Cylene Cordeiro de Campos Leite

Introdução à Dinâmica das Funções Racionais

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Introdução à Dinâmica das Funções Racionais

Cylene Cordeiro de Campos Leite

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Canille Martins

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas, Área de Concentração em Matemática.

São José do Rio Preto - 1995

Para Júlia,
Decinho
e Rogério.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é descrever a dinâmica das funções analíticas na esfera de Riemann. Começamos com a dinâmica em torno de pontos fixos e órbitas periódicas (estudo local), a seguir estudamos os conjuntos de Fatou e Julia visando obter uma descrição global da dinâmica.

ABSTRACT

The aim of this work is to describe the dynamics of the analytic functions in the Riemann sphere. We star with the dynamics around the fixed points and periodic orbits (local study), following we are studying the Fatou and Julia sets, seeking to get a global description of the dynamics.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Estudamos neste trabalho a dinâmica das funções racionais na Esfera de Riemann. O motivo de trabalharmos somente com funções racionais é porque elas são as únicas aplicações analíticas na esfera complexa. Veremos também com detalhes as Transformações de Möbius, que são difeomorfismos analíticos na esfera complexa.

Faremos um estudo local dos pontos fixos atratores, repulsores e indiferentes, e veremos que em algumas vizinhanças de pontos atratores, repulsores e de alguns indiferentes a aplicação é conjugada linearmente com sua derivada.

A seguir veremos os conjuntos de Fatou e Julia, juntamente com algumas propriedades mais importantes.

Os exemplos dados no capítulo final servem para ilustrar algumas propriedades, e também para nos mostrar quão rica e interessante é a dinâmica global das aplicações racionais.

CAPÍTULO 1

EXEMPLOS E MOTIVAÇÃO

Veremos agora alguns exemplos do objetivo desta teoria. A seguir, neste mesmo capítulo, estudaremos as funções racionais e alguns resultados importantes sobre elas.

1.1- EXEMPLOS:

EXEMPLO 1: Aproximação de Newton

Em 1669, Newton discutiu a equação $x^3 - 2x - 5 = 0$. Partindo com uma aproximação $x_0 = 2$ para a raiz real ξ ele escreveu $x = 2 + y$ e então obteve a equação $y^3 + 6y^2 + 10y - 1 = 0$.

Abandonando os termos não lineares ele encontrou que $y = 1/10$ e então tomou $x = 2{,}1$ como sua próxima aproximação para ξ. O método foi sistematicamente discutido por Joseph Raphson em 1690, e usando a derivada (que Newton não usou), obteve o agora familiar esquema iterativo Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

para encontrar soluções da equação $f(x) = 0$.

Dada f, isto significa iterar a nova função $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, e então este método falha no âmbito deste texto.

Em 1879, Cayley propôs usar o método para encontrar raízes complexas de funções complexas, e referiu-se a isto como o método Newton-Fourier. Ele procurou condições para as quais a seqüência z_n converge a uma raiz ξ, e resolveu o problema para polinômios quadráticos gerais.

No mesmo ano ele comentou em nota de uma página que "o caso da equação cúbica aparenta ser consideravelmente difícil", e onze anos após, e aparentemente sem ter feito grande progresso, novamente suscitou a questão.

Com a ajuda de quadros gerados por computador que agora temos, podemos ver que a dificuldade de Cayley era inevitável: o problema era encontrar o conjunto de Julia para F.

A chave para o entendimento do método de Newton está em duas observações: primeiro, $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ mostra que os zeros de f correspondem aos pontos fixos de F e, segundo, as sucessivas iteradas de F tendem a convergir em direção a um ponto fixo atrator de F.

Assim, se ξ é um zero de f que dá origem a um ponto fixo atrator de F, então as iteradas $z_n = F^n(z_0)$ necessariamente convergem para ξ, desde que a estimativa inicial z_0 seja suficientemente precisa.

Vejamos que um zero de f é um ponto fixo atrator de F. Podemos supor que $f(z) = (z-\xi)^m g(z)$, onde $m \geq 1$ e $g(\xi) \neq 0$. Então

$$\frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{(z-\xi)g(z)}{(z-\xi)g'(z) + mg(z)},$$

e como o denominador à direita é não nulo em ξ, podemos diferenciar ambos os lados e obter $F'(\xi) = (m-1)/m$.

Isto mostra que $0 \leq F'(\xi) < 1$, e então que todo zero de f corresponde a um ponto fixo atrator de F.

Note que a convergência de z_n para ξ é mais rápida quando $m = 1$ (quando f tem um zero simples ξ).

Este argumento garante a convergência para uma estimativa inicial suficientemente precisa, mas esta não era a questão de Cayley, ele estava interessado em encontrar todos os pontos de partida que convergiam a uma dada raiz.

Se aplicarmos o método de Newton para o polinômio quadrático $f(z) = (z-\alpha)(z-\beta)$, onde α e β são distintos, somos levados a considerar a iteração de $F(z) = \dfrac{z^2 - \alpha\beta}{2z - (\alpha+\beta)}$.

Isto mostra explicitamente que F fixa α e β (os zeros de f), e vemos que é razoável esperar (em razão da simetria) que z_n convirja para α

desde que comecemos o processo num ponto z_0 mais próximo de α que de β (e analogamente para β). Agora verificaremos isto:

O conjunto de pontos mais próximos de α que de β está convenientemente descrito quando $\{|w|<1\}$, onde $w=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$.

Note que os dois valores interessantes de z, α e β, correspondem a 0 e ∞ para w.

Convertendo o problema na variável w significa que podemos considerar a função conjugada R dada por $R(z)=\left(g\circ F\circ g^{-1}\right)(z)$, onde $g(z)=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$.

Um cálculo mostra que $R(z)=z^2$, e isto é tudo que precisamos, pois se z_0 está mais próximo de α que de β, então $|g(z_0)|<1$, e então quando $n\to\infty$, $R^n\left(g(z_0)\right)\to 0$.

Mas isto significa que
$F^n(z_0)=\left(g^{-1}\circ R^n\circ g\right)(z_0)\to g^{-1}(0)=\alpha$ quando $n\to\infty$.

Um argumento análogo usamos para β.

EXEMPLO 2: Iteração de $z\mapsto z^2$

$R(z)=z^2$

Pontos fixos de R: $z=1$ e $z=0$, e como $R(\infty)=\infty$, o infinito também é um ponto fixo de R. $z=1$ é ponto fixo repulsor, $z=0$ é ponto fixo super-atrator e o infinito também é super-atrator.

$R^n(z)=z^{2^n}$

$R^n(z_0)\to 0$ quando $|z_0|<1$ e $R^n(z_0)\to\infty$ quando $|z_0|>1$.

A dinâmica interessante de R ocorre no círculo unitário $C=\{z:|z|=1\}$.

C é invariante por R.

Para $z=e^{i\theta}$,

$R^n(z)=z^{2^n}=e^{2^n i\theta}$.

Se $z=e^{2\pi ir/2^m}$ (*) para $r,m\in\boldsymbol{Z}$, então $R^m(z)=1$, e como 1 é fixado por R, $R^n(z)=1$ se $n\geq m$.

Note que os pontos $z=e^{2\pi ir/2^m}$ são densos em C, e partindo de quaisquer desses pontos, as iteradas alcançam o ponto fixo 1 após um número finito de passos, e dali não saem mais. Se partirmos de qualquer outro ponto de C

que não seja dessa forma, a seqüência de iteradas não pode convergir para nenhum ponto, pois se supusermos $z_n \to w$, então w deve ser um ponto fixo de R em C, e então $w = 1$. Mas 1 é ponto fixo repulsor de R, então devemos ter $z_n = 1$ para algum n. Isto, contudo, mostra que z_0 é da forma (*) acima, contrariando a suposição.

Os pontos da forma (*) são densos em C, como também são os outros pontos de C que não têm essa forma, e podemos agora começar a ver o comportamento complicado e caótico das iteradas $R^n(z)$ no círculo unitário.

Todo arco de C contém infinitos pontos que eventualmente alcançam o 1 e lá permanecem, e também infinitos pontos que se movem ao redor do círculo de modo contínuo sem nunca convergir. Segue que dado qualquer ponto $z_0 \in C$, podemos escolher um ponto $w_0 \in C$ arbitrariamente próximo de z_0 para os quais as iteradas z_n e w_n exibem diferentes comportamentos: assim, o conjunto de Julia de R contém o círculo C.

É também claro que se z_0 e w_0 estão no disco unitário $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, então os pontos z_n e w_n exibem um comportamento similar (ambos convergem para zero). O mesmo é verdade se z_0 e w_0 estão em $\{z : |z| > 1\}$ (ambos convergem para o infinito).

Estes fatos mostram que, para este exemplo, o conjunto de Julia é o círculo unitário.

Existem muitas outras características notáveis deste exemplo. Consideremos uma delas: seja I qualquer arco de tamanho positivo no círculo unitário C. A aplicação $R(z) = z^2$ dobra o ângulo polar de pontos em C. Então se I subentende um ângulo θ com a origem, então o arco $R(I)$ subentende um ângulo 2θ. Segue imediatamente que para todo n suficientemente grande, o arco $R^n(I)$ cobre o círculo unitário. Isto acontece independente do tamanho de I: a ação de R^n em cada arco de C (arbitrariamente pequeno) é "explodi-lo" a uma tal extensão que eventualmente cobre C.

Isto também é um caso particular de um resultado geral sobre o conjunto de Julia.

EXEMPLO 3: Iteração de $z \mapsto z^2 + c$

$$P(z) = z^2 + c.$$

Vamos identificar o conjunto de valores c para os quais P tem um ponto fixo atrator em C.

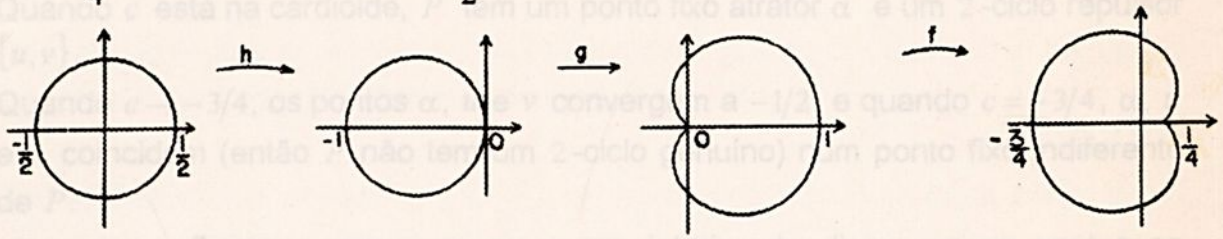
P tem dois pontos fixos $\alpha, \beta \in C$.

$z^2 - z + c = 0$; $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha\beta = c$.

$P'(\alpha) = 2\alpha$ e $P'(\beta) = 2\beta$, então $P'(\alpha) + P'(\beta) = 2$.

α e β não podem ser ambos atratores, pois se fossem, $|P'(\alpha)| < 1$ e $|P'(\beta)| < 1$, e jamais $P'(\alpha) + P'(\beta)$ seria igual a 2. Segue que P pode ter no máximo um ponto fixo atrator em C, e a condição para que o ponto fixo α seja atrator é $|\alpha| < 1/2$.

Então o conjunto dos $c's$ que estamos procurando é a imagem do disco $\{\alpha : |\alpha| < 1/2\}$ pela aplicação $z \mapsto z - z^2$. Mas $z - z^2 = (f \circ g \circ h)(z)$, onde $f(z) = \frac{1}{4} - z$, $g(z) = z^2$ e $h(z) = z - \frac{1}{2}$.



O conjunto dos $c's$ é a cardióide.

De modo análogo podemos localizar o conjunto dos $c's$ para os quais P tem um 2-ciclo atrator.

Os pontos fixos da segunda iterada P^2 são soluções de $P^2(z) - z = 0$. Como α e β são fixados por P, também o são por P^2: assim $P(z) - z$ divide $P^2(z) - z$, e podemos escrever

$$P^2(z) - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + 1 + c) = (z - \alpha)(z - \beta)(z - u)(z - v).$$

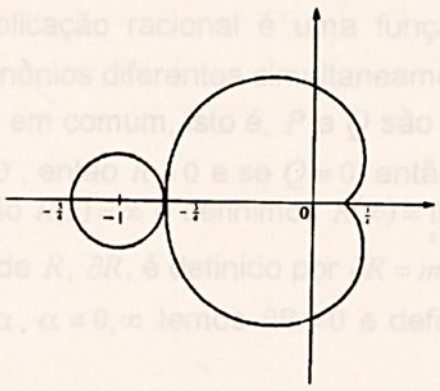
Estamos buscando condições em c que implicam que $\{u, v\}$ seja um 2-ciclo atrator, isto é, $P(u) = v$, $P(v) = u$, $u \neq v$, junto com $|(P^2)'(u)| < 1$ e $|(P^2)'(v)| < 1$.

Pela Regra da Cadeia,

$$(P^2)'(u) = P'(P(u))P'(u) = P'(v)P'(u) = 4uv = 4(1 + c).$$

Então o conjunto dos $c's$ que procuramos é o disco $\{c : |1 + c| < 1/4\}$.

O ponto de tangência do disco e da cardióide é $-3/4$, e agora descreveremos a mudança na dinâmica qando c vai da cardióide para o disco passando por $-3/4$:



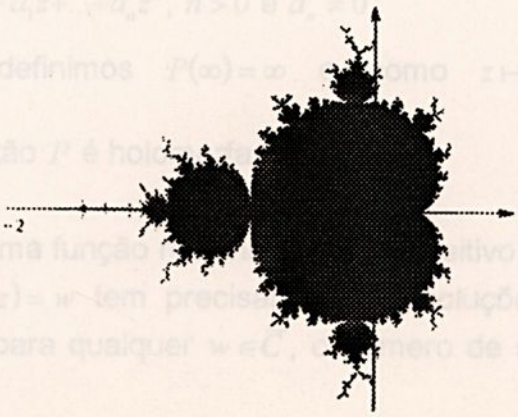
Quando c está na cardióide, P tem um ponto fixo atrator α e um 2-ciclo repulsor $\{u,v\}$.

Quando $c \to -3/4$, os pontos α, u e v convergem a $-1/2$, e quando $c = -3/4$, α, u e v coincidem (então P não tem um 2-ciclo genuíno) num ponto fixo indiferente de P.

Como c agora se move no interior do disco, esses pontos se separam novamente, agora com α repulsor e $\{u,v\}$ um 2-ciclo atrator: assim, durante este processo, a natureza atratora de α foi transferida para o par $\{u,v\}$.

Este processo se repete, $\{u,v\}$ perdendo a natureza atratora para um 4-ciclo, então para um 8-ciclo, e assim vai: isto é conhecido como *period doubling* e pode ser verificado num computador (examinando o limite de $P^n(0)$ para vários valores de c).

$\mathcal{M} = \{c : P^n(0) \not\to \infty\}$: conjunto de Mandelbrot.



1.2- APLICAÇÕES RACIONAIS

Uma aplicação racional é uma função da forma $R(z)=P(z)/Q(z)$, onde P e Q são polinônios diferentes simultaneamente do polinônio nulo e P e Q não possuem fatores em comum, isto é, P e Q são primos entre si.

Se $P\equiv 0$, então $R\equiv 0$ e se $Q\equiv 0$, então $R\equiv\infty$ .Se $Q(z)=0$ e P não é o polinônio nulo, então $R(z)=\infty$ e definimos $R(\infty)=\lim_{z\to\infty} R(z)$.

O grau de R, ∂R, é definido por $\partial R = máx\{\partial P, \partial Q\}$.

Se $R\equiv\alpha$, $\alpha\neq 0,\infty$ temos $\partial R=0$ e definimos $\partial R=0$ quando $\alpha=0$ ou $\alpha=\infty$.

DEFINIÇÃO: Uma aplicação $f:D\to C$ definida num domínio plano D é holomorfa em D se a derivada f' existe em cada ponto de D.

DEFINIÇÃO: Uma aplicação $f:D\to C$ é meromorfa em D se cada ponto de D tem uma vizinhança onde f ou $1/f$ é holomorfa. Os pólos de f são pontos w onde $f(w)=\infty$, e próximo a tais pontos, a aplicação $z\mapsto 1/f(z)$ é holomorfa com valor 0 em w. f está definida numa vizinhança do ∞ se está definida em algum conjunto $\{|z|>r\}\cup\{\infty\}$, e neste caso f é holomorfa (ou meromorfa) no ∞ se a aplicação $z\mapsto 1/f(1/z)$ é holomorfa (ou meromorfa) no zero.

Definimos também a esfera complexa, ou Esfera de Riemann, como o conjunto $\{z\in C\}\cup\{\infty\}$, e a denotamos por $\overline{C}$.

EXEMPLO: $P(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$, $n>0$ e $a_n\neq 0$.

Como $\lim_{z\to\infty} P(z)=\infty$, definimos $P(\infty)=\infty$ e como $z\mapsto \dfrac{1}{P(1/z)}=\dfrac{z^n}{a_0z^n+\ldots+a_n}$ é holomorfa no zero, então P é holomorfa no infinito.

Se R é uma função racional de grau positivo d, então para qualquer $w\in\overline{C}$, a equação $R(z)=w$ tem precisamente d soluções em z (contadas as multiplicidades), pois para qualquer $w\in\overline{C}$, o número de soluções de $R(z)=w$ é,

por definição, o número de zeros de $R(z)-w$. Mas $R(z)-w=\dfrac{P(z)-wQ(z)}{Q(z)}$, e então $R(z)-w$ e $R(z)$ têm o mesmo grau (mas somente pelo fato de que se P e Q são primos entre si, também o são $P-wQ$ e Q). Deduzimos que a equação $R(z)-w$ tem precisamente ∂R soluções em z, independente do valor de w.

Temos que para quaisquer duas aplicações racionais R e S, $\partial(RS)=\partial R\partial S$, daí $\partial R^n=(\partial R)^n$.

PROPOSIÇÃO: Toda função racional é analítica em $\overline{C}$.

PROVA: Seja $R:\overline{C}\to\overline{C}$ função racional.

Então $R(z)=P(z)/Q(z)$, com P e Q polinômios primos entre si.

Pontos onde R poderia não ser holomorfa: $z=\infty$ ou $\{z\in C|R(z)=\infty\}$

Para $z=\infty$, definimos

$$R(\infty)=\lim_{z\to\infty}R(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to\infty}\frac{a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0}{b_mz^m+\ldots+b_1z+b_0}\overset{(a_nb_m\neq 0)}{=}\begin{cases}\infty & \text{se } n>m\\ a_n/b_m & \text{se } n=m\\ 0 & \text{se } m>n\end{cases}$$

Aqui então temos três casos:

1.º Caso: $R(\infty)=\infty$ $(n>m)$

Seja $g(z)=1/z$ e tome $S=g\circ R\circ g^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc}\infty & \xrightarrow{R} & \infty\\ g\downarrow & & \downarrow g\\ 0 & \xrightarrow[S]{} & 0\end{array}$$

R será derivável em $z=\infty$ se S for derivável em $z=0$.

$S(z)=(g\circ R\circ g^{-1})(z)=g(R(1/z))=1/R(1/z)$

$$S(z)=\frac{b_m(1/z^m)+\ldots+b_1(1/z)+b_0}{a_n(1/z^n)+\ldots+a_1(1/z)+a_0}=\frac{z^n}{z^m}\left(\frac{b_m+\ldots+b_1z^{m-1}+b_0z^m}{a_n+\ldots+a_1z^{n-1}+a_0z^n}\right)=$$

$$= z^{n-m}\left(\frac{b_m+\ldots+b_1z^{m-1}+b_0z^m}{a_n+\ldots+a_1z^{n-1}+a_0z^n}\right)$$

$$S(z)=\frac{b_mz^{n-m}+\ldots+b_1z^{n-1}+b_0z^n}{a_n+\ldots+a_1z^{n-1}+a_0z^n}$$

$$S(0)=\frac{0}{a_n}$$

Portanto, S é derivável em $z=0$ (pois $a_n\neq 0$), e então R é derivável em $z=\infty$.

2.º Caso: $R(\infty)=a_n/b_m$ $(n=m)$.
Sejam $g(z)=1/z$ e $S=R\circ g^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} \infty & \xrightarrow{R} & a_n/b_m \\ g\downarrow & & \downarrow id \\ 0 & \xrightarrow[S]{} & a_n/b_m \end{array}$$

R será derivável em $z=\infty$ se S for derivável em $z=0$.

$$S(z)=R\left(g^{-1}(z)\right)=R(1/z)=\frac{a_n(1/z^n)+\ldots+a_1(1/z)+a_0}{b_n(1/z^n)+\ldots+b_1(1/z)+b_0}=$$

$$=\frac{a_n+\ldots+a_1z^{n-1}+a_0z^n}{b_n+\ldots+b_1z^{n-1}+b_0z^n}$$

$S(0)=a_n/b_n$ e então R é derivável em $z=\infty$.

3.º Caso: $R(\infty)=0$ $(n<m)$.
Este caso é como o anterior se tomarmos $a_n/b_m=0$, pois $b_m\neq 0$.

Agora precisamos analisar os pontos $\{z\in C\,|\,R(z)=\infty\}$

$$R(z)=\infty \Leftrightarrow \frac{1}{R(z)}=0$$

Os zeros de $1/R(z)$ são os pontos de $R(z)$ que são levados no infinito.
$1/R(z)$ tem no máximo m zeros, contadas as multiplicidades.

Tomemos agora $T(z) = (g \circ R)(z)$:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{R} & \infty \\ id\downarrow & & \downarrow g \\ a & \xrightarrow[T]{} & 0 \end{array}$$

$$T(z) = \frac{1}{R(z)} = \frac{b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0}$$

R será derivável em $z = a$ se T for derivável em $z = a$.

$$T(a) = \frac{b_m a^m + \ldots + b_1 a + b_0}{a_n a^n + \ldots + a_1 a + a_0}$$

Se $a \neq 0$, então T é derivável em $z = a$, e também R.

Se $a = 0$, $T(0) = \frac{b_0}{a_0} = 0$, pois se $R(0) = \infty$, então $\frac{1}{R(0)} = T(0) = 0$.

Daí $\frac{b_0}{a_0} = 0 \Rightarrow b_0 = 0$ e $a_0 \neq 0$, pois P e Q são primos entre si, então não se anulam simultaneamente.

Temos $T(0) = \frac{b_0}{a_0}$, onde $a_0 \neq 0$.

Portanto R é derivável em qualquer ponto de C que é mandado no infinito.

Concluímos então que $R: \overline{C} \to \overline{C}$ racional é holomorfa.

TEOREMA : Seja $R: \overline{C} \to \overline{C}$ holomorfa. Então,

a) $R \equiv \infty$ ou $R^{-1}(\infty)$ é um conjunto finito;

b) Se $R \not\equiv \infty$ e $a_1, \ldots a_n \in C$ são tais que $R(a_j) = \infty$, então existem polinômios $p_0, \ldots, p_n$ tais que $R(z) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ para $z \in C$.

PROVA: *a)* Suponhamos que $R^{-1}(\infty)$ seja um conjunto infinito.

$R^{-1}(\infty) = \{a \in \overline{C} \mid R(a) = \infty\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

$\overline{C}$ é um conjunto compacto, então toda seqüência de pontos em $\overline{C}$ possui uma subseqüência que converge para um ponto de $\overline{C}$.

Daí a seqüência $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ tem uma subseqüência convergente.

Seja ela (a_{n_j}).

$a_{n_j} \to a \in \overline{C}$.

Como R é contínua, $R(a) = \infty$.

Tomemos $g(z) = 1/z$ e conjuguemos com $R(z)$.

$g \circ R$ tem as mesmas propriedades da R e $(g \circ R)(a) = 0$.

Suponhamos que $g \circ R \not\equiv \infty$.

Então existe $m \in N$ tal que $g(R(z)) = (z-a)^m \alpha(z)$ com $\alpha(a) \neq 0$ e $0 < |z-a| < \delta$.

Então $g(R(z)) \neq 0$ para $0 < |z-a| < \delta$, o que é absurdo, pois existe a_{n_k} tal que $0 < |a_{n_k} - a| < \delta$ e $g(R(a_{n_k})) = 0$.

$$\begin{array}{ccc} a_{n_k} & \xrightarrow{R} & \infty \\ id \downarrow & & \downarrow g \\ a_{n_k} & \xrightarrow[g \circ R]{} & 0 \end{array}$$

Portanto $g \circ R \equiv 0$, daí $R \equiv \infty$.

Concluímos então que $R \equiv \infty$ ou $R^{-1}(\infty)$ é um conjunto finito.

b) Seja $R^{-1}(\infty) = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$R(a_1) = \infty$

Numa vizinhança de a_1, existe $m \in N$ tal que

$R(z) = (z-a_1)^{-m} \alpha(z)$ com $\alpha(a_1) \neq \infty$.

Escrevendo em Série de Laurent,

$$R(z) = \frac{b_{-m}}{(z-a_1)^m} + \ldots + \frac{b_{-1}}{z-a_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a_1)^n$$

$$\underbrace{R(z)}_{\substack{\text{definida} \\ \text{globalmente}}} \underbrace{- \frac{b_{-m}}{(z-a_1)^m} - \ldots - \frac{b_{-1}}{z-a_1}}_{\text{definida globalmente}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a_1)^n}_{\substack{\text{tem sentido numa vizinhança de } a_1}}$$

Então vemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a_1)^n$ está definida globalmente.

Chamo $p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = \frac{b_{-m}}{(z-a_1)^m} + \ldots + \frac{b_{-1}}{z-a_1}$

Então $R(z) - p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a_1)^n = G(z)$

$R(a_2) = \infty$ e $p_1\left(\frac{1}{a_2 - a_1}\right) \neq \infty \Rightarrow G(a_2) = \infty$.

Numa vizinhança de a_2, existe $l \in N$ tal que
$G(z) = (z-a_2)^{-l}\beta(z)$ com $\beta(a_2) \neq \infty$.

Também

$$G(z) = \frac{c_{-l}}{(z-a_2)^l} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a_2)^n .$$

No mesmo argumento anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a_2)^n$ está definida globalmente.

Chamo $p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) = \frac{c_{-l}}{(z-a_2)^l} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a_2}$

Daí $R(z) - p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) - p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a_2)^n = H(z)$

Aplicando sucessivamente o mesmo método, obtemos:

$$R(z) - p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) - p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) - \ldots - p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i$$

$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i$ está definida globalmente e não tem pólos, então é uma função inteira.

Num disco $D_R(0)$, $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i$ é limitada ($D_R(0)$ é compacto).

Portanto $\left|\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i\right| \leq M$ se $|z| \leq R$.

Se $|z| > R$, $\quad \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i = \underbrace{R(z) - p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) - \ldots - p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)}_{\text{limitadas em } |z|>R}$

Portanto $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i$ é limitada em $\overline{C}$.

Assim, pelo Teorema de Liouville, $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i$ é constante.

Chamo $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z-a_n)^i = p_0$.

Conclusão: $R(z) = p_0 + \sum_{i=0}^{n} p_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ para $z \in C$.

Portanto $R(z)$ é uma função racional.

Com estes dois resultados concluímos que as únicas funções analíticas na esfera de Riemann são as funções racionais.

DEFINIÇÃO: Um ponto fixo de R é um ponto $\xi \in \overline{C}$ tal que $R(\xi)=\xi$. Um ponto periódico de período n de R é um ponto tal que $R^n(\xi)=\xi$, $R(\xi)\neq\xi$, $R^2(\xi)\neq\xi$,... e $R^{n-1}(\xi)\neq\xi$.

Se $\xi \in \overline{C}$ é um ponto periódico de período n de R, podemos tomar $S = R^n$ e considerar ξ como ponto fixo de S. Portanto sempre trabalharemos com pontos fixos.

Seja $\xi \in \overline{C}$ um ponto fixo de R. Então ξ é:

Super-atrator se $R'(\xi) = 0$;
Atrator se $0 < |R'(\xi)| < 1$;
Repulsor se $|R'(\xi)| > 1$;
Racionalmente indiferente se $R'(\xi)$ é uma raiz da unidade;
Irracionalmente indiferente se $|R'(\xi)| = 1$, mas $R'(\xi)$ não é raiz da unidade.

Podemos considerar sempre $\xi = 0$ como ponto fixo, e os resultados correspondentes para um ponto fixo ξ qualquer podem ser obtidos por conjugação com uma Transformação de Möbius, que é nosso próximo tópico.

1.3 - TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

As aplicações racionais de grau um são as Transformações de Möbius, que têm a forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, e estas constituem o grupo de homeomorfismos analíticos de $\overline{C}$ em $\overline{C}$.

DEFINIÇÃO: Duas aplicações racionais R e S são analiticamente conjugadas se existe alguma Transformação de Möbius g com

$$S = g \circ R \circ g^{-1}$$

Conjugação é uma relação de equivalência e as classes de equivalência são as classes de conjugação das aplicações racionais.

PROPOSIÇÃO: *a)* Se R e S são conjugadas analiticamente, então $\partial R = \partial S$;
b) Se $S = g \circ R \circ g^{-1}$, então $S^n = g \circ R^n \circ g^{-1}$
c) S fixa $g(z)$ se e somente se R fixa z.

PROVA: *a)* R e S são conjugadas.
Então $S = g \circ R \circ g^{-1}$, g: Transformação de Möbius .
Suponhamos $\partial S = m$ e $\partial R = n$.
$S = g \circ R \circ g^{-1}$ implica $S \circ g = g \circ R$
$\partial(Sg) = \partial S \partial g = m.1 = m$
$\partial(gR) = \partial g \partial R = n.1 = n.$
Como $S \circ g = g \circ R$, então $\partial(Sg) = \partial(gR)$, ou seja, $m = n.(\partial S = \partial R)$.
b) $S = g \circ R \circ g^{-1}$
$S(z) = (g \circ R \circ g^{-1})(z)$
$S(S(z)) = (g \circ R \circ g^{-1})((g \circ R \circ g^{-1})(z)) = (g \circ R \circ g^{-1})(g(R(g^{-1}(z)))) =$
$= (g \circ R^2 \circ g^{-1})(z).$

•
•
•

$S^n(z) = (g \circ R^n \circ g^{-1})(z).$

c)$(\Rightarrow) S$ fixa $g(z)$, isto é, $S(g(z)) = g(z)$.

Temos que $S \circ g = g \circ R \Rightarrow g(R(z)) = g(z) \Rightarrow R(z) = z$

$(\Leftarrow) R$ fixa z, isto é, $R(z) = z$.

$g(R(z)) = g(z) \Rightarrow (g \circ R)(z) = g(z) \Rightarrow (S \circ g)(z) = g(z)$.

TEOREMA: $g: \overline{C} \to \overline{C}$ analítica. São equivalentes:

a) g é uma Transformação de Möbius;

b) g é um difeomorfismo;

c) g é uma bijeção.

PROVA: *a)*$\Rightarrow$*b)*

Dizemos que g é um difeomorfismo analítico se:

i) g é holomorfa;

ii) g é bijetora;

iii) g^{-1} é holomorfa.

g é uma Transformação de Möbius, ou seja, é da forma $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc \neq 0$.

Mostremos que g é bijetora. Para isto vejamos se g possui inversa.

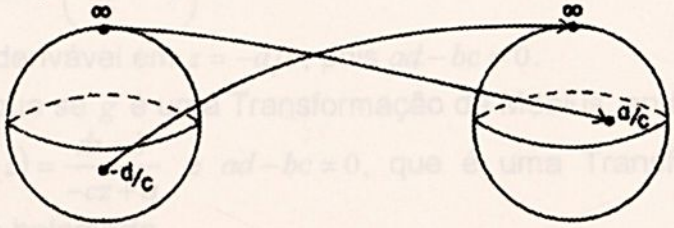
$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow (cw-a)z = b - dw \Rightarrow z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

Portanto $g^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ e g é bijetora.

Por definição, $g(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{az+b}{cz+d} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z}{z} . \dfrac{a+b/z}{c+d/z} = \dfrac{a}{c}$ e

$g(-d/c) = \lim\limits_{z\to -d/c} g(z) = \lim\limits_{z\to -d/c} \dfrac{az+b}{cz+d} = \infty$.

Daí $g^{-1}(\infty) = -d/c$ e $g^{-1}(a/c) = \infty$



Vejamos se g é derivável em $z = \infty$ e em $z = -d/c$.

Seja $h(z) = 1/z$.

Então $h^{-1}(z) = 1/z$.

Seja $id(z) = z$

$$\begin{array}{ccc} \infty & \xrightarrow{g} & a/c \\ h\downarrow & & \downarrow id \\ 0 & \xrightarrow[id\circ g\circ h]{} & a/c \end{array}$$

g será derivável em $z = \infty$ se $id \circ g \circ h$ for derivável em $z = 0$.

$$(id \circ g \circ h)(z) = g(h(z)) = g(1/z) = \frac{a(1/z)+b}{c(1/z)+d} = \frac{a+bz}{c+dz}$$

$$(id \circ g \circ h)'(z) = g'(1/z) = \frac{b(c+dz)-d(a+bz)}{(c+dz)^2} = \frac{bc-ad}{(c+dz)^2}$$

$$(id \circ g \circ h)'(0) = \frac{bc-ad}{c^2}$$

Portanto g é derivável em $z = \infty$, pois estamos considerando $a/c \neq \infty$.

$$\begin{array}{ccc} -d/c & \xrightarrow{g} & \infty \\ id\downarrow & & \downarrow h \\ -d/c & \xrightarrow[h\circ g\circ id]{} & 0 \end{array}$$

g será derivável em $z = -d/c$ se $h \circ g \circ id$ for derivável em $z = -d/c$.

$$(h \circ g \circ id)(z) = h(g(z)) = 1/g(z)$$

$$(h \circ g \circ id)'(z) = \left(\frac{1}{g(z)}\right)' = \frac{-g'(z)}{(g(z))^2} = \frac{\dfrac{bc-ad}{(cz+d)^2}}{\dfrac{(az+b)^2}{(cz+d)^2}} = \frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$

$$(h \circ g \circ id)'(-d/c) = \frac{bc-ad}{\left(\dfrac{-ad}{c}+b\right)^2} = \frac{bc-ad}{(bc-ad)^2}.c^2 = \frac{c^2}{bc-ad}$$

Portanto g é derivável em $z = -d/c$, pois $ad - bc \neq 0$.

Vimos então que se g é uma Transformação de Möbius, então g é holomorfa.

Também $g^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ e $ad - bc \neq 0$, que é uma Transformação de Möbius.

Portanto g^{-1} é holomorfa.

Daí $g: \overline{C} \to \overline{C}$ é um difeomorfismo analítico.

É imediato que *b)* $\Rightarrow$*c)*

c) $\Rightarrow$*a)*

Temos $g:\overline{C} \to \overline{C}$ bijeção holomorfa.

Sabemos que g é uma função racional, $g(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, com P e Q polinômios.

Como g é bijeção, $máx\{\partial P, \partial Q\} = 1$, pois se tomarmos $máx\{\partial P, \partial Q\} = n > 1$, então $\partial P = n$ ou $\partial Q = n$ e se $\partial P = n$, então g terá n zeros e não será injetora, e se $\partial Q = n$, g terá n pólos e também não será injetora.

Portanto $máx\{\partial P, \partial Q\} = 1$.

Daí g é uma Transformação de Möbius.

1.4 - A DINÂMICA DAS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Vamos descrever agora a dinâmica das Transformações de Möbius que, como vimos, têm a forma $R(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc\neq 0$, $R:\overline{C}\to\overline{C}$.

Os pontos fixos de R são as soluções de $R(z)=z$.

Se $c\neq 0$, R tem dois pontos fixos em C, que podem coincidir ou não.

Se $c=0$, um ponto fixo de R é o infinito, o outro ponto fixo é $z=\dfrac{b}{d-a}$, e quando $d=a$, $\dfrac{b}{d-a}=\infty$.

Conclusão: R tem um ou dois pontos fixos.

Vamos analisar os dois casos:

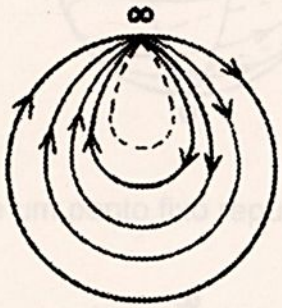
1.º Caso: R tem um único ponto fixo.

Suponhamos que este ponto é o infinito.

Então R tem a forma $R(z)=z+\beta$, $\beta\neq 0$.

$R^n(z)=z+n\beta$ e $\lim\limits_{n\to\infty}R^n(z)=\lim\limits_{n\to\infty}(z+n\beta)=\infty$.

Portanto $R^n(z)\to\infty, \forall z\in\overline{C}$.



Agora suponha que $\xi\in C$ é o ponto fixo de R.

Seja $g(z)=\dfrac{1}{z-\xi}$ e definamos $S(z)=\left(g\circ R\circ g^{-1}\right)(z)$.

Como S fixa z se e somente se $z=\infty$, segue que S é uma translação, e então que $S^n(z)\to\infty$ quando $n\to\infty$.

Mas $S^n(z)=\left(g\circ R^n\circ g^{-1}\right)(z)$ e então, substituindo z por $g(z)$ e aplicando g^{-1}, encontramos que $R^n(z)\to g^{-1}(\infty)=\xi$.

Concluímos então que se R tem um único ponto fixo, as iteradas de R em qualquer ponto convergem ao ponto fixo.

2.º Caso: R tem dois pontos fixos distintos.

Suponhamos que R fixa o zero e o infinito.

Então R tem a forma $R(z) = kz$.

$R^n(z) = k^n z$ e $\lim_{n\to\infty} R^n(z) = \begin{cases} 0 & se \quad |k| < 1 \\ \infty & se \quad |k| > 1 \end{cases}$

Se $|k| < 1$, $R^n(z) \to 0, \forall z \in C$.

$R'(z) = k$, então $R'(0) = k$ e o zero é um ponto fixo atrator.

Se $z = \infty$, seja $h(z) = 1/z$.

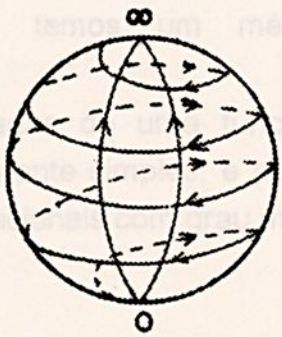
$(h \circ R \circ h^{-1})(z) = \dfrac{1}{R(1/z)}$

$\dfrac{1}{R(1/z)} = \dfrac{z}{k}$, então $(h \circ R \circ h^{-1})'(z) = \dfrac{1}{k}$.

Daí $\left|(h \circ R \circ h^{-1})'(0)\right| = \left|\dfrac{1}{k}\right| > 1$ e o infinito é um ponto fixo repulsor.

Se $|k| > 1$, $R^n(z) \to \infty, \forall z \in C$.

$R'(z) = k$, então $R'(0) = k$ o zero é um ponto fixo repulsor, e do mesmo modo, o infinito é um ponto fixo atrator.



Se $|k| = 1$, temos:

i) k é uma raiz j-ésima da unidade e R^j é a identidade; ou

ii) k não é raiz da unidade e os pontos $R^n(z)$ são densos no círculo com centro na origem e raio $|z|$.

$R'(z) = k$, $|R'(0)| = |k| = 1$ e $|R'(\infty)| = \left|\frac{1}{k}\right| = 1$.

Os pontos fixos de R, quando $|k| = 1$, são pontos fixos indiferentes, que podem ser: racionalmente indiferentes se k é raiz da unidade e irracionalmente indiferentes se não.

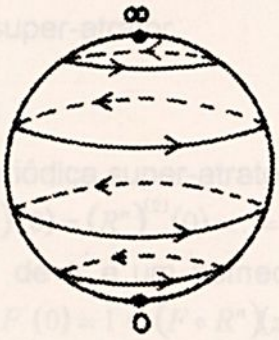
Agora suponhamos que R tem ξ_1 e ξ_2 como pontos fixos, $\xi_1 \neq \xi_2$.

Construiremos uma aplicação de Möbius g que aplica ξ_1 no zero e ξ_2 no infinito.

Se ξ_1 e ξ_2 são finitos, podemos tomar $g(z) = \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}$.

Seja $S(z) = (g \circ R \circ g^{-1})(z)$: então S fixa o zero e o infinito, e voltamos ao início deste caso.

Como g aplica círculos em círculos, concluímos que: $R^n(z)$ converge para um dos pontos fixos de R, se move ciclicamente num conjunto finito de pontos, ou forma um subconjunto denso de algum círculo.



Como anteriormente, temos um método de encontrar R^n explicitamente.

Como vimos, as iteradas de uma função racional de grau um comportam-se de uma maneira bastante simples, e por este motivo no restante deste texto trataremos de funções racionais com grau maior ou igual a dois.

CAPÍTULO 2

A DINÂMICA LOCAL

Neste capítulo descreveremos a dinâmica local das aplicações racionais numa vizinhança de um ponto fixo ou de uma órbita periódica. Veremos em quais casos a aplicação racional é conjugada a uma outra aplicação mais simples.

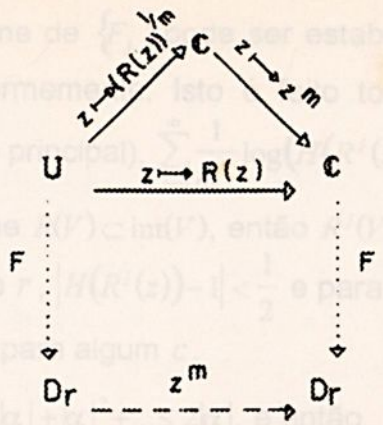
2.1 - PONTOS FIXOS SUPER-ATRATORES

Seja $R:\overline{C} \to \overline{C}$, $R(z) = z^m + \ldots, m \geq 2$.
Se $r > 0$ é suficientemente pequeno, $|R(z)| \leq 2|z|^m$ para $|z| \leq r$.
Assim, $\lim_{n\to\infty} R^n(z) = 0$ uniformemente em $|z| \leq r$.

$0 \in \overline{C}$ é ponto fixo super-atrator.

TEOREMA: Seja $O^+(0)$ órbita periódica super-atratora de período n.
Suponha $m \geq 2$, $(R^n)^{(m)} \neq 0$ e $(R^n)'(0) = (R^n)^{(2)}(0) = \ldots = (R^n)^{(m-1)}(0) = 0$.
Então existe uma vizinhança U de 0 e um homeomorfismo analítico $F:U \to D_r$ (para algum r) tal que $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ e $(F \circ R^n)(z) = (F(z))^m$.

PROVA: Para provar produziremos uma seqüência (F_n) de aplicações iterando n vezes e tomando a inversa apropriada de $z \mapsto z^k$.
Esta seqüência converge para a conjugada.
Provaremos para o caso $n = 1$, senão tomaríamos $S = R^n$ e provaríamos para S.
Se tivermos $T(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots$ e conjugarmos com $z \mapsto bz$, onde $b^{m-1} = (a_m)^{-1}$, teremos $R(z) = z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \ldots$
Portanto é suficiente provar este resultado para $R(z)$.
Se temos $R:U \to \overline{C}$, podemos encontrar $(R(z))^{1/m}$ tal que o seguinte diagrama comuta:



Trabalharemos numa vizinhança V de zero tal que $R(V) \subset \text{int}(V)$ e $\lim_{j\to\infty} R^j(z) = 0$ para todo $z \in \overline{C}$.

Definimos $F_j(z) = \left(R^j(z)\right)^{1/m^j}$ escolhendo $F_n'(0) = 1$.

Provando que $\{F_n\}$ converge uniformemente para $F(z)$, teremos a conjugação, pois:

i) $F(0) = 0$. De fato: $F(0) = \lim_{j\to\infty} \left(R^j(z)\right)^{1/m^j} = 0$

ii) Calcularemos $F'(0)$ logo a seguir.

iii) $(F \circ R)(z) = \lim_{j\to\infty} \left[R^j(R(z))\right]^{1/m^j} = \lim_{j\to\infty} \left[\left(R^{j+1}(z)\right)^{1/m^{j+1}}\right]^{1/m^{-1}} =$

$$= \lim_{j\to\infty} \left[\left(R^{j+1}(z)\right)^{1/m^{j+1}}\right]^m = [F(z)]^m.$$

Para provar que $\{F_n\}$ converge uniformemente em alguma vizinhança do zero, introduziremos $H(z) = \dfrac{F_1(z)}{z} = \dfrac{[R(z)]^{1/m}}{z} = \dfrac{[z^m(1+\ldots)]^{1/m}}{z} = (1+\ldots)^{1/m}$, e então $H(0) = 1$.

Daí $\dfrac{F_{j+1}(z)}{F_j(z)} = \dfrac{\left(R^{j+1}(z)\right)^{1/m^{j+1}}}{\left(R^j(z)\right)^{1/m^j}} = \dfrac{\left(\left(R\left(R^j(z)\right)\right)^{1/m}\right)^{1/m^j}}{\left(R^j(z)\right)^{1/m^j}} = \left[\dfrac{F_1\left(R^j(z)\right)}{R^j(z)}\right]^{1/m^j} = \left[H\left(R^j(z)\right)\right]^{1/m^j}$

$F_0(z) = z$ e temos $F_{j+1}(z) \overset{*}{=} z\prod_{i=0}^{j}\left[H\left(R^i(z)\right)\right]^{1/m^j}$,

$$*F_{j+1}(z) = \frac{F_0(z)F_1(z)\ldots F_{j+1}(z)}{F_0(z)F_1(z)\ldots F_j(z)} = z\prod_{i=0}^{j}\frac{F_{i+1}(z)}{F_i(z)}$$

Então $F'(0) = \lim_{z\to 0}\dfrac{F(z)-F(0)}{z} = \lim_{z\to 0}\dfrac{\left[\lim_{j\to\infty} F_j(z)\right]}{z} =$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\lim_{j\to\infty}\prod_{i=0}^{j}\left[H\left(R^i(z)\right)\right]^{1/m^j}\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\lim_{z\to 0}\prod_{i=0}^{j}\left[H\left(R^i(z)\right)\right]^{1/m^j}\right] = 1$$

A convergência uniforme de $\{F_j\}$ pode ser estabelecida provando que o produto infinito converge uniformemente. Isto é feito tomando o logaritmo do produto infinito (usando o ramo principal), $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m^j}\log\left(H\left(R^j(z)\right)\right)$.

A vizinhança V é tal que $R(V)\subset \text{int}(V)$, então $R^j(V)\subset \text{int}(V)$.

Também para um certo r, $\left|H\left(R^j(z)\right)-1\right|<\frac{1}{2}$ e para outro r_1,

$\left|H\left(R^j(z)\right)-1\right|\le c\left|R^j(z)\right|$ para algum c.

Se $|\alpha|<\frac{1}{2}$, $|\log(1+\alpha)|\le|\alpha|+|\alpha|^2+\ldots\le 2|\alpha|$, e então

$\left|\log\left(H\left(R^j(z)\right)\right)\right|\le 2\left|H\left(R^j(z)\right)-1\right|\le 2c\left|R^j(z)\right|$.

$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{m^j}\log\left(H\left(R^j(z)\right)\right)\right|=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m^j}\left|\log\left(H\left(R^j(z)\right)\right)\right|\le$

$\le\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m^j}2c\left|R^j(z)\right|=2c\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m^j}\left|R^j(z)\right|\le 2c\sum_{j=0}^{\infty}\frac{r_2}{m^j}<\infty$, onde r_2 é tal que se

$U=\{z\in C\,||z|<r_2\}$, $U\subset\{z\in C\,||z|<r\}$ e $U\subset\{z\in C\,||z|<r_1\}$.

Portanto $\{F_n\}$ converge uniformemente para uma função analítica $F(z)$.

2.2 - PONTOS FIXOS ATRATORES

Agora tomemos $R:\overline{C} \to \overline{C}$ analítica, $R \not\equiv \infty$ com $0 \in C$ ponto fixo de R e $R'(0) = a$, onde $0 < |a| < 1$.

Então $R(z) = az + a_2 z^2 + \ldots$ numa vizinhança do zero.

Temos que existem $|a| < \mu < 1$ e $r > 0$ tais que $|R(z)| < \mu|z|$, desde que $|z| \le r$. Segue que $|R^n(z)| < \mu^n|z|$, de modo que a órbita positiva $\{R^n(z) | n \ge 0\}$ de qualquer ponto $z \in C$ no disco fechado de raio r e centro $0 \in C$ converge para o ponto fixo, que é um ponto fixo atrator.

TEOREMA: Seja $R(z)$ uma função analítica satisfazendo $R(0) = 0$ e $R'(0) = a$ com $0 < |a| < 1$.
Então existe uma vizinhança U de 0 e uma aplicação analítica $F:U \to C$ tal que $(R \circ F)(z) = (F \circ L)(z)$, onde $L(z) = az$.

PROVA: $R(z) = az + \sum_{l=2}^{\infty} a_l z^l$ numa vizinhança do zero. Devemos encontrar uma função analítica F que resolva a equação $R \circ F = F \circ L$ (chamada Equação Funcional de Schröder-EFS).

Seja $F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$.

Determinemos os coeficientes c_i's e mostremos que a série determinada por $F(z)$ converge em alguma vizinhança do zero.

Vemos que R e L fixam o zero. Então F também fixa, isto é, $F(0) = 0$ e então $c_0 = 0$.

$$R(F(z)) = F(L(z))$$

$$aF(z) + \sum_{l=2}^{\infty} a_l (F(z))^l = ac_1 z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l (az)^l$$

$$ac_1 z + a\sum_{l=2}^{\infty} c_l z^l + \sum_{l=2}^{\infty} a_l (F(z))^l = ac_1 z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l a^l z^l$$

Assim, c_1 pode tomar qualquer valor, desde que diferente de zero.

Tomemos $c_1 = 1$, e então $F(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l z^l$.

Determinemos os $c_i's$ restantes recursivamente.

Temos $a\sum_{l=2}^{\infty}c_l z^l+\sum_{l=2}^{\infty}a_l(F(z))^l=\sum_{l=2}^{\infty}c_l a^l z^l$, o que implica $\sum_{l=2}^{\infty}(a^l-a)c_l z^l=\sum_{l=2}^{\infty}a_l(F(z))^l$

Suponhamos $c_2,\ldots,c_{k-1}$ conhecidos.

Os termos de ordem k do lado direito envolvem somente $c_2,\ldots,c_{k-1}$.

Em particular, o coeficiente z^k à direita é um polinômio em $a_2,\ldots,a_k$ e $c_2,\ldots,c_{k-1}$, que tem coeficientes inteiros positivos.

Denotemos esse termo por $K_k(a_2,\ldots,a_k,c_2,\ldots,c_{k-1})$.

Comparando os coeficientes temos $c_k=\dfrac{K_k(a_2,\ldots,a_k,c_2,\ldots,c_{k-1})}{a^k-a}$.

Daí c_k está determinado se $a_k\neq a$ e então temos nossa solução formal.

Provemos que a série converge:

LEMA 1: Seja $R(z)=az+\sum_{l=2}^{\infty}a_l z^l$. Então R é linearmente conjugada à aplicação $\varphi(z)=az+\sum_{l=2}^{\infty}b_l z^l$, onde $|b_l|<1$ para cada l.

PROVA: Como a série $\sum_{l=2}^{\infty}a_l z^l$ converge, existe um $A>0$ para o qual $|a_{l+1}|<A^l$ para cada $l\geq 1$.

Seja $\varphi(z)=az+\sum_{l=2}^{\infty}b_l z^l$ onde $b_l=\dfrac{a_l}{A^{l-1}}$

Claramente $|b_l|<1$ para cada l.

Seja $h(z)=Az$.

$h(R(z))=Aaz+A\sum_{l=2}^{\infty}a_l z^l$

$\varphi(h(z))=Aaz+\sum_{l=2}^{\infty}b_l(Az)^l=aAz+\sum_{l=2}^{\infty}\dfrac{a_l}{A^{l-1}}A^l z^l=aAz+A\sum_{l=2}^{\infty}a_l z^l=h(R(z))$

LEMA 2: Existe $c>0$ tal que $|a^k-a|>c$ para todo $k>1$.

PROVA: Como $|a|<1$, segue que $|a^k|\leq|a^2|<|a|$ para todo $k>1$.

Então, $|a^k-a|\geq\big||a^k|-|a|\big|=|a|-|a^k|\geq|a|-|a^2|>0$.

Daí existe $c>0$ tal que $|a^k-a|>c$ para todo $k>1$.

Observemos que a série de potência em w dada por $z = w - \frac{1}{c}\sum_{l=2}^{\infty} w^l$ converge para $|w| < 1$ e para qualquer $c \in \boldsymbol{R}^*$.

Temos $z = z(w) = w - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{1-w} - 1 - w\right)$ para $|w| < 1$.

Agora, $z(0) = 0$ e $z'(0) = 1$.

Então segue que a função analítica $z(w)$ tem uma inversa que está definida e é analítica em alguma vizinhança do zero.

Como $w(0) = 0$ e $w'(0) = 1$, segue que podemos escrever a aplicação inversa da forma $w = w(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l z^l$w, onde sabemos que a série $\sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l z^l$ converge.

Mostraremos que esta série majora a série de potência dada por $F(z)$, desde que o c escolhido seja bastante pequeno.

LEMA 3: Escolha c como no Lema 2.
Então para cada $k \geq 2$, temos $0 \leq |c_k| \leq \alpha_k$.

PROVA: Observemos que a série de potência $w = w(z)$ é uma solução da equação funcional $cw(z) - cz = \sum_{l=2}^{\infty} (w(z))^l$.

Vamos resolver esta equação exatamente como resolvemos a EFS:

Em termos de α_k esta equação fica: $\sum_{k=2}^{\infty} c\alpha_k z^k = \sum_{l=2}^{\infty} (w(z))^l$

Comparando com a resolução anterior vemos que as equações têm a mesma forma, exceto que $a_l - a$ é substituído por c e a_l por 1.

Então $\alpha_k = \frac{K_k(1,\ldots,1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1})}{c}$.

Como K_k tem coeficientes inteiros positivos, por indução cada $\alpha_k > 0$.

Também temos, por indução,

$$|c_k| \leq \frac{|K_k(a_1,\ldots,a_k,c_2,\ldots,c_{k-1})|}{c} \quad \text{(pois } |a^k - a| > c\text{)}$$

$$\leq \frac{1}{c} K_k(1,\ldots,1,|c_2|,\ldots,|c_{k-1}|)$$

$$\leq \frac{1}{c} K_k(1,\ldots,1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1}) = \alpha_k$$

Portanto a série dada por $w(z)$ majora a série dada por $F(z)$, então esta converge numa vizinhança do zero, e o Teorema está provado.

2.3 - PONTOS FIXOS REPULSORES

Com a mesma descrição para pontos fixos atratores, mas agora com $|a|>1$, tomamos R^{-1} e vemos que a órbita negativa de qualquer ponto suficientemente próximo do zero está bem definida e converge ao ponto fixo. Para R^{-1} o ponto zero é um ponto fixo atrator. Usando o Teorema dos Pontos Fixos Atratores para R^{-1}, temos que existe uma única função analítica $F(z)$ definida para $|z|<r$ satisfazendo $F(0)=0$, $F'(0)=1$ e $(R^{-1}\circ F)(z)=(F\circ L)(z)$, onde $L(z)=\frac{1}{a}z$. Em termos de $R(z)$ temos $F(az)=R(F(z))$, ou seja, $R(z)$ é analiticamente equivalente à sua parte linear.

2.4 - PONTOS FIXOS RACIONALMENTE INDIFERENTES

$R:\overline{C} \to \overline{C}$ analítica.

$\xi \in \overline{C}$ é um ponto fixo racionalmente indiferente de R se $|R'(\xi)| = 1$ e $R'(\xi)$ é uma raiz da unidade, isto é, existe $m \in N$ tal que $[R'(\xi)]^m = 1$.

Descrever a dinâmica de R próximo a tais pontos é uma longa e difícil tarefa. Uma das razões é porque R não é localmente conjugada à sua derivada próximo de um ponto fixo racionalmente indiferente. Isto se torna bastante claro se nos recordarmos da prova do Teorema de Linearização para Pontos Fixos Atratores: no cálculo dos coeficientes da função temos o denominador $a^k - a$, onde $a = R'(\xi)$ e $k \in N$. Aqui encontraríamos $a^{m+1} - a = 0$ no denominador, o que torna a busca da função linear impossível.

Isto significa que temos que encontrar outro meio de descrever a dinâmica de R próximo de um ponto fixo racionalmente indiferente ξ, e a solução está em mostrar que R é conjugada a uma translação em certos conjuntos abertos que têm ξ na sua fronteira.

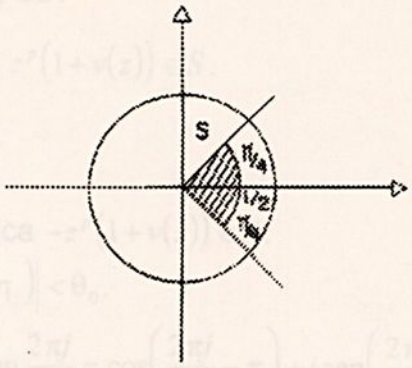
Começamos com um simples lema que isola a idéia mais básica deste capítulo:

LEMA: Suponha que f é analítica e satisfaz $f(z) = z - z^{p+1} + O(z^{p+2})$ em alguma vizinhança N da origem.
Sejam $w_1, \ldots w_p$ as p-ésimas raízes da unidade e $\eta_1, \ldots, \eta_p$ as p-ésimas raízes de -1.
Então para r_0 e θ_0 positivos e suficientemente pequenos:

a) $|f(z)| < |z|$ em cada setor
$S_j = \{z : 0 < |z/w_j| < r_0; |\arg(z/w_j)| < \theta_0\}$. (setor atrator)

b) $|f(z)| > |z|$ em cada setor
$\Sigma_j = \{z : 0 < |z/\eta_j| < r_0; |\arg(z/\eta_j)| < \theta_0\}$. (setor repulsor)

PROVA: Escrevamos $S = \{\xi : |\xi| < 1/2 ; |\arg \xi| < \pi/4\}$ e $\dfrac{f(z)}{z} = 1 - z^p(1+\nu(z))$, onde ν é analítica em N com $\nu(0) = 0$.



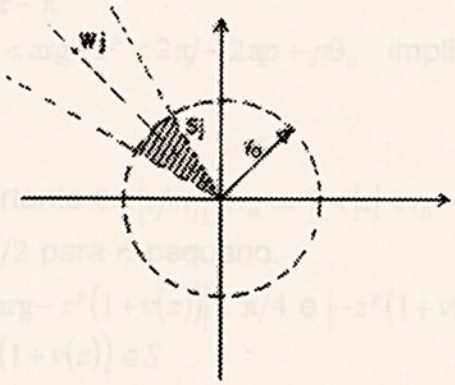
a) Mostremos que $z \in S_j$ implica $z^p(1+\nu(z)) \in S$:

$z \in S_j \Rightarrow 0 < |z/w_j| < r_0$ e $|\arg(z/w_j)| < \theta_0$

Seja $w_j = e^{\frac{2\pi i j}{p}}$.

$\arg(z/w_j) = \arg z - \arg w_j = \arg z - \dfrac{2\pi j}{p}$

$|\arg(z/w_j)| < \theta_0 \Rightarrow -\theta_0 < \arg z - \dfrac{2\pi j}{p} < \theta_0 \Rightarrow \dfrac{2\pi j}{p} - \theta_0 < \arg z < \dfrac{2\pi j}{p} + \theta_0$



$|z/w_j| = |z|$

Portanto, $0 < |z/w_j| < r_0$ implica $0 < |z| < r_0$.

Agora, $0 < |z| < r_0$ implica $0 < |z^p| < 1/2$ para r_0 pequeno.

$\arg z^p = p \arg z$

Então, $2\pi j - p\theta_0 < \arg z^p < 2\pi j + p\theta_0$ implica $|\arg z^p| < \pi/4$ para θ_0 pequeno.

Portanto, $z^p \in S$.

Como $\nu(0) = 0$, $|\arg(1+\nu(z))| < \varepsilon$ e

$\arg z^p(1+\nu(z)) = \arg z^p + \arg(1+\nu(z)) = \arg z^p + \varepsilon$

Portanto, $|\arg z^p(1+v(z))| < \pi/4$

$|z^p(1+v(z))| = |z^p + z^p v(z)| < 1/2$, pois $0 < |z^p| < 1/2$ e $v(0) = 0$.

Logo, $z \in S_j$ implica $z^p(1+v(z)) \in S$.

$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = |1 - z^p(1+v(z))| < 1$, pois $z^p(1+v(z)) \in S$.

Segue que $|f(z)| < |z|$ se $z \in S_j$.

b) Mostremos que $z \in \Sigma_j$ implica $-z^p(1+v(z)) \in S$:

$z \in \Sigma_j \Rightarrow 0 < |z/\eta_j| < r_0$ e $|\arg(z/\eta_j)| < \theta_0$.

Seja $\eta_j = -e^{\frac{2\pi ij}{p}} = -\cos\frac{2\pi j}{p} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi j}{p} = \cos\left(\frac{2\pi j}{p} - \pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi j}{p} - \pi\right)$

$\arg(z/\eta_j) = \arg z - \arg\eta_j = \arg z - \left(\frac{2\pi j}{p} - \pi\right)$

$|\arg(z/\eta_j)| < \theta_0 \Rightarrow -\theta_0 < \arg z - \left(\frac{2\pi j}{p} - \pi\right) < \theta_0 \Rightarrow \frac{2\pi j}{p} - \pi - \theta_0 < \arg z < \frac{2\pi j}{p} - \pi + \theta_0$

$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^p = \rho^p e^{ip\theta} = \rho^p(\cos p\theta + i\,\mathrm{sen}\,p\theta)$

$-z^p = \rho^p(\cos(\theta - \pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta - \pi)) = \rho^p e^{i(\theta-\pi)}$

Portanto, $\arg -z^p = \arg z - \pi$

Então $2\pi j - 2\pi p - p\theta_0 < \arg -z^p < 2\pi j - 2\pi p + p\theta_0$ implica $|\arg -z^p| < \pi/4$ para θ_0 pequeno.

Segue que $-z^p \in S$.

Também $|z/\eta_j| = |z|$, portanto $0 < |z/\eta_j| < r_0 \Rightarrow 0 < |z| < r_0$.

$0 < |z| < r_0 \Rightarrow 0 < |-z^p| < 1/2$ para r_0 pequeno.

Analogamente ao *a)*, $|\arg -z^p(1+v(z))| < \pi/4$ e $|-z^p(1+v(z))| < 1/2$.

Portanto, $z \in \Sigma_j \Rightarrow -z^p(1+v(z)) \in S$.

$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = |1 - z^p(1+v(z))| > 1$, pois $-z^p(1+v(z)) \in S$.

Logo, $|f(z)| > |z|$ se $z \in \Sigma_j$.

Veremos a seguir um exemplo que contém as idéias principais da teoria geral.

EXEMPLO: O polinônio $P(z)=z-z^2$ tem um ponto fixo racionalmente indiferente na origem.

Se $0<x<1$, então , $0<P(x)<x$, e então $P^n(x)\to 0$ (pois $P^n(x)$ só pode convergir para um ponto fixo de P). Se $x<0$, então $P(x)<x<0$, e então $P^n(x)\to\infty$.

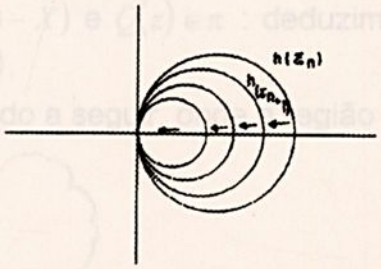
Estas observações são coerentes com o Lema anterior, e agora investigaremos o comportamento de $P^n(z)$ para todo z próximo da origem.

Seja $h(z)=1/z$ e substitua P por sua conjugada $Q=h\circ P\circ h^{-1}$, ou seja, $Q(z)=z+1+\dfrac{1}{z-1}$.

Agora note que se $\mathrm{Re}(z)>1$, então $\mathrm{Re}\left((z-1)^{-1}\right)>0$. Logo, $\mathrm{Re}(Q(z))\geq \mathrm{Re}(z)+1$.

Em particular, se $t>1$, então Q aplica $\{x+iy: x>t\}$ em $\{x+iy: x>t+1\}$, e reescrevendo isto em termos de P, vemos que $P^n\to 0$ uniformemente em cada disco $\{z:|z-r|<r\}$ suficientemente pequeno.

P age como ilustrado abaixo:



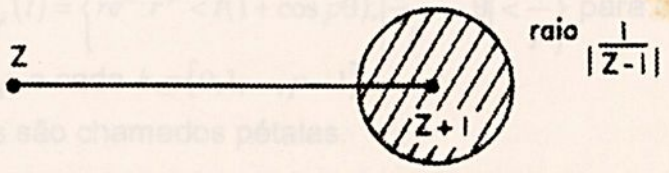
Devido à forma particularmente simples de Q, podemos dizer mais que isto:

Suponha que π seja qualquer região disjunta de $\{|z|\leq 3\}$, e que é aplicada nela mesma por Q.

Então, em π, $\mathrm{Re}(Q(z))\geq \mathrm{Re}(z)+1-\dfrac{1}{|z-1|}\geq \mathrm{Re}(z)+\dfrac{1}{2}$, então $\mathrm{Re}(Q^n(z))\geq \mathrm{Re}(z)+\dfrac{n}{2}$ e $Q^n\to\infty$ em π.

Uma possibilidade para π é o semi-plano $\{\mathrm{Re}(z)>3\}$, mas é fácil encontrar uma região maior que esta.

$Q(z)$ está no disco ilustrado abaixo, e se $z\in\pi$, o raio $r(z)$ do disco é no máximo $1/2$.



Além disso, $r(z) \to 0$ quando $z \to \infty$, e isto sugere que podemos tomar π limitada por alguma parábola.

Seja $\pi = \{x+iy : y^2 > 12(3-x)\}$.

A fronteira de π é uma parábola que corta o eixo x quando $x = 3$, e é fácil ver que π é disjunta de $\{|z| \le 3\}$.

Escrevendo $z = x+iy$, $Q(z) = X+iY$, $\dfrac{1}{z-1} = a+ib$, temos $X = x+1+a$, $Y = y+b$, e então para $z \in \pi$,

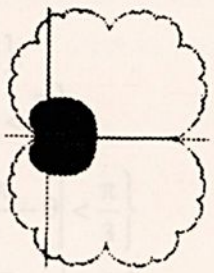
$$\begin{aligned} Y^2 - 12(3-X) &= (y+b)^2 - 12(3-(x+1+a)) = \\ &= y^2 - 12(3-x) + b^2 + 2by + 12(1+a) \\ &\ge 12 - 2|by| - 12|a| \end{aligned}$$

Contudo, como $|z| \ge 3$, temos

$$|a| \le |a+ib| \le \frac{1}{|z|-1} < \frac{1}{2} \text{ e } |yb| \le \frac{|z|}{|z|-1} < \frac{3}{2}.$$

Segue que se $z \in \pi$, então $Y^2 > 12(3-X)$ e $Q(z) \in \pi$: deduzimos que Q aplica π nela mesma e então $P^n \to 0$ em $h(\pi)$.

O conjunto de Julia de P está ilustrado a seguir, onde a região negra é $h(\pi)$.



Para analisar a situação para um ponto fixo racionalmente indiferente qualquer precisamos da noção de pétalas (que grosseiramente falando desempenham o papel da região $h(\pi)$ no exemplo acima).

DEFINIÇÃO: $\pi_k(t) = \left\{ re^{i\theta} : r^p < t(1+\cos p\theta); \left| \frac{2k\pi}{p} - \theta \right| < \frac{\pi}{p} \right\}$ para cada t positivo, cada inteiro positivo p e cada $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$.

Estes conjuntos são chamados pétalas.

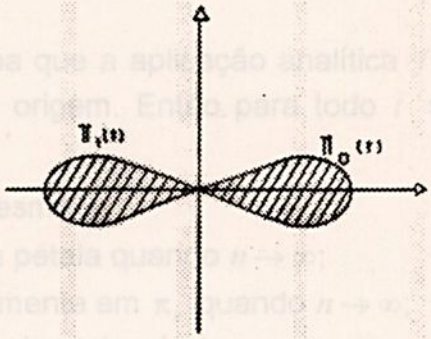
As pétalas são duas a duas disjuntas, e cada uma forma um ângulo de $2\pi/p$ com a origem.

Chamamos a linha de simetria de $\pi_k(t)$ (o raio $\theta = 2k\pi/p$) de eixo de π_k.

EXEMPLOS: 1) Seja $p = 2$. Então $k \in \{0,1\}$.

$$\pi_0(t) = \left\{ re^{i\theta} : r^2 < t(1+\cos 2\theta);\ |\theta| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\pi_1(t) = \left\{ re^{i\theta} : r^2 < t(1+\cos 2\theta);\ |\pi - \theta| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

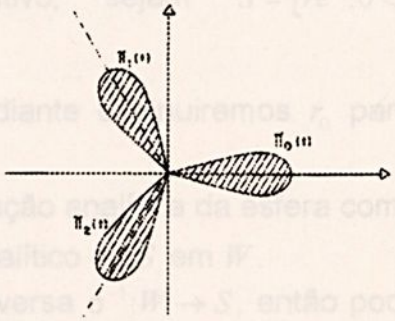


2) Seja $p = 3$. Então $k \in \{0,1,2\}$.

$$\pi_0(t) = \left\{ re^{i\theta} : r^3 < t(1+\cos 3\theta);\ |\theta| < \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\pi_1(t) = \left\{ re^{i\theta} : r^3 < t(1+\cos 3\theta);\ \left|\frac{2\pi}{3} - \theta\right| < \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\pi_2(t) = \left\{ re^{i\theta} : r^3 < t(1+\cos 3\theta);\ \left|\frac{4\pi}{3} - \theta\right| < \frac{\pi}{3} \right\}$$



Temos agora o Teorema das Pétalas, onde descreveremos a dinâmica de R nas pétalas para um ponto fixo ξ, onde $R'(\xi) = 1$.

Por conjugação podemos supor que $\xi = 0$, e que R tem expansão de Taylor na forma $R(z) = z(1 - z^p + bz^{2p} + cz^{2p+1} + \ldots)$, pois veremos adiante que toda função analítica $g(z) = z + az^{p+1} + O(z^{p+2}), a \neq 0$, é conjugada, próximo da origem, a uma função na forma de R.

Podemos sempre garantir que z^{p+1} tem coeficiente -1 simplesmente conjugando R com uma aplicação da forma $z \mapsto \alpha z$: assim, a parte significante desta suposição é de que não existem termos entre z^{p+1} e z^{2p+1} na série de Taylor para R.

TEOREMA DAS PÉTALAS: Suponha que a aplicação analítica f tem expansão de Taylor $f(z) = z - z^{p+1} + O(z^{2p+1})$ na origem. Então para todo t suficientemente pequeno, temos:

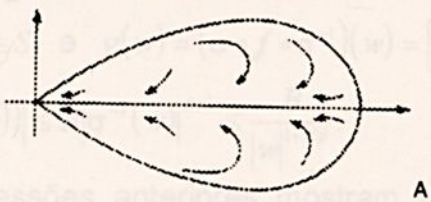
a) f aplica cada pétala $\pi_k(t)$ nela mesma;

b) $f^n(z) \to 0$ uniformemente em cada pétala quando $n \to \infty$;

c) $\arg f^n(z) \to 2k\pi/p$ local e uniformemente em π_k quando $n \to \infty$;

d) $|f(z)| < |z|$ numa vizinhança do eixo de cada pétala;

e) $f : \pi_k(t) \to \pi_k(t)$ é conjugada a uma translação.



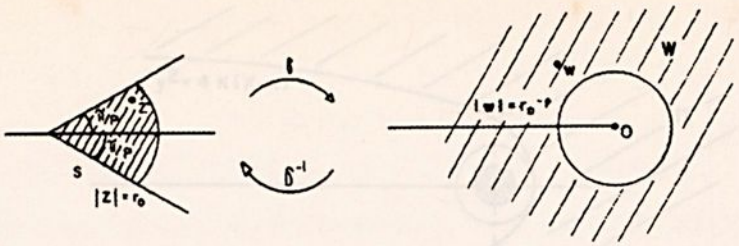
A dinâmica em uma pétala

PROVA: Para cada r_0 positivo, sejam $S = \{re^{i\theta} : 0 < r < r_0; |\theta| < \pi/p\}$ e $W = \{re^{i\theta} : r > 1/r_0^{\,p}; |\theta| < \pi\}$.

Assumiremos que $r_0 < 1$ e mais adiante diminuiremos r_0 para satisfazer várias outras condições.

A aplicação $\sigma : z \mapsto 1/z^p$ é uma aplicação analítica da esfera complexa nela mesma, e é também um homeomorfismo analítico de S em W.

Segue que existe uma aplicação inversa $\sigma^{-1} : W \to S$, então podemos definir g em W por $g(z) = (\sigma \circ f \circ \sigma^{-1})(z) = \left[f\left(z^{-1/p}\right)\right]^{-p}$.



Este procedimento simplesmente substitui a ação de f em S pela ação de g em W, e estas aplicações agem de acordo com o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\sigma^{-1}} & W \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ \overline{C} & \xrightarrow{\sigma} & \overline{C} \end{array}$$

A primeira providência é transformar os coeficientes de f nos coeficientes de g.

Um cálculo dá a expansão de Laurent de $[f(z)]^{-p}$ como

$$\frac{1}{[f(z)]^p} = z^{-p} + p + Az^p + v(z)$$

onde A é alguma constante, v é analítica e satisfaz $|v(z)| \le B|z|^{p+1}, B > 0$, em alguma vizinhança η da origem.

Como r_0 é pequeno, então $S \subset \eta$.

Suponhamos agora $w \in W$.

Então $\sigma^{-1}(w) \in S$ e $g(w) = (\sigma \circ f \circ \sigma^{-1})(w) = [f(\sigma^{-1}(w))]^{-p} = w + p + \frac{A}{w} + \theta(w)$, onde

$$|\theta(w)| = |v(\sigma^{-1}(w))| \le B|\sigma^{-1}(w)|^{p+1} \le \frac{B}{|w|^{1+1/p}}.$$

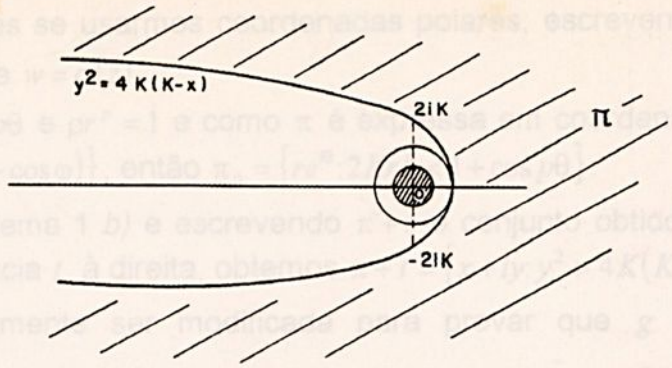
As duas expressões anteriores mostram que se $|w|$ é grande, então g age aproximadamente como a translação $w \mapsto w + p$, e é fácil ver que se α é suficientemente grande, g aplica o semi-plano $\{w: \mathrm{Re}(w) \ge \alpha\}$ nele mesmo.

Agora mostraremos que podemos substituir o semi-plano pela região π, que é limitada à esquerda por uma parábola γ.

Escolhamos qualquer K satisfazendo $K > máx\left\{\frac{1}{r_0^p}, 3(|A| + B)\right\} > 1$ (pois $r_0 < 1$) e seja

$\pi = \{x + iy: y^2 > 4K(K - x)\}$.

Então π é limitada por uma parábola, e $\pi \subset W$.



LEMA 1: *a)* π é invariante por g;

b) $\mathrm{Re}\left(g^n(w)\right) \to +\infty$ uniformemente em π;

c) $g: \pi \to \pi$ é conjugada a uma translação.

PROVA: Escrevemos $w = x+iy$, $g(w) = X+iY$ e $\frac{A}{w}+\theta(w) = a+ib$.

Então, de $g(w) = w+p+\frac{A}{w}+\theta(w)$, temos $X = x+p+a$, e $Y = y+b$, e então, se $w \in \pi$, precisamos saber se $g(w) \in \pi$:

$$Y^2 - 4K(K-X) = (y+b)^2 - 4K\left(K-(x+p+a)\right) =$$
$$= \left[y^2 - 4K(K-x)\right] + b^2 + 2yb + 4K(a+p)$$
$$\geq 4Kp - \left(2|yb| + 4K|a|\right)$$

(*)

Supondo $w \in \pi$, temos $|w| > K > 1$, e isto com $|\theta(w)| \leq \frac{B}{|w|^{1+1/p}}$,

$K > máx\left\{\frac{1}{r_0^p}, 3\left(|A|+B\right)\right\} > 1$ e $\frac{A}{w}+\theta(w) = a+ib$, obtemos

$2|yb| + 4K|a| \leq 6|w||a+ib| \leq 6\left(|A|+B\right) < 2K < 4Kp$.

Usando isto em (*) encontramos que $Y^2 - 4K(K-X) > 0$;

então $g(w) \in \pi$, e isto verifica a parte *a)* do Lema 1.

Para estabelecer o Teorema das Pétalas *a)*, tomamos $\pi_0 = \sigma^{-1}(\pi)$.

$g = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$

$f(\pi_0) = f\left(\sigma^{-1}(\pi)\right) = \sigma^{-1}\left(g(\pi)\right) \subset \sigma^{-1}(\pi) = \pi_0$

Portanto $f(\pi_0) \subset \pi_0$.

Para mostrar que π_0 é uma pétala para um t conveniente é preciso mostrar que σ^{-1} aplica a parábola na fronteira de uma pétala.

Isto é mais simples se usarmos coordenadas polares, escrevendo $z = re^{i\theta} (\in S)$ e $w = \rho e^{i\varphi} (\in W)$, onde $w = \sigma(z)$.

Vemos que $\varphi = -p\theta$ e $\rho r^p = 1$ e como π é expressa em coordenadas polares por $\pi = \{\rho e^{i\varphi} : 2K < \rho(1+\cos\varphi)\}$, então $\pi_0 = \{re^{i\theta} : 2Kr^p < 1+\cos p\theta\}$.

Considerando o Lema 1 *b)* e escrevendo $\pi + t$ o conjunto obtido pela translação de π a uma distância t à direita, obtemos $\pi + t = \{x+iy : y^2 > 4K(K+t-x)\}$, a prova de *a)* pode facilmente ser modificada para provar que g aplica $\pi + t$ em $\pi + (t + p/2)$:

Quando $z \in \pi + t$, podemos imitar a prova de (*) e obter

$$Y^2 - 4K\left(K + t + \frac{p}{2} - X\right) > 2Kp - \left(2|yb| + 4K|a|\right) > 0,$$

e isto mostra que $g(\pi + t) \subset \pi + (t + p/2)$.

Agora segue que se $z \in \pi$, então $g^n(z) \in \pi + \frac{np}{2}$, e como conseqüência disto, $|g^n(z)| > \sqrt{n}$ em π, pois (geometricamente) $\pi + \frac{np}{2}$ é disjunta do disco $\{|z| \le \sqrt{n}\}$, ou (analiticamente) $X^2 + Y^2 > X^2 + 4K\left(K + \frac{np}{2} - X\right) = (X - 2K)^2 + 2npK > n$.

Isto prova o Lema 1 *b)* e o Teorema das Pétalas *b)* quando $k = 0$ (virtualmente a mesma prova temos para as outra pétalas, mas omitiremos os detalhes).

Vamos à prova do Teorema das Pétalas *c)*:

$g(w) = w + p + \frac{A}{w} + \theta(w)$, onde $|\theta(w)| \le \frac{B}{|w|^{1+1/p}}$ sugere como uma primeira aproximação $g^n(w) = w + np$, mas precisamos de uma estimativa mais apurada da natureza assintótica de $g^n(w)$ quando $n \to \infty$.

$g^{k+1}(w) = g(g^k(w)) = g^k(w) + p + \frac{A}{g^k(w)} + \theta(g^k(w))$, e após repetidos usos disto,

$$g^n(w) = w + np + A\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{g^k(w)}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \theta(g^k(w)) \qquad (**)$$

Agora tomaremos qualquer subconjunto compacto Q de π e usaremos $C_1, C_2, \ldots$ para denotar números positivos que dependem somente de Q.

Por brevidade, implicitamente assumiremos que em qualquer expressão envolvendo os C_j's, o ponto w está necessariamente em Q.

Por exemplo, se $w \in \pi$, então $\left|\frac{A}{w}+\theta(w)\right| \le \frac{|A|+B}{|w|} \le \frac{|A|+B}{K} < \frac{1}{3}$, então

$\mathrm{Re}\big(g(w)\big) = \mathrm{Re}(w) + p - \left|\frac{A}{w}+\theta(w)\right| > \mathrm{Re}(w) + \frac{p}{2}$.

Disto obtemos $\mathrm{Re}\big(g^n(w)\big) > \mathrm{Re}(w) + \frac{np}{2}$ e então para todo n suficientemente grande, $\left|g^n(w)\right| \ge C_1 n$ (***)

Agora isto com $|\theta(w)| \le \frac{B}{|w|^{1+1/p}}$ mostra que para todo n,

$$\left|\theta\big(g^n(w)\big)\right| \le \frac{B}{\left|g^n(w)\right|^{1+1/p}} \le \frac{C_2}{n^{1+1/p}} \qquad (****)$$

e, finalmente, de (**), (***), e de (****),

$\left|g^n(w) - np\right| \le C_4 \log n$.

Esta desigualdade controla a "queda vertical" de $g^n(z)$ quando $n \to \infty$, e é evidente disto que $\arg\big(g^n(w)\big) \to 0$ local e uniformemente em π quando $n \to \infty$.

Como $g \circ \sigma = \sigma \circ f$, temos $g^n \circ \sigma = \sigma \circ f^n$, e então, se $w = \sigma(z)$, então

$g^n(w)\big[f^n(z)\big]^p = 1$, e isto dá $\arg\big(f^n(z)\big) = -\frac{1}{p}\arg\big(g^n(w)\big) \to 0$ em $\pi_0(t)$.

Isto completa a prova do Teorema das Pétalas *c)*.

O Teorema das Pétalas *d)* é uma conseqüência direta do Lema inicial.

Resta provar o Lema 1 *c)* (pois o Teorema das Pétalas *e)* segue imediatamente disto), e para isto continuamos a examinar a natureza assintótica de $g^n(z)$.

De modo grosseiro substituiremos $g^k(w)$ por kp em (**) (para $k \ge 1$) e obtemos $g^n(w) = w + np + \left(\frac{A}{p}\right)\log n + O(1)$, e em vista disto definimos funções u_n por

$g^n(w) = np + \left(\frac{A}{p}\right)\log n + u_n(w)$, e provamos o

LEMA 2: u_n converge local e uniformemente em π para alguma função u que é holomorfa e univalente em π.

Aceitando isto temos

$(n+1)p + \left(\frac{A}{p}\right)\log(n+1) + u_{n+1}(w) = g^{n+1}(w) = g^n\big(g(w)\big) = np + \left(\frac{A}{p}\right)\log n + u_n\big(g(w)\big)$,

e após simplificação e fazendo $n \to \infty$, obtemos $u(w) + p = u\big(g(w)\big)$.

Como f é injetora próximo da origem, g é injetora em π (se k escolhido é bastante grande); então g^n e u_n também são injetoras.

O Teorema de Hurwitz agora implica que u é injetora ou constante, e é claramente não constante, pois na equação acima podemos tomar $p \neq 0$.

Isto mostra que a restrição de g a π é conjugada à aplicação $z \mapsto z + p$ de $u(\pi)$ nele mesmo, argumento para provar o Lema 2, e temos completada a prova do Lema 1 e do Teorema das Pétalas.

PROVA DO LEMA 2: De $g^n(w) = np + \left(\frac{A}{p}\right)\log n + u_n(w)$, temos

$u_{n+1}(w) - u_n(w) = \left[g^{n+1}(w) - g^n(w)\right] - p - \left(\frac{A}{p}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, o qual com

$g^{k+1}(w) = g^k(w) + p + \frac{A}{g^k(w)} + \theta\left(g^k(w)\right)$ dá

$$u_{n+1}(w) - u_n(w) = \frac{A}{g^n(w)} + \theta\left(g^n(w)\right) - \left(\frac{A}{p}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= A\left[\frac{1}{g^n(w)} - \frac{1}{np}\right] + \theta\left(g^n(w)\right) + \frac{A}{p}\left[\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right].$$

A prova assim se reduz a mostrar que cada uma das séries $\sum_n \left|\frac{1}{g^n(w)} - \frac{1}{np}\right|$, $\sum_n \left|\theta\left(g^n(w)\right)\right|$ e $\sum_n \left|\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right|$ converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto Q de π.

A convergência da segunda série é uma conseqüência direta de $\left|\theta\left(g^n(w)\right)\right| \leq \frac{C_2}{n^{1+1/p}}$, e a convergência da terceira série é simples, pois uma aplicação do Teorema do Valor Médio para $x \mapsto x - \log(1+x)$ em $[0, 1/n)$ mostra que $\left|\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Finalmente, de $\left|g^n(w) - np\right| \leq C_4 \log n$ com $\left|g^n(w)\right| \geq C_1 n$, temos $\left|\frac{1}{g^n(w)} - \frac{1}{np}\right| \leq \frac{C_5}{n^2}\log n$.

Assim, está dada a convergência da primeira série, e então completada a prova do Lema 2 e, é claro, do Teorema das Pétalas.

Precisamos provar um resultado correspondente ao Teorema das Pétalas para funções f que satisfazem $f(0)=0,\ f'(0)=1$, mas não à condição do Teorema das Pétalas.

TEOREMA: Seja f analítica em 0 com $f(z)=z+az^{p+1}+O(z^{p+2}), a\neq 0$.
Então f é conjugada, próximo do zero, à função $F(z)=z-z^{p+1}+O(z^{2p+1})$.

PROVA: Por conjugação com uma aplicação conveniente $z\mapsto \lambda z$ podemos supor $a=1$.
A prova segue por indução com um número finito de passos, partindo da função f e conjugando-a com $f_1, f_2, \ldots$, até que a série de Taylor tenha a forma desejada.
Suponha que temos alcançado um estágio onde $f_k(z)=z+z^{p+1}+bz^{p+r+1}+\ldots,\ b\neq 0$ e $1\leq r$.
Se $r\geq p$, a conclusão desejada se verifica.
Então podemos supor $1\leq r<p$.
Definamos $g(z)=z+\beta z^{r+1}$, onde $\beta=\dfrac{b}{p-r}$, e conjugando f_k com g obtemos a função $f_{k+1}=g\circ f_k\circ g^{-1}$.
Podemos notar que f_{k+1} e f_k têm o mesmo número de pontos fixos na origem, assim f_{k+1} deve ser dada por $f_{k+1}(z)=z+\sum_{m=p+1}^{\infty}A_m z^m$.
Usaremos o fato de que $f_{k+1}\circ g=g\circ f_k$ e expressaremos ambos os lados como série de potência, trabalhando no módulo adição de funções que têm um zero de ordem pelo menos $p+r+2$ na origem (alternativamente, adicionando a $O(z^{p+r+2})$ no fim de toda linha).
Com esta convenção temos

$$g(f_k(z))=(z+z^{p+1}+bz^{p+r+1}+\ldots)+\beta(z+z^{p+1}+\ldots)^{r+1}=$$
$$=z+\beta z^{r+1}+z^{p+1}+[b+\beta(1+r)]z^{p+r+1}+\ldots, \text{ e}$$
$$f_{k+1}(g(z))=(z+\beta z^{r+1})+\sum_{m=p+1}^{\infty}A_m(z+\beta z^{r+1})^m$$

Sempre trabalhando com funções de ordem $p+r+2$ na origem, temos

$$z^{p+1}+\beta(1+p)z^{p+r+1}=\sum_{m=p+1}^{\infty}A_m(z+\beta z^{r+1})^m=A_{p+1}z^{p+1}+\ldots+A_{p+r+1}z^{p+r+1}+A_{p+1}\beta(p+1)z^{p+r+1},$$

e disto vemos que $A_{p+1}=1$, $A_{p+2}=\ldots=A_{p+r}=A_{p+r+1}=0$.
Segue que f_k é conjugada, próximo do zero, com $f_{k+1}(z)=z+z^{p+1}+O\left(z^{p+r+2}\right)$, e este é o passo indutivo geral.
Pode ser que a série de f_{k+1} seja um polinômio de grau menor que $2p+2$, e se isto acontece a prova está completa.
Por outro lado, o argumento dado acima permanece válido quando $r<p$, e então será válido se incluirmos o caso $r=p-1$, quando $p+r+2=2p+1$.
Deduzimos que f é conjugada a alguma aplicação $z\mapsto z+z^{p+1}+O\left(z^{2p+1}\right)$, que é conjugada (pela aplicação $z\mapsto \lambda z$) a uma função na forma da F.

Com este Teorema disponível, a existência de pétalas para aplicações analíticas da forma $f(z)=z+az^{p+1}+\ldots$ segue imediatamente.

2.5 - PONTOS FIXOS IRRACIONALMENTE INDIFERENTES

$R: \overline{C} \to \overline{C}$ analítica.

$R(0) = 0$ e $R'(0) = a$, onde $|a| = 1$ e a não é raiz da unidade.

TEOREMA: Sempre se pode encontrar uma mudança formal de coordenadas que transforma $R(z)$ em $z \mapsto az$, bastando para isto resolver formalmente a equação $F(az) = R(F(z))$, com $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$.

PROVA: Provemos a existência de F indutivamente:

Tomemos $R(z) = az + \sum_{l=2}^{\infty} a_l z^l$ e $F(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l z^l$ numa vizinhança do zero.

Então $F(az) = az + \sum_{l=2}^{\infty} c_l (az)^l = az + \sum_{l=2}^{\infty} c_l a^l z^l$ e

$$R(F(z)) = aF(z) + \sum_{l=2}^{\infty} a_l (F(z))^l$$

Temos a equação $\sum_{l=2}^{\infty} (a^l - a) c^l z^l = \sum_{l=2}^{\infty} a_l (F(z))^l$.

Suponhamos conhecidos os coeficientes do desenvolvimento em série de potência de $F(z)$ até ordem $n-1$.

Comparando os termos em z^n nos dois membros temos que $c_n = \dfrac{R_n(c_2, \ldots, c_{n-1})}{a^n - a}$, onde R_n é uma expressão algébrica envolvendo $c_2, \ldots, c_{n-1}$ e os coeficientes da expansão de $R(z)$ em série de potência até ordem n.

A seqüência $a^n - a$ possui $0 \in C$ como ponto de acumulação, de modo que $\sum_{l=2}^{\infty} c_l z^l$ pode não convergir.

O Teorema seguinte se deve a Siegel e Moser (não será provado), e dá uma condição bastante ampla para a convergência:

TEOREMA: Suponha que existem b e c constantes positivas tais que $\left| a - \dfrac{p}{q} \right| > \dfrac{b}{q^c}$ para todo $p, q \in \boldsymbol{Z}$. Então $R(z)$ é linearizável.

CAPÍTULO 3

OS CONJUNTOS DE FATOU E JULIA

Para uma aplicação racional, a esfera de Riemann se divide em dois conjuntos invariantes: Fatou e Julia. As iteradas são estáveis no conjunto de Fatou, ao passo que sua ação no conjunto de Julia é caótica. Em geral, a geometria do conjunto de Julia é linda, delicada e extremamente complicada.

3.1 - PROPRIEDADES E EXEMPLOS

(X,d): espaço métrico.

$\mathcal{F}$: família de aplicações de X em X.

DEFINIÇÃO: $\mathcal{F}$ é equicontínua em X se, dado $\varepsilon>0$, existe um $\delta>0$ tal que $d(x_1,x_2)<\delta$ implica $d\big(f_n(x_1),f_n(x_2)\big)<\varepsilon$ para todo n e todo $x_1,x_2\in X$.

DEFINIÇÃO: $U\underset{ab}{\subset}\overline{C}$ e $\{f_n\}$: família de funções meromorfas definidas em U com valores em $\overline{C}$. $\{f_n\}$ é uma família normal se toda seqüência (f_n) contém uma subseqüência (f_{nj}) que converge uniformemente em subconjuntos compactos de U.

TEOREMA (Arzela-Ascoli):

$\mathcal{F}=\{f_n:U\to\overline{C}\}$: família de funções meromorfas é uma família normal se e somente se é uma família equicontínua em subconjuntos compactos de U.

Famílias normais têm valores que não se distanciam após iterações.

DEFINIÇÃO: $R:\overline{C}\to\overline{C}$: função racional não constante. O conjunto de Fatou de R, $F(R)$, é o subconjunto aberto maximal de $\overline{C}$ no qual $\{R_n\}$ é equicontínua. O conjunto de Julia de R, $J(R)$, é o seu complementar em $\overline{C}$.

A existência desse subconjunto aberto maximal é garantida pelo Teorema seguinte:

TEOREMA: $\mathcal{F}=\{f:(X,d)\to(X_1,d_1)\}$: família de aplicações. Então existe um subconjunto aberto maximal de X no qual $\mathcal{F}$ é equicontínua. Em particular, se $f\in\mathcal{F}$ aplica (X,d) nele mesmo, então existe um subconjunto aberto maximal de X no qual a família de iteradas $\{f_n\}$ é equicontínua.

Note que, por definição, $F(R)$ é aberto e $J(R)$ é compacto.

DEFINIÇÃO: Seja $R:\overline{C}\to\overline{C}$ uma aplicação. $E\subset\overline{C}$ é completamente invariante se $R^{-1}(E)=E=R(E)$.

Se R for sobrejetora, para mostrar que E é completamente invariante é suficiente mostrar que $R^{-1}(E)=E$, pois $R\left(R^{-1}(E)\right)=R(E)=E$.

PROPOSIÇÃO: Se $R:\overline{C}\to\overline{C}$ é uma aplicação racional não constante, então R é sobrejetora.

PROVA: Como R é não constante, então R é aberta, pois é analítica.
Daí $R(\overline{C})$ é um aberto de $\overline{C}$.
Também $R(\overline{C})$ é compacto, pois $\overline{C}$ é compacto e R é contínua.
Portanto $\overline{C}-R(\overline{C})$ é aberto em $\overline{C}$.
Temos dois conjuntos abertos e disjuntos cuja união é $\overline{C}$.
$\overline{C}=R(\overline{C})\cup\left(\overline{C}-R(\overline{C})\right)$
Como $\overline{C}$ é conexo, um destes abertos é vazio.
Como $R(\overline{C})\neq\varnothing$, temos que $\overline{C}-R(\overline{C})=\varnothing$, ou seja, $R(\overline{C})=\overline{C}$.

Portanto R é sobrejetora.

TEOREMA: Seja $R:\overline{C}\to\overline{C}$ uma aplicação racional não constante. Então o conjunto de Fatou e o conjunto de Julia são completamente invariantes por R.

PROVA: Provando que $F(R)$ é completamente invariante, já temos o resultado.
Como R é sobrejetora, é preciso provar somente que $R^{-1}(E)=E$.
Sejam $z_0\in R^{-1}(F)$ e $w_0=R(z_0)$.
$w_0\in F$. Segue que, dados $\varepsilon>0$, $w\in F$, existe $\delta>0$ tal que se $d(w,w_0)<\delta$, então para todo n, $d\left(R^n(w),R^n(w_0)\right)<\varepsilon$, pela normalidade "dentro" de F.
Por continuidade, existe $\rho>0$ tal que, se $d(z,z_0)<\rho$, então $d\left(R(z),w_0\right)<\delta$, e então $d\left(R^{n+1}(z),R^{n+1}(z_0)\right)<\varepsilon$.
Isto mostra que $\left\{R^{n+1}:n\geq 1\right\}$ é equicontínua em z_0 e, claramente, a adição de uma função R não destrói este fato. Assim, $\left\{R^n:n\geq 1\right\}$ é equicontínua em z_0, e então, em $R^{-1}(F)$.
Como $R^{-1}(F)$ é aberto (F é aberto e R é contínua), deduzimos que $R^{-1}(F)\subset F$.
Para provar a inclusão oposta, sejam $z_0\in F$, e $w_0=R(z_0)$.
Como $z_0\in F$, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para todo n, se $d(z,z_0)<\delta$, então $d\left(R^{n+1}(z),R^{n+1}(z_0)\right)<\varepsilon$.
O conjunto dos z satisfazendo $d(z,z_0)<\delta$ é uma vizinhança N de z_0 e então $R(N)$ é uma vizinhança aberta de w_0, pois R é aberta.
Se $w\in R(N)$, então $w=R(z)$ para algum $z\in N$, e então,
$d\left(R^n(w),R^n(w_0)\right)=d\left(R^{n+1}(z),R^{n+1}(z_0)\right)<\varepsilon$.
Isto mostra que $w_0\in F$, então $F\subset R^{-1}(F)$.
Portanto $R^{-1}(F)=F$ e F é completamente invariante.

TEOREMA: O conjunto de Julia é não vazio.

PROVA: Suponhamos $J(R)=\varnothing$.
Então $F(R)=\overline{C}$ e, portanto, (R^n) converge uniformemente (na métrica esférica) para uma aplicação meromorfa S.

Assim, ∂R^n tende ao mesmo tempo para o grau de S e para o infinito.
Mas ∂S é finito.
Portanto $J(R) \neq \varnothing$.

Apresentamos agora o Teorema de Montel, que é fundamental para provar que o conjunto de Julia é o fecho dos pontos periódicos repulsores. Também o usaremos para provar que $J(R)$ é um conjunto perfeito, portanto incontável.

TEOREMA DE MONTEL:

$\mathcal{F}$: família de funções meromorfas definidas num domínio U. Suponha que existem $a,b,c \in \overline{C}$ tais que $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(U) \cap \{a,b,c\} = \varnothing$. Então $\mathcal{F}$ é uma família normal em U.

COROLÁRIO: Seja $z \in J(R)$. Se U é uma vizinhança de z, então o conjunto $E_U = \overline{C} - \bigcup_{n>0} R^n(U)$ contém no máximo dois pontos. Tais pontos são chamados pontos excepcionais.

PROVA: Suponhamos que existe U tal que $\#E_U \geq 3$. Pelo Teorema de Montel, $\{R^n|U\}$ é normal, e portanto, $z \in F(R)$, o que é uma contradição.

PROPOSIÇÃO: Se $O^+(z_0)$ for uma órbita periódica (super)atratora, então $O^+(z_0) \subset F(R)$, e se $O^+(z_0)$ for repulsora, então $O^+(z_0) \subset J(R)$.

PROVA: Seja n tal que $R^n(z_0) = z_0$. Suponhamos $\left|(R^n)'(z_0)\right| = \lambda < 1$.

Se mostrarmos que existe D, disco aberto contendo z_0 tal que $R^n\left(\bar{D}\right) \subseteq \bar{D}$, então $\bigcup_k (R^n)^k\left(\bar{D}\right) \subseteq D$.

Como $\left|\left(R^n\right)'(z_0)\right| = \lambda < 1$, temos que existem $\lambda < \lambda_0 < 1$ e $r > 0$ tais que $\left|R^n(z) - R^n(z_0)\right| < \lambda_0 |z - z_0| < \lambda_0 r < r$, desde que $|z - z_0| < r$, pelo Teorema da Desigualdade do Valor Médio, ou seja, $R^n : D(z_0, r) \to D(z_0, r)$.

Agora suponhamos $z \in J(R) \cap D(z_0, r)$:

Então $\bigcup_k \left(R^n\right)^k (D)$ cobre $\overline{C}$ menos dois pontos e temos uma contradição, pois $R^n : D(z_0, r) \to D(z_0, r)$.

Agora suponhamos $\left|\left(R^n\right)'(z_0)\right| > 1$ e $z_0 \in F$.

Então existe uma vizinhança U de z_0 onde $\{R^n | U\}$ é normal.

Tomemos $z \in U$.

Como $\{R^n | U\}$ é normal, $\left|R^n(z) - R^n(z_0)\right| < \varepsilon$ para todo n e todo $z, z_0 \in U$.

PROPOSIÇÃO: Se $\operatorname{int}(J(R)) \neq \varnothing$, então $J(R) = \overline{C}$.

PROVA: Seja U um domínio contido no interior de $J(R)$.

Já que $J(R)$ é invariante, temos $J(R) \supset \bigcup_{n \geq 0} R^n(U) = \overline{C} - E$. ($E$ é o conjunto dos pontos excepcionais).

Além disso, $J(R)$ é fechado e E contém no máximo dois pontos.

Logo $J(R) = \overline{C}$.

EXEMPLO DE LATTÈS:

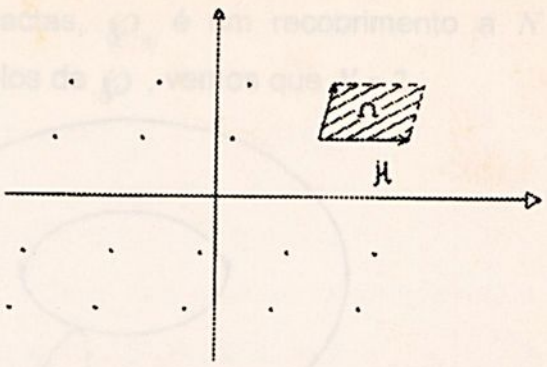
Nosso objetivo é mostrar que para a aplicação racional

$$z \mapsto \frac{\left(z^2 + 1\right)^2}{4z\left(z^2 - 1\right)}$$

o conjunto de Julia é toda a esfera complexa: este exemplo foi dado por Lattès em 1918.

Sejam $\lambda, \mu \in C$ tais que $\lambda / \mu \notin \boldsymbol{R}$ e Λ o reticulado correspondente, isto é, $\Lambda = \{m\lambda + n\mu : m, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

Um paralelogramo de período para Λ é qualquer paralelogramo fechado da forma $\Omega = \{z + s\lambda + t\mu : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$.



Uma função não constante f é uma função elíptica para Λ se é meromorfa em C, e se cada $w \in \Lambda$ é um período de f, isto é, $f(z+w) = f(z), \forall z \in \overline{C}$.

Também $f(C) = \overline{C}$, pois como f é elíptica, f tem pelo menos um pólo z_0. De fato:

Fixemos $w_0 \in C$ e definamos $g: C \to \overline{C}$ por

$$g(z) = \begin{cases} 0 & se \quad z \quad é \quad pólo \quad de \quad f \\ 1/(f(z) - w_0) & se \quad z \quad não \quad é \quad pólo \quad de \quad f \end{cases}$$

g é elíptica, portanto g possui um pólo z_1.

Como $f(z_1) = w_0$, $f(C) = \overline{C}$.

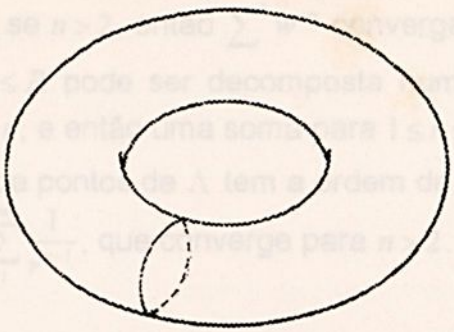
Nosso argumento está baseado nas propriedades da função elíptica de Weirstrass, $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum^{*}\left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$, onde $\sum^{*}$ denota o somatório com elementos não nulos $w \in \Lambda$.

$\wp$ e sua derivada satisfazem certas identidades algébricas, e dentre elas existe a fórmula da adição $\wp(2z) = R\left(\wp(z)\right)$, onde R é a função racional dada por $R(z) = \frac{z^4 + (g_2/2)z^2 + 2g_3 z + (g_2/4)^2}{4z^3 - g_2 z - g_3}$,

e g_2 e g_3 são quantidades conhecidas definidas em termos do reticulado Λ.

O espaço quociente C/Λ (que também é um grupo quociente) é topologicamente um toro, e como todo elemento de Λ é um período de $\wp$, vemos que $\wp$ induz uma aplicação $\wp_0$ de C/Λ em $\overline{C}$. Como C/Λ e $\overline{C}$ são

superfícies de Riemann compactas, $\wp_0$ é um recobrimento a N-folhas para algum N, e considerando os pólos de $\wp$, vemos que $N = 2$.



Segue que para cada $w \in \overline{C}$, existem exatamente duas soluções (módulo Λ) de $\wp(z) = w \in \overline{C}$.

$z_1 \equiv z_2 (mód \Lambda)$ se $z_1 - z_2 \in \Lambda$, ou seja, $z_1 = z_2 + m\lambda + n\mu$.

A função toma os mesmos valores em pontos congruentes.

Seja o paralelogramo Ω com vértices $a, a+\lambda, a+\mu, a+\lambda+\mu$. Incluindo parte da fronteira podemos representar cada classe de congruência por exatamente um ponto em Ω, e então $\wp$ está completamente determinada por seus valores em Ω.

A escolha de a é irrelevante, então escolhemos a de tal modo que $\wp$ não tenha pólos em Ω.

Note também que $\wp$ é uma função par, isto é, $\wp(-z) = \wp(z)$.

Como existem somente duas soluções z (módulo Λ) da equação $\wp(z) = w$, estas podem ser u e $(\lambda+\mu)-u$.

Como $\wp\left(2\left[(\lambda+\mu)-u\right]\right) = \wp(2u)$, definimos uma aplicação $w \mapsto \wp(2u)$ de $\overline{C}$ em $\overline{C}$, que independe da escolha de u. Esta aplicação é analítica, então será uma aplicação racional R. Vemos agora porque existe uma fórmula do tipo $R\left(\wp(z)\right) = \wp(2z)$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{2z} & C \\ \wp\downarrow & & \downarrow\wp \\ \overline{C} & \xrightarrow[R]{} & \overline{C} \end{array}$$

PROPOSIÇÃO: Seja $S_n(\Lambda) = \sum^{*} w^{-n}$. Esta série converge para $n \geq 3$.

PROVA: Mostremos que se $n > 2$, então $\sum^{*} w^{-n}$ converge.

A soma parcial para $|w| \leq R$ pode ser decomposta numa soma para w no anel para r, isto é, $r-1 \leq |w| \leq r$, e então uma soma para $1 \leq r \leq R$.

Em cada anel o número de pontos de Λ tem a ordem de magnitude r.

Então $\sum_{|w| \leq R} \frac{1}{|w|^n} << \sum_{1}^{\infty} \frac{r}{r^n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r^{n-1}}$, que converge para $n > 2$.

Escrevamos $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum^{*} \left[\frac{1}{w^2} \left(1 + \frac{z}{w} + \left(\frac{z}{w} \right)^2 + \ldots \right)^2 - \frac{1}{w^2} \right]$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum^{*} \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) \left(\frac{z}{w} \right)^m \frac{1}{w^2}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m \ ,$$

onde $c_m = \sum^{*} \frac{m+1}{w^{m+2}}$.

Note que $c_m = 0$ se m é ímpar.

Como $S_n = \sum^{*} w^{-n}$, temos a expansão

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) S_{2n+2}(\Lambda) z^{2n} = \frac{1}{z^2} + 3S_4 z^2 + 5S_6 z^4 + \ldots$$

Diferenciando $\wp(z)$ nos dois lados temos que

$$\dot{\wp}(z) = \frac{-2}{z^3} + 6S_4 z + 20S_6 z^3 + \ldots$$

TEOREMA: Sejam $g_2(\Lambda) = 60S_4(\Lambda)$ e $g_3(\Lambda) = 140S_6(\Lambda)$.

Então $\left(\dot{\wp} \right)^2 = 4\wp^3 - g_2 \wp - g_3$.

PROVA: Expandindo a função $\varphi(z) = \left(\dot{\wp}(z) \right)^2 - 4\left(\wp(z) \right)^3 + g_2 \wp(z) + g_3$ na origem e olhando para o termo polar e o termo constante, vemos que após os cancelamentos eles resultam nulos, então temos que $\varphi(z)$ é uma função elíptica sem pólos e com um zero na origem, o que por Liouville nos dá uma função constante igual a zero.

Daí $\left(\wp'\right)^2 = 4\,\wp^3 - g_2\,\wp - g_3$.

Agora selecionemos pontos distintos u e v para os quais $\wp$ assume diferentes valores e determinemos A e B tais que $\wp'(u) = A\,\wp(u) + B$ e $\wp'(v) = A\,\wp(v) + B$.

A função elíptica $f(z) = \wp'(z) - A\,\wp(z) - B$ tem três pólos (módulo Λ), então deve ter três zeros, pois a soma dos resíduos de uma função elíptica é zero e os pólos e zeros de f são pólos simples de f'/f, que é também uma função elíptica.

Por construção dois desses zeros devem ser u e v.

TEOREMA: Os zeros $a_1,\ldots,a_n$ e pólos $b_1,\ldots,b_n$ de uma função elíptica satisfazem $a_1+\ldots+a_n \equiv b_1+\ldots+b_n \left(mód\ \Lambda\right)$

PROVA: Isto é provado considerando a integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, onde podemos supor que não existem zeros nem pólos na fronteira de Ω.
Integramos primeiro nos lados de a até $a+\lambda$, e de $a+\mu$ até $a+\lambda+\mu$, que nos dá um resultado da forma $n\mu$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
O cálculo nos outros dois lados nos dará $m\lambda$, $m \in \boldsymbol{Z}$, o que resulta $m\lambda + n\mu$, que é um elemento de Λ.

Como conseqüência disto o outro zero de f deve ser $-(u+v)$, pois os pólos de f somam zero (módulo Λ).

Como $\left[f(z) + A\,\wp(z) + B\right]^2 = \wp'(z)^2 = 4\,\wp(z)^3 - g_2\,\wp(z) - g_3$,
encontramos que $\wp(u)$, $\wp(v)$ e $\wp(-[u+v])$ são soluções da equação
$(Az+B)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$,
e então $\wp(u) + \wp(v) + \wp(-[u+v]) = \frac{A^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2$.

Fazendo $u \to v$ e usando o fato que $\wp$ é uma função par, obtemos

$$2\,\wp(v) + \wp(2v) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)}\right]^2.$$

Finalmente, diferenciando ambos os lados de $\wp'(z)^2 = 4\,\wp(z)^3 - g_2\,\wp(z) - g_3$ temos uma expressão para $\wp''(z)$, e as substituições nos dão a fórmula da adição $\wp(2z) = R\big(\wp(z)\big)$ onde

$$R(z) = \frac{z^4 + (g_2/2)z^2 + 2g_3 z + (g_2/4)^2}{4z^3 - g_2 z - g_3}.$$

Agora, sejam D qualquer disco em C, $U = \wp^{-1}(D)$, e definamos $\phi(z) = 2z$.

Como U é aberto e $\phi^n(U)$ é o conjunto U expandido por um fator 2^n, é claro que para n suficientemente grande, $\phi^n(U)$ contém um paralelogramo de período Ω de $\wp$.

Usando isto com a fórmula da adição, deduzimos que para este n, $R^n(D) = R^n\big(\wp(U)\big) = \wp\big(2^n U\big) = \overline{C}$: isto implica que a função R^n "explode" qualquer disco pequeno D na esfera toda.

Como D é arbitrário, a igualdade acima implica que a família $\{R^n\}$ não é equicontínua em qualquer subconjunto aberto da esfera complexa, e então $J(R) = \overline{C}$.

Este argumento dá uma família de aplicações racionais cujo conjunto de Julia é a esfera toda.

Sempre temos $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, pois

$$R(z) = \frac{z^4 + (g_2/2)z^2 + 2g_3 z + (g_2/4)^2}{4z^3 - g_2 z - g_3} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$ é uma função racional, então $\mathrm{Res}\big(P(z), Q(z)\big) = \big(g_2^3 - 27g_3^2\big)^2 \neq 0$, e qualquer par satisfazendo isto é realizado por algum reticulado.

Particularizando, com $\lambda = \tau$ e $\mu = i\tau$, onde $\tau > 0$, temos $i\Lambda = \Lambda$ e então $S_n(\Lambda) = S_n(i\Lambda) = i^{-n} S_n(\Lambda)$. Tomando $n = 6$ vemos que $g_3 = 140 S_6(\Lambda) = 0$ e $g_2 = 60 S_4(\Lambda)$.

Para este reticulado, $R(z)=\dfrac{(z^2+\alpha^2)^2}{4z(z^2-\alpha^2)}$, onde $\alpha^2=\dfrac{g_2}{4}$. Variando τ teremos uma família de aplicações racionais cujo conjunto de Julia é toda a esfera complexa.

Voltando ao caso geral temos a família

$R(z)=\dfrac{z^4+(g_2/2)z^2+2g_3z+(g_2/4)^2}{4z^3-g_2z-g_3}$, com $g_2^3-27g_3^2\neq 0$.

Temos a aplicação $z\mapsto\dfrac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ quando tomamos α acima igual a 1.

Existem outros aspectos dinâmicos interessantes deste exemplo.

Para cada inteiro positivo k, denotamos o conjunto de pontos $w/2^k$, $w\in\Lambda$, por $2^{-k}\Lambda$, e observamos que se $z\in 2^{-k}\Lambda$, então $R^k\left(\wp(z)\right)=\wp(2^kz)=\infty$.

Isto mostra que a órbita inversa $O^-(\infty)$ do infinito por R é $\wp\left(\bigcup_k 2^{-k}\Lambda\right)$.

Como $\bigcup_k 2^{-k}\Lambda$ é denso em C, sua $\wp-$imagem é densa em $\overline{C}$, e então novamente encontramos que $J(R)=\overline{C}$.

$\wp(2z)=R\left(\wp(z)\right)$mostra que se $m=2^k-1$, então

$R^k\left(\wp(w/m)\right)=\wp(2^kw/m)=\wp((m+1)w/m)=\wp(w+w/m)=\wp(w/m)$, e então os pontos $\wp(w/m)$ são pontos periódicos de R. Considerando todos w e todos k, agora vemos que os pontos periódicos de R são densos em $\overline{C}$.

Finalmente veremos que $J(R)=\overline{C}$ considerando os pontos críticos de R.

DEFINIÇÃO: z é um ponto crítico de uma aplicação racional R se R não é injetiva em nenhuma vizinhança de z.

TEOREMA: Se todo ponto crítico de uma aplicação racional é pré-periódico, então $J(R)=\overline{C}$.

Em geral, um ponto crítico de R é pré-periódico se não é periódico, mas alguma imagem sua é.

A aplicação racional $R(z)=\dfrac{z^4+(g_2/2)z^2+2g_3z+(g_2/4)^2}{4z^3-g_2z-g_3}$ é de grau 4, então tem seis pontos críticos $c_1,\ldots,c_6$, pois $R'(z)$ é de grau 6 e os pontos críticos de R são as soluções de $R'(z)=0$.

Mostraremos que cada c_j é finito e que cada um deles é aplicado no infinito (um ponto fixo de R) por R^2: então cada c_j é pré-periódico, e usando o Teorema acima temos $J(R)=\overline{C}$.

Encontraremos os pontos críticos de R:

Sejam $\xi_1=\lambda/4$, $\xi_2=\mu/4$, $\xi_3=(\lambda+\mu)/4$, $\xi_4=(3\lambda+\mu)/4$, $\xi_5=(2\lambda+\mu)/4$ e $\xi_6=(3\lambda+2\mu)/4$,também $\eta_1=3\lambda/4$, $\eta_2=3\mu/4$, $\eta_3=(3\lambda+3\mu)/4$, $\eta_4=(\lambda+3\mu)/4$, $\eta_5=(2\lambda+3\mu)/4$ e $\eta_6=(\lambda+2\mu)/4$.

Note que esses doze pontos são distintos.

Como $\wp$ é par e $\eta_j+\xi_j\in\Lambda$, temos que

$$\wp(\eta_j)=\wp(\eta_j-(\eta_j+\xi_j))=\wp(-\xi_j)=\wp(\xi_j).$$

Disto e do fato que cada ponto de $\overline{C}$ tem exatamente duas pré-imagens (módulo Λ) por $\wp$, vemos que os seis valores $\wp(\xi_j)$ são distintos.

Agora, $\wp'(z)=\infty$ se e somente se $\wp(z)=\infty$, isto é, se e somente se $z\in\Lambda$, e também $\wp'(z)=0$ se e somente se $z\in 2^{-1}\Lambda$, mas $z\notin\Lambda$.

Segue que $\wp'(\xi_j)\neq 0,\infty$, $\wp'(2\xi_j)=0$, e como $R'(\wp(z))\wp'(z)=2\,\wp'(2z)$, vemos que os seis valores $\wp(\xi_j)$ são os seis pontos críticos de R. Como todos estes pontos são pré-periódicos, pelo Teorema acima, $J(R)=\overline{C}$.

O Teorema acima nos permite produzir outros exemplos de aplicações cujo conjunto de Julia é toda a esfera complexa.

Por exemplo, a aplicação $R(z)=\dfrac{(z-2)^2}{z^2}$ tem pontos críticos 0 e 2, e como $2\to 0\to\infty\to 1\to 1\to\ldots$, o Teorema acima implica que para esta função, $J(R)$ também é a esfera toda.

R é conjugada à aplicação $z\mapsto 1-2/z^2$

Muitas funções na família $1 - w/z^2$ têm esta mesma propriedade.

Terminaremos este exemplo com uma caracterização das aplicações racionais cujo Julia é a esfera toda. Este Teorema também não será provado.

TEOREMA: Seja R uma aplicação racional. $J(R) = \overline{C}$ se e somente se existe algum z cuja órbita $\{R^n(z): n \geq 1\}$ é densa na esfera complexa.

PROPOSIÇÃO: Se $z \in \overline{C} - E$, então o conjunto de Julia está contido no conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de z, isto é, $J \subset$ {pontos de acumulação de $\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)$}.

Conseqüentemente, se $z \in J(R)$, então $J = \overline{\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)}$.

PROVA: Sejam $z \in \overline{C} - E$, $w \in J(R)$ e $U \subset J(R)$ uma vizinhança de w suficientemente pequena.

Assim $\bigcup_{n \geq 0} R^n(U)$ cobre $\overline{C}$ – {dois pontos}.

Como $z \in \overline{C} - E$, temos que existe n tal que $z \in R^n(U)$. Então existe $u \in U$ tal que $u = R^{-n}(z)$.

Assim, $U \cap R^{-n}(z) \neq \varnothing$, e portanto w é ponto de acumulação de $\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)$. $\left(U \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) - \{w\}\right) \neq \varnothing\right)$.

Suponhamos $z \in J(R)$. Como $J(R)$ é invariante, segue que $\overline{\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)} \subset J(R)$, o que completa a prova.

TEOREMA: $J(R)$ é um conjunto perfeito.

Para provar este Teorema precisamos de um Lema:

LEMA: Se $a \in J(R)$, então existe $b \in J(R)$ tal que $a \in O^+(b)$, mas $b \notin O^+(a)$.

PROVA: Se a não é ponto periódico, então b pode ser qualquer imagem inversa de a.
$R^m(a) \neq a$, $\forall m \in Z^*$ e $a \in J(R)$ implica que existe $b \in J(R)$ tal que $R(b) = a$. Daí, $a \in O^+(b)$
$b \in O^+(a)$ implica que existe $n \in Z^*$ tal que $b = R^n(a)$, que nos dá $R(b) = R^{n+1}(a) = a$, o que é absurdo, pois a não é ponto periódico. Portanto $b \notin O^+(a)$.
Suponhamos agora a ponto periódico de período n e consideremos $S = R^n$ e a equação $S(z) = a$.
Se a é a única solução desta equação, podemos conjugar S com um polinômio $p(z)$, pois o ponto $z = \infty$ é um ponto fixo cuja única imagem inversa é $z = \infty$, e este ponto para um polinômio é sempre um ponto fixo super-atrator, e como corolário do Teorema das órbitas, o conjunto de Julia de um polinômio está contido em C. Como $\bigcup_{n \geq 0} p^n(C) = C$, vemos que $z = \infty$ é um ponto excepcional.
Voltando à nossa conjugada, temos que como $\infty \in F(p)$, então $a \in F(S)$, o que contraria nossa suposição. Conseqüentemente, outra solução b para $S(z) = a$ existe e $b \notin O^+(a)$, porque a é a única solução para $S(z) = a$ em $O^+(a)$.

PROVA DO TEOREMA: Dado $a \in J(R)$, provaremos que a é um ponto de acumulação de $J(R)$: seja U uma vizinhança de a.
Escolha b como no Lema ($a \in O^+(b)$ mas $b \notin O^+(a)$).
$b \in J(R)$, $b \notin E$ e existe $k \in Z^*$ tal que $b \in R^k(U)$.
Seja $c \in U$ tal que $R^k(c) = b$.
Então $c \neq a$, porque $b \notin O^+(a)$, e $c \in J(R)$, pois $J(R^{-1}) = J(R)$ é invariante.

Até aqui temos que uma aplicação racional R é linearizável numa vizinhança de pontos fixos atratores e repulsores. Próximo de um ponto fixo indiferente ξ, R é ou não linearizável, dependendo somente de onde está ξ: em $F(R)$ ou $J(R)$. O Teorema seguinte nos esclarece um pouco mais:

TEOREMA: Seja ξ um ponto fixo indiferente de uma aplicação racional R. Então R é linearizável se, e somente se, ξ está em $F(R)$.

PROVA: $(\Rightarrow)$

Suponhamos R linearizável numa vizinhança de um ponto fixo indiferente ξ.

Então $g \circ R \circ g^{-1} = S$, onde S é uma rotação euclidiana ao redor de ξ, g fixa ξ e é analítica nessa vizinhança. Para cada disco D centrado em ξ suficientemente pequeno, $S(D) = D$, então R aplica $g^{-1}(D)$ nele mesmo.

Deduzimos que $\{R^n\}$ é normal em $g^{-1}(D)$, e então ξ está em $F(R)$.

$(\Leftarrow)$

Suponhamos $\xi \in F(R)$ e provemos que R é linearizável numa vizinhança de ξ.

Suponhamos também $\xi = 0$, e então existe uma vizinhança da origem na qual $\{R^n\}$ é equicontínua, e disto vemos que existe alguma vizinhança N da origem na qual, para todo n,

$$\left|R^n(z)\right| = \left|R^n(z) - R^n(0)\right| < 1$$

Agora escrevemos $a = R'(0)$, então $|a| = 1$, e para $n \geq 1$, definimos as funções T_n por

$$T_n(z) = \frac{z + \left(R(z)/a\right) + \ldots + \left(R^{n-1}(z)/a^{n-1}\right)}{n}$$

Note que, como $|a| = 1$ e $\left(R^k\right)'(0) = a^k$, temos $T_n'(0) = 1$ e $\left|T_n(z)\right| \leq 1$ em N.

As funções T_n satisfazem

$$(n/a)T_n\left(R(z)\right) + z = (n+1)T_{n+1}(z) = nT_n(z) + R^n(z)/a^n,$$

e usando isto, $|a| = 1$ e $\left|R^n(z)\right| < 1$, vemos que $T_n\left(R(z)\right) - aT_n(z) \to 0$ uniformemente em N quando $n \to \infty$.

Depois, $\left|T_n(z)\right| \leq 1$ implica que $\{T_n\}$ é normal em N, e segue que quando $n \to \infty$ em alguma seqüência de inteiros, T_n converge local e uniformemente em N para alguma função analítica g que satisfaz

$$g\left(R(z)\right) = aR(z),$$

pois $T_n\left(R(z)\right) - aT_n(z) \to 0$ uniformemente em N quando $n \to \infty$.

Como $T_n'(0) = 1$, também temos $g'(0) = 1$, então g é não constante.

Portanto R é linearizável.

EXEMPLO DE CREMER: Exemplo de ponto fixo irracionalmente indiferente que não satisfaz o Teorema de Siegel e não é linearizável. Portanto este ponto está no conjunto de Julia.

$P(z) = \lambda z + \ldots + z^d$, $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \notin Q$, $d \geq 2$ e $|\lambda^n - 1| \leq (1/n)^{d^n - 1}$ para infinitos $n \in N$.

P tem um ponto periódico em qualquer vizinhança do zero:

Note que $P^n(z) - z = 0$ tem a forma $z^{d^n} + \ldots + (\lambda^n - 1)z = 0$.

$z = 0$ é uma raiz desta equação.

Sejam $\xi_1, \ldots, \xi_{d^n - 1}$, as outras raízes.

Temos por Girardi que $|\xi_1| \cdot \ldots \cdot |\xi_{d^n - 1}| = |\lambda^n - 1|$.

Seja $m = min\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_{d^n - 1}|\}$.

Temos $m^{d^n - 1} \leq |\lambda^n - 1| \leq (1/n)^{d^n - 1}$ para infinitos $n \in N$.

Então existem infinitos pontos periódicos convergindo para a origem.

Na desigualdade $m \leq |\lambda^n - 1|^{1/d^n - 1} \leq (1/n)$, $1/n$ pode ser substituído por qualquer função $\varphi(n)$ tal que $\varphi(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Vamos provar que existem números λ que satisfazem a desigualdade acima.

Note que $|\lambda^n - 1|^{1/d^n - 1} \leq \varphi(n)$ com $\varphi(n) \to 0$ não tem solução para todo λ, então escolho λ para que exista escolha de $n_1, n_2, \ldots \to \infty$, $n_1 < n_2 < \ldots$ e $|\lambda^{n_j} - 1|^{1/d^{n_j} - 1} \leq \varphi(n_j)$.

$|\lambda^n - 1| = |e^{2\pi i n\alpha} - 1| = |e^{\pi i n\alpha} - e^{-\pi i n\alpha}| = 2|\operatorname{sen} \pi n\alpha|$

Das frações contínuas temos que $|\alpha - p_j/q_j| \leq \dfrac{1}{q_j^{\,2} a_{j+1}}$, $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \ddots}}$

e $p_j/q_j \in Q$ são as convergências de α, $\dfrac{p_j}{q_j} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \ddots \frac{1}{a_j}}}$.

Também temos $|\alpha - p_j/q_j| \leq \dfrac{1}{2}$, pois p_j/q_j são as convergências de α.

Precisamos do fato que $2x \le \operatorname{sen} \pi x \le \pi x \le \frac{7x}{2}$ quando $|x| \le \frac{1}{2}$ para que

$|\lambda^n - 1| = 2|\operatorname{sen} \pi n\alpha| = 2|\operatorname{sen}(\pi n\alpha - p_j\pi + p_j\pi)| = 2|\operatorname{sen} \pi(n\alpha - p_j)| = 2\operatorname{sen}(\pi|n\alpha - p_j|)$

e $4|n\alpha - p_j| \le |\lambda^n - 1| \le 7|n\alpha - p_j| = 7n|\alpha - p_j/n|$.

Se $n = q_j$, então $|\lambda^n - 1| \le 7q_j|\alpha - p_j/q_j| \le \frac{7}{q_j a_{j+1}}$.

Portanto, $|\lambda^n - 1|^{1/d^n - 1} \le \frac{1}{q_j^{1/d^n - 1}}\left(\frac{7}{a_{j+1}}\right)^{1/d^n - 1}$ e $\frac{1}{q_j^{1/d^n - 1}} \to 1$ quando $n \to \infty$.

Precisamos então que $\left(\frac{7}{a_{j+1}}\right)^{1/d^n - 1} \to 0$.

Tomando $n = n_j$, precisamos que $(a_{j+1})^{1/d^{n_j} - 1} \to \infty$ se $n_j \to \infty$.

Se, por exemplo, $(a_{j+1})^{1/d^{n_j} - 1} = n_j$, temos

$|\lambda^{n_j} - 1|^{1/d^{n_j} - 1} \le \frac{7^{1/d^{n_j} - 1}}{n_j^{1/d^{n_j} - 1} n_j} = \frac{7^{1/d^{n_j} - 1}}{n_j^{d^{n_j}/d^{n_j} - 1}} = \varphi(n_j)$, com $\varphi(n_j) \to 0$ se $n_j \to \infty$.

Mas $(a_{j+1})^{1/d^{n_j} - 1} = n_j$ significa $\frac{1}{d^{n_j} - 1}\log a_{j+1} = \log n_j \Rightarrow a_{j+1} = n_j^{d^{n_j} - 1}$.

Precisamos então tomar α com expansão em frações contínuas

$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$ e $a_{j+1} = (q_j)^{d^{q_j} - 1}$, onde p_j/q_j é o j-ésimo

convergente de α (α está definido por recorrência). Portanto λ não satisfaz o Teorema de Siegel.

TEOREMA: Se $\partial R \ge 2$, então todo ponto periódico racionalmente indiferente de R está em $J(R)$.

PROVA: ξ é um ponto periódico de período m racionalmente indiferente se $R^m(\xi) = \xi$ e $(R^m)'(\xi)$ é alguma raiz da unidade.

Suponhamos primeiro que ξ é um ponto fixo de R racionalmente indiferente.

Por conjugação podemos supor $\xi = 0$.

Então $R(z) = az + bz^r + \ldots$ numa vizinhança do 0, onde $b \ne 0$, $r \ge 2$ e $a^k = 1$ para algum inteiro positivo k.

Escrevendo $S = R^k$, temos que $S(z) = z + cz^p + \ldots$ para algum $p \geq 2$, onde $c \neq 0$ (S não pode ser a aplicação identidade a menos que $\partial R = 1$).

Por indução, $S^n(z) = z + ncz^p + \ldots$, e então $\left(S^n\right)^{(p)}(0) \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Isto significa que $\left\{S^n\right\}$ não pode ser normal em qualquer vizinhança da origem (caso contrário alguma seqüência de S^n deveria convergir para alguma φ analítica com $\varphi(0) = 0$ e $\varphi^{(p)}(0) = \infty$), conseqüentemente $\left\{R^n\right\}$ não é normal próximo do 0), então a origem está em $J(R)$.

Finalmente, se ξ é um ponto periódico de período m racionalmente indiferente, o mesmo argumento mostra que ξ está em $J\left(R^m\right)$, e então em $J(R)$.

Note que se $\partial R = 1$, então todo ciclo indiferente está em $F(R)$.

CONCLUSÃO

Com toda esta teoria podemos concluir que:

i) Se o ponto fixo é (super) atrator, ele está no conjunto de Fatou;
ii) Se é repulsor, está no conjunto de Julia;
iii) Se é racionalmente indiferente, também está no conjunto de Julia;
iv) Se é irracionalmente indiferente e satisfaz as condições do Teorema de Siegel, está no conjunto de Fatou, e se não satisfaz, pode estar no conjunto de Julia (Exemplo de Cremer) ou não...

BIBLIOGRAFIA:

AHLFORS, L. V. - Complex Analysis - McGraw-Hill, 2ª edição.

BEARDON, A. F. - Iteration of Rational Functions - Springer-Verlag, 1991 - Graduate Texts in Mathematics, 132.

BLANCHARD, P. - Complex Analytic Dynamics - Bull. of the American Mathematical Society. - Vol 11, nº 1, pág. 85-141, July 1984.

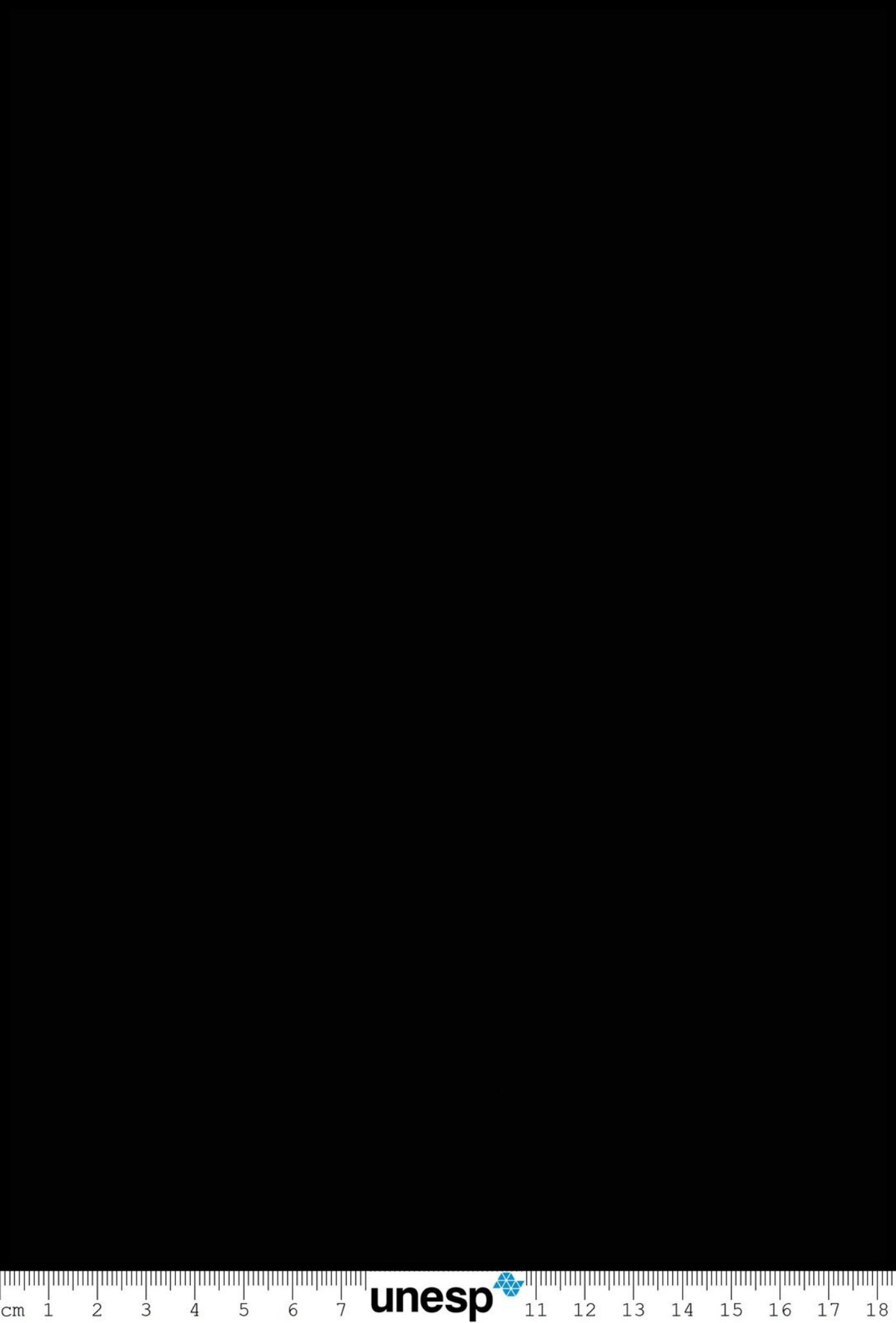
CONWAY, J. B. - Functions of One Complex Variable - Springer-Verlag, 1978 - Graduate Texts in Mathematics, 11.

DEVANEY, R. L. - An Introduction to Chaotic Dynamical Systems - Benjamin-Cummings, 1986.

LANG, S. - Complex Analysis - Springer-Verlag, 1985. Graduate Texts in Mathematics, 103.

LINS NETO, A. - Funções de Uma Variável Complexa - Projeto Euclides, 1993.

SAD, P. - Introdução à Dinâmica das Funções Racionais na Esfera de Riemann - 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1983.


cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18