



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.001/03

Modelos Integráveis Multicarregados e Integrabilidade no
Plano Não-Comutativo.

Iraida Cabrera Carnero

Orientador:

Prof. Dr. José Francisco Gomes

São Paulo

— Fevereiro 2003 —

Resumo

Nesta tese construimos e estudamos uma nova classe de modelos integráveis (relativístico e não relativístico) em duas dimensões, associados à álgebra afim $A_3^{(1)}$. Estes modelos apresentam sólitons topológicos os quais portam duas cargas elétricas $U(1) \otimes U(1)$. O modelo de Toda afim (relativístico) é construído a partir do modelo $WZNW$ mediante a calibração da ação S_{WZNW} e corresponde ao primeiro membro de grau negativo $q = -1$ de uma hierarquia de modelos cKP do tipo dyon. O modelo mais simples não relativístico dentro desta hierarquia corresponde ao grau $q = 2$ positivo. As soluções de 1-sóliton para ambos modelos foram construídas e relações explícitas entre ambas soluções (assim como entre as cargas conservadas) foram encontradas. Outro modelo integrável com simetrias não abelianas locais $SL(2) \otimes U(1)$ é introduzido.

Numa aproximação à integrabilidade em espaços não-comutativos estudamos generalizações não-comutativas no plano dos modelos integráveis bidimensionais *sine*-, *sinh-Gordon* e $U(N)$ *Quiral Principal*. Calculando a amplitude de espalhamento à nível de árvore de um processo de produção de partículas provamos que a versão não-comutativa do modelo de *sinh-Gordon* que se obtém mediante a deformação Moyal da respectiva ação não é integrável. Por outro lado, a incorporação de vínculos adicionais que são obtidos a partir da generalização da condição de curvatura nula, tornam o modelo integrável. O modelo *Quiral Principal* generalizado a partir da deformação Moyal da ação, preserva a sua integrabilidade, ao contrario dos modelos *sinh-Gordon* e *sine-Gordon*.

Palavras chaves: Modelos Integráveis; Sólitons; Teorias de Campos; Sistemas não lineares; Soluções exatas; Geometria Não-Comutativa.

Áreas de conhecimento: 1.05.03.01-3, 1.01.04.01-1.

Abstract

In this thesis we have constructed and studied a new class of two-dimensional integrable models (relativistic and nonrelativistic), related to the affine algebra $A_3^{(1)}$. These models admit $U(1) \otimes U(1)$ charged topological solitons. The affine Toda relativistic model is constructed from the gauged $WZNW$ action and corresponds to the first negative grade $q = -1$ member of a dyonic hierarchy of cKP models. The simplest nonrelativistic model corresponds to the positive grade $q = 2$ of this hierarchy. The 1-soliton solutions for both models were constructed and explicit relations between them (and the conserved charges as well) were found. Another integrable model with local nonabelian $SL(2) \otimes U(1)$ symmetries is introduced.

In the context of integrability on noncommutative spaces, we have studied noncommutative generalizations on the plane of the two-dimensional integrable models *sine*-, *sinh-Gordon* and $U(N)$ *Principal Quiral*. By computing for the *sinh-Gordon* model, the tree-level amplitude of a process of production of particles, we proved that the noncommutative generalization of this model that it is obtained by the Moyal deformation of the corresponding action is not integrable. On the other hand, the addition of extra constraints, obtained by the generalization of the zero-curvature method, renders the integrability of the model. The generalization of the *Principal Quiral* model by the Moyal deformation of the action preserves the integrability, contrary to the previous case.

keywords: Integrable Models; Solitons; Field Theory; Non-linear systems; Exact Solutions; Noncommutative Geometry.

A mami y a papi

Agradecimentos

- Agradeço a meu orientador Prof. Dr. J. F. Gomes pela condução da pesquisa e pela ajuda em diversos momentos.
- Agradeço também aos Prof. A. H. Zimerman e G.M. Sotkov pela troca de idéias durante o desenvolvimento do trabalho.
- Agradeço à Marco por ter tido a oportunidade de colaborar-mos.
- Agradeço à Fapesp pelo suporte financeiro.
- Agradeço aos colegas e amigos daqui: Jorgito, Paulo, Érica, Ivan, Cristiane, Cristina, Adriano, Gian, Esdras, Elisa, Crispino, Angela, Isabella, Juan, Natasha, Andriusha, Francis, Mairim, Sofia, Lis, Isabella, Sonia, André, Andrezinho e Luiza pelos bons momentos, pela ajuda e pela amizade.
- Agradeço aos amigos de Trieste: Roberta, Adelaide, Julio, Marina, Concetta e Nicoletta, onde parte do trabalho foi realizado.
- Um “*muchísimas gracias*” a minha queridíssima família: mami, papi, Roni, Iramis, Ada, Roberto, Nubia, Emilia, Angélica e Luis pela grande paciência em todos estes anos e pelo *ánimo*.
GRACIAS abuichi.
- Finalmente, *gracias* a Alejandro e a mi Dani por encher de alegría e sentido todos os nossos dias.

Índice

I	Os modelos de Toda	13
I.1	As gradações	15
I.2	Ação dos Modelos de Toda	19
II	O modelo de Lund-Regge e o modelo $A_2^{(1)}(p = 1)$ tipo dyon	25
II.1	Modelo de Lund-Regge	25
II.2	O modelo $A_2^{(1)}(p = 1)$ tipo dyon	30
III	Modelo $A_3^{(1)}(p = 2)$ tipo dyon	38
III.1	Construção do Modelo	39
III.2	Curvatura nula e as Equações de Movimento	41
III.3	Simetrias da ação e do vácuo	43
III.4	Equações de primeira ordem	47
III.4.1	Soluções tipo sóliton	50
III.4.2	Espectro dos sólitons	51
III.5	Operadores de Vértice de $A_3^{(1)}$ e funções tau	54
III.5.1	Operadores de Vértice	58
III.6	Modelos $A_3^{(1)}(p = 2, q)$	63
III.6.1	Cargas conservadas	74
IV	Modelo $SL(3)/U(2)$	78
IV.1	Construção do modelo	78
IV.2	Curvatura nula e as Equações de Movimento	82

IV.3 Solução de 1- sóliton	86
IV.3.1 Funções τ	86
IV.3.2 Solução de 1-sóliton	87
IV.4 Equações de primeira ordem	89
IV.5 Modelo não relativístico análogo	91
V Integrabilidade no plano não-comutativo	94
V.1 Introdução	94
V.2 Definições básicas	96
V.3 Modelos Integráveis não-comutativos	97
V.3.1 Modelo sinh-Gordon não-comutativo	97
V.3.2 Condição de Curvatura Nula	102
V.3.3 Sólitons Euclidianos	106
V.3.4 Modelo Quiral Principal	108
VI Conclusões	111
A Integrabilidade	113
B Definições algébricas	117
B.1 Álgebras afins de Kac-Moody	119
C Elementos matriciais	122
D Cálculos perturbativos até ordem θ^2	124
D.1 Expansão de $\phi_\star^n$ até ordem θ^2	124
D.2 Solução da Equação de Movimento até a ordem θ^2	125

Introdução

Entre as entidades mais fascinantes da Física estão os sólitons, ondas que se propagam sem dispersão e que conservam sua forma ao interagir com outros sólitons. Eles são, geralmente, soluções exatas localizadas de equações diferenciais não lineares. Muitos destes modelos não lineares apresentam, em geral, uma propriedade conhecida como *integrabilidade*, que lhes garante a existência de soluções exatas. Estes modelos são conhecidos como *modelos integráveis*.

O critério de integrabilidade, segundo Liouville, diz que quando existe um número de quantidades conservadas em involução igual ao número de graus de liberdade do sistema, o modelo pode ser denominado *integrável*. Isto quer dizer que neste caso é possível encontrar uma transformação canônica que permite reescrever as equações de movimento em função de novas variáveis (chamadas de ângulo e ação), de modo que nestas novas variáveis é possível resolver as equações por quadratura. No caso das teorias de campos, por tratar-mos sistemas com um número infinito de graus de liberdade, o número de cargas conservadas deve ser também infinito. Mas, geralmente, achar esta transformação canônica torna-se uma tarefa impraticável.

Por outro lado, o estudo da integrabilidade em duas dimensões tem desenvolvido ferramentas tais como a *formulação de Lax* [1] e posteriormente a *condição de curvatura nula* [2], as quais nos ajudam a determinar quando um modelo pode apresentar esta propriedade. Outros trabalhos tem traçado o caminho para determinar as soluções exatas de muitos destes modelos integráveis bidimensionais, como por exemplo, o método de espalhamento in-

verso [3].

A atividade dentro da área dos modelos integráveis bidimensionais tem sido tão vasta que, atualmente, possuímos um conhecimento teórico necessário para compreender aspectos não perturbativos na teoria de campos em dimensões maiores. A relação que as teorias de Yang-Mills-Higgs (YMH) e Yang-Mills autoduais (SDYM) em quatro dimensões possuem com alguns destes modelos integráveis, merece especial atenção [4]. Acontece que as soluções não perturbativas destas teorias, YMH, SDYM (monopolos, dyons e instantons) e as soluções estendidas, como as paredes de domínio (DW), têm muitas características comuns aos sólitons de certos modelos integráveis em dimensões menores. Mediante a redução dimensional das teorias SDYM (ou YMH) em $D = 4$ dimensões, as equações de movimento destas teorias (SDYM) são levadas a equações integráveis em dimensões menores. Desta forma as soluções destas equações podem ser identificadas com as soluções de modelos bidimensionais estudados. Por exemplo, é conhecido que os sólitons topológicos dos modelos de Toda afins abelianos em duas dimensões, com $N = 2$ supersimetrias correspondentes à álgebra A_n , descrevem certas soluções DW da teoria de gauge $SU(n + 1)$ com $N = 1$ supersimetrias em $D = 4$ dimensões [5], [6].

Muitas das soluções tipo DW, que a descrição de supercordas fornece para as teorias de gauge em $D = 4$ dimensões, possuem estrutura interna. Neste caso os modelos de Toda abelianos afins tornam-se insuficientes para descrever estas soluções. Por esta razão o estudo de modelos de Toda não abelianos afins resulta de muita utilidade na descrição de DW com cargas internas.

Nos trabalhos [8] e [9] foram desenvolvidos modelos integráveis bidimensionais, relacionados à álgebra afim $A_n^{(1)}$, cujas correspondentes soluções tipo sóliton portam uma carga elétrica $U(1)$, além de carga magnética. Estas soluções (dyons) foram interpretadas como as soluções DW tipo dyons com uma carga elétrica $U(1)$ da teoria de gauge $SU(n + 1)$ em quatro dimensões.

Um dos objetivos principais de nosso trabalho de tese foi a construção de

certos modelos de Toda não abelianos e singulares que de alguma forma generalizassem os modelos anteriores $A_n^{(1)}$ com uma simetria $U(1)$ ($p=1$) [8], [9]. Primeiramente, nosso propósito foi desenvolver modelos integráveis bidimensionais (relativísticos e não relativísticos) cujas soluções fossem tipo dyon, mas com simetrias globais $U(1) \otimes U(1)$ ($p=2$). Para isso foi construído o modelo de Toda afim não abeliano, singular (relativístico) de tipo dyon relacionado com a álgebra $A_3^{(1)}$ e com $p = 2$ simetrias globais. Este modelo foi posteriormente estendido para qualquer álgebra $A_n^{(1)}$ na Ref.[10]. Neste mesmo trabalho [10] foi construída uma família de modelos integráveis não relativísticos do tipo Kadomtsev-Petviashvili vinculado (cKP), os quais também admitem soluções tipo sólitons com cargas $U(1) \otimes U(1)$. Este modelo (por construção) compartilha a mesma estrutura algébrica do modelo relativístico $A_3^{(1)}$ ($p = 2$), o qual permite estabelecer relações simples entre as soluções de 1-sóliton de ambos os modelos.

Posteriormente nos envolvemos na construção de modelos integráveis bidimensionais que possam, em princípio, apresentar simetrias globais não abelianas tal como $SU(2)$. Neste caso, também desenvolvemos tanto o modelo de Toda afim relativístico $SL(2)/U(1)$ quanto o seu análogo não relativístico.

Dentro do tópico dos modelos integráveis, nos sentimos motivados a explorar a *integrabilidade* em um novo contexto, o das teorias de campo não-comutativas. Deste modo, nos dedicamos também a desenvolver versões não-comutativas no plano de conhecidos modelos bidimensionais, inicialmente integráveis. Nosso objetivo aqui tem sido o estudo do comportamento desta propriedade (*integrabilidade*) quando a não-comutatividade das coordenadas é considerada. Para isso foi necessário desenvolver uma formulação de curvatura nula generalizada apropriada ao novo contexto. Em particular estudamos os modelos de *sine-Gordon* e *Quiral Principal*, como pode ser apreciado na ref. [11].

Estes são os assuntos principais que constituem o corpo desta tese, e serão expostos como se descreve a seguir.

No primeiro capítulo fazemos uma breve exposição do que são os modelos

de Toda em duas dimensões e como eles são classificados de acordo com a gradação da álgebra. Discutimos também a relação da estrutura algébrica dos modelos com as simetrias dos mesmos e de suas soluções. Posteriormente, apresentamos a ação de Wess-Zumino-Novikov-Witten S_{WZNW} a partir da qual se derivam estes modelos mediante o processo de Redução Hamiltoniana ou, alternativamente, mediante o calibre da ação original.

O capítulo II é dedicado ao estudo das características fundamentais de dois modelos de Toda afins, não abelianos e singulares. Primeiramente estudamos o modelo de *Lund-Regge* ou *sine-Gordon complexo*, definido por meio da gradação homogênea da álgebra afim $A_1^{(1)}$. Os sólitons deste modelo são não topológicos e portam uma carga elétrica $U(1)$, como poderá ser visto ao analisar uma solução de 1-sóliton para este modelo. Numa outra seção, estudamos o modelo tipo dyon $A_2^{(1)}(p = 1)$, cujos sólitons topológicos podem portar também uma carga elétrica $U(1)$. Neste caso analisamos as simetrias discretas da ação e do vácuo, que permitem a presença de sólitons topológicos. Apresentamos também uma solução de 1-sóliton junto com suas propriedades: cargas, energia, momento e massa.

O terceiro capítulo é o mais extenso, pois nele, além de expor toda a construção do modelo $A_3^{(1)}(p = 2)$, com suas respectivas simetrias, cargas e soluções tipo sóliton, fazemos uma breve explicação dos diferentes métodos utilizados no processo de construção. Estes métodos incluem as transformações de “dressing”, os operadores de vértice e as funções *tau*. Aqui, introduzimos também a hierarquia de modelos não relativísticos $A_3^{(1)}(p = 2, q)$, na qual o modelo anterior corresponde a $q = -1$. Como veremos, estes modelos não relativísticos são construídos preservando parte da estrutura algébrica do modelo relativístico e por esta razão os sólitons de ambos modelos possuem as mesmas propriedades. Neste caso, eles são topológicos e portam duas cargas elétricas, $U(1) \otimes U(1)$. O cálculo da energia, o momento e a massa destas soluções utiliza as equações de primeira ordem, por isso estas são também incluídas numa seção deste capítulo.

A seguir, no capítulo IV, introduzimos o modelo $SL(3)/U(2)$. Este mo-

delo, como o modelo de *Lund-Regge*, é do tipo elétrico, ou seja seus sólitons são não topológicos. Ele tem como novidade a presença de simetrias locais não abelianas, $SL(2) \otimes U(1)$. Para ele aplicamos todo o formalismo desenvolvido e utilizado no capítulo anterior. É importante frisar que este modelo está ainda em fase de construção e que aspectos tais como suas simetrias globais precisam ser melhor entendidos.

Finalmente, o quinto capítulo é dedicado ao estudo da integrabilidade no plano não-comutativo. Incluímos uma brevíssima introdução às teorias de campos não-comutativas. Posteriormente, provamos como a versão não-comutativa do modelo *sinh-Gordon*, que se obtém como deformação Moyal da ação, não é integrável. Isto é feito calculando a amplitude de transição a nível de árvore, do processo de espalhamento de $2 \rightarrow 4$ partículas. A seguir introduzimos a condição de curvatura nula generalizada ao plano não-comutativo. A partir desta condição definimos novas versões não-comutativas dos modelos de *sinh-*, *sine-Gordon*, resultando, neste caso, integráveis por definição. Aqui é importante destacar o aparecimento de vínculos adicionais à equação de movimento e que a solução de 1-sóliton do modelo comutativo é também solução da versão não-comutativa. Por último, expomos uma versão não-comutativa do modelo *Quiral Principal*, que diferentemente dos anteriores, preserva a sua integrabilidade ao deformar sua ação introduzindo o produto não-comutativo dos campos.

Capítulo I

Os modelos de Toda

Os modelos de Toda em duas dimensões são modelos relativísticos integráveis, os quais se obtém a partir da ação de *Wess-Zumino-Novikov-Witten*, S_{WZNW} [12] mediante o processo de Redução Hamiltoniana, ou equivalentemente mediante a calibração desta ação. Denominaremos $S_{G/H}$ à ação $WZNW$ calibrada. A ação S_{WZNW} é dada em termos de um elemento g do grupo G , o qual pode-se expressar através dos geradores da correspondente álgebra, seja esta de dimensão finita (álgebra de Lie, $\mathcal{G}$) ou de dimensão infinita, também conhecida como álgebra afim ou de Kac-Moody ($\hat{\mathcal{G}}$) (para mais detalhes veja o apêndice B). Nesta álgebra é definido um operador de gradação Q que a decompõe em subespaços graduados, os quais essencialmente pertencem a três subálgebras $\mathcal{G}_<, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_>$, de graus negativo, zero e positivo, respectivamente. No caso das álgebras afins, este operador Q é escolhido de modo que o subespaço de grau zero ($G_0 = G/H$) seja de dimensão finita, onde os subgrupos $H_<, H_> \in G$ são gerados pelas subálgebras de grau negativo/positivo $\mathcal{G}_<, \mathcal{G}_>$ respectivamente. Como os campos físicos são definidos de modo que eles parametrizam o subespaço de grau zero G_0 , procuramos uma teoria de campos definida na subvariedade $G_0 \subset G$. Para isso eliminamos os graus de liberdade indesejados, correspondentes ao espaço tangente de G/G_0 , mediante a calibração da ação S_{WZNW} (ou, equivalentemente, mediante a imple-

mentação de certos vínculos).

Embora todos estes modelos sejam integráveis, somente os modelos associados às álgebras afins apresentam soluções tipo sólitons. Isto é uma consequência do fato que geralmente estes modelos apresentam um potencial com infinitos mínimos absolutos discretos e degenerados, permitindo a existência de condições de fronteira não triviais para os campos. Entre os modelos que possuem esta propriedade podemos citar o conhecido modelo de *sine-Gordon*, associado à álgebra afim $A_1^{(1)}$. Os sólitons destes modelos são chamados topológicos e a eles é possível associar uma carga também chamada topológica ou magnética, por trás da qual se encontra uma simetria discreta da correspondente ação e das equações de movimento.

Mas nem todos os sólitons dos modelos de Toda associados a álgebras afins são topológicos, por exemplo, os sólitons do modelo de *Lund-Regge*, também chamado *sine-Gordon complexo* (associado igualmente à álgebra afim $A_1^{(1)}$), são não topológicos porque o potencial não apresenta infinitos mínimos degenerados. Por outro lado, devido a uma simetria interna da ação ($U(1)$) estes sólitons portam carga elétrica. Neste caso, as condições de fronteira dos campos no infinito coincidem com o mínimo do potencial.

Os sólitons, soluções clássicas que se propagam sem dispersão com energia finita e uma densidade de energia localizada, interagem elasticamente, o qual implica que nos modelos com este tipo de soluções deve existir alguma lei de conservação aditiva. São precisamente estas propriedades dos sólitons as que os assemelham às partículas e que permitem associar-lhes certas propriedades (energia, massa, momento, cargas elétricas, etc) que são típicas do espectro de partículas. Esta tem sido uma das principais motivações para desenvolver novos modelos cujas soluções tipo sóliton possam apresentar tanto carga elétrica como magnética, generalizando desta maneira o modelo de *Lund-Regge*. Sólitons com estas características são chamados dyons e foram construídos nas referências [8], [9], [10].

O que nos permite determinar as cargas que os sólitons destes modelos de Toda afins terão é a estrutura algébrica. As possíveis cargas são definidas

ao escolher uma subálgebra invariante (ou seja, as simetrias) $\mathcal{G}_0^0 \subset \mathcal{G}_0$, e posteriormente procurar por um operador de gradação Q e geradores constantes $\epsilon_{\pm}$ de grau ± 1 apropriados. O procedimento de construção desenvolvido nos trabalhos [8], [9], [10], embora tenha sido aplicado primeiramente para o caso particular da álgebra afim $A_n^{(1)}$, por ser o mais simples possível, é um procedimento geral. Este procedimento pode ser estendido para qualquer álgebra sempre que ao definir a gradação da mesma, seja possível encontrar dentro do subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0$ a subálgebra $\mathcal{G}_0^0$ correspondente ao grupo de simetrias globais G_0^0 que queremos outorgar à ação e às equações de movimento. Como veremos mais adiante, ao exigir a invariância da ação $S_{G/H}$ perante certas transformações de calibre adicionais dentro de $\mathcal{G}_0^0$, podemos achar a ação quociente S_{G_0/G_0^0} que apresentará G_0^0 -simetrias globais. No caso dos modelos $A_n^{(1)}(p = 1)$, desenvolvidos nos trabalhos [8] e [9], os sólitons tem uma carga elétrica devido à simetria global $U(1)$ da ação e das equações de movimento. Já no caso do modelo $A_n^{(1)}(p = 2)$, desenvolvido na ref. [10], a subálgebra $\mathcal{G}_0^0$ é $U(1) \otimes U(1)$, fazendo com que os sólitons possam apresentar duas cargas elétricas. Os casos particulares mais simples destes modelos: $A_2^{(1)}(p = 1)$ e $A_3^{(1)}(p = 2)$ são estudados nos capítulos II e III, respectivamente.

Para uma melhor compreensão da estrutura algébrica destes modelos e a relação que a mesma guarda com o processo de Redução Hamiltoniana, no que segue faremos uma explicação mas detalhada.

I.1 As gradações

A estrutura algébrica é a base a partir da qual os diferentes modelos de Toda são construídos. O primeiro passo é definir o operador de gradação Q , o qual vai decompor a álgebra $\mathcal{G}$ (ou $\hat{\mathcal{G}}$) em subespaços graduados $\mathcal{G}_i$ tais que

$$\mathcal{G} = \oplus_i \mathcal{G}_i ,$$

$$[Q, \mathcal{G}_i] = i\mathcal{G}_i, \quad [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \in \mathcal{G}_{i+j} . \quad (\text{I.1.1})$$

onde os $\mathcal{G}_i$ com $i > 0$ ($i < 0$) estão contidas nas subálgebras $\mathcal{G}_>$ (ou $\mathcal{G}_<$) respectivamente. O elemento g do grupo G correspondente a esta álgebra pode-se expressar mediante a exponenciação dos respectivos geradores segundo a decomposição de Gauss

$$g = NBM , \quad (\text{I.1.2})$$

onde $N = \exp \mathcal{G}_<$, $B = \exp \mathcal{G}_0$ e $M = \exp \mathcal{G}_>$.

Se todos os geradores do subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0$ comutam entre si o modelo será chamado: *modelo de Toda abeliano*. Se pelo contrário, nem todos os geradores que comutam com o operador de gradação Q , comutam entre si, isto quer dizer que o subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0$ tem uma estrutura não abeliana, e o modelo será chamado: *modelo de Toda não abeliano*. É a escolha do operador de gradação o que classifica os modelos em abelianos ou não abelianos. Assim, por exemplo, tanto o modelo de *sine-Gordon* quanto o modelo de *Lund-Regge* estão associados à álgebra afim $A_1^{(1)}$, mas o operador de gradação de *sine-Gordon* é escolhido como

$$Q = 2\hat{d} + \frac{2\lambda \cdot H^{(0)}}{\alpha^2} , \quad (\text{I.1.3})$$

de modo que o subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0$ está formado pelos geradores $\{h^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}$, possuindo, neste caso, uma estrutura abeliana. Por outro lado, o operador de gradação do modelo de *sine-Gordon complexo* (*Lund-Regge*) é

$$Q = 2\hat{d} , \quad (\text{I.1.4})$$

definindo o subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0 = \{h^{(0)}, E_{\pm\alpha}^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}$ não abeliano e igual a $SL(2)$ (sem levar em conta os geradores $\hat{c}, \hat{d}$). Observe que a estrutura não abeliana de $\mathcal{G}_0$ é obtida ao suprimir de Q , o gerador $h^{(0)}$ da subálgebra de Cartan.

Cada modelo de Toda é especificado por $\{\mathcal{G}, Q, \epsilon_{\pm}\}$, onde $\epsilon_{\pm}$ são os geradores constantes de grau ± 1 , tais que $\epsilon_{\pm} \in \mathcal{G}_{\pm 1}$, e estão relacionados com o

fato de que o modelo possa apresentar simetrias contínuas (globais ou locais), assim como singularidades. Mais especificamente, se dentro da subálgebra de grau zero $\mathcal{G}_0$, existe um subespaço $\mathcal{G}_0^0$ tal que seus geradores satisfaçam $[\epsilon_{\pm}, \mathcal{G}_0^0] = 0$, o modelo terá $\mathcal{G}_0^0$ simetrias locais, as quais se converterão em simetrias globais ao eliminarmos os graus de liberdade em G_0^0 mediante o calibre da ação $S_{G/H}$ (ou mediante a implementação de certos vínculos adicionais). Na verdade, podemos ter modelos com simetrias globais e locais ao mesmo tempo quando somente parte dos graus de liberdade de $\mathcal{G}_0^0$ são eliminados. De qualquer modo, isto traz como consequência o aparecimento de singularidades nas respectivas ações e equações de movimento. Resumindo, uma vez escolhida a álgebra $\mathcal{G}$ os elementos que determinarão a estrutura do modelo são três: $Q, \epsilon_{\pm}$.

Podemos incluir os modelos de Toda afins, de acordo com as gradações que os definem, dentro de três grandes grupos (para A_n):

-Gradação Principal:

$$Q = (n+1)\hat{d} + \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda_i \cdot H^{(0)}}{\alpha_i^2}, \quad \epsilon_{\pm} = \sum_{i=1}^n E_{\pm\alpha_i}^{(0)} + E_{\mp(\alpha_1+\dots+\alpha_n)}^{(\pm 1)}, \quad (\text{I.1.5})$$

aqui podemos encontrar os *modelos de Toda afins abelianos*. Como para estes modelos $\mathcal{G}_0^0 = 0$, eles não possuem simetrias contínuas globais nem locais. Por outro lado eles apresentam o número máximo de cargas topológicas. O modelo de *sine-Gordon* é o exemplo mais simples dentro deste grupo correspondente a $A_1^{(1)}$.

-Gradação Homogênea:

$$Q = \hat{d}, \quad \epsilon_{\pm} = \sum_{i=1}^n \mu_i h_i^{(\pm 1)}, \quad (\text{I.1.6})$$

onde agora a subálgebra $\mathcal{G}_0^0$ é não trivial e tal que $\mathcal{G}_0^0 = \{h_i^{(0)}, i = 1, \dots, n\} = U(1)^n$. Portanto estes modelos terão um número máximo de $U(1)^n$ simetrias locais. Os potenciais não têm zeros não triviais e por consequência os modelos não têm cargas topológicas. Entre os representantes desta categoria,

encontramos o modelo de *Lund-Regge* [13] e os modelos conhecidos como *sine-Gordon Homogêneos* [14].

-Gradação Intermediária:

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{h}d + \sum_{i \neq a_1, a_2, \dots, a_p}^n \frac{2\lambda_i \cdot H^{(0)}}{\alpha_i^2}, \\ \hat{e}_{\pm} &= \sum_{i \neq a_1, a_2, \dots, a_p}^n E_{\pm\alpha_i}^{(0)} + \sum_s \mu_s^{(1)} E_{\mp\rho_s}^{(\pm 1)}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.7})$$

onde $a = (a_1, \dots, a_p)$ denota o conjunto de pesos fundamentais, λ_a , e raízes simples, α_a , que são omitidas do operador de gradação;

$$\tilde{h} = 1 + \sum_{i \neq a_1, a_2, \dots, a_p} \frac{2\lambda_i \cdot \rho_s}{\alpha_i^2}, \quad (\text{I.1.8})$$

e ρ_s são raízes compostas apropriadas de $A_n^{(1)}$, as quais especificaremos posteriormente. As características fundamentais dos modelos integráveis gerados segundo esta gradação são:

- (i) Somente uma parte da subálgebra de Cartan: por exemplo, $U(1)^l$, $l \leq p \leq n-1$ gera simetrias contínuas de Noether locais (ou globais).
- (ii) O potencial para valores imaginários da constante de acoplamento e para uma escolha apropriada de $\epsilon_{\pm}$ tem $(n-l+1)$ zeros diferentes e Z_{n-l+1} como grupo discreto assintótico de simetria.

Pelas razões anteriores, estes modelos admitem soluções tipo sólon que portam tanto cargas elétricas ($U(1)^l$) como topológicas (Z_{n-l+1}). O exemplo mais simples desta classe é o modelo $A_n^{(1)}(l=p=1)$ definido por

$$Q = n\hat{d} + \sum_{i=2}^n \frac{2\lambda_i \cdot H^{(0)}}{\alpha_i^2}, \quad \hat{e}_{\pm} = \sum_{i=2}^n \mu_i E_{\pm\alpha_i}^{(0)} + E_{\mp(\alpha_2+\dots+\alpha_n)}^{(\pm 1)}, \quad (\text{I.1.9})$$

tal que $\mathcal{G}_0 = SL(2) \otimes U(1)^{n-1}$ e $\mathcal{G}_0^0 = \{\lambda_1 \cdot H\}$. Este modelo foi desenvolvido nos trabalhos [8] e [9], e no Capítulo II desta tese estudaremos seu primeiro representante: $A_2^{(1)}(p=1)$.

Os sóltons correspondentes a estes modelos (I.1.7) (para $p > 1$) terão cargas múltiplas. Um dos representantes mais simples destes modelos é

aquele caracterizado por a sua subálgebra de grau zero que tem a forma $\mathcal{G}_0 = SL(2)^p \otimes U(1)^{n-p}$. Apesar de que o método utilizado na construção dos modelos tipo dyon com p-cargas é universal, por motivos de simplicidade, escolhemos o caso particular $p = l = 2$, o qual é definido pela gradação:

$$Q = (n-1)\hat{d} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \cdot H, \quad \epsilon_{\pm} = \mu \left(\sum_{i=2}^{n-1} E_{\pm\alpha_i}^{(0)} + E_{\mp(\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1})}^{(\pm 1)} \right) \quad (\text{I.1.10})$$

e onde $\mathcal{G}_0^0 = \{\lambda_1 \cdot H, \lambda_n \cdot H\}$. Neste caso os sólitons terão duas cargas elétricas. Gostaríamos de salientar que para um p dado existem diferentes escolhas de gradações não equivalentes, as quais conduzem a $\mathcal{G}_0$ diferentes, por exemplo, ao escolher a gradação como em (I.1.10) obtemos $\mathcal{G}_0 = SL(2) \otimes SL(2) \otimes U(1)^{n-2}$. Igualmente, poderíamos ter escolhido o operador de gradação como sendo $Q = (n-1)d + \sum_{i=3}^n \lambda_i \cdot H$, neste caso a correspondente subálgebra de grau zero teria sido $\mathcal{G}_0 = SL(3) \otimes U(1)^{n-2}$. O primeiro representante desta classe de modelos (I.1.10) corresponde à $A_3^{(1)}(p=2)$, e foi desenvolvido em [10]. Este modelo será estudado no Capítulo III da presente tese.

Todos os modelos correspondentes as gradações homogênea e intermediária são conhecidos também como *modelos de Toda afins não abelianos*, devido à estrutura não abeliana de $\mathcal{G}_0$. A *singularidade* de muitos deles está relacionada com a imposição de certos vínculos adicionais como veremos na próxima seção.

I.2 Ação dos Modelos de Toda

Os modelos de Toda são definidos a partir da ação S_{WZNW} [12]:

$$\begin{aligned} S_{WZNW} = & -\frac{k}{4\pi} \int dz d\bar{z} Tr(g^{-1} \partial g g^{-1} \bar{\partial} g) \\ & + \frac{k}{24\pi} \int_D \epsilon^{ijk} Tr(g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g) d^3x, \end{aligned} \quad (\text{I.2.11})$$

a qual define uma teoria de campo conforme em duas dimensões, onde o segundo termo (topológico) denota uma integral de superfície sobre a bola D identificada como a região do espaço-tempo. Aqui $z = \frac{x+t}{2}$, $\bar{z} = \frac{t-x}{2}$, $\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. Na ação (I.2.11) g representa um elemento do grupo G , perante a ação do qual ela é invariante. As equações de movimento correspondentes são

$$\bar{\partial}J = 0, \quad \partial\bar{J} = 0, \quad (\text{I.2.12})$$

onde as correntes quirais são definidas como:

$$J = g^{-1}\partial g, \quad \bar{J} = -\bar{\partial}g g^{-1}. \quad (\text{I.2.13})$$

Nosso objetivo é procurar uma teoria de campo definida na subvariedade $G_0 \subset G$, onde residem os campos físicos. Para eliminar os graus de liberdade indesejados correspondentes ao espaço tangente de G/G_0 podemos seguir dois caminhos. Por um lado, podemos implementar certos vínculos sobre componentes específicas de J e $\bar{J}$ [15]. Por outro lado, podemos propor uma ação invariante de calibre e eliminar os graus de liberdade indesejados mediante a escolha do calibre [16].

No primeiro procedimento os vínculos são especificados em termos dos elementos constantes da álgebra $\epsilon_{\pm}$ de grau ± 1 , de modo que

$$J = j + \epsilon_-, \quad \bar{J} = \bar{j} + \epsilon_+, \quad (\text{I.2.14})$$

onde $(j, \bar{j})$ contém somente geradores de grau zero e positivos, e zero e negativos respectivamente. Ao impor estes vínculos, as equações de movimento (I.2.12) se transformam em

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] &= 0, \\ \partial(\bar{\partial}BB^{-1}) - [\epsilon_+, B\epsilon_- B^{-1}] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.2.15})$$

onde fica evidente como elas dependem somente dos campos dentro do subgrupo de grau zero $G_0 = B$, cujos parâmetros são os campos físicos. Ou

seja, os vínculos nas equações de movimento do modelo $WZNW$ fazem com que os únicos graus de liberdade dinâmicos em g sejam aqueles associados aos geradores de grau zero. Estas equações (I.2.15) são conhecidas como equações de Leznov-Savaliev [17], e foram apresentadas, primeiramente, dentro do formalismo de curvatura nula, do qual falaremos mais adiante.

Como vimos no procedimento anterior, também chamado de Redução Hamiltoniana, o espaço de fase do modelo $WZNW$ invariante ante a ação do grupo G é reduzido ao especificar os geradores constantes $\epsilon_{\pm}$ de graus ± 1 . O outro procedimento para eliminar os graus de liberdade do espaço tangente de G/G_0 consiste em construir uma ação invariante de calibre e fixar o calibre. Procuramos uma ação para B invariante perante a ação de

$$g \longrightarrow g' = \alpha_- g \alpha_+, \quad (\text{I.2.16})$$

com $g' \in B$, $\alpha_- \in H_{<}$ e $\alpha_+ \in H_{>}$ de modo que $N = e^{\mathcal{G}_{<}}$ e $M = e^{\mathcal{G}_{>}}$ possam ser eliminados mediante a escolha do calibre. Para isso precisamos introduzir certos potenciais de calibre $A = A_- \in \mathcal{G}_{<}$ e $\bar{A} = \bar{A}_+ \in \mathcal{G}_{>}$, os quais se transformam segundo

$$\begin{aligned} A \longrightarrow A' &= \alpha_- A \alpha_-^{-1} + \alpha_- \partial \alpha_-^{-1}, \\ \bar{A} \longrightarrow \bar{A}' &= \alpha_+^{-1} \bar{A} \alpha_+ + \bar{\partial} \alpha_+^{-1} \alpha_+. \end{aligned} \quad (\text{I.2.17})$$

A ação resultante, invariante pelas transformações (I.2.16) e (I.2.17), é chamada de ação S_{WZNW} calibrada ($S_{G/H}$), pois ela é definida no coset $G_0 = G/H$, onde $G/H = H_{<} \backslash G/H_{>}$ e tem a forma

$$\begin{aligned} S_{G/H}(g, A, \bar{A}) &= S_{WZNW}(g) - \frac{k}{2\pi} \int d^2 z \text{Tr} \left(A(\bar{\partial} g g^{-1} - \epsilon_+) \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}(g^{-1} \partial g - \epsilon_-) + A g \bar{A} g^{-1} \right). \end{aligned}$$

Como a ação anterior $S_{G/H}$ é invariante pela ação de H , podemos escolher $\alpha_- = N^{-1}$ e $\alpha_+ = M^{-1}$. Assim, devido à ortogonalidade dos subespaços graduados $\text{Tr } \mathcal{G}_i \mathcal{G}_j = 0$, $i + j = 0$, encontramos a nova ação

$$S_{G/H}(g, A, \bar{A}) = S_{G/H}(B, A', \bar{A}') \quad (\text{I.2.18})$$

$$= S_{WZNW}(B) - \frac{k}{2\pi} \int d^2z \operatorname{Tr}[-A'\epsilon_+ - \bar{A}'\epsilon_- + A'B\bar{A}'B^{-1}].$$

Ao integrar nos campos auxiliares A e $\bar{A}$ dentro da integral funcional

$$Z_{\pm} = \int DAD\bar{A} \exp(F_{\pm}), \quad (\text{I.2.19})$$

onde

$$F_{\pm} = -\frac{k}{2\pi} \int \left(\operatorname{Tr}(A - B\epsilon_- B^{-1})B(\bar{A} - B^{-1}\epsilon_+ B)B^{-1} \right) d^2z, \quad (\text{I.2.20})$$

encontramos a ação efetiva

$$S_{eff} = S_{WZNW}(B) + \frac{k}{2\pi} \int d^2z \operatorname{Tr}(\epsilon_+ B \epsilon_- B^{-1}). \quad (\text{I.2.21})$$

A ação (I.2.21) descreve perturbações integráveis do modelo $\mathcal{G}_0$ -WZNW. Estas perturbações são classificadas em termos de operadores constantes de grau ± 1 , $\epsilon_{\pm}$ segundo podemos apreciar. Esta ação corresponde aos *modelos de Toda não singulares*, entre os quais podemos achar os *Conformes* e os *Afins Conformes*, dependendo de se a álgebra é de dimensão finita ou infinita, respectivamente.

Quando a sub-álgebra de grau zero adquire uma estrutura não abeliana, geralmente acontece que dentro dela existe um subespaço $\mathcal{G}_0^0$ tal que

$$[\mathcal{G}_0^0, \epsilon_{\pm}] = 0. \quad (\text{I.2.22})$$

Neste caso não é difícil ver que ao multiplicar as equações (I.2.15) por $\mathcal{G}_0^0$ e tomar o traço obtem-se que

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \operatorname{Tr}[B^{-1} \partial B \mathcal{G}_0^0] &= 0, \\ \partial \operatorname{Tr}[\bar{\partial} B B^{-1} \mathcal{G}_0^0] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.2.23})$$

Portanto podemos definir os vínculos adicionais:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}[B^{-1} \partial B \mathcal{G}_0^0] &= 0, \\ \operatorname{Tr}[\bar{\partial} B B^{-1} \mathcal{G}_0^0] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.2.24})$$

o que significa que estamos colocando as correntes quirais nas direções dos geradores de $\mathcal{G}_0^0$ iguais a zero, de uma forma compatível com as equações de movimento. Esta é a maneira mediante a qual o procedimento de Redução Hamiltoniana elimina de B os graus de liberdade dentro de G_0^0 . Assim, (i) obtém-se singularidades nas equações de movimento e (ii) os campos em B associados aos geradores na direção dos quais foram colocadas as correntes iguais a zero, tornam-se não dinâmicos.

Para eliminar os graus de liberdade dentro de $\mathcal{G}_0^0$, precisamos modificar a ação de modo que ela seja invariante sob transformações dentro do subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0^0$

$$g \longrightarrow g'_0 = \alpha_0 g \alpha'_0, \quad (\text{I.2.25})$$

onde escolhemos $\alpha'_0 = \alpha_0(z, \bar{z}) \in \mathcal{G}_0^0$ que é chamado de *calibre axial* (o *calibre vetorial* se obtém escolhendo $\alpha'_0 = \alpha_0^{-1}(z, \bar{z}) \in \mathcal{G}_0^0$, ver [18]).

Para isto introduzimos novos campos de calibre auxiliares $A_0, \bar{A}_0 \in \mathcal{G}_0^0$ de modo que

$$A = A_- + A_0, \quad \bar{A} = \bar{A}_+ + \bar{A}_0, \quad (\text{I.2.26})$$

os quais se transformam como

$$\begin{aligned} A \longrightarrow A' &= \alpha_0^{-1} A \alpha_0 + \alpha_0^{-1} \partial \alpha_0, & \bar{A} \longrightarrow \bar{A}' &= \alpha_0 \bar{A} \alpha_0^{-1} + \bar{\partial} \alpha_0 (\alpha_0)^{-1}, \\ A_0 \longrightarrow A'_0 &= A_0 + \alpha_0^{-1} \partial \alpha_0, & \bar{A}_0 \longrightarrow \bar{A}'_0 &= \bar{A}_0 + \bar{\partial} \alpha_0 (\alpha_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{I.2.27})$$

A ação invariante pelas transformações (I.2.25) e (I.2.27) resulta ser

$$\begin{aligned} S_{G/H}(g, A, \bar{A}) &= S_{WZNW}(g) - \frac{k}{2\pi} \int dz^2 \text{Tr} \left(A(\bar{\partial} g g^{-1} - \epsilon_+) \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}(g^{-1} \partial g - \epsilon_-) + A g \bar{A} g^{-1} + A_0 \bar{A}_0 \right). \end{aligned} \quad (\text{I.2.28})$$

Os campos redundantes correspondentes às sub-álgebras $\mathcal{G}_<, \mathcal{G}_>, \mathcal{G}_0^0$ são eliminados mediante a fixação do calibre para α_-, α_+ e α_0 respectivamente, chegando portanto a

$$S_{G/H}(g, A, \bar{A}) = S_{G/H}(g_0^f, A', \bar{A}'), \quad (\text{I.2.29})$$

onde $g_0^f \in G_0/G_0^0$. Devido às propriedades dos traços

$$\begin{aligned} Tr A \bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1} &= Tr A_0 \bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1}, \quad Tr \bar{A} (g_0^f)^{-1} \partial g_0^f = Tr \bar{A}_0 (g_0^f)^{-1} \partial g_0^f \\ Tr A g_0^f \bar{A}' (g_0^f)^{-1} &= Tr A_0 g_0^f \bar{A}_0 (g_0^f)^{-1} + Tr A_- g_0^f \bar{A}_+ (g_0^f)^{-1}, \end{aligned} \quad (I.2.30)$$

podemos decompor a ação em três partes

$$S_{G/H} = S_{WZNW}(g_0^f) + F_0 + F_{\pm}, \quad (I.2.31)$$

onde

$$\begin{aligned} F_0 &= -\frac{k}{2\pi} \int d^2 z Tr \left(A_0 \bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1} + \bar{A}_0 (g_0^f)^{-1} \partial g_0^f \right. \\ &\quad \left. + A_0 g_0^f \bar{A}_0 (g_0^f)^{-1} + A_0 \bar{A}_0 \right), \end{aligned} \quad (I.2.32)$$

e

$$F_{\pm} = -\frac{k}{2\pi} \int d^2 z Tr \left(A_- \epsilon_+ + \bar{A}_+ \epsilon_- + A_- g_0^f \bar{A}_+ (g_0^f)^{-1} \right). \quad (I.2.33)$$

A integral funcional se fatoriza como

$$Z = \int DA_0 D\bar{A}_0 e^{-F_0} \int DA_- D\bar{A}_+ e^{-F_{\pm}} \sim e^{-S_{eff}}. \quad (I.2.34)$$

A integração nos potenciais A_- e A_+ nos conduz ao potencial

$$V = Tr \left[\epsilon_+ g_0^f \epsilon_- (g_0^f)^{-1} \right]. \quad (I.2.35)$$

A correspondente ação efectiva se obtém ao integrarmos nos potenciais auxiliares A_0 e $\bar{A}_0$, mas para isso se requer uma parametrização explícita do B e destes potenciais. Isso será feito para cada modelo em particular nos próximos capítulos. Os modelos de Toda afins descritos por esta ação (I.2.31), (I.2.34) são chamados de *não abelianos e singulares*. Entre eles está o modelo de *Lund-Regge* e os modelos $A_2^{(1)}(p=1)$, $A_3^{(1)}(p=2)$, os quais descreveremos nos próximos capítulos.

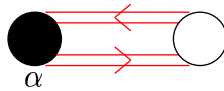
Capítulo II

O modelo de Lund-Regge e o modelo $A_2^{(1)}(p = 1)$ tipo dyon

Nesta seção vamos apresentar as características fundamentais de dois *modelos de Toda não abelianos afins e singulares*, os quais representam os exemplos menos complicados dentro de suas respectivas categorias: o modelo de *Lund-Regge* (de tipo elétrico) [13] e o modelo $A_2^{(1)}(p = 1)$ (de tipo dyon) [8] e [9].

II.1 Modelo de Lund-Regge

O modelo de Lund-Regge é definido pela álgebra de Kac-Moody $A_1^{(1)}$ cujo diagrama de Dynkin apresentamos na figura:



Aqui temos assinalado a raiz simples que é suprimida do operador de gradação Q otorgando à álgebra a gradação homogênea

$$Q = \hat{d} \tag{II.1.1}$$

e geradores constantes de grau ± 1

$$\epsilon_{\pm} = \mu H^{(\pm 1)} . \quad (\text{II.1.2})$$

Desta forma o subespaço de grau zero $\{h^{(0)}, E_{\pm\alpha}^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}$ adquire uma estrutura não abeliana igual a $SL(2)$ se não consideramos os geradores $\hat{c}, \hat{d}$. Este modelo tem como uma das suas propriedades mais importantes a presença de sólitons não topológicos e eletricamente carregados.

O elemento B neste caso é parametrizado como

$$B = e^{\tilde{\chi} E_{-\alpha}^{(0)}} e^{R \frac{2\lambda \cdot H^{(0)}}{\alpha^2} + \nu \hat{c} + \eta \hat{d}} e^{\tilde{\psi} E_{\alpha}^{(0)}}, \quad (\text{II.1.3})$$

onde λ é o peso fundamental associado à raiz α (para qualquer álgebra $2 \frac{\alpha_i \cdot \lambda_i}{\alpha_i^2} = \delta_{ij}$). Note que

$$[\epsilon_{\pm}, \frac{2\lambda \cdot H^{(0)}}{\alpha^2}] = 0. \quad (\text{II.1.4})$$

Então, conforme dissemos no capítulo anterior, podemos estabelecer vínculos adicionais (I.2.24)

$$\begin{aligned} Tr[B^{-1} \partial B \frac{2\lambda \cdot H^{(0)}}{\alpha^2}] &= 0, \\ Tr[\bar{\partial} B B^{-1} \frac{2\lambda \cdot H^{(0)}}{\alpha^2}] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II.1.5})$$

os quais levam às relações

$$\begin{aligned} \partial R &= \frac{2\psi \partial \chi}{\Delta}, \\ \bar{\partial} R &= \frac{2\chi \bar{\partial} \psi}{\Delta}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.6})$$

com $\Delta = 1 + \psi \chi$ e onde definimos $\psi = \tilde{\psi} e^{R/2}$ e $\chi = \tilde{\chi} e^{R/2}$. Por meio das relações (II.1.6) o campo R deixa de ser um campo independente, já que ele pode ser obtido ao integrar estas equações. Desta forma ele se converte em um campo não dinâmico.

As equações de movimento (I.2.15) para este modelo são

$$\partial\bar{\partial}\eta = 0 , \quad (\text{II.1.7})$$

$$\partial\bar{\partial}\nu = \mu^2 e^{-\eta}(1 + 2\psi\chi) , \quad (\text{II.1.8})$$

$$\partial\left(\frac{\bar{\partial}\psi}{\Delta}\right) + \frac{\psi\partial\chi\bar{\partial}\psi}{\Delta^2} + 2\mu^2 e^{-\eta}\psi = 0 , \quad (\text{II.1.9})$$

$$\bar{\partial}\left(\frac{\partial\chi}{\Delta}\right) + \frac{\chi\partial\chi\bar{\partial}\psi}{\Delta^2} + 2\mu^2 e^{-\eta}\chi = 0 , \quad (\text{II.1.10})$$

como podemos apreciar, as equações de mov (II.1.7-II.1.10) apresentam singularidades para certas configurações dos campos ψ e χ . Isto é uma consequência da imposição dos vínculos (II.1.5).

A ação correspondente se obtém apartir de (I.2.31)-(I.2.33) com

$$g_o^f = e^{\chi E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\nu\hat{c} + \eta\hat{d}} e^{\psi E_{\alpha}^{(0)}} , \quad (\text{II.1.11})$$

de modo que ao integrar nos campos auxiliares $A_0, \bar{A}_0, A_+$ e A_- encontramos a ação efetiva,

$$\begin{aligned} S_{efetivo} &= -\frac{k}{4\pi} \int dz d\bar{z} \left(\partial\nu\bar{\partial}\eta + \partial\eta\bar{\partial}\nu + 2\frac{\partial\chi\bar{\partial}\psi}{\Delta} \right) \\ &+ \frac{k\mu^2}{2\pi} \int dz d\bar{z} e^{-\eta}(1 + 2\psi\chi) . \end{aligned} \quad (\text{II.1.12})$$

Observando o potencial desta ação (II.1.12), não é difícil notar como os sólitons deste modelo serão não topológicos já que aparentemente ele não apresenta um número infinito de mínimos. Este modelo descreve a solução de buraco negro em duas dimensões para a teoria de cordas [19]. A simetria $U(1)$ global

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{i\epsilon}\psi, \\ \chi &\rightarrow e^{-i\epsilon}\chi, \end{aligned} \quad (\text{II.1.13})$$

da ação (II.1.12), onde ϵ é uma constante arbitrária, gera uma corrente de Noether que nos conduz à carga elétrica

$$\begin{aligned} Q_{elet} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = -\frac{ki}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\psi \partial \chi - \chi \bar{\partial} \psi}{\Delta} \right] \\ &= -\frac{k}{4\pi} \frac{i}{2} [R(t, \infty) - R(t, -\infty)]. \end{aligned} \quad (\text{II.1.14})$$

Aqui usamos (II.1.6) e a componente J^0 da corrente de Noether:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i}{2} \frac{\psi}{\Delta} (g^{\nu\mu} \partial_\nu \chi - \epsilon^{\nu\mu} \partial_\nu \chi) \\ &+ \left(\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i}{2} \frac{\chi}{\Delta} (g^{\nu\mu} \partial_\nu \psi + \epsilon^{\nu\mu} \partial_\nu \psi). \end{aligned} \quad (\text{II.1.15})$$

Como vemos, a carga elétrica depende do comportamento assintótico de R . Uma solução de 1-sóliton para este modelo [20] é

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{i \cos \bar{a} e^{[-i(\theta+G)]}}{\cosh \tilde{F}}, \\ \chi &= \frac{i \cos \bar{a} e^{[i(\theta+G)]}}{\cosh \tilde{F}}, \\ e^{\frac{R}{2}} &= \frac{1 - e^{(2i\bar{a})} e^{(2\tilde{F})}}{1 + e^{2\tilde{F}}}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.16})$$

onde

$$\begin{aligned} F(t, x) &= 2\sqrt{2}\mu \cos \bar{a} (t \sinh \bar{b} - x \cosh \bar{b}), \\ G(t, x) &= 2\sqrt{2}\mu \sin \bar{a} (-t \cosh \bar{b} + x \sinh \bar{b}), \end{aligned} \quad (\text{II.1.17})$$

com $\theta, Y, \bar{a}, \bar{b}$ reais e

$$\tilde{F}(t, x) = F(t, x - Y). \quad (\text{II.1.18})$$

Aqui escolhimos também $\eta = 0$, o qual é consistente com a equação de movimento (II.1.7).

A carga elétrica (II.1.14) que portará esta solução (II.1.16) depende do valor do $\cos \bar{a}$:

- para $\cos \bar{a} > 0$

$$Q_{elet} = -\frac{k}{2\pi}[-\text{sign}(\bar{a})\frac{\pi}{2} + \bar{a} - \pi(n^+ - n^-)], \quad (\text{II.1.19})$$

- para $\cos \bar{a} < 0$

$$Q_{elet} = -\frac{k}{2\pi}[\text{sign}(\bar{a})\frac{\pi}{2} - \bar{a} - \pi(n^+ - n^-)], \quad (\text{II.1.20})$$

- para $\cos \bar{a} = 0$

$$Q_{elet} = 0, \quad (\text{II.1.21})$$

onde $n^\pm$ são números inteiros e

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Note que a carga elétrica não está bem definida no limite $\bar{a} \rightarrow 0$ devido à presença da função sinal (sign). A energia e o momento associados a esta solução, os quais são obtidos a partir do correspondente tensor energia-momento, são reais (apesar dos campos serem complexos) e iguais a:

$$\begin{aligned} E &= \frac{k\mu\sqrt{2}}{\pi} \cosh \bar{b} \mid \cos \bar{a} \mid \\ P &= \frac{k\mu\sqrt{2}}{\pi} \sinh \bar{b} \mid \cos \bar{a} \mid. \end{aligned} \quad (\text{II.1.22})$$

Além disto, a energia é positiva, já que $\mu > 0$ e $k > 0$. Definimos a velocidade do sóliton como

$$v = \tanh \bar{b}, \quad (\text{II.1.23})$$

e a massa do sóliton M é

$$M = \frac{k\mu\sqrt{2}}{\pi} \mid \cos \bar{a} \mid, \quad (\text{II.1.24})$$

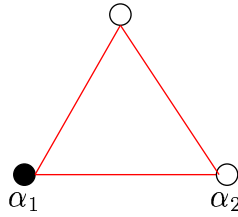
então podemos reescrever a energia e o momento como

$$\begin{aligned} E &= \frac{M}{\sqrt{1-v^2}}, \\ P &= \frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.25})$$

respectivamente, onde se evidencia que eles satisfazem as relações relativísticas usuais.

II.2 O modelo $A_2^{(1)}(p=1)$ tipo dyon

Na seção anterior expusemos brevemente as características principais do modelo *Lund-Regge* que, como vimos, possui sólitons não topológicos com carga elétrica não trivial. Nesta seção vamos estudar o modelo tipo dyon mais simples possível, que está associado à álgebra afim $A_2^{(1)}$, em cujo diagrama de Dynkin:



assinálamos a raiz simples α_1 , cujo correspondente gerador de Cartan omitimos do operador de gradação,

$$Q = 2\hat{d} + 2\frac{\lambda_2 \cdot H}{\alpha_2^2} . \quad (\text{II.2.26})$$

Os geradores constantes de grau ± 1 são, para este modelo, definidos como,

$$\epsilon_{\pm} = \mu(E_{\pm\alpha_2}^{(0)} + E_{\mp\alpha_2}^{(\pm 1)}) . \quad (\text{II.2.27})$$

Ao suprimir do operador de gradação o gerador $\lambda_1 \cdot H$, o subespaço de grau zero, $\mathcal{G}_0$, adquire uma estrutura não abeliana $SL(2) \otimes U(1)$ com geradores $\{E_{\pm\alpha_1}^{(0)}, h_1^{(0)}, h_2^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}$ ou, alternativamente, $\{E_{\pm\alpha_1}^{(0)}, 2\frac{\lambda_1 \cdot H}{\alpha_1^2}, h_2^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}$. Como vimos no capítulo I, este modelo é o primeiro representante dos modelos definidos pela gradação intermediária (I.1.9).

Neste caso, o elemento B , cujos campos parametrizam o subespaço de grau zero é

$$B = e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha_1}^{(0)}} e^{R\frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} + \varphi h_2^{(0)} + \nu \hat{c} + \eta \hat{d}} e^{\tilde{\psi}E_{\alpha_1}^{(0)}} . \quad (\text{II.2.28})$$

Deste modo também existe dentro do subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0$, um subespaço $\mathcal{G}_0^0$ cujos geradores comutam com os geradores constantes de grau ± 1 , mais especificamente,

$$[\epsilon_{\pm}, \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}] = 0 \quad (\text{II.2.29})$$

e portanto os vínculos adicionais

$$\begin{aligned} Tr[B^{-1}\partial B \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}] &= 0, \\ Tr[\bar{\partial} B B^{-1} \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II.2.30})$$

podem ser impostos análogamente ao caso do modelo de *Lund-Regge*. Isto, como veremos, nos levará a uma ação que para certas configurações dos campos é singular. A partir de (II.2.30) obtemos as relações para o campo não local R :

$$\partial R = \frac{3}{2} \frac{\psi \partial \chi e^{-\varphi}}{\Delta} \quad \text{e} \quad \bar{\partial} R = \frac{3}{2} \frac{\chi \bar{\partial} \psi e^{-\varphi}}{\Delta}, \quad (\text{II.2.31})$$

onde

$$\Delta = 1 + \frac{3}{4} \psi \chi e^{-\varphi}, \quad (\text{II.2.32})$$

e onde redefinimos os campos como

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} &= \chi e^{-\frac{R}{2}}, \\ \tilde{\psi} &= \psi e^{-\frac{R}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.33})$$

As equações de movimento (I.2.15) para este modelo se expressam como

$$\partial \bar{\partial} \eta = 0, \quad (\text{II.2.34})$$

$$\partial \bar{\partial} \nu = \frac{\mu^2}{\beta} e^{\beta(\varphi-\eta)} (e^{\beta\varphi} + \beta^2 \psi \chi), \quad (\text{II.2.35})$$

$$\partial \left(\frac{e^{-\beta\varphi} \bar{\partial}\psi}{\Delta} \right) + \frac{3}{4}\beta^2 \frac{\psi e^{-2\beta\varphi} \partial\chi \bar{\partial}\psi}{\Delta^2} + \mu^2 e^{\beta(\varphi-\eta)} \psi = 0, \quad (\text{II.2.36})$$

$$\bar{\partial} \left(\frac{e^{-\beta\varphi} \partial\chi}{\Delta} \right) + \frac{3}{4}\beta^2 \frac{\chi e^{-2\beta\varphi} \partial\chi \bar{\partial}\psi}{\Delta^2} + \mu^2 e^{\beta(\varphi-\eta)} \chi = 0 \quad (\text{II.2.37})$$

e

$$\partial \bar{\partial}\varphi + \frac{1}{2}\beta \frac{\partial\chi \bar{\partial}\psi}{\Delta^2} e^{-\beta\varphi} + \frac{\mu^2}{\beta} e^{\beta(2\varphi-\eta)} \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \psi \chi e^{-\beta\varphi}\right) - \frac{\mu^2}{\beta} e^{-2\beta\varphi} = 0, \quad (\text{II.2.38})$$

onde reescalamos os campos da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \beta\varphi, \\ \chi &\rightarrow \beta\chi, & \psi &\rightarrow \beta\psi, \\ \nu &\rightarrow \beta\nu, & \eta &\rightarrow \beta\eta, \end{aligned} \quad (\text{II.2.39})$$

com $\beta^2 = -\frac{2\pi}{k}$, porque desta forma se visualizam melhor as simetrias da ação e das equações de movimento, como veremos posteriormente. Neste caso na correspondente ação (I.2.34), o elemento do grupo factor $g_0^f \in G_0/G_0^0 = (SL(2) \otimes U(1))/U(1)$ é parametrizado como

$$g_0^f = e^{\chi E_{-\alpha_1}^{(0)}} e^{\varphi h_2^{(0)} + \nu \hat{c} + \eta \hat{d}} e^{\psi E_{\alpha_1}^{(0)}}, \quad (\text{II.2.40})$$

que ao ser avaliado em (I.2.31)-(I.2.33), e após de integrar nos campos auxiliares nos leva à ação efectiva

$$S_{efetivo} = \frac{1}{2\beta} \int d^2x (2\partial\varphi \bar{\partial}\varphi + \partial\nu \bar{\partial}\eta + \partial\eta \bar{\partial}\nu + \frac{2e^{-\beta\varphi} \partial\chi \bar{\partial}\psi}{\Delta} - V), \quad (\text{II.2.41})$$

com o potencial:

$$V = \frac{2\mu^2}{\beta^2} [(e^{\beta(2\varphi-\eta)} + e^{-2\beta\varphi} + \beta^2 \psi \chi e^{\beta(\varphi-\eta)})]. \quad (\text{II.2.42})$$

O quarto termo da ação (II.2.41) contém uma parte simétrica e uma parte antisimétrica:

$$\frac{e^{-\beta\varphi}\partial\chi\bar{\partial}\psi}{\Delta} = \frac{e^{-\beta\varphi}}{\Delta}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\chi + \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\chi) . \quad (\text{II.2.43})$$

Aqui $g_{\mu\nu}$ é a métrica em duas dimensões com assinatura $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ e $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor completamente antisimétrico com $\epsilon^{01} = 1$. No caso do modelo de *Lund-Regge* (II.1.12), como não temos a exponencial, o termo antisimétrico pode ser escrito como uma derivada total e portanto omitido. Na ação (II.2.41) a presença de $e^{-\beta\varphi}$ é responsável pelo aparecimento do tensor antisimétrico, o qual gera termos tipo *axions*. Em [21] foi encontrada uma condição Lie algébrica para a ausência de termos tipo axions, proporcionando a construção de uma família de modelos de Toda não abelianos sem torsão. Este termo antisimétrico é também responsável pela quebra de simetria *CPT* e pelas propriedades dyônicas do modelo (II.2.41).

O modelo integrável definido pela ação (II.2.41) é invariante perante a transformação $U(1)$ global:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-i\beta^2\epsilon}\psi, \\ \chi &\rightarrow e^{i\beta^2\epsilon}\chi, \end{aligned} \quad (\text{II.2.44})$$

onde ϵ é uma constante real arbitrária. A corrente de Noether associada a esta simetria se expresa como

$$J_{elet}^\mu = -\frac{i}{4}\frac{e^{-\beta\varphi}}{\Delta} [\psi(g^{\nu\mu}\partial_\nu\chi - \epsilon^{\nu\mu}\partial_\nu\chi) - \chi(g^{\nu\mu}\partial_\nu\psi + \epsilon^{\nu\mu}\partial_\nu\psi)] \quad (\text{II.2.45})$$

e a correspondente carga elétrica é dada por:

$$Q_{elet} = \int_{-\infty}^{\infty} dx J_{elet}^0 = \frac{2\beta_0}{3} [R(t, \infty) - R(t, -\infty)]. \quad (\text{II.2.46})$$

Além da simetria global $U(1)$, a ação (II.2.41) para $\beta = i\beta_0$ tem um conjunto de simetrias discretas:

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi N}{\beta_0},$$

$$\begin{aligned}\chi' &= e^{i\pi(\frac{N}{2}+s_2)}\chi \\ \psi' &= e^{i\pi(\frac{N}{2}+s_1)}\psi,\end{aligned}\tag{II.2.47}$$

onde N é um inteiro arbitrário e s_a ($a = 1, 2$) ambos inteiros pares ou ímpares, ou seja,

$$s_1 + s_2 = 2S' \quad \text{e} \quad s_1 - s_2 = 2L',\tag{II.2.48}$$

com $S', L' \in \mathbb{Z}$.

Este modelo apresenta também a simetria CP (P: $x \rightarrow -x$):

$$\varphi'' = \varphi, \quad \chi'' = \psi, \quad \text{e} \quad \psi'' = \chi.\tag{II.2.49}$$

Parametrizando os campos ψ e χ como

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\beta_0} e^{i\beta_0(\frac{1}{2}\varphi-\theta)} \frac{2}{\sqrt{3}} \sinh(\beta_0 r), \\ \chi &= \frac{1}{\beta_0} e^{i\beta_0(\frac{1}{2}\varphi+\theta)} \frac{2}{\sqrt{3}} \sinh(\beta_0 r),\end{aligned}\tag{II.2.50}$$

onde r é um campo não compacto e (φ, θ) são campos compactos.

Agora, as transformações discretas (II.2.47) e (II.2.49) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}r' &= r, \quad \theta' = \theta + \frac{\pi}{\beta_0} L', \\ r'' &= r, \quad \theta'' = -\theta + \frac{\pi}{\beta_0} L'',\end{aligned}\tag{II.2.51}$$

com L' e L'' inteiros arbitrários. Como consequência destas simetrias não é difícil perceber que este modelo $A_2^{(1)}(p=1)$ possui uma configuração de múltiplos vácuos, analogamente ao modelo de *sine-Gordon*,

$$\begin{aligned}\varphi^{(N)} &= \frac{\pi N}{\beta_0}, \quad r^{(0)} = 0 \\ \theta^{(L)} &= \frac{1}{2i\beta_0} \ln \left(\frac{\chi^{(L)}}{\psi^{(L)}} \right) = \frac{\pi L}{2\beta_0}, \quad L = 2L'' - L'.\end{aligned}\tag{II.2.52}$$

Estas simetrias proporcionam um conjunto de condições de fronteira não triviais permissíveis para os campos:

$$\varphi^{(N)}(\pm\infty) = \frac{\pi N_{\pm}}{\beta_0}, \quad r(\pm) = 0, \quad \theta^{(L)}(\pm\infty) = \frac{\pi L_{\pm}}{2\beta_0}, \quad (\text{II.2.53})$$

o qual implica que $\psi(\pm\infty) = \chi(\pm\infty) = 0$, mas $\frac{\psi}{\chi}(\pm\infty) \neq 0$. Desta maneira a estrutura de múltiplos vácuos deste modelo é um indicativo de que ele admite soluções tipo sólitons topológicos com energias finitas, as quais interpolam entre dois vácuos diferentes $(N_{\pm}, L_{\pm})$: $j_{\varphi} = N_{+} - N_{-} \pmod{2}$ e $j_{\theta} = L_{+} - L_{-}$.

As cargas topológicas associadas às simetrias discretas anteriores são

$$Q_{\varphi}^{top} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\varphi}^0 dx, \quad J_{\varphi}^{\mu} = \frac{4}{\beta_0} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \varphi, \quad (\text{II.2.54})$$

e

$$Q_{\theta}^{top} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\theta}^0 dx, \quad J_{\theta}^{\mu} = \frac{1}{2i} \epsilon^{\nu\mu} \partial_{\nu} \ln \frac{\chi}{\psi}. \quad (\text{II.2.55})$$

de modo que $Q_{\theta}^{top} = \frac{\pi j_{\theta}}{2}$ com $j_{\theta} = 0, \pm 1, \dots$. A carga topológica (II.2.54) pode ser relacionada com a carga magnética por meio de

$$Q_{\varphi}^{top} = Q_{mag} = \frac{4\pi}{\beta_0^2} j_{\varphi}. \quad (\text{II.2.56})$$

Gostaríamos de salientar que estas duas simetrias discretas (II.2.47) e (II.2.49), que nos permitem obter a rede do vácuo do modelo $(\varphi^{(N)}, \theta^{(L)})$ (II.2.52), não são as únicas simetrias discretas que o modelo integrável tipo dyon $A_2^{(1)}(p=1)$ possui. Existem outras simetrias discretas, como visto em [9], que são muito importantes para derivar as equações de primeira ordem e portanto para calcular a solução de 1-sóliton.

Solução de 1-sóliton com carga elétrica não trivial

Este modelo contém entre suas soluções tanto sólitons topológicos neutros como sólitons topológicos eletricamente carregados, conhecidos também como

dyons. Desta forma, os dyons combinam as propriedades dos sólitons de *Lund-Regge* com as propriedades dos sólitons dos modelos de Toda abelianos e afins (*sine-Gordon*, por exemplo).

Uma solução de 1-sóliton para o modelo $A_2^{(1)}(p=1)$ com carga elétrica não trivial foi calculada nas referências [8] e [9] usando dois procedimentos diferentes. Na ref. [9] foi obtida a solução mediante a integração das equações diferenciais de primeira ordem que se obtém a partir das transformações de Bäcklund e em [8] usando as transformações de “dressing” e as funções *tau*. Esta solução pode ser expressada como:

$$e^{\nu - \mu^2 z \bar{z}} = 1 + e^{2\tilde{F}}, \quad (\text{II.2.57})$$

$$e^{\frac{2}{3}R} = \frac{(\Gamma_1)^{-2} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}{e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}, \quad (\text{II.2.58})$$

$$e^\varphi = \frac{(\Gamma_1)^{-1} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}{(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})^{\frac{1}{2}} [(\Gamma_1)^{-2} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}]^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{II.2.59})$$

$$\chi = \frac{\Gamma_2 e^{i(\Theta+G)}}{(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})^{\frac{3}{4}} [(\Gamma_1)^{-2} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}]^{\frac{1}{4}}}, \quad (\text{II.2.60})$$

e

$$\psi = \frac{\Gamma_2 e^{-i(\Theta+G)}}{(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})^{\frac{3}{4}} [(\Gamma_1)^{-2} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}]^{\frac{1}{4}}}, \quad (\text{II.2.61})$$

onde

$$\Gamma_1 = -e^{-2i\bar{a}}, \quad \Gamma_2 = \sqrt{(1 - \Gamma_1)[(\Gamma_1)^{-2} - 1]}, \quad (\text{II.2.62})$$

$$F(t, x) = 2\mu \cos \bar{a} (-t \sinh \bar{b} + x \cosh \bar{b}) \quad (\text{II.2.63})$$

e

$$G(t, x) = 2\mu \sin \bar{a} (t \cosh \bar{b} - x \sinh \bar{b}), \quad (\text{II.2.64})$$

com

$$\tilde{F}(t, x) = F(t, x - Y). \quad (\text{II.2.65})$$

Aqui $\bar{a}, \bar{b}$ são parâmetros reais. Todos os parâmetros são escolhidos de tal modo que a energia e o momento sejam reais, e a energia positiva.

Os valores assintóticos do campo R fazem com que a carga elétrica para esta solução se expresse como

$$Q_{elet} = -\frac{k}{\pi} \left[\text{sign}(\cos \bar{a}) \left(\text{sign}(\bar{a}) \frac{\pi}{2} - \bar{a} \right) - \frac{\pi}{2} (n_1^+ - n_1^-) \right], \quad n_1^\pm \in Z \quad (\text{II.2.66})$$

para $\cos \bar{a} \neq 0$. Para o caso $\cos \bar{a} = 0$ ela é $Q_{elet} = 0$.

A carga topológica $Q_\varphi^{top} = Q_{mag}$ depende dos valores assintóticos do campo φ :

$$Q_\varphi^{top} = \frac{1}{2} (n^+ - n^-)_{mod 2}, \quad n^\pm \in Z. \quad (\text{II.2.67})$$

Então, como podemos, ver esta solução de 1-sóliton possui tanto carga elétrica como magnética. Ela é um “dyon”. A este sóliton corresponde uma massa $M = \sqrt{E^2 - P^2}$ que se relaciona com o momento e a energia por meio da expressão:

$$M = \frac{E}{\cosh(\bar{b})} = \frac{P}{\sinh(\bar{b})} = \frac{4k\mu}{\pi} |\cos(\bar{a})|. \quad (\text{II.2.68})$$

Se definimos $v = \tanh \bar{b}$ novamente as relações relativísticas são satisfeitas.

Outras soluções básicas deste modelo são:

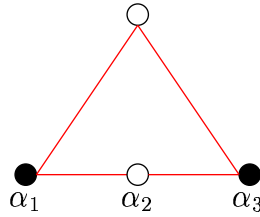
- os 2-sólitons, que representam o espalhamento de dois 1-sóliton e
- os “breathers”, estados ligados de dois 1-sóliton que se caracterizam pela energia ser menor que a soma das energias dos correspondentes 1-sóliton.

Estas soluções podem ser encontradas utilizando o método de “dressing” e os operadores de vértice, o qual será explicado na próxima seção quando calcularmos as soluções tipo sóliton correspondentes ao modelo $A_3^{(1)}(p=2)$. Os modelos apresentados neste capítulo foram estudados mais detalhadamente na ref.[22].

Capítulo III

Modelo $A_3^{(1)}(p=2)$ tipo dyon

Este modelo corresponde à álgebra de Kac-Moody $A_3^{(1)}$, em cujo diagrama de Dynkin



temos assinalado as raízes simples α_1 e α_3 . Os correspondentes operadores “steps” $E_{\pm\alpha_1}$ e $E_{\pm\alpha_3}$ não vão contribuir aos geradores constantes $\epsilon_{\pm}$ de grau ± 1 ao escolher a gradação segundo:

$$Q = \lambda_2 \cdot H + 2\hat{d}. \quad (\text{III.0.1})$$

Como podemos ver, ao suprimir do operador de gradação Q os pesos fundamentais λ_1 e λ_3 , o subespaço de grau zero

$$\mathcal{G}_0 = \{E_{\pm\alpha_1}^{(0)}, E_{\pm\alpha_3}^{(0)}, h_1^{(0)}, h_2^{(0)}, h_3^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}, \quad (\text{III.0.2})$$

adquire uma estrutura não abeliana igual a $SL(2) \otimes SL(2) \otimes U(1)$, sem levar em conta os geradores $\hat{c}, \hat{d}$. Desta forma a gradação especifica os geradores constantes $\epsilon_{\pm}$ de grau ± 1 como:

$$\epsilon_{\pm} = \mu(E_{\pm\alpha_2}^{(0)} + E_{\mp\alpha_2}^{(\pm 1)}). \quad (\text{III.0.3})$$

Este fato vai nos permitir reduzir o espaço de fase, estabelecendo os vínculos subsidiarios (I.2.24) que levam à singularidade. Neste caso, a diferença dos vistos anteriormente, se obtém uma estrutura duplamente singular já que a subálgebra $\mathcal{G}_0^0 = \{\lambda_1 \cdot H, \lambda_3 \cdot H\}$ tem dimensão dois.

III.1 Construção do Modelo

A parametrização do elemento B do subespaço de grau zero G_0 neste caso é

$$B = e^{\tilde{\chi}_1 E_{-\alpha_1}^{(0)} + \tilde{\chi}_3 E_{-\alpha_3}^{(0)}} e^{R_1 \lambda_1 \cdot H + R_3 \lambda_3 \cdot H + \varphi h_2^{(0)} + \nu \hat{c} + \eta \hat{d}} e^{\tilde{\psi}_1 E_{\alpha_1}^{(0)} + \tilde{\psi}_3 E_{\alpha_3}^{(0)}}. \quad (\text{III.1.4})$$

A estrutura duplamente singular se obtém mediante a escolha dos potenciais como:

$$A_0 = a_{01} \lambda_1 \cdot H + a_{03} \lambda_3 \cdot H, \quad \bar{A}_0 = \bar{a}_{01} \lambda_1 \cdot H + \bar{a}_{03} \lambda_3 \cdot H. \quad (\text{III.1.5})$$

Depois de eliminar os campos não físicos R_1 e R_3 , o elemento do grupo fator passa a ser

$$g_0^f = e^{\chi_1 E_{-\alpha_1}^{(0)} + \chi_3 E_{-\alpha_3}^{(0)}} e^{\varphi h_2^{(0)} + \nu \hat{c} + \eta \hat{d}} e^{\psi_1 E_{\alpha_1}^{(0)} + \psi_3 E_{\alpha_3}^{(0)}}, \quad (\text{III.1.6})$$

onde

$$\chi_{1,3} = \tilde{\chi}_{1,3} e^{\frac{1}{2} R_{1,3}}, \quad \psi_{1,3} = \tilde{\psi}_{1,3} e^{\frac{1}{2} R_{1,3}}, \quad (\text{III.1.7})$$

Assim, obtemos para a componente de grau zero em (I.2.32)

$$\begin{aligned} F_0 = & - \frac{k}{2\pi} \int ((a_{01} \bar{a}_{01} 2\lambda_1^2 \Delta_{11} + a_{03} \bar{a}_{03} 2\lambda_3^2 \Delta_{33} \\ & + a_{01} \bar{a}_{03} 2\lambda_1 \cdot \lambda_3 + a_{03} \bar{a}_{01} 2\lambda_1 \cdot \lambda_3) \\ & - (\bar{a}_{01} \psi_1 \partial \chi_1 + \bar{a}_{03} \psi_3 \partial \chi_3 + a_{01} \chi_1 \bar{\partial} \psi_1 + a_{03} \chi_3 \bar{\partial} \psi_3) e^{-\varphi}) dz d\bar{z}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.8})$$

onde

$$\Delta_{ll} = 1 + \frac{\psi_l \chi_l}{2\lambda_l^2} e^{-\varphi}, \quad l = 1, 3. \quad (\text{III.1.9})$$

Em notação matricial, (III.1.8) se escreve como

$$\begin{aligned} F_0 &= -\frac{k}{2\pi} \int (\bar{\mathcal{A}}_0 M \mathcal{A}_0 + \bar{\mathcal{A}}_0 N + \bar{N} \mathcal{A}_0) \\ &= -\frac{k}{2\pi} \int ((\bar{\mathcal{A}}_0 + \bar{N} M^{-1}) M (\mathcal{A}_0 + M^{-1} N) - \bar{N} M^{-1} N) \end{aligned} \quad (\text{III.1.10})$$

onde denotamos

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{03} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{A}}_0 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{01} & \bar{a}_{03} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \psi_1 \partial \chi_1 e^{-\varphi} \\ \psi_3 \partial \chi_3 e^{-\varphi} \end{pmatrix}, \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} \chi_1 \bar{\partial} \psi_1 e^{-\varphi} & \chi_3 \bar{\partial} \psi_3 e^{-\varphi} \end{pmatrix},$$

e

$$M = \begin{pmatrix} 2\lambda_1^2 \Delta_{11} & 2\lambda_1 \cdot \lambda_3 \\ 2\lambda_1 \cdot \lambda_3 & 2\lambda_3^2 \Delta_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.1.11})$$

Integrando sobre os campos matriciais auxiliares $\mathcal{A}_0$ e $\bar{\mathcal{A}}_0$ em

$$Z_0 = \int D\mathcal{A}_0 D\bar{\mathcal{A}}_0 \exp(F_0), \quad (\text{III.1.12})$$

e levando em conta também a contribuição dos restantes termos em (I.2.31) obtemos a ação efetiva

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \frac{1}{2} \int dz d\bar{z} \left(2\partial\varphi \bar{\partial}\varphi + \bar{\partial}\nu \partial\eta + \bar{\partial}\eta \partial\nu + \frac{e^{-\beta\varphi}}{\Delta} \left[\Delta_3 \bar{\partial}\psi_1 \partial\chi_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta^2}{4} \chi_1 \psi_3 \bar{\partial}\psi_1 \partial\chi_3 e^{-\beta\varphi} + \Delta_1 \bar{\partial}\psi_3 \partial\chi_3 + \frac{\beta^2}{4} \chi_3 \psi_1 \bar{\partial}\psi_3 \partial\chi_1 e^{-\beta\varphi} \right] - V \right), \end{aligned} \quad (\text{III.1.13})$$

onde

$$\Delta = [1 + \beta^2 \frac{3}{4}(\psi_1 \chi_1 + \psi_3 \chi_3) e^{-\beta\varphi} + \frac{\beta^4}{2} \psi_1 \chi_1 \psi_3 \chi_3 e^{-2\beta\varphi}], \quad (\text{III.1.14})$$

$$\Delta_i = 1 + \beta^2 \frac{3}{4} \psi_i \chi_i e^{-\beta\varphi}, \quad i = 1, 3 \quad (\text{III.1.15})$$

e o potencial é

$$V = \frac{\mu^2}{\beta^2} \left(e^{-2\beta\varphi} + e^{\beta(2\varphi-\eta)} (1 + \beta^2 \psi_3 \chi_3 e^{-\beta\varphi}) (1 + \beta^2 \psi_1 \chi_1 e^{-\beta\varphi}) - 2 \right). \quad (\text{III.1.16})$$

Aqui temos reescalado os campos como em (II.2.39) de modo que $\beta^2 = -\frac{2\pi}{k}$. O potencial tem sido trasladado para que seu mínimo satisfaça $V_{min} = 0$.

III.2 Curvatura nula e as Equações de Movimento

As equações de movimento para o modelo (III.1.13) podem ser escritas na forma de Leznov-Saveliev [17]

$$\bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] = 0, \quad \partial(\bar{\partial} B B^{-1}) - [\epsilon_+, B\epsilon_- B^{-1}] = 0. \quad (\text{III.2.17})$$

Como $[\lambda_a \cdot H^{(0)}, \epsilon_{\pm}] = 0$ ($a = 1, 3$), o traço das equações anteriores com $\lambda_a \cdot H^{(0)}$ é nulo. Então os vínculos

$$\begin{aligned} J_{\lambda_a \cdot H^{(0)}} &= Tr(B^{-1}\partial B \lambda_a \cdot H^{(0)}) = 0 \\ \bar{J}_{\lambda_a \cdot H^{(0)}} &= Tr(\bar{\partial} B B^{-1} \lambda_a \cdot H^{(0)}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.2.18})$$

podem ser impostos consistentemente, levando as equações para os campos não locais R_1 e R_3 :

$$\partial R_1 = \frac{3\beta\psi_1\partial\chi_1(1 + \frac{2\beta^2}{3}\psi_3\chi_3e^{-\beta\varphi})e^{-\beta\varphi} - \beta\psi_3\partial\chi_3e^{-\beta\varphi}}{2\Delta},$$

$$\begin{aligned}
\partial R_3 &= \frac{3\beta\psi_3\partial\chi_3(1 + \frac{2\beta^2}{3}\psi_1\chi_1e^{-\beta\varphi})e^{-\beta\varphi} - \beta\psi_1\partial\chi_1e^{-\beta\varphi}}{2\Delta}, \\
\bar{\partial}R_1 &= \frac{3\beta\chi_1\bar{\partial}\psi_1(1 + \frac{2\beta^2}{3}\psi_3\chi_3e^{-\beta\varphi})e^{-\beta\varphi} - \beta\chi_3\bar{\partial}\psi_3e^{-\beta\varphi}}{2\Delta}, \\
\bar{\partial}R_3 &= \frac{3\beta\chi_3\bar{\partial}\psi_3(1 + \frac{2\beta^2}{3}\psi_1\chi_1e^{-\beta\varphi})e^{-\beta\varphi} - \beta\chi_1\bar{\partial}\psi_1e^{-\beta\varphi}}{2\Delta}. \quad (\text{III.2.19})
\end{aligned}$$

Alternativamente, (III.2.17) admite a representação de curvatura nula

$$\partial\bar{\mathcal{A}} - \bar{\partial}\mathcal{A} - [\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] = 0, \quad (\text{III.2.20})$$

onde

$$\mathcal{A} = -B\epsilon_-B^{-1}, \quad \bar{\mathcal{A}} = \epsilon_+ + \bar{\partial}BB^{-1}. \quad (\text{III.2.21})$$

Este é o fato mais importante na prova da integrabilidade do modelo. Uma vez que as equações de movimento podem ser escritas na representação de curvatura nula, é garantida a existência de infinitas cargas conservadas. Aqui poderíamos completar a prova da integrabilidade calculando a correspondente matriz R -clássica e o conjunto infinito de cargas conservadas em involução, como foi feito em [23], mas este cálculo é padrão para todos os modelos de Toda afins abelianos ou não abelianos.

As equações de movimento obtidas a partir da ação (III.1.13) coincidem com as derivadas da condição de curvatura nula (III.2.20) e se expressam como:

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial} \left(\frac{e^{-\beta\varphi}}{\Delta} (\Delta_j \partial\chi_i + \frac{\beta^2}{4} \chi_i \psi_j \partial\chi_j e^{-\beta\varphi}) \right) \\
&+ \frac{\bar{\partial}R_i (4\partial\chi_i + \beta^2 \psi_j (3\chi_j \partial\chi_i + \chi_i \partial\chi_j) e^{-\beta\varphi}) e^{-\beta\varphi}}{8\Delta} \\
&+ \mu^2 \chi_i e^{\beta(2\varphi-\eta)} (1 + \beta^2 \chi_j \psi_j e^{-\beta\varphi}) = 0,
\end{aligned} \quad (\text{III.2.22})$$

$$\partial \left(\frac{e^{-\beta\varphi}}{\Delta} (\Delta_j \bar{\partial}\psi_i + \frac{\beta^2}{4} \psi_i \chi_j \bar{\partial}\psi_j e^{-\beta\varphi}) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial R_i(4\bar{\partial}\psi_i + \beta^2\chi_j(3\psi_j\bar{\partial}\psi_i + \psi_i\bar{\partial}\psi_j)e^{-\beta\varphi})e^{-\beta\varphi}}{8\Delta} \\
& + \mu^2\psi_i e^{\beta(2\varphi-\eta)}(1 + \beta^2\psi_j\chi_j e^{-\beta\varphi}) = 0,
\end{aligned} \tag{III.2.23}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\partial} \left(\partial\varphi + \frac{\beta(\psi_1\partial\chi_1 + \psi_3\partial\chi_3)e^{-\beta\varphi}}{2\Delta} + \beta^3 \frac{\psi_1\psi_3(\chi_1\partial\chi_3 + \chi_3\partial\chi_1)e^{-2\beta\varphi}}{2\Delta} \right) \\
& + 2\frac{\mu^2}{\beta}(e^{-\beta 2\varphi} + e^{\beta(2\varphi-\eta)}) + \mu^2\beta(\psi_1\chi_1 + \psi_3\chi_3)e^{\beta(\varphi-\eta)} = 0,
\end{aligned} \tag{III.2.24}$$

$$\partial\bar{\partial}\eta = 0, \tag{III.2.25}$$

$$\partial\bar{\partial}\nu - \frac{\mu^2}{\beta}e^{-\beta\eta}(e^{2\beta\varphi} + \beta^2(\psi_1\chi_1 + \psi_3\chi_3)e^{\beta\varphi} + \beta^4\chi_1\chi_3\psi_1\psi_3) = 0, \tag{III.2.26}$$

onde para $i = 1, 3$ corresponde $j = 3, 1$ respectivamente. No que segue consideramos $\eta = 0$, o qual é consistente com (III.2.25).

III.3 Simetrias da ação e do vácuo

A presença de soluções tipo sólitons topológicos no modelo $A_3^{(1)}(p=2)$, cuja ação é (III.1.13), está intrinsicamente relacionada ao fato de que o potencial (III.1.16) apresenta infinitos zeros diferentes, os quais são também seus mínimos. A origem desta estrutura do vácuo é consequência de certas simetrias discretas da ação (III.1.13) que por sua vez é consequência da existência de cargas topológicas. Desta forma para valores imaginários de $\beta = i\beta_0$, a ação (III.1.13) é invariante perante as transformações discretas

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \varphi + \left(\frac{\pi}{\beta_0}\right)N, \\
\psi'_1 &= e^{\frac{i\pi}{2}(N+2s_1)}\psi_1, & \psi'_3 &= e^{-\frac{i\pi}{2}(N-2s_3)}\psi_3, \\
\chi'_1 &= e^{\frac{i\pi}{2}(N+2\tilde{s}_1)}\chi_1, & \chi'_3 &= e^{-\frac{i\pi}{2}(N-2\tilde{s}_3)}\chi_3,
\end{aligned} \tag{III.3.27}$$

onde N é um inteiro arbitrário e $s_a, \tilde{s}_a$ ($a = 1, 3$) são os dois inteiros, ambos pares ou ímpares, de modo que

$$s_a + \tilde{s}_a = 2S'_a, \quad s_a - \tilde{s}_a = 2L'_a$$

e $S'_a, L'_a \in \mathbb{Z}$.

A ação (III.1.13) é também invariante perante a transformação CP:

$$\varphi'' = \varphi, \quad \psi''_a = \chi_a, \quad \chi''_a = \psi_a,$$

$$Px = -x, \quad P\partial = \bar{\partial}. \quad (\text{III.3.28})$$

Para melhor estudar a estrutura do vácuo deste modelo e esclarecer como as simetrias anteriores estão relacionadas com a presença de múltiplos zeros no potencial, introduzimos a parametrização :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{\beta_0} e^{i\beta_0(\frac{1}{2}\varphi - \theta_1)} \sinh(\beta_0 \mathcal{R}_1), & \chi_1 &= \frac{1}{\beta_0} e^{i\beta_0(\frac{1}{2}\varphi + \theta_1)} \sinh(\beta_0 \mathcal{R}_1), \\ \psi_3 &= \frac{1}{\beta_0} e^{i\beta_0(\frac{1}{2}\varphi - \theta_3)} \sinh(\beta_0 \mathcal{R}_3), & \chi_3 &= \frac{1}{\beta_0} e^{i\beta_0(\frac{1}{2}\varphi + \theta_3)} \sinh(\beta_0 \mathcal{R}_3). \end{aligned}$$

As transformações (III.3.27) e (III.3.28) nesta parametrização adquirem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_a &= \mathcal{R}_a, & \theta'_a &= \theta_a + \frac{\pi}{\beta_0} L'_a, \\ \mathcal{R}''_a &= \mathcal{R}_a, & \theta''_a &= -\theta_a + \frac{2\pi}{\beta_0} L''_a, \end{aligned} \quad (\text{III.3.29})$$

com L'_a e L''_a inteiros arbitrários. Combinando as transformações θ'_a e θ''_a encontramos que

$$\tilde{\theta}_a = -\frac{i}{2\beta_0} \ln \left(\frac{\tilde{\chi}_a}{\tilde{\psi}_a} \right) = \theta_a - \frac{\pi L_a}{2\beta_0}, \quad L_a = 2L''_a - L'_a. \quad (\text{III.3.30})$$

Nesta expressão vemos que para $\tilde{\theta}_a = 0$, mas $\frac{\tilde{\chi}_a}{\tilde{\psi}_a} \neq 0$, existe $\theta_a^{(L)} = \frac{\pi L}{2\beta_0}$, de modo que além do vácuo trivial do potencial $\varphi = 0, \mathcal{R}_a = 0, \theta_a = 0$,

com $N = L_a = 0$, este modelo (III.1.13) apresenta um conjunto infinito de diferentes vácuos parametrizados por inteiros $N, L \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi^{(N)} = \left(\frac{\pi}{\beta_0}\right) N, \quad \mathcal{R}_a^{(0)} = 0, \quad \theta_a^{(L)} = \frac{\pi L}{2\beta_0} \quad (\text{III.3.31})$$

os quais definem a rede dos vácuos $(\varphi^{(N)}, \theta_a^{(L)})$. Desta forma os campos vão ter um conjunto de condições de fronteira não triviais permissíveis para $x = \pm\infty$:

$$\varphi^{(N)}(\pm\infty) = \left(\frac{\pi}{\beta_0}\right) N_{\pm}, \quad \mathcal{R}_a(\pm\infty) = 0, \quad \theta_a^{(L)}(\pm\infty) = \frac{\pi L_a^{\pm}}{2\beta_0}, \quad (\text{III.3.32})$$

ou seja $\psi_a(\pm\infty) = \chi_a(\pm\infty) = 0$, mas $\psi_a/\chi_a(\pm\infty) \neq 0$.

A existência destes valores assintóticos dos campos possibilita a presença de sólitons topológicos com energia finita, os quais interpolam entre diferentes vácuos $(N_{\pm}, L_a^{(\pm)})$. As correspondentes cargas topológicas:

$$j_{\varphi} = N_+ - N_- = 0, 1 \bmod 2, \quad j_{\theta}^a = L_a^+ - L_a^- = 0, 1, \dots \bmod 2$$

estão representadas pelas correntes e cargas topológicas:

$$J_{\varphi}^{\mu} = \frac{4}{\beta_0} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \varphi, \quad Q^{top} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\varphi}^0 dx = Q_{mag}, \quad Q_{mag} = \frac{4\pi}{\beta_0^2} j_{\varphi}, \quad (\text{III.3.33})$$

e

$$J_{\theta}^{\mu,a} = \beta_0 \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \theta_a, \quad Q_{\theta}^a = \int J_{\theta}^{0,a} dx = \frac{\pi j_{\theta}^a}{2}. \quad (\text{III.3.34})$$

Além das transformações (III.3.27) e (III.3.28) que nos permitem determinar a rede dos vácuos $(\varphi^{(N)}, \theta_a^{(L)})$, existem outras simetrias discretas do modelo $A_3^{(1)}(p=2)$ (III.1.13). Assim, mais dois grupos discretos deixam a ação (III.1.13) invariante:

1. Reflexões Z_2 :

$$\varphi''' = \varphi, \quad \psi_1''' = \psi_3, \quad \psi_3''' = \psi_1, \quad \chi_1''' = \chi_3, \quad \chi_3''' = \chi_1. \quad (\text{III.3.35})$$

2. Transformação composta de Weyl ΠP :

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \Pi(B^{-1}), \quad \Pi(\epsilon_+) = \epsilon_-, \quad \Pi^2 = 1, \\ \Pi(E_{\alpha_a}) &= E_{\Pi(\alpha_a)} = E_{\alpha_a}, \quad a = 1, 3, \quad P\partial = \bar{\partial} \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.3.36})$$

Estas ultimas simetrias $Z_2 \otimes Z_2$ (III.3.35) e (III.3.36) impõem certas relações de equivalência na rede dos vácuos $(\varphi^{(N)}, \theta_a^{(L)}) \in Z_2 \otimes Z_2$. Como resultado o vácuo irredutível se encontra no coset $(Z_2 \otimes Z_2)/Z_2 \otimes Z_2$, ou seja (III.3.32) com a identificação (III.3.35) e (III.3.36).

Uma característica importante deste modelo (III.1.13) é a presença da simetria continua global $U(1) \otimes U(1)$:

$$\psi'_a = e^{i\beta_0^2 \epsilon_a} \psi_a, \quad \chi'_a = e^{-i\beta_0^2 \epsilon_a} \chi_a, \quad \varphi' = \varphi, \quad (\text{III.3.37})$$

onde ϵ_a são parâmetros arbitrários reais de $U(1) \otimes U(1)$.

Levando em conta a definição (III.2.19) dos campos não locais R_a , as correspondentes correntes de Noether “elétricas” (que se derivam da ação (III.1.13)) podem-se escrever de forma simples como

$$J_1^{\mu, el} = \frac{\beta_0}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu (3R_1 + R_3), \quad J_3^{\mu, el} = \frac{\beta_0}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu (R_1 + 3R_3). \quad (\text{III.3.38})$$

Desta maneira os sólitons topológicos com valores assintóticos não triviais dos campos R_a , ou seja $R_a(+\infty) \neq R_a(-\infty)$, vão ter cargas elétricas:

$$Q_1^{el} = \int_{-\infty}^{\infty} J_1^{0, el} dx = \frac{\beta_0}{2} [3(R_1(\infty) - R_1(-\infty)) + R_3(\infty) - R_3(-\infty)], \quad (\text{III.3.39})$$

$$Q_3^{el} = \int_{-\infty}^{\infty} J_3^{0, el} dx = \frac{\beta_0}{2} [(R_1(\infty) - R_1(-\infty)) + 3(R_3(\infty) - R_3(-\infty))].$$

Desta forma obteremos sólitons topológicos que portaram diferentes combinações de carga elétrica: $(0, 0)$, ou sólitons neutros, $(Q_1, 0)$, $(0, Q_3)$ e (Q_1, Q_3) , ou dyons.

III.4 Equações de primeira ordem

A relação existente entre as transformações de “dressing” (ver seção III.5) e as transformações de Bäcklund [24] nos permite derivar de uma forma simples as equações de 1-sóliton para uma grande classe dos modelos de Toda não abelianos e afins de grau um. Desta forma, consideremos duas soluções particulares B_0 e B das equações de movimento (III.2.17). As suas correspondentes conexões de Lax $\mathcal{A}_0$, $\bar{\mathcal{A}}_0$, $\mathcal{A}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ (III.2.21) as podemos relacionar mediante as transformações de calibre:

$$\mathcal{A} = \theta_{\pm} \mathcal{A}_0 \theta_{\pm}^{-1} + \partial \theta_{\pm} \theta_{\pm}^{-1} \quad (\text{III.4.40})$$

e

$$\bar{\mathcal{A}} = \theta_{\pm} \bar{\mathcal{A}}_0 \theta_{\pm}^{-1} + \bar{\partial} \theta_{\pm} \theta_{\pm}^{-1}. \quad (\text{III.4.41})$$

Se definimos

$$\theta = X + B_0^{-1} Y B \quad (\text{III.4.42})$$

onde os elementos constantes X e Y pertencem a álgebra envelope universal de $A_3^{(1)}$, e são escolhidos de modo a gerar todo o subespaço que satisfaz

$$[X, \epsilon_-] = 0 \quad \text{e} \quad [Y, \epsilon_+] = 0. \quad (\text{III.4.43})$$

Introduzimos (III.4.42) em (III.4.40) e em (III.4.41), primeiramente. Posteriormente avaliamos os potenciais na condição de curvatura nula (III.2.20), assim obtemos as equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} X B^{-1} \partial B - B_0^{-1} \partial B_0 X + [B_0^{-1} Y B, \epsilon_-] &= 0, \\ \bar{\partial} B_0 B_0^{-1} Y - Y \bar{\partial} B B^{-1} - [B_0 X B^{-1}, \epsilon_+] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.4.44})$$

as quais, junto com o sistema equivalente que se obtém ao aplicar a simetria Z_2 de reflexão (III.3.35), nos conduzem às equações de primeira ordem do sóliton.

Neste modelo expressamos os elementos constantes $X(\lambda, a_i), Y(\lambda, b_i)$ como

$$\begin{aligned} X &= X_{01}I + X_{02}\lambda_1 \cdot H + X_{03}\lambda_3 \cdot H + a_1\epsilon_-, \\ Y &= Y_{01}I + Y_{02}\lambda_1 \cdot H + Y_{03}\lambda_3 \cdot H + b_1\epsilon_+ \end{aligned}$$

onde I é a identidade, $X_{0i}(\lambda), Y_{0i}(\lambda), a_1(\lambda)$ e $b_1(\lambda)$ são funções arbitrárias do parâmetro espectral λ ,

$$B_0 = e^{i\beta_0(c_1\lambda_1 \cdot H + c_3\lambda_3 \cdot H)} \quad (\text{III.4.45})$$

é uma solução de vácuo constante das equações de Leznov-Saveliev (III.2.17).

Na verdade as equações de segunda ordem (III.2.17) são as condições de integrabilidade para as equações de primeira ordem (III.4.44) quando as condições (III.4.43) são satisfeitas. Devemos assinalar que a consistência das equações (III.4.44) com suas respectivas imagens pela reflexão Z_2 requiere a existência de certas relações algébricas específicas para as equações de sóliton.

Com a parametrização do B de (III.1.4) introduzido em (III.4.44) e levando em conta (III.2.19) obtemos o sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \partial\Phi_p &= \frac{\mu\gamma}{\beta} \left[e^{-\beta\Phi_p} - e^{-\beta\Phi_{p-1}} + \beta^2(\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1 - \tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3)\delta_{p,1} \right], \\ \bar{\partial}\Phi_p &= \frac{\mu}{\beta\gamma} \left[e^{\beta\Phi_p} - e^{\beta\Phi_{p+1}} - \beta^2(\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1 - \tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3)\delta_{p,2} \right], \quad p = 1, 2 \\ \partial\tilde{\psi}_1 &= -\mu\gamma\tilde{\psi}_1e^{-\beta\Phi_2} \left(1 + \beta^2\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3e^{\beta\Phi_2} - \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1e^{\beta\Phi_2} \right), \\ \partial\tilde{\psi}_3 &= -\mu\gamma\tilde{\psi}_3e^{\beta\Phi_1} \left(1 + \beta^2\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1e^{-\beta\Phi_1} - \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3e^{-\beta\Phi_1} \right), \\ \partial\tilde{\chi}_1 &= -\mu\gamma\tilde{\chi}_1e^{\beta\Phi_1} \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1e^{-\beta\Phi_1} \right), \\ \partial\tilde{\chi}_3 &= -\mu\gamma\tilde{\chi}_3e^{-\beta\Phi_2} \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3e^{\beta\Phi_2} \right), \\ \bar{\partial}\tilde{\psi}_1 &= \frac{\mu}{\gamma}\tilde{\psi}_1e^{\beta\Phi_1} \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1e^{-\beta\Phi_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\tilde{\psi}_3 &= \frac{\mu}{\gamma}\tilde{\psi}_3 e^{-\beta\Phi_2} \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 e^{\beta\Phi_2}\right), \\
\bar{\partial}\tilde{\chi}_1 &= \frac{\mu}{\gamma}\tilde{\chi}_1 e^{-\beta\Phi_2} \left(1 + \beta^2\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 e^{\beta\Phi_2} - \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 e^{\beta\Phi_2}\right), \\
\bar{\partial}\tilde{\chi}_3 &= \frac{\mu}{\gamma}\tilde{\chi}_3 e^{\beta\Phi_1} \left(1 + \beta^2\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1 e^{-\beta\Phi_1} - \frac{\beta^2}{2}\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 e^{-\beta\Phi_1}\right), \quad (\text{III.4.46})
\end{aligned}$$

onde o parâmetro de transformação de Bäcklund é

$$\gamma = e^{-b} \quad (\text{III.4.47})$$

mais a relação algébrica:

$$e^{-\beta\Phi_1} - e^{\beta\Phi_2} = e^{-\beta\Phi_2} - e^{\beta\Phi_1} + \beta^2(\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 - \tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1). \quad (\text{III.4.48})$$

É importante assinalar que temos definido novas variáveis Φ_p , $\tilde{\psi}_a$ e $\tilde{\chi}_a$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \varphi - \frac{1}{4}R, \quad \Phi_2 = -\varphi - \frac{1}{4}R, \quad R = R_1 - R_3, \\
\tilde{\psi}_3 &= \psi_3 e^{\frac{R}{8}}, \quad \tilde{\chi}_3 = \chi_3 e^{\frac{R}{8}}, \quad \tilde{\psi}_1 = \psi_1 e^{-\frac{R}{8}}, \quad \tilde{\chi}_1 = \chi_1 e^{-\frac{R}{8}}. \quad (\text{III.4.49})
\end{aligned}$$

Ao expressar as equações de primeira ordem (III.4.46) em função destas novas variáveis, se simplifica a construção das soluções de 1-sóliton das equações (III.4.46). Os campos não locais R_a ($a = 1, 3$) satisfazem o conjunto de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\partial R_1 &= \frac{\mu\gamma\beta}{2}(\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 - 3\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1), \\
\partial R_3 &= \frac{\mu\gamma\beta}{2}(\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1 - 3\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3), \\
\bar{\partial} R_1 &= \frac{\beta\mu}{2\gamma}(3\tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1 - \tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3), \\
\bar{\partial} R_3 &= \frac{\beta\mu}{2\gamma}(3\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 - \tilde{\psi}_1\tilde{\chi}_1), \quad (\text{III.4.50})
\end{aligned}$$

como consequência da definição (III.2.19).

Do sistema (III.4.46), (III.4.48) e (III.4.50) podemos derivar as seguintes leis de conservação solitônicas:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} \left(\gamma e^{-\beta \Phi_p} \right) + \partial \left(\frac{1}{\gamma} e^{\beta \Phi_{p+1}} \right) &= 0, \\
\left(\gamma \bar{\partial} + \frac{1}{\gamma} \partial \right) e^{\pm \beta \Phi_p} &= 0, \quad p = 1, 2, \\
\left(\gamma \bar{\partial} - \frac{1}{\gamma} \partial \right) \ln \left(\frac{\tilde{\psi}_a}{\tilde{\chi}_a} \right) &= 0, \quad a = 1, 3, \\
\left(\gamma \bar{\partial} + \frac{1}{\gamma} \partial \right) \tilde{\psi}_a \tilde{\chi}_a &= 0, \\
\left(\gamma \bar{\partial} + \frac{1}{\gamma} \partial \right) (R_1 \pm R_3) &= 0, \\
\nabla \ln \left(\frac{\tilde{\psi}_1}{\tilde{\chi}_1} e^{\frac{1}{4} R} \right) &= \nabla \ln \left(\frac{\tilde{\psi}_3}{\tilde{\chi}_3} e^{-\frac{1}{4} R} \right), \quad \nabla = \partial, \bar{\partial}
\end{aligned} \tag{III.4.51}$$

Estas leis de conservação são de muita utilidade na construção das soluções de 1-sóliton do sistema (III.4.46) e (III.4.48).

III.4.1 Soluções tipo sóliton

O sistema de equações de primeira ordem (III.4.46) pode ser resolvido segundo o método explicado em [10]. Introduzindo as novas variáveis $\rho_{\pm}$:

$$\begin{aligned}
\rho_+ &= x \cosh(b) - t \sinh(b), \quad \partial_{\rho_+} = \sinh(b) \partial_t + \cosh(b) \partial_x, \\
\rho_- &= t \cosh(b) - x \sinh(b), \quad \partial_{\rho_-} = \cosh(b) \partial_t + \sinh(b) \partial_x, \quad b = -\ln \gamma,
\end{aligned}$$

Encontramos as soluções de 1-sóliton:

$$e^{i\beta_0\varphi} = \frac{e^{-f} - e^{2i\alpha} e^f}{(e^{-f} + e^f)^{\frac{1}{2}} (e^{-f} + e^{4i\alpha} e^f)^{\frac{1}{2}}}, \tag{III.4.52}$$

$$\beta_0^2 \psi_1 \chi_1 = \frac{N^2 (e^{-f} + e^f)^{-\frac{1}{2}} (e^{-f} + e^{4i\alpha} e^f)^{-\frac{1}{2}}}{(A_1 e^{-f} + A_2 e^f)}, \tag{III.4.53}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{\beta_0} e^{-i(\mu\rho_- \sin(\alpha)+p_1)} \sqrt{\psi_1 \chi_1}, & \chi_1 &= \frac{1}{\beta_0} e^{i(\mu\rho_- \sin(\alpha)+p_1)} \sqrt{\psi_1 \chi_1}, \\
\psi_3 &= \frac{N e^{-d_2} e^{i(\mu\rho_- \sin(\alpha)+p_3)} (e^{-f} + e^{4i\alpha} e^f)^{-\frac{1}{8}}}{\beta (A_1 e^{-f} + A_2 e^f)^{\frac{1}{2}} (e^{-f} + e^f)^{\frac{1}{4}}}, \\
\chi_3 &= \frac{N e^{-d_1} e^{-i(\mu\rho_- \sin(\alpha)+p_3)} (e^{-f} + e^{4i\alpha} e^f)^{-\frac{1}{8}}}{\beta (A_1 e^{-f} + A_2 e^f)^{\frac{1}{2}} (e^{-f} + e^f)^{\frac{1}{4}}},
\end{aligned} \tag{III.4.54}$$

onde $f = \mu\rho_+ \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \ln X_0$, X_0 é uma constante arbitrária que determina o centro de massa do sóliton, $N^2 = (1 + e^{-2i\alpha})(e^{4i\alpha} - 1)$, c_0, d_1, d_2 constantes complexas arbitrárias com $2i \sin \alpha = c_0$, por último p_1, p_3 são constantes arbitrárias. Então o sóliton (Q_1, Q_3) tipo dyon do modelo $A_3^{(1)}$ (III.1.13) está representado pelo conjunto de funções (III.4.52), (III.4.53) e (III.4.54) das variáveis do espaço-tempo ρ_+ e ρ_- .

Para finalizar esta seção gostaríamos de frisar que tanto a ação (III.1.13), como o sistema de equações de primeira ordem (III.4.46)-(III.4.48) possuem dois limites interessantes:

- $\psi_1 = \chi_1 = 0$, ($R_3 = \text{const.}$) ou $\psi_3 = \chi_3 = 0$, ($R_1 = \text{const.}$) levando-nos ao modelo integrável $A_2^{(1)}(p = 1)$ (II.2.41) desenvolvido em [8] e [9], e cujos sólitons topológicos são os sólitons do modelo $A_3^{(1)}(p = 2)$ (III.1.13) com uma carga elétrica: $(0, Q_3)$ ou $(Q_1, 0)$.
- $\psi_1 = \chi_1 = \psi_3 = \chi_3 = 0$ nos conduz ao modelo de Toda abeliano afim $A_1^{(1)}$ (*sine Gordon*) com seus sólitons neutros $(0, 0)$ como caso particular dos sólitons (Q_1, Q_3) .

III.4.2 Espectro dos sólitons

Uma das propriedades mais importantes das soluções solitônicas é que a energia das mesmas seja finita. Isto juntamente com o fato de que elas podem

carregar cargas não triviais (sejam estas tanto cargas topológicas quanto cargas elétricas $((Q_1, Q_3)$, no caso de $A_3^{(1)}$ ($p = 2$))) faz com que elas manifestem um comportamento análogo ao de partículas com espectro, por exemplo, $M, E, Q_1^{el}, Q_3^{el}, Q_{mag}, Q_\theta^a$ para $A_3^{(1)}$ ($p = 2$). As cargas do sólito Q_a^{el}, Q_{mag} e Q_θ^a , a energia E e a massa M , dependem das condições de fronteira, ou seja, dos valores assintóticos dos campos $\varphi, \psi_a e \chi_a$ (para $x \rightarrow \pm\infty$), e das simetrias das equações diferenciais de primeira ordem (III.4.46). Realmente, a forma explícita do espectro solitônico pode ser derivado sem o conhecimento da solução exata de 1-sólito (III.4.52)-(III.4.54). Os argumentos utilizados são muito parecidos aos usados em [25], [9] para calcular o espectro dos sólitons dos modelos de Toda abelianos afins e do modelo $A_n^{(1)}$ ($p = 1$), respectivamente.

Primeiramente verificamos a “lei de conservação solitônica”:

$$\bar{\partial}F^- = \partial F^+, \quad (\text{III.4.55})$$

onde

$$\begin{aligned} F^- &= -\frac{\mu\gamma}{\beta^2} \left(\sum_{k=1}^2 e^{-\beta\Phi_k} + \beta^2 \tilde{\psi}_3 \tilde{\chi}_3 \right), \\ F^+ &= \frac{\mu}{\gamma\beta^2} \left(\sum_{k=1}^2 e^{\beta\Phi_k} + \beta^2 \tilde{\psi}_1 \tilde{\chi}_1 \right). \end{aligned} \quad (\text{III.4.56})$$

Por consequência o potencial de $A_3^{(1)}$ ($p = 2$) (III.1.16) pode ser escrito como

$$V = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}F^- + \partial F^+).$$

Posteriormente, demonstramos (usando as equações de 1-sólito (III.4.46), (III.4.48) e (III.4.50)) que as componentes do tensor energia-momento $T_{00} = T^+ + T^- + 2V$, $T_{01} = T^+ - T^-$, com

$$\begin{aligned} 2T^+ &= \partial\varphi\partial\varphi + \frac{1}{\Delta} \left[e^{-\beta\varphi} \Delta_3 \partial\psi_1 \partial\chi_1 + e^{-\beta\varphi} \Delta_1 \partial\psi_3 \partial\chi_3 \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \frac{e^{-2\beta\varphi}}{4} (\chi_1 \psi_3 \partial\chi_3 \partial\psi_1 + \chi_3 \psi_1 \partial\chi_1 \partial\psi_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.4.57})$$

e $T^- = T^+(\partial \rightarrow \bar{\partial})$ são derivadas totais, ou seja,

$$T_{00} = \partial_x (F^- - F^+) \quad \text{e} \quad T_{01} = \partial_x (F^- + F^+).$$

Desta forma somente os termos de fronteira contribuem para a energia e o momento da solução de 1-sóliton com carga elétrica (Q_1, Q_3) (III.4.52) - (III.4.54)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} T_{00} dx = (F^- - F^+)|_{-\infty}^{+\infty}, \\ P &= \int_{-\infty}^{+\infty} T_{01} dx = (F^- + F^+)|_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned} \quad (\text{III.4.58})$$

Por último calculamos a energia E , o momento P e a massa do sóliton $M = \sqrt{E^2 - P^2}$ em termos dos valores assintóticos dos campos $\varphi, \psi_a, \chi_a e R_a$.

A análise da estrutura do vácuo clássico do modelo $A_3^{(1)}(p=2)$ apresentado na seção III.3 (III.3.32), ou seja, a existência de soluções triviais constantes correspondentes aos múltiplos zeros do potencial para $\beta = i\beta_0$ fornece a relação completa das condições de fronteira admissíveis para os sólitons:

$$\begin{aligned} \varphi(\pm\infty) &= \left(\frac{\pi}{\beta_0}\right) N^\pm, \quad (\psi_a \chi_a)(\pm\infty) = 0, \quad R_a(\pm\infty) = \frac{2\pi}{\beta_0} f_\pm^{(a)}, \\ f_\pm &= (f_\pm^{(1)} - f_\pm^{(3)}), \quad i \ln \frac{\psi_a}{\chi_a}(\pm\infty) = \pi L_\pm^a, \end{aligned} \quad (\text{III.4.59})$$

onde $N_\pm, L_\pm^a$ são inteiros arbitrários e $f_\pm^a$ são números reais. Substituindo estes valores assintóticos em (III.4.58) derivamos a fórmula da massa:

$$\begin{aligned} M &= \frac{8\mu}{\beta_0^2} \left| \sin \left[\frac{\pi}{2} (j_\varphi - (f_+ - f_-) \frac{1}{2}) \right] \right|, \\ j_\varphi &= N_+ - N_- = 0, \pm 1. \end{aligned} \quad (\text{III.4.60})$$

A equação (III.4.60) pode ser ainda mais simplificada se levamos em conta as equações (III.3.33) e (III.3.39). Assim temos que

$$Q_1^{el} - Q_3^{el} = 2\pi(f_+ - f_-), \quad Q_{mag} = \frac{4\pi}{\beta_0^2} j_\varphi \quad (\text{III.4.61})$$

Portanto as massas dos 1-sóliton as podemos escrever como:

$$M = \frac{8\mu}{\beta_0^2} \left| \sin \left(\frac{\beta_0^2 Q_{mag} - Q_1^{el} + Q_3^{el}}{8} \right) \right|. \quad (\text{III.4.62})$$

Ao analisar esta expressão poderíamos-nos perguntar sobre a existência de soluções de 1-sóliton não massivas, ou seja, para

$$\beta_0 Q_{mag} - Q_1^{el} + Q_3^{el} = 8\pi s, \quad s \in Z, \quad (\text{III.4.63})$$

a massa é nula. Acontece que esta equação é somente satisfeita para $\alpha = \alpha_s = \pi(s - \frac{1}{2})$, onde α é um dos parâmetros da solução (III.4.52-III.4.54) com

$$\pi f_+ = 2[\alpha + \pi s_+] \quad \text{e} \quad \pi f_- = 2[\pi s_- - (\alpha - \pi \text{sign } \alpha)], \quad (\text{III.4.64})$$

onde s_+ e s_- são inteiros. Para este valor de α_s , o $\cos \alpha_s = 0$ e portanto $f(\alpha_s) = \text{const}$, coincidindo desta forma com a solução de vácuo constante trivial. Portanto, não descreve soluções de 1-sóliton e podemos concluir que as cargas da solução de 1-sóliton satisfazem:

$$\beta_0 Q_{mag} - Q_1^{el} + Q_3^{el} \neq 8\pi s, \quad s \in Z. \quad (\text{III.4.65})$$

III.5 Operadores de Vértice de $A_3^{(1)}$ e funções tau

Transformações de “Dressing”

O método de “dressing” é baseado na consideração de que existem duas transformações de calibre $\theta^\pm$ que mapeiam o vácuo numa configuração não trivial.

Desta forma, consideremos duas soluções arbitrárias $B_s \in G_0$ ($s = 1, 2$) das equações (III.2.17):

$$B_s = g_{0s} e^{\nu_s \hat{e} + \eta_s \hat{d}},$$

com as correspondentes conexões de Lax (III.2.21) $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(B_s)$ e $\bar{\mathcal{A}}(s) = \bar{\mathcal{A}}(B_s)$ que vão estar relacionadas por transformações de calibre $\theta_{-,+} = \exp \mathcal{G}_{<,>}$, de modo que

$$\mathcal{A}_\mu(2) = \theta_\pm \mathcal{A}_\mu(1) \theta_\pm^{-1} + (\partial_\mu \theta_\pm) \theta_\pm^{-1}, \quad (\text{III.5.66})$$

o que é conhecido como transformações de “dressing”. Estas transformações deixam invariante as equações de movimento (III.2.17) e o problema linear auxiliar

$$(\partial_\mu - \mathcal{A}(B_s)_\mu) T_s(B_s) = 0, \quad (\text{III.5.67})$$

ou seja, as conexões de calibre puras $\mathcal{A}_\mu$ definidas em termos da matriz de monodromia $T(B_s)$.

Escrevendo (III.5.66) usando (III.5.67) obtemos que

$$\mathcal{A}_\mu(2) = \partial_\mu T_2 T_2^{-1} = \partial_\mu (\theta_\pm T_1) (\theta_\pm T_1)^{-1}, \quad (\text{III.5.68})$$

onde é fácil ver que a consistência das equações (III.5.66) e (III.5.67) implica que as relações seguintes sejam satisfeitas

$$T_2 = \theta_\pm T_1, \quad (\text{III.5.69})$$

e

$$\theta_+ T_1 = \theta_- T_1 g^{(1)} \quad (\text{III.5.70})$$

onde $g^{(1)} \in G$ é um elemento constante arbitrário do grupo afim correspondente.

Suponhamos agora que $T_1 = T_0(B_{vac})$ é a solução de vácuo tal que

$$\bar{\partial} B_{vac} B_{vac}^{-1} = \mu^2 z \hat{c}, \quad B_{vac} \epsilon_- B_{vac}^{-1} = \epsilon_-, \quad (\text{III.5.71})$$

$$\mathcal{A}_{vac} = -\epsilon_-, \quad \bar{\mathcal{A}}_{vac} = \epsilon_+ + \mu^2 z \hat{c}. \quad (\text{III.5.72})$$

Avaliando (III.5.72) na condição de curvatura nula (III.2.20) obtemos que

$$[\epsilon_+, \epsilon_-] = \mu^2 \hat{c} \quad . \quad (\text{III.5.73})$$

De (III.5.67) obtemos que

$$\mathcal{A}_{vac} = \partial T_0 T_0^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{A}}_{vac} = \bar{\partial} T_0 T_0^{-1}, \quad (\text{III.5.74})$$

que ao comparar com (III.5.72) vemos que

$$T_0 = \exp(-z\epsilon_-) \exp(\bar{z}\epsilon_+). \quad (\text{III.5.75})$$

Assim, de acordo com as equações (III.5.66) e (III.5.69), cada solução $T_2 = T(B)$ pode ser obtida a partir da configuração de vácuo (III.5.71-III.5.72) mediante a escolha da transformação de calibre apropriada $\theta_{\pm}$. Desta forma, se em (III.5.66) $A_{\mu}(1)$ é a configuração de vácuo então $A_{\mu}(2)$ é uma configuração qualquer, com as conexões de Lax segundo (III.2.21). Isto nos permitem derivar $\theta_{\pm}$ como funcionais do B , ou seja $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}(B)$. Usando (III.5.70), obtemos

$$\theta_-^{-1} \theta_+ = T_0 g^{(1)} T_0^{-1}. \quad (\text{III.5.76})$$

Esta relação vai nos permitir obter uma configuração não trivial B em termos de $g^{(1)} \in G$ e certa representação de peso máximo da álgebra $A_3^{(1)}$, como veremos mais adiante.

Para isso, escrevemos (III.5.66) como

$$\begin{aligned} -B\epsilon_- B^{-1} &= -\theta_{\pm} \epsilon_- \theta_{\pm}^{-1} + (\partial \theta_{\pm}) \theta_{\pm}^{-1}, \\ \epsilon_+ + \bar{\partial} B B^{-1} &= \theta_{\pm} (\epsilon_+ + \mu^2 z \hat{c}) \theta_{\pm}^{-1} + (\bar{\partial} \theta_{\pm}) \theta_{\pm}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{III.5.77})$$

Posteriormente decompomos $\theta_{\pm}$ de acordo com a gradação da álgebra

$$\theta_- = e^{t(0)} e^{t(-1)} e^{t(-2)} \dots, \quad \theta_+ = e^{v(0)} e^{v(1)} e^{v(2)} \dots, \quad (\text{III.5.78})$$

onde $t^{(-i)}, v^{(i)}$ são combinações lineares dos geradores da álgebra de grau $-i$ e i respectivamente ($i = 0, 1, \dots$). Resolvendo estas equações grau a grau obtemos para o grau zero a solução

$$t(0) = H(\bar{z}), \quad (\text{III.5.79})$$

$$e^{v(0)} = Be^{G(z)-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}}, \quad (\text{III.5.80})$$

onde $H(\bar{z})$ e $G(z)$ são funções arbitrárias definidos em $\mathcal{G}_0^0$. De (III.5.77) obtemos para a componente de grau um,

$$\bar{\partial}BB^{-1} = e^{H(\bar{z})}[t(-1), \epsilon_+]e^{-H(\bar{z})} + \mu^2 z\hat{c} + (\bar{\partial}e^{H(\bar{z})})e^{-H(\bar{z})}, \quad (\text{III.5.81})$$

$$0 = e^{v(0)}[v(1), \epsilon_-]e^{-v(0)} - \partial e^{v(0)}e^{-v(0)}. \quad (\text{III.5.82})$$

Inserindo (III.5.80) em (III.5.82) obtemos

$$B^{-1}\partial B - \mu^2 \bar{z}\hat{c} = e^{G(z)}[v(1), \epsilon_-]e^{-G(z)} - B^{-1}(\partial e^{G(z)})e^{-G(z)}B. \quad (\text{III.5.83})$$

Multiplicando (III.5.81) e (III.5.83) por um elemento de $\mathcal{G}_0^0$ e tomando o traço achamos que $H(\bar{z}) = G(z) = 0$ devido às condições subsidiárias (III.2.18-III.2.19). Deste modo as equações para $v(1)$ e $t(-1)$ tem a forma

$$B^{-1}\partial B - \mu^2 \bar{z}\hat{c} = [v(1), \epsilon_-] \quad \text{e} \quad \bar{\partial}BB^{-1} = [t(-1), \epsilon_+] + \mu^2 z\hat{c},$$

respectivamente.

Como próximo passo consideraremos certos elementos matriciais (tomados para a representação de peso máximo $|\lambda_l\rangle$) da equação (III.5.76), na qual introduzimos (III.5.79) e (III.5.80) obtendo-se

$$\dots e^{-t(-2)}e^{-t(-1)}Be^{-\mu^2 \bar{z}\hat{c}}e^{v(1)}e^{v(2)}\dots = T_0 g T_0^{-1}. \quad (\text{III.5.84})$$

Então, como $v(i)|\lambda_l\rangle = 0$ e $\langle \lambda_l|t(-i) = 0$ para $i > 0$, chegamos a

$$\langle \lambda_l|B|\lambda_l\rangle e^{-\mu^2 z\bar{z}} = \langle \lambda_l|T_0 g^{(1)} T_0^{-1}|\lambda_l\rangle. \quad (\text{III.5.85})$$

Esta equação vai nos permitir obter a dependência espaço-temporal dos campos físicos ν, φ, ψ_a e χ_a , mediante a escolha de elementos matriciais específicos. Levando em conta a parametrização do elemento B (III.1.4) obtemos:

$$\tau_0 \equiv e^{\nu - \mu^2 z\bar{z}} = \langle \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0\rangle,$$

$$\begin{aligned}
\tau_{R_1} &\equiv e^{\frac{3}{4}R_1 + \frac{1}{4}R_3 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} = < \lambda_1 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 >, \\
\tau_{R_3} &\equiv e^{\frac{1}{4}R_1 + \frac{3}{4}R_3 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} = < \lambda_3 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_3 >, \\
\tau_\varphi &\equiv e^{\frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_3 + \varphi + \nu - \mu^2 z \bar{z}} = < \lambda_2 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_2 >, \\
\tau_{\psi_1} &\equiv e^{\frac{3}{4}R_1 + \frac{1}{4}R_3 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \psi_3 = < \lambda_1 | T_0 g T_0^{-1} E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 >, \\
\tau_{\psi_3} &\equiv e^{\frac{1}{4}R_1 + \frac{3}{4}R_3 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \psi_1 = < \lambda_3 | T_0 g T_0^{-1} E_{-\alpha_3}^{(0)} | \lambda_3 >, \\
\tau_{\chi_1} &\equiv e^{\frac{3}{4}R_1 + \frac{1}{4}R_3 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \chi_1 = < \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 >, \\
\tau_{\chi_3} &\equiv e^{\frac{1}{4}R_1 + \frac{3}{4}R_3 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \chi_3 = < \lambda_3 | E_{\alpha_3}^{(0)} T_0 g T_0^{-1} | \lambda_3 >, \quad (\text{III.5.86})
\end{aligned}$$

são conhecidas como as funções *tau*, as quais nos permitiram construir a solução classificada em termos do elemento constante $g^{(1)}$ do grupo afim. Neste elemento se encontra toda a informação sobre a estrutura de N-sólitons das equações de movimento (III.2.17). Como veremos no que segue as soluções solitônicas estão representadas por certos operadores de vértices de nível um da álgebra $A_3^{(1)}$. Outros tipos de soluções como os multisólitons e os “breathers” estão associados com produtos tensoriais destes vértices básicos.

III.5.1 Operadores de Vértice

Como os geradores $\epsilon_\pm$ formam uma subálgebra de Heisenberg,

$$[\epsilon_+, \epsilon_-] = \mu^2 \hat{c}$$

e temos que calcular agora os elementos matriciais (funções τ):

$$< \lambda_0 | e^{-z\epsilon_-} e^{\bar{z}\epsilon_+} g^{(1)} e^{-\bar{z}\epsilon_+} e^{z\epsilon_-} | \lambda_0 >, \quad (\text{III.5.87})$$

é vantajoso introduzir uma nova base para a álgebra $A_3^{(1)}$, tal que os geradores $\epsilon_\pm$ formem parte da subálgebra de Cartan. A combinação linear dos geradores da álgebra $H_i^{(l)}, E_\beta^{(k)}$ [27],

$$\begin{aligned}
b_{1+2m}^1 &= E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)}, \\
b_{2m}^0 &= (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot H^{(m)}, \\
b_m &= (\lambda_1 - \lambda_3) \cdot H^{(m)}, \quad (\text{III.5.88})
\end{aligned}$$

fecha uma nova subálgebra de Heisenberg 3-dimensional,

$$[b_{a+2m}^a, (b_{b+2l}^b)^\dagger] = (a+2m)\delta_{m,l}\delta_{a,b},$$

$$[b_{a+2m}^a, b_m] = 0, \quad a = 0, 1,$$

$$[b_m, b_l] = m\delta_{m+l,0}. \quad (\text{III.5.89})$$

Por isso podemos considerar os geradores $b_{a+m(n-1)}^a$, $a = 0, 1$ junto com b_m (e seus conjugados) como os geradores da subálgebra de Cartan afim na nova base para a álgebra $A_3^{(1)}$. Por definição

$$\epsilon_+ = \mu b_1^1, \quad \epsilon_- = \mu (b_1^1)^\dagger,$$

comutam com b_0^0 e b_0 . No caso que a carga central c seja nula, todos eles comutam e portanto eles têm um conjunto de autovetores comuns $F(\gamma)$:

$$[\epsilon_\pm, F(\gamma)] = f_\pm(\gamma)F(\gamma), \quad [b_0^0, F(\gamma)] = f_0^0(\gamma)F(\gamma), \quad (\text{III.5.90})$$

$$[b_0, F(\gamma)] = f_0(\gamma)F(\gamma). \quad (\text{III.5.91})$$

Estes autoestados foram construídos de acordo com a ref. [27], e resultam ser neste caso

$$\tilde{F}_{1,0}(\gamma) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\gamma^{-2n-1} E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+1)} + \gamma^{-2n} E_{\alpha_3}^{(n)} \right), \quad (\text{III.5.92})$$

$$\bar{F}_{1,0}(\gamma) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\gamma^{-2n-1} E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1)} + \gamma^{-2n} E_{\alpha_1}^{(n)} \right), \quad (\text{III.5.93})$$

$$F^\pm(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\gamma^{-2n} E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(n)} \right), \quad (\text{III.5.94})$$

$$\tilde{F}_{1,1}(\gamma) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\gamma^{-2n-1} E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(n+1)} + \gamma^{-2n} E_{\alpha_3}^{(n)} \right), \quad (\text{III.5.95})$$

$$\bar{F}_{1,1}(\gamma) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\gamma^{-2n-1} E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1)} + \gamma^{-2n} E_{\alpha_1}^{(n)} \right), \quad (\text{III.5.96})$$

$$F_{1,j}(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\gamma^{-2n-1} (E_{[(-1)^{j+1}\alpha_2]}^{(n)} + E_{[(-1)^j\alpha_2]}^{(n+1)}) - (-1)^j \gamma^{-2n} (h_2^{(n)} - \frac{\hat{c}}{2} \delta_{m,0}) \right), \quad (\text{III.5.97})$$

com $j = 1, 2$ e os correspondentes autovalores

$$\begin{aligned}
[\epsilon_{\pm}, \tilde{F}_{1,0}(\gamma)] &= \pm \mu \gamma^{\pm 1} \tilde{F}_{1,0}(\gamma), \\
[\epsilon_{\pm}, \bar{\tilde{F}}_{1,0}(\gamma)] &= \mp \mu \gamma^{\pm 1} \bar{\tilde{F}}_{1,0}(\gamma), \\
[\epsilon_{\pm}, F^{\pm}(\gamma)] &= 0, \\
[\epsilon_{\pm}, \tilde{F}_{1,1}(\gamma)] &= \mp \mu \gamma^{\pm 1} \tilde{F}_{1,1}(\gamma), \\
[\epsilon_{\pm}, \bar{\tilde{F}}_{1,1}(\gamma)] &= \pm \mu \gamma^{\pm 1} \bar{\tilde{F}}_{1,1}(\gamma), \\
[\epsilon_{\pm}, F_{1,j}(\gamma)] &= \mp \mu \gamma^{\pm 1} 2F_{1,j}(\gamma).
\end{aligned} \tag{III.5.98}$$

Não é difícil ver que realmente os geradores F são autoestados de todos os elementos da álgebra de Heisenberg.

Com a nova base podemos definir o gerador de Fubini-Veneziano $\mathcal{Q}$ como

$$\mathcal{Q} = (\varphi^{(1)}(\gamma), \varphi^{(0)}(\gamma), \varphi(\gamma)), \tag{III.5.99}$$

onde

$$\varphi^{(1)}(\gamma) = \mathbf{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{1+2n}^1 \gamma^{-(1+2n)}}{1+2n}, \tag{III.5.100}$$

$$\varphi^{(0)}(\gamma) = \mathbf{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}^0 \gamma^{-(2n)}}{2n}, \tag{III.5.101}$$

$$\varphi(\gamma) = \mathbf{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \gamma^{-n}}{n}. \tag{III.5.102}$$

Agora podemos definir os operadores de vértice

$$V^w(\gamma) = \gamma^{\frac{w^2}{2}} e^{\mathbf{i}(w)^* \cdot \mathcal{Q}^\dagger} e^{i\omega \cdot q} e^{\omega \cdot p \ln \gamma} e^{\mathbf{i}w \cdot \mathcal{Q}}, \tag{III.5.103}$$

onde w^* é o autovalor do autoestado F com respecto aos geradores da subálgebra de Heisenberg $(b_{1+2m}^1, b_{2m}^0, b_m)$. Desta forma estabelecemos uma correspondência entre o autoestado F e o operador de vértice V^w . Os vetores $q = (0, q_1, q_2)$ e $p = (0, p_1, p_2)$ satisfazem as relações de comutação

$$[q_i, p_j] = \mathbf{i} \delta_{ij} \hat{c}. \tag{III.5.104}$$

Não é difícil comprovar que os operadores de vértice V obedecem as mesmas relações de comutação que os correspondentes autoestados F . Por esta razão é que podemos identificar os F com os V .

Como nosso interesse é calcular os elementos matriciais (III.5.87), podemos escolher o elemento constante do grupo $g^{(1)}$ como

$$g^{(1)} = \exp[dF(\gamma)], \quad (\text{III.5.105})$$

onde γ é um parâmetro complexo e escolhemos $F(\gamma)$ como um dos autoestados dos $\epsilon_{\pm}$ (III.5.92-III.5.97), ou seja

$$[\epsilon_{\pm}, F(\gamma)] = f^{\pm}(\gamma)F(\gamma), \quad (\text{III.5.106})$$

onde como já vimos os $f^{\pm}$ são funções específicas de γ (III.5.98). Segue que,

$$T_0 g^{(1)} T_0^{-1} = \exp\{d\rho(\gamma)F(\gamma)\}, \quad (\text{III.5.107})$$

onde

$$\rho = \exp\{-zf^{-}(\gamma) + \bar{z}f^{+}(\gamma)\}. \quad (\text{III.5.108})$$

De forma mais geral o elemento constante do grupo $g^{(1)}$ pode ser escolhido como uma combinação dos autoestados F , ou seja,

$$g^{(1)} = \exp[d_1 F_1(\gamma_1)] \exp[d_2 F_2(\gamma_2)] \dots \exp[d_N F_N(\gamma_N)], \quad (\text{III.5.109})$$

com

$$[\epsilon_{\pm}, F_i(\gamma_i)] = f_i^{\pm}(\gamma_i)F_i(\gamma_i). \quad (\text{III.5.110})$$

Neste caso encontramos que

$$T_0 g^{(1)} T_0^{-1} = e^{[d_1 \rho_1(\gamma_1)F_1(\gamma_1)]} e^{[d_2 \rho_2(\gamma_2)F_2(\gamma_2)]} \dots e^{[d_N \rho_N(\gamma_N)F_N(\gamma_N)]}, \quad (\text{III.5.111})$$

onde

$$\rho_i(\gamma_i) = \exp[-zf_i^{-}(\gamma_i) + \bar{z}f_i^{+}(\gamma_i)]. \quad (\text{III.5.112})$$

Uma importante propriedade dos operadores de vértice ajuda consideravelmente a simplificar o cálculo das funções τ (III.5.86). Acontece que para $A_n^{(1)}$ em geral

$$V^{w^i}(\gamma)V^{w^i}(\gamma) = 0, \quad (\text{III.5.113})$$

como consequência de que

$$V^{w^i}(\gamma_1)V^{w^i}(\gamma_2) \sim (\gamma_1 - \gamma_2)^r, \quad (\text{III.5.114})$$

com $r > 0$. Deste modo, devido à equivalência entre os F e os V , $F^2 = 0$ e portanto $F^m = 0$ para $m > 2$ também. Esta propriedade nos permite fazer o truncamento da expansão de modo que

$$T_0 g^{(1)} T_0^{-1} = \exp(d\rho(\gamma)F(\gamma)) = 1 + d\rho(\gamma)F(\gamma). \quad (\text{III.5.115})$$

Agora que já sabemos como calcular as soluções podemos nos perguntar de que modo escolher $g^{(1)}$ em (III.5.109) para obter os diferentes tipos de sólitons, ou seja, os neutros ou os carregados, assim como os “breathers”. Para

$$g_1^{(1)}(\gamma) = e^{dF_{1,2}(\gamma)} \quad (\text{III.5.116})$$

são reproduzidas as soluções neutras de 1-sóliton do modelo de Toda abeliano afim $A_1^{(1)}$, ou modelo de *sine-Gordon*, porque neste caso $\tau_{\psi_a} = \tau_{\chi_a} = 0$. As correspondentes cargas elétricas $U(1)$ se anulam: $Q_1 = Q_3 = 0$. Outro indicativo da neutralidade desta solução é que $F_{1,2}(\gamma)$ tem autovalor zero em relação aos geradores das cargas $U(1) \otimes U(1)$, ou seja, $\lambda_1 \cdot H$ e $\lambda_3 \cdot H$.

Se por outro lado, escolhemos

$$\begin{aligned} g_1^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) &= e^{\bar{d}_1 \bar{F}_{1,1}(\gamma_2)} e^{\bar{d}_2 \bar{F}_{1,1}^\dagger(\gamma_1)}, \\ g_3^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) &= e^{\tilde{d}_1 \tilde{F}_{1,1}(\gamma_2)} e^{\tilde{d}_2 \tilde{F}_{1,1}(\gamma_1)}, \end{aligned} \quad (\text{III.5.117})$$

para $\gamma_1 = e^{B-i(\alpha+\pi)}$ e $\gamma_2 = e^{B+i\alpha}$ (com condições entre os parâmetros $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \tilde{d}_1$ e $\tilde{d}_2$ similares às da ref. [10]) obtemos soluções de 1-sóliton com cargas $U(1)$ não triviais $(Q_1, 0)$ para $g_1^{(1)}$ e $(0, Q_3)$ para $g_3^{(1)}$. Esta escolha nos conduz

a soluções de 1-sóliton com $\psi_3 = \chi_3 = 0$ ou $\psi_1 = \chi_1 = 0$ respectivamente, as quais coincidem com as soluções de 1-sólitons eletricamente carregados do modelo $A_2^{(1)}(p=1)$ [9], [8], descrito na seção anterior. Similarmente, a solução de 3-vértices gerada por

$$\begin{aligned} g_{1,1}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= g_1^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2)g_1^{(1)}(\gamma_3), \\ g_{3,1}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= g_3^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2)g_1^{(1)}(\gamma_3), \end{aligned} \quad (\text{III.5.118})$$

para uma escolha apropriada de γ_i , ($i = 1, 2, 3$) e $d, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \tilde{d}_1$ e $\tilde{d}_2$ (como em na ref. [8]) nos conduz aos “breathers” com cargas $U(1)$ $(Q_1, 0)$ e $(0, Q_3)$ respectivamente.

A solução de 1-sóliton mais simples do modelo $A_3^{(1)}(p=2)$ com cargas (Q_1, Q_3) não triviais se obtêm escolhendo

$$g_{1,3}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = e^{\bar{d}_1 \bar{F}_{1,1}(\gamma_2)} e^{\bar{d}_2 \bar{F}_{1,1}^\dagger(\gamma_1)} e^{d_4 \tilde{F}_{1,1}^\dagger(\gamma_4)} e^{d_3 \tilde{F}_{1,1}(\gamma_3)} \quad (\text{III.5.119})$$

para $\gamma_1 = e^{B-i(\alpha+\pi)}$, $\gamma_2 = e^{B+i\alpha}$ e $d_1 d_2 = -d_3 d_4 = d_0$. Os breathers com cargas (Q_1, Q_3) são gerados com

$$g_{1,3}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) = g_{1,3}^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)g_1^{(1)}(\gamma_5) \quad (\text{III.5.120})$$

e com uma escolha especial dos γ_l , ($l = 1, 2, 3, 4, 5$) e os coeficientes d_l . Desta maneira as soluções de multisólitons são representadas por $g^{(1)}$, onde estão incluídos produtos dos correspondentes vértices de 1-sóliton $g_{1,3}^{(1)}$ e $g_1^{(1)}$, ou seja,

$$g^{(1)} = \prod_{s=1}^N g^{(1)}(\gamma_1^s, \gamma_2^s),$$

novamente com relações específicas entre os parâmetros $\gamma_1^s, \gamma_2^s, \bar{d}_1^s, \bar{d}_2^s, \tilde{d}_1^s$ e $\tilde{d}_2^s$.

III.6 Modelos $A_3^{(1)}(p=2, q)$

Nesta seção vamos a introduzir a hierarquia de modelos integráveis $A_3^{(1)}(p=2, q)$, na qual está incluído o modelo (III.1.13) para $q = -1$ [31]. As razões que nos motivaram para introduzir estes modelos são duas:

a) uma vez conhecidos os 1-sólitons do modelo $q = -1$, é possível calcular todos os 1-sólitons dos correspondentes modelos $q \geq 2$, mediante uma simples associação de variáveis:

$$\begin{aligned} r_a(x, t) &\rightarrow \psi_a, \\ q_a(x, t) &\rightarrow \chi_a, \\ u(x, t) &\rightarrow \varphi, \\ \bar{z} &\rightarrow x \\ \frac{z}{\gamma} &\rightarrow t\gamma^q, \end{aligned} \quad (\text{III.6.121})$$

b) como as equações de movimento dos modelos $q \geq 2$ são mais simples que as do modelo $q = -1$ é mais sugestivo, primeiramente construir as soluções de multisólitons para o modelo $q = 2$, por exemplo, e depois aplicar a mudança de variáveis antes mencionada para achar as correspondentes soluções do modelo $q = -1$.

A hierarquia de modelos $A_3^{(1)}(p = 2, q)$ é construída preservando parte da estrutura graduada original do modelo $q = -1$, mais exatamente, preservamos o operador de gradação da álgebra $\mathcal{Q}$, o gerador constante de grau $+1$, ϵ_+ e a subálgebra $\mathcal{G}_0^0$. Por outra parte o gerador ϵ_- , de grau $q = -1$ é substituído por um elemento arbitrário constante D_q^q de grau q , tal que $q \geq -1$ e

$$D_q^q \in \text{Ker}(ad \epsilon_{\pm}), \quad \epsilon_- = D_{-1}^{-1} \quad \text{e} \quad [D_q^q, \epsilon_-] = 0. \quad (\text{III.6.122})$$

Desta forma é possível gerar uma hierarquia infinita de modelos integráveis novos, cujas equações de movimento se escrevem de forma compacta na forma de curvatura nula:

$$\partial_{t_q} D_0 - \partial_x D_q - [D_q, D_0] = 0, \quad (\text{III.6.123})$$

onde

$$D_0 = \bar{A} = \epsilon_+ + \partial_x(g_0)g_0^{-1}, \quad D_q = \sum_{l=0}^q D_q^{(l)}, \quad D_q^{(l)} \in \mathcal{G}_l. \quad (\text{III.6.124})$$

Os campos físicos $q_a(x, t)$, $r_a(x, t)$ e $u(x, t)$ vão parametrizar a subálgebra de grau zero $\mathcal{G}_0$:

$$A_0 = \partial_x(g_0)g_0^{-1} = q_1 E_{\alpha_1}^{(0)} + q_3 E_{\alpha_3}^{(0)} + r_1 E_{-\alpha_1}^{(0)} + r_3 E_{-\alpha_3}^{(0)} + u h_2^{(0)}. \quad (\text{III.6.125})$$

A equação (III.6.123) pode-se decompor de acordo com a gradação no sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} [D_q^{(q)}, \epsilon_+] &= 0, \\ \partial_x D_q^{(q)} + [D_q^{(q)}, \mathcal{A}_0] + [D_q^{(q-1)}, \epsilon_+] &= 0, \\ \partial_x D_q^{(q-1)} + [D_q^{(q-1)}, \mathcal{A}_0] + [D_q^{(q-2)}, \epsilon_+] &= 0, \\ &\vdots = \vdots \\ \partial_x D_q^{(1)} + [D_q^{(1)}, \mathcal{A}_0] + [D_q^{(0)}, \epsilon_+] &= 0, \\ \partial_{t_q} \mathcal{A}_0 - \partial_x D_q^{(0)} - [D_q^{(0)}, \mathcal{A}_0] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.6.126})$$

Para obter a partir deste sistema as equações de movimento de ordem q em x correspondentes aos campos $q_a(x, t)$, $r_a(x, t)$ e $u(x, t)$, primeiramente temos que determinar $D_q^{(q)}$ utilizando a primeira equação do sistema (III.6.126). Por exemplo, para $q = 2$ propomos:

$$D_2^{(2)} = b_2^{(1)} \lambda_1 H^{(1)} + b_2^{(3)} \lambda_3 H^{(1)}, \quad (\text{III.6.127})$$

onde os coeficientes serão determinados ao substituir na segunda equação, na qual também introduzimos a componente $D_2^{(1)}$ tal que

$$\begin{aligned} D_2^{(1)} &= c_1 E_{\alpha_2}^{(0)} + c_2 E_{-\alpha_2}^{(1)} + c_3 E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(0)} + c_4 E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(1)} + c_5 E_{\alpha_2+\alpha_3}^{(0)} \\ &+ c_6 E_{-(\alpha_2+\alpha_3)}^{(1)} + c_7 E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{(0)} + c_8 E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{III.6.128})$$

A partir desta equação conseguimos determinar também os coeficientes de $D_2^{(1)} \in \text{Im}(ad \epsilon_+)$ em termos dos campos $q_a(x, t)$, $r_a(x, t)$ e $u(x, t)$. Os restantes coeficientes de $D_2^{(1)} \in \text{Ker}(ad \epsilon_+)$ são obtidos a partir da terceira equação, onde introduzimos

$$D_2^{(0)} = d_1 E_{\alpha_1}^{(0)} + d_2 E_{-\alpha_1}^{(0)} + d_3 E_{\alpha_3}^{(0)} + d_4 E_{-\alpha_3}^{(0)} + d_5 h_1^{(0)} + d_6 h_2^{(0)} + d_7 h_3^{(0)}, \quad (\text{III.6.129})$$

e cujos coeficientes, que se encontram em $Im(ad\epsilon_+)$, são determinados também desta equação. Por último são determinados os coeficientes que estão em $Ker(ad\epsilon_+)$ usando a última equação. Seguindo este procedimento determinamos:

$$\begin{aligned}
D_2^{(2)} &= (\lambda_1 - \lambda_3) \cdot H^{(1)}, \\
D_2^{(1)} &= q_1 E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(0)} + r_1 E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(1)} + q_3 E_{\alpha_2 + \alpha_3}^{(0)} - r_3 E_{-\alpha_2 - \alpha_3}^{(1)}, \\
D_2^{(0)} &= (\partial_x q_1 + q_1 u) E_{\alpha_1}^{(0)} - (\partial_x q_3 + q_3 u) E_{\alpha_3}^{(0)} - (\partial_x r_1 - r_1 u) E_{-\alpha_1}^{(0)} \\
&\quad + (\partial_x r_3 - r_3 u) E_{-\alpha_3}^{(0)} - \frac{1}{2} (q_1 r_1 - q_3 r_3) h_2^{(0)}. \tag{III.6.130}
\end{aligned}$$

As equações de movimento para este modelo cKP são (para simplificar tomamos $b_2^{(1)} = -b_2^{(3)} = 1$):

$$\begin{aligned}
\partial_{t_2} q_1 - \partial_x^2 q_1 + q_1 \partial_x u + q_1 u^2 + r_1 q_1^2 + r_3 q_1 q_3 &= 0, \\
\partial_{t_2} r_1 + \partial_x^2 r_1 + r_1 \partial_x u - r_1 u^2 - r_1^2 q_1 - r_1 r_3 q_3 &= 0, \\
\partial_{t_2} q_3 + \partial_x^2 q_3 - q_3 \partial_x u - q_3 u^2 - r_3 q_3^2 - r_1 q_1 q_3 &= 0, \\
\partial_{t_2} r_3 - \partial_x^2 r_3 - r_3 \partial_x u + r_3 u^2 + r_3^2 q_3 + r_3 r_1 q_1 &= 0, \\
\partial_{t_2} u + \partial_x (r_1 q_1) - \partial_x (r_3 q_3) &= 0. \tag{III.6.131}
\end{aligned}$$

Até aqui temos visto como a hierarquia de modelos $A_3^{(1)}(p = 2, q)$ não relativísticos KP vinculados estão associados à condição de curvatura nula (III.6.123) para tempos positivos. Da mesma forma, podemos obter a hierarquia correspondente a “tempos” negativos, a qual, como foi mostrado em [30] é dada por

$$\partial_{t_{-q}} A - \partial_x D_{-q} - [D_{-q}, A] = 0, \quad q > 0, \tag{III.6.132}$$

onde agora,

$$D_{-q} = D_q^{(-q)} + D_q^{(-q+1)} + \dots + D_q^{(-1)}, \quad D_q^{-l} \in \mathcal{G}_{-l}. \tag{III.6.133}$$

Particularmente, as equações de Leznov-Saveliev (III.2.17) correspondem à equação de curvatura nula (III.6.123) para $t_{-1} = z$ com

$$\begin{aligned}
D_{-1} &= D_{-1}^{(-1)} = -B\epsilon_- B^{-1}, \\
A &= -A_0 - \epsilon_+ = -\partial_x B B^{-1} - \epsilon_+, \tag{III.6.134}
\end{aligned}$$

onde B é parametrizado pelo subgrupo de grau zero (III.1.4).

Solução de 1-sóliton do modelo $q = 2$

Achamos a solução do sistema (III.6.131) mediante o método de operadores de vértice de forma similar ao caso de $q = -1$, as diferenças mais notáveis estão na forma das soluções constantes de vácuo:

$$D_2^{(v)} = D_2^{(2)}, \quad D_0^{(v)} = \epsilon_+, \quad T_2^{(v)} = e^{-t_2 D_2^{(2)}} e^{x \epsilon_+}, \quad (\text{III.6.135})$$

e na escolha de um novo conjunto $T_v g^{(1)} T_v^{(-1)}$ de elementos matriciais que representem os campos físicos $q_a(x, t)$, $r_a(x, t)$ e $u(x, t)$. A forma de $g^{(1)}$, como em (III.5.116-III.5.119), por exemplo, permanece igual. A razão está no fato de que $[D_2^{(2)}, \epsilon_{\pm}] = 0$ e portanto os três geradores compartilham os mesmos autoestados (III.5.92-III.5.97). Seguindo o método de “dressing” encontramos que para $q = 2$

$$A_0 = \partial_x B B^{-1} = -[\epsilon_+, t(-1)], \quad e^{v(0)} = B, \quad (\text{III.6.136})$$

onde

$$\begin{aligned} t(-1) &= -r_1 E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(0)} + q_1 E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(-1)} + r_3 E_{-\alpha_2 - \alpha_3}^{(0)} - q_3 E_{\alpha_2 + \alpha_3}^{(-1)} \\ &+ W E_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}^{(-1)} - \partial_x \tilde{v} \left(E_{-\alpha_2}^{(0)} - E_{\alpha_2}^{(-1)} \right) - u E_{-\alpha_2}^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{III.6.137})$$

Aqui W é arbitrário porque $E_{\pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}^{(-1)} \in \text{Ker}(ad \epsilon_+)$ e $\tilde{v} = v - \mu^2 z \bar{z}$. Levando em conta (III.6.136)-(III.6.137), consideramos os elementos matriciais apropriados para obter as funções τ que representem os campos físicos $q_a(x, t)$, $r_a(x, t)$, $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \tau_0 \equiv e^{\tilde{v}} &= \langle \lambda_0 | T_v g^{(1)} T_v^{-1} | \lambda_0 \rangle, \\ \tau_2 \equiv e^{\Phi} &= \langle \lambda_2 | T_v g^{(1)} T_v^{-1} | \lambda_2 \rangle, \\ \tau_{12} \equiv r_1 e^{\Phi} &= \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(0)} T_v g^{(1)} T_v^{-1} | \lambda_1 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{-1-2} \equiv -q_1 e^{\tilde{\nu}} &= \langle \lambda_0 | E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(1)} T_v g^{(1)} T_v^{-1} | \lambda_0 \rangle, \\
\tau_{23} \equiv -r_3 e^{\Phi} &= \langle \lambda_3 | E_{\alpha_2 + \alpha_3}^{(0)} T_v g^{(1)} T_v^{-1} | \lambda_3 \rangle, \\
\tau_{-2-3} \equiv q_3 e^{\tilde{\nu}} &= \langle \lambda_0 | E_{-\alpha_2 - \alpha_3}^{(1)} T_v g^{(1)} T_v^{-1} | \lambda_0 \rangle,
\end{aligned} \tag{III.6.138}$$

onde

$$\Phi = \varphi + \frac{1}{2}(R_1 + R_3) + \tilde{\nu}. \tag{III.6.139}$$

Daí que as soluções solitônicas de $A_3^{(1)}$ possam ser escritas em função das funções τ como:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\tau_{12}}{\tau_2}, & r_3 &= -\frac{\tau_{23}}{\tau_2}, & u &= \partial_x \ln \left(\frac{\tau_2}{\tau_0} \right), \\
q_1 &= -\frac{\tau_{-1-2}}{\tau_0}, & q_3 &= -\frac{\tau_{-2-3}}{\tau_0}.
\end{aligned} \tag{III.6.140}$$

Antes de construir a solução precisamos achar a equação de movimento para τ_0 . Para isso, da equação correspondente ao grau um da segunda equação de (III.5.77) obtemos (com $\bar{\partial} \rightarrow \partial_x$)

$$[\epsilon_+, t(-2)] = -\frac{1}{2}[\mathcal{A}_0, t(-1)] + \bar{\partial} t(-1) \tag{III.6.141}$$

que determina a componente $t(-2)$ que está em $Im(ad \epsilon_+)$. Depois de projetar esta equação em ϵ_+ fornece a equação de movimento para τ_0 :

$$2\partial_x^2 \tilde{\nu} + q_1 r_1 + q_3 r_3 + u^2 + \partial_x u = 0. \tag{III.6.142}$$

Uma solução genérica com quatro vértices de (III.6.131) e (III.6.142) pode ser obtida ao considerar-se

$$\begin{aligned}
g &= e^{b_2 \bar{F}_{1,1}(\gamma_2)} e^{b_1 \bar{F}_{1,1}^\dagger(\gamma_1)} e^{b_4 \tilde{F}_{1,1}^\dagger(\gamma_4)} e^{b_3 \tilde{F}_{1,1}(\gamma_3)}, \\
T_0 g T_0^{-1} &= e^{b_2 \rho_2(\gamma_2) \bar{F}_{1,1}(\gamma_2)} e^{b_1 \rho_1(\gamma_1) \bar{F}_{1,0}^\dagger(\gamma_1)} e^{b_4 \rho_4(\gamma_4) \tilde{F}_{1,0}^\dagger(\gamma_4)} e^{b_3 \rho_3(\gamma_3) \tilde{F}_{1,1}(\gamma_3)},
\end{aligned} \tag{III.6.143}$$

em (III.6.138) com os campos expressos segundo (III.6.140). Depois de calcular os elementos de matriz obtem-se as funções tau:

$$\tau_0 = 1 + b_1 b_2 c_{12}(\gamma_1, \gamma_2) \rho_1(\gamma_1) \rho_2(\gamma_2) + b_3 b_4 c_{34}(\gamma_3, \gamma_4) \rho_3(\gamma_3) \rho_4(\gamma_4)$$

$$\begin{aligned}
& + c_{1234}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\rho_3(\gamma_3)\rho_4(\gamma_4)b_1b_2b_3b_4, \\
\tau_2 & = 1 + b_1b_2d_{12}(\gamma_1, \gamma_2)\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2) + b_3b_4d_{34}(\gamma_3, \gamma_4)\rho_3(\gamma_3)\rho_4(\gamma_4) \\
& + d_{1234}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\rho_3(\gamma_3)\rho_4(\gamma_4)b_1b_2b_3b_4, \\
\tau_{23} & = b_3g_3(\gamma_3)\rho_3(\gamma_3) + b_1b_2b_3g_{123}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\rho_3(\gamma_3), \\
\tau_{-2-3} & = i_4(\gamma_4)b_4\rho_4(\gamma_4) + i_{124}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4)\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\rho_4(\gamma_4)b_1b_2b_4, \\
\tau_{12} & = b_2e_2(\gamma_2)\rho_2(\gamma_2) + e_{234}(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)\rho_2(\gamma_2)\rho_3(\gamma_3)\rho_4(\gamma_4)b_2b_3b_4, \\
\tau_{-1-2} & = b_1f_1(\gamma_1)\rho_1(\gamma_1) + f_{134}(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4)\rho_1(\gamma_1)\rho_3(\gamma_3)\rho_4(\gamma_4)b_1b_3b_4,
\end{aligned} \tag{III.6.144}$$

onde

$$\begin{aligned}
\rho_1(\gamma_1) & = e^{-x\gamma_1+t\gamma_1^2}, & \rho_2(\gamma_2) & = e^{x\gamma_2-t\gamma_2^2}, \\
\rho_3(\gamma_3) & = e^{-x\gamma_3+t\gamma_3^2}, & \rho_4(\gamma_4) & = e^{x\gamma_4-t\gamma_4^2}.
\end{aligned} \tag{III.6.145}$$

Estas funções são introduzidas em (III.6.140). Depois se avaliam os campos nas equações de movimento (III.6.131) e em (III.6.142). Assim se determinam os coeficientes, para o qual nos auxiliamos do programa de Mathematica da Ref.[29]. Assim,

$$\begin{aligned}
c_{12} & = \frac{2\gamma_1\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 + \gamma_2)^2}, & c_{34} & = -\frac{2\gamma_3^2\gamma_4}{(\gamma_3 - \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)^2}, \\
c_{1234} & = \frac{4\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_4)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2)^2(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_1 - \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)^2}, \\
d_{12} & = \frac{2\gamma_1^2\gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, & d_{34} & = \frac{2\gamma_3\gamma_4^2}{(\gamma_3 + \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)^2}, \\
d_{1234} & = \frac{4\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3\gamma_4^2(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_4)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2)^2(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_1 - \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= \sqrt{2}\gamma_2, & e_{234} &= \frac{2\sqrt{2}\gamma_2\gamma_3\gamma_4^2(\gamma_2 - \gamma_4)}{(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 + \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)^2}, \\
f_1 &= \sqrt{2}\gamma_1, & f_{134} &= \frac{2\sqrt{2}\gamma_1\gamma_3^2\gamma_4(\gamma_1 - \gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)^2}, \\
g_3 &= \sqrt{2}\gamma_3, & g_{123} &= \frac{2\sqrt{2}\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3(\gamma_1 - \gamma_3)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, \\
i_4 &= \sqrt{2}\gamma_4, & i_{124} &= \frac{2\sqrt{2}\gamma_1\gamma_2^2\gamma_4(\gamma_2 - \gamma_4)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_4)(\gamma_1 - \gamma_2)^2}. \quad (\text{III.6.146})
\end{aligned}$$

Para a escolha específica dos γ_i como

$$\gamma_1 = -e^{\beta_1 - i\alpha_1} = -\gamma_2^* \quad \text{e} \quad \gamma_3 = -e^{\beta_2 - i\alpha_2} = -\gamma_4^*, \quad (\text{III.6.147})$$

esta solução vai ter energia e momento reais, representando uma solução de dois sólitons carregados, onde os β_i são tais que

$$v_i = \tanh(\beta_i) \quad (\text{III.6.148})$$

representam as velocidades dos sólitons, e os α_i estão relacionados com as cargas Q_1 e Q_3 . Se além disso, $\beta_2 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \alpha_1$ obtemos a solução particular de 1-sóliton

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 1 + (c_{12}b_1b_2 + c_{34}b_3b_4) \rho_1\rho_2, \\
\tau_2 &= 1 + (d_{12}b_1b_2 + d_{34}b_3b_4) \rho_1\rho_2, \\
\tau_{-1-2} &= b_1f_1\rho_1, & \tau_{12} &= b_2e_2\rho_2, \\
\tau_{-2-3} &= b_4i_4\rho_2, & \tau_{23} &= b_3g_3\rho_1, \quad (\text{III.6.149})
\end{aligned}$$

onde

$$\rho_1(\gamma_1) = e^{-x\gamma_1 + t\gamma_1^2}, \quad \rho_2(\gamma_2) = e^{x\gamma_2 - t\gamma_2^2}, \quad (\text{III.6.150})$$

$$c_{12} = \frac{2\gamma_1\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2(\gamma_1 + \gamma_2)} = d_{34}, \quad c_{34} = \frac{2\gamma_1^2\gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2(\gamma_1 + \gamma_2)} = d_{12},$$

$$f_1 = \sqrt{2}\gamma_1 = g_3, \quad e_2 = \sqrt{2}\gamma_2 = i_4. \quad (\text{III.6.151})$$

Já que os modelos integráveis $q = -1$ e $q = 2$ correspondentes a $A_3^{(1)}$ compartilham a mesma estrutura algébrica graduada, podemos relacionar os sólitons do modelo $q = -1$ com os correspondentes ao modelo $q = 2$, mais especificamente vamos a relacionar a solução de 1-sóliton anterior (III.6.149-III.6.151) do modelo $q = 2$ com a solução de 1-sóliton para $q = -1$ obtida a partir das equações de primeira ordem em (III.4.52)-(III.4.54).

Comparando as transformações de “dressing” (III.5.66) para ambos os modelos $q = -1$ e $q = 2$, mais especificamente olhando a forma dos elementos matriciais $T_v g^{(1)} T_v^{-1}$

$$T_v(q) e^{bF(\gamma)} T_v^{-1}(q) = e^{b\rho_q(\gamma)F(\gamma)}, \quad q = -1, 2, \quad (\text{III.6.152})$$

com

$$T_v(q = -1) = e^{-z\epsilon_-} e^{\bar{z}\epsilon_+}, \quad T_v(q = 2) = e^{-t_2 D_2^{(2)}} e^{x\epsilon_+} \quad (\text{III.6.153})$$

e

$$\begin{aligned} \rho_{(-1)}(\gamma) &= \exp\left(-\frac{z}{\gamma} + \bar{z}\gamma\right), \\ \rho_{(2)}(\gamma) &= \exp\left(-t_2\gamma^2 + x\gamma\right), \end{aligned} \quad (\text{III.6.154})$$

e lembrando que os autoestados $F(\gamma)$ (III.5.92-III.5.97) não dependem de q , observamos que a única diferença entre as funções τ de $q = -1$ e $q = 2$ (III.5.86), (III.6.138) está nos fatores $\rho_q(\gamma)$. Por essa razão, a mudança de variáveis

$$\bar{z} \rightarrow x, \quad \frac{z}{\gamma} \rightarrow t_2\gamma^2, \quad (\text{III.6.155})$$

transforma as funções τ do modelo $q = -1$ nas correspondentes funções τ do modelo $q = 2$. Porém, o problema está em que os campos $r_a(x, t)$, $q_a(x, t)$ e

$u(x, t)$ do modelo $q = 2$ parametrizam a álgebra $\mathcal{G}_0$

$$\mathcal{A}_0 = (\partial_x B)B^{-1} = \sum_{a=1,3} (r_a E_{-\alpha_a}^{(0)} + q_a E_{\alpha_a}^{(0)}) + u h_2^{(0)} + \partial_x \tilde{\nu} \hat{c}, \quad (\text{III.6.156})$$

quando os campos de $q = -1$ estão relacionados com os elementos do grupo G_0

$$B = e^{\sum_{a=1,3} \tilde{\chi}_a E_{-\alpha_a}^{(0)}} e^{(\varphi h_2^{(0)} + \lambda_1 \cdot H R_1 + \lambda_3 \cdot H R_3 + \tilde{\nu} c)} e^{\sum_{a=1,3} \tilde{\psi}_a E_{\alpha_a}^{(0)}}. \quad (\text{III.6.157})$$

Para fazer mais explícita esta relação introduzimos as correntes $\mathcal{G}_0$ -WZW $\tilde{r}_a(z, \bar{z})$, $\tilde{q}_a(z, \bar{z})$ e $\tilde{u}(z, \bar{z})$ do modelo $q = -1$,

$$(\bar{\partial} B)B^{-1} = \sum_{a=1,3} (\tilde{r}_a E_{-\alpha_a}^{(0)} + \tilde{q}_a E_{\alpha_a}^{(0)}) + \tilde{u} h_2^{(0)} + \bar{\partial} \tilde{\nu} c \quad (\text{III.6.158})$$

e as expressamos em função de $\psi_a(z, \bar{z})$, $\chi_a(z, \bar{z})$, $\varphi(z, \bar{z})$ e $R_a(z, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \bar{\partial} \left\{ \varphi + \frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_3 \right\}, \\ \tilde{q}_1 &= e^{\frac{1}{2} R_1 - \varphi} \left(\bar{\partial} \psi_1 - \frac{1}{2} \psi_1 \bar{\partial} R_1 \right), \\ \tilde{q}_3 &= e^{\frac{1}{2} R_3 - \varphi} \left(\bar{\partial} \psi_3 - \frac{1}{2} \psi_3 \bar{\partial} R_3 \right), \\ \tilde{r}_1 &= e^{-\frac{1}{2} R_1} \left\{ \bar{\partial} \chi_1 - \chi_1 \bar{\partial} \varphi, \right. \\ &\quad \left. - e^{-\varphi} \chi_1^2 \bar{\partial} \psi_1 + \frac{\chi_1}{2} (1 + \psi_1 \chi_1 e^{-\varphi}) \bar{\partial} R_1 \right\}, \\ \tilde{r}_3 &= e^{-\frac{1}{2} R_3} \left\{ \bar{\partial} \chi_3 - \chi_3 \bar{\partial} \varphi, \right. \\ &\quad \left. - e^{-\varphi} \chi_3^2 \bar{\partial} \psi_3 + \frac{\chi_3}{2} (1 + \psi_3 \chi_3 e^{-\varphi}) \bar{\partial} R_3 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.6.159})$$

Para os 1-sólitons com cargas (Q_1, Q_3) as expressões para $\tilde{r}_a$ e $\tilde{q}_a$ se simplificam consideravelmente usando as equações de primeira ordem (III.4.46):

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \frac{1}{\gamma} \psi_1 e^{\frac{1}{2} R_1 - \frac{1}{4} (R_1 - R_3)}, & \tilde{q}_3 &= \frac{1}{\gamma} \psi_3 e^{\frac{1}{2} R_3 + \frac{1}{4} (R_1 - R_3)}, \\ \tilde{r}_1 &= \frac{1}{\gamma} \chi_1 e^{-\varphi - \frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{4} (R_1 - R_3)}, & \tilde{r}_3 &= \frac{1}{\gamma} \chi_3 e^{-\varphi - \frac{1}{2} R_3 + \frac{1}{4} (R_1 - R_3)}. \end{aligned} \quad (\text{III.6.160})$$

Como por definição

$$\begin{aligned} q_a(x, t) &= \tilde{q}_a(\bar{z} \rightarrow x, \frac{z}{\gamma} \rightarrow t\gamma^2), \\ r_a(x, t) &= \tilde{r}_a(\bar{z} \rightarrow x, \frac{z}{\gamma} \rightarrow t\gamma^2), \\ u_l(x, t) &= \tilde{u}_l(\bar{z} \rightarrow x, \frac{z}{\gamma} \rightarrow t\gamma^2), \end{aligned}$$

uma vez que os sólitons do modelo $q = -1$ são conhecidos (III.4.52)-(III.4.54) podemos a partir das equações (III.6.160) usando a mudança de variáveis (III.6.155) determinar a solução de 1-sóliton correspondente ao modelo $q = 2$. O processo inverso é também válido. Por exemplo, tomamos os 1-sólitons do modelo $q = 2$ na forma (III.6.140) com as funções τ segundo as equações (III.6.149)-(III.6.151). Posteriormente fazemos a mudança de variáveis x_2, t_2 a $z, \bar{z}$ e $\rho_{\pm}$ que aparece em $\rho(\gamma)$ de acordo com as equações (III.6.155)). Finalmente tomamos as equações (III.6.160) e substituímos ψ_a, χ_a, φ e R_a com $a = 1, 3$ por a forma explícita dos sólitons do modelo $q = -1$ (III.4.52)-(III.4.54). Como resultado encontramos as seguintes expressões para os parâmetros dos 1-sólitons do modelo $q = 2$ b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) em termos dos parâmetros $D, d_1, d_2, 2\delta = d_1 + d_2, \alpha$ e p_1 da solução do modelo $q = -1$:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_3 e^{d_1}, & b_2 &= b_4 e^{d_2}, \\ b_1 &= \frac{D^{\frac{1}{2}} N e^{-ip_1 + \delta}}{\sqrt{2}(1 - e^{-2\delta + 2i\alpha})}, & b_2 &= \frac{D^{\frac{1}{2}} N e^{i(p_1 - \alpha) + \delta}}{\sqrt{2}(1 - e^{-2\delta + 2i\alpha})}. \end{aligned} \quad (\text{III.6.161})$$

As relações inversas podem ser também achadas:

$$\begin{aligned} b_{\pm} &= b_1 b_2 (1 \pm e^{2\delta}), & b_{\pm} &= b_1 b_2 \pm b_3 b_4, \\ e^{-2\delta} &= \frac{b_+ + b_-}{b_+ - b_-}, & D &= \frac{b_+ + b_-}{b_+ - b_-} e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}, & e^{-2ip_1} &= \frac{b_1}{b_2} e^{i\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{III.6.162})$$

com a escolha apropriada do centro de massa do sóliton X_0 .

III.6.1 Cargas conservadas

Da mesma maneira que no caso do modelo $q = -1$ relativístico $A_3^{(1)}(p = 2)$ (III.1.13) o espectro do modelo integrável $q = 2$ $A_3^{(1)}$ (III.6.131) está determinado pelas cargas conservadas: “a carga topológica” $\tilde{Q}$, “a densidade de partículas” $\tilde{Q}_0$, o momento $\mathcal{P}$, e a energia $\mathcal{E}$. Todas estas cargas somente dependem dos valores assintóticos dos campos: $\tilde{\psi}_a, \tilde{\chi}_a, \tilde{\varphi}$ e $\tilde{R}_a$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Como $\tilde{\psi}_a(\pm\infty) = \tilde{\chi}_a(\pm\infty) = 0$, ou equivalentemente $\tilde{r}_a(\pm\infty) = \tilde{q}_a(\pm\infty) = 0$, os valores assintóticos de $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{R}_a$ definem completamente a carga topológica $\tilde{Q}$, da mesma forma que no caso $q = -1$. Todas as outras cargas aparecem como certas funções destas cargas $\tilde{Q}$ e da velocidade do sóliton γ .

Nesta seção vamos:

- (a) calcular estas cargas para as soluções de 1-sóliton e
- (b) achar a relação explícita entre as cargas conservadas dos modelos integráveis $q = -1$ e $q = 2$.

Para isso vamos, primeiramente, derivar as correntes conservadas do modelo $A_3^{(1)}(p = 2, q = 2)$. De acordo com as suas equações de movimento (III.6.131) o campo u representa a corrente conservada mais simples

$$T = u, \quad \partial_t u = -\partial_x(r_1 q_1 - r_3 q_3), \quad \tilde{Q} = \int dx u. \quad (\text{III.6.163})$$

Levando em conta a equação (III.6.142) podemos verificar que

$$T_0 = r_1 q_1 + r_3 q_3 + u^2, \quad \tilde{Q}_0 = \int dx T_0, \quad (\text{III.6.164})$$

define a corrente conservada correspondente à “densidade de partículas”. O método para derivar, de forma sistemática, todas as correntes conservadas junto com as suas representações como derivadas totais ∂_x , consiste em aplicar as transformações de “dressing” (III.5.66) para calcular os traços de $t(-k)$, lembrando que $\theta_- = \Pi_{i=0}^\infty e^{t(-i)}$. Se escrevemos o “dressing” do vácuo

$$\epsilon_+ + \bar{\partial} B B^{-1} = \theta \epsilon_+ \theta^{-1} + (\bar{\partial} \theta_-) \theta_-^{-1} \quad (\text{III.6.165})$$

grau a grau obtemos

$$\bar{\partial}BB^{-1} = [t(-1), \epsilon_+] = \mathcal{A}_0, \quad (\text{III.6.166})$$

$$[\epsilon_+, t(-2)] = -\frac{1}{2} [\mathcal{A}_0, t(-1)] + \bar{\partial}t(-1), \quad (\text{III.6.167})$$

$$\begin{aligned} [\epsilon_+, t(-3)] &= -[\mathcal{A}_0, t(-2)] - \frac{1}{6} [[\mathcal{A}_0, t(-1)], t(-1)] \\ &\quad - \frac{1}{2} [\bar{\partial}t(-1), t(-1)] + \bar{\partial}t(-2). \end{aligned} \quad (\text{III.6.168})$$

Multiplicando (III.6.167) por ϵ_+ e tomando o traço obtemos

$$T_0 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{A}_0^2 = \partial_x \text{Tr}(\epsilon_+ t(-1)) \quad (\text{III.6.169})$$

que reproduz (III.6.164). Levando em conta a forma explícita de $t(-1)$ (III.6.137) concluímos que

$$T_0 = -\partial_x u - 2\partial_x^2 \tilde{\nu}. \quad (\text{III.6.170})$$

Este processo pode ser continuado. Por exemplo, substituindo $t(-2)$ na equação (III.6.168) e calculando o traço com $D_2^{(2)}$ da equação (III.6.130) podemos derivar a forma explícita de T_x :

$$\begin{aligned} T_x &= r_1 \partial_x q_1 - q_1 \partial_x r_1 - r_3 \partial_x q_3 + q_3 \partial_x r_3 - 2u(r_1 q_1 - r_3 q_3), \\ &\quad (\text{III.6.171}) \end{aligned}$$

definindo a densidade de momento como

$$\mathcal{P} = \int dx T_x. \quad (\text{III.6.172})$$

Podemos também definir a densidade de energia como:

$$\begin{aligned} T_t &= 2(\partial_x r_1 \partial_x q_1 + \partial_x r_3 \partial_x q_3) + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \frac{1}{2}(u^2 + r_1 q_1 + r_3 q_3)^2 + 2r_1 q_1 r_3 q_3 \\ &\quad + u(r_1 \partial_x q_1 - q_1 \partial_x r_1 + r_3 \partial_x q_3 - q_3 \partial_x r_3), \\ \mathcal{E} &= \int dx T_t. \end{aligned} \quad (\text{III.6.173})$$

Agora vamos calcular as cargas $\tilde{Q}$ e $\tilde{Q}_0$ do modelo $q = 2$ e a relação das mesmas com as correspondentes ao modelo $q = -1$ (III.1.13) Q_{mag}, Q_1, Q_3 e E, P, M . De acordo com a primeira equação (ref5.18) temos que

$$u = \beta \bar{\partial}(\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\tilde{R}_1 + \frac{1}{2}\tilde{R}_3), \quad \bar{\partial} = \partial_x, \quad (\text{III.6.174})$$

de modo que a correspondente carga $\tilde{Q}$ está determinada pelos valores assintóticos dos campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{R}_a$

$$\tilde{\varphi}(\pm\infty) = \frac{\pi}{\beta}\tilde{N}_{\pm}, \quad \tilde{R}_a(\pm\infty) = \frac{2\pi}{\beta}\tilde{f}_{\pm}(a). \quad (\text{III.6.175})$$

Aqui assumimos que para t (e t_2) fixos a zero, o limite $x \rightarrow \pm\infty$ dos campos $\tilde{\varphi}(x_2, t_2)$, $\tilde{R}_a(x_2, t_2)$ e $\varphi(z, \bar{z})$, $R_a(z, \bar{z})$ coincidem. Como resultado podemos expressar $\tilde{Q}$ em termos das cargas elétricas Q_1, Q_3 e topológicas Q_{mag} do modelo $q = -1$ (III.3.33), (III.3.39)

$$\tilde{Q} = \frac{1}{4}[4\pi j_{\varphi} + Q_1 + Q_3]. \quad (\text{III.6.176})$$

Para calcular $\tilde{Q}_0$ e sua relação com E, P e M do modelo $q = -1$, representamos T_0 (III.6.164) como uma derivada total ($\partial_x \equiv \bar{\partial}$) utilizando as equações de primeira ordem (III.4.46) e as relações $r_a, q_a, u \leftrightarrow \tilde{\psi}_a, \tilde{\chi}_a, \Phi$ (III.6.159), (III.6.160):

$$T_0 = \frac{1}{\gamma^2}V_{rel} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mu}{\beta^2}\bar{\partial}(\sum_{k=1}^2 e^{-\beta\Phi_k} + \beta^2\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3) = \frac{1}{\gamma}\frac{\mu}{\beta^2}\partial_{x_2}\tilde{F}, \quad (\text{III.6.177})$$

onde V_{rel} é o potencial do modelo $q = -1$ (III.1.16). Note que a constante de acoplamento do modelo $q = 2$, $\kappa = \frac{\mu}{\beta^2}$ aparece em (III.6.177) como resultado de um simples reescalamento

$$(r_a, q_a, u) \rightarrow (\sqrt{\kappa}r_a, \sqrt{\kappa}q_a, \sqrt{\kappa}u). \quad (\text{III.6.178})$$

Agora lembramos a forma das componentes do tensor energia-momento T_{00} e T_{01} do modelo $q = -1$, já derivado na seção III.4.2:

$$T_{00} = -(\gamma + \frac{1}{\gamma})\frac{\mu}{\beta^2}\partial_x(\sum_{k=1}^2 e^{-\beta\Phi_k} + \beta^2\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3),$$

$$T_{01} = (-\gamma + \frac{1}{\gamma}) \frac{\mu}{\beta^2} \partial_x (\sum_{k=1}^2 e^{-\beta \Phi_k} + \beta^2 \tilde{\psi}_3 \tilde{\chi}_3), \quad (\text{III.6.179})$$

onde usamos a relação

$$\frac{1}{\gamma} F^- + \gamma F^+ = 2c_0 \quad (\text{III.6.180})$$

que se obtém das equações (III.4.48) e da definição dos $F^\pm$. Comparando (III.6.177) com a equação (III.6.179) concluimos que:

$$\begin{aligned} E &= \int T_{00} dx = -\gamma(\gamma + \frac{1}{\gamma}) \tilde{Q}_0, & P &= \int T_{01} dx = -\gamma(\gamma - \frac{1}{\gamma}) \tilde{Q}_0, \\ \tilde{Q}_0 &= \int dx_2 T_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{\beta^2} \int dx_2 \partial_{x_2} \tilde{F}, & \tilde{F} &= \sum_{k=1}^2 e^{-\beta \Phi_k} + \beta^2 \tilde{\psi}_3 \tilde{\chi}_3, \end{aligned} \quad (\text{III.6.181})$$

onde $\gamma = e^{-b}$ está relacionado com a velocidade do 1-sóliton do modelo $q = -1$ através da expressão

$$\gamma = \left(\frac{1 - v_{rel}}{1 + v_{rel}} \right)^{1/2}, \quad v_{rel} = \tanh b. \quad (\text{III.6.182})$$

Portanto, a carga $\tilde{Q}_0$ do modelo não relativístico $q = 2$ é proporcional à massa M do sóliton do modelo $q = -1$:

$$\tilde{Q}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + v_{rel}}{1 - v_{rel}} \right)^{1/2} M = \frac{4\mu}{\beta_0^2 \gamma} \left| \sin \frac{[\beta_0^2 Q_{mag} - Q_1 + Q_3]}{8} \right|. \quad (\text{III.6.183})$$

Introduzindo (III.6.176) obtemos

$$\tilde{Q}_0 = \frac{4\kappa}{\gamma} \left| \sin \left(\frac{\tilde{Q}}{2} - \frac{Q_1}{4} \right) \right|. \quad (\text{III.6.184})$$

Para completar o espectro de 1-sóliton, $(\tilde{Q}, \tilde{Q}_0, \mathcal{P}, \mathcal{E})$ do modelo $q = 2$ (III.6.131) nos faltaria avaliar o momento do sóliton $\mathcal{P}$ (III.6.172) e a energia $\mathcal{E}$ (III.6.173). Para isso bastaria seguir para T_x e T_t o mesmo procedimento que temos utilizado no cálculo de $\tilde{Q}_0$.

Capítulo IV

Modelo $SL(3)/U(2)$

Neste capítulo aplicaremos todos os métodos explicados no capítulo anterior para construir, agora, um modelo com simetrias locais não abelianas.

IV.1 Construção do modelo

Da mesma forma que o modelo de *Lund-Regge* (II.1.12), o modelo do qual falaremos neste capítulo ($SL(3)/U(2)$) poderia ser incluído entre os modelos de *sine-Gordon homogêneos* [14], os quais como vimos no capítulo II são construídos especificando a gradação de álgebra segundo

$$Q = \hat{d}, \quad \epsilon_{\pm} = \sum_{i=1}^n \mu_i h_i^{(\pm 1)}, \quad \mathcal{G}_0^0 = \{h_i^{(0)}, i = 1, \dots, n\} = U(1)^n. \quad (\text{IV.1.1})$$

onde $n = \text{rank } \mathcal{G}$. Estas gradações são conhecidas também como gradações homogêneas, as quais levam a modelos integráveis com um número máximo n de simetrias $U(1)^n$ locais ou globais. As soluções destas teorias somente apresentam carga elétrica já que o correspondente potencial $V = \text{Tr}(\epsilon_+ g_0 \epsilon_- g_0^{(-1)})$ não tem zeros não triviais. O novo modelo $SL(3)/U(2)$ que apresentaremos aqui, se caracteriza pelo fato de suas simetrias locais serem não abelianas. A estrutura não abeliana do subespaço de grau zero $\mathcal{G}_0^0$ se obtém ao suprimir dos geradores constantes de grau ± 1 , $\epsilon_{\pm}$ um dos geradores da subálgebra de

Cartan. No caso específico que nos ocupa a escolha foi feita de modo que a gradação é

$$Q = \hat{d}, \quad \epsilon_{\pm} = \mu \lambda_2 \cdot H^{(\pm 1)}, \quad \mathcal{G}_0^0 = \{E_{\pm\alpha_1}^{(0)}, h_1^{(0)}, h_2^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}, \quad (\text{IV.1.2})$$

onde é possível ver como $\mathcal{G}_0^0$ apresenta uma estrutura não abeliana, mais especificamente $\mathcal{G}_0^0 = U(2)$ (sem levar em conta os geradores $\hat{c}$ e $\hat{d}$). Como vimos nesta tese a existência do subespaço $\mathcal{G}_0^0$ nos permite impor os vínculos adicionais (I.2.24), os quais nos conduziram a soluções com simetrias internas globais.

A parametrização para o elemento B neste caso é

$$B = e^{\tilde{\chi}_1 E_{-\alpha_1}^{(0)}} e^{\tilde{\chi}_2 E_{-\alpha_2}^{(0)} + \tilde{\chi}_3 E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(0)}} e^{R_1 h_1^{(0)} + R_2 h_2^{(0)} + \nu \hat{c} + \mu \hat{d}} e^{\tilde{\psi}_2 E_{\alpha_2}^{(0)} + \tilde{\psi}_3 E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(0)}} e^{\tilde{\chi}_1 E_{\alpha_1}^{(0)}}. \quad (\text{IV.1.3})$$

A correspondente ação efetiva pode ser obtida a partir de (I.2.28) escolhendo os potenciais $A = A_1 + A_0$, $\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_0$ como

$$A_1 = a_1 E_{\alpha_1}^{(1)}, \quad \bar{A}_1 = \bar{a}_1 E_{-\alpha_1}^{(1)}, \quad (\text{IV.1.4})$$

$$A_0 = a_{01} \lambda_1 \cdot H + a_{02} (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot H, \quad \bar{A}_0 = \bar{a}_{01} \lambda_1 \cdot H + \bar{a}_{02} (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot H.$$

Depois de eliminar os campos não físicos introduzindo a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_3 &= \chi_3 e^{\frac{-1}{2}(R_1 + R_2)}, & \tilde{\psi}_3 &= \psi_3 e^{\frac{-1}{2}(R_1 + R_2)}, \\ \tilde{\chi}_2 &= \chi_2 e^{\frac{1}{2}R_1 - R_2}, & \tilde{\psi}_2 &= \psi_2 e^{\frac{1}{2}R_1 - R_2}, \\ \tilde{\chi}_1 &= \chi_1 e^{\frac{1}{2}R_2 - R_1}, & \tilde{\psi}_1 &= \psi_1 e^{\frac{1}{2}R_2 - R_1}, \end{aligned}$$

o elemento do grupo fator se expressa como

$$g_0^f = e^{\chi_2 E_{-\alpha_2}^{(0)} + \chi_3 E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(0)}} e^{\nu \hat{c} + \mu \hat{d}} e^{\psi_2 E_{\alpha_2}^{(0)} + \psi_3 E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(0)}}. \quad (\text{IV.1.5})$$

O próximo passo seria resolver as integrais funcionais Gaussianas incluídas na definição da função de partição do modelo,

$$\mathcal{Z}(SL(3)/U(2)) = \int DAD\bar{A} e^{-S_{G/H}} = e^{-S_{eff}},$$

desta maneira obtemos para o modelo $SL(3)/U(2)$ a ação efetiva:

$$S_{eff} = -\frac{k}{2\pi} \int dz d\bar{z} \left\{ \frac{1}{\Delta} \left[\bar{\partial}\psi_2 \partial\chi_2 (1 + \psi_2\chi_2 + \psi_3\chi_3) + \bar{\partial}\psi_3 \partial\chi_3 (1 + \psi_2\chi_2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (\psi_2\chi_3 \bar{\partial}\psi_3 \partial\chi_2 + \chi_2\psi_3 \bar{\partial}\psi_2 \partial\chi_3) \right] + \frac{1}{2} (\partial\nu \bar{\partial}\eta + \partial\eta \bar{\partial}\nu) - V \right\} , \quad (IV.1.6)$$

onde o potencial

$$V = \mu^2 e^{-\eta} \left(\frac{2}{3} + \psi_2\chi_2 + \psi_3\chi_3 \right) \quad (IV.1.7)$$

e

$$\Delta = (1 + \psi_2\chi_2)^2 + \psi_3\chi_3 (1 + \frac{3}{4}\psi_2\chi_2) . \quad (IV.1.8)$$

O fato de que o potencial V não apresente um número infinito de mínimos não triviais (para $\psi_2 = \psi_3 = \chi_2 = \chi_3 = 0$) já nos indica que o modelo (IV.1.6) pode ter somente sólitons *não topológicos*. Assim como os sólitons de *Lund-Regge*, os sólitons deste modelo não são do tipo dyon.

Temos visto nos modelos desenvolvidos nesta tese que a suas soluções tipo sólitons pode-se associar um espectro de partículas, o qual é determinado a partir do respectivo tensor energia-momento. Com o propósito de calcular este tensor é que reescrevemos a ação (IV.1.6) como

$$S_{eff} = -\frac{k}{4\pi} \int dx dt \left\{ \frac{g^{\mu\xi}}{\Delta} [\partial_\mu \psi_2 \partial_\xi \chi_2 (1 + \psi_2\chi_2 + \psi_3\chi_3) \right. \\ + \partial_\mu \psi_3 \partial_\xi \chi_3 (1 + \psi_2\chi_2) - \frac{1}{2} (\psi_2\chi_3 \partial_\mu \psi_3 \partial_\xi \chi_2 + \chi_2\psi_3 \partial_\mu \psi_2 \partial_\xi \chi_3) \\ \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial_\xi \nu] - V \right\} . \quad (IV.1.9)$$

Os momentos canônicos correspondentes aos campos $\psi_2, \psi_3, \chi_2, \chi_3$ que se obtêm a partir da ação anterior são

$$\Pi_\mu^{\psi_2} = \frac{-k}{4\pi\Delta} g^{\mu\xi} \left[\partial_\xi \chi_2 (1 + \psi_2\chi_2 + \psi_3\chi_3) - \frac{\chi_2\psi_3 \partial_\xi \chi_3}{2} \right] ,$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu}^{\chi_2} &= \frac{-k}{4\pi\Delta} g^{\mu\xi} \left[\partial_{\xi} \psi_2 (1 + \psi_2 \chi_2 + \psi_3 \chi_3) - \frac{\psi_2 \chi_3 \partial_{\xi} \psi_3}{2} \right], \\
\Pi_{\mu}^{\psi_3} &= \frac{-k}{4\pi\Delta} g^{\mu\xi} \left[\partial_{\xi} \chi_3 (1 + \psi_2 \chi_2) - \frac{\chi_3 \psi_2 \partial_{\xi} \chi_2}{2} \right], \\
\Pi_{\mu}^{\chi_3} &= \frac{-k}{4\pi\Delta} g^{\mu\xi} \left[\partial_{\xi} \psi_3 (1 + \psi_2 \chi_2) - \frac{\chi_2 \psi_3 \partial_{\xi} \psi_2}{2} \right]. \quad (\text{IV.1.10})
\end{aligned}$$

Agora podemos definir o tensor energia-momento associado a este modelo:

$$\begin{aligned}
\Theta_{CAT}^{\mu\nu} &= \frac{-k}{4\pi\Delta} \left[g^{\mu\xi} \left\{ (\partial_{\xi} \chi_2 (1 + \psi_2 \chi_2 + \psi_3 \chi_3) - \frac{\chi_2 \psi_3 \partial_{\xi} \chi_3}{2}) \partial^{\nu} \psi_2 \right. \right. \\
&\quad + (\partial_{\xi} \psi_2 (1 + \psi_2 \chi_2 + \psi_3 \chi_3) - \frac{\psi_2 \chi_3 \partial_{\xi} \psi_3}{2}) \partial^{\nu} \chi_2 \\
&\quad + (\partial_{\xi} \chi_3 (1 + \psi_2 \chi_2) - \frac{\chi_3 \psi_2 \partial_{\xi} \chi_2}{2}) \partial^{\nu} \psi_3 \\
&\quad + \left. (\partial_{\xi} \psi_3 (1 + \psi_2 \chi_2) - \frac{\chi_2 \psi_3 \partial_{\xi} \psi_2}{2}) \partial^{\nu} \chi_3 \right\} \\
&\quad - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \Big], \quad (\text{IV.1.11})
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}$ é o lagrangiano associado à ação (IV.1.9). Se calcularmos o traço deste tensor veremos que se satisfaz a relação

$$\Theta_{CAT}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{IV.1.12})$$

Isto porque este modelo apresenta simetria conforme e o tensor energia-momento associado a uma teoria conforme tem traço nulo. Se consideramos $\eta = 0$ esta invariância é quebrada. Definimos o tensor $T^{\mu\nu}$, correspondente a este novo modelo de Toda de modo que

$$T^{\mu\nu} = \Theta_{CAT}^{\mu\nu} + 4(\partial^{\mu} \partial^{\nu} - g^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial^{\alpha}) f, \quad (\text{IV.1.13})$$

onde f é uma função arbitrária que é escolhida como

$$T^{\alpha}_{\alpha} = 4\partial\bar{\partial}f. \quad (\text{IV.1.14})$$

Para este tensor se cumpre

$$T^{\alpha}_{\alpha} = 2V. \quad (\text{IV.1.15})$$

Observe que a inclusão deste termo não afeta a conservação do tensor energia-momento (IV.1.11) já que

$$\partial_\mu \Theta_{CAT}^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} . \quad (\text{IV.1.16})$$

A energia total e o momento do modelo são definidos a partir do tensor energia-momento como:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx T^{00} = -4 \partial_x f \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} , \\ P &= \int_{-\infty}^{\infty} dx T^{01} = 4 \partial_t f \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} , \end{aligned} \quad (\text{IV.1.17})$$

onde usamos o fato de que nas teorias conformes não existe uma escala de massa, portanto a massa de repouso do sóliton deve ser nula. Mas se em um referencial em repouso a energia é proporcional à massa, então

$$E^{CAT} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta_{00}^{CAT} = 0, \quad (\text{IV.1.18})$$

$$P^{CAT} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta_{01}^{CAT} = 0. \quad (\text{IV.1.19})$$

Assim a forma explícita da função f é determinada pelas equações de movimento, as quais apresentaremos na próxima seção.

IV.2 Curvatura nula e as Equações de Movimento

As equações de movimento correspondentes ao modelo $SL(3)/U(2)$ têm uma vez mais a forma padrão das equações de Leznov-Saveliev (I.2.15), com as correntes expressas como

$$B^{-1} \partial B = \begin{pmatrix} J_{h_1} & J_{-\alpha_1} & J_{-(\alpha_1 + a_2)} \\ J_{\alpha_1} & -J_{h_1} + J_{h_2} & J_{-\alpha_2} \\ J_{-(\alpha_1 + a_2)} & J_{\alpha_2} & J_{h_2} \end{pmatrix} ,$$

onde

$$\begin{aligned}
J_{h_1} &= -\tilde{\psi}_1 \partial \tilde{\chi}_1 e^{2R_1-R_2} + (\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3)(\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2} + \partial R_1, \\
J_{h_2} &= -\tilde{\psi}_2 \partial \tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2} - \tilde{\psi}_3(\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2} + \partial R_2, \\
J_{\alpha_1} &= \partial \tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_1^2 \partial \tilde{\chi}_1 e^{2R_1-R_2} + \partial \tilde{\chi}_2(\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3) e^{-R_1+2R_2} \\
&\quad + \tilde{\psi}_1 \left[(\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3)(\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2} + 2\partial R_1 - \partial R_2 \right], \\
J_{-\alpha_1} &= \partial \tilde{\chi}_1 e^{2R_1-R_2} - \tilde{\psi}_2(\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2}, \\
J_{\alpha_2} &= \partial \tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2} + \tilde{\psi}_1(\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2}, \\
J_{-\alpha_2} &= \partial \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_2^2 \partial \tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2} + \partial \tilde{\chi}_1 \tilde{\psi}_3 e^{2R_1-R_2} \\
&\quad - \tilde{\psi}_2 \left[\tilde{\psi}_3(\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2} + \partial R_1 - 2\partial R_2 \right], \\
J_{-(\alpha_1+\alpha_2)} &= -\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_3 \partial \tilde{\chi}_1 e^{2R_1-R_2} + \tilde{\psi}_2 \partial \tilde{\chi}_2(\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3) e^{-R_1+2R_2} \\
&\quad + \partial R_1(\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 + \tilde{\psi}_3) + \partial R_2(-2\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 + \tilde{\psi}_3) \\
&\quad + \tilde{\psi}_3(\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3)(\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2} + \partial \tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_1 \partial \tilde{\psi}_2, \\
J_{\alpha_1+\alpha_2} &= (\partial \tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_2 \partial \tilde{\chi}_1) e^{R_1+R_2}. \tag{IV.2.20}
\end{aligned}$$

Igualmente expressamos

$$\bar{\partial} B B^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{J}_{h_1} & \bar{J}_{-\alpha_1} & \bar{J}_{-(\alpha_1+\alpha_2)} \\ \bar{J}_{\alpha_1} & -\bar{J}_{h_1} + \bar{J}_{h_2} & \bar{J}_{-\alpha_2} \\ \bar{J}_{-(\alpha_1+\alpha_2)} & \bar{J}_{\alpha_2} & \bar{J}_{h_2} \end{pmatrix},$$

com as respectivas correntes

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{h_1} &= -\tilde{\chi}_1 \bar{\partial} \tilde{\psi}_1 e^{2R_1-R_2} + (\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_3)(\bar{\partial} \tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2} + \bar{\partial} R_1, \\
\bar{J}_{h_2} &= -\tilde{\chi}_2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_2 e^{-R_1+2R_2} - \tilde{\chi}_3(\bar{\partial} \tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2} + \bar{\partial} R_2, \\
\bar{J}_{-\alpha_1} &= \bar{\partial} \tilde{\chi}_1 - \tilde{\chi}_1^2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_1 e^{2R_1-R_2} + \bar{\partial} \tilde{\psi}_2(\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_3) e^{-R_1+2R_2} \\
&\quad + \tilde{\chi}_1 \left[(\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_3)(\bar{\partial} \tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2} + 2\bar{\partial} R_1 - \bar{\partial} R_2 \right], \\
\bar{J}_{\alpha_1} &= \bar{\partial} \tilde{\psi}_1 e^{2R_1-R_2} - \tilde{\chi}_2(\bar{\partial} \tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2}, \\
\bar{J}_{-\alpha_2} &= \bar{\partial} \tilde{\psi}_2 e^{-R_1+2R_2} + \tilde{\chi}_1(\bar{\partial} \tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2}, \\
\bar{J}_{\alpha_2} &= \bar{\partial} \tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_2^2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_2 e^{-R_1+2R_2} + \bar{\partial} \tilde{\psi}_1 \tilde{\chi}_3 e^{2R_1-R_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \tilde{\chi}_2 \left[\tilde{\chi}_3 (\bar{\partial}\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial}\tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2} + \bar{\partial}R_1 - 2\bar{\partial}R_2 \right], \\
\bar{J}_{-(\alpha_1+\alpha_2)} &= -\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_3 \bar{\partial}\tilde{\psi}_1 e^{2R_1-R_2} + \tilde{\chi}_2 \bar{\partial}\tilde{\psi}_2 (\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_3) e^{-R_1+2R_2} \\
&+ \bar{\partial}R_1 (\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 + \tilde{\chi}_3) + \bar{\partial}R_2 (-2\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 + \tilde{\chi}_3) \\
&+ \tilde{\chi}_3 (\tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_3) (\bar{\partial}\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial}\tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2} + \bar{\partial}\tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_1 \bar{\partial}\tilde{\chi}_2, \\
\bar{J}_{(\alpha_1+\alpha_2)} &= (\bar{\partial}\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_2 \bar{\partial}\tilde{\psi}_1) e^{R_1+R_2}. \tag{IV.2.21}
\end{aligned}$$

Ao impor os vínculos (I.2.24), que seria equivalente a colocar as correntes $J_{h_1}, J_{h_2}, J_{\alpha_1}, J_{-\alpha_1}, \bar{J}_{h_1}, \bar{J}_{h_2}, \bar{J}_{\alpha_1}, \bar{J}_{-\alpha_1}$ iguais a zero, obtemos as equações dos campos não locais R_1, R_2 em função dos campos físicos $\psi_2, \chi_2, \psi_3, \chi_3$:

$$\begin{aligned}
\partial R_1 &= \frac{(1 + \psi_2 \chi_2) \psi_3 \partial \chi_3 - \frac{1}{2} \psi_2 \partial \chi_2 \psi_3 \chi_3}{\Delta}, \\
\partial R_2 &= \frac{(1 + \frac{1}{2} \psi_2 \chi_2) \psi_3 \partial \chi_3 - \psi_2 \partial \chi_2 (1 + \psi_2 \chi_2 + \frac{1}{2} \psi_3 \chi_3)}{\Delta}, \\
\bar{\partial} R_1 &= \frac{(1 + \psi_2 \chi_2) \bar{\partial} \psi_3 \chi_3 - \frac{1}{2} \bar{\partial} \psi_2 \chi_2 \psi_3 \chi_3}{\Delta}, \\
\bar{\partial} R_2 &= \frac{(1 + \frac{1}{2} \psi_2 \chi_2) \bar{\partial} \psi_3 \chi_3 + \bar{\partial} \psi_2 \chi_2 (1 + \psi_2 \chi_2 + \frac{1}{2} \psi_3 \chi_3)}{\Delta}, \tag{IV.2.22}
\end{aligned}$$

assim como as relações

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\tilde{\chi}_1 &= \tilde{\chi}_3 \bar{\partial}\tilde{\psi}_2 e^{2R_2-R_1}, \quad \partial\tilde{\chi}_1 = \frac{\tilde{\psi}_2 \bar{\partial}\tilde{\chi}_3 e^{-R_1+2R_2}}{1 + \tilde{\psi}_2 \tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2}}, \\
\partial\tilde{\psi}_1 &= \tilde{\psi}_3 \partial\tilde{\chi}_2 e^{2R_2-R_1}, \quad \bar{\partial}\tilde{\psi}_1 = \frac{\tilde{\chi}_2 \bar{\partial}\tilde{\psi}_3 e^{-R_1+2R_2}}{1 + \tilde{\psi}_2 \tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2}}. \tag{IV.2.23}
\end{aligned}$$

Como vimos, as equações de Leznov-Saveliev (III.2.17) podem ser escritas na representação de curvatura nula

$$\partial\bar{\mathcal{A}} - \bar{\partial}\mathcal{A} - [\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}] = 0, \tag{IV.2.24}$$

mediante a escolha dos potenciais de calibre $\mathcal{A}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ segundo

$$\mathcal{A} = -B\epsilon_- B^{-1}, \quad \bar{\mathcal{A}} = \epsilon_+ + \bar{\partial}BB^{-1}. \tag{IV.2.25}$$

Então, consideramos o modelo integrável, uma vez que as equações de movimento derivadas da ação (IV.1.6) coincidam com as definidas através de (III.2.17).

Desta forma, as equações de movimento para o modelo $SL(3)/U(2)$ são

$$\bar{\partial} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\chi}_3}{\Delta_2} \right) e^{R_1+R_2} \right] = -\tilde{\chi}_3 e^{R_1+R_2}, \quad (\text{IV.2.26})$$

$$\partial \left[\left(\frac{\bar{\partial} \tilde{\psi}_3 e^{R_1+R_2}}{\Delta_2} \right) \right] = -\tilde{\psi}_3 e^{R_1+R_2}, \quad (\text{IV.2.27})$$

$$\bar{\partial} \left[(\partial \tilde{\chi}_2) e^{-R_1+2R_2} \right] + \frac{\tilde{\chi}_2 \bar{\partial} \tilde{\psi}_3 \partial \tilde{\chi}_3 e^{3R_2}}{\Delta_2^2} = -\tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2}, \quad (\text{IV.2.28})$$

$$\partial \left[(\bar{\partial} \tilde{\psi}_2) e^{-R_1+2R_2} \right] + \tilde{\psi}_2 \frac{\bar{\partial} \tilde{\psi}_3 \partial \tilde{\chi}_3 e^{3R_2}}{\Delta_2^2} = -\tilde{\psi}_2 e^{-R_1+2R_2}, \quad (\text{IV.2.29})$$

$$\bar{\partial} \partial \nu = \mu^2 e^{-\eta} \left(\frac{2}{3} + \psi_2 \chi_2 + \psi_3 \chi_3 \right), \quad (\text{IV.2.30})$$

$$\partial \bar{\partial} \eta = 0, \quad (\text{IV.2.31})$$

as quais, por motivos de simplicidade têm sido escritas em função dos campos não locais: R_1 e R_2 .

Não é difícil ver que tanto a ação como as equações de movimento apresentam a simetria discreta CP:

$$\begin{aligned} \psi'_a &= \chi_a, & \chi'_a &= \psi_a, \\ Px &= -x, & P\partial &= \bar{\partial}. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.32})$$

Esta simetria é muito útil para derivar as equações de primeira ordem. Este modelo apresenta um conjunto de simetrias locais não abelianas, as quais ao impor os vínculos adicionais (I.2.24) vão nos conduzir à soluções tipo sóliton com novas simetrias, que poderiam ser não abelianas também. Estas simetrias ainda estão em processo de estudo já que o fato de elas serem não abelianas gera novas propriedades que precisam ser melhor entendidas.

IV.3 Solução de 1- sóliton

IV.3.1 Funções *tau*

Como foi explicado no capítulo anterior o método dos operadores de vértice e as funções *tau* nos permite determinar as soluções tipo sóliton de diferentes modelos integráveis como os descritos nesta tese. No caso do modelo $SL(3)/U(2)$ usaremos este procedimento para achar uma solução de 1-sóliton. Os elementos matriciais (III.5.87) a serem calculados para determinar as conhecidas funções tau são

$$\begin{aligned}
\tau_0 &\equiv e^{\nu - \mu^2 z \bar{z}} = \langle \lambda_0 | T_0 g^{(1)} T_0^{-1} | \lambda_0 \rangle, \\
\tau_{R_1} &\equiv e^{R_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} = \langle \lambda_1 | T_0 g^{(1)} T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle, \\
\tau_{R_2} &\equiv e^{R_2 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} = \langle \lambda_2 | T_0 g^{(1)} T_0^{-1} | \lambda_2 \rangle, \\
\tau_{\psi_3} &\equiv e^{R_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \tilde{\psi}_3 = \langle \lambda_1 | T_0 g^{(1)} T_0^{-1} E_{-(\alpha_1 + \alpha_2)}^{(0)} | \lambda_1 \rangle, \\
\tau_{\chi_3} &\equiv e^{R_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \tilde{\chi}_3 = \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(0)} T_0 g^{(1)} T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle, \\
\tau_{\psi_2} &\equiv e^{R_2 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \tilde{\psi}_2 = \langle \lambda_2 | T_0 g^{(1)} T_0^{-1} E_{-\alpha_2}^{(0)} | \lambda_2 \rangle, \\
\tau_{\chi_2} &\equiv e^{R_2 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \tilde{\chi}_2 = \langle \lambda_2 | E_{\alpha_2}^{(0)} T_0 g^{(1)} T_0^{-1} | \lambda_2 \rangle, \\
\tau_{\psi_1} &\equiv e^{R_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \tilde{\psi}_1 = \langle \lambda_1 | T_0 g^{(1)} T_0^{-1} E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle, \\
\tau_{\chi_1} &\equiv e^{R_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z}} \tilde{\chi}_1 = \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle. \tag{IV.3.33}
\end{aligned}$$

Para achar a dependência espaço-temporal temos que calcular os elementos de matriz anteriores. Para isso, do mesmo modo como foi feito no capítulo anterior, escolhemos o elemento $g^{(1)}$ segundo (III.5.105), em termos dos autoestados dos geradores constantes de grau ± 1 , $\epsilon_{\pm}$, os quais para este modelo resultam ser

$$\begin{aligned}
F_{\pm}(\gamma) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_{\pm \alpha_2}^n \gamma^{-n} + E_{\pm(\alpha_1 + \alpha_2)}^n \gamma^{-n}, \\
\tilde{F}_{\pm}(\gamma) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_{\pm \alpha_2}^n \gamma^{-n} - E_{\pm(\alpha_1 + \alpha_2)}^n \gamma^{-n}. \tag{IV.3.34}
\end{aligned}$$

Estes autoestados apresentam a propriedade de nilpotencia ($F^2 = 0$) dos

operadores de vértice, o que nos permite considerar:

$$T_0 g^{(1)} T_0^{-1} = 1 + d\rho(\gamma)F(\gamma), \quad (\text{IV.3.35})$$

com $g^{(1)} = e^{dF(\gamma)}$ facilitando desta maneira o cálculo da solução como veremos na próxima seção.

IV.3.2 Solução de 1-sóliton

Para determinar a solução de 1-sóliton mais simples das equações de movimento (IV.2.26)-(IV.2.31) utilizamos o produto de 2 vértices:

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= e^{aF_+(\gamma_1)} e^{bF_-(\gamma_2)}, \\ T_0 g^{(1)} T_0^{-1} &= e^{a\rho_1(\gamma_1)F_+(\gamma_1)} e^{b\rho_2(\gamma_2)F_-(\gamma_2)}, \end{aligned} \quad (\text{IV.3.36})$$

que ao ser introduzido em (III.5.86) nos conduz a solução cujas correspondentes funções *tau* são

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 + ab\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\frac{2\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, \\ \tau_{R_1} &= 1 + ab\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\frac{\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, \\ \tau_{R_2} &= 1 + ab\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\frac{2\gamma_1^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, \\ \tau_{\psi_3} &= a\rho_1(\gamma_1), \\ \tau_{\chi_3} &= b\rho_2(\gamma_2), \\ \tau_{\psi_2} &= a\rho_1(\gamma_1), \\ \tau_{\chi_2} &= b\rho_2(\gamma_2), \\ \tau_{\psi_1} &= ab\frac{\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}, \\ \tau_{\chi_1} &= ab\frac{\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}, \end{aligned} \quad (\text{IV.3.37})$$

com $\rho_1 = e^{-\frac{z}{\gamma_1} + \bar{z}\gamma_1}$ e $\rho_2 = e^{\frac{z}{\gamma_2} - \bar{z}\gamma_2}$. Para conhecer os detalhes de como calcular esta solução ver apêndice C.

Para garantir que a energia e o momento correspondentes a esta solução sejam reais escolhemos

$$\rho_1 \rho_2 \in \text{Real} . \quad (\text{IV.3.38})$$

Introduzindo a parametrização

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -e^{\bar{b}-i\bar{a}}, & \gamma_2 &= e^{\bar{b}+i\bar{a}}, \\ \rho_1 &= e^{F+iG}, & \rho_2 &= e^{F-iG}, \end{aligned} \quad (\text{IV.3.39})$$

com

$$\begin{aligned} F &= \mu \cos \bar{a} [-t \sinh \bar{b} + x \cosh \bar{b}], \\ G &= \mu \sin \bar{a} [t \sinh \bar{b} - x \cosh \bar{b}], \end{aligned} \quad (\text{IV.3.40})$$

e $\bar{a}, \bar{b}$ parâmetros reais. Vamos a reescrever a solução (IV.3.38) de modo que com

$$\begin{aligned} a &= \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\sqrt{2\gamma_1\gamma_2}} e^{i\Theta - \mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b}}, \\ b &= \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\sqrt{2\gamma_1\gamma_2}} e^{-i\Theta - \mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b}}, \end{aligned} \quad (\text{IV.3.41})$$

a solução se escreve como

$$\begin{aligned} e^{\nu - \mu^2 z \bar{z}} &= 1 + e^{\tilde{F}}, \\ e^{R_1} &= \frac{2e^{-\tilde{F}} + (1 + \Gamma_1)e^{\tilde{F}}}{2(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})}, \\ e^{R_2} &= \frac{e^{-\tilde{F}} + \Gamma_1 e^{\tilde{F}}}{e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}, \\ \psi_3 &= \frac{2\Gamma_2 e^{i(G+\Theta)}(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})}{(2e^{-\tilde{F}} + (1 + \Gamma_1)e^{\tilde{F}})^{3/2}(e^{-\tilde{F}} + \Gamma_1 e^{\tilde{F}})^{1/2}}, \\ \chi_3 &= \frac{2\Gamma_2 e^{-i(G+\Theta)}(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})}{(2e^{-\tilde{F}} + (1 + \Gamma_1)e^{\tilde{F}})^{3/2}(e^{-\tilde{F}} + \Gamma_1 e^{\tilde{F}})^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= \frac{\Gamma_2 e^{i(G+\Theta)}}{(2e^{-\tilde{F}} + (1 + \Gamma_1)e^{\tilde{F}})^{1/2}(e^{-\tilde{F}} + \Gamma_1 e^{\tilde{F}})^{1/2}}, \\
\chi_2 &= \frac{\Gamma_2 e^{-i(G+\Theta)}}{(2e^{-\tilde{F}} + (1 + \Gamma_1)e^{\tilde{F}})^{1/2}(e^{-\tilde{F}} + \Gamma_1 e^{\tilde{F}})^{1/2}}, \\
\psi_1 &= \frac{-(1 - \Gamma_1)e^{\tilde{F}}}{(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})^{1/2}(e^{-\tilde{F}} + \Gamma_1 e^{\tilde{F}})^{1/2}}, \\
\chi_1 &= \frac{(1 - \Gamma_1^{-1})e^{\tilde{F}}}{(e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}})^{1/2}(e^{-\tilde{F}} + \Gamma_1 e^{\tilde{F}})^{1/2}}, \tag{IV.3.42}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{F}(t, x) = F(t, x - Y)$ e $\Gamma_1 = e^{-2i\bar{a}}$.

A energia, a massa e o momento correspondentes a esta solução podem ser calculados usando (IV.1.17). Como se pode ver das equações de movimento

$$\begin{aligned}
E &= \frac{k}{\pi} \left[\frac{\partial_x \tau_0}{\tau_0} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty}, \\
P &= \frac{-k}{2\pi} \left[\frac{\partial_t \tau_0}{\tau_0} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty}, \tag{IV.3.43}
\end{aligned}$$

onde subtraímos a energia de ponto zero. Observamos que eles vão depender das assintóticas de $\tilde{F}$ de modo que

$$E = \frac{2\mu k}{\pi} \cos \bar{a} \cosh \bar{b} \quad \text{se } \cos \bar{a} > 0, \tag{IV.3.44}$$

$$P = \frac{-2\mu k}{\pi} \cos \bar{a} \sinh \bar{b} \quad \text{se } \cos \bar{a} > 0. \tag{IV.3.45}$$

Para $\cos \bar{a} < 0$ obtém-se sinais contrários. A massa do sóliton é

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{2k\mu}{\pi} |\cos \bar{a}| \cosh \bar{b}, \tag{IV.3.46}$$

com a velocidade v definida segundo $v = \tanh \bar{b}$.

IV.4 Equações de primeira ordem

Assim como vimos no modelo $A_3^{(1)}(p = 2)$, as equações de primeira ordem são de muita utilidade para determinar a solução de 1-sóliton, e propriedades tais como a energia, o momento e a massa das soluções destes

modelos integráveis. Aplicamos o procedimento explicado na seção III.4 para obter as equações de primeira ordem. Para isso escolhemos para o modelo $SL(3)/U(2)$,

$$X = \lambda a_1 h_1^{(1)} + b_1 I + c_1 E_{\alpha_1}^{(0)} + d_1 E_{-\alpha_1}^{(0)} + \lambda^{-1} e_1 h_1^{(-1)} \quad (\text{IV.4.47})$$

e

$$Y = \lambda a_2 h_1^{(1)} + b_2 I + d_2 E_{\alpha_1}^{(0)} + c_2 E_{-\alpha_1}^{(0)} + \lambda e_2 h_1^{(-1)}, \quad (\text{IV.4.48})$$

onde os coeficientes dos geradores da álgebra são parâmetros arbitrários constantes.

Resolvendo o sistema de equações que se obtém a partir de (III.4.44) e do sistema simétrico pela simetria CP (IV.2.32) obtemos as equações de primeira ordem

$$\begin{aligned} \partial \tilde{\chi}_3 &= -\lambda^{-1} \frac{b_2}{b_1} \tilde{\chi}_3 (1 + \tilde{\psi}_2 \tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2}) e^{-R_2}, \\ \partial \tilde{\chi}_2 &= -\lambda^{-1} \frac{b_2}{b_1} \tilde{\chi}_2 e^{-R_2}, \\ \bar{\partial} \tilde{\psi}_3 &= -\lambda \frac{b_1}{b_2} \tilde{\psi}_3 (1 + \tilde{\psi}_2 \tilde{\chi}_2 e^{-R_1+2R_2}) e^{-R_2}, \\ \bar{\partial} \tilde{\psi}_2 &= -\lambda \frac{b_1}{b_2} \tilde{\psi}_2 e^{-R_2}, \\ \bar{\partial} \tilde{\chi}_3 &= \lambda \frac{b_1}{b_2} \tilde{\chi}_3 (1 + \tilde{\psi}_3 \tilde{\chi}_3 e^{R_1-R_2}) e^{R_2}, \\ \bar{\partial} \tilde{\chi}_2 &= \lambda \frac{b_2}{b_1} \tilde{\chi}_2 (1 + \tilde{\psi}_2 \tilde{\chi}_2 e^{-R_1} + \tilde{\psi}_3 \tilde{\chi}_3 e^{R_1-R_2}) e^{R_2}, \\ \partial \tilde{\psi}_3 &= \lambda^{-1} \frac{b_2}{b_1} \tilde{\psi}_3 (1 + \tilde{\psi}_3 \tilde{\chi}_3 e^{R_1-R_2}) e^{R_2}, \\ \partial \tilde{\psi}_2 &= \lambda^{-1} \frac{b_2}{b_1} \tilde{\psi}_2 (1 + \tilde{\psi}_2 \tilde{\chi}_2 e^{-R_1} + \tilde{\psi}_3 \tilde{\chi}_3 e^{R_1-R_2}) e^{R_2}, \end{aligned} \quad (\text{IV.4.49})$$

mais as condições adicionais,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{b_2}{b_1} (\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2) e^{R_2} + c_1 \frac{b_2}{b_1} \tilde{\psi}_2 e^{R_2} &= \alpha_2 \tilde{\psi}_3 e^{R_1} + d_2 (\tilde{\chi}_1 \tilde{\psi}_3 e^{R_1} + \tilde{\psi}_2 e^{R_2-R_1}), \\ d_1 \frac{b_2}{b_1} (\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2) e^{R_2} + \beta_1 \frac{b_2}{b_1} \tilde{\psi}_2 e^{R_2} &= c_2 \tilde{\psi}_3 e^{R_1} + \beta_2 (\tilde{\chi}_1 \tilde{\psi}_3 e^{R_1} + \tilde{\psi}_2 e^{R_2-R_1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 \frac{b_1}{b_2} (\tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2) e^{R_2} + c_2 \frac{b_1}{b_2} \tilde{\chi}_2 e^{R_2} &= \alpha_1 \tilde{\chi}_3 e^{R_1} + d_1 (\tilde{\psi}_1 \tilde{\chi}_3 e^{R_1} + \tilde{\chi}_2 e^{R_2 - R_1}), \\
d_2 \frac{b_1}{b_2} (\tilde{\chi}_3 - \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2) e^{R_2} + \beta_2 \frac{b_1}{b_2} \tilde{\chi}_2 e^{R_2} &= c_1 \tilde{\chi}_3 e^{R_1} + \beta_1 (\tilde{\psi}_1 \tilde{\chi}_3 e^{R_1} + \tilde{\chi}_2 e^{R_2 - R_1}),
\end{aligned}
\tag{IV.4.50}$$

onde

$$\alpha_i = a_i \lambda + e_i \lambda^{-1} + b_i \quad i = 1, 2 \tag{IV.4.51}$$

$$\beta_i = -(a_i \lambda + e_i \lambda^{-1} - b_i) \tag{IV.4.52}$$

e os parâmetros satisfazem

$$c_2 = -(c_1 - d_1) \frac{b_2}{b_1} + d_2, \tag{IV.4.53}$$

$$\alpha_2 = (\alpha_1 + e_1) \frac{b_2}{b_1} - d_2, \tag{IV.4.54}$$

$$\beta_2 = (e_1 + \beta_1) \frac{b_2}{b_1} - d_2. \tag{IV.4.55}$$

IV.5 Modelo não relativístico análogo

O modelo $SL(3)/U(2)$ se encontra dentro de uma hierarquia de modelos integráveis os quais compartilham a mesma estrutura algébrica. Os modelos não relativísticos correspondem às gradações positivas de (III.6.123) e os relativísticos análogos aos anteriores estão associados às gradações negativas, particularmente $q = -1$ nos casos desenvolvidos nesta tese. Para construir o modelo não relativístico correspondente a $SL(3)/U(2)$ seguimos o mesmo procedimento da seção III.6. Para isso no caso de $t_q = t_2 = z$ conservamos uma parte da estrutura da álgebra Q , ϵ_+ e $\mathcal{G}_0^0$, mas o gerador ϵ_- é substituído por um outro gerador constante $D_2^{(2)}$ de grau 2 para o qual propomos

$$D_2^{(2)} = a_1 h_1^{(2)} + a_2 h_2^{(2)}, \tag{IV.5.56}$$

de forma tal que $[D_2^{(2)}, \epsilon_+] = 0$. Os campos físicos vão parametrizar a subálgebra de grau zero $\mathcal{G}_0$ de modo que

$$\mathcal{A}_0 = \partial_x(g_0)g_0^{-1} = q_1 E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(0)} + q_2 E_{\alpha_2}^{(0)} + r_1 E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(0)} + r_2 E_{-\alpha_2}^{(0)}. \quad (\text{IV.5.57})$$

As equações de movimento para estes campos são obtidas a partir do sistema de equações da condição de curvatura nula (III.6.123). O qual escrito grau a grau é:

$$\begin{aligned} [D_2^{(2)}, \epsilon_+] &= 0, \\ \partial_x D_2^{(2)} + [D_2^{(2)}, \mathcal{A}_0] + [D_2^{(1)}, \epsilon_+] &= 0, \\ \partial_x D_2^{(1)} + [D_2^{(1)}, \mathcal{A}_0] + [D_2^{(0)}, \epsilon_+] &= 0, \\ \partial_{t_2} \mathcal{A}_0 - \partial_x D_2^{(0)} - [D_2^{(0)}, \mathcal{A}_0] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.5.58})$$

Assim ao substituir $D_2^{(2)}$ na segunda equação do sistema anterior obtemos uma relação entre os parâmetros a_1, a_2 e os parâmetros de $D_2^{(1)}$:

$$\begin{aligned} D_2^{(1)} &= b_1 h_1^{(1)} + b_2 h_2^{(1)} + b_{\alpha_1} E_{\alpha_1}^{(1)} + b_{\alpha_2} E_{\alpha_2}^{(1)} + b_{\alpha_1+\alpha_2} E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(1)} \\ &+ b_{-\alpha_1} E_{-\alpha_1}^{(1)} + b_{-\alpha_2} E_{-\alpha_2}^{(1)} + b_{-(\alpha_1+\alpha_2)} E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{IV.5.59})$$

em função dos campos q_1, q_2, r_1, r_2 . Os restantes parâmetros de $D_2^{(1)}$ são determinados a partir da terceira equação de (IV.5.59). Sucessivamente continuamos o processo até chegarmos às equações de movimento para o modelo $SL(3)/U(2)(q=2)$:

$$\begin{aligned} \partial_t q_2 - \partial_x^2 q_2 - 2q_2(q_1 r_1 + q_2 r_2) &= 0, \\ \partial_t r_2 + \partial_x^2 r_2 + 2q_2 r_2^2 &= 0, \\ \partial_t q_1 - \partial_x^2 q_1 - 2q_1(q_1 r_1 + q_2 r_2) &= 0, \\ \partial_t r_1 + \partial_x^2 r_1 + 2q_1 r_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.5.60})$$

Não é difícil comprovar que a solução (IV.3.38) satisfaz as equações de movimento (IV.5.61) com

$$q_1(x, t) = \bar{J}_{-(\alpha_1+\alpha_2)}(\bar{z} \rightarrow x, \frac{z}{\gamma} \rightarrow t\gamma^2),$$

$$\begin{aligned}
q_2(x, t) &= \bar{J}_{-\alpha_2}(\bar{z} \rightarrow x, \frac{z}{\gamma} \rightarrow t\gamma^2), \\
r_1(x, t) &= \bar{J}_{\alpha_1+\alpha_2}(\bar{z} \rightarrow x, \frac{z}{\gamma} \rightarrow t\gamma^2), \\
r_2(x, t) &= \bar{J}_{\alpha_2}(\bar{z} \rightarrow x, \frac{z}{\gamma} \rightarrow t\gamma^2).
\end{aligned} \tag{IV.5.61}$$

Este modelo ainda se encontra em fase de estudo. Aspectos tais como suas simetrias e cargas conservadas precisam ser melhor entendidos. Nós o colocamos nesta tese porque possuindo simetrias internas não abelianas, representa de certa forma a continuidade natural dos modelos já estabelecidos com simetrias internas abelianas como, por exemplo, os modelos $A_2^{(1)}(p=1)$ e $A_3^{(1)}(p=2)$ aqui estudados.

Capítulo V

Integrabilidade no plano não-comutativo

Neste capítulo falaremos de um tema que pode ser incluído dentro da recém criada área das teorias de campo não-comutativas (TCNC). Porém nosso objetivo é estudar dentro deste contexto, o comportamento da *integrabilidade*. Como temos visto no transcurso da tese, esta propriedade garante a existência de soluções exatas das teorias que a possuem, daí a sua importância. Nós nos propusemos estudar o que acontece com esta propriedade ao definir no plano não-comutativo conhecidas teorias integráveis comutativas em duas dimensões: o modelo de *sine-Gordon* e o modelo *Quiral Principal*. Encontramos resultados interessantes, que poderão ser vistos no que segue.

V.1 Introdução

A idéia central das teorias de campo não comutativas (TCNC), ou seja, a não-comutatividade das coordenadas do espaço-tempo é bastante antiga tanto na Física como na Matemática [34]. O formalismo matemático no qual as TCNC são baseadas tem-se desenvolvido dentro do que se conhece como Geometria Não-Comutativa(GNC). Sendo esta uma teoria de significativo

interesse para a Física, é notável que ela tenha sido primeiramente formulada por matemáticos [35]. Não foi até a descoberta de que teorias de calibre não-comutativas poderiam aparecer em certos limites de teoria de cordas [36],[37] e [38] que a comunidade de físicos começou a considerar mais seriamente este tópico.

Além da conexão que as teorias de campo não-comutativas têm com a teoria de cordas, elas têm interesse por si só. A introdução da não-comutatividade, inicialmente pensada, como um método para melhorar as propriedades de renormalizabilidade da teoria, acabou incorporando uma estrutura inesperada e muito rica, como por exemplo, o aparecimento de mistura UV/IR [39]. Teorias não-comutativas têm aparecido naturalmente também em matéria condensada, especificamente no Efeito Hall Quântico [40].

Dentro deste contexto começaram recentemente a ser estudadas versões não-comutativas de modelos bidimensionais classicamente integráveis [41], [42], [43] e [11]. Particularmente, na Ref.[11] estudamos deformações Moyal de teorias de campo euclidianas bem conhecidas, mais especificamente o modelo *Quiral Principal* e os modelos de *sinh-* e *sine-Gordon*. Neste capítulo vamos expor os resultados deste trabalho.

A introdução da não-comutatividade, preserva, em alguns casos, as propriedades de integrabilidade da teoria original. Este é o caso do modelo *Quiral Principal*. Em outros casos, a versão não-comutativa da teoria obtida da substituição do produto dos campos na ação pelo produto Moyal, conduz à quebra da integrabilidade. Este é o caso dos modelos *sine-* e *sinh-Gordon*.

Porém, a integrabilidade pode ser reestabelecida definindo-se as versões não-comutativas destes modelos através de uma generalização da condição de curvatura nula [11], o que torna o modelo integrável por definição [11]. Nesse caso, aparecem certos vínculos adicionais, além da equação de movimento do modelo, que desaparecem quando o parâmetro de não comutatividade vai a zero.

Na continuação, incluímos uma breve introdução ao plano não-comuta-

tivo, que é o espaço não-comutativo de nosso interesse. Posteriormente estudaremos os modelos de *sinh-Gordon* e *Quiral Principal*.

V.2 Definições básicas

Consideremos o espaço euclidiano R^d com coordenadas x^i , $i = 1, \dots, d$. Suponhamos que fixamos uma matriz constante antissimétrica θ^{ij} . Podemos definir o campo bi-vetorial de Poisson $\frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$, e conseqüentemente um produto associativo não-comutativo em R^d . As funções coordenadas x^i na variedade não-comutativa deformada satisfazem as relações de comutação

$$[x^i, x^j] = \mathbf{i}\theta^{ij}. \quad (\text{V.2.1})$$

O espaço-tempo não-comutativo correspondente é definido como a álgebra $\mathcal{A}_\theta$ (sobre C) gerada pelas funções coordenadas x^i que satisfazem (V.2.1) junto com condições de convergência sobre as expressões permitidas para estas coordenadas x_i . Os elementos de $\mathcal{A}_\theta$ podem ser identificados com funções complexas avaliadas em R^d . O produto de duas funções f e g é definido pela fórmula de Moyal (ou produto estrela)

$$f \star g(x) = \exp \left[\frac{\mathbf{i}}{2} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right] f(x_1) g(x_2) \Big|_{x_1=x_2=x}. \quad (\text{V.2.2})$$

A versão não-comutativa de uma teoria de campo (para simplificar consideramos teorias de campo escalares) se obtém substituindo o produto dos campos pelo produto $\star$

$$\phi_1(x) \phi_2(x) \rightarrow \phi_1(x) \star \phi_2(x) = e^{\frac{\mathbf{i}}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^{x_1} \partial_\nu^{x_2}} \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \Big|_{x_1=x_2=x}. \quad (\text{V.2.3})$$

Esta deformação do produto usual traz modificações nas regras de Feynman [44]. Agora só veremos os aspectos essenciais para nosso trabalho. O propagador da versão não-comutativa é o mesmo da teoria de campo original comutativa, o qual é uma conseqüência de uma propriedade do produto $\star$,

ou seja, numa variedade sem fronteiras

$$\int dx f(x) \star g(x) = \int dx f(x) g(x). \quad (\text{V.2.4})$$

Por isto, a parte quadrática de uma ação é a mesma na versão não-comutativa do modelo, proporcionando deste modo o mesmo propagador. Os vértices, por outra parte, tem uma fase adicional. Por exemplo, se consideramos um termo ϕ^n , no espaço dos momentos obtemos

$$\int dx \phi(x) \star \dots \star \phi(x) = \int \prod_{i=1}^n dp_i e^{-\frac{i}{2} \sum_{k < m} p_\mu^k \theta^{\mu\nu} p_\nu^m} \tilde{\phi}(p_1) \dots \tilde{\phi}(p_n) \delta(p_1 + \dots + p_n). \quad (\text{V.2.5})$$

Esta modificação dos vértices conduzirá a diferenças entre as amplitudes de espalhamento de uma teoria comutativa e sua versão não-comutativa.

Na continuação nos referiremos às funções no espaço não-comutativo com o subíndice $\star$.

V.3 Modelos Integráveis não-comutativos

É bem conhecido que a amplitude de transição num processo de produção de partículas correspondente a um modelo integrável em duas dimensões é identicamente nula. Isto significa que na verdade não existe produção ou aniquilação de partículas em processos de espalhamento, ou seja, o número de partículas no estado inicial é igual ao número de partículas no estado final.

V.3.1 Modelo *sinh-Gordon* não-comutativo

Então uma maneira de estudar a integrabilidade da deformação Moyal do modelo de *sinh-Gordon* é calcular a amplitude de transição correspondente a um processo de produção de partículas. Se o modelo fosse integrável, esta amplitude deve ser nula. Particularmente, já deve ser nula na aproximação de nível da árvore, que corresponde com o limite clássico da teoria. Portanto, se qualquer amplitude de um processo de produção de partículas a nível

da árvore não é zero, isto quer dizer que este modelo não é classicamente integrável. Esta estratégia para mostrar a não integrabilidade de um modelo foi utilizada em [49] e será a que utilizaremos para provar como a versão não-comutativa do modelo de *sinh-Gordon* que se obtém a partir da deformação Moyal da ação, resulta não integrável.

Como sabemos o modelo de *sinh-Gordon* definido através do lagrangiano

$$\mathcal{L}_{shG} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cosh(\beta\phi)), \quad (\text{V.3.6})$$

é integrável. Se calculamos a amplitude a nível da árvore de um processo de espalhamento $2 \rightarrow 4$ partículas veremos que ela é nula. Para esse cálculo em específico somente precisamos considerar os termos

$$\tilde{\mathcal{L}}_{shG} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{m^2\beta^2}{4!}\phi^4 - \frac{m^2\beta^4}{6!}\phi^6, \quad (\text{V.3.7})$$

do lagrangiano (V.3.6). Denotamos os momentos de entrada como p_1 e p_2 , e os momentos de saída como p_3, p_4, p_5 , e p_6 . A amplitude para

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4 + p_5 + p_6, \quad (\text{V.3.8})$$

a denotamos por

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 4} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) T(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6). \quad (\text{V.3.9})$$

Usando a variável rapidez podemos escrever estes momentos como

$$p_i = m(\cosh(\theta_i), \sinh(\theta_i)). \quad (\text{V.3.10})$$

Nas coordenadas do cone de luz se transforma em $p_i^\pm = p_i^0 \pm p_i^1 = m \exp(\pm\theta_i)$. Definimos os números $\exp(\theta_i) = a_i$. No que segue vamos considerar somente T .

A amplitude $T(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6)$ tem contribuições de três tipos diferentes de diagramas, como é mostrado na figura 1, onde ainda temos que somar todas as permutações possíveis das linhas de entrada e saída

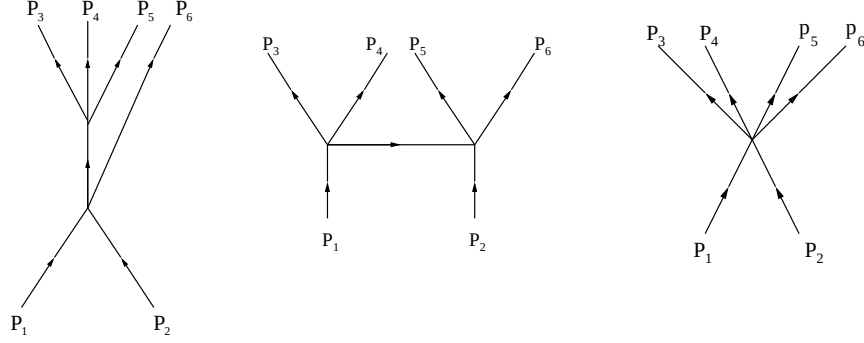


Fig. 1 Os três tipos de diagramas que contribuem a T

À amplitude para o primeiro tipo de diagrama chamamos

$$A(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) , \quad (\text{V.3.11})$$

a do segundo tipo

$$B(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) . \quad (\text{V.3.12})$$

O terceiro tipo é simplesmente o vértice ϕ^6 . Não é difícil ver que

$$\begin{aligned} A(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) &= \frac{1}{(p_1 + p_2 - p_6)^2 - m^2} \\ &= -\frac{1}{m^2} \frac{a_1 a_2 a_6}{(a_1 + a_2)(a_1 - a_6)(a_2 - a_6)}, \\ B(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) &= \frac{1}{(p_1 - p_3 - p_4)^2 - m^2} \\ &= -\frac{1}{m^2} \frac{a_1 a_3 a_4}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_3 + a_4)}. \end{aligned} \quad (\text{V.3.13})$$

A amplitude de espalhamento final tem fatores que dependem das pernas externas, mas que são os mesmos para todos os diagramas e portanto não são importantes para nosso cálculo.

A amplitude de espalhamento do processo $2 \rightarrow 4$, é portanto, proporcional a

$$T(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) = A(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) + A(p_1, p_2; p_4, p_5, p_6, p_3) +$$

$$\begin{aligned}
& A(p_1, p_2; p_5, p_6, p_3, p_4) + A(p_1, p_2; p_6, p_3, p_4, p_5) + B(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) + \\
& B(p_1, p_2; p_3, p_5, p_4, p_6) + B(p_1, p_2; p_3, p_6, p_5, p_4) + B(p_1, p_2; p_5, p_6, p_3, p_4) \\
& + B(p_1, p_2; p_4, p_6, p_3, p_5) + B(p_1, p_2; p_5, p_4, p_3, p_6) + 1,
\end{aligned} \tag{V.3.14}$$

onde 1 é a contribuição do vértice de 6-pontos. Usando a conservação da energia-momento, que corresponde a $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ e $1/a_1 + 1/a_2 = 1/a_3 + 1/a_4 + 1/a_5 + 1/a_6$, pode-se mostrar que a expressão anterior se anula! Em particular, isto significa que a contribuição que vem dos vértices de 4-pontos (amplitudes A e B) se somam dando -1 , e a contribuição constante do vértice de 6-pontos ($+1$) a cancela exatamente.

Agora consideramos a deformação Moyal do modelo de *sine-Gordon*,

$$\mathcal{L}_{shG}^* = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cosh(\beta\phi)_*) , \tag{V.3.15}$$

onde

$$\cosh(\beta\phi)_* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\beta\phi}{2} \right)_*^{2n} . \tag{V.3.16}$$

A equação de movimento correspondente é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sinh(\beta\phi)_* = 0 . \tag{V.3.17}$$

Para calcular a amplitude de transição no caso não-comutativo precisamos antes ver a mudança que acontece nos vértices de 4-pontos e 6-pontos de uma teoria escalar ao introduzir a não-comutatividade. O vértice de 4-pontos transforma-se de acordo com

$$\int dx \phi_*^4 = \int dx (\exp[-\mathbf{i} \sum_{i < j} k_i \wedge k_j]) \phi(k_1) \phi(k_2) \phi(k_3) \phi(k_4) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) . \tag{V.3.18}$$

onde $k_i \wedge k_j = \frac{1}{2}[(k_i)_\mu \theta^{\mu\nu} (k_j)_\nu]$. Em duas dimensões $k_i \wedge k_j = \frac{\theta}{2}[(k_i)_1 (k_j)_2 - (k_i)_2 (k_j)_1]$ porque $\theta^{\mu\nu} = \theta \epsilon^{\mu\nu}$.

Geralmente a deformação Moyal dos vértices não preserva a simetria de permutação, mas no caso de um único boson escalar podemos simetrizar o

integrando, e substituir as fases em (V.3.18) por

$$\begin{aligned}
G_4(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{1}{4!} \sum_{perm.} \exp(-i \sum_{i < j} k_i \wedge k_j) \\
&= \frac{1}{3} [\cos(k_1 \wedge k_2) \cos(k_3 \wedge k_4) \\
&\quad + \cos(k_1 \wedge k_3) \cos(k_2 \wedge k_4) \\
&\quad + \cos(k_1 \wedge k_4) \cos(k_2 \wedge k_3)] . \quad (V.3.19)
\end{aligned}$$

A análise do vértice de 6-pontos é similar, resultando

$$G_6(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = \frac{1}{6!} \sum_{perm.} \exp(-i \sum_{i < j} k_i \wedge k_j) . \quad (V.3.20)$$

Neste caso o deixamos desta forma porque não existe uma maneira mais simples de escrever-lhe como fizemos no caso para do vértice de 4-pontos.

Como vemos todo o que temos que fazer para calcular as amplitudes numa teoria escalar não-comutativa é escrever exatamente os mesmos diagramas de Feynman da teoria comutativa correspondente, e substituir os vértices por expressões tais como (V.3.18) e (V.3.20) (e seus análogos para vértices superiores).

Consideremos agora a amplitude não-comutativa. Usando a fórmula (V.3.18) as amplitudes não-comutativas $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ se transformam em

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) &= A(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) G_4(p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_6, p_6) \\
&\quad G_4(p_1 + p_2 - p_6, p_3, p_4, p_5), \\
\tilde{B}(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) &= B(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) G_4(p_1, p_3, p_4, p_1 - p_3 - p_4) \\
&\quad G_4(p_1 - p_3 - p_4, p_2, p_5, p_6). \quad (V.3.21)
\end{aligned}$$

Então a amplitude para o processo $2 \rightarrow 4$, é agora

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) &= \tilde{A}(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) + \tilde{A}(p_1, p_2; p_4, p_5, p_6, p_3) + \\
&\quad \tilde{A}(p_1, p_2; p_5, p_6, p_3, p_4) + \tilde{A}(p_1, p_2; p_6, p_3, p_4, p_5) + \tilde{B}(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) + \\
&\quad \tilde{B}(p_1, p_2; p_3, p_5, p_4, p_6) + \tilde{B}(p_1, p_2; p_3, p_6, p_5, p_4) + \tilde{B}(p_1, p_2; p_5, p_6, p_3, p_4) + \\
&\quad \tilde{B}(p_1, p_2; p_4, p_6, p_3, p_5) + \tilde{B}(p_1, p_2; p_5, p_4, p_3, p_6) + G_6(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5, p_6) \quad (V.3.22)
\end{aligned}$$

onde G_6 se expressa por (V.3.20).

Uma vez mais, temos que levar em conta o vínculo que impõe a conservação da energia-momento ao avaliar esta expressão. Como era de se esperar, a ordem zero em θ é a amplitude (V.3.14), e portanto se anula. Por outro lado, a expressão (V.3.22) não se anula na próxima ordem em θ (que é realmente θ^2), e desta forma o modelo *não* é integrável. Isto nos leva a concluir que a generalização proposta para o modelo de *sinh-Gordon* não é integrável. Mas isto não quer dizer que não exista uma versão não-comutativa integrável do modelo de *sinh-Gordon*. Esta primeira tentativa não funcionou, mas como veremos, existem vínculos suplementares que podem ser impostos às equações de movimento da versão proposta do modelo *sinh-Gordon* não-comutativo, que o torna integrável.

V.3.2 Condição de Curvatura Nula

Como já expressamos a definição do modelo de *sinh-Gordon* não-comutativo como a deformação Moyal do lagrangiano (V.3.6) nos leva a uma teoria não integrável. Por outra parte, podemos definir o modelo de *sinh-Gordon* não-comutativo através da generalização da condição de curvatura nula. Isto, por construção, nos leva a uma teoria com infinitas cargas conservadas, a qual é equivalente ao modelo de *sinh-Gordon* comutativo no limite $\theta \rightarrow 0$. A seguir, descreveremos a generalização da condição de curvatura nula.

Quando um modelo é integrável, é possível escrever a sua equação de movimento na forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0, \quad (\text{V.3.23})$$

onde U e V são dois potenciais, que dependem do espaço, do tempo e de um parâmetro espectral chamado λ . Aqui $[U, V] = UV - VU$. Esta é a condição de curvatura nula. Esta equação não é mais que a condição de compatibilidade do sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial x} = UF \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = VF, \quad (\text{V.3.24})$$

onde F é um vetor auxiliar. Similarmente, a condição de curvatura nula num espaço não-comutativo pode ser escrita como a condição de compatibilidade do sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U \star F \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = V \star F. \quad (\text{V.3.25})$$

Nós mostraremos que a condição de curvatura-nula- $\star$ implica na existência de um número infinito de cargas conservadas.

Vamos considerar a teoria definida no intervalo $[-L, L]$, e que os operadores U e V satisfaçam condições de fronteira periódicas. A equação satisfeita pelo operador de monodromia $T_\lambda(x)$ é

$$\frac{\partial T_\lambda}{\partial x} = U \star T_\lambda, \quad (\text{V.3.26})$$

com a condição de fronteira $T_\lambda(-L) = 1$. A solução da equação (V.3.26) não é difícil ver que é

$$T_\lambda(x) = P_\star \exp \left(- \int_{-L}^x dz U(z; \lambda) \right), \quad (\text{V.3.27})$$

onde $P_\star$ é o operador- $\star$ de ordenamento da integral de trajetória. Tomando a derivada temporal de (V.3.26) e usando a condição de curvatura nula- $\star$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial_x \partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} \star T_\lambda + U \star \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \star T_\lambda - [U, V]_\star \star T_\lambda + U \star \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \star T_\lambda - U \star V \star T_\lambda + V \star \frac{\partial T_\lambda}{\partial x} + U \star \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (V \star T_\lambda) + U \star \left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial t} - V \star T_\lambda \right), \end{aligned} \quad (\text{V.3.28})$$

que implica

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial t} - V \star T_\lambda \right) = U \star \left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial t} - V \star T_\lambda \right). \quad (\text{V.3.29})$$

Isto significa que

$$\frac{\partial T_\lambda(x)}{\partial t} = V(x) \star T_\lambda(x) + T_\lambda(x) \star K , \quad (\text{V.3.30})$$

onde K é um operador independente de x . Usando a condição de fronteira para T_λ obtemos

$$\frac{\partial T_\lambda(x)}{\partial t} = V(x) \star T_\lambda(x) - T_\lambda(x) \star V(-L) . \quad (\text{V.3.31})$$

Avaliando (V.3.31) para $x = L$ e usando a condição de fronteira para o operador V , chegamos a

$$\frac{\partial T_\lambda(x)}{\partial t} = [V(L), T_\lambda(L)]_\star . \quad (\text{V.3.32})$$

Daqui ao escrever a derivada temporal de $T_\lambda(L)$ como um comutador, segue imediatamente que $\text{tr}(T_\lambda(L))$ é independente do tempo. Portanto poderemos obter cargas conservadas a partir da expansão de $T_\lambda(L)$ em potências de λ . Nesta derivação temos que usar a associatividade do produto estrela e a existência dos inversos $\star$ de certos operadores.

Antes de prosseguir gostaríamos de frisar que no desenvolvimento do trabalho percebemos como a generalização não-comutativa de um modelo, pode não ser única. Por exemplo, ao passar de $\theta = 0$ a $\theta \neq 0$ a derivada de ϕ pode ser escrita como $\partial\phi$ ou como $\frac{1}{2}(e_\star^{-\phi} \star \partial e_\star^\phi - e_\star^\phi \star \partial e_\star^\phi)$, e como veremos esta ambiguidade leva a equações de movimento diferentes.

Agora vamos a usar coordenadas do cone de luz, onde $x_\pm = (x_0 \pm x_1)/2$. Podemos escrever a equação de movimento do modelo de *sinh-Gordon* a partir da condição de curvatura nula, introduzindo os potenciais A e $\bar{A}$,

$$A = -\frac{m\lambda}{2}(e^{\beta\phi} \sigma_- + e^{-\beta\phi} \sigma_+) \quad \text{e} \quad \bar{A} = \frac{m}{2\lambda}(\sigma_- + \sigma_+) - \frac{i\beta}{2}\bar{\partial}\phi \sigma_3, \quad (\text{V.3.33})$$

onde $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, σ_i são as matrizes de Pauli usuais, e λ é o parâmetro espectral. Os potenciais A e $\bar{A}$ satisfazem

$$\bar{\partial}A - \partial\bar{A} + [A, \bar{A}] = 0 . \quad (\text{V.3.34})$$

E fácil verificar que a condição de curvatura nula (V.3.34) com as funções (V.3.33) implica na equação de movimento para o modelo de *sinh-Gordon*.

Agora *definimos* o modelo de *sinh-Gordon* não-comutativo, através da equação de curvatura nula- $\star$

$$\bar{\partial}A - \partial\bar{A} + [A, \bar{A}]_{\star} = 0 , \quad (\text{V.3.35})$$

onde

$$[A, \bar{A}]_{\star} = A \star \bar{A} - \bar{A} \star A . \quad (\text{V.3.36})$$

A equação de movimento derivada de (V.3.35) é

$$\partial\bar{\partial}\phi + \frac{m^2}{\beta} \sinh_{\star}(\beta\phi) = 0, \quad (\text{V.3.37})$$

a qual coincide exatamente com a equação (V.3.17) que obtivemos a partir da deformação Moyal da ação de *sinh-Gordon* (V.3.15). Aparecem, entretanto, dois vínculos adicionais, obtidos como contribuições dos termos fora da diagonal,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(e_{\star}^{-\beta\phi}) + \frac{\beta}{2}(e_{\star}^{-\beta\phi} \star \bar{\partial}\phi + \bar{\partial}\phi \star e_{\star}^{-\beta\phi}) &= 0, \\ \bar{\partial}(e_{\star}^{\beta\phi}) - \frac{\beta}{2}(e_{\star}^{\beta\phi} \star \bar{\partial}\phi + \bar{\partial}\phi \star e_{\star}^{\beta\phi}) &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{V.3.38})$$

Estes vínculos podem se escrever como derivadas totais e são iguais a zero quando $\theta \rightarrow 0$.

Anteriormente expressamos como, para um determinado modelo, pode existir mais de uma generalização não-comutativa. Assim, por exemplo, na Ref.[41] foi proposto um sistema de equações para o modelo de *sine-Gordon* não-comutativo, obtido usando o método dos bicomplexes. Como veremos a partir da generalização da condição de curvatura nula (V.3.35) podemos obter a equação de movimento do modelo em [41]. Por outro lado os vínculos que obtivemos não coincidem aparentemente com os de [41].

Se escolhemos os potenciais A e $\bar{A}$ como:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{m\lambda}{2}(e_\star^{i\beta\phi} \sigma_- + e_\star^{-i\beta\phi} \sigma_+), \\ \bar{A} &= \frac{m}{2\lambda}(\sigma_- + \sigma_+) + \frac{1}{4}[e_\star^{i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{-i\beta\phi}) - e_\star^{-i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{i\beta\phi})] \sigma_3, \end{aligned} \quad (\text{V.3.39})$$

obtemos a mesma equação de movimento que em [41]

$$\partial(e_\star^{i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{-i\beta\phi}) - e_\star^{-i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{i\beta\phi})) = 2m^2 \sin_\star(\beta\phi), \quad (\text{V.3.40})$$

mas os vínculos são diferentes

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(e_\star^{-i\beta\phi}) - \frac{1}{4}\{e_\star^{-i\beta\phi}, e_\star^{i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{-i\beta\phi}) - e_\star^{-i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{i\beta\phi})\}_\star &= 0, \\ \bar{\partial}(e_\star^{i\beta\phi}) - \frac{1}{4}\{e_\star^{i\beta\phi}, e_\star^{-i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{i\beta\phi}) - e_\star^{i\beta\phi} \star \bar{\partial}(e_\star^{-i\beta\phi})\}_\star &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.3.41})$$

Estes vínculos podem ser escritos também como derivadas totais e são nulos no limite $\theta \rightarrow 0$.

V.3.3 Sólitos Euclidianos

Nesta seção vamos estudar as soluções tipo sítion para o modelo *sine-Gordon* não-comutativo que definimos em (V.3.17) e (V.3.38) (substituindo $\beta \rightarrow i\beta$).

Como a solução para o campo ϕ é também uma função do parâmetro de não-comutatividade θ , temos que fazer uma expansão dupla. Inicialmente expandimos o campo ϕ em uma série de potências de θ

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \theta^n. \quad (\text{V.3.42})$$

Posteriormente usamos esta expansão para encontrar as equações de movimento e os vínculos correspondentes à primeira ordem em θ . Note que haverá uma dependência em θ que vem da expansão (V.3.42) e também da definição

do produto $\star$. Temos que

$$\begin{aligned} \phi_\star^n = & \phi_0^n + n\phi_0^{n-1}\phi_1\theta + [n\phi_0^{n-1}\phi_2 + \frac{n(n-1)}{2}\phi_0^{n-2}\phi_1^2 + \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{24}\phi_0^{n-3}\mathcal{B}_1 + \frac{n(n-1)}{8}\phi_0^{n-2}\mathcal{B}_2]\theta^2 + o(\theta^3) , \end{aligned} \quad (\text{V.3.43})$$

onde $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ se expressam como

$$\mathcal{B}_1 = (\partial\phi_0)^2(\bar{\partial}^2\phi_0) + (\bar{\partial}^2\phi_0)(\partial\phi_0)^2 - 2\partial\bar{\partial}\phi_0\partial\phi_0\bar{\partial}\phi_0, \quad (\text{V.3.44})$$

$$\mathcal{B}_2 = \partial^2\phi_0\bar{\partial}^2\phi_0 - (\partial\bar{\partial}\phi_0)^2. \quad (\text{V.3.45})$$

No apêndice D, pode-se encontrar uma derivação de (V.3.44) e (V.3.45). As equações de movimento até a ordem θ^2 são

$$\partial\bar{\partial}\phi_0 + \frac{m^2}{\beta}\sin(\beta\phi_0) = 0, \quad (\text{V.3.46})$$

$$\partial\bar{\partial}\phi_1 + m^2\phi_1\cos(\beta\phi_0) = 0, \quad (\text{V.3.47})$$

$$\partial\bar{\partial}\phi_2 + m^2\phi_2\cos(\beta\phi_0) - \frac{m^2\beta}{2}\phi_1^2\sin(\beta\phi_0) = 0. \quad (\text{V.3.48})$$

As duas primeiras equações coincidem com as encontradas em [41].

As soluções para ϕ_0 , ϕ_1 , e ϕ_2 podem ser calculadas facilmente (para conhecer os detalhes ver apêndice D) e elas são

$$\phi_0 = \frac{4}{\beta}\tan^{-1}[\exp(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}(x-x_0))], \quad (\text{V.3.49})$$

$$\phi_1 = K\phi_0', \quad (\text{V.3.50})$$

$$\phi_2 = \frac{K^2}{2}\phi_0'', \quad (\text{V.3.51})$$

onde K é uma constante de integração arbitrária. Usando estas expressões podemos ver como a série para $\phi(x)$ pode ser parcialmente resumida em $\phi(x + A\theta)$. Realmente, não é difícil provar que a *solução de 1-sóliton da teoria comutativa resolve as equações de movimento não-comutativas*. Para provar isso, começamos estabelecendo que se $f(x_0, x_1)$ e $g(x_0, x_1)$ dependem nos seus argumentos como funções lineares de x_1 e x_0 , ou seja, como $x_1 - vx_0$,

então o seus produtos $\star$ coincidem com seus produtos clássicos ($\theta = 0$). Isto pode ser visto usando a decomposição de Fourier para f e g :

$$\begin{aligned} f \star g &= e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_x^\mu\partial_y^\nu} \int dp dq \tilde{f}(p)\tilde{g}(q) \exp(ip(x_1 - vx_0) + iq(y_1 - vy_0)) \Big|_{x=y} = \\ &= \int dp dq \tilde{f}(p)\tilde{g}(q) \exp(i(p+q)(x_1 - vx_0)) = fg . \end{aligned} \quad (\text{V.3.52})$$

Portanto $\sin(\beta\phi)_\star = \sin(\beta\phi)$ e a equação de movimento resulta a mesma do modelo usual de *sine-Gordon*.

A partir de (V.3.52) podemos avaliar os vínculos para $\theta = 0$, onde eles são triviais, portanto a solução os satisfaz.

V.3.4 Modelo Quiral Principal

Agora estudaremos um modelo, que em contraposição ao anterior conserva a propriedade de ser integrável na sua generalização não-comutativa a partir da ação. Este modelo também estudado em [11], é o modelo $U(N)$ *Quiral Principal* (PCM), cuja ação se expressa como

$$S_{pcm} = \frac{1}{2g_0^2} \int d^2x \text{Tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial^\mu g) , \quad (\text{V.3.53})$$

onde g toma valores em $U(N)$. A equação de movimento para este modelo é

$$\partial_\mu(g^{-1} \partial^\mu g) = 0 . \quad (\text{V.3.54})$$

Propomos a deformação Moyal do modelo *Quiral Principal* como

$$S_{pcm}^* = \frac{1}{2g_0^2} \int d^2x \text{Tr}(\partial_\mu g^{-1} \star \partial^\mu g) , \quad (\text{V.3.55})$$

onde o campo g deve satisfazer $g \star g^\dagger = g^\dagger \star g = 1$. A razão pela qual nós devemos especificar o grupo ao qual g pertence, é que nem todos os grupos admitem extensões não-comutativas. Por exemplo, não existe versão não comutativa de $SU(N)$, por isso restringimos nossa análise ao modelo $U(N)$ *Quiral Principal*. Este modelo foi também recentemente estudado em

[43]. Note que, assim como antes mencionamos, a parte quadrática de uma ação não-comutativa numa variedade sem fronteiras é equivalente à ação comutativa. Portanto as ações (V.3.53) e (V.3.55) são equivalentes (sempre que o campo g decaia suficientemente rápido no infinito). Então a diferença mais importante entre ambos modelos não está nas suas respectivas ações, mais sim nos vínculos que o campo g satisfaz.

A equação de movimento correspondente à ação (V.3.55) é

$$\partial_\mu(g^{-1} * \partial^\mu g) = 0 , \quad (\text{V.3.56})$$

que pode ser escrita como uma condição de curvatura nula considerando os potenciais

$$U(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{l_0 + l_1}{1 - \lambda} - \frac{1}{2} \frac{l_0 - l_1}{1 + \lambda} , \quad (\text{V.3.57})$$

$$V(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{l_0 + l_1}{1 - \lambda} + \frac{1}{2} \frac{l_0 - l_1}{1 + \lambda} , \quad (\text{V.3.58})$$

onde

$$l_0(x, t) = \frac{\partial g}{\partial t} * g^{-1} \quad \text{e} \quad l_1(x, t) = \frac{\partial g}{\partial x} * g^{-1} . \quad (\text{V.3.59})$$

Ao introduzir estes potenciais na condição de curvatura nula (V.3.23) obtemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial t} * g^{-1} * \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} * g^{-1} * \frac{\partial g}{\partial x} , \quad (\text{V.3.60})$$

que não é mais que a equação de movimento do modelo *Quiral Principal*.

Como vimos a deformação Moyal da ação de um modelo integrável em duas dimensões não necessariamente nos conduz a uma teoria integrável. No caso do modelo *sinh-Gordon* (e substituindo $\beta \rightarrow i\beta$ o modelo de *sine-Gordon*) fomos capazes de estabelecer a sua *não* integrabilidade calculando a amplitude do processo de $2 \rightarrow 4$ partículas à nível da árvore. Por outro lado, a versão não-comutativa do modelo $U(N)$ *Quiral Principal* fornece uma teoria integrável.

O fato de que esta deformação Moyal do modelo de *sinh-Gordon* não seja integrável não quer dizer que não seja possível definir uma versão não-comutativa do modelo. Vimos, assim como foi recentemente mostrado em

[41], que se são impostos vínculos adicionais às equações de movimento do modelo de *sinh-Gordon* não-comutativo, podemos obter uma teoria integrável classicamente.

Provamos também como a solução de 1-sóliton do modelo de *sine-Gordon* resolve igualmente a equação de movimento e os vínculos da versão não-comutativa do modelo.

Existem ainda muitos aspectos interessantes a serem estudados como, por exemplo, as leis de conservação do modelo de *sinh-Gordon* (*sine-Gordon*), e a involução de suas cargas. Gostaríamos também desenvolver as versões não-comutativas de outros modelos de Toda afins, assim como a quantização dos mesmos, o qual apesar de não ser uma simples tarefa, pode ser algo fascinante. Neste sentido, um aspecto interessante seria comprovar se a inclusão dos vínculos (V.3.38) nos modelos *sinh-Gordon* e *sine-Gordon*, torna a amplitude do processo de espalhamento de $2 \rightarrow 4$ partículas igual a zero.

Capítulo VI

Conclusões

Como pudemos ver, o presente trabalho compõe-se de duas partes. A primeira parte é dedicada ao desenvolvimento de modelos integráveis em duas dimensões, cujas soluções tipo sóliton portam mais de uma carga elétrica. Na outra parte estudamos a integrabilidade no plano não-comutativo.

Construímos os modelos integráveis $A_3^{(1)}(p=2)$ de tipo dyon (relativístico e não relativístico), os quais admitem entre suas soluções sólitons topológicos com cargas $U(1) \otimes U(1)$. Nossa motivação inicial foi a procura de modelos integráveis que pudessem descrever as soluções tipo paredes de domínio (DW) da teoria SDYM $SU(n+1)$ em quatro dimensões com multicargas. A partir daí o procedimento desenvolvido, apesar de ter sido aplicado ao caso específico de sistemas com duas simetrias $U(1)$ globais, é suscetível de ser empregado para qualquer número de cargas, sendo desta forma um procedimento geral.

Por outro lado, a construção de modelos integráveis cujos sólitons possam apresentar simetrias não-abelianas globais ($U(2)$) está em fase de estudo e pode revelar-nos ainda muitas surpresas.

Estes modelos podem ter aplicações na teoria de cordas. Assim, suas versões conformes (considerando $\eta \neq 0$) podem ser interpretadas como cordas em fundos curvos.

Apesar de não termos discutido aqui o espectro semi-clássico do modelo $A_3^{(1)}(p = 2)$, a determinação do mesmo é um dos resultados mais importantes do trabalho [10]. Como sabemos, as soluções por nós determinadas são todas clássicas, mas às quais é possível associar um espectro. Desta forma estas soluções acabam tendo um comportamento muito semelhante às partículas. Por outro lado, as partículas que existem na Natureza são descritas por teorias quânticas de campos. Por isso, quantizar estes modelos é uma condição necessária para que as nossas teorias possam ficar mais próximas das situações reais. A extensão da quantização semi-clássica aos modelos multicarregados é um problema ainda a ser resolvido.

A quantização exata dos modelos integráveis construídos é também um aspecto a ser desenvolvido, que presuppõe antes de mais nada entender em que situações o espectro semi-clássico vai sobreviver à renormalizabilidade.

Apêndice A

Integrabilidade

O conceito de sistema completamente integrável originou-se na Mecânica Clássica Hamiltoniana. Nós explicaremos brevemente aqui o critério que Liouville nos deixou.

Consideremos um sistema com espaço de fase $2n$ dimensional e coordenadas (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, n$. Este sistema é *integrável* se existem n funções independentes $I_i(p, q)$ que satisfazem

$$\{H, I_i\} = 0 \quad \{I_i, I_j\} = 0, \quad (\text{A.0.1})$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema e as funções I_i são chamadas integrais de movimento ou quantidades conservadas.

Como consequência podemos expressar o Hamiltoniano como uma combinação linear destas integrais $H = H(I_i)$, as quais são também chamadas variáveis de ação. Podemos também definir, em princípio as correspondentes variáveis conjugadas canônicas:

$$\theta_i = \theta_i(p_j, q_j), \quad (\text{A.0.2})$$

de modo que

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad \{\theta_i, I_j\} = \delta_{ij} . \quad (\text{A.0.3})$$

Estas coordenadas θ_i são também chamadas de ângulo.

Nestas novas variáveis as equações de movimento de Hamilton do sistema se expressam como:

$$\begin{aligned}\dot{I}_i &= \{H, I_i\} = 0, \\ \dot{\theta}_i &= \{\theta_i, H(I_j)\} = f_i(I_j).\end{aligned}\tag{A.0.4}$$

A primeira destas equações quer dizer que elas se conservam, então

$$\dot{\theta}_i = f_i = \text{constante} ,\tag{A.0.5}$$

o que nos permite integrar e assim,

$$\theta_i = f_i t + \alpha_i ,\tag{A.0.6}$$

onde as α_i são constantes de integração que são fixadas a partir das condições iniciais.

Como vemos, em princípio, a evolução do sistema pode ser completamente determinada em termos das variáveis de ângulo e ação (I_i, θ_i) . Falamos em princípio porque na prática é muito difícil determinar a transformação canônica

$$\theta_i = \theta_i(q_j, p_j)\tag{A.0.7}$$

e conseqüentemente a solução como:

$$\begin{aligned}q_i &= q_i(f_j, \alpha_j, t), \\ p_i &= p_i(f_j, \alpha_j, t) .\end{aligned}\tag{A.0.8}$$

Este teorema de Liouville só garante a existência da solução exata. Determinar esta solução, somente é possível com muita engenhosidade e sorte.

Aqui só discutimos um sistema com um número finito de graus de liberdade. Analogamente pode-se estender este critério a sistemas contínuos, ou seja com um número infinito de graus de liberdade. Aqui o sistema será integrável se tiver um número infinito de quantidades conservadas em involução

Consideremos agora um método desenvolvido posteriormente [2] o qual ajuda a conhecer quando o modelo tem esta propriedade.

Consideremos, agora, por motivos de simplicidade, um sistema bidimensional [46]. Definimos a integral ordenada de trajetória

$$U_\gamma(x_2, t_2; x_1, t_1) = P_\gamma e^{-\int_{x_1, t_1}^{x_2, t_2} \mathcal{A}_\mu dx^\mu}, \quad (\text{A.0.9})$$

onde $\mathcal{A}_\mu$ é um potencial de calibre e P_γ representa o operador que ordena os pontos da trajetória de integração γ de modo que os pontos mais próximos a (x_2, t_2) ficam à esquerda daqueles mais próximos a (x_1, t_1) . Se tomamos o produto de duas exponenciais

$$U_{\gamma_1}(x_2, t_2; x_1, t_1) U_{\gamma_2}(x_1, t_1; x_2, t_2), \quad (\text{A.0.10})$$

não é difícil provar que

$$U_{\gamma_1}(x_2, t_2; x_1, t_1) U_{\gamma_2}(x_1, t_1; x_2, t_2) = e^{-\frac{1}{2} \int_C d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}, \quad (\text{A.0.11})$$

onde a integração é sobre a área C que o contorno $\gamma_1 + \gamma_2$ fecha. Aqui $F_{\mu\nu}$ representa a curvatura

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (\text{A.0.12})$$

Se a curvatura é nula, ou seja $F_{\mu\nu} = 0$, então

$$U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} = I, \quad (\text{A.0.13})$$

ou seja a integral é independente do caminho, depende somente dos pontos iniciais e finais. Isto quer dizer que para um caminho fechado

$$U_{\gamma_1}(x, t; x, t) = I. \quad (\text{A.0.14})$$

Este fato nos conduziu a existência de infinitas quantidades conservadas. Assim chamemos

$$\begin{aligned} T(t) &= P e^{\int_{-L}^L \mathcal{A}_x(t, x) dx}, \\ S(x) &= P e^{\int_0^\tau \mathcal{A}_t(t, x) dt}, \end{aligned} \quad (\text{A.0.15})$$

onde P é novamente o operador que ordena os pontos da trajetória, e $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_t$ são as duas componentes do potencial de calibre e com condições de fronteira

$$\mathcal{A}_t(t, -L) = \mathcal{A}_t(t, L). \quad (\text{A.0.16})$$

Se consideramos a trajetória fechada $(L, 0) \rightarrow (L, \tau) \rightarrow (-L, \tau) \rightarrow (-L, 0)$, então de (A.0.14) obtemos que

$$T(\tau) = S(L)^{-1}T(0)S(L), \quad (\text{A.0.17})$$

que também nos leva a

$$(T(\tau))^n = \left[S(L)^{-1}T(0)S(L) \right]^n. \quad (\text{A.0.18})$$

Se pegamos o traço da equação anterior obtemos que este é independente do tempo, ou seja,

$$\text{Tr} (T(\tau))^n = \text{Tr} (T(0))^n. \quad (\text{A.0.19})$$

Como em principio n pode tomar infinitos valores, temos infinitas quantidades conservadas. Este formalismo de curvatura nula garante a integrabilidade do sistema sempre que as equações de movimento possam-se escrever segundo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = 0, \quad (\text{A.0.20})$$

com apropriada escolha dos potenciais. Claro que restaria provar que essas infinitas quantidades conservadas estão em involução .

Apêndice B

Definições algébricas

Todos os modelos desenvolvidos nesta tese foram construídos a partir da definição da estrutura algébrica que era de nosso interesse outorgar-lhes. Daí a importância de definirmos os conceitos e propriedades relativos às álgebras por nós utilizados [33].

Primeiramente lembramos as propriedades das álgebras de Lie $\mathcal{G}$ de dimensão finita.

Numa base ortonormal as relações de comutação entres os geradores T^i da álgebra são

$$[T^i, T^j] = if_k^{ij} T^k, \quad i, j, k = 1 \dots r \quad (\text{B.0.1})$$

onde $r = \text{rank } \mathcal{G}$ e as constantes de estrutura f_k^{ij} são completamente anti-simétricas porque escolhemos

$$\text{Tr}(T^i T^j) = \delta^{ij}. \quad (\text{B.0.2})$$

Os geradores da álgebra podem ser reescritos numa nova base, conhecida como base de Weyl-Cartan, na qual as relações de comutação se reexpressam como

$$\begin{aligned} [H^i, H^j] &= 0 \quad i, j = 1 \dots r \\ [H^i, E_\alpha] &= \alpha^i E_\alpha \end{aligned}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \varepsilon(\alpha, \beta)E_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha + \beta \text{ é raiz} \\ \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}, & \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0, & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (\text{B.0.3})$$

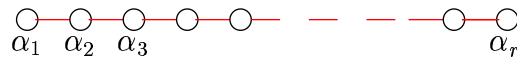
Os H^i definem a subálgebra de Cartan, caracterizada pelo fato de todos seus geradores comutarem. Devido à isto, os H^i são conhecidos como os geradores de Cartan. Os geradores E_α conhecidos como operadores “step”, são autoestados dos Cartan com autovalor α^i , ou seja a i -ésima componente da raiz α . Estas raízes são vetores num espaço euclidiano de dimensão r . Os $\varepsilon(\alpha, \beta)$ são números definidos de forma a que

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = -\varepsilon(\beta, \alpha) = \pm 1. \quad (\text{B.0.4})$$

Estes números são determinados completamente de modo a que a identidade de Jacobi seja satisfeita. As raízes da álgebra se classificam em positivas e negativas, de modo que se α, β são raízes positivas e $\alpha + \beta$ é uma raiz, então ela é também uma raiz positiva. Além disto, toda raiz negativa é o negativo de uma raiz positiva. Todas as raízes da álgebra podem ser obtidas a partir das raízes simples cujo número coincide com o “rank” r da álgebra. Com o produto escalar destas raízes se forma uma matriz $r \times r$, conhecida como matriz de Cartan

$$K_{ij} = \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2}. \quad (\text{B.0.5})$$

Como se pode ver os elementos diagonais desta matriz são todos iguais a 2, então somente os elementos fora da diagonal (que são iguais a zero ou a inteiros negativos) portam informação relevante, a qual está incluída no respectivo diagrama de Dynkin. O diagrama de Dynkin está formado por r pontos correspondentes às raízes simples, e os quais estão unidos por $K_{ij}K_{ji}$ linhas. Este diagrama especifica completamente a álgebra porque a partir dele podem ser construídas todas as raízes simples e conseqüentemente todas as raízes da álgebra. Por exemplo para A_r o diagrama de Dynkin é:



Podemos ainda definir uma nova base conhecida como base de Chevalley para a qual redefinimos a subálgebra de Cartan como

$$h_i = \frac{2\alpha_i \cdot H}{\alpha_i^2}. \quad (\text{B.0.6})$$

Consideremos uma representação de dimensão finita irredutível da álgebra $\mathcal{G}$. Seja $|\lambda\rangle$ uma base de modo que os geradores de Cartan H^i sejam diagonais nessa representação

$$H^i|\lambda\rangle = \lambda^i|\lambda\rangle. \quad (\text{B.0.7})$$

Então λ^i é chamado de peso e satisfaz: $2\frac{\lambda \cdot \alpha}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}$ para qualquer raiz α de $\mathcal{G}$. Esta representação tem um peso maior λ tal que $\lambda + \alpha$ não é um peso se α é uma raiz positiva.

B.1 Álgebras afins de Kac-Moody

À álgebra de Lie $\mathcal{G}$ (B.0.1) se associa uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ (untwisted) de modo que os geradores da mesma T_n^i vão ter um índice inteiro a mais e satisfazem as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [T_m^i, T_n^j] &= if_k^{ij} T_{m+n}^k + \hat{c} m \delta^{ij} \delta_{m+n,0}, \\ [\hat{d}, T_n^i] &= n T_n^i, \quad [\hat{c}, T_m^i] = [\hat{c}, \hat{d}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

Para $\hat{c} = 0$ a álgebra se chama loop-álgebra.

Analogamente ao caso das álgebras de dimensão finita, podemos definir a subálgebra de Cartan $H_0^i, \hat{c}, \hat{d}$ e os geradores “step” com seus correspondentes autovalores o raízes, de modo que na base de Weyl-Cartan as relações de comutação da álgebra de Kac-Moody se expressam como:

$$\begin{aligned} [H_i^m, H_j^n] &= \hat{c} m \delta_{m+n,0} \delta_{i,j} \quad i, j = 1 \dots \text{rank } \mathcal{G} \\ [H_i^m, E_\alpha^n] &= \alpha^i E_\alpha^{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_a^m, E_\beta^n] &= \begin{cases} \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{m+n} & \text{se } \alpha + \beta \text{ é raiz} \\ \alpha H^{m+n} + \hat{c} m \delta_{m+n,0} & \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases} \\
[\hat{d}, E_\alpha^m] &= m E_\alpha^m \\
[\hat{d}, H_i^m] &= m H_i^m.
\end{aligned} \tag{B.1.9}$$

O gerador $\hat{d}$, também conhecido como derivação se introduz para quebrar a degenerescência das raízes $(\alpha, 0, m)$, que de outra forma a cada uma corresponderiam infinitos “step” E_α^m . O gerador carga central comuta com todos os geradores da álgebra.

Novamente definimos o produto escalar destes geradores através do traço como

$$\begin{aligned}
Tr(h_a^{(m)} h_b^{(n)}) &= \eta_{a,b} \delta_{m+n,0}, \\
Tr(E_\alpha^{(m)} h_\beta^{(n)}) &= \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0} \delta_{m+n,0}, \\
Tr(\hat{c} \hat{d}) &= 0,
\end{aligned} \tag{B.1.10}$$

onde introduzimos a base de Chevalley (B.0.6) e onde $n_{a,b} = \frac{4\alpha_a \cdot \alpha_b}{\alpha_a^2 \alpha_b^2}$ é a matriz de Cartan simetrizada. Os restantes produtos são iguais a zero. Observe que agora os geradores H_i^m com $m \neq 0$ são “steps” correspondentes às raízes $(0, 0, m)$, as quais são r -vezes degenerados. Esta é uma nova propriedade das álgebras de Kac-Moody. O sistema de raízes da álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ é infinito, mas eles expandem um espaço de dimensão finita $r+1$, o qual pode ser gerado a partir das raízes simples

$$\begin{aligned}
a_i &= (\alpha_i, 0, 0) \quad i = 1, \dots, r, \\
a_0 &= (-\Psi, 0, 1),
\end{aligned} \tag{B.1.11}$$

com Ψ a raiz maior de $\mathcal{G}$.

Os elementos $\hat{K}_{ij}$ da matriz de Cartan associada a $\hat{\mathcal{G}}$, coincidem com os correspondentes a $\mathcal{G}$. A única diferença entre ambas matrizes são a fila e a

coluna adicionais $\hat{K}_{0i}, \hat{K}_{i0}$ as quais correspondem ao produto escalar (a_i, a_0) . Como

$$\frac{2\lambda_i \cdot \alpha_j}{(\alpha_j)^2} = \delta_{ij} \quad i, j = 1 \dots r, \quad (\text{B.1.12})$$

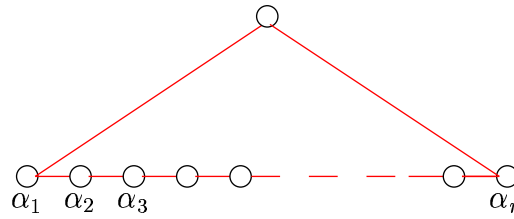
onde λ_i são os pesos fundamentais, se cumpre que

$$\Psi = - \sum_{i=1}^r \hat{K}_{0i} \lambda_i. \quad (\text{B.1.13})$$

Ademais

$$\hat{K}_{i0} = \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{K}_{0i} = 0 \\ -1 & \text{se } \hat{K}_{0i} \neq 0 \end{cases}.$$

Assim, por exemplo, para $A_r^{(1)}$, $\Psi = \lambda_1 + \lambda_r$ ($r \geq 0$), de modo que $\hat{K}_{01} = -1$, $\hat{K}_{10} = 1$, $\hat{K}_{0r} = -1$, $\hat{K}_{r0} = 1$, e os restantes $\hat{K}_{ij}$ iguais a zero. O correspondente diagrama de Dynkin se obtém adicionando um ponto ao diagrama original de A_r e conectando esse ponto aos extremos do diagrama de A_r :



Apêndice C

Elementos matriciais

Para calcular a solução (IV.3.38) tivemos que determinar os elementos matriciais incluídos em (III.5.85). Para isto utilizamos além das propriedades algébricas definidas no apêndice anterior, as relações que expressam como atuam os geradores em uma representação com estados $|\lambda_j\rangle$ com $j = 0, \dots, r$:

$$\begin{aligned}\hat{c}|\lambda_j\rangle &= |\lambda_j\rangle, \quad j = 0, \dots, r, \\ h_i^{(0)}|\lambda_j\rangle &= \delta_{i,j}|\lambda_j\rangle, \quad i = 1 \dots r, \\ h_i^{(n)}|\lambda_j\rangle &= 0, \quad \text{se } n > 0, \\ E_\alpha^{(n)}|\lambda_j\rangle &= 0, \quad \text{se } n > 0 \text{ ou se } n = 0 \text{ e } \alpha > 0, \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

junto com as relações análogas para os estados duais $\langle \lambda_j| = (|l_j\rangle)^\dagger$ que são obtidas usando

$$\begin{aligned}(E_\alpha^{(m)})^\dagger &= E_{-\alpha}^{(-m)}, \\ (h_a^{(m)})^\dagger &= h_a^{(-m)}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

Lembramos ademais algumas somatórias de utilidade

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \quad \text{para } |x| < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^n &= \frac{x}{(1-x)^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

onde a última se obtém derivando a primeira. Agora já podemos calcular

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_i | T_0 g T_0^{(-1)} | \lambda_i \rangle &= \langle \lambda_i | 1 + ab \rho_1(\gamma_1) \rho_2(\gamma_2) F_+(\gamma_1) F_-(\gamma_2) | \lambda_i \rangle \\
&= 1 + ab \rho_1(\gamma_1) \rho_2(\gamma_2) \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^0 \langle \lambda_i | \left(\alpha_2 H^{m+n} \gamma_1^{-n} \gamma_2^{-m} + n \hat{c} \delta_{m+n,0} \gamma_2^{-m} \gamma_1^{-m} \right) | \lambda_i \rangle, \quad (\text{C.0.4})
\end{aligned}$$

que para o caso particular

$$\langle \lambda_0 | T_0 g T_0^{(-1)} | \lambda_0 \rangle = 1 + ab \rho_1(\gamma_1) \rho_2(\gamma_2) \sum_{n=0}^{\infty} 2n \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^n. \quad (\text{C.0.5})$$

De maneira análoga obtem-se os restantes elementos que nos levam a solução (IV.3.38).

Apêndice D

Cálculos perturbativos até ordem θ^2

D.1 Expansão de $\phi_\star^n$ até ordem θ^2

Nós gostaríamos obter $\phi_\star^n$ até a ordem θ^2 , onde $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \theta^n$. Escrevemos $\phi_\star^n$ como

$$\phi_\star^n = \phi_0^n + \theta A_n + \theta^2 B_n + o(\theta^3) . \quad (\text{D.1.1})$$

Usando a associatividade de produto $\star$, $\phi_\star^{n+1} = \phi_\star^n \star \phi$, encontramos a relação de recorrência para A_n

$$A_{n+1} = A_n \phi_0 + \phi_0^n \phi_1, \quad (\text{D.1.2})$$

a qual é resolvida por $A_n = n \phi_0^{n-1} \phi_1$. Para B_n é conveniente introduzir

$$B_n = \alpha_n \phi_0^{n-2} \phi_1^2 + \beta_n \phi_0^{n-1} \phi_2 + \gamma_n \phi_0^{n-3} \mathcal{B}_1 + \delta_n \phi_0^{n-2} \mathcal{B}_2, \quad (\text{D.1.3})$$

onde $\mathcal{B}_1 = (\partial \phi_0)^2 \bar{\partial}^2 \phi_0 + (\bar{\partial} \phi_0)^2 \partial^2 \phi_0 - 2 \partial \phi_0 \bar{\partial} \phi_0 \partial \bar{\partial} \phi_0$ and $\mathcal{B}_2 = \partial^2 \phi_0 \bar{\partial}^2 \phi_0 - (\partial \bar{\partial} \phi_0)^2$. Encontramos as relações de recorrência

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + n,$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + 1,$$

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} &= \gamma_n + \frac{n(n-1)}{8}, \\ \delta_{n+1} &= \delta_n + \frac{n}{4},\end{aligned}\tag{D.1.4}$$

as quais são resolvidas para $\alpha_n = n(n-1)/2$, $\beta_n = n$, $\gamma_n = n(n-1)(n-2)/24$, e $\delta_n = n(n-1)/8$. A forma final então é

$$\begin{aligned}\phi_\star^n &= \phi_0^n + n\phi_0^{n-1}\phi_1\theta + \theta^2(n\phi_0^{n-1}\phi_2 + \frac{n(n-1)}{2}\phi_0^{n-2}\phi_1^2) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{8}\phi_0^{n-2}\mathcal{B}_2\theta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{24}\phi_0^{n-3}\mathcal{B}_1\theta^2.\end{aligned}\tag{D.1.5}$$

Note que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ se anulam para as soluções tipo sólon.

D.2 Solução da Equação de Movimento até a ordem θ^2

Na seção V.3.3 encontramos as equações de movimento clássicas para o modelo *sine-Gordon* não-comutativo. Tomando $\beta = 1$, podemos escrever a forma estática das mesmas para as ordens θ^0 , θ^1 , e θ^2 , como

$$\phi_0'' = C \sin \phi_0,\tag{D.2.6}$$

$$\phi_1'' = C \phi_1 \cos \phi_0,\tag{D.2.7}$$

$$\phi_2'' = C \phi_2 \cos \phi_0 - \frac{C}{2}\phi_1^2 \sin \phi_0,\tag{D.2.8}$$

onde os índices primos indicam derivadas espaciais e C é uma constante ($C = \frac{m^2}{1-v^2}$, e v é a velocidade do sólon). Para resolver a primeira equação (D.2.6) a multiplicamos por ϕ_0' e a integramos usando as condições de fronteira $\phi_0 = 0$ para $x = 0$ e $\phi_0 = 2\pi$ para $x \rightarrow \infty$

$$\phi_0' = \pm 2\sqrt{C} \sin \frac{\phi_0}{2}.\tag{D.2.9}$$

Os sinais positivo (negativo) correspondem à solução sólon (anti-sólon). A solução de (D.2.9) é facilmente encontrada:

$$\phi_0 = 4 \tan^{-1}(\exp(\sqrt{C}(x - x_0))) .\tag{D.2.10}$$

Para resolver (D.2.7) a multiplicamos por ϕ'_0 e usamos (D.2.6) para obter

$$\phi'_0 \phi''_1 = C \phi_1 \phi'_0 \cos \phi_0 = \phi_1 \frac{d}{dx} (C \sin \phi_0) = \phi_1 \phi'''_0 . \quad (\text{D.2.11})$$

Esta última equação junto com que as derivadas de ϕ se anulam para $x \rightarrow \infty$ implica que

$$\phi_1 \phi''_0 - \phi'_1 \phi'_0 = 0 . \quad (\text{D.2.12})$$

Esta equação é resolvida por

$$\phi_1 = \frac{K}{\cosh(\sqrt{C}(x - x_0))} , \quad (\text{D.2.13})$$

onde K é uma constante de integração. A solução para ϕ_2 pode ser encontrada da seguinte forma: derive duas vezes (D.2.6) e multiplique-lha por $\frac{K^2}{2}$, para obter

$$\left(\frac{K^2}{2} \phi''_0\right)'' = C \left(\frac{K^2}{2} \phi''_0\right) \cos \phi_0 - \frac{C}{2} (K \phi'_0)^2 \sin \phi_0 \quad (\text{D.2.14})$$

que coincide com (D.2.8). Como esta é uma equação de primeira ordem para ϕ_2 e as condições de fronteira no infinito são satisfeitas automaticamente, podemos escrever a solução para ϕ_2 como

$$\phi_2 = \frac{K^2}{2} \phi''_0 \quad (\text{D.2.15})$$

Isto resolve as equações de movimento para o modelo de *sine-Gordon* não-comutativo até segunda ordem em θ .

Referências

- [1] P. D. Lax, “*Integrals of nonlinear equations of evolution of solitary waves*”, Comm. Pur. Appl. Math. **XXI** (1968) 467.
- [2] V. E. Zakharov e A. B. Shabat, Zh. Exp. Teor. Fiz **61** (1971) 118; Soviet. Phys. JETP **34** (1972) 62.
- [3] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal e R. M. Miura, “*Method for solving the Korteweg-de Vries equation*”, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095; “*Korteweg-de Vries and generalizations VI. Methods for exact solution*”, Commum. Pure Appl. Math. **27** (1974) 97.
- [4] R. S. Ward, “*Integrable and Solvable systems, and relations among them*”, Phil. Trans. R. Soc. London A **315** (1985) 451; Lecture Notes Phys. **280** (1987) 106; London Math.Soc. Lecture Note Ser. **156** (1990) 246.
- [5] A. Kovner, M. Shiffman e A. Smilga, “*Domain Walls in Supersymmetric Yang-Mills Theories*”, Phys. Rev. **D56** (1997) 7978; G. Dvali e M. Shiffman, “*Domain Walls in Strongly Coupled Theories*”, Phys. Lett. **B396** (1997) 64; A. Hanany e K. Hori, “*Branes and $N=2$ Theories in Two Dimensions*”, Nucl. Phys. **B513** (1998) 119.
- [6] E. Witten, “*Branes and the Dynamics of QCD*”, Nucl. Phys. **B507** (1997) 658.

- [7] E. Witten, “*Baryons in the $1/N$ expansion*”, *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 57.
- [8] J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*Dyonic Integrable Models*”, *Nucl. Phys.* **B598** (2001) 615.
- [9] J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*Electrically charged topological solitons*”, *Nucl. Phys.* **B606** (2001) 441.
- [10] I. Cabrera-Carnero, J. F. Gomes, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*Multicharged Dyonic Integrable models*”, *Nucl. Phys.* **B634** (2002) 433.
- [11] I. Cabrera-Carnero e M. Moriconi, “*Noncommutative Integrable Field Theories in 2d* ” [arXiv:hep-th/0211193]; “*Noncommutative Field Theories and Integrable Models in 2d* ”, em JHEP Proceedings “Workshop on Integrable Theories, Solitons and Duality”, IFT, 2002.
- [12] E. Witten, “*Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions*”, *Comm. Math. Phys.* **92** (1984) 455.
- [13] F. Lund e T. Regge, “*Unified approach to strings and vortices with solitons solutions*”, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1524; F. Lund, “*Example of a relativistic, completely integrable, hamiltonian system*”, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1175; B. S. Getmanov, “*New Lorentz invariant systems with exact multi-soliton solutions*”, *JETP Lett.* **25** (1977) 119; N. Dorey e T. J. Hollowood, “*Quantum scattering of charged solitons on the complex sine-Gordon model*”, *Nucl. Phys.* **B440** (1995) 215.
- [14] C. R. Fernandez-Pousa, M. V. Gallas, T. J. Hollowood e J. L. Miramontes, “*Solitonic Integrable perturbations of parafermionic theories*”, *Nucl. Phys.* **B499** (1997) 673; “*The symmetric space and homogeneous sine-Gordon theories*”, *Nucl. Phys.* **B484** (1997) 609; C. R. Fernandez-Pousa e J. L. Miramontes, “*Semiclassical spectrum of the homogeneous sine-Gordon theories* ”, *Nucl. Phys.* **B518** (1998) 745

- [15] J. Balog, L. Feher, L. O’Raifeartaigh, P. Forgas e A. Wipf, “*Toda theory and W-algebra from a gauged WZNW point of view*”, Ann. of Phys. **203** (1990) 76.
- [16] K. Gawedzki e A. Kupiainen, “*Coset construction from functional integrals*”, Nucl. Phys. **320** (1989) 625.
- [17] A. N. Leznov e M. V. Saveliev, “*Group Theoretical Methods for Integration of Nonlinear Dynamical Systems*”, Progress in Physics, Vol. 15 (1992), Birkhauser Verlag, Berlin; A. N. Leznov e M. V. Saveliev, Commun. Math. Phys. **89** (1983) 59.
- [18] J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*T-duality of axial and vector dyonic integrable models*”, Ann. of Phys. **289** (2001) 232.
- [19] E. Witten, *Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. Lett **38** (1977) 121.
- [20] N. Dorey e T. J. Hollowood, “*Quantum scattering of charged solitons in the complex sine-Gordon model*”, Nucl. Phys. **B440** (1995) 215.
- [21] J. F. Gomes, F.E.M. da Silveira, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*Singular non-abelian Toda theories*”, em: R. Costa et al. (Eds.), Nonassociative Algebras and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **211**, Marcel Dekker (1999) 125, [arXiv: hep-th/9810057]; J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*Singular conformal and conformal affine non-abelian Toda theories*”, in: A. N. Sissakian (Ed.), M. V. Saveliev Memorial Volume, Dubna (2000) 38, [arXiv: hep-th/0002173].
- [22] E. P. Gueuvoghlianian, “*Sólitos em teorias de Toda não abelianas e singulares*”, Tese de Doutorado, IFT-D.004/00 (2000).

- [23] J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*Classical integrability of non abelian affine Toda theories*”, [arXiv:hep-th/0010257].
- [24] O. Babelon e D. Bernard, “*Affine Solitons: a relation between tau functions, dressing and Bäcklund transformations*”, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993) 507.
- [25] H. C. Liao, D. Olive e N. Turok, “*Topological solitons in $A(R)$ affine Toda theories*”, Phys. Lett **B298** (1993) 95.
- [26] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes e J. S. Guillen, “*Tau functions and Dressing Transformations for Zero Curvature Affine Integrable Equations*”, J. Math. Phys. **38** (1997) 882; L. A. Ferreira, J. L. Miramontes e J. S. Guillen, “*Soliton, Tau-functions and Hamiltonian Reduction for Non-Abelian Affine Toda Theories*”, Nucl. Phys. **B449** (1995) 631.
- [27] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes e A. H. Zimerman, “*Solitons from Dressing in an Algebraic Approach to the Constrained KP Hierarchy*”, J. Phys. **A31** (1998) 9483.
- [28] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes e A. H. Zimerman, “*Supersymmetry and Integrable models*” (Lecture Notes in Physics Vol. 502), Ed. H. Aratyn et. al. (Berlin, Springer) (1998) 197.
- [29] A.G. Bueno, L.A. Ferreira e A.V. Razumov, “*Confinement and soliton solutions in the $SL(3)$ Toda model coupled to matter fields*”, Nucl. Phys. **B626** (2002) 463.
- [30] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes e A. H. Zimerman, “*The complex sine-Gordon equations as a symmetry flow of the AKNS hierarchy*”, J. Phys. **A33** (2000) L331.
- [31] I. Cabrera-Carnero, J. F. Gomes, E. P. Guevoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, “*Non abelian Toda models and the Constrained KP*

- hierarchies*”, a ser publicado nos anais do “VII International Wigner Symposium”, Maryland (2001), [arXiv: hep-th/0109117].
- [32] J.-L.Gervais e M. V. Savelev, “*Black Holes from Non-Abelian Toda Theories*”, Phys. Lett. B **286** (1992) 271.
 - [33] D. Olive e P. Goddard, “*Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to Quantum Physics*”, Int. Jour. Mod. Phys. **A1** (1986) 303.
 - [34] H. S. Snyder, “*Quantized space-time*”, Phys. Rev. **71** (1947) 38.
 - [35] A. Connes e M. Rieffel, “*Yang-Mills for noncommutative two-tori*”, Contemp. Math. Oper. Algebra. Math. Phys. **62** (1987) 237.
 - [36] M. R. Douglas e C. Hull, “*D-branes and the Noncommutative Torus*” JHEP **9802** (1998) 008.
 - [37] M. M. Sheikh-Jabbari, “*Super Yang-Mills Theory on noncommutative torus from open string interactions*”, Phys. Lett. B **450** 119 (1999) 119.
 - [38] N. Seiberg e E. Witten, “*String theory and Noncommutative Geometry*”, JHEP **9909** (1999) 032.
 - [39] S. Minwalla, M. Raamsdonk e N. Seiberg, “*Noncommutative Perturbative Dynamics*”, JHEP **0002** (2000) 020.
 - [40] L. Susskind, “*The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory*”, [arXiv:hep-th/0101029].
 - [41] M. Grisaru e S. Penati “*The noncommutative sine-Gordon system*”, [arXiv:hep-th/0112246].
 - [42] A. Dimakis e F. Muller-Hoissen, “*A noncommutative version of the Non-linear Schrodinger Equation*”, [arXiv:hep-th/0007015]; “*Noncommutative Korteweg-de-Vries Equation*”, [arXiv: hep-th/0007074].

- [43] S. Profumo, “*Noncommutative Principal Chiral models*”, JHEP 0210 (2002) 035.
- [44] T. Filk, “*Divergencies in a Field Theory on Quantum Space*”, Phys. Lett. B **376** (1996) 53.
- [45] J. Gomis e T. Mehen, “*Space-time Noncommutative Field Theories and Unitarity*”, Nucl. Phys. **B591** (2000) 265.
- [46] L. D. Faddeev e L. A. Takhtajan, “*Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*”, Berlin, Germany: Springer (1987) 592 p. (Springer Series In Soviet Mathematics).
- [47] A. B. Zamolodchikov e A. B. Zamolodchikov, “*Factorized S-Matrices in two Dimensions as the exact solutions of certain Relativistic Quantum Field Models*”, Annals Phys. **120** (1979) 253.
- [48] P. Dorey, “*Exact S-Matrices*”, [arXiv:hep-th/9810026].
- [49] R. Shankar, “*A Model that acquires Integrability and $O(2n)$ Invariance at a critical coupling*”, Phys. Lett. B **102** (1981) 257.