f \cdot \dot{x} - \theta \sigma^\mu \dot{\theta} f_\mu \right)}. \quad (7.4)$$

Podemos agora verificar a dinâmica de anyons com supersimetria.

A partir da lagrangiana obtemos os momentos canônicos

$$\begin{aligned} p^\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\dot{x}^\mu - \theta \sigma^\mu \dot{\theta}}{e} + \frac{\alpha me \dot{q} f_\mu}{\left(f \cdot \dot{x} - \theta \sigma^\mu \dot{\theta} f_\mu \right)^2}; \\ \pi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{-\alpha me}{f \cdot \dot{x} - \theta \sigma^\mu \dot{\theta} f_\mu}; \quad \pi_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0; \\ \pi_\beta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\beta} = \theta (\sigma^\mu)_\beta \left[\frac{\dot{x}_\mu - \theta \sigma_\mu \dot{\theta}}{e} + \frac{\alpha me \dot{q} f_\mu}{\left(f \cdot \dot{x} - \theta \sigma^\mu \dot{\theta} f_\mu \right)^2} \right], \end{aligned} \quad (7.5)$$

de onde deduzimos os vínculos primários lembrando que $f^\mu f_\mu = 0$:

$$\phi_1 = \pi f \cdot p + \alpha m = 0; \quad (7.6)$$

$$\chi_\beta = \pi_\beta - \theta (\sigma^\mu)_\beta p_\mu = 0; \quad (7.7)$$

$$\phi_2 = \pi_e = 0. \quad (7.8)$$

A hamiltoniana canônica corresponde à

$$H_c = p \cdot \dot{x} + \pi \dot{q} + \dot{\theta}^\beta \pi_\beta - L; \quad (7.9)$$

$$H_c = \frac{e}{2} (p^2 - m^2), \quad (7.10)$$

e a hamiltoniana total

$$H = H_c + \lambda_1 \phi_1 + (\lambda_2)^\beta \chi_\beta + \lambda_3 \phi_2; \quad (7.11)$$

$$H = \frac{e}{2} (p^2 - m^2) + \lambda_1 (\pi f \cdot p + \alpha m) + (\lambda_2)^\beta (\pi_\beta - (\not{p} \theta)_\beta) + \lambda_3 \pi_e. \quad (7.12)$$

Fazendo a evolução temporal dos vínculos obtemos:

$$\dot{\phi}_1 = \{\pi f \cdot p + \alpha m, H\} = 0; \quad (7.13)$$

$$\dot{\chi}_\beta = \{\pi_\beta - (\not{p} \theta)_\beta, H\} = -2 \not{p} \lambda_2 = 0; \quad (7.14)$$

$$\dot{\phi}_3 = p^2 - m^2 = \phi_4 = 0; \quad (7.15)$$

$$\dot{\phi}_4 = \{p^2 - m^2, H\} = 0. \quad (7.16)$$

Para determinar os multiplicadores $(\lambda_2)^\alpha$ da equação (7.14) multiplicamos por $\not{p}$, ou seja,

$$\not{p} (\not{p} \lambda_2) = p^2 \lambda_2 \approx m^2 \lambda_2 = 0, \quad (7.17)$$

que implica em

$$\lambda_2 = 0. \quad (7.18)$$

Portanto os multiplicadores dos vínculos χ_α são completamente eliminados. Note que

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\}_+ = -2 \not{p}_{\alpha\beta} \equiv C_{\alpha\beta}. \quad (7.19)$$

Ficamos então com três vínculos de primeira classe bosônicos e dois de segunda classe ferminônicos, respectivamente

$$\phi_1 = \pi f \cdot p + \alpha m; \quad \phi_2 = \pi_e; \quad \phi_3 = p^2 - m^2; \quad (7.20)$$

$$\chi_\beta = \pi_\beta - \theta^\alpha \not{p}_{\alpha\beta}. \quad (7.21)$$

Os vínculos de segunda classe podem ser eliminados via parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} (C_{\alpha\beta})^{-1} \{\chi_\beta, B\}, \quad (7.22)$$

onde a matriz inversa $(C_{\alpha\beta})^{-1}$ é dada por:

$$(C_{\alpha\beta})^{-1} = -\frac{\not{p}^{\alpha\beta}}{2p^2}. \quad (7.23)$$

Usando os parênteses de Dirac teremos os seguintes parênteses não nulos entre todas as variáveis, bosônicas e fermiônicas:

$$\{x_\mu, x_\nu\}_D = -\frac{\theta_\gamma \theta^\gamma \varepsilon_{\mu\nu\delta} p^\delta}{2p^2}; \quad (7.24)$$

$$\{x_\mu, p^\nu\}_D = \eta_\mu^\nu; \quad (7.25)$$

$$\{x_\mu, \theta^\alpha\}_D = -\frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\nu (\sigma^\rho)_\gamma^\alpha \theta^\gamma + p_\mu \theta^\alpha}{2p^2}; \quad (7.26)$$

$$\{x_\mu, \pi_\alpha\}_D = \frac{\theta^\gamma (\sigma_\mu)_{\gamma\alpha}}{2}; \quad (7.27)$$

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\}_D = \frac{\not{p}^{\alpha\beta}}{2p^2}; \quad (7.28)$$

$$\{\theta^\alpha, \pi_\beta\}_D = \frac{\delta_\beta^\alpha}{2}; \quad (7.29)$$

$$\{\pi_\alpha, \pi_\beta\}_D = \frac{\not{p}_{\alpha\beta}}{2}. \quad (7.30)$$

7.1 Superálgebra de Poincarè

Podemos verificar que a lagrangiana supersimétrica é invariante por translações, rotações de Lorentz e supersimetria usando as seguintes transformações respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= a^\mu; & \delta \theta^\alpha &= 0; & \delta q &= 0; & \delta e &= 0; \\ \delta x^\mu &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha} k_\nu x_\alpha; & \delta \theta^\alpha &= -\frac{1}{2} k^\mu (\sigma_\mu)^\alpha_\beta \theta^\beta; & \delta q &= k^\mu f_\mu; & \delta e &= 0; \\ \delta x^\mu &= \varepsilon^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} \theta^\beta; & \delta \theta^\alpha &= \varepsilon^\alpha; & \delta q &= 0; & \delta e &= 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Observe em particular que $f_\mu(q)$ não se transforma como um vetor de Lorentz como seu índice indicaria, na verdade, usando (4.39) temos $\delta f_\mu = f'_\mu(k^\alpha f_\alpha) = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} k^\nu f^\alpha - f_\mu(k \cdot f')$, ou seja, o último termo de δf_μ mostra que f_μ não é um vetor de Lorentz, compare com a transformação de Lorentz do vetor x^μ em (7.31).

Por meio do teorema de Noether chegamos as seguintes cargas conservadas a partir da lagrangiana (7.4):

$$P^\mu = p^\mu; \quad (7.32)$$

$$J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha} x_\nu p_\alpha - \frac{1}{2} (\sigma^\mu)^\alpha_\beta \theta^\beta \pi_\alpha + \pi f^\mu; \quad (7.33)$$

$$Q_\alpha = \pi_\alpha + \not{p}_{\alpha\beta} \theta^\beta. \quad (7.34)$$

É fácil verificar, usando os parênteses de Dirac, que essas cargas fecham a álgebra abaixo:

$$\begin{aligned} \{P^\mu, P_\nu\}_D &= 0; & \{Q_\alpha, P_\nu\}_D &= 0; & \{J_\mu, P_\nu\}_D &= \varepsilon_{\mu\nu}{}^\alpha P_\alpha; \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\}_D &= 2 \not{P}_{\alpha\beta}; & \{J_\mu, Q_\alpha\}_D &= \frac{1}{2} (\sigma_\mu)^\beta_\alpha Q_\beta; & \{J_\mu, J_\nu\}_D &= \varepsilon_{\mu\nu}{}^\alpha J_\alpha, \end{aligned} \quad (7.35)$$

onde usamos também $(\sigma_\mu)_{\alpha\gamma} (\sigma_\nu)^\gamma_\beta = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} (\sigma^\lambda)_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta}$.

Essa álgebra, formada pelos geradores de translação, rotações de Lorentz e supersimetria é denominada de superálgebra de Poincarè $N = 1$.

Podemos reescrever o segundo termo da hamiltoniana (7.12) com o auxílio do gerador J^μ acima (vide (7.33)) e dos vínculos fermiônicos (7.21):

$$\pi f \cdot p = J \cdot P + \frac{1}{8} Q^\alpha Q_\alpha. \quad (7.36)$$

Substituindo na hamiltoniana ficamos com

$$H = \frac{e}{2} (P^2 - m^2) + \sigma \left(J \cdot P + \frac{1}{8} Q^\alpha Q_\alpha + \alpha m \right), \quad (7.37)$$

o que leva naturalmente aos invariantes quadráticos de Casimir da superálgebra de Poincarè

$$C_1 = P^\mu P_\mu; \quad C_2 = J \cdot P + \frac{1}{8} Q_\alpha Q^\alpha. \quad (7.38)$$

Também aqui é fácil verificar por meio dos parênteses de Dirac que os invariantes quadráticos de Casimir comutam com todos os geradores da superálgebra de Poincarè (7.35), isto é, $\{C_i, P_\mu\} = 0 = \{C_i, Q_\alpha\} = \{C_i, J_\mu\}$, $i = 1, 2$.

Verificamos então, como era esperado, que a hamiltoniana de um superanyon pode ser escrita como uma combinação linear dos invariantes quadráticos de Casimir, de forma semelhante aos casos anteriores da partícula relativística de spin nulo e partícula de spin fracionário.

Deve ser notado que poderíamos ter seguido o caminho inverso como em [12], isto é, conhecendo-se os invariantes de Casimir da superálgebra de Poincarè poderíamos construir a hamiltoniana e a partir dela a lagrangiana de primeira ordem via transformada de Legendre.

Uma lagrangiana para superanyons com supersimetria $N = 1$ foi também obtida em [17] mas para o caso de spin paralelo ao momento.

Capítulo 8

Conclusão

Uma conclusão que tiramos deste trabalho é que no modelo de anyons, com $S^\mu S_\mu \leq 0$, o spin nunca é paralelo ao momento independentemente das condições iniciais e das condições de gauge, do contrário a lagrangiana não seria real.

O estudo do caso da partícula fermiônica de spin $1/2$ com acoplamento ao campo eletromagnético externo mostrou que foi necessário introduzir um termo além do acoplamento mínimo de forma que a supersimetria fosse mantida. A generalização dessa idéia para o caso de spin fracionário sugere a introdução de um termo não mínimo que garantiu que as simetrias locais fossem mantidas. Assim conseguimos de forma autoconsistente o acoplamento com algumas configurações de campos eletromagnéticos incluindo campos constantes. Dado que as variáveis eram bosônicas, não conseguimos até o momento eliminar as restrições sobre o campo externo como no caso $s = 1/2$ onde utiliza-se variáveis grassmannianas que naturalmente levam à identidade de Bianchi, fundamental na eliminação de restrições sobre o campo externo. Esse problema será estudado futuramente.

Outro ponto importante é a utilização de uma mudança de variáveis que mostrou não só que é possível obter novas soluções para a equação (4.39) a partir das pré-existentes como também que as soluções compactas e não compactas da literatura estão relacionadas entre si.

Também obtivemos uma ação invariante por paridade para partículas de spin fracionário com dupla polarização e uma supersimetrização da ação de pari-

dade única para anyons com $S^\mu S_\mu \leq 0$. Em suma, mesmo com spin não paralelo ao momento é possível ter uma teoria autoconsistente para anyons que pode ser acoplada com campo eletromagnético externo, supersimetrizada e ainda estendida de forma a não quebrarmos as simetrias de paridade e inversão temporal. Concluindo, o paralelismo entre momento e spin não é uma condição intrínseca à existência de anyons em $D = 2+1$ dimensões como tem sido às vezes advogado na literatura [5, 6, 20]. Os estudos realizados aqui apenas usando mecânica clássica de sistemas vinculados não garantem que os aspectos quânticos dos modelos com $S^\mu S_\mu \leq 0$ sejam autoconsistentes. Deveríamos, por exemplo, investigar o propagador anyônico e funções de onda de vários anyons também. Não discutimos também a definição de um produto escalar adequado no espaço de Hilbert.



Apêndice A

Notação

Índices gregos são usados para indicar coordenadas no espaço-tempo e índices latinos para indicar coordenadas espaciais.

A métrica adotada é dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Usamos a convenção de Einstein, índices repetidos estão somados:

$$\sum_{\mu=0}^2 x^\mu x_\mu \equiv x^\mu x_\mu, \quad (\text{A.2})$$

e as derivadas são definidas como

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu.$$

Para o caso de férmions, as derivadas à direita e à esquerda são dadas por ∂_μ^D e ∂_μ^L respectivamente.

Algumas propriedades do tensor de Levi-Civita definido por $\varepsilon_{012} = \varepsilon^{012} = 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = & \delta_{\lambda\gamma}\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha} - \delta_{\lambda\gamma}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta} + \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\mu\beta} + \\ & - \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\gamma} + \delta_{\lambda\beta}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\gamma} - \delta_{\lambda\beta}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\mu\alpha}; \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda'} = 2\eta_{\lambda\lambda'}; \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\varepsilon^{\mu}{}_{\nu'\lambda'} = \eta_{\nu\nu'}\eta_{\lambda\lambda'} - \eta_{\nu\lambda'}\eta_{\nu'\lambda}. \quad (\text{A.5})$$

As matrizes $(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}$; $(\alpha, \beta = 1, 2)$ usadas no Capítulo 7 são dadas por:

$$(\sigma^0)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad (\sigma^1)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad (\sigma^2)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{A.6})$$

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\gamma}(\sigma_\nu)^\gamma{}_\beta = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}(\sigma^\lambda)_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.7})$$

O tensor espinorial $\varepsilon^{\alpha\beta}$ é definido como $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha} = -\varepsilon^{\alpha\beta}$ ($\varepsilon_{12} = 1$) e abaixa e levanta índices segundo a regra: $\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta$, $\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta$.

Por exemplo:

$$\psi^\alpha\psi_\alpha = \psi^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta = -\psi_\alpha\psi^\alpha$$

Apêndice B

Variáveis Grassmannianas

B.1 Definição

Variáveis grassmannianas, denotadas por θ_i , são aquelas que satisfazem a propriedade anti-comutativa

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i, \quad (\text{B.1})$$

em contraposição a números reais (ou complexos) ordinários que comutam:

$$q_i q_j = q_j q_i. \quad (\text{B.2})$$

Uma função pode conter elementos bosônicos e fermiônicos juntos $\Phi(q, \theta)$, chamados supercampos. O caráter fermiônico (grassmanniano) ou bosônico (comutante) pode ser representada por um índice no elemento

$$A^{(a)}, \quad (\text{B.3})$$

temos um bóson quando $a = 0$ e um grassmanniano quando $a = 1$.

B.2 Propriedades

De (B.1) temos ($i = j$):

Todo grassmanniano ao quadrado é igual a zero:

$$\theta_i^2 = 0. \quad (\text{B.4})$$

O produto de dois grassmannianos $(\theta_1\theta_2)$ é sempre um bóson (comutante):

$$\theta_3 (\theta_1\theta_2) = -\theta_1\theta_3\theta_2 = (\theta_1\theta_2) \theta_3, \quad (\text{B.5})$$

note que

$$AB = (-1)^{(ab)} BA, \quad (\text{B.6})$$

ou seja, um bóson e um férmion sempre comutam:

$$AB = (-1)^{(0).(1)} BA = BA \quad (\text{B.7})$$

B.3 Derivação e integração

Da propriedade (B.4) tem-se a expansão de Taylor

$$\Phi(q, \theta) = \varphi(q) + \theta\psi(q), \quad (\text{B.8})$$

com φ bosônico e ψ fermiônico.

Note que

$$\frac{\partial^L}{\partial \theta} (\theta\psi) = \frac{\partial^L}{\partial \theta} (-\psi\theta) = \psi, \quad (\text{B.9})$$

portanto

$$\frac{\partial^L}{\partial \theta} \psi = -\psi \frac{\partial^L}{\partial \theta}. \quad (\text{B.10})$$

Em geral temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^L}{\partial \theta_i} (AB) &= \left(\frac{\partial^L A}{\partial \theta_i} \right) B + (-1)^{(ab)} \left(\frac{\partial^L B}{\partial \theta_i} \right) A \\ &= \left(\frac{\partial^L A}{\partial \theta_i} \right) B + (-1)^{(ab)} (-1)^{(ab+a)} A \left(\frac{\partial^L B}{\partial \theta_i} \right). \end{aligned}$$

Como o índice $2ab$ será sempre par ou zero, pode ser desprezado, e o sinal dependerá apenas do índice a . Então

$$\frac{\partial^L}{\partial \theta_i} (AB) = \left(\frac{\partial^L A}{\partial \theta_i} \right) B + (-1)^{(a)} A \left(\frac{\partial^L B}{\partial \theta_i} \right). \quad (\text{B.11})$$

Assim as derivadas com relação à grassmannianas também são grassmannianas, ou seja,

$$\frac{\partial^L}{\partial \theta_i} \frac{\partial^L}{\partial \theta_j} = - \frac{\partial^L}{\partial \theta_j} \frac{\partial^L}{\partial \theta_i}. \quad (\text{B.12})$$

Sendo que a relação entre as derivadas tomadas à esquerda ou direita é dada por

$$\frac{\partial^L A}{\partial \theta_i} = (-1)^{(1+a)} \frac{\partial^R A}{\partial \theta_i}. \quad (\text{B.13})$$

Devido à propriedade anti-comutativa, deve ser especificado o sentido (esquerda ou direita) da derivação ou da diferenciação, o sentido que adotamos é o da esquerda [3]:

$$\delta \Phi = \Phi(q, \theta + \delta \theta) - \Phi(q, \theta) = \delta \theta \psi = \delta \theta \frac{\partial^L \Phi}{\partial \theta}. \quad (\text{B.14})$$

As integrais foram introduzidas na álgebra grassmanniana por Berezin [3]. Ele definiu as integrais como:

$$\int d\theta = 0; \quad (\text{B.15})$$

$$\int \theta d\theta = 1; \quad (\text{B.16})$$

$$\int (c_1 A + c_2 B) d\theta = c_1 \int A d\theta + c_2 \int B d\theta, \quad (\text{B.17})$$

onde c_1 e c_2 são bosônicos.

Alguns exemplos de integração:

$$\int \theta_1 d\theta_2 = \theta_1 \int d\theta_2 = 0;$$

$$\int \theta_1 \theta_2 d\theta_1 = - \int \theta_2 \theta_1 d\theta_1 = -\theta_2 \int \theta_1 d\theta_1 = -\theta_2;$$

$$\int (\theta + c) d\theta = \int \theta d\theta + c \int d\theta = 1.$$

B.4 Equações de Lagrange

Podemos definir uma lagrangiana tal que $L = L(q_i, \dot{q}_i, \theta_i, \dot{\theta}_i, t)$, então, do princípio da ação estacionária:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, \theta_i, \dot{\theta}_i, t) dt = 0. \quad (\text{B.18})$$

Temos que as equações de Euler-Lagrange são dadas por:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad (\text{B.19})$$

$$\dot{\pi}_i = \frac{\partial^L L}{\partial \theta_i}, \quad (\text{B.20})$$

onde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \quad (\text{B.21})$$

$$\pi_i = \frac{\partial^L L}{\partial \dot{\theta}_i}, \quad (\text{B.22})$$

e π_i é o momento grassmanniano.

B.5 Equações de Hamilton

A hamiltoniana $H = H(q_i, p_i, \theta_i, \pi_i, t)$ é definida por

$$H = \dot{q}_i p_i + \dot{\theta}_i \pi_i - L. \quad (\text{B.23})$$

Para esta definição as equações de Hamilton são dadas por:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (\text{B.24})$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial^L H}{\partial \theta_i}; \quad (\text{B.25})$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (\text{B.26})$$

$$\dot{\theta}_i = -\frac{\partial^L H}{\partial \pi_i}. \quad (\text{B.27})$$

Como a hamiltoniana é sempre bosônica, sua derivada em relação a θ_i ou π_i será sempre fermiônica. (índice (1)).

B.5.1 Anti-parênteses de Poisson

Podemos definir um anti-parênteses de Poisson para as variáveis grassmannianas, de forma análoga ao parênteses de Poisson das variáveis não grassmannianas.

Fazendo a evolução temporal de uma função de θ_i, π_i e, eventualmente de t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(\theta, \pi, x, p, t) &= \dot{A} = \dot{\theta} \frac{\partial^L A}{\partial \theta} + \dot{\pi} \frac{\partial^L A}{\partial \pi} + \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ \dot{A} &= -\frac{\partial^L H}{\partial \pi} \frac{\partial^L A}{\partial \theta} - \frac{\partial^L H}{\partial \theta} \frac{\partial^L A}{\partial \pi} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Estendendo para uma função A qualquer:

$$\begin{aligned} \dot{A}^{(a)} &= -\frac{\partial^L H}{\partial \pi} \frac{\partial^L A^{(a)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^L H}{\partial \theta} \frac{\partial^L A^{(a)}}{\partial \pi} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial A^{(a)}}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial A^{(a)}}{\partial p} + \frac{\partial A^{(a)}}{\partial t} \\ \dot{A}^{(a)} &= -\left[(-1)^{(a+1)} \left(\frac{\partial^L A^{(a)}}{\partial \theta} \frac{\partial^L H}{\partial \pi} + \frac{\partial^L A^{(a)}}{\partial \pi} \frac{\partial^L H}{\partial \theta} \right)\right] + \{A^{(a)}, H\} + \frac{\partial A^{(a)}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\dot{A}^{(a)} = (-1)^{(a)} \left[\frac{\partial^L z^{(a)}}{\partial \theta_i} \frac{\partial^L H}{\partial \pi_i} + \frac{\partial^L z^{(a)}}{\partial \pi_i} \frac{\partial^L H}{\partial \theta_i} \right] + \{A^{(a)}, H\} + \frac{\partial z^{(a)}}{\partial t}.$$

Então, o anti-parênteses de Poisson é definido como

$$\{A^{(a)}, T^{(b)}\} \equiv (-1)^{(a)} \left[\frac{\partial^L z^{(a)}}{\partial \theta_i} \frac{\partial^L T^{(b)}}{\partial \pi_i} + \frac{\partial^L z^{(a)}}{\partial \pi_i} \frac{\partial^L T^{(b)}}{\partial \theta_i} \right]. \quad (\text{B.29})$$

B.6 Propriedades

As seguintes propriedades são válidas para os super-parênteses de Poisson:

$$a) \{A, B\} = (-1)^{(ab+1)} \{B, A\}; \quad (\text{B.30})$$

$$b) \{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}; \quad (\text{B.31})$$

$$c) \{A, BC\} = (-1)^{(ab)} B \{A, C\} + \{A, B\} C, \quad (\text{B.32})$$

e a identidade de Jacobi:

$$d) (-1)^{(ac)} \{A, \{B, C\}\} + (-1)^{(ba)} \{B, \{C, A\}\} + (-1)^{(cb)} \{C, \{A, B\}\} = 0. \quad (\text{B.33})$$

Apêndice C

Dedução de 4.32

Usando a álgebra (4.29 a 4.31) vemos que a identidade de Jacobi

$$\{\{x_\mu, x_\nu\}, p_\lambda\} + \{\{x_\nu, p_\lambda\}, x_\mu\} + \{\{p_\lambda, x_\mu\}, x_\nu\} = 0, \quad (\text{C.1})$$

se reduz a condição de independência de R_μ em x_μ :

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \{R^\alpha, p_\lambda\} = 0, \quad (\text{C.2})$$

portanto $R = R(p)$. E da identidade

$$\{\{x_\mu, x_\nu\}, x_\lambda\} + \{\{x_\nu, x_\lambda\}, x_\mu\} + \{\{x_\lambda, x_\mu\}, x_\nu\} = 0, \quad (\text{C.3})$$

obtemos

$$\left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\lambda} + \varepsilon_{\nu\lambda\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\mu} + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \right) R^\alpha = 0, \quad (\text{C.4})$$

que por sua vez, usando as propriedades dos tensores de Levi-Civita resulta em

$$\frac{\partial R^\mu}{\partial p^\mu} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Partindo da expressão $J_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\lambda} x^\alpha p^\lambda + S_\mu$ e de (4.14) calculamos $\{S_\mu, S_\nu\}$:

$$\{S_\mu, S_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} S^\lambda + \varepsilon_{\mu\nu\lambda} p^\lambda R \cdot p + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda} p^\lambda \frac{\partial S_\mu}{\partial p_\alpha} - \varepsilon_{\mu\alpha\lambda} p^\lambda \frac{\partial S_\nu}{\partial p_\alpha}. \quad (\text{C.6})$$

Assumindo que S_μ é dado por

$$S_\mu = \alpha \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}} + \epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\nu p^\alpha, \quad (\text{C.7})$$

substituímos em (C.6) e usando as propriedades dos tensores de Levi-Civita obtemos

$$p^\mu \left(R_\mu - \epsilon_{\mu\nu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial p_\nu} \right) = \alpha \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}}. \quad (\text{C.8})$$

Podemos escrever a solução geral de (C.5) e de (C.8) como

$$R_\mu = \alpha \frac{p_\mu}{(p^2)^{3/2}} + \epsilon_{\mu\nu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial p_\nu} + \epsilon_{\mu\nu\alpha} p^\nu \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}, \quad (\text{C.9})$$

onde g é uma função arbitrária de p_μ , $g = g(p)$. Podemos redefinir A^μ de modo a eliminar o último termo na expressão acima. Fazendo $\tilde{A}_\mu = A_\mu - p_\mu g$ ficamos com a expressão final para R_μ :

$$R_\mu = \alpha \frac{p_\mu}{(p^2)^{3/2}} + \epsilon_{\mu\nu\alpha} \frac{\partial \tilde{A}^\alpha}{\partial p_\nu}. \quad (\text{C.10})$$

Note que se redefinirmos x_μ como $x'_\mu = x_\mu - A_\mu$ é possível eliminar toda a dependência de J_μ e R_μ em A_μ . Substituindo em J_μ teremos

$$\begin{aligned} J_\mu &= \epsilon_{\mu\alpha\lambda} (x^\alpha - A^\alpha) p^\lambda + \alpha \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}} + \epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\nu p^\alpha \\ &= \epsilon_{\mu\alpha\lambda} x^\alpha p^\lambda + \alpha \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Portanto o spin é totalmente paralelo ao momento: $S_\mu = \alpha \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}}$. Verificando a álgebra nas novas coordenadas chegamos a

$$\begin{aligned} \{x_\mu - A_\mu, x_\nu - A_\nu\} &= \{x_\mu, x_\nu\} - \{x_\mu, A_\nu\} - \{A_\mu, x_\nu\} \\ &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left(\alpha \frac{p^\lambda}{(p^2)^{3/2}} + \epsilon^\lambda_{\gamma\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial p_\gamma} \right) - \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial p_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial p_\nu} \right) \\ &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left(\alpha \frac{p^\lambda}{(p^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

ou seja, obtemos $R_\mu = \alpha \frac{p_\mu}{(p^2)^{3/2}}$.

Apêndice D

Paridade e Inversão Temporal em $D = 2 + 1$

Em $D = 3 + 1$ dimensões, a transformação de paridade é feita por inversão do sentido de todos os eixos espaciais $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Essa transformação possui determinante -1 . Em $D = 2 + 1$ dimensões, o conceito de paridade é diferente de $D = 3 + 1$ dimensões. Assim, para o sistema de coordenadas mostrado na figura abaixo:

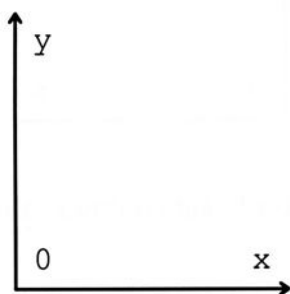


Figura D.1: Sistema de coordenadas do plano xy .

Se fizéssemos as trocas, seguindo a mesma idéia de $D = 3 + 1$ dimensões,

$$x \rightarrow -x;$$

$$y \rightarrow -y;$$

teríamos como resultado:

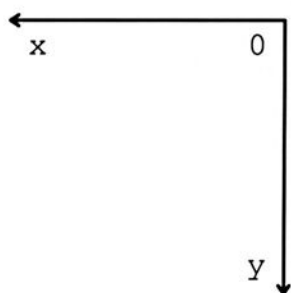


Figura D.2: Sistema de coordenadas com a inversão $x \rightarrow -x$ e $y \rightarrow -y$.

Portanto, em duas dimensões espaciais, tal troca equivaleria apenas a uma rotação de π no sentido anti-horário em torno de um eixo imaginário perpendicular ao plano xy , e o determinante da transformação seria 1, ao contrário do que ocorre em $D = 3 + 1$ dimensões. Assim sendo, define-se a transformação de paridade em $D = 2 + 1$ trocando-se o sentido de apenas um eixo espacial, por exemplo, $(x, y) \rightarrow (-x, y)$:

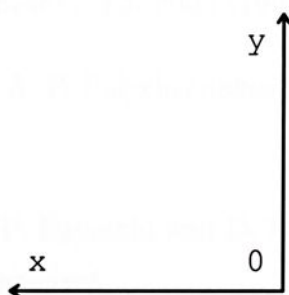


Figura D.3: Sistema de coordenadas obtido pela troca $x \rightarrow -x$.

O determinante dessa transformação agora é -1 . Analogamente, sob essa transformação de paridade, o momento p_μ se transforma como $(p_0, p_x, p_y) \rightarrow (p_0, -p_x, p_y)$.

A inversão temporal ($t \rightarrow -t$) é definida em $D = 2 + 1$ dimensões da mesma forma que em $D = 3 + 1$ dimensões. Por exemplo, para p_μ temos: $(p_0, p_x, p_y) \rightarrow (-p_0, p_x, p_y)$.

Bibliografia

- [1] K. B. Alkalaev and S. L. Lyakhovich, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 2727 (1999).
- [2] F. A. Berezin and M. S. Marinov, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **21**, 678 (1975).
- [3] F. A. Berezin and M. S. Marinov, *Annals Phys.* **104**, 336 (1977).
- [4] L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, *Nucl. Phys. B* **118**, 76 (1977).
- [5] M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe and D. Louis Martinez, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3405 (1993) [Erratum-ibid. **73**, 2009 (1993)] [hep-th/9309151].
- [6] C. Chou, V. P. Nair and A. P. Polychronakos, *Phys. Lett. B* **304**, 105 (1993) [hep-th/9301037].
- [7] C. P. Constantinidis, F. P. Devecchi and D. F. Marchioro, *Phys. Rev. D* **62**, 025015 (2000) [hep-th/9912256].
- [8] J. L. Cortes and M. S. Plyushchay, *Mod. Phys. Lett. A* **10**, 409 (1995) [hep-th/9405181].
- [9] J. L. Cortes and M. S. Plyushchay, *Int. J. Mod. Phys. A* **11**, 3331 (1996) [hep-th/9505117].
- [10] D. Dalmazi and A. de Souza Dutra, hep-th/9402059.
- [11] D. Dalmazi and A. de Souza Dutra, *Phys. Lett. B* **343**, 225 (1995) [hep-th/9411116].
- [12] D. Dalmazi and A. de Souza Dutra, *Phys. Lett. B* **414**, 315 (1997) [hep-th/9704128].

- [13] P. A. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiwa Univ. Press, N.Y. 1964).
- [14] S. Forte, Rev. Mod. Phys. **64**, 193 (1992).
- [15] D. M. Gitman and A. V. Saa, Mod. Phys. Lett. A **8**, 463 (1993) [hep-th/9208049].
- [16] I. V. Gorbunov, S. M. Kuzenko and S. L. Lyakhovich, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 4199 (1997) [hep-th/9607114].
- [17] I. V. Gorbunov, S. M. Kuzenko and S. L. Lyakhovich, Phys. Rev. D **56**, 3744 (1997) [hep-th/9702017].
- [18] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton Univ. Press, 1992).
- [19] P. Howe, S. Penati, M. Pernici and P. K. Townsend, Class. Quant. Grav. **6**, 1125 (1989).
- [20] R. Jackiw and V. P. Nair, Phys. Rev. D **43**, 1933 (1991).
- [21] R. Jackiw and V. P. Nair, Phys. Rev. Lett. **73**, 2007 (1994) [hep-th/9403010].
- [22] I. I. Kogan and G. W. Semenoff, Nucl. Phys. B **368**, 718 (1992).
- [23] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [24] A. Lerda, *Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics* (Springer-Verlag, 1992).
- [25] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B **236**, 291 (1990).
- [26] M. S. Plyushchay, J. Math. Phys. **34**, 3954 (1993).
- [27] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B **320**, 91 (1994) [hep-th/9309148].
- [28] M. S. Plyushchay, hep-th/9511137.
- [29] J. F. Schonfeld, Nucl. Phys. B **185**, 157 (1981).



- [30] D. P. Sorokin and D. V. Volkov, Nucl. Phys. B **409**, 547 (1993).
- [31] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin 1982).
- [32] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press (1983), M. F. Sohnius, Phys. Report 128 (1985) 39.
- [33] B. G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists* (Wiley, 1974).
- [34] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, 1990).



