UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANA CAROLINA FERREIRA RANGEL

ENTRE PLANTAS E ÁRVORES: UMA ARTICULAÇÃO ENTRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, A ANÁLISE COMBINATÓRIA E UM BEIJA-FLOR

Rio Claro
2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ANA CAROLINA FERREIRA RANGEL

ENTRE PLANTAS E ÁRVORES: UMA ARTICULAÇÃO ENTRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, A ANÁLISE COMBINATÓRIA E UM BEIJA-FLOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Profª. Drª Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro - SP

2022

R196e

Rangel, Ana Carolina Ferreira
Entre plantas e árvores : uma articulação entre a resolução de problemas, a análise combinatória e um beija-flor / Ana Carolina Ferreira Rangel. -- Rio Claro, 2023
127 f. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. 2. Análise Combinatória. 3. Formação Inicial de Professores. 4. Comunidade de Prática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ANA CAROLINA FERREIRA RANGEL

ENTRE PLANTAS E ÁRVORES: UMA ARTICULAÇÃO ENTRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, A ANÁLISE COMBINATÓRIA E UM BEIJA-FLOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic (USP) – Orientador

ICMC/USP/São Carlos (SP)

Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

UFPE/ Recife (PE)

Prof. Dr. Silvanio de Andrade

UEPB/ Campina Grande (PB)

Resultado: aprovado

15 de dezembro de 2022

Rio Claro/SP

DEDICATÓRIA

À todas as mulheres da minha família. Que me viram crescer e me transformar na mulher de hoje. Principalmente Tia Helena (in memoriam) e Tia Selma (in memoriam). Carrego um pouco de cada uma de vocês.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me dado o dom da vida e por ter me proporcionado momentos maravilhosos nessa caminhada.

Não tem como iniciar esses agradecimentos sem falar do meu ninho. De onde sai para esse voo tão longo e instigante. Agradeço muito ao carinho da minha família, principalmente meus pais, Márcia e José Carlos, minha irmã, Tayane e minha vovozinha linda, Neuza. Muito obrigada por me apoiarem mesmo de longe, por cada chamada de vídeo, pelo amor e por entenderem que mesmo longe, nós continuamos unidos. Eu amo muito vocês e sei que sabem disso. Vocês são a minha casa, meu porto seguro. Além desses, não posso esquecer do apoio dos meus tios e primos.

Agora, falo do meu outro ninho. Um que encontrei aqui em Rio Claro. Um ninho barulhento, formado por pássaros que sempre tem o que dizer, mesmo que seja qualquer piada boba. Joãozinho (João Casal), você sabe que minha vida aqui sem você seria outra, te agradeço por cada aventura vivida, por cada festa, churrasco, conversa. Entramos no mestrado como amigos e sairemos como irmãos. Rô (Ronilce), você é nossa deusa, que com um carinho ímpar foi a primeira que viu um beija-flor em mim. Levarei nossas noites de Cortiço para sempre na memória. Foi a melhor forma de começar minha vida aqui na Pós-Graduação. Jorgito (Jorge Orjuela), muito obrigada por cada conversa sobre a vida, pesquisa. Você sabe que é o meu colombiano favorito. Dri (Adrielen) e Wanderson, meu casal mais perfeito, me refiro como dupla, pois o que eu conto para um, o outro fica sabendo de qualquer forma, vocês foram umas das surpresas mais amadas em 2021, muito obrigada por todo amor de vocês. Jô (Jokasta), você é um exemplo de mulher para mim, guerreira, inteligente, amorosa, doce, a patricinha deleuziana que mais amo. Maielita (Maieli), Lucas e Xuxu (Beatriz), se a Dri e o Wanderson foram as surpresas de 2021, com certeza vocês foram as de 2022. Esse ano foi incrível porque vocês o compartilharam comigo. Heinrich e Lari (Larissa), a delicadeza em forma de casal, sempre ali escutando, dando ideias, lendo textos, muito obrigada. O meu ninho que muitas vezes teve o Cortiço como local é formado por essas potências, uma verdadeira máquina de guerra.

À minha querida orientadora, Lourdes de lá Rosa Onuchic, ou apenas dona Lourdes. Foi um prazer enorme dividir essa pesquisa e aprender cada dia mais com a senhora. Muito obrigada por ter embarcado nesse voo comigo.

Agradeço ao meu grupo de pesquisa, o GTERP, integrantes atuais e ex-integrantes que de alguma forma me ajudaram bastante nas ideias desse trabalho, além de dividir as dificuldades e alegrias da vida de pesquisador, são eles: Katyane, Silvia, Letícia, Flávia, Josiane, Fernando e Márcio.

À professora Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba e ao professor Dr. Silvanio de Andrade por toda a disponibilidade e atenção cuidadosa a este trabalho.

Ainda que tenha tido uma proximidade maior com algumas pessoas, preciso agradecer também a amigos e colegas PPGEM como Andrei (meu match de amizade à primeira vista), Íria, Marília, Jeimy, Renata, Rosicacia e Nathalia.

Aos meus amores do Rio, Marie e Gabriel, meu trisal. Muito obrigada por apoiar minhas decisões e estarem comigo, mesmo longe fisicamente.

Aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp – câmpus Rio Claro, participantes da pesquisa.

Aos professores do PPGEM: Ana Paula Malheiros, Roger Miarka, Lucas Mazzi, Fabiane Mondini e Rosa Monteiro, aprendi muito mais que conteúdo em suas disciplinas, foi um momento lindo que levarei com carinho.

À Inajara que me salvou burocraticamente em vários momentos.

E por último, mas não menos importante, agradeço a mim mesma por ter conseguido vencer um pouco o perfeccionismo e acreditado que eu conseguiria terminar esse lindo voo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O que pode o voo de um beija-flor? Quais caminhos essa ave pode percorrer? Decorrente dessa ligação do beija-flor e pesquisador é nessa liberdade de voo que, mesmo com tempestades e ventos fortes como a pandemia e o distanciamento social, esse beija-flor se aventura em um voo sobre as árvores do ensino de Combinatória e da Resolução de Problemas. Com o objetivo principal de apresentar os resultados de uma pesquisa, cujo intuito foi o de compreender como pode a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas ajudar no desenvolvimento do raciocínio combinatório de futuros professores e contribuir para a reflexão sobre suas ações pedagógicas, esta pesquisa mostra como se deu esse caminho, passando por cada árvore ou planta, mostrando dificuldades e mudanças pois, como na pesquisa, o voo não é linear. O ensino de Combinatória ou Análise Combinatória trata noções matemáticas fundamentais e trabalha processos e habilidades cognitivas importantes para o desenvolvimento intelectual de ideias sobre conjuntos, contagem, organização de ideias, pensamento estratégico, etc. Apesar de não possuir um conceito aparentemente complexo, pois tem como base os Princípios Multiplicativo e Aditivo, a Combinatória ainda é vista como um conteúdo de difícil compreensão, tanto para alunos como para professores. Acreditamos que seja uma consequência da abordagem de ensino baseada na valorização de definições e fórmulas em detrimento de problemas que exijam raciocínio e criatividade. Dessa forma, inevitavelmente, futuros professores de Matemática podem repetir as práticas que lhes foram ensinadas pois essas foram as únicas. A produção de dados foi realizada de forma remota possuindo como elemento central problemas combinatórios por nós levantados e alguns adaptados de sites e livros de autores nacionais e internacionais. Os encontros utilizados como pano de fundo para a produção de dados contaram com a participação voluntária de oito alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual situada no interior de São Paulo. A análise dos dados produzidos com a implementação do trabalho com Combinatória através da Resolução de Problemas deu-se a partir das sugestões de resolução desenvolvidas por esses estudantes frente aos problemas propostos. Por meio dos elementos da prática, de uma Comunidade de Prática (CoP), pudemos entender como o raciocínio combinatório foi desenvolvido em grupo a cada problema. A análise dos dados sugere que o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas dentro de uma CoP se mostrou pertinente para o trabalho fazendo uso de problemas com ênfase em aspectos-chave para do desenvolvimento raciocínio combinatório. Por outro lado, percebeu-se que os principais desafios encontrados estão relacionados à própria natureza dos problemas combinatórios, assim como a interpretação dos enunciados dos problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Análise Combinatória. Formação Inicial de Professores. Comunidade de Prática.

ABSTRACT

What can the flight of a hummingbird do? What paths can this bird travel? As a result of this connection between the hummingbird and the researcher, it is in this freedom of flight that, even with storms and strong winds such as the pandemic and social distance, this hummingbird ventures out on a flight over the trees of the teaching of Combinatorics and Resolution of Problems. With the main objective of presenting the results of a research, whose aim was to understand how the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving can help in the development of combinatory reasoning of future teachers and contribute to the reflection on their pedagogical actions, this research shows how this path took place, passing through each tree or plant, showing difficulties and changes because, as in the research, the flight is not linear. The teaching of Combinatorics or Combinatorial Analysis deals with fundamental mathematical notions and works with important cognitive processes and skills for the intellectual development of ideas about sets, counting, organizing ideas, strategic thinking, etc. Despite not having an apparently complex concept, as it is based on the Multiplicative and Additive Principles, Combinatorics is still seen as a content that is difficult to understand, both for students and teachers. We believe that it is a consequence of the teaching approach based on valuing definitions and formulas at the expense of problems that require reasoning and creativity. In this way, inevitably, future Mathematics teachers can repeat the practices they were taught because these were the only ones. Data production was carried out remotely, having as a central element combinatorial problems raised by us and some adapted from websites and books by national and international authors. The meetings used as a background for the production of data had the voluntary participation of eight students of the Licentiate in Mathematics course at a state university located in the interior of São Paulo. The analysis of the data produced with the implementation of work with Combinatorics through Problem Solving was based on the solution suggestions developed by these students in the face of the proposed problems. Through the elements of practice, a Community of Practice (CoP), we were able to understand how combinatorial reasoning was developed in a group for each problem. Data analysis suggests that the use of the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving within a CoP proved to be relevant for the work making use of problems with an emphasis on key aspects for the development of combinatorial reasoning. On the other hand, it was noticed that the main challenges encountered are related to the very nature of combinatorial problems, as well as the interpretation of problem statements.

Keywords: Problem Solving. Combinatorial Analysis. Initial Teacher Training. Community of Practice.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

AOS LEITORES

Olá, como vocês estão?

Essa é uma pergunta simples e inicio desta forma, pois é nessa parte que você, querido leitor, irá conhecer um pouco sobre a minha pesquisa e sobre mim. Acredito que uma pesquisa acadêmica não é composta apenas por uma análise dos dados produzidos, ou da literatura pesquisada ou da conjectura/pergunta levantada. Ela está para além do ato em si de pesquisar. De início, envolve uma curiosidade que surge antes da própria pesquisa e que, ainda, inclui um agente subjetivo com diversas experiências, no caso o pesquisador. Mais especificamente, eu mesma. É impossível a um pesquisador iniciar um trabalho sem levar em consideração suas experiências, pois elas lhe são inerentes e não há como deixá-las de lado. Em certo momento a pesquisa influencia na vida do pesquisador ao mesmo tempo que as vivências do pesquisador influenciam a pesquisa. É uma compartilhamento natural, cheio de desafios, indagações, medos e com muita beleza.

É nesse início que mostro a vocês um pouco do modo de escrita escolhido, um possível voo. Nas páginas seguintes não haverá relatos descritos de uma forma impessoal como se eu, como pesquisadora, estivesse apenas observando os fatos. O caminho desta pesquisa não foi linear e nem seguiu uma estrutura rígida e cartesiana. Muitas nuances, revezes e ventos fortes e tempestades passaram por esse caminho e ainda assim um belo voo foi percorrido. Por esse motivo, neste texto, ora estarei como observadora, ora como participante, ora como ouvinte, ora como beija-flor.

Bom, vamos começar essa conversa?!

Eu sou a Ana Carolina. A maioria dos meus amigos e familiares me chamam de Carol e alguns me chamam de Ana. Eu sempre atendo por qualquer um desses nomes. Então pode ficar à vontade! Cresci em uma casa cheia de árvores e plantas, meus vizinhos diretos também tinham muitas árvores em suas casas. Onde quero chegar com isso? Cresci vendo e ouvindo diferentes tipos de pássaros e algo que sempre me encantou nesses animais era a liberdade do voo. Dentro dessa espécie, os beija-flores são os mais encantadores na minha humilde opinião. Antes de enfrentar essa jornada que é o Mestrado, eu nunca havia saído de casa para morar em outro lugar. A universidade em que fiz Graduação era próxima de casa e não havia motivos para sair e todos os meus compromissos eram próximos à minha casa, próximos ao meu ninho. Até que eu decidi bater asas e voar para fora do ninho.

Vir para uma cidade diferente, com pessoas diferentes, foi sair completamente da minha zona de conforto, mas não foi ruim. É a liberdade do voo. Hoje enxergo que, da mesma forma que pulei do ninho, decidi também voar pelas rotas da pesquisa. Nesse ambiente, me vejo como um beija-flor. E você pode se perguntar, mas por que um beija-flor, Carol? Eu explico.

Uma lenda maia[1] conta que seus deuses criaram todas as coisas que existem na Terra. Cada animal, cada árvore e cada pedra, cada um com sua devida função. Porém quando terminaram, esses deuses notaram que não existia mensageiros que levassem os desejos e pensamentos de um lugar para o outro. Como haviam utilizado todo milho e barro para criar os outros animais, os deuses esculpiram uma pequena flecha em uma pedra de jade e a sopraram. Essa flecha saiu voando e se transformou em uma nova criatura. Dessa forma, os deuses criaram o beija-flor. O beija-flor era de uma beleza ímpar, suas plumas brilhavam na luz do sol e refletiam todas as cores. Tal era sua beleza que os homens tratavam de caçá-lo para utilizar suas penas como enfeites. Ao saberem disso, os deuses, bastante zangados, disseram: "Se alguém pegar um beija-flor, morrerá". Por isso, não é comum vermos um beija-flor em gaiolas. Desde então o trabalho do beija-flor é levar à frente os desejos e pensamentos dos homens. Ainda, segundo a lenda, ao se ver um beija-flor, esse carrega consigo um desejo ou uma mensagem de amor.

Assim como o beija-flor que, mesmo com sua rapidez, é delicado, pois consegue se aproximar das flores sem tocá-las, nós, pesquisadores, precisamos estar atentos aos dados da pesquisa consultada, de modo que nada provado como verdadeiro seja “danificado”. Também, o beija-flor é a única ave que pode voar para trás[2] por conta do movimento de suas asas, ou seja, ele pode passar por algo e, se quiser, voltar e analisá-lo novamente. Esse movimento é semelhante aos passos de um pesquisador junto à literatura a ser pesquisada. Além da liberdade que há na pesquisa e, principalmente, a de levar os pensamentos encontrados em nosso trabalho para a comunidade científica. Assim percebo que cada pesquisador é um pouquinho beija-flor.

O caminho percorrido por um beija-flor nem sempre é tranquilo. Sabemos que na natureza existem riscos e, para pássaros, os riscos são os ventos, as chuvas, um predador. É preciso escolher em que altitude se voará, ficar atento as mudanças e aos perigos. A vida na pesquisa não é diferente. Realizar uma pesquisa acadêmica em meio a uma pandemia que

[1] HERNÁNDEZ, M (Org.). La leyenda del ‘x ts’unu’um’ (Colibrí). Youtube, 21 mai. 2020. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=ff5FLijIHEQ&t=144s>. Acesso em: 20 abr. 2022.

[2] Como o beija-flor fica suspenso no ar?. **Superinteressante**, São Paulo, 18 abr. 2011. Disponível em: < https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-o-beija-flor-fica-suspenso-no-ar/>. Acesso em: 20 abr. 2022.

assolou o mundo por um vírus desconhecido se parece como uma grande tempestade. Mas, ainda assim, os pássaros voam e as pesquisas são feitas.

Aqui, tento compreender a questão: onde começa esse voo? Onde começa a minha pesquisa? Acredito que ela não se iniciou apenas a partir do momento que defini o pré-projeto enviado para o processo seletivo para o mestrado. Esse voo foi tomando forma ainda no ninho, ainda no início da minha vida acadêmica. Como toda pessoa que passou pelo Ensino Básico, minha história com a Matemática começou, desde cedo nos anos do Ensino Fundamental. Nos anos dessa etapa, sempre senti aptidão para entender os conteúdos das aulas de Matemática e obtinha boas notas nos trabalhos e nas avaliações. Lembro-me que era o tipo de estudante que lia todas as curiosidades dos livros didáticos, independente da disciplina e, quando questionada por que gostava de Matemática, dizia que era fácil de entender pois via sentido no que era estudado, tinha uma lógica que eu conseguia entender. Mas acredito que o gosto pela Matemática foi influenciado por docentes que tive ao longo de todo o meu Ensino Fundamental. Não posso negar que eles plantaram uma sementinha.

O Ensino Médio foi uma mudança muito grande para mim. Primeiro, que saí de uma escola relativamente pequena para outra muito maior. Além disso, aquela foi a escola em que eu estive desde sempre, onde passei todos os nove anos de Ensino Fundamental. Pois bem: escola nova, desafios novos. Matemática nova? Sim, muitos conteúdos diferentes e não apenas na própria disciplina de Matemática, mas havia matemática na Física, na Química, nas aulas de Resistência de Materiais, Mecânica de Solos, entre outras disciplinas do curso técnico em Edificações. Sim, é o que você deve estar pensando, cursei o Ensino Médio em uma escola técnica e gostei muito, gostei tanto que minha primeira opção para graduação era Engenharia Civil. Quando passei para Matemática, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense (UFF), até pensava em cursar as disciplinas referentes aos cálculos e trocar de curso: até que algo me despertou.

Se no Ensino Fundamental eu consegui entender o sentido dos conteúdos das aulas de Matemática, no Ensino Médio não foi muito bem assim. Algumas coisas eu passava a assumir como verdade, mesmo sem entender para quem era aquela verdade. As aulas eram expositivas com exercícios de fixação, com memorização de regras, nada muito diferente da forma tradicional vigente. Aqui vale deixar claro que as aulas tradicionais não são um problema para mim mas, sim, a de não utilizar mais nada além de quadro branco e caneta.

Comecei, na graduação, a entender por que alguns conceitos aprendidos não faziam sentido para mim. Suponho que entender a relação da fração geratriz como limite de uma função estudada na disciplina de Cálculo I foi como uma provocação. Uma provocação para entender e buscar compreender cada vez mais conceitos que foram internalizados porém não entendidos. Assumo que meu despertar para a matemática se deu em momentos simples, onde conseguia compreender conceitos memorizados nas aulas anteriores. Enquanto aluna da graduação participei do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid[3]), que é um programa que oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos de licenciatura que se dediquem ao estágio nas escolas públicas. O objetivo desse programa é o de antecipar o vínculo entre futuros professores e as salas de aula da rede pública. Participar dessa experiência mudou completamente minha visão sobre a Licenciatura. O Pibid foi de fundamental importância para meu desenvolvimento como licencianda e como professora de matemática do ensino básico. Permaneci como bolsista durante três anos e, nesse tempo, conheci e aprendi metodologias de ensino diferentes da metodologia tradicional. Conheci a Educação Matemática. Pesquisei novas formas de trabalhar a matemática que levassem os alunos a ter capacidade de entender o que lhe era ensinado.

Nesse mesmo programa destaco minha participação no projeto “Jogos para o ensino de Matemática”. Nesse projeto desenvolvíamos propostas didáticas para o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória e Probabilidade através da utilização de diferentes jogos e fichas de atividades capazes de proporcionar a construção, a reflexão e a apropriação dos conteúdos em questão. Lembro-me que o grupo de bolsistas, junto ao coordenador do programa, decidiu começar com esses temas pois, além da proximidade entre eles, são conteúdos considerados difíceis de trabalhar tanto para alunos quanto para professores. Esses projetos tinham, como público-alvo, alunos e professores, ou seja, ao mesmo tempo que visavam à aprendizagem dos alunos, apresentavam uma forma diferente de ensinar Combinatória[4] e Probabilidade aos professores. Também era uma oportunidade de os professores aprenderem, pois poucos professores estudam Combinatória na graduação e seus conhecimentos são os mesmos de quando a aprenderam no Ensino Médio.

A partir do Pibid aprendi a refletir sobre o ensino da Matemática e minha própria formação. Constantemente me perguntava se as ações de aprendizagem na graduação eram suficientes para ministrar aulas depois de formada ou se não faltava algum conteúdo que seria abordado na escola e não o havia aprendido. Questionei até o fato de metodologias diferentes da tradicional, alvo das minhas pesquisas no Pibid, não serem utilizadas nas aulas da graduação. A partir dessas inquietações, descobri um grande interesse na formação de

[3] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Pibid – apresentação. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/pibid. Acesso em: 10 set. 2022.
[4] Neste texto, Análise Combinatória e Combinatória serão tratadas como sinônimos.

professores. Além de interesse, me preocupo com a formação de futuros colegas de trabalho. Por mais que haja mais disciplinas pedagógicas, a Licenciatura ainda caminha distante de uma realidade escolar. Ainda, sobre a formação, suponho que uma possível falta de confiança para ministrar algum conteúdo seja originada de um conteúdo memorizado pelo professor e não por ele compreendido. Além disso, se uma pessoa não é exposta a outros métodos de ensino, como podemos cobrá-la por uma metodologia diferente para sua sala de aula? Como avaliar que um aluno aprenda de forma efetiva um conteúdo se nem o professor o aprendeu?

Em certo momento, me vi envolvida nesses questionamentos acerca do conteúdo de Análise Combinatória. Este é um conteúdo proposto para o 2º ano do Ensino Médio e trabalha com contagem e os possíveis problemas que ela pode gerar. A princípio não se utiliza de conceitos complexos aprendidos anteriormente, visto que os problemas combinatórios utilizam apenas números e operações elementares para suas resoluções. Porém, a dificuldade pode aparecer na interpretação dada a cada problema. No último ano de Graduação atuei como professora de duas turmas do Ensino Fundamental e como monitora de uma outra escola, atendendo alunos do Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Observando as dificuldades dos alunos do Ensino Médio em entender os problemas de Análise Combinatória e, por consequência, a minha dificuldade em explicá-los, crescia em mim a vontade de investigar sobre as minhas inquietações a respeito da minha formação como professora. Por isso, decidi me inscrever na Seleção para Mestrado, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) de Rio Claro.

Atuando como bolsista do Pibid costumava trabalhar com resolução de problemas nos projetos desenvolvidos e carreguei a resolução de problemas durante uma breve prática docente. Por esse motivo, me candidatei para a linha de pesquisa Resolução de Problemas dentro dessa instituição. Em 2020, aprovada na Seleção, comecei a trabalhar e estudar resolução de problemas segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no GTERP[5], coordenado pela professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. Entendo que esses foram os indícios para um possível voo. Assim, agrupei as questões sobre Análise Combinatória, licenciatura e resolução de problemas como elementos de um conjunto que decidi olhar mais de perto.

A reflexão constante sobre seu trabalho precisa ser algo intrínseco ao professor, refletir sobre o conteúdo, sobre as aulas, sobre as metodologias utilizadas e sobre as dúvidas

[5] Crupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas

que ainda carregam. A necessidade por esse exercício de analisar e questionar o que está sendo feito nos ajuda, como professores, a aprimorar nossa prática em favor da qualidade do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Nos ajuda a buscar uma educação matemática para todos. Em uma sociedade em que cada vez mais as informações são transmitidas de forma imediata e, como visto na pandemia, com diversos elementos estatísticos, podemos nos questionar: como essas informações são contadas? Como fazer para contar e/ou agrupar muitas informações ou elementos?

Em relação à Análise Combinatória podemos pensar que sentido ela possui. Essa dúvida, como muitos outros conteúdo matemáticos, pode ser levantada pelos alunos, quem nunca ouviu um: “Professora, para que eu vou usar isso?” Até mesmo como professores às vezes nos perguntamos “para o quê eu estou ensinando Análise Combinatória?” ou “Esse é só um novo conteúdo que vamos precisar para entender probabilidade”. Porém, se olharmos com um pouco mais de atenção para esse assunto e para nossas dúvidas sobre ele, chegaremos a outras perguntas como: De que forma podemos fazer nossos alunos compreenderem melhor a Combinatória? ou como mostrar o raciocínio além da fórmula?

As contribuições a respeito dos conceitos combinatórios no desenvolvimento da aprendizagem da Matemática têm despertado muitas pesquisas. Esse fato pode ser visto em Souza e Rocha (2020) que, em uma busca em periódicos da área de ensino da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (Capes) entre 2010-2019, encontraram cerca de 46 trabalhos que versam direta ou indiretamente sobre Combinatória. No estudo de Campos e Igliori (2021) foram analisadas 55 teses e dissertações buscadas no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes no período de 2015-2019 no âmbito do ensino e da aprendizagem da Combinatória visando a identificar as perspectivas investigativas dessas produções.

Aí você pode se perguntar, mas se há tantos trabalhos sobre Combinatória, por que mais um? Porque a maior parte das pesquisas estão relacionadas ao ensino e aprendizagem de Combinatória nos níveis do Ensino Fundamental e Médio. O levantamento sistemático realizado no primeiro estudo mostrou que ainda há poucas pesquisas sobre a Combinatória e a formação de professores, principalmente na formação inicial. Já na pesquisa sobre teses e dissertação apenas 4 relacionavam esses dois temas. Por isso, acredito que este trabalho pode contribuir para a comunidade acadêmica e nas discussões sobre o tema.

O objetivo principal da investigação que toma forma nesta dissertação foi o de buscar possíveis respostas à questão central norteadora deste trabalho: Como pode a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas ajudar no desenvolvimento do raciocínio combinatório de futuros professores e contribuir para a reflexão sobre suas ações pedagógicas? Dos poucos trabalhos disponíveis que buscaram abordar Análise Combinatória e a Metodologia do GTERP, nenhum deles declaradamente analisou propostas que se direcionam para o raciocínio combinatório na formação inicial de professores.

Dentre as ideias sobre raciocínio combinatório, adotamos a apresentada por Borba (2010) de que este é um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, é preciso agrupar seus elementos atendendo a critérios específicos e determinar o número total de agrupamentos possíveis. Portanto, o raciocínio combinatório é parte importante do raciocínio hipotético-dedutivo, do raciocínio formal e do raciocínio generalizante. Essas formas de raciocínio são importantes tanto para a construção de conceitos matemáticos como para outras ciências e situações em que é preciso utilizar a contagem de agrupamentos de elementos.

Esta pesquisa busca compreender esse desenvolvimento do raciocínio combinatório situando os problemas como ponto de partida para a construção de novos conhecimentos adotando as ideias de Onuchic e Allevato (2011). De acordo com essas autoras, um problema é tudo o que não se sabe fazer, porém há interesse em fazer. Ainda, na metodologia pedagógica apresentada pelas autoras, o trabalho colaborativo é um destaque. Por esse motivo as ideias de Lave e Wenger (1998) a respeito da Comunidade de Prática também fundamentam este trabalho, particularmente na etapa de análise dos dados.

Diante de toda essa justificativa, este trabalho está estruturado em oito partes. A começar por esta parte introdutória, chamada **Aos leitores**, onde vocês puderam conhecer um pouco da minha história. O primeiro capítulo constitui o meu **Plano de Voo**. É nesse plano que estão descritos e apresentados os elementos do modelo de Romberg-Onuchic (2014), os procedimentos para a produção de dados, registro e análise, além de explicar como esta proposta fundamentou a pesquisa e justificou o uso da abordagem qualitativa para a pesquisa. O nome dos capítulos será representado por plantas e árvores preferidas dos beija-flores e que são polinizadas por eles. O capítulo seguinte tem o nome da primeira planta que encantou o beija-flor, a **Sapatinho-de-judia** que representa a Análise Combinatória com seus ramos extensos e cheios de vida. Nesta parte são apresentadas pesquisas sobre o ensino de Análise Combinatória e sua origem na Matemática Discreta, sobre a história da Combinatória diante do desenvolvimento humano, a importância do raciocínio combinatório e algumas pesquisas anteriores com a formação inicial de professores que ensinam matemática.

Já, o terceiro capítulo é composto por um grande **Ipê Amarelo** onde esse beija-flor irá voar por entre os galhos e as flores. Esta árvore representa as ideias sobre a Comunidade de Prática que, tem como principal teoria a Teoria Social da Aprendizagem. Nessa parte também será discutida a Comunidade de Prática e a negociação de significados. O quarto capítulo é o **Flamboyant Vermelho**, a árvore escolhida para representar a Resolução de Problemas. Seguindo para o quinto capítulo, encontramos **Um belo jardim**, nome escolhido para o capítulo que mostrará o contexto em que estão inseridos o público-alvo da pesquisa, no caso um grupo de alunos de Licenciatura em Matemática da Unesp/Rio Claro, participantes do Programa Residência Pedagógica. Além disso, o capítulo traz uma primeira sondagem sobre os conhecimentos desses futuros professores a respeito do ensino de Combinatória, Resolução de Problemas e Formação de Professores. Nesse, também serão apresentados o modelo modificado e a pergunta de pesquisa. No sexto capítulo encontramos os dados produzidos nesta pesquisa e suas análises a partir dos elementos da prática, por esse motivo, ele é chamado de **Chegou a hora de polinizar**. Esse nome foi pensado apoiado no movimento que o beija-flor faz ao colher o pólen de uma planta e depositar em outra. Como um movimento que a própria pesquisa faz de levar algumas ideias e perspectivas para outros espaços. Por fim, temos **O voo continuou... E pode continuar...**, que contém as considerações finais do trabalho.

Agora sim! Estou devidamente apresentada e minha pesquisa também. Convido-os a se acomodarem e embarcarem neste voo junto comigo.

1 UM PLANO DE VOO

E o beija-flor, recém-saído do ninho, em seu primeiro voo pela pesquisa, descobriu que há várias árvores diferentes e com flores diversas que abrigavam outros pássaros mais experientes e com belos cantos. Cantos característicos e bastante prestigiados por todos que os ouvem. Ainda perdido por onde começar, esse beija-flor decidiu que era preciso um plano, um plano de voo para guiar essa primeira jornada, de árvore em árvore, de flor em flor. Assim, para montar o seu plano, primeiro foi preciso identificar o que seria uma pesquisa e como ela seria, além de concepções sobre a Matemática e, mais especificamente, a Educação Matemática. Além disso, quais características apresentaria uma pesquisa qualitativa. Depois dessas bases o beija-flor pôde, finalmente, montar o seu plano de voo.

1.1 Breves reflexões sobre Pesquisa, Matemática e Educação Matemática

Ao iniciar esta pesquisa e principalmente ao começar a escrever este Trabalho de Dissertação, questionamentos de todos os tipos circulavam pela minha mente. Buscando arrumar as ideias, decidi começar por reflexões básicas como o que é pesquisa e reconhecer com quem concordo sobre ideias da Matemática e da Educação Matemática. Este tópico trabalha essas questões.

Sobre a palavra pesquisa, o grande educador Ubiratan D'Ambrósio (2004), no prefácio do livro "Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática", diz que a sociedade usa e abusa desse termo sem saber realmente seu significado. Porém a origem da palavra *pesquisa* está ligada à investigação, à busca, a mergulhar na procura por explicações dos **porquês** e **dos comos** (D'Ambrósio, 2009). Assim, a pesquisa é uma espécie de conexão entre uma teoria fundamentada em certos princípios e os efeitos de uma prática. Logo, teoria e prática se complementam por meio da pesquisa.

As ideias sobre o que vem a ser uma pesquisa não são nada recentes. Em 1993, a professora Maria Aparecida Viggiani Bicudo já definia a pesquisa como "buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada. Configura-se, também, como buscar explicações cada vez mais convincentes e claras sobre a pergunta feita." (BICUDO, 1993, p. 18). Para Goldenberg (2004), pesquisa é a construção de conhecimento original de acordo com exigências científicas. É um trabalho de construção de conhecimento produtivo que busca o avanço na área de conhecimento à qual se dedica.

Borba, M e Araújo (2019) discutem algumas questões que podem surgir no caminho da pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Destacamos uma que está relacionada aos tipos de pesquisa: Por que realizar uma pesquisa qualitativa em vez de uma quantitativa? Uma possível resposta pode estar ligada às concepções do próprio pesquisador, sobre quais conhecimentos são considerados legítimos e sobre como se constitui seu ato de pesquisar. As pesquisas quantitativas estão intimamente ligadas à obtenção de informações de um grande número de indivíduos e essas informações são trabalhadas a partir de um tratamento estatístico com ênfase em uma análise preocupada em quantidades e percentuais enquanto, na pesquisa qualitativa, a preocupação se volta à interpretação dos dados e discursos, às singularidades dos indivíduos e às relações que acontecem entre os participantes daquele mesmo grupo.

Desde pequenos somos acostumados com a ideia de que a Matemática é a “rainha” ou “mãe” de todas as ciências. Deixo claro que não concordo sempre com essas qualificações, pois as acho muito exageradas, visto que, na maioria das vezes são utilizadas para menosprezar outras ciências. Pensando sobre qual a concepção de matemática que possuo, me vejo no meio de uma confusão de ideias que acredito pertencer ao âmbito filosófico se pensarmos na questão: “O que é a Matemática?”. Como esse não é o direcionamento deste capítulo, não trilharemos tal caminho, porém concordo com Lins (2004), quando diz que existem duas Matemáticas (ou até mais de duas): a Matemática da rua e a Matemática do matemático.

A primeira se refere à "matemática do cotidiano”, “da vida”. Algumas tendências ou abordagens metodológicas têm o objetivo de conectar a matemática escolar com a vida de pessoas que não trabalham com a matemática. Já, na segunda, esse autor nos traz a ideia de Roberto Baldino, de que a Matemática dos matemáticos é o resultado de um processo histórico de ligar significados a significantes, e exemplifica com a situação: “se um matemático diz que "limite de uma função f é tal e tal e tal", é isso que "limite de uma função f' fica sendo e isso não se dá por alguma causa natural (definição descritiva), mas por uma determinação simbólica (definição constitutiva)” (LINS, 2004, p. 95).

Sobre a Educação Matemática sabe-se que é um campo muito mais novo do que a própria Matemática. De acordo com D’Ambrósio (2004) a partir das três grandes revoluções - Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789) – que as preocupações com a educação matemática da juventude começam a tomar corpo. Não apenas como um campo de pesquisa, a Educação Matemática também pode ser entendida como uma prática social. Pensar desse modo significa compreendê-la além das normatizações que regulamentam ações profissionais e de pesquisa. É pensar em um cenário de constante problematização dessas normatizações. Logo, entendo a Educação Matemática não como algo estático e sim como uma prática que influencia seus agentes e é influenciada por pesquisas desses mesmos agentes.

Em um panorama brasileiro, Silva e Miarka (2017) relatam que nas décadas de 1960 e 1970 o número de interessados pela Educação Matemática passa a crescer e notam-se movimentos de organização e formação de grupos de estudo. Ainda que houvesse um interesse coletivo sobre o tema, cada grupo parecia sofrer de um isolamento institucional, não haviam tantos compartilhamentos de ideias entre professores das instituições. Os autores percebem que essa falta de fronteiras bem demarcadas acarretou dificuldades à formação de um grupo com objetivos comuns. Na década de 1980 surgiu a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática.

Portanto, diante desses pesquisadores e diferentes ideias, entendo que este nosso trabalho trará uma pesquisa com o objetivo de responder a uma pergunta – que será anunciada nas próximas seções – com a finalidade de produzir um conhecimento ou trazer mais esclarecimentos sobre a área da formação de professores de matemática. Como esta pesquisa está centrada no campo da Educação Matemática, acredito que ela possa contribuir com essa área e que, para além dessa, novas indagações possam surgir no futuro.

1.2 A metodologia científica e a metodologia pedagógica

Escolher uma metodologia de pesquisa é definir quais procedimentos serão utilizados para realizar a pesquisa. Ao olharmos a Educação Matemática como uma prática social, além de uma disciplina, é conveniente usar uma metodologia para nortear os diversos passos da pesquisa. Segundo Garnica (2019, p. 95):

> Um método sempre traz, em si, a noção de eficácia. Cuida-se de engendrar um mecanismo que, de modo julgado eficaz, nos dê pistas para compreender determinada situação, resolver determinado problema, responder a determinada questão ou encaminhar determinados entraves. A eficácia, porém, será julgada segundo os pressupostos teóricos e vivências do pesquisador, e esse é o motivo principal de não se poder apartar uma metodologia de uma concepção de mundo e dos fundamentos teórico-filosóficos do pesquisador.

Para Goldenberg (2004), a metodologia faz um questionamento crítico da construção do objeto científico, problematizando a relação sujeito-objeto construído, buscando uma subjetividade controlada por si mesmo e pelos outros. Uma característica que tem atravessado os trabalhos desenvolvidos no e pelo GTERP é ter como *lócus* de pesquisa a sala de aula de Matemática. Dessa forma, neste trabalho consideraremos tanto as Metodologias de Pesquisa Pedagógica, que orientam e fundamentam as atividades em sala de aula, como as Metodologias da Pesquisa Científica, que conferem aos estudos produzidos a validade e o rigor exigidos (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

De acordo com Lankshear e Knobel (2008), os propósitos e objetivos principais de uma pesquisa pedagógica devem fluir de questões, problemas ou preocupações de eventos cotidianos observados em sala de aula. Porém, esses autores apontam que a pesquisa pedagógica deve ser conduzida junto ao ambiente acadêmico. Ou seja, precisa responder ao rigor da pesquisa científica e não precisa ser realizada apenas pelo professor confinado em sua sala de aula somente pelo estudo empírico. Além disso, os professores podem receber pesquisadores para pesquisar suas aulas deste modo:

> [...] conseguimos entender com mais clareza a nós mesmos e a nossas práticas, crenças, suposições, valores, opiniões, visões de mundo e coisas assim, quando encontramos outros tão diferentes de nós, que põem em evidência as nossas características, colocando-as em perspectiva. Na verdade, conseguir estabelecer uma distância crítica e avaliativa pode ser extremamente difícil, se permanecermos dentro dos limites de nossos contextos e nossas experiências discursivas familiares (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.17)

Entendo que o objetivo de uma pesquisa pedagógica é o de entender o que acontece na sala de aula. Esse entendimento auxilia nos processos de ensino e aprendizagem. O GTERP compreende que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) seja uma modalidade dessa pesquisa e mostrou, segundo Leal-Junior (2019) que é uma filosofia da Educação Matemática.

Como já citado, existem dois tipos de pesquisa, as do tipo quantitativa e as do tipo qualitativa. Diante das minhas primeiras reflexões sobre esta pesquisa e, ao pretender uma compreensão sobre os raciocínios combinatórios que são desenvolvidos e trabalhados por futuros professores a partir de problemas, tendo como foco a MEAAMaRP, algumas características necessitam ser levadas em consideração. Nesta proposta buscamos reconhecer a importância da participação de cada sujeito, valorizando suas ideias e constituindo um espaço de troca de conhecimento e colaboração. Nesse sentido, a pesquisa em questão foi desenvolvida segundo a perspectiva qualitativa. Essa escolha deve-se ao alinhamento desta pesquisa com a caracterização de pesquisas qualitativas pensada por Bogdan e Biklen (1994) e apresentadas em Borba, M. e Araújo (2019, p.25), que são:

> 1. Na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.
> 2. A investigação qualitativa é descritiva.
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

De acordo com Goldenberg (2004), na pesquisa qualitativa a atenção do pesquisador não está voltada para a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma trajetória, etc. Segundo Bicudo (2019), uma pesquisa qualitativa engloba a ideia do subjetivo, podendo expor opiniões, sensações e ainda "engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências.” (BICUDO, 2019, p. 111).

Bogdan e Biklen (1994) ainda afirmam que os estudos de natureza qualitativa devem revelar um cuidado maior pelo processo e pelo significado e não pelas causas e efeitos. Assim, a pesquisa está interessada em analisar o raciocínio combinatório de licenciandos em Matemática através de problemas utilizando a metodologia pedagógica proposta pelo GTERP, dentro de uma Comunidade de Prática. Alguns fatos que atravessam esse objetivo dizem respeito a como ocorreu a aprendizagem desse conteúdo enquanto alunos do Ensino Médio, suas experiências na graduação e sobre como esses futuros professores pensam em ensinar tal conteúdo. Esses fatos nos ajudam a compor o cenário da pesquisa e a entender os participantes.

O método de investigação utilizado neste trabalho se apoia no modelo de pesquisa científica elaborado inicialmente pelo educador matemático Thomas A. Romberg e, com algumas considerações do GTERP, que levaram a uma adaptação chamado modelo de Romberg-Onuchic.

1.3 Para onde está direcionado esse plano de voo?

Identificar um fenômeno de interesse é como dar o primeiro passo na pesquisa, pois se trata de investigar uma inquietação e/ou curiosidade sobre algo que nos salta aos olhos ou que seja uma questão relevante que nos intriga e para a qual possuímos pouca informação. Como explicitado por Santos (2015), os seres humanos são capazes de pensar e transformar necessidades sentidas em problemas que se apresentam como questões, além de gerar possíveis soluções para essas questões.

Entender qual seria o meu real fenômeno de interesse não foi algo fácil e muito menos rápido, pois muitas questões relacionadas ao ensino de Combinatória me angustiavam, o que vocês puderam acompanhar um pouco na seção “Aos leitores”. Seja o ensino na Escola Básica, ou o ensino nos cursos de Licenciatura, ou se o que foi aprendido pelos futuros professores era suficiente para ensinar tal conteúdo. Eram muitas questões que borbulhavam em minha mente e eu entendia que era preciso ter um foco.

As práticas para o ensino de Combinatória tendo em vista apenas a utilização de fórmulas contribui apenas para uma aprendizagem mecânica e focalizada em realizar cálculos. Sabemos, como professores e educadores matemáticos, que uma aula de Matemática implica em fazer muito mais que cálculos. O raciocínio que está por de trás dos cálculos e das fórmulas é que faz um aluno entender as diferenças entre os problemas combinatórios, sem que seja preciso memorizar o modo de resolver cada tipo de problema.

A partir de estudos acerca da Resolução de Problemas realizados durante a graduação, surgiu o interesse inicial em compreender como isso poderia contribuir para a formação de futuros professores. Depois de ingressar no programa de mestrado e iniciar minha participação no GTERP, entendi que o grupo possui a filosofia de que ensino, aprendizagem e avaliação estão relacionadas e trabalham juntos. Logo, o grupo entende que trabalhar com problemas e fazer uso da MEAAMaRP. Sendo assim, uma proposta foi elaborada para ser trabalhada com alunos da licenciatura em Matemática de uma universidade paulista tendo como meta problemas combinatórios, fundamentada no modo de trabalhar proposto pelo GTERP e com vistas a investigar como o raciocínio combinatório surgi em cada problema.

Depois de muitas discussões e compartilhamento de ideias entre minha orientadora e colegas mais experientes, membros ou não do GTERP, que contribuíram para que a pergunta da pesquisa refletisse, de fato, o que se almejava com esta pesquisa, saindo de uma situação didática com problemas combinatórios como pano de fundo para investigar como os licenciandos pensam e resolvem problemas envolvendo Análise Combinatória. Como resultado das discussões e considerações, a pergunta de pesquisa ou objetivo de maior interesse, ficou caracterizada em:

Como pode a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas ajudar no desenvolvimento do raciocínio

combinatório de futuros professores e contribuir para a reflexão sobre suas ações pedagógicas?

Entendemos que a partir desse objetivo geral, podem surgir algumas questões específicas que estão intimamente ligadas à pesquisa como:

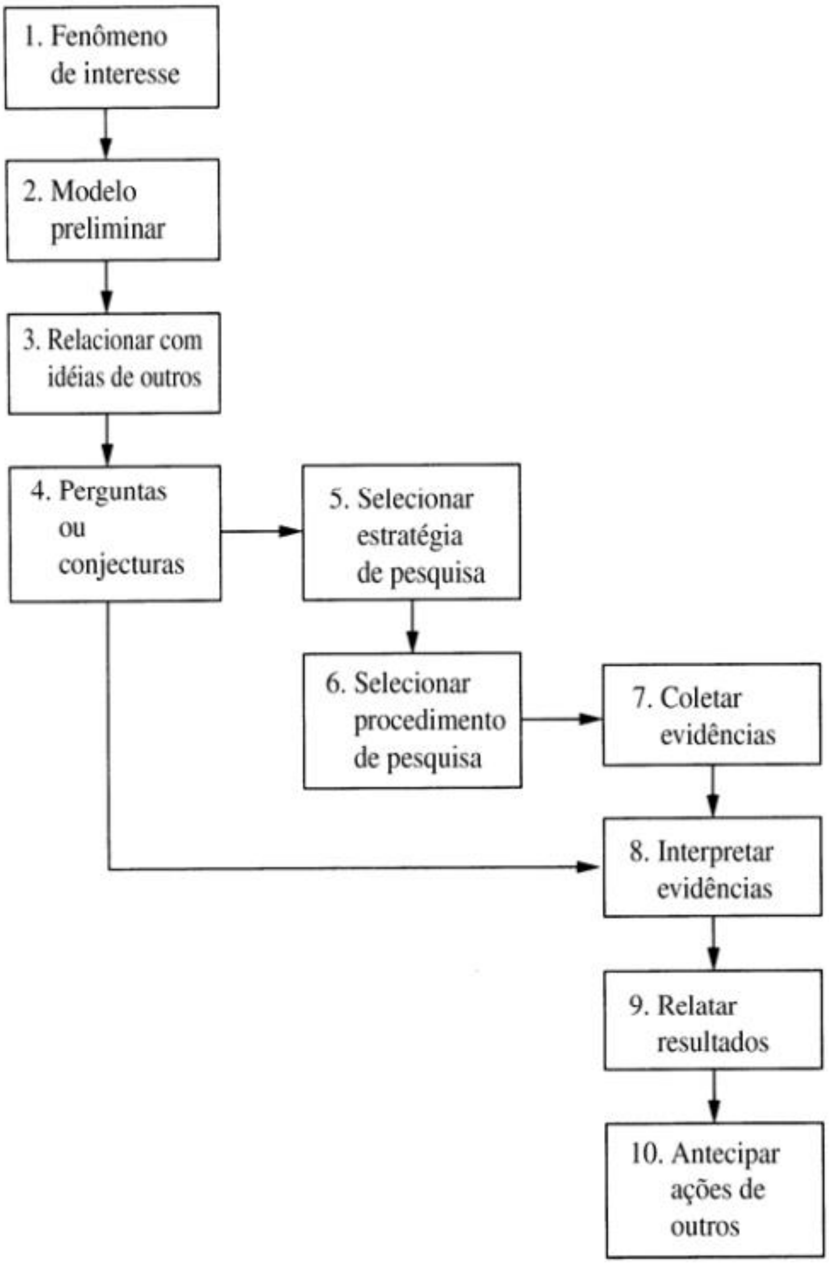
i. **Analisar as estratégias de resolução dos participantes;**
ii. **Analisar como os participantes trabalham com problemas em um grupo colaborativo;**
iii. **Analisar como pensam os problemas a partir de uma ótica pedagógica.**

Na próxima seção, será apresentado o modelo de Romberg-Onuchic, utilizado para estruturar o desenvolvimento da pesquisa apresentada neste trabalho. Em cada etapa do modelo descreveremos nossas compreensões e destacaremos sua natureza sugestiva, norteadora e não instrumental para o ato de pesquisar.

1.4 O modelo de Romberg-Onuchic e como foi adotado neste trabalho

Thomas Romberg, em seu artigo Perspectives on Scholarship and Research Methods, publicado originalmente pelo NCTM no livro Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning em 1992, com tradução de Onuchic e Boero (2007), propõe um fluxograma para guiar as atividades da pesquisa científica. Além do fluxograma, Romberg mostra, neste artigo, as tendências de pesquisa ligadas ao ensino, à aprendizagem de Matemática e aos métodos de pesquisa. Nesse artigo, ele apresenta algumas atividades para serem realizadas a fim de conduzir o trabalho do pesquisador, como é possível ver na Figura 1.

Figura 1 - Atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas

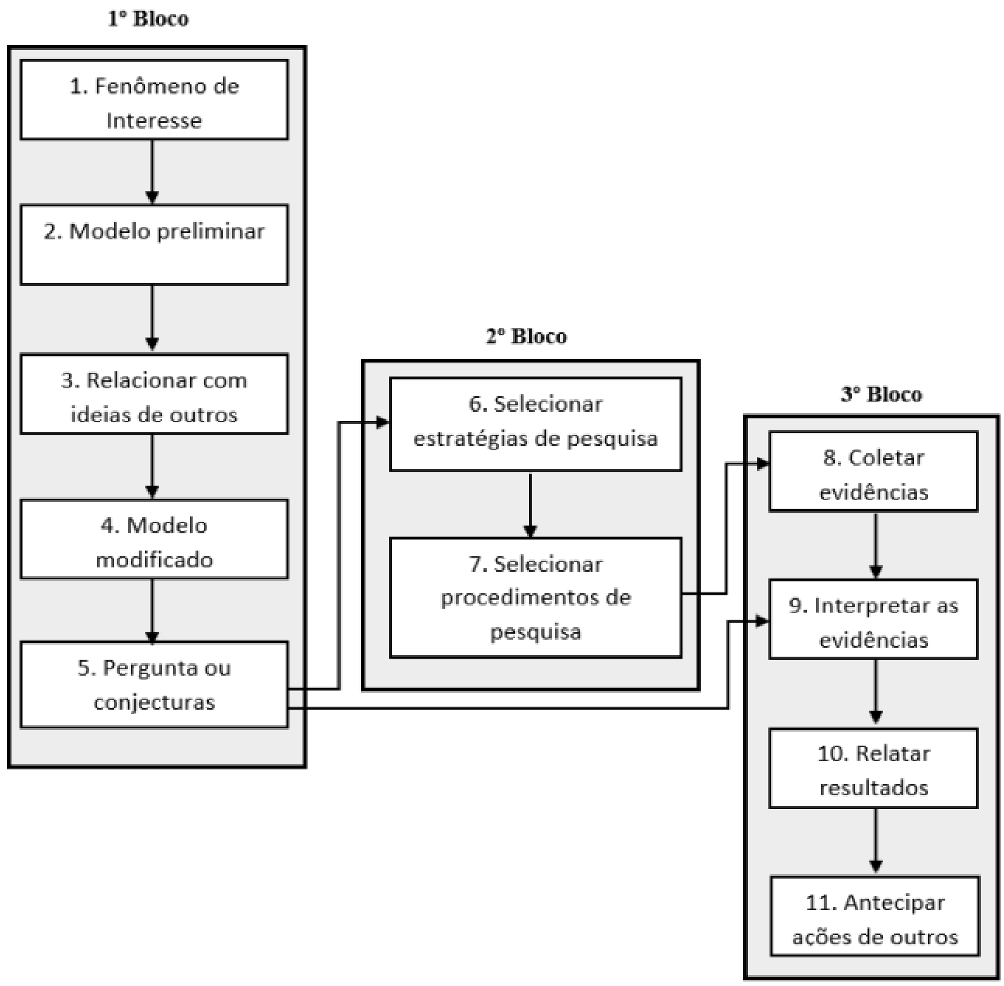


Fonte: ROMBERG (2007, p. 5)

No fluxograma de Romberg (2007) apresentado acima há dez atividades propostas agrupadas em três blocos que dizem respeito à elaboração do Modelo de Pesquisa; Seleção de Estratégias e Procedimentos; Produção e Interpretação de Evidências que surgem no Relato de Resultados e Antecipação de ações de outros. Ainda que exista essa estrutura, Romberg (2007) salienta que não existe necessidade de que essa sequência seja seguida necessariamente nessa ordem. A pesquisa é uma atividade dinâmica e suas interações entre fatores relacionados não podem ser separados de maneira tão evidente. Porém, essa estrutura pode auxiliar na discussão de tendências do trabalho dando suporte, assim, ao pesquisador.

O modelo de Romberg vem sendo utilizado pelos membros do GTERP para compor suas teses e dissertações. À medida em que pesquisas eram desenvolvidas, surgiam necessidades de uma adaptação ao modelo de Romberg e tal modelo, recebendo novas contribuições. Segundo Onuchic e Noguti (2014), as contribuições ao Modelo não apresentam apenas a inserção de uma nova atividade, o Modelo Modificado, além das dez atividades propostas inicialmente mas, também, nas definições de cada atividade.

Figura 2 - Fluxograma da adaptação Romberg-Onuchic



Fonte: ONUCHIC; NOGUTI (2014, p.29)

Com as contribuições realizadas, o modelo adaptado Romberg-Onuchic apresenta três blocos principais. O primeiro bloco apresenta a estrutura da pesquisa, que traz o que o pesquisador deseja investigar, suas suposições sobre os aspectos importantes da investigação até sua pergunta de pesquisa. O segundo bloco tem relações com as decisões que devem ser tomadas para atingir o objetivo da pesquisa. É onde o pesquisador vai preparar a produção de dados, quais estratégias e procedimentos ele vai precisar pensar. E por último, no terceiro bloco, o pesquisador vai ter acesso aos dados produzidos e irá analisá-los conforme sua pergunta e/ou conjectura de pesquisa e fará o exercício de antecipar outras ideias que possam surgir a partir dos resultados obtidos.

Cada etapa dos três blocos será apresentada nos capítulos seguintes, pois estarão situados de acordo com a pesquisa e não de forma generalizada, para melhor entendimento. Os participantes desta pesquisa são alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" – Unesp/Rio Claro e bolsistas do Programa Residência Pedagógica. No capítulo 5 é detalhado o motivo de escolhê-los como participantes e mais algumas informações que nos conduziram a entender as estratégias e os procedimentos para a produção de dados que culminaram na criação de um projeto para a aplicação da pesquisa.

Para situar você, leitor, estamos no 1º bloco, tudo que já foi descrito está relacionado ao *Fenômeno de Interesse* e à *Pergunta da Pesquisa*. Este passo foi adiantado visando à compreensão dos objetivos da pesquisa. Nos próximos itens mostraremos os modelos preliminar e modificado.

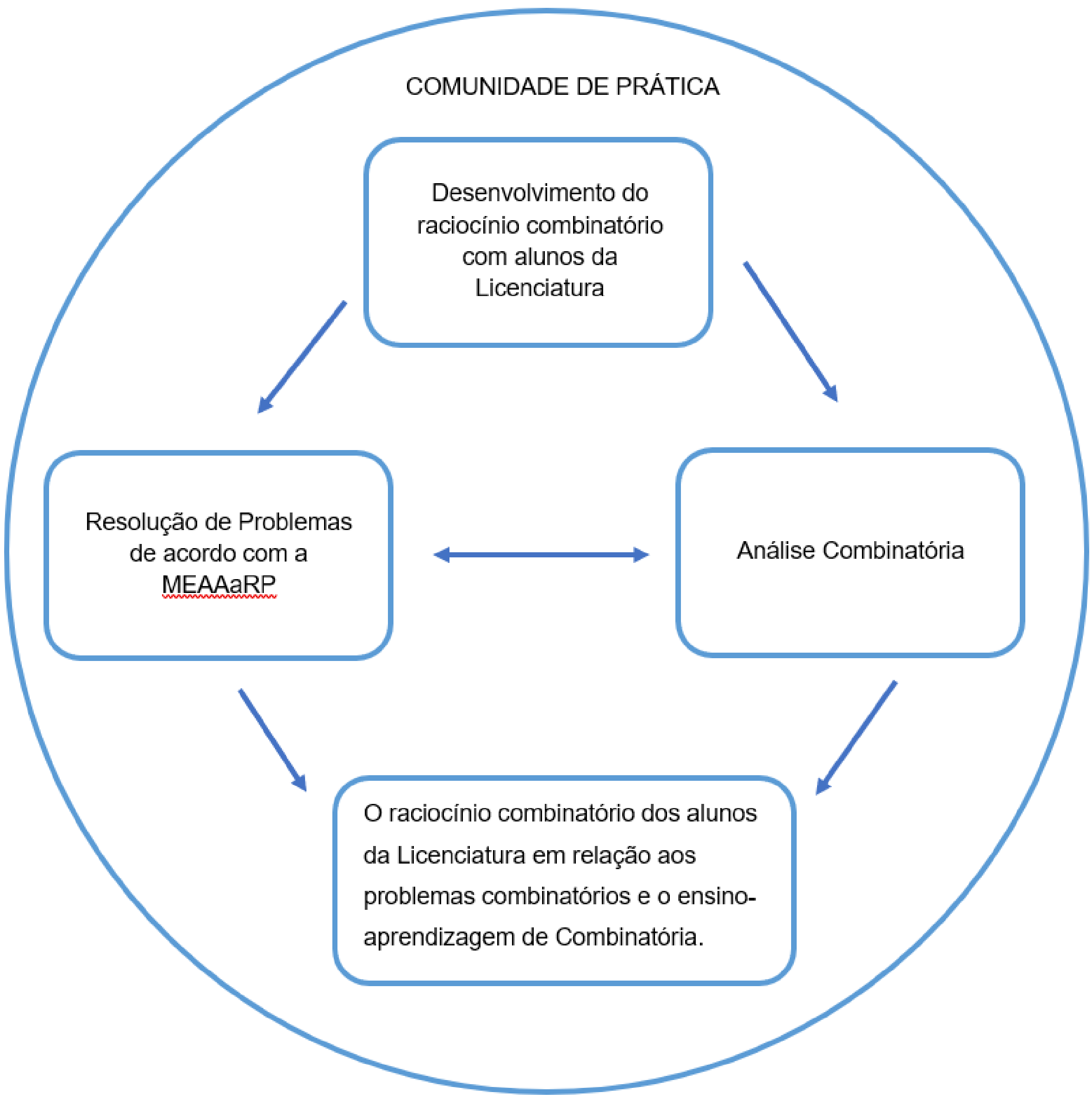
1.4.1 Modelo Preliminar

Após identificar nosso *Fenômeno de Interesse* é preciso montar um *Modelo Preliminar*. A construção desse modelo traz suposições sobre os aspectos importantes do fenômeno de interesse e de como eles estão relacionados. Segundo Onuchic e Noguti (2014), o Modelo Preliminar funciona como um guia no desenvolvimento da pesquisa, podendo sofrer mudanças ou não de acordo com o seu desenvolvimento. É, a partir do Modelo Preliminar que sairão as *variáveis-chave* relacionadas à pesquisa. Essas variáveis auxiliaram na busca da fundamentação teórica para a condução das ideias do trabalho. Como o mesmo nome propõe, esse é um esquema preliminar, o inicial, assim ele poderá ser alterado conforme fatos ou fatores que surjam no decorrer da pesquisa. É nesse modelo que expusemos nossas primeiras ideias de trabalho e vimos de que modo eles se relacionam.

Ao escrever o projeto de mestrado que conduziu a esta dissertação, tive contato com muitas referências sobre Resolução de Problemas e Análise Combinatória. Ao longo da pesquisa, a partir dos avanços nas orientações e nas reuniões do GTERP, conheci novas referências que me ajudaram a pensar neste modelo inicial. Assim, pensamos que a Resolução de Problemas e a MEAAMaRP poderiam ser aliadas ao elaborarmos um projeto didático que visasse trabalhar problemas combinatórios na formação inicial de professores de Matemática.

Pesquisando um pouco e refletindo mais sobre o fenômeno de interesse da pesquisa, atentei que meu real interesse não era apenas o de entender como os alunos da Licenciatura entendem Combinatória mas, também, como pensam em ensinar tal conteúdo e como resolução de problemas pode ajudar nessa prática. Assim, decidi montar o Modelo Preliminar, a partir dele que iniciou minha pesquisa. Afim de trazer um entendimento maior para esse modelo, por consequência para este trabalho, explicarei a seguir como entendo e porque criamos este modelo dessa forma:

Figura 3 - Modelo Preliminar



Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Esse modelo se inicia tendo o desenvolvimento do raciocínio combinatório com alunos da Licenciatura como um destaque, um protagonista. A partir disso, percebemos que a Combinatória ou Análise Combinatória entraria como um padrão de conteúdo, pois seria preciso discuti-la como conteúdo a ser ensinado, seu surgimento na história e como está inserida no contexto escolar. A partir das reuniões de orientação e seguindo as pesquisas do GTERP, foi escolhida a Resolução de Problemas de acordo com a MEAAMaRP como um padrão de procedimento para auxiliar na busca por resultados.

E ainda que tivéssemos um protagonista diferente, conseguimos identificar uma ligação entre a Resolução de Problemas e a Análise Combinatória, não unicamente por conta dos problemas comumente utilizados para trabalhar o conteúdo mas, também como uma forma de desenvolver o raciocínio por meio dos problemas. Além disso, entendemos que todo esse movimento estará inserido dentro de uma Comunidade de Prática formada pelos participantes e pesquisadora. Onde essa comunidade que caracteriza a natureza colaborativa da nossa pesquisa.

A atividade de relacionar-se com ideias de outros pesquisadores, proposta por Romberg (2007), diz respeito a buscar conhecer pesquisas realizadas relacionadas ao nosso fenômeno de interesse ou ao tema da pesquisa e, assim, ter ciência de ideias e concepções teóricas de outros pesquisadores sobre o assunto pesquisado por nós. Esse passo fundamenta a teoria para as ideias do trabalho. É, inicialmente, o momento de “ouvir” o que outros já pesquisaram e tentar identificar possíveis contribuições para nossa pesquisa sem, entretanto, discuti-las.

Como colocado por Allevato (2008), nessa atividade do fluxograma é possível conhecer-se “o estado da arte” e localizar a pesquisa dentro da visão daquelas realizadas no campo de estudo em que estão inseridas. “A busca de referências em outros trabalhos acompanha toda a pesquisa e permite ao pesquisador ter parâmetros para o estudo do fenômeno, particularmente para a interpretação das evidências” (p. 181)

Com o modelo preliminar pronto, pudemos pensar sobre possíveis variáveis-chave da pesquisa. São variáveis que guiam a busca pela fundamentação teórica para o desenvolvimento da pesquisa. Reconhecemos como variáveis-chave: *Análise Combinatória*, a *Comunidade de Prática na Formação de Professores* e *Resolução de Problemas com auxílio pedagógico para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*. Essas variáveis foram concebidas devido á sua relevância em nossos questionamentos e inquietações, visto que são informações que variam no nosso modelo preliminar. Nos três próximos capítulos apresentaremos cada variável-chave e pesquisas realizadas a respeito delas.

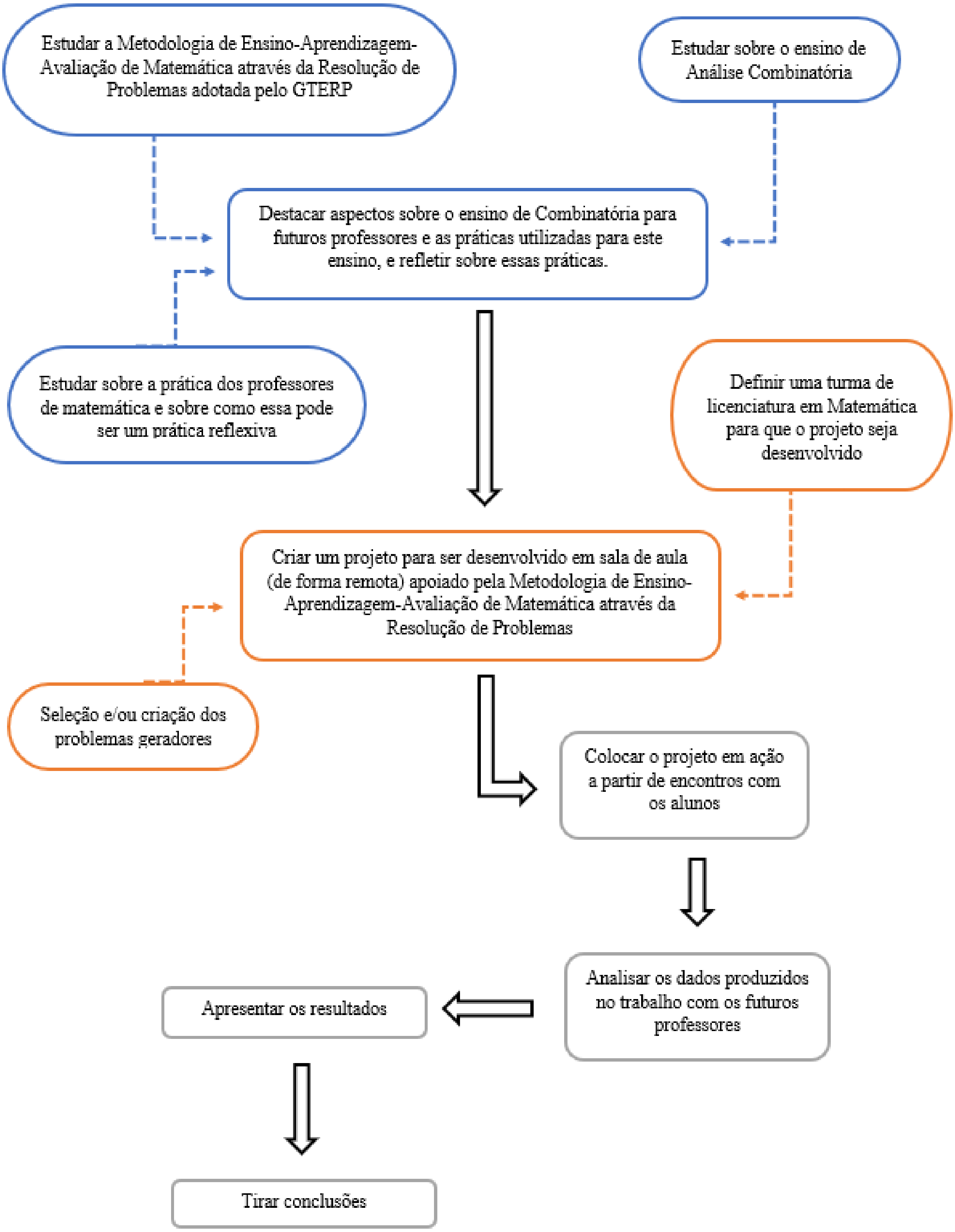
1.4.2 Modelo Modificado

No fluxograma de Romberg-Onuchic, o *Modelo Modificado* é a estrutura da pesquisa de campo. É chamado assim, pois ele é feito a partir de um modelo preliminar e depois que o pesquisador teve contato com as ideias de outros pesquisadores. Ou seja, o beija-flor, depois de passar "beijando" diversas flores, precisa ter um plano para direcionar sua polinização. Essa etapa tem como objetivo mostrar, com maior clareza, o caminho percorrido pelo pesquisador.

No modelo preliminar, o foco principal estava no desenvolvimento do raciocínio combinatório com alunos da Licenciatura. Não que esse foco tenha mudado, mas depois do referencial teórico estudado, foi percebido que era preciso um caminho para estudar esse caso. Pensar nesse caminho que seguirá a polinização é separar as ações principais da pesquisa de campo e as ações auxiliares, que ajudaram a compor e entender esse caminho. No Modelo Modificado, apresentado a seguir, as ações principais aparecem em retângulos e são seguidos por flechas grossas indicando o caminho a ser seguido. Porém, até construir essas ações principais, foi preciso pesquisar e pensar em ações auxiliares que ajudassem nessas construções. As flechas tracejadas e os balões em elipse representam essas ações auxiliares.

A partir da Figura 4 é possível acompanhar que o caminho percorrido foi, inicialmente, a pesquisa e o estudo sobre os temas elencados como variáveis-chaves e as relações possíveis entre eles. Após essa etapa foi preciso pensar em como criar uma sequência didática com problemas para ser desenvolvida com a MEAAMaRP. Para a criação da sequência didática era necessário pensar em quais seriam os participantes da pesquisa. Algumas ideias foram pensadas: como uma turma aleatória da licenciatura, ou um projeto de extensão. Por fim foram escolhidos alunos bolsistas do programa Residência Pedagógica. Essa escolha é tratada de forma mais abrangente no capítulo 5. Com a sequência pensada e o grupo de participantes escolhido, a produção dos dados foi iniciada. E, nos capítulos finais desta pesquisa, estarão descritas as análises e as conclusões realizadas.

Figura 4 - Modelo Modificado



Fonte: Elaborado pela autora (2022)

2 SAPATINHO-DE-JUDIA

Depois de planejar por quais árvores e plantas voaria eu decidi que rumo tomar, o beija-flor voou. Voou com o objetivo de pegar apenas uma parte do néctar das flores, sem destruí-las, sem causar nenhum dano. Sua primeira parada foi numa linda planta com longos ramos que se enrolavam por outras e pelos muros. Com suas lindas folhas e suas flores em formato de sapatinho, esta trepadeira denominada Sapatinho-de-judia encantou o beija-flor. Da mesma forma que a planta, a Combinatória também tem o poder de se espalhar e se prender a outros assuntos como a Probabilidade e a Estatística. Muito curioso, o beija-flor decidiu começar a explorar essa planta e ir de flor em flor, para descobrir tudo que havia nelas. Nesse movimento, este capítulo está apoiado em quatro seções: 1- ideias e concepções sobre o que é a Combinatória sua importância na Matemática Discreta; 2- como foi seu desenvolvimento pela história diante do desenvolvimento humano; 3- a importância do raciocínio combinatório e a Combinatória como conteúdo escolar; 4- algumas pesquisas anteriores que envolvem Combinatória e a formação inicial de professores que ensinam matemática. Esse néctar ajudará o beija-flor a polinizar o jardim que está nascendo com este trabalho.

2.1 Primeiro ramo: Afinal, o que é?

Sabemos que a Análise Combinatória é um conteúdo matemático e, segundo os currículos nacional (BNCC, 2018a) e estaduais, é formalizado no 2º ano do Ensino Médio da educação básica nas escolas brasileiras, porém pouco nos questionamos sobre o que é esse conteúdo. O que estamos analisando? Ou combinando? E qual a intenção em combinar algo e analisar essa combinação? É preciso analisar as combinações? Todos esses questionamentos surgiram a partir das flores deste primeiro ramo.

Procurando sobre o significado dessas palavras para tentar compreender o que está sendo tratado, encontramos em dicionários que, entre outras definições, a palavra Análise pode ser entendida como a decomposição de um todo em unidades menores, observando minuciosamente cada uma dessas unidades a fim de investigar sua natureza, suas causas e funções. Ao buscar por combinatória ou combinatório encontramos que é uma palavra derivada de Combinação. Os dicionários (MICHAELI, 2021; DICIO, 2021) trazem diversos significados, entre eles está que a ação de combinar é uma disposição ordenada ou não de coisas ou objetos semelhantes ou diferentes que se encontram reunidos.

Em busca de uma concepção histórica-filosófica sobre esses termos, é possível encontrar em Abbagnano (2007) que Análise pode ser compreendida como a "descrição ou a interpretação de uma situação ou de um objeto qualquer nos termos dos elementos mais simples pertencentes à situação ou ao objeto em questão" e "a finalidade desse processo é resolver a situação ou o objeto nos seus elementos" (p.51). Ou seja, é partir de uma estrutura grande e estudar os processos que ocorrem dentro dessa estrutura, buscando entendê-la. No mesmo dicionário, Leibniz caracteriza Combinatória como "arte combinatória" pois a entende como "a arte de formar e de ordenar os caracteres de modo que se refiram aos pensamentos, isto é, de modo que tenham entre si a mesma relação que existe entre os próprios pensamentos" (p.115).

Assim, podemos entender o significado de Análise Combinatória como um estudo descritivo ou interpretativo sobre um conjunto de coisas ou objetos, semelhantes ou não, dispostos de alguma maneira com a finalidade de investigar ou resolver situações que ocorrem neste conjunto por meio da contagem.

De acordo com Pitombeira (1986, p.21), "A 'Análise Combinatória' poderia ser chamada de 'arte de contar'". Essa frase remete à ideia de ser uma arte expressada por Leibniz no parágrafo anterior, porém esse "contar" não está relacionado ao processo de simples contagem mas, se refere à exploração dos conceitos de permutação, arranjo e combinação para resolver problemas de contagem de subconjuntos de um conjunto finito, sem enumerar seus elementos. Não é um simples contar mas, sim, um contar de acordo com uma determinada ordem e raciocínio matemático.

Segundo Morgado *et.al* (1991), a Análise Combinatória observa estruturas e relações discretas e dois tipos de problemas, que ocorrem com frequência, dizem respeito a (i) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito satisfazendo certas condições e (ii) contar e classificar estes subconjuntos. Ainda que, para alguns, esse conteúdo trate apenas dos conceitos de permutações, combinações e arranjos,

> Isso no entanto é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras

> técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória. (MORGADO *et.al*, 1991, p.1)

Portanto, relacionar a Combinatória apenas com o princípio multiplicativo, combinação, permutação e arranjo, como é comum encontrar-se em livros didáticos, é reduzir todo esse vasto campo de conhecimentos. A ideia sobre estruturas e relações discretas nos leva à área onde está situada a Análise Combinatória, a Matemática Discreta.

Ao buscar na literatura, foram encontradas diferentes publicações nacionais e internacionais sobre a Matemática Discreta e, por mais que não exista uma definição oficial, é preciso reconhecer que esse é um campo importante da matemática com muitas aplicações. Hart et al. (2017) descrevem a Matemática Discreta como um ramo jovem da matemática sem uma definição consensual, porém com raízes antigas e problemas emblemáticos.

Comumente a Matemática Discreta é considerada a matemática da computação por conta de sua particularidade em se adequar nas aplicações que envolvem tecnologia e computadores. Além disso, constantemente a Matemática Discreta é contrastada com a Matemática Contínua encontrada no cálculo. Esses contrastes mostram a riqueza da Matemática como campo de pesquisa.

Para uma possível definição para a Matemática Discreta tomamos a ideia de Hart e Martin (2018, p.4, tradução nossa) de que “é uma coleção de conceitos e métodos matemáticos que nos ajudam a resolver problemas que envolvem um número contável (frequentemente finito) de elementos ou processos e conexões entre eles”. Alguns exemplos de problemas que podem ser investigados a partir da Matemática Discreta são:

> Como você pode evitar conflitos ao agendar reuniões, enviar produtos químicos perigosos ou atribuir frequências a estações de rádio? Como você pode agendar um projeto para o menor tempo de conclusão quando ele consiste em vários subprojetos interconectados? Como você pode decidir de forma justa entre as alternativas concorrentes, escolher os candidatos que se candidatam às eleições? Como você pode dividir ou distribuir objetos de maneira justa, como sedes de um congresso ou propriedades em uma herança? Como você pode garantir precisão, segurança e eficiência em transações digitais, como transferência de arquivos, compras online ou publicação em redes sociais? Quantos números de identificação pessoal (PINs), endereços IP ou pizzas diferentes são possíveis? Como você pode modelar e analisar processos de mudança sequencial, como crescimento anual da população, mudança mensal na dívida do cartão de crédito ou dosagem periódica de medicamentos? (HART; MARTIN, 2018, p.4, tradução nossa).

Diante dos exemplos expressados acima, é percebido que a Matemática Discreta apresenta conteúdos importantes para aplicações da matemática escolar, como a combinatória e o raciocínio combinatório, já mencionados, recursão e pensamento recursivo, tomadas de decisão corretas, entre outros. Esses conteúdos estão presentes nos currículos, porém de forma implícita e sem uma conexão entre os assuntos. Concordamos com Fonseca, Figueroa e Monteiro (2020), de que essa falta de conexões pode ser considerada como obstáculos epistemológicos para o ensino e a aprendizagem e dificuldade dos alunos em reconhecer a Matemática Discreta em situações de seu cotidiano.

Segundo DeBellis e Rosenstein (2004), os Princípios e Padrões para Matemática Escolar[6], publicados pelo NCTM em 2000, destacam três áreas da Matemática Discreta como áreas que deveriam ser abordadas em todos os anos escolares. São essas áreas: combinatória, iteração e recursão e grafos.

Sobre essas três áreas destacadas Eric W. Hart (2009), em seu artigo *Discrete Math for All*, descreve a importância delas para o ensino de matemática mostrando que a Combinatória, a matemática da listagem e contagem sistemática, tanto pode ser utilizada para resolver problemas como determinar o número de ordens diferentes que pessoas podem ser escolhidas para alguma função, como também pode contar o número de senhas diferentes de um computador. A iteração e recursão pode resolver problemas relacionados ao crescimento populacional de uma cidade ou de dinheiro ano a ano. Por fim, o estudo dos grafos, segundo Rosenstein (2018), permite que os alunos discutam e resolvam uma variedade de problemas modernos envolvendo redes - como rotas eficientes de caminhões de entrega. Além disso, esse tópico introduz o importante tópico de algoritmos modernos, como o de GPS que pode gerar uma rota eficiente de A para B. O autor ainda salienta que a Matemática Discreta é muito útil para trabalhar a resolução de problemas em sala de aula.

Desse modo, é possível integrar a Matemática Discreta ao currículo como sugerido pelos Standards (2000), pois ela pode estar relacionada a outros padrões como a geometria, álgebra e números e operações.

Essas ideias embasam pesquisas como a de Lehmann (2021) que trabalhou o tópico sobre análise de rede com alunos de Ensino Médio, a partir do algoritmo húngaro[7], sendo este um algoritmo de otimização combinatória que na pesquisa citada foi utilizado para explorar problemas de atribuição. A análise de rede oferece aos alunos a oportunidade de entender como modelar e resolver problemas de tecnologia e engenharia. Essa pesquisa corrobora com a ideia de Hart e Martin (2018) de que o poder da Matemática discreta está na resolução de

[6] Tradução para: Principles and Standards for School Mathematics

[7] Recebeu esse nome pois foi amplamente baseado nos trabalhos anteriores de dois matemáticos húngaros : Dénes Kőnig e Jenő Egerváry. Fonte: https://stringfixer.com/pt/Hungarian_method

problemas e modelagem matemática. Por isso é preciso considerar problemas mais amplos do que focar nos tópicos que necessitam ser incluídos na Matemática Discreta.

Diferente de pesquisas internacionais (Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, 2018) que estudam a Matemática Discreta relacionada ao currículo como um todo, o tópico dessa matemática elencado, explicitamente, na BNCC (2018a) é a Combinatória. Ainda existem comentários sobre domínios discretos na seção de Números e Probabilidade, porém não está explícito como implementar a Matemática Discreta nesses assuntos.

2.2 As raízes: De onde veio a Combinatória? Um período histórico

Se tentarmos comparar o desenvolvimento da Matemática com as teorias biológicas, certamente ele seria mais compatível com a Teoria da Evolução de Darwin, ainda que muitos acreditem que a Matemática surgiu do zero absoluto como na Teoria da Geração Espontânea do século XIX. Assim como o mundo, as ciências matemáticas e seus conceitos também evoluíram conforme as necessidades humanas. Mais especificamente, o progresso da Combinatória se deu paralelamente ao desenvolvimento da Aritmética, da Álgebra e da Geometria.

Acredita-se que o desenvolvimento da Análise Combinatória está relacionado à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades (MORGADO *et. al*, 1991). Essa teoria chamou a atenção por conta do fascínio pelos jogos de azar e as maneiras de ganhar esses jogos. Por esse motivo, muitos relacionam a origem da Combinatória com os jogos, porém suas origens são ainda mais antigas e remetem à história da contagem e dos números.

Segundo Ifrah (2005), o que chamamos modernamente de "contar" objetos é destinar a cada um dos objetos um símbolo (seja palavra, gesto ou representação gráfica) correspondente a um número da sequência de número inteiros, começando pela unidade e seguindo em ordem crescente até encerrar os elementos do conjunto. "Nesta coleção assim transformada em sequência, cada um dos símbolos será, consequentemente, o número de ordem do elemento ao qual foi atribuído. E 'o número de integrantes deste conjunto' será o número de ordem do último de seus elementos" (p.44).

Junto à contagem está a noção de número. Porém na história dos números, segundo Roque (2012) é difícil escolher um ponto de partida. Pelo senso comum relacionamos os números à necessidade da contagem, relacionada a problemas como a do pastor de ovelhas que associava uma pequena pedra ou graveto com a ovelha do seu rebanho. No entanto, essa pesquisadora afirma que essa versão não é comprovada, pois as fontes são escassas e fragmentadas, e é muito difícil estudar culturas em que a prática numérica era realizada de forma oral, antes da escrita.

Com o passar do tempo e o desenvolvimento das civilizações, a forma de contar os elementos de conjuntos precisou ser atualizada por razões práticas. Contar é uma tarefa aparentemente simples quando há poucos elementos. Porém em um conjunto com muitos elementos, é preciso lançar-se mão de técnicas mais sofisticadas de contagem como, por exemplo a Análise Combinatória. Ao iniciar nossa pesquisa bibliográfica sobre os aspectos históricos da Análise Combinatória, não foi encontrada uma lista extensa de material e, a partir do levantamento de informações encontradas sobre os aspectos históricos, encontramos problemas e acontecimentos ocorridos nas civilizações que contribuíram para a criação da Análise Combinatória.

Desde as civilizações egípcia, chinesa, grega e hindu, os problemas combinatórios sempre apareceram atrelados a algum aspecto da vida daquela civilização. Um exemplo de problema hindu, encontrado em um tratado médico, versa sobre os tipos de sabor que podem ser combinados. O século XVII foi de grande avanço para a Matemática e a Combinatória teve um grande avanço com a criação da teoria das probabilidades. De acordo com Tavares e Brito (2005), os problemas originados dos jogos de azar como o de cartas, moedas e dados favoreceram o desenvolvimento da Combinatória. Bastos (2016) traz uma história sobre Antoine Gombaud (1607-1684), amigo de Blaise Pascal e um assíduo frequentador de mesas de jogos. Gombaud enviou a Pascal alguns problemas sobre jogos, para que ele examinasse. Pascal se interessou e enviou os problemas a Pierre de Fermat (1601-1665). Diz-se que a teoria das probabilidades surgiu da troca de correspondências desses dois matemáticos. Hoje, essa teoria é chamada de probabilidades finitas.

A partir daí, a Combinatória começa a ter um tratamento formalizado, pois dada a necessidade de determinar o número de possibilidades nos jogos, novas técnicas de contagem foram desenvolvidas. Assim, ao finalizar esta sessão entendemos que a Combinatória possui uma história muito além dos jogos de azar e das combinações de roupas vistas com frequência no conteúdo escolar.

2.3 O raciocínio combinatório e o ensino da Análise Combinatória

Como mencionado no início deste capítulo, a Combinatória é um ramo da Matemática que nos propicia resolver problemas em que é preciso enumerar, contar ou classificar elementos de um conjunto finito, porém sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos do conjunto como salienta Merayo (2001). Os tipos mais comuns de problemas combinatórios encontrados na Educação Básica, são referentes a Permutação, Combinação, Arranjo. Por mais que consideremos a importância a respeito dos problemas sobre Produto Cartesiano, neste trabalho daremos ênfase à apenas aos três primeiro citados.

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC), também conhecido como princípio multiplicativo, não é um tipo específico de problema combinatório e sim um procedimento de cálculo com muita importância no processo de resolução de problemas combinatórios. Assim, o PFC é definido como: "se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy." (LIMA *et.al*, 2016, p.81).

Cada tipo de problema combinatório possui particularidades que permitem sua diferenciação e modos de organizar o raciocínio combinatório. De acordo com Borba (2013), os problemas de produto cartesiano "são determinados a partir da escolha de elementos de diferentes conjuntos" (p.4). Nos problemas de arranjo a ordem de escolha dos elementos do conjunto gera possibilidades novas, nos problemas de combinação os elementos escolhidos são de um mesmo conjunto e a ordem de escolha não constitui possibilidades diferentes e, por fim, nos problemas de permutação todos os elementos do conjunto são utilizados em cada uma das possibilidades.

O ensino de Combinatória trata noções matemáticas fundamentais e trabalha processos e habilidades cognitivas essenciais para o desenvolvimento intelectual como número, conjuntos, contagem, organização de ideias, pensamento estratégico etc. Borba et al. (2014) argumentam que as situações combinatórias possuem diversas relações lógico-matemáticas, sendo, portanto, o estudo dessa parte da Matemática uma rica oportunidade para o desenvolvimento do pensamento lógico dos estudantes.

Esse pensamento lógico está diretamente ligado ao raciocínio combinatório. Borba (2010) o define como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, é preciso agrupar seus elementos, atendendo a critérios específicos (escolha ou ordenação de elementos) e assim determinar - direta ou indiretamente - o número total de agrupamentos possíveis. Portanto, o raciocínio combinatório é parte importante do raciocínio hipotético-dedutivo. Através de operações combinatórias podemos levantar hipóteses existentes para deduzir uma solução para uma situação problema.

Assim, concordamos com Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1997) que, além da importância para desenvolver as ideias da Probabilidade e a Estatística, a Combinatória é fundamental para o pensamento formal dos indivíduos, não se limitando apenas a uma parte da matemática. Ainda que, pela teoria de Inhelder y Piaget (1955), o desenvolvimento do raciocínio combinatório se dê na idade de 15 anos, visto que esse raciocínio está relacionado ao pensamento formal, algumas pesquisas mostram que nem sempre a capacidade de resolver problemas combinatórios é alcançada se não existe um ensino específico para tal e saber que alguns indivíduos podem nunca chegar a uma etapa desse pensamento (MARCHAND, 1994).

Pessoa e Borba (2009) defendem um ensino da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental de uma forma que todas as situações combinatórias possam ser trabalhadas de forma simultânea, com o objetivo de favorecer a compreensão dos alunos a respeito dos diferentes significados. A respeito dos problemas tratados com mais frequência na Educação Básica, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) amparados pela ideia de Dubois (1984) classificam os problemas combinatórios simples em três modelos diferentes: *seleção*, que está relacionada a ideia de uma amostra a partir de um conjunto de objetos, *colocação* de objetos em urnas e *partição* ou divisão de um conjunto em subconjuntos.

No modelo de seleção se considera um conjunto de m objetos distintos, geralmente, dos quais se escolhe uma amostra de n elementos, como, por exemplo: "Se quer escolher um comitê formado por três membros: presidente, tesoureiro e secretário. Para selecioná-lo, dispomos de quatro candidatos: Arturo, Basílio, Carlos e Davis. Quantos comitês diferentes se podem escolher com os quatro candidatos?" (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p.39, tradução nossa). O modelo de seleção é o que mais se aproxima dos problemas combinatórios utilizados na Escola Básica.

Apesar de não ter um conceito aparentemente complexo, a Combinatória ainda é vista como um conteúdo muito difícil de ser trabalhado tanto para alunos como para professores. Uma explicação para esse fato pode estar na abordagem baseada na valorização de definições e fórmulas em detrimento de problemas que exigem raciocínio e criatividade dos alunos. Diante dessas questões, vemos a Resolução de Problemas como uma importante ferramenta que pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório seja com alunos do Ensino Básico, com alunos da Licenciatura em Matemática ou com professores que ensinam Matemática.

O sistema cognitivo de uma pessoa é um todo organizado e complexo. Ainda, caracterizar a capacidade de um aluno, no que diz respeito a um campo conceitual matemático como a Combinatória, não nos parece uma tarefa simples, pois a natureza do conhecimento não é algo observável por completo, visto que apenas uma prova não explicita tudo que o aluno conseguiu compreender do conteúdo. Assim, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) pontuam que é preciso avaliar as estratégias dos alunos, seus argumentos e os tipos de erros que se manifestam, pois, as respostas dos alunos possuem caráter qualitativo, multidimensional e interdependente. A partir disso, entendemos que além da Resolução de Problemas, mas a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode ajudar na compreensão dos problemas combinatórios.

Mesmo dispondo de diferentes técnicas para os variados tipos de problemas, as resoluções de um problema combinatório exigem engenhosidade e compreensão da situação descrita, como apontado por MORGADO et al. (1991). Portanto, acreditamos que o modo como o professor trabalha Análise Combinatória em sala de aula está diretamente ligado à aprendizagem do aluno.

Ao lançar mão de uma metodologia que permite a participação dos alunos na construção desse assunto, o professor assume um papel secundário, o de observador e mediador, para que o estudante assuma seu papel de protagonista. É preciso considerar o cotidiano do aluno e trabalhar com problemas contextualizados de uma forma que faça sentido para quem está na posição de aprendiz. O professor precisa ter um planejamento que explicite os objetivos de cada aula, com estratégias e procedimentos selecionados para a resolução de problemas e critérios de avaliação justos.

Algo muito comum que acontece nas aulas onde as definições e as fórmulas são apresentadas pela primeira vez, são os alunos tentarem identificar, entre elas, aquela que parece mais conveniente para a permutação, ou para a combinação ou para o arranjo, sem refletir sobre o que o problema está tratando. Além desse fato, é comum a Análise Combinatória ser apresentada aos alunos como um conteúdo totalmente desconexo da Probabilidade e da Estatística.

Tanto para a Probabilidade quanto para a Estatística o espaço amostral é o protagonista, pois será a partir dele que os eventos serão analisados. Esse espaço amostral é resultado de um processo de contagem em que, muitas vezes, é realizado com os princípios da Análise Combinatória. Ou seja, ela é a base que sustenta muitos conceitos desses outros dois conteúdos da Matemática.

Em meio à pandemia do Coronavírus (SarsCov-2), foi observado o uso da Estatística de maneira recorrente na mídia, grande parte em canais de notícias. Todos os gráficos e tabelas são resultados de um processo de contagem. Um exemplo, em que podemos ver o uso explícito da Combinatória, foi a pesquisa realizada pelo Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Nessa pesquisa, Silva e Barros (2020) calcularam a possível quantidade de contágios através dos contatos dos alunos em uma sala de aula. A pesquisa foi baseada no estudo de Arroyo (2020) que analisou uma situação semelhante em escolas espanholas.

Esses exemplos também serviram de inspiração para um dos problemas utilizados nesta pesquisa, que será descrito nos capítulos seguintes.

2.4 O que dizem os documentos oficiais e alguns estudos relacionando Combinatória e os alunos da Licenciatura em Matemática

No Brasil, a Análise Combinatória é formalizada no Ensino Médio, porém a exploração desse conteúdo começa nos primeiros anos do Ensino Fundamental, pois problemas mais simples podem já familiarizar os alunos com a noção de número e os processos de contagem.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) menciona como objetos de conhecimento para o 1º ano do Ensino Fundamental os Processos de Contagem, como a contagem um a um, pareamento e comparação e agrupamento de conjuntos. Nos Standards (2000) esse tópico já aparecia distribuído pelas seções de Números e Operações relacionados a cada ano escolar da Pré-Escola (kindergarden) ao Ensino Médio (12).

Para o 4º ano do Ensino Fundamental, o objeto de conhecimento são os Problemas de Contagem e a habilidade que deverá ser desenvolvida pelos alunos é a resolução de problemas simples de contagem, determinando o número de agrupamentos possíveis ao combinar elementos de coleções diferentes, utilizando estratégias e formas de registro.

Para o ano seguinte, o 5º ano do Ensino Fundamental, os problemas de contagem são mais elaborados, pois aparecem na forma: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?” (BNCC, 2018, p.294). A habilidade a ser desenvolvida é a resolução e elaboração de problemas simples envolvendo o princípio multiplicativo, utilizando o diagrama de árvores ou tabelas.

Uma vantagem de se trabalhar com problemas combinatórios desde os anos iniciais do Ensino Fundamental é a desenvolver o raciocínio combinatório desde cedo mostrando as relações básicas que existem entre os problemas que envolvem princípio multiplicativo, combinação, arranjo e permutação "e levar os estudantes a terem contato com esta variedade de situações pode possibilitar um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório." (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p. 1352).

A única etapa dos anos finais do Ensino Fundamental em que a Combinatória é trabalhada é no 8º ano e aparece em duas unidades temáticas, Números e Probabilidade e Estatística. Nesta etapa, o objeto de conhecimento nas duas unidades é a mesma: o princípio multiplicativo da contagem.

Para o Ensino Médio, os conceitos referentes à Combinatória estão localizados na competência específica 3 que trata de utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos a fim de interpretar, construir modelos e resolver problemas em contextos diferentes, analisando os resultados e adequação das soluções propostas, para construir uma argumentação consistente, em que as duas habilidades elencadas são:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (BNCC, 2018, p.537)

Deste modo, o objetivo da BNCC é o de desenvolver o raciocínio combinatório de forma implícita através de problemas no Ensino Fundamental até avançar para os cálculos de probabilidades no Ensino Médio.

No que diz respeito a pesquisas na formação inicial de Matemática, com alunos da licenciatura, foram encontrados os trabalhos de Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira (2011, 2013), Silva (2014), Lima, R. (2015) e Holanda (2017), que discutem sobre os conhecimentos que esses alunos possuem. E os estudos de Lima, A.P (2019), a respeito de trabalhos com grupos colaborativos.

Bortoloti, Santos-Wagner e Ferreira (2011) em seu trabalho com os estudantes de Licenciatura, apresentaram os resultados parciais de uma pesquisa interinstitucional realizada em quatro universidades estaduais na Bahia. Nesse trabalho são apresentados uma análise dos erros relativos às resoluções de 41 licenciandos de um problema de Análise Combinatória. Desses 41 estudantes, 24 eram do 1º semestre (recém-saídos do Ensino Médio) e 17 alunos do

6º período (cerca de metade do curso de Matemática). A coleta de dados se deu por um teste diagnóstico contendo uma questão de Combinatória, ao analisarem as respostas do teste, as pesquisadoras observaram que, dos 41 estudantes participantes, nenhum respondeu corretamente a questão. Em 31 respostas há algum tipo de erro e 10 participantes não responderam. Da análise dos erros, as autoras destacaram que os alunos sentem dificuldade no conhecimento das fórmulas de arranjo e combinação e na aplicação da fórmula ao contexto, pois muitos não souberam utilizar o raciocínio combinatório para resolver a questão.

Em outro estudo, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) discutem as resoluções de 198 estudantes de quatro universidades baianas relacionadas à Análise Combinatória. Esse é o estudo final que teve como resultados parciais o trabalho de 2011 supracitado. A pesquisa foi realizada com 198 estudantes, sendo 132 do 3º semestre e 66 do 8º semestre. A elaboração do segundo teste diagnóstico também foi diferente, pois foi levada em consideração uma abordagem que subsidiou a construção das questões.

Além do teste foi realizado um questionário e, ao serem perguntados sobre suas escolas de origem, a maioria dos estudantes havia sido alunos da rede pública e quase 60% dos estudantes responderam que escolheram Licenciatura em Matemática por afinidade com a matemática. Porém apenas 23 dos 198 alunos pensam em ser professores. Analisando esse material percebeu-se que não havia muita diferença entre o índice de erros e acertos dos alunos de semestres diferentes. Ambos, apresentavam cerca de 40% de erros e um pouco mais de 20% deles não responderam.

As principais dificuldades apresentadas pelos alunos nessa pesquisa foram a interpretação e resolução de um problema de contagem utilizando permutação, combinação ou arranjo. Ainda houve alguns erros como aplicação equivocada de fórmulas de arranjo e combinação de acordo com o contexto do problema ou na própria escrita das fórmulas. Segundo as pesquisadoras, muitos alunos relataram não haver estudado Análise Combinatória no Ensino Médio ou a estudaram de uma forma muito mecânica. Essa forma não garante a compreensão ou a construção dos conceitos envolvidos pela Combinatória.

Em sua dissertação, Silva (2014) trabalha um estudo investigativo junto a três alunos da Licenciatura e participantes do Programa Institucional de Iniciação à Docência (Pibid), que visava analisar diferentes conhecimentos dos licenciandos ao discutir, elaborar, aplicar e validar um jogo envolvendo Análise Combinatória. A pesquisa contou com 12 encontros, nos quais foi percebido que os licenciandos não tinham muitas lembranças do ensino de Combinatória na educação básica, e os conteúdos recordados no ensino superior eram permutação simples, arranjo simples, combinação simples e fatorial de um número. Durante o início da pesquisa, os alunos deixaram nítido que o conhecimento que possuíam sobre Análise Combinatória era da forma tradicional e demonstravam preocupações sobre como trabalhar tal conteúdo.

Segundo esse pesquisador, o trabalho permitiu aos futuros professores contemplar a Combinatória em seus contextos sociais e a refletir sobre suas práticas docentes na busca por metodologias que possibilitassem a construção de significados para os alunos. “Mesmo sendo considerado por eles como um conteúdo difícil, o jogo permitiu a participação de outros licenciandos e o erro não foi visto como punição, mas como uma oportunidade de discussão, aprendizado e desenvolvimento de estratégias.” (p.109). Essa pesquisa se encerra identificando a necessidade de realização de investigações sobre conteúdos matemáticos considerados difíceis de serem aprendidos e ensinados.

Lima, R. (2015) em seu trabalho tinha por objetivo analisar os conhecimentos mobilizados por alunos de Licenciatura em Matemática ao resolverem problemas de Combinatória. Foi proposto um curso de extensão para alunos ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática estruturado em oito sessões compostas por diferentes tipos de situações-problema de Combinatória como apresentam Pessoa e Borba (2009). Os instrumentos utilizados para coleta de dados dos 31 alunos participantes do curso foram gravações de áudio e vídeo.

Os principais problemas apresentados na pesquisa de Lima, R. (2015) são de questões conceituais de Combinatória. Pois em vários momentos os alunos se equivocaram ao tentar classificar problemas pois não conheciam as propriedades de cada situação combinatória, além da mobilização de fórmulas inadequadas. concordamos com o autor que entende que a aprendizagem de um conceito é um processo e não apenas uma etapa que o sujeito atinge. A pesquisa se encerra com a necessidade dos licenciandos vivenciarem novas situações, perpassando momentos de reflexão, para que tenham condições de superar tais dificuldades. O pesquisador ainda conclui que:

> Os licenciandos realizaram com frequência a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem nas situações de arranjo, permutação e produto cartesiano, independentemente da quantidade de elementos dos problemas. Dessa maneira, eles dividiam o problema em etapas, identificavam as possibilidades de cada uma e aplicavam o PFC para a obtenção da resposta. Entretanto, nos problemas de combinação essa estratégia não se mostrou eficiente, já que os alunos recorriam a outras estratégias, como a listagem de possibilidades e a utilização de fórmulas combinatórias. (LIMA, R., 2015, p.191)

A pesquisa de Holanda (2017), teve como objetivo analisar como são mobilizados conhecimentos docentes em uma disciplina voltada à Combinatória em um curso de Licenciatura em Matemática. Para isso, foram observadas 15 aulas da disciplina “Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e práticas”, do Centro Acadêmico do Agreste da UFPE e realizada uma entrevista semiestruturada com a professora que lecionou a disciplina. A pesquisa teve seu foco de investigação no trabalho da professora formadora, como esta conduziu as situações de aprendizado em sala de aula e como eram abordados por ela, os conhecimentos docentes.

Holanda (2017) ainda identificou relações importantes entre os conhecimentos docentes, evidenciando a possibilidade de um trabalho que articule conhecimentos de conteúdo com conhecimentos pedagógicos. Com a pesquisa percebe-se a necessidade de disciplinas, na formação inicial de professores de Matemática, com carga horária suficiente, que discutam a construção de conhecimentos necessários para o trabalho do professor, pensando de um modo que elas se tornem mais articuladas com a prática docente escolar, que não seja suficiente apenas estudar sobre Análise Combinatória, mas também sobre como ensinar Análise Combinatória.

A pesquisadora expõe que todas as atividades propostas possibilitavam a discussão de vários conhecimentos docentes e a mediação em sala de aula, pela professora formadora, propunha garantir essa articulação entre conhecimentos pedagógicos e de conteúdo, visto que as atividades em sala de aula eram compostas por resolução de problemas, elaboração de questões, análise de questões, entrevistas, debates, análise de erros, dentre outras – atividades que são responsabilidade do professor em atuação.

O trabalho de Lima, A.P (2019) teve como objetivo geral analisar como as ações colaborativas presentes nas vivências do grupo de professores de Matemática de um colégio de aplicação podem promover a reflexão e fortalecer diferentes conhecimentos docentes referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática, em particular da Combinatória, na Educação Básica. Ao longo do estudo acompanhamos a pesquisadora na busca por explicações sobre o modo como, a partir de determinados contextos, o fortalecimento do conhecimento dos docentes favorece o desenvolvimento da aprendizagem destes.

Na investigação dos documentos institucionais foram identificados incentivos a ações colaborativas como protagonismo, confiança, objetivos em comum, negociação, diálogo, mutualidade. Essas ações remetem às dimensões estruturantes da prática de uma comunidade. De acordo com essa pesquisadora, essa estrutura evidencia como é incentivado um protagonismo entre professores.

> Assim, ações colaborativas incentivadas em documentos institucionais, de uma CoP puderam ser observadas na prática dos professores – em reuniões de Pleno, de Conselhos de Classe, em reuniões das Áreas de Ensino. Mesmo em momentos que não puderam ser observados, essas ações estão presentes no discurso dos professores de Matemática quando estes comentarem sobre seus protagonismos em diferentes instâncias da CoP/CAp-UFPE e como essas ações se refletem em seus planejamentos, reflexões e práticas. (LIMA, A.P., 2019, p.198)

Lima, A.P (2019), ainda justifica que o fortalecimento desses conhecimentos aparece de forma mais evidente nas observações realizadas nas aulas de Combinatória. A partir das entrevistas, a pesquisadora concluiu que o protagonismo e o diálogo influenciam no modo como os professores desenvolvem seu planejamento e na forma de conduzir suas aulas.

Assim, a partir dos resultados das pesquisas, vemos que os estudantes de Licenciaturas em Matemática apresentam tantas dificuldades com a Combinatória como os estudantes da Educação Básica. Desse modo podemos reparar que há possíveis lacunas na formação docente e isso se reflete no ensino de Combinatória na Educação Básica. Nesta pesquisa, buscamos o ambiente da formação inicial para investigar como a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode ajudar futuros professores a refletir sobre sua prática a partir de problemas combinatórios. Nas pesquisas citadas observamos que o ponto de partida para o trabalho do professor é a formação inicial, lugar onde o aluno começa a se constituir como professor e onde discussões sobre o ensino deveriam ser encontradas.

Nos próximos capítulos, ou melhor, nas próximas árvores, esse beija-flor irá mostrar outros aspectos desta pesquisa, como a importância do bando para a aprendizagem, ou em linguagem acadêmica, a importância da Comunidade de Prática e a Resolução de Problemas.

3 IPÊ AMARELO

Em busca de mais respostas sobre seus questionamentos, o beija-flor decidiu voar para uma árvore. Esta não era uma árvore qualquer, era um ipê com uma copa cheia com grandes flores amarelas, com raízes fortes e com muitos galhos e ramos. Uma curiosidade sobre o Ipê é que ele floresce no inverno, em que todas as folhas caem da árvore e ficam apenas suas grandiosas flores. Essa árvore foi escolhida para representar, neste trabalho, as ideias da Comunidade de Prática e sua base, a Teoria Social da Aprendizagem. E ali, o beija-flor se encontrou com muitos outros passarinhos, jovens e experientes, com lindos cantos pelos galhos. Entre as flores e galhos, o beija-flor se aventurou pela Teoria Social da Aprendizagem para entender como funcionam as Comunidades de Prática (CoP), além de entender a negociação de significados que será tratada na análise dos dados produzidos.

3.1 A Teoria Social da Aprendizagem: aprendizagem como dimensão da prática social

No final do século XX, o cenário do ensino de Matemática mudou seus pontos principais, levando, agora, em consideração os aspectos sociais nos processos de aprendizagem. O que antes eram perguntas do tipo; **o que ensinar?** se transformaram em **por que, para que e para quem ensinar?** (FIORENTINI; LORENZATO, 2009). Esse contexto proporcionou o desenvolvimento de teorias de aprendizagem, como a de Lave e Wenger (1991) e, posteriormente, Wenger (1998).

De acordo com Lave e Wenger (1991) a aprendizagem é uma prática inerente a fatores sociais, culturais e contextuais. Ou seja, a aprendizagem está intimamente ligada à cultura e se desenvolve a partir de uma prática social e não apenas como uma transmissão de conhecimentos. Esses autores não objetivavam substituir as teorias de aprendizagem cognitivistas já existentes, porém sistematizaram a teoria de aprendizagem situada, a partir de estudos desenvolvidos em contextos não escolares (LAVE, 1988).

O enfoque teórico, base para a teoria de aprendizagem situada, é a interpretação de que a zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky assume uma perspectiva social, visto que essa zona é uma distância entre as ações cotidianas das pessoas e as novas formas de atividade social, historicamente construídas e geradas coletivamente (LAVE; WENGER, 1991).

Porém é importante destacar que a essência da teoria da aprendizagem como dimensão da prática social não está em um contexto de ensino formal, com objetivos e ações centradas no processo de ensino. Essa teoria foi elaborada a partir das pesquisas etnográficas de Jean Lave quando, em uma investigação sobre alfaiates, a pesquisadora buscou ver e entender como os aprendizes aprendem a ser alfaiates – se eles não estão sendo ensinados por professores como alunos?" (LAVE, 2015, p. 39). Sobre a teoria da aprendizagem situada, essa pesquisadora nos diz que:

> central na teoria da prática social é a ideia de que toda atividade (o que seguramente inclui a aprendizagem) é situada nas – feita de, é parte das – relações entre pessoas, contextos e práticas. Isso nos levou às noções de que a aprendizagem é situada em complexas comunidades de práticas (culturais e mutantes, como parte do processo histórico que constitui a vida social). As coisas são constituídas por, e constituídas como, as suas relações; e assim, produção cultural é aprendizagem que é produção cultural. (p.40)

Baseados nessas ideias, Lave e Wenger (1991, p. 98, tradução nossa) afirmam que a aprendizagem está relacionada à participação de indivíduos em um "sistema de atividades acerca do qual os participantes partilham compreensões sobre o que fazem e sobre o que isso significa nas suas vidas e comunidades". Segundo os autores, essas comunidades são denominadas Comunidades de Prática, onde se referem a um conjunto de relações entre pessoas, atividades e o mundo. Desse modo, para reconhecermos uma Comunidade de Prática precisamos saber e conhecer as práticas existentes compartilhadas por esse grupo de pessoas engajadas em um objetivo comum. A ideia de Comunidade de Prática foi aprofundada por Wenger (1998) a partir da sistematização da Teoria Social da Aprendizagem (TSA).

Em seu livro, Communities of practice: learning, meaning and identity[8] (2001), Wenger enfatiza que a teoria proposta não substitui outras teorias, mas constitui uma análise coerente de um conjunto de princípios e recomendações para compreender e possibilitar a aprendizagem. Ainda, o autor cita que o principal interesse dessa teoria está na aprendizagem como participação social e, como consequência, os componentes que caracterizam essa participação social devem integrar a TSA. Esses componentes são:

[8] Neste trabalho estamos utilizando a versão traduzida do espanhol, lançada em 2001, porém o ano de lançamento do livro foi em 1998.

Figura 5 - Componentes de uma teoria social da aprendizagem

Fonte: WENGER (2001, p.23, tradução nossa)

Os quatro componentes fundamentam a análise da noção de aprendizagem apresentada pelo autor:

> 1) significado: uma forma de falar sobre nossa capacidade (de mudar) – individualmente ou coletivamente – de experimentar nossa vida e o mundo como algo significativo.
> 2) prática: uma forma de falar sobre os recursos históricos e sociais compartilhados, sistemas e perspectivas que possam sustentar o engajamento mútuo na ação.
> 3) comunidade: uma forma de falar sobre as configurações sociais em que nossos empreendimentos se definem como buscas valiosas e nossa participação é reconhecida como competência.
> 4) identidade: uma forma de falar sobre como a aprendizagem muda quem somos e cria histórias pessoais de transformação no contexto de nossas comunidades (WENGER, 2001, p. 22, tradução nossa).

Wenger (2001) explica que esses elementos estão profundamente interconectados e se definem mutualmente. Essa conexão é tão intensa que qualquer um dos quatro elementos representados nas elipses azul-escuro, podem se tornar o tema de principal interesse, no lugar da aprendizagem e, ainda assim, a figura faria sentido.

Como alguns questionamentos dessa pesquisa são: Como podemos pensar sobre a aprendizagem de futuros professores que ensinam matemática? Ainda mais, específico, como pensar o raciocínio combinatório dos futuros professores? Assim, o foco centrou-se no processo de aprendizagem que ocorreu em uma CoP constituída por alunos da Licenciatura em Matemática. Portanto, a aprendizagem foi mantida como na figura.

A partir dos encontros que foram desenvolvidos para a produção de dados, acreditamos que a TSA fornece elementos para que possamos entender as relações de aprendizagem que se estabelecem entre os futuros professores e a pesquisadora ao negociarem significados sobre a Combinatória e que, por consequência, podem ajudar esses futuros professores a negociar significados em suas futuras aulas. Desse modo, acreditamos que a TSA possibilita compreender como ocorre a aprendizagem em ambientes formais de ensino, a partir do entendimento das complexas relações que se estabelecem entre os sujeitos e as diferentes formas de participação nesse processo.

3.2 O processo de aprendizagem em Comunidades de Prática

A ideia principal da TSA é que o processo de aprendizagem é inerente ao contexto social em que é desenvolvido, ou seja, mesmo a aprendizagem ocorrendo de formas diferentes, pois é característico de cada contexto social, ainda assim o processo irá acontecer pois é decorrente da negociação de significados que acontece entre os sujeitos em Comunidades de Prática.

Wenger, McDermott e Snyder (2002) dizem que as CoP são grupos de pessoas que compartilham uma preocupação, um conjunto de problemas, ou uma paixão sobre um tópico que aprofundam seus conhecimentos e competências nessa área interagindo de forma contínua. Nesse movimento, as pessoas trabalham juntas, trocando ideias sobre seus interesses e expõem suas opiniões baseadas em suas vivências. Ao trabalhar em conjunto, os membros da CoP ponderam ideias comuns, exploram novas, criam e desenvolvem novos conceitos. Assim, acumulam e compartilham ideias e perspectivas ao mesmo tempo.

É preciso frisar que, nem tudo chamado de comunidade é uma comunidade de prática (WENGER, 2015). Por exemplo, um bairro pode ser chamado de comunidade, mas não é uma comunidade de prática. Para que exista uma CoP são necessários três elementos fundamentais: *domínio*, *comunidade* e *prática*.

O domínio de conhecimento é o que define um conjunto de questões que será trabalhado pela comunidade. Ou seja, cria um senso de identidade e legitima a comunidade, afirmando seus objetivos e valoriza os membros (WENGER, MCDERMOTT, SNYDER, 2002). O domínio é uma competência coletiva valorizada dentro da CoP, onde os membros podem aprender uns com os outros. Para nossa investigação, o domínio é a resolução de problemas combinatórios. Esse domínio é a base que dá coerência a Comunidade de Prática e a interação entre as pessoas da comunidade estava relacionada às estruturas sociais que incentivam a aprendizagem (WENGER, 2001).

Uma comunidade é um grupo de pessoas que se preocupam com tal domínio. Wenger (2015) ainda afirma que, na busca de seu interesse no domínio, os membros de uma CoP se envolvem em atividades e discussões conjuntas, ajudam uns aos outros e compartilham informações, construindo relacionamentos que permitem aprender uns com os outros. Essa construção e interação é essencial para a manutenção da Comunidade. Isso não significando

> [...] que eles (os membros) sejam iguais ou constituam um agrupamento homogêneo. Cada um tem, por um lado, sua própria história, suas múltiplas identidades; seus próprios saberes e motivações pessoais para participar dessa comunidade; e de outro, um forte relacionamento interpessoal com seus pares, embora ocorram com frequência [...] situações de conflito, colaboração, tensão, autoritarismo, sinergia positiva, sucesso, fracasso e amizade (FIORENTINI, 2009, p. 240).

Com o tempo, os diferentes membros desenvolvem uma perspectiva única sobre seu tópico bem como um corpo de conhecimento, práticas e abordagens comuns. Eles podem até desenvolver um senso comum de identidade (WENGER, MCDERMOTT, SNYDER, 2002). Nesta pesquisa, a comunidade foi formada pelos futuros professores, alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual de São Paulo, que também estavam como bolsistas do Programa Residência Pedagógica e pela pesquisadora. Esse grupo será descrito posteriormente nos próximos capítulos. Ainda que partilhassem de alguma semelhança, cada membro possui expectativas diferentes, conhecimentos e vivências distintos que se complementavam aos processos de negociação de significados.

O conceito de prática significa fazer algo, mas não apenas realizar uma ação para si ou em si mesmo, é fazer algo em um contexto histórico e social. Nesse sentido, a prática é sempre uma prática social (WENGER, 2001). Há três dimensões importantes entre os termos comunidade, prática e domínio, na qual a prática é fonte de coerência de uma CoP. São eles: o engajamento mútuo, o empreendimento articulado e o repertório compartilhado. Acreditamos ainda que a prática é "um processo de aprendizagem que contempla o conhecimento específico desenvolvido, mantido e partilhado pelos membros de uma Comunidade de Prática, e que é próprio dessa comunidade" (GARCIA, 2014, p. 31). Nesse sentido, a prática é a forma como entendemos e produzimos significados às coisas que fazemos.

No âmbito desta pesquisa, alguns membros da CoP já haviam tido experiências com a docência à época do último ano da Licenciatura em Matemática e como já citado, todos fazem parte de Programa Residência Pedagógica, um programa de iniciação à docência. Suas participações nessas outras comunidades também fizeram com que algumas discussões desenvolvidas nos encontros desencadeassem novas ideias e pontos de vista compartilhados sobre um questionamento que fosse comum a todos. Alguns pontos também foram contrastados, visto a experiência que cada um já havia vivido.

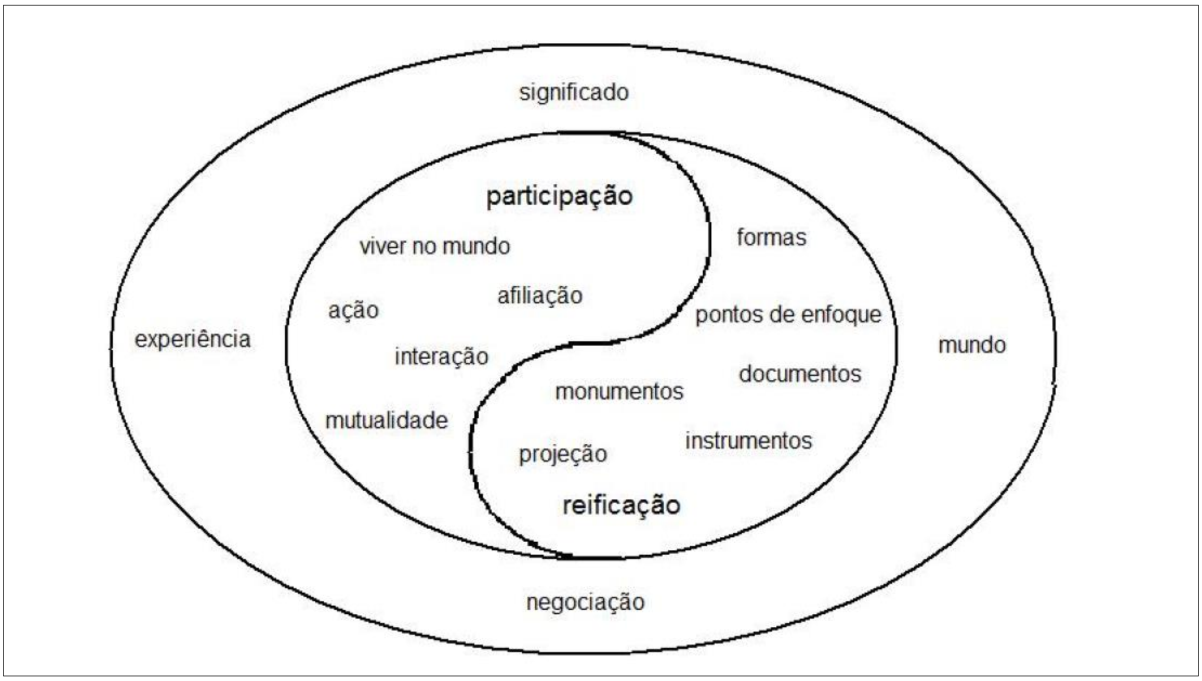
Ainda, entendemos que uma CoP é um ambiente democrático, onde as ideias dos indivíduos podem ser ouvidas, discutidas, analisadas e respeitadas. Para além desta pesquisa, acreditamos que a experiência desses futuros professores em uma Comunidade de Prática e com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode influenciar sua futura prática docente.

3.3 A negociação de significados

Para entender o que é negociação de significados, precisamos saber como a ideia de significado está posta. Wenger (2001, p.76) destaca que o significado que o interessa é o das experiências e não o significado encontrado nos dicionários. Segundo Wenger (2001), a participação no mundo é um processo de negociação de significado. A experiência do significado não acontece do nada, muito menos é uma atividade mecânica. Por entender a prática, como uma prática social, nossos compromissos com essa prática possuem pautas. No caso, produzir essas pautas já dão origem a uma experiência de significados. Nas atividades cotidianas, por exemplo, fazemos e dissemos coisas que podem estar relacionadas a outras que já fizemos ou dizemos no passado. E assim, sempre produzimos uma nova situação, uma nova experiência.

De acordo com Cyrino e Caldeira (2011), amparados por Wenger (1998), participação e reificação não podem ser consideradas como coisas opostas, nem separadas, uma deve complementar a outra de modo que suas respectivas limitações sejam compensadas.

Figura 6 - A dualidade da participação e da reificação



Fonte: CYRINO; CALDEIRA (2011, p.381)

Wenger (2001) inicia o conceito de participação da forma usual, aquela conhecida nos dicionários, que remete a fazer parte ou compartilhar com outras pessoas alguma atividade, iniciativa, etc. Porém, o autor analisa a participação para descrever a experiência social de viver no mundo e o envolvimento ativo de um indivíduo em sua comunidade. A participação, nesse sentido, possui os lados pessoal e social, “é um processo bastante complexo pois combina fazer, falar, sentir e pertencer. Envolve todo o lado pessoal, incluindo corpo, mente, emoções e relações sociais” (WENGER, 2001, p. 80).

Temos, a partir das ideias de Wenger, que participação não é sinônimo de colaboração, pois pode envolver relações tanto harmoniosas como conflitantes, íntimas ou formais, competitivas ou cooperativas. Ainda sabemos que as comunidades possuem uma forte influência em nossas experiências e nós, também, influenciamos a comunidade.

A reificação, que em algumas traduções é chamada coisificação, não é um termo muito conhecido como participação. Reificar remete a qualquer processo em que uma realidade subjetiva passa a ser tratada como um objeto concreto. O conceito de reificação é usado por Wenger (2001) como uma maneira de dar forma às nossas experiências, por meio de objetos que as solidifiquem. Com isso, uma ideia toma forma, ou reifica, e essa forma pode ser usada como foco para a negociação do significado.

Diante de tais apontamentos, nesta pesquisa assumimos que os dados produzidos pelos participantes, manifestos nas linguagens escrita e oral bem como ações fundamentadas em elementos negociados numa CoP são formas de reificação do que foi negociado nela.

4 FLAMBOYANT VERMELHO

A próxima árvore que chamou a atenção do beija-flor com suas grandes e chamativas flores foi o Flamboyant Vermelho. Essa árvore foi escolhida para representar a Resolução de Problemas. Nesta parte pretendemos abordar o contexto histórico da Resolução de Problemas (RP), destacando fatos marcantes que culminaram no estado atual da RP na Educação Matemática. Em seguida, apresentaremos a concepção do GTERP sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como uma abordagem significativa para o trabalho em sala de aula e as adaptações que precisaram ser feitas por conta do período remoto.

4.1 O que é um problema?

Normalmente, a Matemática é vista como uma ciência exata, em que seus resultados são infalíveis e estruturados precisamente de forma simbólica e abstrata, importante para a resolução de problemas de outras ciências e dela mesmo ou de problemas do cotidiano. Mas tudo isso sempre deixando claros o rigor e a exatidão, como se tudo funcionasse perfeitamente. Porém, voltando ao processo de construção do conhecimento matemático, percebemos um dinamismo caracterizado por momentos em que nem tudo deu certo pois os resultados eram obtidos de forma experimental e indutivamente.

Na História da Matemática há vários exemplos de resultados de problemas alcançados por meio da persistência e da criatividade de matemáticos. Ou seja, a Matemática não é infalível ou inquestionável, não está cristalizada. Ela é fluida, dinâmica e movida a problemas. É, a partir das críticas e dúvidas sobre conhecimentos anteriores, que se buscam novos problemas para solucionar os antigos ou novos que surgem. Ainda hoje há problemas matemáticos sem solução e pesquisadores, a fim de resolvê-los, experimentam diversas formas de resolução.

Em outro momento, se pararmos para analisar, resolver problemas é algo natural em nossas vidas. Constantemente nos deparamos com problemas que precisam de solução, alguns simples e outros tão complexos que levariam décadas para serem resolvidos. O que é preciso pontuar é que problemas são naturais no nosso cotidiano e muitos podem ser resolvidos matematicamente, mesmo que essa matemática não apareça de forma tão explícita. Um exemplo, simples e que envolve a Combinatória, é a formação dos quadros de horários dos professores de uma escola. A coordenadora ou diretora responsável por elaborar esse quadro precisa tomar decisões para combinar os horários disponíveis na semana, com os horários dos professores, sem prejuízos para alunos e docentes.

Ao procurarmos, no dicionário de filosofia Abbagnano (2007) encontramos que um problema pode ser qualquer situação que inclua a possibilidade de uma alternativa. Esse termo foi elaborado pela Matemática Antiga para se distinguir da noção de teorema. O problema era visto como uma proposição que parte de certas condições conhecidas para buscar alguma coisa desconhecida. A partir dessa ideia, Kant entendia que problemas eram proposições demonstráveis que exigiam provas ou expressavam uma ação cuja execução não é imediatamente certa (ABBAGNANO, 2007).

Ao voltarmos para a Educação Matemática, autores como Echeverría e Pozo (1998, p. 15) entendem o problema como sendo “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução” corroborando com Onuchic e Allevato (2005, p. 221), que entendem problema como “[...] tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer”. Acreditamos que problema é tudo que desafia o aluno, todo “exercício” que ele não sabe solucionar logo de saída e precisa refletir sobre aquilo para tomar alguma decisão e, principalmente, que haja seu interesse em encontrar sua solução, pois como vemos, se não me despertasse o interesse, então não seria um problema para mim. A respeito do que configura um problema, Serrazina (2017) traz a ideia de Krulik e Rudnik (1993 *apud* SERRAZINA, 2017) de que um problema é uma situação na qual uma pessoa ou um grupo se relacionam trocando ideias a fim de buscar uma solução para a qual não há uma resposta pronta.

Krulik e Rudnik (1993) ainda especificam o que, para eles, é questão, exercício e problema. A questão é uma situação em que é preciso utilizar-se conhecimentos prévios, pois recorrem à memória. O exercício é uma situação de treino, de praticar o que foi aprendido e o problema é a situação em que é necessário raciocinar e sintetizar o que foi aprendido. Com efeito, uma mesma situação pode configurar-se como um exercício para uns e como um problema para outros. Outrossim, um problema, numa fase de aprendizagem pode vir a ser um exercício posteriormente.

De maneira geral, um problema precisa estimular os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios para construir novos conhecimentos. Esse processo reflexivo de pensar sobre a situação problemática precisa motivar o aluno a buscar métodos distintos para chegar a uma solução que o leve a consolidar os conhecimentos construídos por ele. Esse movimento de investigação sobre o problema precisa ser motivador e interessante para o aluno e não se apresentar como um desafio impossível. O GTERP, como um grupo de estudo sobre RP, corrobora com Serrazina (2017, p.60) quando diz que um bom problema precisa:

> (i) Ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática;
> (ii) Ser adequado, permitindo relacionar os conhecimentos que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas;
> (iii) Ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível.

Levando-se em conta o conhecimento matemático e a resolução de problemas, nas aulas de Matemática na Escola Básica, verificam-se na BNCC (2018a) que os alunos do Ensino Fundamental devem desenvolver a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, obter soluções e interpretá-las segundo o contexto de cada situação. No mesmo documento, essa ideia é reforçada por uma competência descrita no módulo sobre o Ensino Médio, “utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas” (BRASIL, 2018, p.533).

4.2 Um breve contexto histórico

Na realidade escolar são diversas as metodologias que os professores utilizam na tentativa de melhorar a performance de seus alunos em sala de aula. Porém, muitas vezes, uma metodologia utilizada pelo professor já se encontra em estágio muito diferente do que quando fora concebida e munida de uma série de contribuições feitas por outros no decorrer do tempo. A Resolução de Problemas, que sequer era considerada uma metodologia anos atrás, de igual modo perpassou por uma série de mudanças.

De acordo com Onuchic (1999), a RP caracterizada na Educação Matemática tende a ser contrária à caracterização de um conjunto de fatos, procedimentos algorítmicos ou conhecimento a ser obtido por rotina ou exercício mental. De fato, essa tendencia visa o trabalho a partir da participação ativa dos estudantes. Morais e Onuchic (2014) abordam três marcos importantes: a negação do ensino de Matemática por repetição, o ensino de Matemática com compreensão e o ensino de Matemática influenciado pelo Movimento da

Matemática Moderna (MMM). Essas autoras destacam os trabalhos de Edward Lee Thorndike, Willian Brownell e George Polya para a construção de uma base teórica da Resolução de Problemas.

O ensino de Matemática a partir da teoria conexionista, como sugerida por Thorndike, possuía um sentido diferente da Teoria da Disciplina Mental (TDM)[9], em que a mente era entendida como uma cadeia hierárquica de faculdades e capacidades, onde elas precisavam de treinamento constante para se desenvolver. Ou seja, um processo em que o aluno memorizava os fatos trabalhados pelo professor e os repetia. O Conexionismo visa à aprendizagem como uma conexão, vínculo entre um fato mental e outro, onde o aluno pode escolher que caminhos seguir para "pensar, sentir e agir, por meio de conexões, ao se deparar com situações reais presentes fora do cotidiano escolar" (REZENDE; SANTOS, 2017, p. 608). Segundo Rezende e Santos (2017), Thorndike acreditava que o aluno deveria resolver problemas na escola com a intenção de resolver problemas que encontraria no cotidiano e, para isso, era preciso prestar atenção à formação de hábitos e ao desenvolvimento do raciocínio e do interesse do aluno. A teoria era composta por três passos: lei do efeito; lei da prontidão e lei do exercício ou repetição. Mesmo com uma teoria diferente da TDM, a lei do exercício ou repetição sobressaiu-se como algo que deveria ser repensado, considerando a importância do processo de ensino-aprendizagem e não apenas o resultado dos exercícios.

Ainda que a negação do ensino de Matemática de forma reprodutiva e sem compreensão fosse uma realidade, ainda havia muito a ser estudado. Essa condição, encontrada na teoria de Thorndike, impulsionou os estudos de Brownell. Esse pesquisador, sustentado pela "teoria significativa", entendeu que os alunos precisavam compreender o que estavam produzindo nas aulas de matemática, visto que ainda treinavam técnicas operatórias utilizadas na resolução de problemas sem aprender algum conteúdo novo. Esse foi um início para se pensar a resolução de problemas como um meio para aprender matemática. (ONUCIHC, 1999).

A partir de Pólya (2004) foi possível ver-se uma teorização da Resolução de Problemas. Através de seu trabalho em *How to Solve it*, esse matemático tornou-se referência no ensino sobre RP. Em seu livro, Pólya apresenta uma sequência de quatro fases para um resolvedor de problemas executar durante qualquer resolução: (1) compreender o problema; (2) estabelecer um plano; (3) executar o plano e (4) examinar a solução obtida frente ao problema. Ao seguir essas fases os leitores iam aprendendo habilidades para resolver

---

[9] "A Teoria da Disciplina Mental foi desenvolvida pelo psicólogo alemão Christian Wolff no ano de 1740 e, desde então, vigorava como teoria psicológica" (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p.18)

problemas matemáticos. Ainda que apresentasse muitas dicas, o livro não possuía um caráter de manual de instruções, com sequências a serem seguidas.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) surgiu nos Estados Unidos e na Europa ao final da década de 1950 e, durante a década de 1960 chegou ao Brasil com a finalidade de renovação pedagógica do ensino, objetivando adequar a matemática escolar aos avanços científicos e tecnológicos que despontavam em nível mundial em meados do século XX (SANTOS; PINTO, 2011). Assim, o ensino de Matemática estava baseado em estruturas lógicas, algébricas, enfatizando a teoria dos conjuntos. Os símbolos e a linguagem matemática eram bastante trabalhados, porém os alunos não conseguiam compreendê-los muito bem, não conseguiam conectar a matemática da escola com a vida real e repetiam muitos exercícios oferecidos pelos professores sem entender seus significados, ou seja, a aprendizagem não era bem estabelecida.

Segundo Morais e Onuchic (2014), as consequências deixadas pelo MMM foram ruins para alunos, professores e pais de alunos. Os professores não eram preparados para trabalhar a matemática a partir desse novo método, os alunos apresentavam muitas dificuldades com as abstrações e os pais dos alunos não sabiam como auxiliá-los, pois haviam aprendido Matemática de uma forma diferente. Assim, era preciso uma mudança no currículo da Matemática escolar e na forma de ensinar para que os alunos obtivessem êxito em desempenhar suas habilidades em resolver problemas e, “entender os princípios e as operações matemáticas do problema, ampliando os conhecimentos adquiridos para outros contextos. Era a vez da retomada do ‘ensino com compreensão’” (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 27).

Durante os anos de 1960 e 1970 muitas pesquisas foram produzidas e publicadas em eventos, periódicos e livros. Algumas dessas fazem parte do livro *Problem solving in schools mathematics* organizado pelo NCTM em 1980. O livro contava com 22 artigos, entre eles um do próprio George Polya. O grande número de publicações é devido ao impacto do MMM. Buscando uma alternativa ao insucesso do movimento, era preciso uma mudança no currículo escolar visando a um melhor desempenho em suas habilidade de resolução de problemas. Assim, os alunos, além de encontrar as respostas para os problemas, seriam capazes de entender os princípios e as operações matemáticas do problema (MORAIS; ONUCHIC, 2014). Depois da divulgação do NCTM em 1980 sobre a Resolução de Problemas ser o foco do ensino de matemática, muitos materiais foram produzidos para a sala de aula. Segundo Schroeder e Lester (1989), os estudos se dividiam em três vertentes: (1) ensinar **sobre** resolução de problemas, (2) ensinar **para a** resolução de problemas, e (3) ensinar **através da** resolução de problemas.

No tópico a seguir apresentaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas que leva em consideração a terceira vertente apresentada no parágrafo acima.

4.3 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Diante das três concepções sobre Resolução de Problemas apresentadas por Schroeder e Lester (1989), o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), do qual sou integrante, se dedica a estudar mais fortemente a última, **ensinar através da** resolução de problemas, ou seja, que a aprendizagem do conteúdo matemático ocorra enquanto se resolve um problema.

Para quem pergunta, por que um nome de metodologia tão grande? Eu explico. Sabemos que ensino, aprendizagem e avaliação em Matemática possuem significados e objetivos distintos, que não necessariamente ocorrem em conjunto ou uma dependendo da outra. Onuchic e Allevato (2011) contam que durante o século XX ocorreram algumas reformas no ensino de Matemática e assim, o ensino e a aprendizagem passaram a ser compreendidas como algo que deveria acontecer simultaneamente. Assim, o GTERP assumiu a palavra composta ensino-aprendizagem. Com a ideia de se trabalhar o ensino-aprendizagem, era preciso pensar em como avaliar os resultados e os efeitos desse novo modo de trabalhar. A partir dessa necessidade, o princípio de uma avaliação formativa e contínua foi incorporada à metodologia.

Desse modo, o GTERP assumiu a concepção de trabalhar matemática através da resolução de problemas a partir da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação para uma dinâmica de trabalho em sala de aula. Ao considerar o termo ensino-aprendizagem-avaliação, o grupo tem em mente

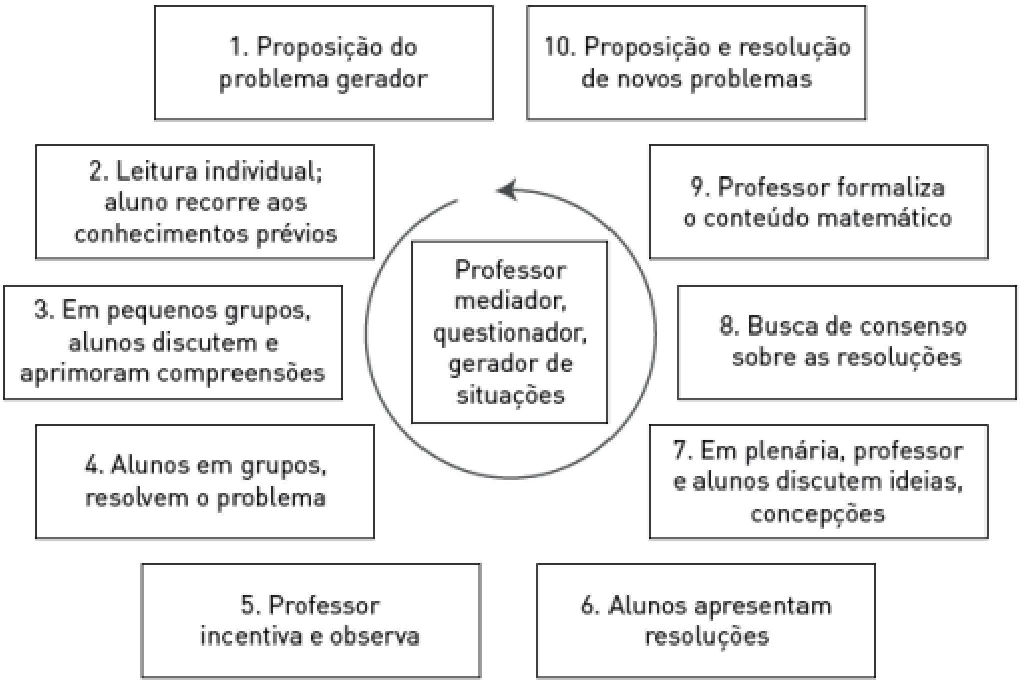
> um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor *ensina*, o aluno, como um participante ativo, *aprenda*, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu *pensar matemático*, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula quando necessário. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81)

Concordando com a ideia dessas autoras, essa expressão será usada em referência à metodologia pedagógica construída colaborativamente, ano a ano, pelo GTERP e adotada por diversos professores pesquisadores que tiveram contato com as publicações resultantes de pesquisas desenvolvidas por esse grupo. A avaliação, segundo a metodologia, não é vista como algo quantitativo e dando importância apenas ao resultado. No lugar disso, busca-se propiciar um olhar crítico do professor sobre sua prática, permitindo-lhe estabelecer novas estratégias e procedimentos que impactem positivamente a aprendizagem dos estudantes em sala de aula. Os estudos sobre avaliação foram integrados à metodologia a partir de Pironel (2002, 2019).

Explicado o nome, é preciso entender como essa metodologia funciona. Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), o problema é o ponto de partida para a aprendizagem dos alunos. É por meio dele que o estudante irá pensar em estratégias, com auxílio de conhecimentos prévios, para construir novos conhecimentos e resolver aquele problema. Ou seja, o problema é o responsável por desencadear o processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Essa é uma direção contrária ao já conhecido método definição-exemplo-exercício.

A partir dessas ideias, Allevato e Onuchic (2014) propõem dez etapas para que os professores possam empregar essa abordagem metodológica durante as aulas de Matemática.

Figura 7 - Roteiro com as dez etapas sugeridas para a MEAAMaRP



Fonte: ALLEVATO; ONUCHIC (2021)

Um primeiro roteiro de atividades com algumas dessas etapas foi construído em 1999, o que pode ser visto em Onuchic (1999). A partir de pesquisas, discussões e estudos do GTERP, esse roteiro sofreu modificações até chegar ao apresentado por Allevato e Onuchic (2021). De acordo com essas autoras, o roteiro começa com a **Proposição do Problema** sendo que o professor pode selecionar ou elaborar um problema ou até aceitar um problema proposto pelos alunos. Esse será o problema gerador que visa à construção de um novo conceito, novo conteúdo matemático ou novo algoritmo. Na etapa seguinte, os alunos recebem cada um uma cópia do problema para que assim, possam lê-lo individualmente e refletir sobre o problema dado, ter contato com a linguagem matemática e desenvolver sua compreensão sobre o enunciado do problema, essa é a **Leitura Individual**

Seguindo para a **Leitura Coletiva**, os alunos se reúnem em pequenos grupos para ler o problema novamente agora, em grupos, e discutindo o problema e suas compreensões. Após esse momento, temos a **Resolução do Problema**, em que cada grupo tentará com seus recursos, resolver o problema. Nesse ponto, os alunos se voltam à expressão escrita, linguagem matemática, linguagem vernácula, desenhos, gráficos, tabelas e esquemas. A etapa sobre **Observar e Incentivar** perpassa as duas últimas pois, enquanto os alunos leem o problema, discutem suas primeiras ideias e o resolvem, os professores precisam ficar atentos às dúvidas conceituais, dúvidas de leitura e incentivar os alunos a utilizar seus conhecimentos prévios para os auxiliar na busca da resolução do problema.

Após a tentativa da resolução do problema em cada grupo, o professor elege um representante de cada grupo para fazer o **Registro das Resoluções** na lousa, estando certas ou erradas ou realizadas por diferentes processos. Diante de todas as soluções o professor, mais uma vez, agora no grupo grande de toda a sala ele incentiva os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defendendo suas colocações e comparando as diferentes soluções, no chamado momento da **Plenária**. A seguir todos os alunos e o professor, em um esforço conjunto, tentam **Buscar um Consenso** sobre o resultado correto, a resposta. “Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e a relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.46)

Na penúltima etapa, a da **Formalização do Conteúdo**, o professor apresenta na lousa o conteúdo trabalhado de uma forma organizada e estruturada em linguagem matemática, com os devidos conceitos padronizados e procedimentos construídos através da resolução do problema. A última etapa diz respeito aos **Novos Problemas Propostos** relacionados ao problema gerador. Essa proposição pode partir do professor e dos alunos também, como um exercício de pensar mais a fundo cada problema e suas variáveis e ampliar as compreensões acerca do novo conhecimento matemático pretendido. Essa metodologia gera um movimento cíclico da construção de novos conhecimentos através da resolução de problemas pois os problemas geradores são propostos sem que o conteúdo matemático necessário ou apropriado à sua resolução tenha sido apresentado formalmente no início.

A metodologia tem o intuito de mostrar que o professor já sabendo, dentro do seu programa de ensino, até que ponto foi trabalhada a Matemática com seus alunos prepara um problema para ser trabalhado a partir dos conhecimentos prévios dos alunos até um ponto em que é preciso mostrar um conteúdo ainda desconhecido, para resolver tal problema. É utilizar um problema de forma intencional para tratar sobre um novo assunto em sala de aula.

Depois de descrita cada etapa dessa metodologia, você pode se perguntar, meu leitor, onde está a avaliação? A avaliação não é pensada como um momento isolado mas sim, ela perpassa todas as etapas da metodologia. Ao iniciar a preparação e escolha do problema que será utilizado, o professor precisa avaliar o grau de dificuldade do problema proposto e analisar se está além do que os alunos conhecem. No momento de leitura individual, o professor pode identificar erros conceituais, lacunas na aprendizagem, dificuldade de leitura e interpretação de texto que podem dificultar o trabalho na área de Matemática.

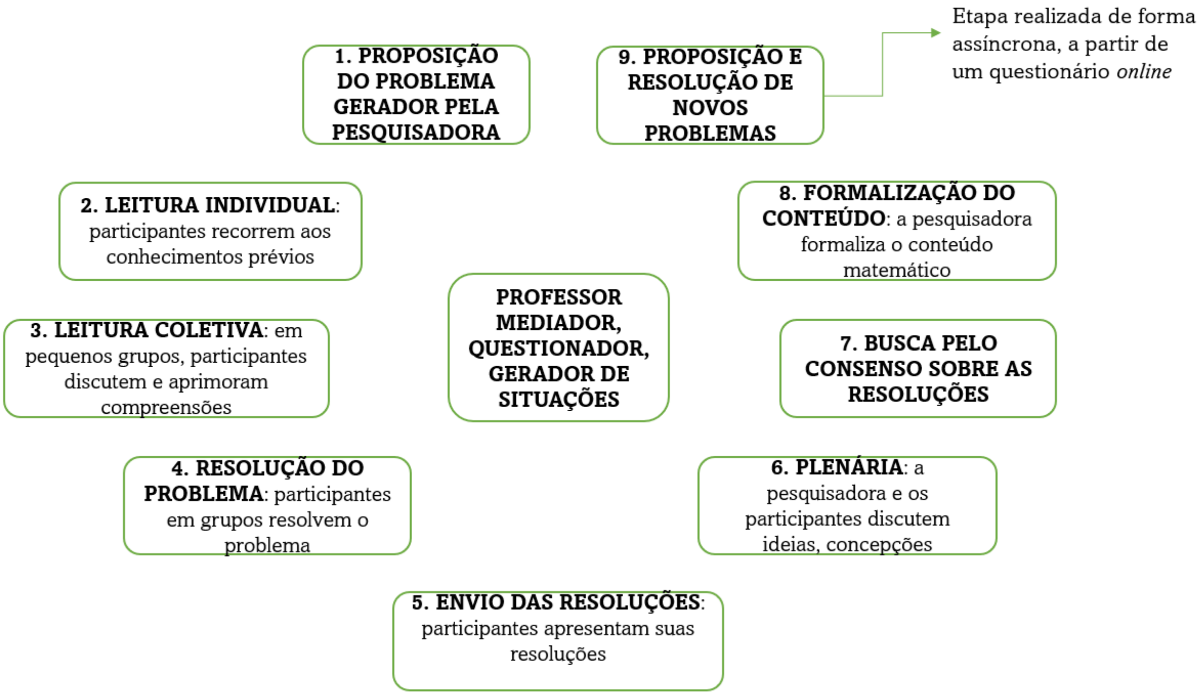
Na leitura coletiva, a avaliação pode aparecer na forma como os alunos se dividem, se comunicam em grupo e saber como ocorre a troca de ideias. Assim, como na etapa de resolução do problema, em que o professor pode avaliar como os alunos se saem fazendo um trabalho colaborativo e cooperativo. Nas últimas etapas, a avaliação deve continuar a se fazer presente. A plenária exige que o professor se ponha atento em avaliar a capacidade de argumentação dos estudantes e, também, de escuta ativa, ambas tão importantes para o processo de formação do indivíduo. Por fim, na etapa de formalização, o professor deve avaliar a capacidade dos estudantes de entenderem, de maneira por vezes mais abstrata, os conceitos e procedimentos que foram vivenciados ao longo da resolução do problema.

A implementação dessa metodologia, em sala de aula, exige do professor e dos alunos posturas e atitudes diferentes em relação ao trabalho com a Matemática. O professor precisa preparar ou escolher problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende trabalhar. Além de ter uma postura mais aberta, sair do centro das atenções e estimular os alunos a assumir a responsabilidade da aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos devem entender que nesse momento são eles os atores principais pela construção seus conhecimentos, em que suas opiniões e visões importam e são necessárias para desenvolver suas resoluções.

4.3.1A MEAAMaRP no ensino emergencial remoto

Devido à pandemia do Coronavírus que assolou todo o mundo durante os últimos dois anos (2020-2021), algumas relações no âmbito escolar e da pesquisa precisaram modificações e adaptações. Desse modo, a MEAAMaRP, que foi pensada para as pesquisas em formato presencial, precisou ser ajustada ao modelo remoto com algumas adaptações.

Figura 8 - Modelo adaptado da MEAAMaRP para o ensino remoto



Fonte: Autora (2022)

Por conta da forma remota da pesquisa, o passo Orientar e Incentivar ficará como um apoio do pesquisador às dúvidas que poderão surgir na leitura e na resolução do problema e o registro das resoluções será chamado envio das resoluções. O único passo escolhido para acontecer de forma assíncrona, ou seja, fora dos encontros online é o último passo “Elaboração ou Proposição de novos problemas dessa área pelos alunos”. Essa adaptação foi feita considerando o tempo de duração de cada encontro.

Depois de conhecer e entender as plantas e as árvores por onde esse beija-flor voou, será preciso conhecer onde ele vai polinizar e o bando de pássaros que ele irá encontrar em seus caminhos.

5 UM BELO JARDIM

Depois de passear por entre plantas e árvores que muito lhe agradaram, o beija-flor começa a tomar um caminho onde todo pólen colhido por ele será espalhado sobre outras plantas. Nesse novo caminho, o beija-flor encontra um bando, um bando de pássaros de diferentes espécies e com diferentes histórias e vivências, mas que se encontram no mesmo jardim. Nessa parte, entenderemos melhor as vivências desse bando, agora os participantes da pesquisa em Análise Combinatória. Antes de pensar em qualquer sequência didática com os participantes da pesquisa, nos interessamos em conhecê-los, para entender um pouco suas vivências e preparar algo que seria interessante para eles.

5.1 Contextualizando o cenário...

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), um investigador qualitativo dissociar o ato, a palavra ou o gesto do contexto em que está inserido é perder seu significado. Portanto, pretendo, neste capítulo, apresentar algumas características do contexto em que a pesquisa foi desenvolvida. Essa caracterização é justificada pela premissa de que compreender um fenômeno só é possível a partir da compreensão das relações que ocorrem internamente e que configuram um determinado contexto. Esse aspecto é enfatizado por Lüdke e André (1986) que afirmam:

> A justificativa para que o pesquisador mantenha um contato estreito e direto com a situação onde os fenômenos ocorrem naturalmente é a de que estes são muito influenciados pelo seu contexto. Sendo assim, as circunstâncias particulares em que um determinado objeto se insere são essenciais para que se possa entendê-lo. (p.12)

O cenário em que se dá uma pesquisa, sendo na Educação Matemática ou em outro campo, é, de fato, indiscutivelmente complexo. E, em uma situação pandêmica, a dificuldade se intensifica. É um processo complexo, pois entendemos que existem várias inter-relações acontecendo: a relação pesquisadora-participantes, participantes-participantes, participantes-universidade, além da relação com o grupo Residência Pedagógica.

Nesse âmbito, de muitas relações, apresentaremos as informações obtidas antes da sequência didática, ou seja, essas informações foram colhidas para nos ajudar em como pensar um projeto didático com esses participantes, levando em consideração tanto as nossas expectativas quanto as deles. Assim, traremos alguns dados, referentes à relação desses alunos com a Combinatória enquanto alunos do Ensino Médio e como alunos da Licenciatura, em que eles ainda possuem dúvidas, dificuldades em trabalhar tal conteúdo em sala de aula e entender como se deduzem as diferentes formas em que a Combinatória pode ser trabalhada no Ensino Básico.

5.1.1 Conhecendo o Bando

A pesquisa até o momento em que é finalizada é uma idealização. Nós, pesquisadores, idealizamos, planejamos, criamos possibilidades. Mas, como depois de um forte vento, tudo pode mudar. Todos os passarinhos, participantes da pesquisa, são alunos da Licenciatura em Matemática da Unesp – *campus* Rio Claro. O motivo para essa escolha foi a proximidade do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, pensando que tudo estaria organizado em um mesmo local e, assim, os equipamentos para uma suposta produção de dados presenciais seriam mobilizados com pouca dificuldade. Porém, isso não foi possível. A forma encontrada para produzir esses dados, na pandemia, onde todos estávamos distanciados socialmente ou presos em nossas gaiolas, foi por meio da plataforma *Google Forms*, que são formulários *online*.

Outra característica é que todos os participantes são bolsistas do Programa Residência Pedagógica (PRP). Vale salientar que o convite para participar da pesquisa foi estendido às professoras participantes do PRP. Entretanto, por incompatibilidade de horários, elas não puderam participar. Desse modo, focamos este estudo apenas nos alunos da Licenciatura.

No ano 2007 foi criado o Programa Nacional de Assistência Estudantil (PNAES). Esse programa tinha como uma das pretensões promover ações nas áreas de pesquisa, ensino e extensão, sendo algumas delas com a concessão de bolsa-auxílio, como forma de garantir ajuda financeira aos estudantes sem perder de vista o viés acadêmico. Assim vários programas foram criados. Entre eles o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) e, mais recentemente, através da Portaria n.º 38 de 28 de fevereiro de 2018, foi criado o Programa Residência Pedagógica (PRP).

O Programa Residência Pedagógica foi implementado pelo Ministério da Educação (MEC) como uma “modernização” do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à

Docência - Pibid. Essa ação gerou críticas e debates, visto que o Pibid é uma política consolidada e com importantes repercussões na Educação Básica (TINTI, SILVA; 2020). O PRP tem como finalidade "apoiar Instituições de Ensino Superior (IES) na implementação de projetos inovadores que estimulem a articulação entre teoria e prática nos cursos de licenciatura, conduzidos em parceria com as redes públicas de educação básica." (BRASIL, 2018b, p.1).

Dessa forma, o PRP não se configura apenas como mais uma política assistencial estudantil mas, também, como uma importante ferramenta para uma formação mais completa nos cursos de licenciatura pois, a partir da sua dinâmica, os bolsistas residentes (alunos da licenciatura) têm a oportunidade de estar inseridos no contexto escolar ainda na graduação, atuando como protagonista, à medida em que realiza as intervenções através de projetos.

O programa também revela a importância do grupo colaborativo pois há uma constante troca de ideias entre os residentes que estão muito mais próximos das teorias educacionais e que podem contribuir com ideias e soluções inovadoras e os professores em exercício que cooperam com suas experiências acumuladas dentro e fora de sala de aula. Concordamos com Nóvoa (2003), a respeito dos conhecimentos que os professores adquirem na escola, que os mesmos são saberes além dos aprendidos nos cursos de licenciatura porém essenciais para a reflexão da experiência na escola.

Nossa intenção em ter, como participantes da pesquisa, bolsistas do PRP era que, além de trabalhar problemas com eles, a sequência didática a ser conduzida poderia ser utilizada por eles na sala de aula em ações do PRP. É importante destacar que os participantes foram convidados a participar voluntariamente dessa pesquisa e, dos 16 bolsistas, 9 puderam participar. Todos os participantes responderam a um termo de compromisso, em que se preserva suas identidades.

5.2 O que foi encontrado no questionário...

O questionário era dividido em cinco seções: Apresentação e informações sobre a graduação; Sobre Análise Combinatória no Ensino Médio; Sobre Análise Combinatória na Formação Inicial; Ensino de Análise Combinatória; Sobre Resolução de Problemas e foi composto por questões de múltipla escolha e questões discursivas. Algumas questões de múltipla escolha apresentavam a opção do respondente de fazer comentários opcionais, expondo o caráter qualitativo do questionário.

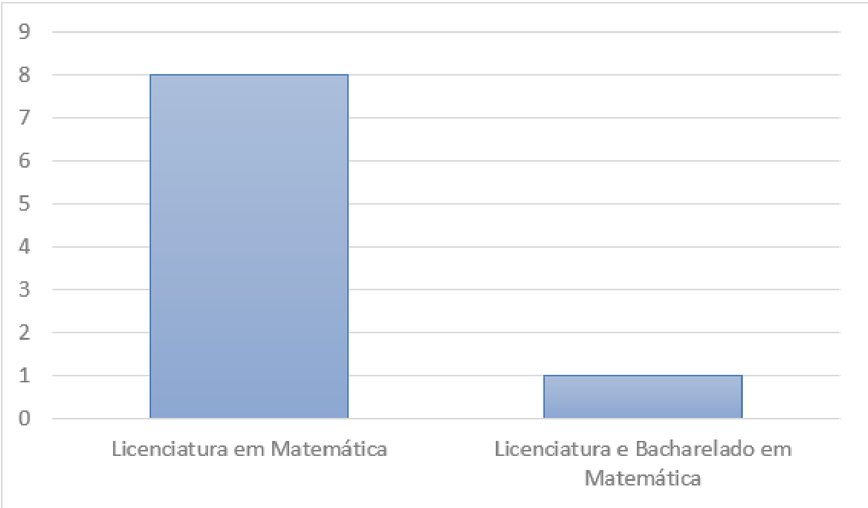
<u>Seção 1 – Informações sobre a graduação</u>

Nesta primeira seção, as perguntas eram pessoais, como nome e e-mail dos alunos.

Curso de graduação

O intuito da pergunta foi o de traçar o perfil dos participantes em relação ao seu tipo de formação, saber se os alunos eram da licenciatura em matemática ou do bacharelado. Mesmo fazendo parte do Programa Residência Pedagógica, havia a possibilidade de um aluno já ter cursado o bacharelado ou ter outros conhecimentos adquiridos em outra formação, levando ao seguinte gráfico

Gráfico 1 – curso de Graduação dos alunos participantes da pesquisa



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos respondentes, quase na totalidade, são apenas da licenciatura com somente um deles ter também bacharelado.

Todos os participantes estavam nos períodos finais do curso. Entre eles, havia sete participantes com perspectiva de se formar no final de 2021. Esse fato torna-se relevante para a pesquisa pois esses futuros professores logo estariam em sala de aula, atuando e tendo suas próprias práticas. Foi interessante que, nesse final de curso, eles pudessem refletir sobre sua prática futura.

<u>Seção 2 – Sobre Análise Combinatória no Ensino Médio</u>

Neste item começamos a fazer perguntas pessoais sobre as relações dos participantes com Combinatória no Ensino Médio. Buscar conhecer se haviam estudado esse conteúdo, como haviam sido suas experiências, dificuldades e como avaliam hoje sua aprendizagem recebida no Ensino Médio.

Com suas palavras, o que é Análise Combinatória?

Nessa pergunta queríamos analisar o que eles pensavam e sabiam sobre a definição de Análise Combinatória, visto que sua primeira aprendizagem desse conteúdo se dá formalmente no Ensino Médio.

Nas respostas, a maioria dos participantes relacionou a Combinatória com a contagem. Nas palavras do participante 4, "*É a contagem de possibilidades de uma combinação de diversos elementos*". O participante 2 disse que é "*Uma área da matemática que possibilita a realização de contagens cada vez mais precisas*". Outros participantes demonstraram uma ideia de Análise Combinatória mais ligada à Probabilidade, falando sobre o estudo de possibilidades em determinadas situações utilizando um número finito, que é o resultado da contagem. Permutação e Arranjo pouco foram mencionados ou mesmo outros tópicos, como o princípio da casa de pombos ou os grafos.

Você estudou Análise Combinatória no Ensino Médio?

A partir dos dados dos alunos no que se refere à aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio, pode-se montar o seguinte gráfico.

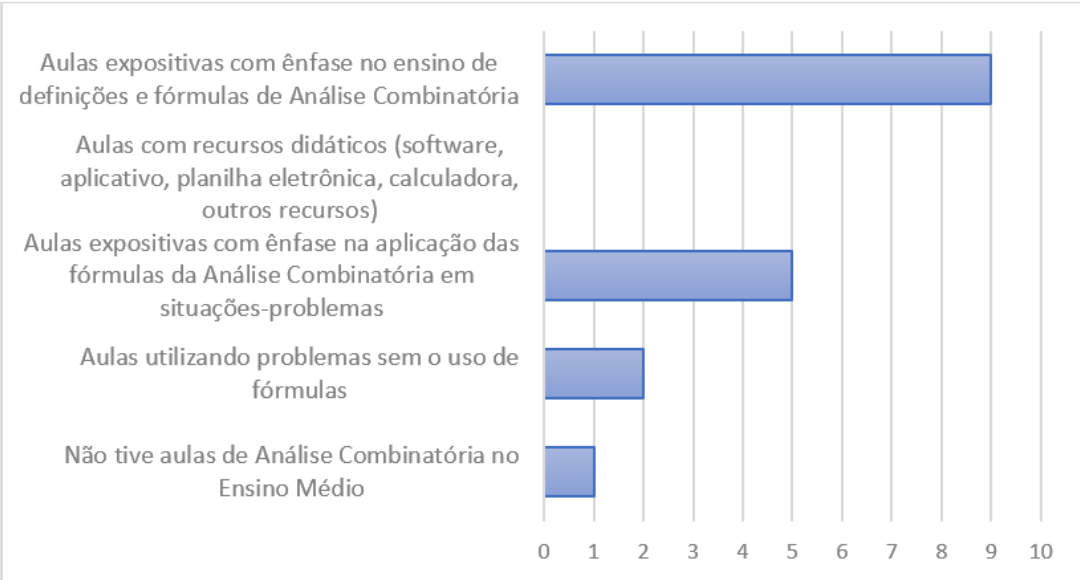
Gráfico 2 – Você estudou Análise Combinatória no Ensino Médio?

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos participantes estudou esse conteúdo no Ensino Médio. Apenas um participante estudou em um curso de pré-vestibular e respondeu ao questionário com base nessa experiência.

Como era o formato das aulas?

Gráfico 3 – Como era o formato das aulas?



Fonte: Dados da pesquisa

Essa pergunta estava relacionada à pergunta acima. Embora todos tivessem respondido que suas aulas no Ensino Médio sobre Análise Combinatória foram expositivas com ênfase no ensino de definições e fórmulas, alguns também responderam que as aulas tinham aplicações das fórmulas em situações-problema e apenas dois participantes disseram ter tido aulas utilizando problemas sem o uso de fórmulas. Desse modo entendemos que a Análise Combinatória foi abordada em mais de uma forma na sala de aula.

Ainda que alguns participantes tenham tido aulas com e sem o uso de fórmulas, a maioria teve apenas a experiência da fórmula. Esse processo pode dificultar o entendimento das propriedades das situações combinatórias como um todo e não apenas como uma simples aplicação de fórmula. É interessante ver que nenhum desses alunos estudou o conteúdo através de softwares ou com qualquer outra tecnologia. Em um comentário, o participante 5 disse que "*Embora tenha mostrado diversas situações-problema, o professor tratou o conteúdo muito formalmente, sem relacionar tanto com o cotidiano*".

Ao serem perguntados sobre como consideram sua aprendizagem sobre Combinatória no Ensino Médio, em sua maioria os participantes (89%) responderam que consideram uma aprendizagem razoável. E o restante, 11%, respondeu que foi uma boa aprendizagem.

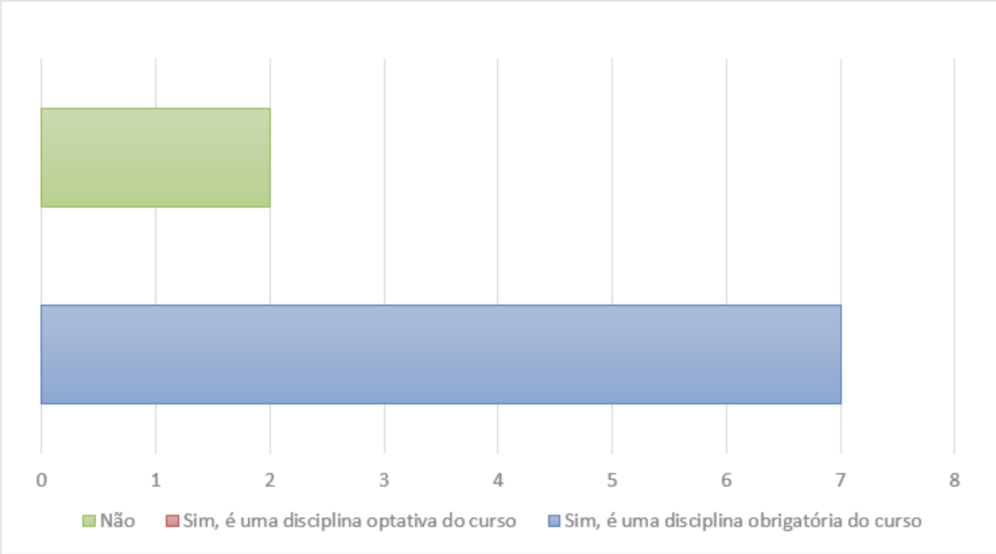
Quais foram suas maiores dificuldades ao aprender Análise Combinatória?

As maiores dificuldades apontadas pelos participantes são o uso correto das fórmulas de Combinatória e a identificação de que tipo de problema está sendo tratado. Essas dificuldades também foram encontradas nas pesquisas de Santos-Wagner, Bortolotti e Ferreira (2013) e Lima, R. (2015). Das respostas, quatro participantes apontaram dificuldades em entender as fórmulas. O participante 7 relatou que "*os professores mandavam decorar as fórmulas e isso nunca funcionou pra mim. Só para o momento da prova.*" Ainda sobre memorização, o participante 3 disse que "*Tinha problemas com interpretação dos enunciados e, consequentemente, tinha muita dificuldade com as fórmulas, não sabia qual usar. Sempre tentava decorar e acabava esquecendo de alguma na hora da prova.*". Os outros apontaram como dificuldade interpretar as situações, para identificar se é um problema de combinação, permutação ou arranjo. O participante 2 afirmou que "*A maior dificuldade foi entender quando tenho que usar combinação, arranjo e permutação e na hora de fazer exercício sempre me confundia.*".

<u>Seção 3 – Sobre Análise Combinatória no Ensino Superior</u>

Neste item as perguntas foram sobre como esse assunto foi tratado com os participantes no curso de Licenciatura.

Gráfico 4 – Você estudou Análise Combinatória no Ensino Superior?



Fonte: Dados da pesquisa

Se a resposta anterior foi sim, você pode descrever brevemente como foi essa experiência?

Ao pedir que descrevessem a experiência, os participantes apresentaram algumas queixas, como a dissociação dos problemas com o cotidiano no professor. Um participante afirmou que "*Foi apresentada em dois momentos. Em Matemática da Educação Básica um grupo deu uma aula pra turma sobre o tema, mas não ficou muito claro para mim. Já em Probabilidade, a Análise Combinatória ficou muito algébrica, cheia de notações da área, misturado com funções de probabilidade. Não aprendi muito e não consigo associar com situações para uma aula no ensino básico.*" Outro participante relembrou que as dificuldades no Ensino Médio persistiam dizendo que "*Estudamos na disciplina de probabilidade, eu tive as mesmas dificuldades do Ensino Médio, interpretar as situações-problema*".

Das sete respostas, quatro alunos relataram que cursaram a disciplina de forma remota por conta da pandemia, em aulas expositivas com resolução de exercícios, julgando-as pouco produtivas. Um participante relatou que a experiência "*não foi muito positiva, por conta do ensino remoto. Tive a matéria no começo da pandemia e o professor não estava muito familiarizado com as tecnologias, então não tivemos aulas muito produtivas. Era puramente expositivo.*"

Seção 4 – Sobre o ensino de Análise Combinatória

Neste item as perguntas são sobre as dificuldades em ensinar Análise Combinatória, possibilidades para ensinar o conteúdo e reconhecer se possuem alguma experiência de ensino.

Você acha Análise Combinatória um assunto difícil de ensinar?

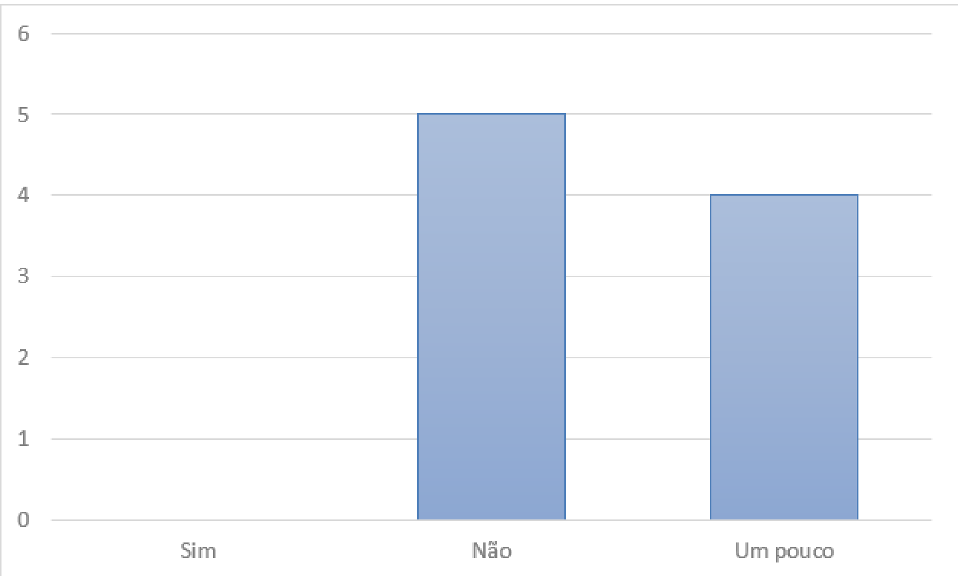
Ao serem perguntados, os participantes, futuros professores, se Análise Combinatória é um assunto difícil de trabalhar na sala de aula, a maior parte das respostas ficou ligada à segurança sobre o seu conhecimento a respeito do assunto. Um participante relatou que acha difícil "*mas somente porque eu não acho que aprendi ainda, mesmo tendo visto o tema na escola e no ensino superior.*", corroborando com o participante 6 que afirmou "*na minha formação não tive nenhum ensinamento sobre.*".

Uma parte acredita que entendendo esse conteúdo essa dificuldade não será tão intensa. O participante 8 declarou que "*Tendo domínio do conteúdo, é um grande passo para o êxito em ensinar.*". Já o participante 9 acredita que "*ele não é um conteúdo difícil de ensinar, mas que pode causar muita confusão no aluno se passada da forma errada.*"

Você sabe como a BNCC aborda o ensino de Análise Combinatória?

Nas respostas, a maioria dos alunos assumiu não saber como a BNCC aborda a Análise Combinatória. Saber como a Base entende esse conteúdo é importante, pois esses futuros professores lidarão com essa normativa. As respostas se mostram no gráfico abaixo

Gráfico 5 – Você sabe como a BNCC aborda o ensino de Análise Combinatória?

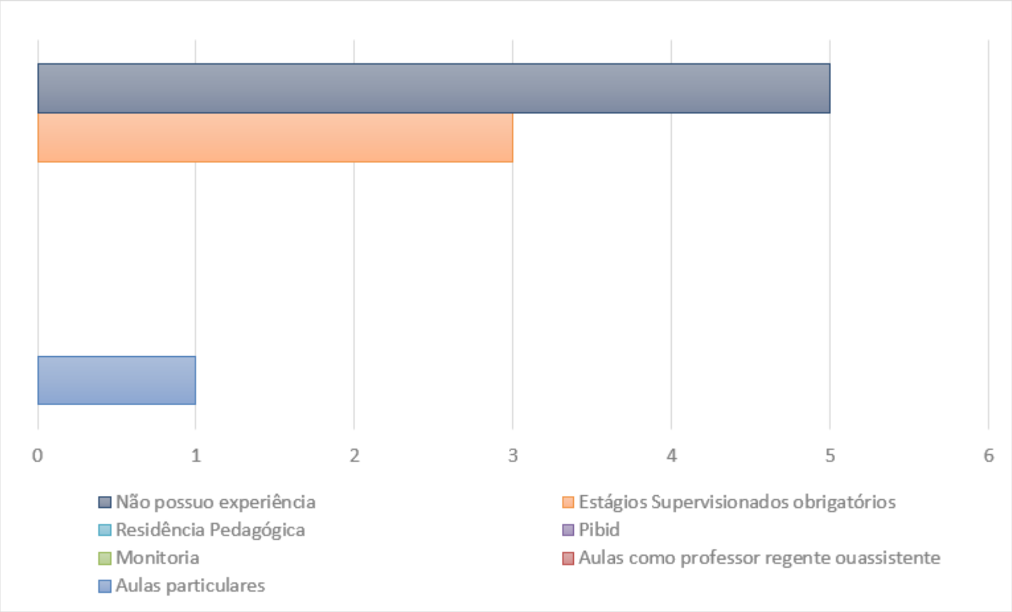


Fonte: Dados da pesquisa

Você já teve alguma experiência com ensino de matemática, mais especificamente no ensino de Análise Combinatória?

A partir das respostas dos alunos construiu-se o seguinte gráfico

Gráfico 6 – Você já teve alguma experiência com ensino de matemática, mais especificamente no ensino de Análise Combinatória?



Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo cursando os períodos finais do curso de Licenciatura, a maioria dos participantes da pesquisa não possuem nenhuma experiência com o ensino de Matemática e, possivelmente, ser bolsista do PRP é a primeira experiência desses futuros professores.

Descreva brevemente como você pensa em ensinar esse conteúdo

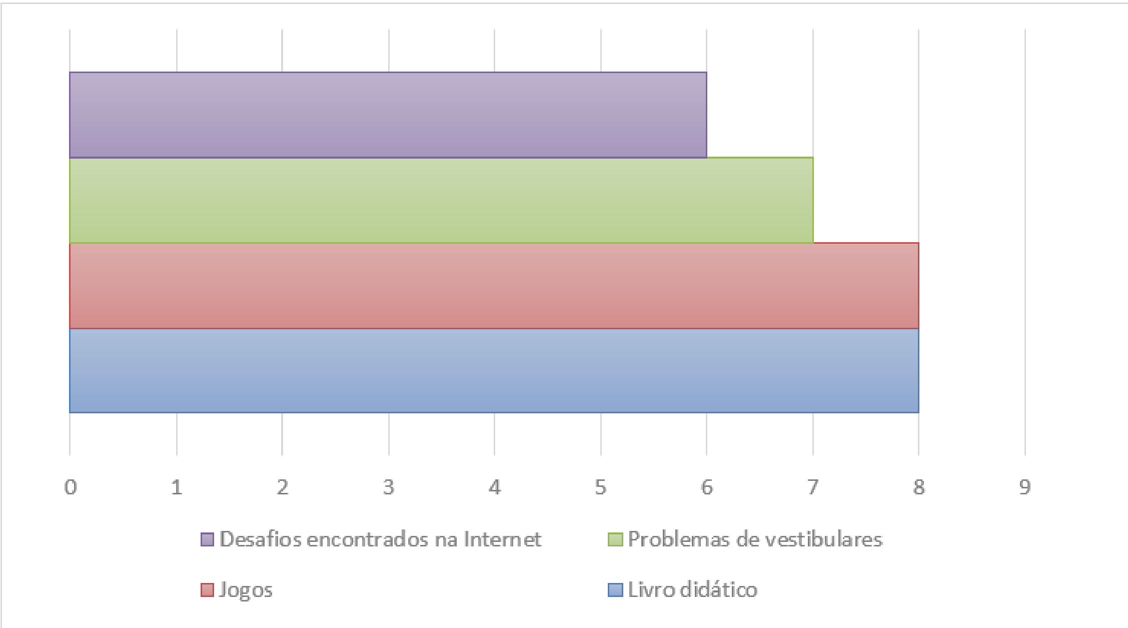
Acredito que, mesmo com a falta de experiência, os participantes não possuem um pensamento engessado na hora de ensinar esse conteúdo visto que, quando foi pedido que eles descrevessem como pensam suas aulas para esse conteúdo, algumas respostas foram ideias de utilizar jogos, resolução de problemas e materiais concretos. O participante 2 expôs que "*Pensaria em ensinar esse conceito com jogos ou com resolução de problemas.*", enquanto o participante 7 afirmou que "*penso que ao invés de 'ensinar' os alunos a fazer provas e memorizar fórmulas, podemos chegar nessas fórmulas talvez deduzindo-as e instruindo os alunos em uma linha de pensamento que eles possam entender de onde elas vieram. Dar exemplos práticos, como combinação de roupa e sapato.*"

Dois participantes assumiram que podem utilizar as aulas expositivas, por suas experiências e por ainda não ter pensado em dar uma aula de Análise Combinatória. Um deles disse que “*Pela experiência que vivi, acredito que eu acabaria caindo no tradicional de ensinar as fórmulas e os alunos aprenderem como aplicar.*”, concordando com outro que afirmou: “*Confesso nunca ter pensado a fundo sobre isso, ou seja, provavelmente seria uma aula expositiva, tentando utilizar exemplos*”.

Que tipos de recursos poderiam ser utilizados por você para o ensino de Análise Combinatória?

As respostas dos alunos, podem ser expressas no gráfico abaixo

Gráfico 7 – Que tipos de recursos poderiam ser utilizados por você para o ensino de Análise Combinatória?



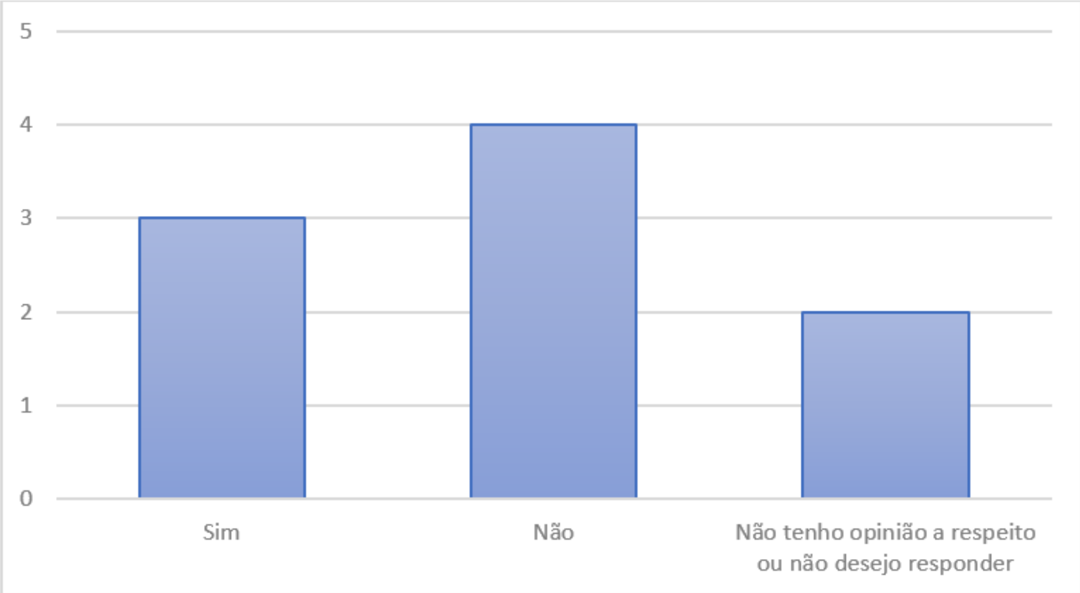
Fonte: Dados da pesquisa

Das respostas, 8 alunos escolheram como recurso o livro didático que, dentre as opções, era uma das mais tradicionais. Essa escolha pode ter sido baseada por suas experiências, visto que o livro didático é um material auxiliar do professor e que traz alguns problemas interessantes para se abordar Combinatória.

<u>Seção 5 – Sobre a Resolução de Problemas</u>

Neste item, nossa intenção era a de saber se os participantes já haviam experenciado alguma metodologia de Resolução de Problemas em algum conteúdo matemático

Gráfico 8 –Você já participou de alguma aula que utilizasse uma metodologia para conduzir ensino, aprendizagem e avaliação a partir da Resolução de Problemas?



Fonte: Dados da pesquisa

Diante das respostas, vemos que a maioria dos participantes nunca participou de nenhuma aula que tivesse como metodologia partir da Resolução de Problemas.

O que lhe interessa em participar desta nossa pesquisa?

Seguindo a linha explicitada no capítulo anterior, de que um problema para ser resolvido precisa ser interessante aos resolvedores, decidimos lhes perguntar o que lhes interessou para participar da pesquisa. Alguns citaram suas dificuldades com o conteúdo, como o participante 2: "*Como a aprendizagem que tive sobre esse tema foi bem ruim e não tive contato com esse tema na faculdade.*" e o participante 3 que afirmou ser "*uma área que tenho um pouco de receio ainda em trabalhar e ensinar. Colocar-me esse desafio contribuirá muito para a futura profissional que serei pois tendo contato com outras ideias e tendo o exercício de pensar e articular sobre, terei uma bagagem para poder abordar este assunto com os alunos de maneira diferente daquela que me ensinaram, proporcionando uma aprendizagem de análise combinatória significativa e diminuindo dificuldades e barreiras que possam vir a existir.*"

Outros falaram sobre seu interesse em relação à docência. O participante 5 afirmou que "*gostaria de aprender mais sobre o assunto e sobre a prática docente para aprimorar minhas habilidades e poder oferecer melhores aulas aos meus futuros alunos.*" e, nesse mesmo sentido, o participante 6 relatou que "*é assunto que eu gosto, mas quero aprender* *como ensinar esse assunto de uma maneira efetiva sem me basear apenas na ‘decoreba’ de fórmulas.*”

Enfrentando todas as intempéries, o bando foi definido e o próximo passo foi criar uma sequência didática que relacionasse Combinatória e Resolução de Problemas, a partir das respostas desse questionário. No próximo capítulo descreveremos como ocorreu a produção e a análise de dados, visando à resposta da pergunta de pesquisa.

6 CHEGOU A HORA DE POLINIZAR

Depois de passear por plantas e árvores e visitar um grande jardim onde conheceu um bando de pássaros muito interessantes, o beija-flor precisou fazer seu trabalho de polinização, que é deixar um pouco do que foi colhido em algumas plantas para outras. É, a partir de todo o conhecimento que foi buscado nas plantas anteriores, ou podemos chamar de capítulos, que o beija-flor pôde proporcionar que novas flores, ou ideias, pudessem ser geradas. Porém, não pense que esse trabalho seria um trabalho solitário. Tudo o que será descrito neste capítulo foi produzido pelo beija-flor e pelos pássaros encontrados no jardim.

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados da presente pesquisa que têm como objetivo analisar como a MEAAMaRP pode ajudar no desenvolvimento do raciocínio combinatório de licenciandos em Matemática e contribuir para suas futuras ações pedagógicas. Esse objetivo, junto aos objetivos específicos, foram anteriormente apresentados no Plano de Voo (capítulo 1, seção 1.3) do presente estudo. Porém faz-se necessário retomá-lo aqui com o intuito de indicar os percursos de análise realizados. De início apresentaremos a forma como os elementos da Comunidade de Prática (CoP) serão utilizados na análise, fazendo uma síntese de como ele foi abordado em todos os problemas de uma forma geral e, depois, mostraremos em específico, as análises dos encontros referentes aos problemas de Permutação, Arranjo e Combinação.

6.1 Os elementos de uma CoP e a sequência didática

Segundo a Teoria Social da Aprendizagem (TSA), apresentada no capítulo 3, o que possibilita o desenvolvimento da aprendizagem é o processo de negociação de significados mantido entre as pessoas no âmbito de comunidades de prática. Portanto, de acordo com a TSA, o significado não está apenas no sujeito ou no objeto mas, sim, na negociação de significados dos sujeitos sobre o objeto. Sendo assim, não é possível pensar em práticas pedagógicas pautadas apenas na transmissão de conhecimentos.

De acordo com Wenger (2001), na perspectiva social, o processo de aprendizagem está associado à forma como seus membros se sentem como pertencentes a uma Comunidade de Prática. Assim, algumas relações estabelecidas entre os membros mais ou menos experientes nesses ambientes são fundamentais para se conceber a aprendizagem. Nesse contexto, as relações entre a pesquisadora e os futuros professores foram dinâmicas, de modo que as participações desses membros foram, de certa forma, plenas de acordo com cada foco de negociação de significados. Assim, em uma CoP "a dualidade entre professor e aluno deixa de ser considerada, pois ambos são percebidos como membros de uma mesma comunidade que atuam segundo diferentes graus de experiência no desenvolvimento de uma prática social comum: a prática da formação" (PAMPLONA; CARVALHO, 2009, p. 213).

Como já dito, a Comunidade de Prática deste estudo foi composta inicialmente por nove alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp – *campus* Rio Claro mas, uma aluna, por conta de problemas pessoais, não pôde continuar participando dos encontros. Assim, a CoP ficou composta por oito alunos, com todos os participantes fazendo parte de uma outra comunidade, o Programa Residência Pedagógica que, nesta pesquisa, é caracterizado como uma comunidade tangencial à CoP que se constitui como foco de análise.

Para essa proposta de análise decidimos dividir em duas categorias os elementos de uma CoP: os elementos de comunidade e os elementos de prática. Os elementos de comunidade são aqueles que propiciam condições para a existência das relações sociais que irão formar uma comunidade de prática, ou seja, o domínio, o envolvimento mútuo, o grupo de pessoas, o local, o interesse comum. Mesmo com culturas e vivências diferentes os membros dessa CoP compartilham do mesmo interesse que é a dificuldade de se trabalhar combinatória em sala de aula, o envolvimento mútuo que são as relações e afinidades existentes entre eles e o grupo dos participantes que é formado por bolsistas do PRP.

Sobre os elementos da prática entendemos que a prática está fundamentada na *negociação de significados* que abrangem a *participação* e a *reificação*. Considerando essas ideias, foi realizada uma análise do comportamento dos membros da CoP considerando as seguintes etapas da adaptação da MEAAMaRP para o ensino remoto: leitura coletiva e entendimento do problema; resolução do problema em grupo; e a plenária.

Na CoP investigada foi trabalhada uma sequência didática que buscou o desenvolvimento do raciocínio combinatório utilizando uma adaptação da MEAAMaRP para o ensino remoto na formação inicial de professores de Matemática. A sequência didática foi composta por sete encontros que tiveram duração possível de 1h30min a 2h30min. A produção dos dados deu-se por meio de reuniões gravadas no *Google Meet* e registros no *Google Jamboard* ou por fotos das resoluções enviadas pelos participantes por *WhatsApp*. Fazendo uso do material produzido, foram observadas as relações sociais que ocorreram nos encontros e investigados quais elementos da CoP se evidenciaram e reconhecer qual sua relação com a metodologia trabalhada. Os encontros eram constituídos por duas partes principais: um problema para ser trabalhado com a MEAAMaRP e um diálogo, após a finalização do problema, sobre como o problema poderia ser tratado em sala-de-aula com sugestões de abordagem dadas pelos participantes e o levantamento de dificuldades em relação ao conteúdo do problema ou à metodologia.

Depois de estabelecer um contato inicial com os interessados através do questionário apresentado no capítulo anterior, optamos por deliberar coletivamente sobre os dias e horários em que aconteceriam os encontros. Esses estudantes possuíam muitas atividades e por isso foram escolhidos dois dias na semana em horários diferentes. Sendo assim, em um dia participavam até quatro alunos e em outro dia participavam até cinco alunos.

Para a sequência didática foi proposta a seguinte organização em sete encontros:

- Encontro 1: Uma conversa sobre o ensino de Análise Combinatória; resolução de dois problemas relacionados aos Princípios Aditivo e Multiplicativo; e a vivência prática da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
- Encontro 2: Uma conversa sobre os problemas enviados pelos participantes depois do encontro anterior; resolução de um problema gerador envolvendo Permutação proposto pela pesquisadora; e uma conversa sobre as potencialidades desse problema em uma sala de aula.
- Encontro 3: Uma conversa sobre os problemas enviados pelos participantes depois do encontro; resolução de problemas geradores envolvendo Combinação proposto pela pesquisadora; e conversa sobre as potencialidades desses problemas em uma sala de aula.
- Encontro 4: Uma conversa sobre os problemas enviados pelos participantes ao depois do encontro, resolução de um problema gerador envolvendo Arranjo proposto pela pesquisadora; e conversa sobre as potencialidades desse problema em uma sala de aula.
- Encontro 5: Uma conversa sobre os problemas enviados pelos participantes depois do encontro, resolução de um problema gerador envolvendo Permutação com repetição proposto pela pesquisadora e o contexto da pandemia com falas sobre as potencialidades desse problema em uma sala de aula.
- Encontro 6: Uma conversa sobre os problemas enviados pelos participantes depois do encontro, resolução de um problema gerador envolvendo Combinação e o contexto da

pandemia proposto pela pesquisadora; conversa sobre as potencialidades desse problema em uma sala de aula.

- Encontro 7: Uma conversa sobre os problemas enviados pelos participantes depois do encontro, resolução de problemas identificando os tópicos principais trabalhados por eles; considerações finais sobre o curso e o momento dedicado à avaliação da proposta pelo grupo.

Ao todo os participantes puderam resolver oito problemas nos seis primeiros encontros. No último encontro a dinâmica foi diferente, em que os participantes precisaram identificar os tipos de problemas combinatórios enviados por alunos de grupos diferentes. Os problemas escolhidos ou elaborados pelos participantes podem ser conferidos no número temático "*Resolução de Problemas em sala de aula*" da revista Com a palavra, o professor de autoria da pesquisadora em questão[10]. Traremos para esta etapa de análise e discussão os problemas referentes aos seis primeiros encontros. Salientamos que todos os nomes apresentados são fictícios e foram escolhidos pelos próprios participantes.

Os dados a serem analisados possuem naturezas distintas:

1 – Resoluções de problemas apresentados aos participantes.

2 - Transcrição de trechos dos encontros realizados.

6.2 Análise e discussão dos dados

Esta análise mostra apenas algumas das situações nas quais se pôde notar a presença dos elementos de prática apenas através da fala, visto que nem todos os participantes abriram suas câmeras. Desse modo, gestos ou expressões faciais que possivelmente seriam notados em um encontro presencial e que poderiam desencadear novos questionamentos foram perdidos. Entendemos ainda que as relações sociais envolvem processos cognitivos e sentimentos que dificilmente podem ser detectados. Portanto apresentamos apenas o que foi possível detectar das ações desses participantes. Presencialmente esses aspectos poderiam ser levados em consideração em nossa análise.

Como já citado, a análise de cada encontro foi realizada a partir de três momentos da MEAAMaRP em que foram observados os elementos da prática (negociação de significados, participação e reificação). Atendendo sugestão da banca deste trabalho no exame de

10 RANGEL, A. C. F., & MARCATTO, F. S. F. (2022). Futuros professores e problemas de matemática: elaborar ou escolher problemas prontos?. Com a Palavra, O Professor, 7(18), 117–134. https://doi.org/10.23864/cpp.v7i18.815

qualificação traremos um panorama geral de como esses elementos da prática se mostraram nos momentos observados nos encontros. Esses momentos (leitura coletiva e entendimento dos enunciados dos problemas, resolução dos problemas em grupo e plenária) foram escolhidos por terem sido os passos da metodologia em que mais ficaram visíveis os elementos da prática. O panorama geral, pode ser visto no quadro abaixo:

Quadro 1 - Momentos e elementos da prática relacionados

Momentos	Elementos da prática		
	Negociação de significado	**Participação**	**Reificação**
Leitura coletiva e entendimento do problema	liderança, divergência de ideias, aceitação, escuta	leitura, discussão, posicionamento, entendimento	perceber, interpretar, escrita, desenho
Resolução dos problemas	sugestão e aceitação de ideias	compartilhamento de ideias, sugestão, escrita, dúvidas, ajuda	raciocinar, plano de resolução, escrita, reflexão, fala
Plenária	explicações, discussões, dúvidas, convencimento, conflitos	perguntas, compartilhamentos, dúvidas, ajuda, defesa da ideia	descrever, entendimento, interpretação, mudança de ideias, fala

Fonte: Dados da pesquisa

Considerando a necessidade de selecionar apenas alguns dos problemas propostos com o intuito de não tornar este trabalho demasiadamente longo, analisaremos e discutiremos de forma minuciosa três problemas aplicados e suas respectivas resoluções com tentativas de resolução sugeridas pelos participantes do curso.

O primeiro problema (Problema 1) foi um problema autoral inspirado em problemas encontrados em livros didáticos, proposto para discussão do conceito de Permutação, no encontro 2. O problema teve por objetivo encontrar a posição de uma determinada pessoa numa fila de vacinação e ainda determinar quanto tempo seria necessário para que ela fosse vacinada.

O segundo problema (Problema 2) intitulado “Jogo da Mega-Sena” foi desenvolvido no encontro 3. Trata-se de um problema retirado e adaptado do livro Análise Combinatória do projeto “*Livro Aberto de Matemática*”, proposto para que os alunos pudessem aprender sobre Combinação a partir de fatos da realidade como os jogos da Mega-Sena e as probabilidades de se obter êxito nesses tipos de jogos de loterias. O terceiro problema (Problema 3), intitulado “Jogo da senha”, foi retirado do mesmo livro, tendo sido utilizado no encontro 4 para produção de dados da pesquisa desenvolvida.

As seções desse livro foram escritas para que o estudante desenvolvesse o raciocínio combinatório por meio de atividades investigativas, dando ênfase a Resolução de problemas. Longe de ser apenas mais um livro de Matemática, dentre tantos outros, o Livro Aberto de Matemática é um projeto que vem sendo desenvolvido por professores pesquisadores, muitos deles referências no ensino dos conceitos e procedimentos com os quais colaboraram na obra.

6.2.1Problema 1 e pontos que foram analisados

Conforme descrito anteriormente, o problema 1 foi utilizado com o objetivo de permitir que os participantes manejassem seus raciocínios combinatórios na construção do conceito de Permutação atribuindo significado ao algoritmo e à fórmula, visto que, segundo as respostas do questionário, eram conhecidos pela maioria dos alunos. Como já citado, os participantes possuíam muitos compromissos. Desse modo a forma encontrada para realizar os encontros era fazê-los duas vezes na semana, primeiro com um grupo e depois com outro. Para esse encontro participaram exatamente oito alunos. Logo quatro pessoas em cada dia de encontro. A etapa de preparação desse problema, primeiro momento da MEAAMaRP, constituiu-se da seleção de um problema que envolvesse o cotidiano e assuntos atuais como a vacinação para a COVID-19. Trata-se, portanto, de um problema autoral, cujo enunciado é apresentado a seguir.

Problema 1:

Luísa está em uma categoria montada por sua cidade para receber a vacina contra a COVID-19. Porém, junto com ela, há mais pessoas. A fim de não ter problemas e nem risco de aglomerações, cada pessoa recebeu uma senha de espera. A senha é escrita em ordem crescente com 4 algarismos distintos, utilizando somente os algarismos 1, 4, 5 e 7.

a) Luísa recebeu a senha 7415. Quantas senhas há na frente da senha da Luísa? Se colocarmos as pessoas em fila, de acordo com o número da senha, em que posição na fila ela estará?

b) O posto de saúde gasta, em média, 10 min para vacinar cada pessoa. A vacinação começa às 8h seguindo o número da primeira senha e formada pelos algarismos acima, em que horário Luísa será vacinada?

Seguindo a adaptação da MEAAMaRP para o ensino remoto, o passo seguinte seria a leitura individual do problema. Assim, os alunos leram o problema mostrado na tela e se dividiram em duplas. Nessa divisão já foi possível identificar uma negociação que aconteceu por conversas e por terem mais proximidade de uns do que outros. Seguindo para a leitura e o entendimento do problema em grupo em que apareceram fortemente os três elementos da prática, considerando que entendemos que faz parte da *negociação de significados* o compartilhamento e a aceitação de ideias, o respeito no falar e ouvir e a discussão sobre algum tópico. Sobre a *participação*, as duplas participavam ativamente, lendo e discutindo o problema e se posicionando conforme as ideias que tinham e a *reificação* ficou relacionada às interpretações dadas ao problema e aos dados escritos que foram destacados do problema. Um exemplo de como essa passagem ocorreu pode ser acompanhada pelos diálogos de duas duplas a seguir:

Quadro 2 - Diálogo da dupla Luiz e Nycolle na leitura coletiva

Nycolle: Já pensou em alguma coisa Luiz?

Luiz: Não pode repetir algarismo né, tipo 1111 não pode, né?!

Nycolle: Acho que não, deixa eu ler de novo…

Nycolle lê novamente o problema

Nycolle: Beleza, então crescente… então vai ser tipo 1457 a primeira, certo?!

Luiz: Isso… é porque é distinto, né? Acho que não pode repetir…

Nycolle: Ehh não pode, porque fala que são distintos. Eu também tinha pensado no 1111, mas não...

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 3 - Diálogo da dupla Bianca e Diogo na leitura coletiva

Bianca: Eu pensei em talvez a gente descobrir quantas senhas são possíveis fazer com estes algarismos eu não sei se vai ajudar alguma coisa, mas foi o que eu pensei primeiro.

Diogo: Boa, beleza, pensei nisso daí, em fazer primeiro também

Bianca: Tá... então como eles são quatro algarismos distintos, a senha é escrita em ordem crescente com 4 algarismos distintos, então no primeiro número da senha. né... algarismos assim a gente tem… Então na primeira opção, para escrever o algarismo da senha a gente tem quatro possibilidades, né?...

Fonte: Dados da pesquisa

O momento da resolução do problema foi bastante rico na questão das relações sociais, pois tínhamos um grupo de pessoas, em um domínio compartilhado, com interesse comum (resolver o problema), em uma atividade compartilhada. Nessa parte ficou claro que a *negociação de significados* se deu pela sugestão e a aceitação de ideias. Nesse momento, a presença da *participação* ficou clara por meio das ideias compartilhadas e dúvidas sanadas pelo próprio membro da dupla. Também percebemos, nesse momento, o dinamismo da MEAAMaRP no posicionamento dos integrantes do grupo. Ainda percebemos que a ideia a ser levantada e o plano criado para a resolução fazem parte do processo de *reificação*, pois foi esse o momento em que o problema se tornou uma "coisa".

Nessa etapa da resolução foi possível ver que quase todas as duplas utilizaram ideias a partir do Princípio Multiplicativo, que havia sido tema do encontro anterior, junto com a aritmética trazida como podemos ver nos quadros de diálogos:

Quadro 4 - Diálogo da dupla Carlos e Beatrice na resolução do problema

Carlos: Tá... a senha dela começa com 7 então tem mais outras senhas a frente dela porque vai ter senha que começa com 1, vai ter outra começa com 4 e outra que começa com 5.

Beatrice: Uhum, todas essas estão na frente dela então a gente leva isso em consideração… Se a gente fizer… tipo… Com a primeira escrito 1 a gente tem… (conta nos dedos)

Carlos: 6

Beatrice: 6 possibilidades (para a senha com 1 no algarismo do milhar)... Então 6 + 6 + 6… já tem 18 na frente dela

Carlos: Isso

Beatrice: Porque daí que começa com 1, que começa com 4 e começa com 5. Daí agora a gente tem que ver as possibilidades das que começam com 7, é isso?... Aí as que começam com 7 vou ter também seis possibilidades, em todas elas eu tenho 6 isso é óbvio… e aí a segunda… (segunda senha formada com milhar 7)

Carlos: Ehh… ela vai ter duas pessoas na frente dela quando… calma lá… você tem… olhando para os três últimos, têm seis pessoas na frente? É isso, né? Bem, não à frente, mas… que começa com 7, são 6?

Beatrice: Uhum, e aí quem vai estar na frente dela? Os que o próximo for 1 (casa da centena) então 154 (7154) e 145 (7145) está na frente dela… a dela já é a próxima então… então são 18 + 2 = 20

Carlos: Isso... tem 20 na frente, né?... Isso, são 20 a frente, ela é a 21ª e tem mais 3 atrás dela

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 5 - Diálogo da dupla Sara e Valentina na resolução do problema

Sara: Então eu acho que… eu estou pensando... seriam 6 números que começam com 1, 6 números que começam com 4, 6 números começam com 5 e 6 números que começam com 7. Eu acho que a gente pode só analisar os números que começam com 7 então, porque a gente quer saber a posição dela na fila e aí... da gente montar as possibilidades dos números que começam com 7 e aí a gente vai achar a posição desse 7415.

Valentina: Entendi, e os outros 18 já estão na frente, vou escrever aqui. Então os que começam com 7 seriam 7145, 7541...

Sara: 7154, 7514...

Valentina: E aí tem o dela né que a gente não colocou, 7415…

Sara: Está faltando um...

Valentina: 7451…

Sara: Isso…

Valentina: Agora só tem que colocar na ordem…

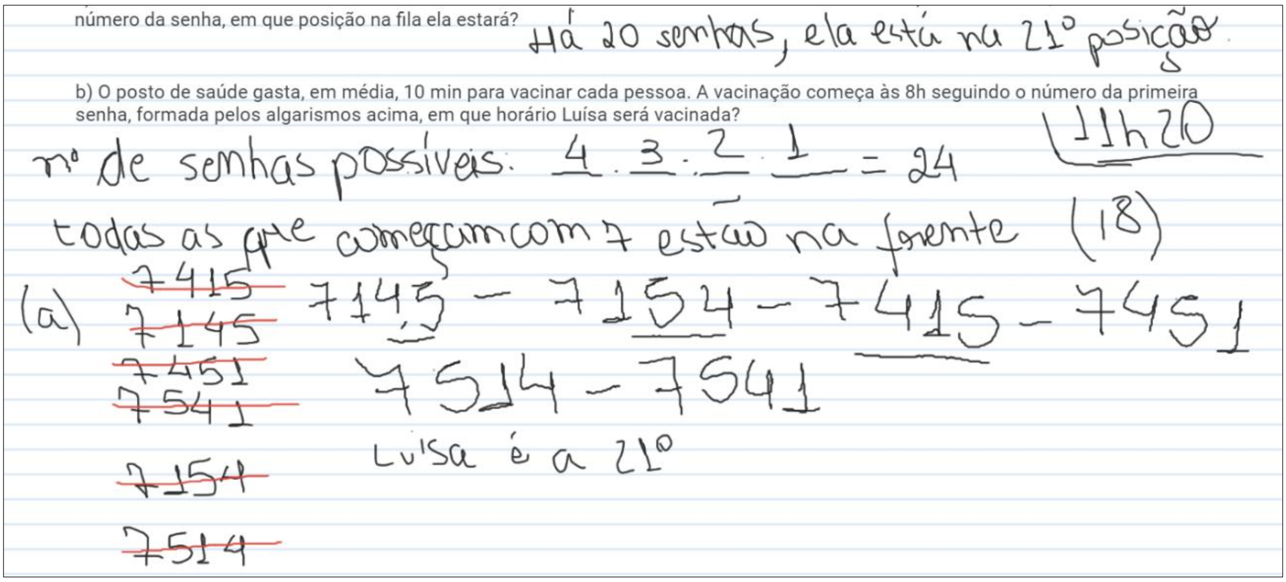
Sara: 7145, 7154, 7415, 7451, eu vou fazer todos só para a gente ver mesmo depois 7514 e por fim 7541, então se ela já tem 18 senhas na frente dela ela vai né aí esse aqui é o 19, o 20 e o 21. Então ela é a 21ª

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar pelos diálogos que mesmo possuindo um entendimento do que estava acontecendo no problema e utilizando-se do raciocínio combinatório, os participantes não mencionaram em nenhum momento o termo permutação ou qualquer sinônimo. Podemos perceber que há um entendimento sobre as possibilidades de números que podem ser formados com os algarismos disponíveis, mas isso não se manifesta na fala e nem em alguma possível relação com a fórmula da Permutação.

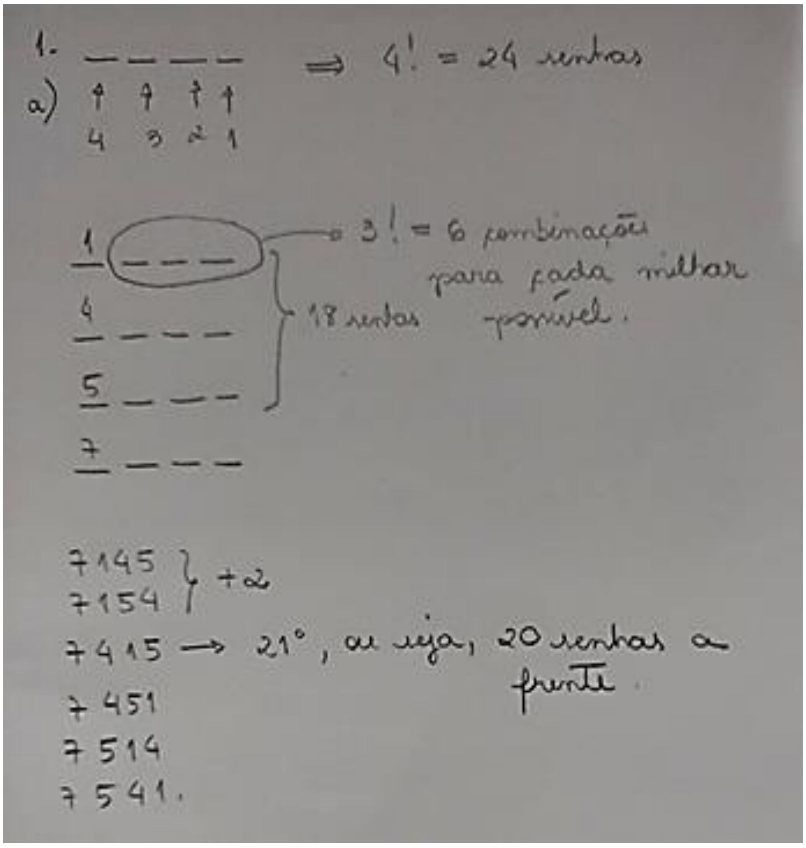
A resolução do problema poderia ser enviada por aplicativos de mensagens ou ser feita no próprio quadro digital que era acessado por todos os participantes. Nesse problema não houve uma diversidade de resolução, algumas são bem semelhantes como as resoluções das duplas Carlos/Beatrice e Bianca/Diogo. Ao final, todas as duplas chegaram a uma resposta correta.

Figura 9 - Resolução da dupla Sara e Valentina



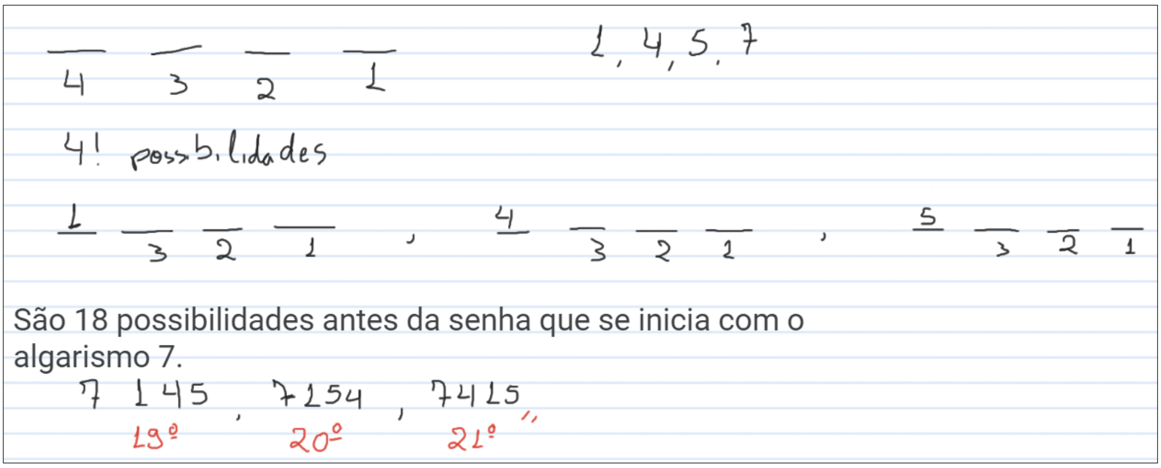
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 10 - Resolução da dupla Carlos e Beatrice



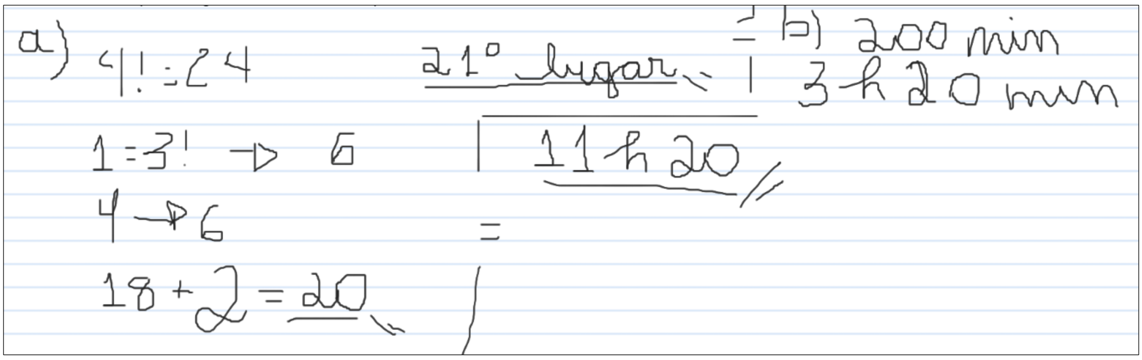
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 11 - Resolução da dupla Bianca e Diogo



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 12 - Resolução da dupla Nycolle e Luiz



Fonte: Dados da pesquisa

A plenária se destacou por promover um ambiente onde todos os participantes puderam participar ativamente mostrando e explicando seus resultados. Não houve uma negociação interna da dupla de quem apresentaria o resultado, porém alguns participantes se mostraram mais ativos e começavam a explicar como a resolução foi feita. A outra metade da dupla sempre concordava e complementava com algumas informações, mostrando que o trabalho foi realizado de forma colaborativa. Em relação aos elementos da prática, percebemos que a *negociação de significados* se deu pelas explicações da duplas, a *participação* aconteceu por meio da defesa da ideia de cada dupla e a *reificação* ficou por conta da descrição de como foi pensada a ideia da resolução.

Como nas duas plenárias que ocorreram (uma entre as duplas Carlos/Beatrice e Nycolle/Luiz, e outra entre as duplas Bianca/Diogo e Sara/Valentina), foi encontrado o mesmo resultado, a discussão foi feita sobre como esses resultados foram encontrados. Nas explicações da plenária foi possível ver alguns pontos de insegurança em utilizar os conceitos da Combinatória. Pois, ao serem perguntados "*E por que vocês colocaram o 4! = 24 senhas?*" alguns participantes responderam:

> Beatrice: *Foi mais pra ver quanto ia dar, isso aí é o tanto de gente que tem lá, é o total de senhas que vamos distribuir então não é muito pra gente tentar fazer né [no caso, fazer todas as senhas]... Eu fiz assim, pelo menos, eu tenho 24 então está tudo bem se eu precisar fazer na mão se eu não souber fazer assim, do jeito que a gente fez, né*
>
> Carlos: (complementa) *Para ter a ideia de quantos tinha (quantidade de pessoas na fila)*
> Diogo: *A gente também pensou: nossa, primeiro vamos ver quantas possibilidades de senhas que a gente pode ter, daí a gente fez da mesma forma o fatorial lá né...*
>
> Sara: *Das 24? A gente pensou que seria.... a gente trabalharia com fatorial aqui né. A gente tem quatro algarismos então a gente fez n! desse 4 para identificar o total de senhas que teriam.*
>
> Valentina: *A gente achou que seria mais fácil de identificar quantas senhas tem na frente dela tem se tiver uma noção de quantas senhas tem no total e aí ficou como a Sara disse né, a gente usou fatorial porque aí a gente sabe também quantas senhas já estão na frente dela, ou seja, as que não começavam com 7 né, as que começam com 1, com 4 e com 5 já estavam na frente... então a gente conseguiu esse número porque já a gente sabia o total*

A próxima etapa da metodologia seria a busca pelo consenso, porém todas as resoluções apresentavam o mesmo resultado, por esse motivo passamos para a formalização do conteúdo. Ao serem perguntados sobre o reconhecimento de qual conceito da combinatória estava sendo trabalhado no problema, alguns comentários foram:

> Nycolle: *Eu acho que a letra a foi arranjo, né? Ou não?*

> Valentina: *Ai... vou ser bem sincera que eu não lembro, não lembro mesmo lá do ensino médio... não lembro qual o tópico falava sobre o que estava... então se eu falasse algum nome aqui ia ser só porque eu lembro do nome mas eu não lembro o que ele fazia.*
>
> Diogo: *Talvez... talvez tipo arranjo? Ou alguma coisa que importa ordem? Porque aqui importa a ordem né, na posição. Tem posição, tem negócio de fila, mas eu não sei se seria um tópico…*
>
> Bianca: *Seria permutação?*
>
> Sara: *Eu pensei em arranjo simples também*

O momento da formalização foi o momento em que a interação dos participantes foi menor, pois a pesquisadora formalizou o conteúdo, mostrando que aquele era um problema de Permutação a partir das resoluções trazidas pelos participantes. A formalização iniciou-se com algumas percepções sobre a ordem da escolha dos números, pois precisava obedecer a ordem crescente. Depois foi conversado sobre a troca de algarismo que ocorria a cada senha e essa também poderia ser chamada de Permutação.

A participante Bianca comentou "*eu falei Permutação porque eu lembrava que tinha mais ou menos isso... mas eu não tinha certeza... mas é... eu lembro de comentarem que permutação pode ser usado a troca, né?!*" e o participante Diogo completou "*só pra eu entender, esse daí era uma Permutação então né, porque é a troca, porque são os mesmos números de um conjunto… é o mesmo conjunto só que em diferentes posições né, daí em relação a ordem a gente tem tantos tipos de… estaria então contando as ordens diferentes que esse conjunto poderia se dispor, tipo isso…*". Desse modo, a pesquisadora generalizou a ideia apresentada nas resoluções, mostrando que diante dos n elementos distintos do conjunto de algarismos para formar a senha, sendo a forma como esses n elementos são ordenados é chamada de Permutação e possui como fórmula: $P_n = n!$.

O encontro seguiu para a segunda parte em que o problema era comentado pensando a prática em sala da aula. A última etapa da MEAAMaRP foi realizada de forma assíncrona, como explicado no capítulo 4. Como o foco da análise está no uso do problema para desenvolver o raciocínio combinatório passaremos para o problema 2.

6.2.2 Problema 2 e pontos que foram analisados

O segundo problema apresentado neste trabalho foi retirado e adaptado de Spreafico e Silva (2021) intitulado de “Jogo da Mega-Sena”. Trata-se de um problema visando à aprendizagem de Combinação e relacionar o uso de contagem para compreensão de fatos da realidade. Nesse encontro participaram exatamente oito alunos, porém três alunos em um dia e cinco participantes em outro dia. Por esse motivo, em um grupo será considerada apenas a leitura coletiva e a resolução do problema pois, por falta de mais uma resolução, não foi possível realizar a plenária. Os elementos da prática observados neste problema são semelhantes aos do problema 1. Portanto, para não tornar algo repetitivo, daremos ênfase às diferenças que puderam ser notadas tanto no problema 2 quanto no problema 3. O enunciado do problema é apresentado a seguir.

Problema 2:

Passando pelo site do Banco Caixa Econômica Federal é possível encontrar a seguinte tabela de probabilidades. A probabilidade aqui está definida como uma taxa, que representa a chance de ganhar o prêmio, calculada como a divisão entre o número de casos favoráveis e o total de possibilidades de sorteios do prêmio.

Probabilidade

Quantidade de nº jogados	Valor de aposta	Probabilidade de acerto (1 em)		
		Sena	Quina	Quadra
6	4,50	50.063.860	154.518	2.332
7	31,50	7.151.980	44.981	1.038
8	126,00	1.787.995	17.192	539
9	378,00	595.998	7.791	312
10	945,00	238.399	3.973	195
11	2.079,00	108.363	2.211	129

Sabendo que o jogo é feito com a escolha de pelo menos 6 números dentre as possibilidades de 1 até 60. Responda:

a) Como calcular a probabilidade de ganhar o prêmio da Sena (acertar os seis números), Quina (acertar 5 números) e Quadra (acertar 4 números) com um jogo de 6 números?

b) Para fazer o jogo com 6 números pago R$4,50. Por qual motivo a escolha de sete números me custa R$31,50?

c) A estimativa de prêmio do próximo jogo da Sena é de R$6 milhões. Para fazer o jogo com 6 números pago R$4,50, quanto eu tenho que dispor de dinheiro para jogar todas as possibilidades do sorteio? Valeria a pena jogar todos as combinações possíveis? Senão, supondo que somente pudesse ganhar sozinho, quanto deveria ser o prêmio para que valesse a pena fazer todas as apostas possíveis para a Sena?

Em um dos dias desse encontro, por ter apenas três alunos, um trio foi formado e no outro dia, um trio e uma dupla foram formados. Um fato curioso é que os participantes se dividiam nos grupos com a preocupação de não repetir os mesmos integrantes, para que a troca de ideias sempre acontecesse de modo que todos tivessem um contato mais próximo em algum momento da produção de dados. Assim, na leitura coletiva e entendimento do problema percebemos a interpretação e a troca de ideias muito proeminente entre os membros dos grupos. Além disso era muito comum um membro esperar pelo outro questionando as dúvidas sobre o enunciado, mostrando uma ação colaborativa que é possível se ter com a MEAAMaRP. Também foi possível perceber o papel de cada membro do grupo em relação a participação. Nesse problema, por exemplo, o Diogo apresentou desde o início uma participação intensa, expressando ideias e questionamentos sobre como resolver o problema, como pode ser observado no diálogo abaixo:

Quadro 6 - Diálogo do trio Diogo, Luiz e Bianca na leitura coletiva

Diogo: É de 1 a 60…mas eu não estou entendendo, eu não sei como funciona esse negócio, se eu acertar… ah tá se eu acertar cinco números de seis eu faço a quina é isso?

Luiz: Isso… não, na verdade eu acho que são jogos diferentes, tipo a sena é um jogo, a quina é outro e a quadra é outro…

Bianca: Se acertar 6 números é da sena, se acertar 5 é o prêmio da quina e se acertar 4 é o prêmio da quadra…

Diogo: Mas eu escolho 6 números…

Bianca: Isso, você escolhe 6 números, mas se você acertar os 6 você ganha o prêmio da Sena, se você acertar 5 desses 6 números você ganha o prêmio da quina e se você acertar 4 desses 6 números você ganha o prêmio da quadra…

Fonte: Dados da pesquisa

O momento de resolução do problema foi iniciado com os participantes utilizando seus conhecimentos prévios pois, em seus diálogos, era possível ver que eles pensavam e expressavam ideias mantendo atenção se a ordem de escolha importava ou não, ou utilizando a ideia de possibilidades para cada opção como mobilizaram no problema anterior. Ou seja, eles foram seguindo por um caminho que conheciam para resolver um problema desconhecido, uma das premissas da MEAAMaRP. Nessa etapa, percebemos que nem todas as participações dos membros foram intensas. De acordo com Wenger (2001) há níveis diferentes de participação e não-participação nas CoPs. Nos trios formados foi observado que um membro sempre ficava na periferia do grupo, participando de forma bem sutil. Um exemplo desses diálogos pode ser acompanhado a seguir:

Quadro 7 - Diálogo do trio Nycolle, Beatrice e Carlos na resolução do problema

Nycolle: Então no meu primeiro número eu tenho 60 possibilidades, é isso?

Beatrice: Eu acho que é isso né, eu tenho 60 possibilidades para o primeiro…

Carlos: É… 60 no primeiro, 59, 58, 57, 56 e 55. É, isso vai dar um número enorme… Vou fazer aqui…

Beatrice: Deu muito alto, né? (o resultado da multiplicação)

Nycolle: Eu nem sei ler isso (sobre o resultado) (risos)

Carlos: É… 36045979200

Beatrice: Esse é o número?... Meu Deus do céu…

Carlos: Bora jogar?

Beatrice: Confia… vai ganhar sim (risos)... Agora a quina e depois a quadra?... Nada mais é do que dividir por 55 depois por… né?

Carlos: É ?

Beatrice: Confia… vai ganhar sim (risos)... Agora a quina e depois a quadra?... Nada mais é do que dividir por 55 depois por… né?

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 8 - Diálogo do trio Diogo, Luiz e Bianca na resolução do problema

Luiz: Eu acho que é parecido com outro né… a diferença é que… aqui a ordem também não importa, né? Tipo, se o cara sortear 1 2 3 4 5 6 ou 6 5 4 3 2 1, ele sorteou 6 números, né… aí tipo… eu acho que vai ser 60*59*58*57*56*55…

Diogo: Aqui no enunciado está dizendo que a probabilidade é a divisão dos casos favoráveis pelo total de possibilidades, então tem que ver quais são os… acho que o caso favorável é só um…

Luiz: Tem que calcular o total de possibilidades…

Diogo: Sim… o caso favorável é um só, né?… seria?... não sei, vamos calcular então esse… porque a pessoa vai jogar um número né?... vai fazer um jogo… vai escolher seis números, acho que só tem uma possi/ um caso favorável…mas tem o número de casos aqui né, o número de jogadas… ah sei lá galera… vamos fazer 60*59*58*57*56*55…

Luiz: Deu muita coisa, mas aí tem que dividir por alguma coisa… é 6! ?

Diogo: Acho que não divide…

Luiz: Acho que divide, porque tipo a ordem não faz diferença, faz?

Diogo: Acho que faz. Não faz?

Bianca: Não, não faz não…

Luiz: Não, faz sim... porque se você jogar…

Diogo: Não? Achei que fazia…

Luiz: Pensa assim, se eu jogar 1 2 3 4 5 e eles sortear o 3 primeiro ou o 1 primeiro tanto faz, entendeu? A ordem que eles vão sortear os números não faz diferença…

Diogo: Ahh tá… é que eu não sou inteirado desse negócio aí não, mas faz sentido mesmo, não importar a ordem

Luiz: É, eu tenho que ter aqueles números sorteados né, independente da ordem… é tipo bingo…

Diogo: É… e não vai repetir também, né, os números?

Luiz: É, acho que não repete, aí eu não sei…não repete?

Bianca: Acho que não…

Diogo: Então é dividido por 6! mesmo…

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 9 - Diálogo da dupla Sara e Enzo na resolução do problema

Sara: São 6 números, exatamente. Então para o primeiro caso seria… total de números é 60…vai ser isso aqui 60*59*58…

Enzo: Senhor! Quantas possibilidades…

Sara: 205320...

Enzo: Não, porque você vai fazer 60*59*58*57*56*55 né?

Sara: Não...

Enzo: Não vai ser 60! dividido por (60-6)!?

Sara: Isso…

Enzo: E não dá 54?…não dá 60! dividido pelo 54!

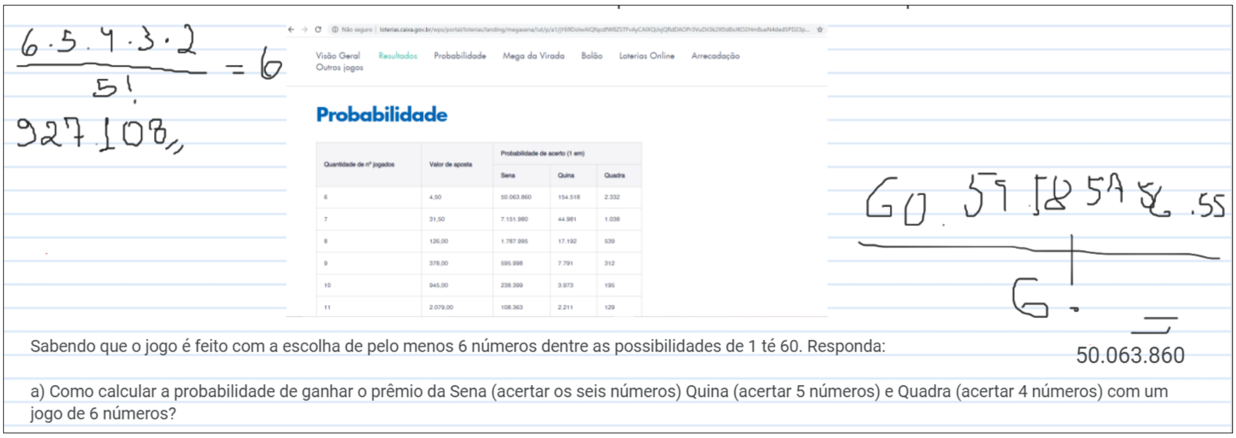
Sara: Ahh, é verdade…

Enzo: Ahh eu pensei que tinha errado…nossa 36 bilhões?

Fonte: Dados da pesquisa

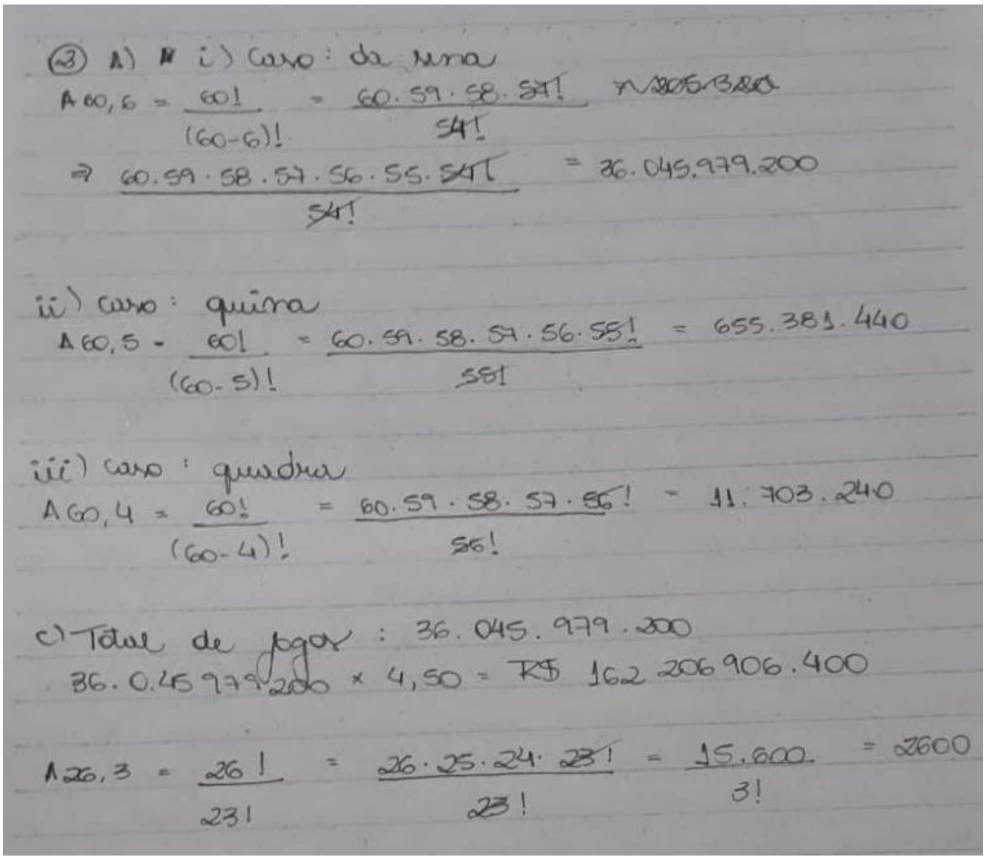
O primeiro item do problema (letra a) possuía três subitens, calcular a probabilidade de ganhar a Sena, a Quina e a Quadra. A resolução deste item já se mostrou bastante complicado para os participantes. Ainda que iniciassem o problema com seus conhecimentos prévios, apenas um grupo conseguiu chegar a um resultado para calcular a probabilidade da Sena, porém não souberam como encontrar resultados para a Quina e para a Quadra. Um outro grupo conseguiu chegar ao resultado correto por conta de algumas observações feitas pela pesquisadora, durante um momento de muitas dúvidas, em que eles não sabiam mais o que fazer. Embora não tenham conseguido terminar sozinhos a resolução do problema, os participantes relacionaram muitas ideias do raciocínio combinatório, como pensar na ordem da escolha dos elementos, as possibilidades de escolha para cada número, no caso do problema. Abaixo, as resoluções dos grupos podem ser conferidas:

Figura 13 - Resolução do trio Diogo, Luiz e Bianca



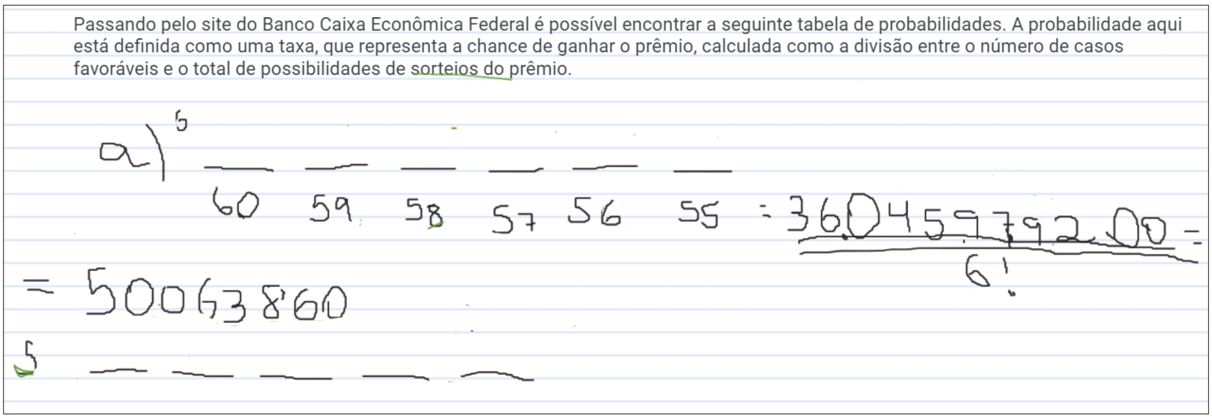
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 14 - Resolução da dupla Sara e Enzo



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 15 - Resolução do trio Nycolle, Beatrice e Carlos



Fonte: Dados da pesquisa

A plenária se evidenciou por ser um momento em que tanto os significados ficaram mais presentes como ficou mais claro a participação de cada participante. Neste problema, alguns participantes tomaram a liderança falando sobre suas resoluções e como houve duas resoluções distintas, todos os participantes discutiram sobre qual estava certa. Um pouco do diálogo dos participantes pode ser acompanhado abaixo:

> Luiz: *Então a única coisa que saiu era tipo 60*59*58*57*56*55 dividido por 6!, mas a gente não tinha certeza se a gente usou certo o 6!... porque deu muito número, deu muitas combinações e a gente não sabia onde estava o erro… Porque ele estava pegando 6 números do total, foi disso que a gente tirou…*
>
> Bianca: *E a gente também pensou na repetição né… pode ter combinações iguais, não sei… ehh acho que foi isso…*
>
> Diogo: *É porque não importa a ordem, né…*
>
> Luiz: *Ehh… Se pegar Ana, Diogo e Enzo; e Diogo, Enzo e Ana dá na mesma…*
>
> Sara: *Então… a gente pensou que o total de possibilidades seria como se fosse o Princípio Multiplicativo. Então a gente tem que ter os números e aí para o primeiro número a gente teria 60 possibilidades,*

> *aí para o segundo 59 possibilidades porque já tem um número e para o terceiro 58 possibilidades... aí a gente encontrou que seriam 36.045.979.200 possibilidades de escolher os seis números...*
>
> Bianca: *Eu acredito que talvez o do outro grupo faltou pensar nessas combinações que podem se repetir né...a ordem pode mudar ali mas a gente tem que considerar que tem combinações que vão se repetir, que nem o Luiz deu o exemplo dos nomes...acho que só faltou considerar isso mesmo...*
>
> Diogo: *Eu ia falar isso mesmo, porque são bastante possibilidades né... é mais possibilidades do que eu achava que estava certo... eu não sei não...*
> *Sara: Não sei gente...me deixou confusa agora...*
>
> Enzo: *Quando a gente pensou no exercício, a gente não pensou nessa possibilidade que o pessoal falou assim, a gente pensou mais do jeito que a gente falou... agora eu também não sei... eu realmente estou pensando...*

Algumas *participações* que na resolução de problema nos grupos se mostraram periféricas, na etapa da plenária se mostraram bem ativas e intensas com a defesa da ideia das duplas. Isso pode se dar pelo momento de ainda estar entendendo o que está acontecendo no grupo e depois em um momento de exposição, aquilo que foi aprendido e internalizado se torna um local seguro para endossar uma ideia construída em grupo. Nessa etapa, a *negociação de significados* sobre a resolução do problema ficou marcada pela discussão das ideias, conflitos e explicações sobre as resoluções, a *reificação* ficou por conta da descrição da resolução, sobre o entendimento a respeito da ordem ser importante ou não e das repetições que precisavam ser contadas.

Após o momento da plenária, a pesquisadora continuou as etapas da MEAAMaRP, seguindo para a formalização do conteúdo, onde os participantes puderam tirar suas dúvidas sobre como resolver os outros subitens do item a e os outros itens do problema. Em um das resoluções, uma dupla utilizou a fórmula do arranjo. Ao serem questionados, a participante Sara afirmou que "*então, eu pensei nela porque a gente tem um total de 60 números e ele* *quer restringir seis números dentro desse grupo, então seria um restrição dentro de uma restrição e aí... por isso que eu pensei nela… mas eu acho que… talvez a gente tenha errado de novo em não ter dividido por 6!, não sei…*”. Assim, a pesquisadora confirmou que havia uma escolha de elementos e que isso era um princípio importante, porém a ordem da escolha não era importante nesse caso, e por isso o problema envolvia a Combinação. Dessa forma, as ideias foram generalizadas e fórmula da Combinação foi desenvolvida, corrigindo a fórmula colocada pela dupla Sara e Enzo. No caso, a fórmula correta é: $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Alguns comentários sobre essa etapa, foram:

> Luiz: *O que confundiu foi a Quina e a Quadra porque a Sena a gente conseguiu, mas na hora de calcular a Quina a gente se confundiu muito… a gente não conseguiu chegar em um resultado…*
>
> Sara: *Então, eu lembrava das duas fórmulas mas na hora eu não interpretei o problema como um problema de combinação, acho que foi por isso que eu já fui direto no automático pensando que era um arranjo…Então, eu acho que foi uma questão com bastante informação… então tinha que ler com calma e ir fazendo o passo a passo… eu acho que a gente acabou errando a letra a… a dificuldade que a gente encontrou estava na letra b, a gente teve um pouco de dificuldade de conseguir pensar na letra b… e aí sobre a letra c a gente achou um pouco absurdo uma pessoa fazer todos os jogos…*

Depois de mobilizados os conhecimentos, discutidas todas as resoluções e feita a formalização do conteúdo, o encontro seguiu para o segundo momento em que o problema era discutido de uma forma pedagógica, pensando e analisado para uso em sala de aula. Como esse não é o foco desta análise, passaremos para o último problema.

6.2.3 Problema 3 e pontos que foram analisados

O terceiro problema escolhido para ser apresentado neste trabalho também foi retirado e adaptado de Spreafico e Silva (2021) intitulado de “Jogo da senha”. Trata-se de um problema visando à aprendizagem do conteúdo de Arranjo e espera-se que os participantes percebam o efeito da ordem e da repetição na contagem. Esse é um jogo conhecido, que pode ser encontrado em formato físico em lojas de brinquedos, mas o utilizado na produção de dados desse problema foi uma adaptação[11] do jogo para o *software* GeoGebra. Nesse encontro participaram exatamente seis alunos sendo três participantes em um dia e 3 participantes em outro dia. Por esse motivo, para esse problema será considerada apenas a leitura coletiva e a resolução do problema, pois por faltar mais uma resolução não foi possível realizar a plenária nos encontros. O enunciado do problema é apresentado abaixo.

Problema 3:

O objetivo deste jogo e descobrir a senha. A senha é composta por 4 cores distintas. Clique em cada um dos 4 quadrados para selecionar uma cor dentre 6 disponíveis, e em seguida clique no botão verificar. Sua tentativa será salva nas linhas com 4 bolinhas, e automaticamente é gerado uma análise como pode ser conferida na tela do jogo. O jogador deverá observar a análise feita antes de seguir para a tentativa seguinte. Vence o jogador que acertar a senha com o menor número de tentativas.

a) Qual foi o maior número de tentativas feitas pelos grupos para acertar a senha?

b) Seguindo todas as dicas, é possível saber qual seria o número máximo de tentativas para acertar a senha? Se sim, determine esse número.

c) Quantas senhas são possíveis formar nesse jogo?

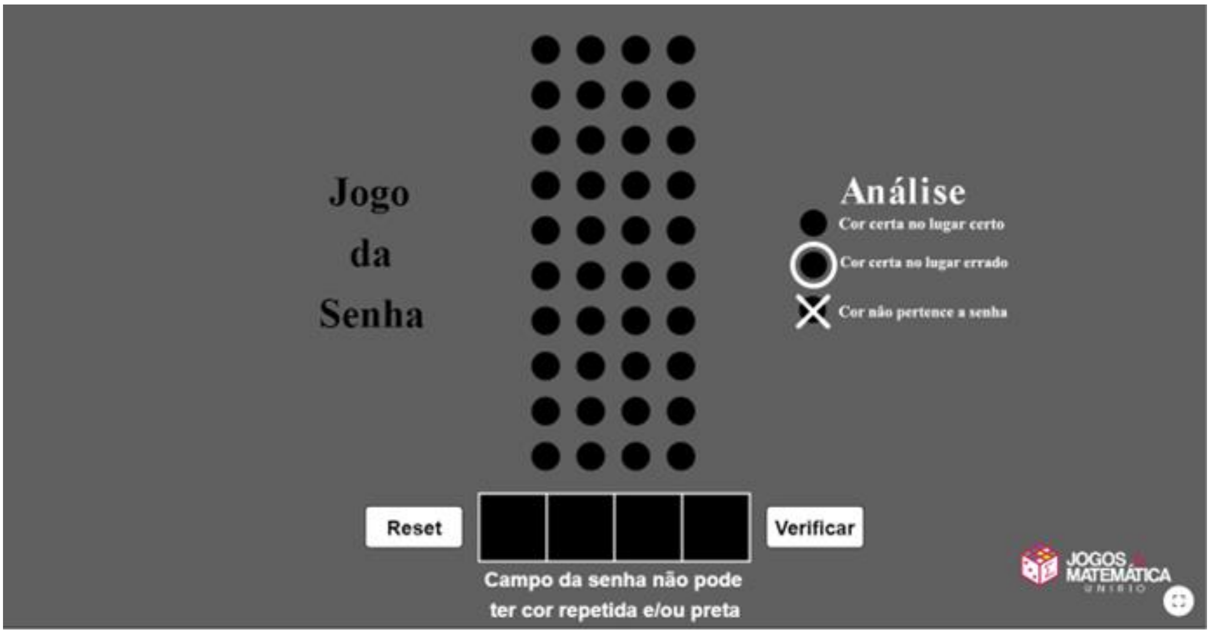
d) Caso o jogo não fornecesse as dicas qual seria o número máximo de tentativas para acertar a senha?

e) Qual seria o número de senhas possíveis se fosse permitido repetir as cores?

f) Levando em conta que quanto mais possibilidades de senhas mais segurança para os usuários, já que descobrir a senha por tentativas se torna uma tarefa difícil, seria melhor uma senha que permitisse ou não repetição de caracteres?

g) Dada uma senha do tipo dado no exercício, quais modificações poderiam ser feitas em sua construção para se tornar mais difícil de determiná-la?

[11] O jogo pode ser acessado pelo site: https://www.geogebra.org/m/rjyuwp2j



Como se tratava de um jogo, os participantes se puseram a jogar por algumas rodadas para entender como se formavam as situações em cada rodada. E eram incentivados a jogar a cada item do problema afim de testar suas conjecturas no jogo. Mais uma vez a leitura coletiva e o entendimento do enunciado do problema mostraram-se como *negociação de significados*, interpretação e troca de ideias muito relevantes entre os membros dos grupos. Além disso, algumas dúvidas sobre o enunciado eram conversadas e sanadas dentro dos grupos, mostrando mais uma vez o caráter cooperativo da MEAAMaRP.

Na etapa da resolução do problema em grupos, os participantes articularam seus raciocínios combinatórios com ideias trabalhadas nos encontros anteriores. Para o item a (*Qual foi o maior número de tentativas feitas pelos grupos para acertar a senha?*) os dois trios jogaram diversas vezes e chegaram à conclusão de três tentativas para acertar a senha. Para a resolução do item b (*Seguindo todas as dicas, é possível saber qual seria o número máximo de tentativas para acertar a senha? Se sim, determine esse número.*) do problema o trio Nycolle, Beatrice e Carlos argumentou que:

Quadro 10 - Diálogo do trio Nycolle, Beatrice e Carlos na resolução do item *a* do problema

Carlos: Olha eu fiz sozinho aqui de novo e o máximo foi 3…tem alguma conta que dá no máximo 3 (máximo de tentativas)…

Beatrice: Mas o máximo… vamos tentar mais uma rodada… eu queria acertar de primeira…

Carlos: Eu ainda estou muito perplexo que está dando 3…

Beatrice: Faz sentido, porque são 6 cores, a gente tem 4 espaços… o máximo de erro são duas, faz sentido?... erro do tipo não tem mesmo essas cores porque as outras podem estar invertidas…

Nycolle: Porque na primeira tentativa a ordem não vai importar, então vai ser o 6! por 4!, né? 6 combinadas em 4…porque a gente vai colocar do jeito que a gente acha, certo?

Carlos: Aham tá…

Nycolle: Então vai ser 6 combinadas em 4… sem poder repetir…

Beatrice: 6 combinadas em 4 é 6*5*4*3?

Nycolle: Não… é combinação, a fórmula que a gente estava usando no outro encontro…

Beatrice: Ahh 6! dividido por 4!*2!... tá…

Nycolle: E aí na segunda, a ordem já vai importar porque você já vai ter algumas dicas… você já vai ter alguma noção que nem a gente já viu que aquela ordem está errada, então a gente vai ter que colocar outra ordem, então a ordem já importa…

Fonte: Dados da pesquisa

A respeito do item c (*Quantas senhas são possíveis formar neste jogo?*), os participantes continuaram mobilizando conhecimentos anteriores. Esse problema foi proposto no Encontro 3 e a partir dos diálogos conseguimos perceber que a fórmula ou os conceitos da Combinatória são trazidos com um sentido e não apenas jogadas como nos primeiros encontros. Aqui os participantes também não apresentavam uma pressa em saber qual era a fórmula, eles se interessavam em entender sobre o que o problema estava tratando, como podemos ver nos diálogos abaixo:

Quadro 11 - Diálogo do trio Nycolle, Beatrice e Carlos na resolução do item *c* do problema

Beatrice: É 6… ehh é combinação, né?

Nycolle: Não, porque a ordem vai importar né…

Carlos: Se a ordem importa então vai ser 6*5*4*3?... não é isso?

Beatrice: Permutação?...

Nycolle: Não, porque a gente tem 6 e a gente precisa colocar em 4…

Beatrice: 6*5*4*3...

Nycolle: Vocês acham que é isso?

Carlos: Eu penso que é, porque…

Nycolle: Permutação que seria, mais ou menos…

Beatrice: Não é exatamente uma permutação… é que seria 6! dividido por 2! e o que é isso?... se a gente for pensar igual fez na combinação… eu acho que é isso…

Nycolle: Bom… eu coloquei a resposta lá, (6!/2!=360)... depois a gente vê…

Beatrice: E isso é quantas senhas a gente pode formar nesse jogo…

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 12 - Diálogo do trio Diogo, Bianca e Luiz na resolução do problema

Diogo: Quantas senhas é possível formar nesse jogo?... Milhares (risos)…

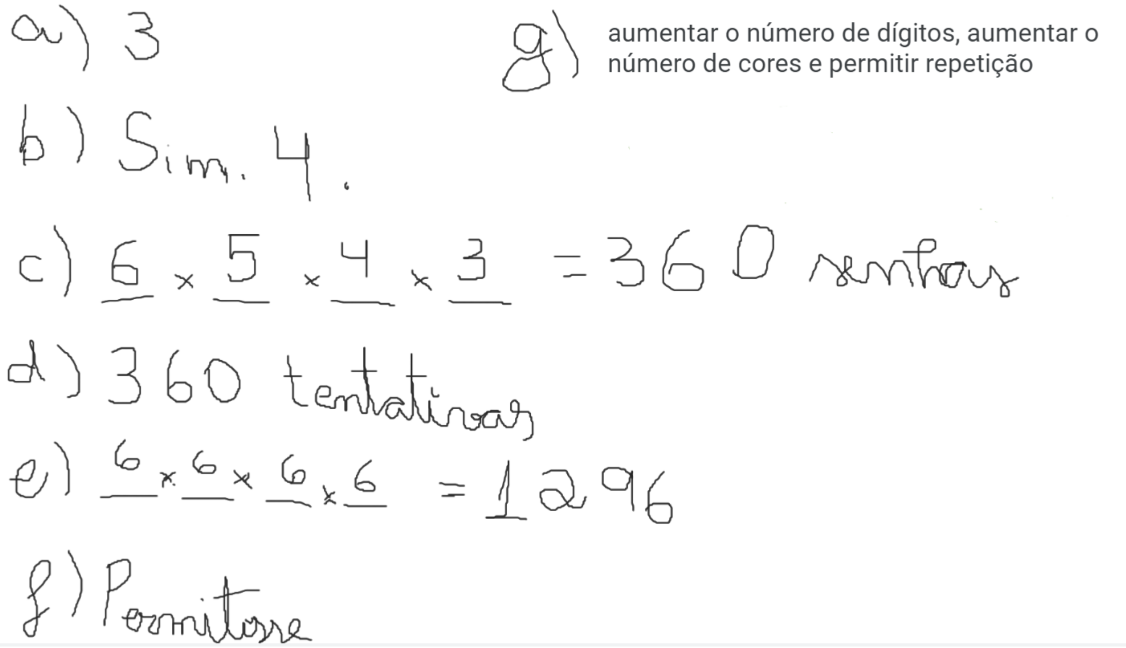
Luiz: São 6 cores… 6*5*4*3, né? É isso? Dá 360…

Diogo: É, acho que é isso… 360…

Fonte: Dados da pesquisa

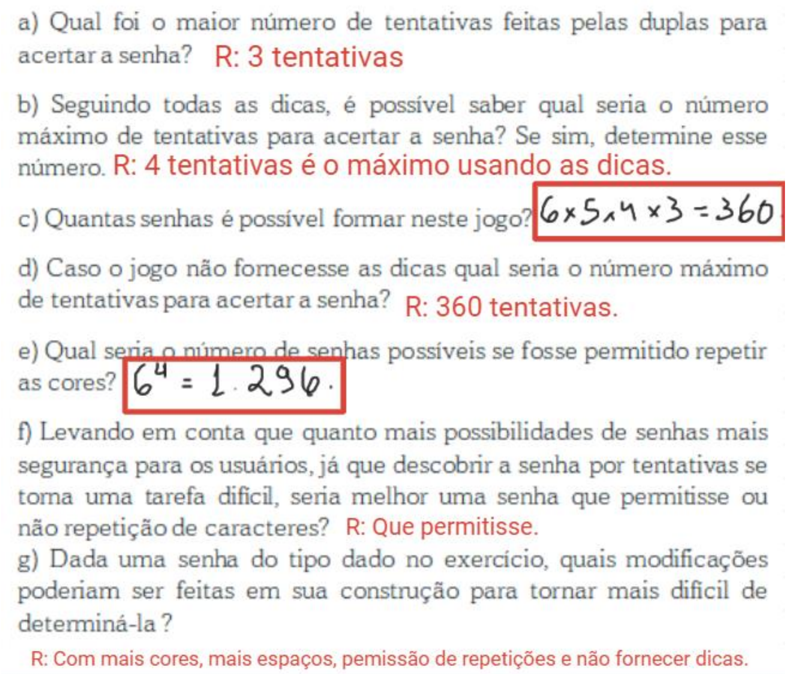
Em todo o momento da resolução do problema em grupo foi percebido que a *negociação de significados* se deu pelo entendimento do problema e a *reificação* pelo entendimento da importância da ordem na escolha dos elementos, e dos tipos de elementos. As resoluções dos grupos podem ser conferidas nas figuras 14 e 15.

Figura 16 - Resolução do trio Nycolle, Beatrice e Carlos



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 17 - Resolução do trio Diogo, Luiz e Bianca



a) Qual foi o maior número de tentativas feitas pelas duplas para acertar a senha? R: 3 tentativas

b) Seguindo todas as dicas, é possível saber qual seria o número máximo de tentativas para acertar a senha? Se sim, determine esse número. R: 4 tentativas é o máximo usando as dicas.

c) Quantas senhas é possível formar neste jogo? $\boxed{6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360}$

d) Caso o jogo não fornecesse as dicas qual seria o número máximo de tentativas para acertar a senha? R: 360 tentativas.

e) Qual seria o número de senhas possíveis se fosse permitido repetir as cores? $\boxed{6^4 = 1.296.}$

f) Levando em conta que quanto mais possibilidades de senhas mais segurança para os usuários, já que descobrir a senha por tentativas se torna uma tarefa difícil, seria melhor uma senha que permitisse ou não repetição de caracteres? R: Que permitisse.

g) Dada uma senha do tipo dado no exercício, quais modificações poderiam ser feitas em sua construção para tornar mais difícil de determiná-la ?

R: Com mais cores, mais espaços, pemissão de repetições e não fornecer dicas.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse encontro não foi possível acontecer a plenária, pois foi composto por somente um trio em cada um dos dias. Portanto, seguiremos para a próxima etapa. Ao serem perguntados sobre como resolveram o item c, as respostas foram:

> Beatrice: *6*5*4*3 porque... por que?... É, e a gente dividiu por 2!... eu não sei o nome disso, não faço ideia... Arranjo...é arranjo?...*
>
> Nycolle: *Uma hora tem que ter arranjo...Finalmente, todos os encontros eu falei arranjo e não era, até hoje... Porque a ordem vai importar...*
>
> Luiz: *É a fórmula de quando a ordem faz diferença, né?*
>
> Bianca: *É a fórmula do arranjo?*

Na formalização do conteúdo, a pesquisadora perguntou como o grupo pensou na resolução do problema e Carlos afirmou que "*você tem 6 cores, então no primeiro lugar você pensa nas 6 cores que você tem, aí para o próximo você vai descartar uma e você vai ter 5 cores, no próximo 4 cores e no último 3 cores, é basicamente o que a gente fez de permutação...*". A partir dessa fala, a pesquisadora também observou que não apenas a ordem mas, também, as cores escolhidas, visto que se uma cor fosse trocada, mudaria toda a senha. Assim, a ideia do arranjo foi generalizada e apresentada a fórmula: $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$.

6.3 Contribuições para o processo de raciocínio combinatório

A análise dos três problemas selecionados permitiu que nós pudéssemos compreender como os elementos da prática surgem a partir de um trabalho em uma Comunidade de Prática e, ainda, como se mostram nas etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir da análise dos problemas observamos, através das resoluções e das falas transcritas dos participantes, que a produção de dados foi uma ocasião favorável para o desenvolvimento do pensamento lógico desses futuros professores, visto que Roa *et. al* (1997) citam a Combinatória como fundamental para o pensamento formal de indivíduos.

Os problemas apresentados foram propostos em encontros seguidos. Por esse motivo também notamos que há uma mudança na forma de raciocinar e lidar com o problema. No primeiro encontro, os participantes estavam totalmente focados em encaixar uma fórmula nas resoluções, uma postura totalmente diferente no encontro 4 (em que foi proposto o problema 3). A premissa de utilizar conhecimentos prévios para construir novos conhecimentos é um dos pontos chaves da MEAAMaRP, como já explicado por Onuchic e Allevato (2014).

Outro fato relevante para essa análise foi a resolução dos problemas em grupos, que era um momento em que ocorria um engajamento mútuo de todos os participantes em um interesse compartilhado que era encontrar uma solução para o problema. A mobilização dos conhecimentos de cada licenciando fez com que a etapa de resolução se tornasse ricos momentos de colaboração e cooperação com troca de ideias, conflitos e dúvidas.

Um ponto importante que é preciso ser destacado é em relação à ótica pedagógica dos encontros. A cada encontro havia um momento de conversa entre a pesquisadora e todos os participantes sobre as potencialidades do problema resolvido naquele determinado encontro. Os participantes comentavam sobre a forma como a metodologia caminha para um raciocínio lógico, não apenas combinatório, mas para uma forma de pensar que pode ser trabalhada em outros assuntos do ensino de Matemática. Além da forma, os licenciandos comentaram sobre como os problemas poderiam ser trabalhados, pensando métodos diferentes sobre a aplicação do problema.

Alguns participantes comentaram sobre a atualidade apresentada em alguns problemas, pois muitas questões encontradas em livros didáticos versam sobre problemas não atuais ou com uma realidade distante:

> Nycolle: *Eu gostei bastante do jeito que ele tá… eu faria com certeza, eu achei bem legal até porque traz a questão do COVID e eu achei bem legal*.
>
> Bianca: *Eu achei bem interessante, até porque na hora que a gente foi resolver o exercício também o Diogo acabou comentando "nossa, 10 minutos para vacinar, não é só colocar a vacina do braço" mas tem toda uma outra questão né, não é isso tem gente que não entende né você chega também no posto tá lá no pessoal já foi vacinar né, então não sei como foi de vocês mas no que eu cheguei tinha um monte de gente, aí você já começa a achar ruim que não sei o quê que está*

demorando, mas tem toda essa questão. Pode também abordar a questão da importância de vacinar né, então eu achei um problema muito interessante a questão que trazia ali.

Diogo: *A importância de ter mais de um posto de vacinação, mais de um enfermeiro e de ir no dia certo também*.

Em relação ao que achavam dos problemas, alguns participantes comentaram que:

Beatrice: *Acho que eles não teriam problema porque tá escrito lá a ordem crescente, quais os números são, qual é a ordem. Acho que tudo certo e por mais que não soubesse fazer igual a gente fez aqui né porque a gente já passou por essa fase eles poderiam fazer na mão e não ia dar problema porque são só 24[senhas], igual eu falei no começo. Eu faria um a um se eu não tivesse certeza do que estava fazendo.*

Valentina: *Eu achei que ficou bem claro assim pelo menos, teve uma hora que eu pensei: nossa, mas os números podem se repetir na senha? E aí eu lembrei que tava lá no enunciado, então acho que ficou bem claro. Não tem ambiguidade né, a gente até comentou isso na semana passada que é ruim quando os problemas dão uma dupla interpretação né porque daí pode ser resolvido de... mais formas ainda. E esse problema eu achei bem claro e direto, fácil de ver o que está acontecendo também*.

O VOO CONTINUOU... E PODE CONTINUAR...

Neste estudo, cujo objetivo principal foi o de compreender como pode a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas ajudar no desenvolvimento do raciocínio combinatório de futuros professores e contribuir para a reflexão sobre suas ações pedagógicas, encontramo-nos inesperadamente com diversos desafios. A pandemia de Covid-19 foi uma tempestade que fez com que o percurso, inicialmente elaborado para o nosso voo, fosse completamente alterado. De uma hora para a outra, nos vimos presos em nossas gaiolas. Entendemos que essa medida foi tomada visando ao bem comum, à não proliferação do vírus mas, ainda assim, estávamos presos.

Maya Angelou, escritora norte-americana, tem como título de sua biografia “Eu sei por que o pássaro canta na gaiola”. Hoje, posso dizer que também descobri meu canto, não só o meu, mas o de todos que ajudaram a construir este trabalho. Mesmo percorrendo um caminho diferente, sem a liberdade do voo, percebemos que poderíamos cantar. Cada um com seu canto e literalmente no seu canto fomos construindo juntos cada pedacinho deste trabalho.

A pesquisa, conduzida para alcançar o objetivo pretendido, foi de natureza qualitativa fazendo uso do modelo de Romberg-Onuchic para estruturar todo o trabalho e adotando os elementos da prática de uma Comunidade de Prática (WENGER, 2001) como análise dos dados produzidos em sete encontros com oito participantes, proposto com o intuito de contribuir com o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos da Licenciatura em Matemática. A partir da finalização da produção de dados da pesquisa foi possível constatar que a proposta da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) contribuiu para a promoção da aprendizagem combinatória desses futuros professores que dele participaram, possibilitando-lhes um processo reflexivo em que os participantes puderam dar significado os conceitos combinatórios construídos e compreender melhor as fórmulas ao invés de decorá-las.

Os problemas, utilizados para a produção de dados, buscaram propiciar aos alunos da Licenciatura um contato com conceitos combinatórios levando em consideração a cotidianidade e dando protagonismo ao raciocínio e à criatividade dos participantes. Nesse sentido, os alunos puderam resolver problemas que lhes permitiram perceber a importância da ordem na escolha de elementos de um conjunto e a atenção sobre a natureza dos elementos escolhidos, além de entender as técnicas representadas pelas fórmulas. Outro aspecto igualmente valorizado durante os encontros foi a relevância de uma leitura correta do problema pois sua interpretação está intimamente ligada ao entendimento do enunciado de um problema combinatório. Além disso, o raciocínio combinatório (raciocínio hipotético-dedutivo mobilizado em situações em que é preciso agrupar elementos a partir de certos critérios), ao longo dos encontros, tomou o lugar principal da fórmula. Como já dito, no percorrer dos encontros observamos que o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos participantes tornou-se cada vez mais presente. As estratégias de resolução e os argumentos apresentados passaram a fundamentar não apenas seus conhecimentos prévios, provenientes de situações anteriores à pesquisa, como as experiências de aprendizagem no Ensino Médio ou no Ensino Superior mas, também, conhecimentos combinatórios construídos em um encontro eram mobilizados nos encontros seguintes. Percebemos que esse progresso pode ser creditado ao trabalho de reflexão sobre as resoluções dos problemas provocado pela pesquisadora ao longo dos encontros, além das reflexões de como os problemas explorados poderiam ser trabalhados em sala de aula de forma que os participantes pudessem conjecturar possíveis desafios de sua prática futura.

Acreditamos que a ação pedagógica da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, defendida por Onuchic e Allevato (2011, 2014, 2021), aprimorou a aprendizagem da Combinatória. As etapas da MEAAMaRP adaptadas para o ensino remoto incitaram os alunos a ler, interpretar e discutir todos os enunciados dos problemas. O momento das resoluções realizadas em grupo também foi muito importante para a troca de ideias e de respeito entre todos os membros do grupo. A plenária, quando possível de ser realizada, foi um dos momentos mais relevante dos encontros, pois era o instante em que todos os grupos se reuniam em um grupo maior para discutir como tinham enfrentado e resolvido os problemas. Na plenária aconteceu uma chuva de informações e colaboração. Todos estavam reunidos dialogando sobre qual seria a melhor maneira de resolver o problema colocado, diante das estratégias que tinham elencado nos grupos menores. A formalização do conteúdo foi um momento com pouca interação dos participantes pois todo esse conteúdo foi formalizado pela pesquisadora. Porém esse conteúdo era elaborado a partir das resoluções dos participantes, com o intuito de clarear e generalizar as ideias que os membros dos grupos tiveram quando buscavam suas resoluções. Assim, entendemos que todas essas ações contribuíram para o aperfeiçoamento do raciocínio combinatório dos participantes.

Ainda, consideramos que o fato da pesquisa ter sido elaborada em uma Comunidade de Prática, formada pela pesquisadora e os participantes, contribuiu não apenas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório mas, também, para a reflexão da futura prática desses futuros professores. Seus participantes compartilhavam um engajamento mútuo que os levava à aprendizagem da Combinatória, e um interesse compartilhado, pois todos se mostraram interessados em conhecer e experenciar um modo diferente de apresentar os conteúdos matemáticos através da resolução de problemas. Um aspecto muito interessante foi o do relacionamento dos participantes. Cada um possuía vivências diferentes no Ensino Médio porém exibiam experiências parecidas no Ensino Superior. Essa troca de experiências ficou bastante visível nos encontros, pois cada indivíduo trazia algo que havia internalizado no Ensino Médio, em suas experiências com a Combinatória, embora nenhum participante tenha citado algo que viveu no curso de Licenciatura.

Em um jardim grande como o campo da pesquisa, por mais que fosse nosso desejo, nem todas as flores puderam ser alcançadas. Apesar de entender a importância de nosso trabalho, entendemos que é um exercício de humildade tecer críticas construtivas e mostrar pontos que poderiam ser melhorados ou feitos de forma diferente. Desse modo, acreditamos que para uma análise mais apurada sobre a aprendizagem da Combinatória, a pesquisa de campo deveria contar com mais encontros ou, até mesmo ser desenvolvido em um curso de extensão. Portanto, julgamos este trabalho como um estudo embrionário, pensando também na experiência que esses futuros professores vivenciaram podendo lhes despertar interesse em fazer uso da MEAAMaRP em sua prática futura.

Ainda, sobre a duração dos encontros, com uma programação maior, alguns outros temas poderiam ser abordados, desde a relação do ensino de Combinatória nos anos iniciais como aponta Pessoa e Borba (2009) até chegar às ideias da Casa de Pombos ou de Grafos. Uma produção de dados com um acompanhamento maior também seria importante para conhecer mais os participantes. Isto é, conhecer mais sobre suas particularidades e preferências o que poderia ser evitado com um contato mais prolongado com os estudantes que, no contexto do ensino remoto, talvez não fosse bem aceito por parte dos participantes da pesquisa.

No que diz respeito à adaptação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para o ensino remoto, consideramos que há muita discussão ainda a ser feita. Mesmo com a volta ao ensino presencial, a pandemia mudou a forma de nos relacionarmos e o que um dia, pensamos em adaptar para um momento pode ser a parte inicial para pesquisas referentes a como utilizar a metodologia na Educação a Distância, por exemplo. Indico a dissertação de Severo (2021) que também realizou sua pesquisa utilizando a MEAAMaRP no período do ensino emergencial remoto e outras produções do GTERP. Esperamos que os apontamentos realizados nesta seção final, como de praxe do modelo de Romberg-Onuchic, possam servir como uma antecipação das ideias de outros para contribuir ainda mais com o campo do ensino de Combinatória, tanto na Educação Básica quanto na Formação Inicial e Continuada de Professores.

Vejo esses aspectos como pontas soltas do trabalho, que necessita de mais investigação. Além disso, acredito que possa ser feito um trabalho utilizando a MEAAMaRP e o ensino de Combinatória com professores formados, como um curso para a formação continuada, por exemplo. Para trabalhar essa ideias de uma forma diferente com professores que estão atuando na Educação Básica, o que não foi possível realizar neste trabalho. Uma outra opção também seria acompanhar os primeiros passos de professores recém-formados, depois de um curso de extensão ou de uma experiência relacionando a metodologia utilizada no trabalho e o ensino de Combinatória.

Como essa sendo minha primeira experiencia como formadora de professores, acredito que foi de grande valia para minha própria formação como professora e pesquisadora. Aprender a trabalhar com a MEAAMaRP foi importante tanto para mim quanto para os participantes. Entender que um tempo para assimilar e compreender o enunciado de um problema é crucial para sua resolução, mesmo que essa resolução não esteja correta. Além disso, deixar os participantes falarem. Se colocar no lugar de ouvinte, em segundo plano é complicado quando fomos formados a sermos os personagens principais. Esse trabalho pode implicar numa postura diferente dos futuros professores ao ensinar não apenas Combinatória como também outros conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. Tradução de Alfredo Bosi e Ivone Castilho Benedetti. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALLEVATO, N. S. G. O Modelo de Romberg e o Percurso Metodológico de uma Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 21, nº 29, p. 175-197, 2008.

ANÁLISE. *In*: Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2021.Disponível em: < https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/AN%C3%81LISE/>. Acesso em: 18/11/2021.

ARAÚJO, J. L; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. p. 31-51.

ARROYO, J. Colocar 20 crianças numa sala de aula implica em 808 contatos cruzados em dois dias, alerta universidade. **El País**, 2020. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/sociedade/2020-06-17/colocar-20-criancas-numa-sala-de-aula-implica-em-808-contatos-cruzados-em-dois-dias-alerta-universidade.html?ssm=whatsapp>. Acesso em: 07/02/2022.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições**, Campinas (SP), v. 4, n. 1, p. 18-23, 1993.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. p. 107-119.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336 p.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. p. 23-29.

BORBA, R. E. S. R; PESSOA, C. A. S.; ROCHA, C. A; ASSIS, A. B. A formação de professores de anos iniciais do ensino fundamental para o ensino da Combinatória. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. v.3, n. 4, p. 115-137, 2014. Disponível em: < http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/421/320>. Acesso em: 06/10/2021.

BORBA, R. E. S. R; ROCHA, C. A; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015. Disponível em: < https://www.scielo.br/j/bolema/a/d78Jmtspzcc9jzGzmBSc4rg/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 06/10/2021.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBEM, 2013.

BORTOLOTI, R. D. M; SANTOS-WAGNER, V. M. P; FERREIRA, J. R. Formação de professores: erros em análise combinatória. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018a.

CAMPOS, C. E; IGLIORI, S. B. C. Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: Perspectivas Investigativas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 16, p. 01-20, jan./dez., 2021

COMBINAÇÃO. *In*: Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2021.Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/combina%C3%A7%C3%A3o/>. Acesso em: 18/11/2021.

COMBINAÇÃO. *In*: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: < https://www.dicio.com.br/combinacao/>. Acesso em: 18/11/2021.

CYRINO, M. C. C. T.; CALDEIRA, J. S. Processos de negociação de significados sobre pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação inicial de professores de Matemática. **Investigações em Ensino de Ciências** – v. 16 (3), p. 373-401, 2011.

D'AMBRÓSIO. U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

D'AMBRÓSIO. U. Prefácio para **Pesquisa qualitativa em educação matemática**, de Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo, 6 ed., 11-22. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

DEBELLIS, V. A.; ROSENSTEIN, J. G. Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. **ZDM**, v. 36 (2), p. 46-55, 2004.

ECHEVERRÍA, M. D. P. POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 13-42.

FIORENTINI, D. Quando acadêmicos da Universidade e professores da Educação Básica constituem uma comunidade de prática reflexiva e investigativa. In: FIORENTINI, D; GRANDO, R. C.; MISKULIN, R. G. (org.) **Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, R. V; FIGUEROA, T. P; MONTEIRO, A. T. M. A Importância da Matemática Discreta na Formação de Professores de Matemática. **Matemática & Ciência**, v. 3, n. 1, p. 8-37, jun. 2020.

GARCIA, T. M. R. **Identidade profissional de professores de matemática em uma comunidade de prática**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. p. 85-105.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

HART, E. W. Discrete mathematics for all. IN: HART, E. W. (ED.). **Navigating through discrete mathematics in grades 6-12**. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics, 2009.

HART, E. W., SANDEFUR, J. T., & OUVRIER-BUFFET, C. Topic Study Group No. 17 Report:Teaching and learning discrete mathematics. In G. Kaiser (Ed.), The proceedings of the 13th international congress on mathematical education. Springer International Publishing. p. 453-457. 2017.

HART, E. W.; MARTIN, W. G. Discrete mathematics is essential mathematics in a 21st century school curriculum. In E. W. Hart & J. Sandefur (Eds.), **Teaching and learning discrete mathematics worldwide**: Curriculum and research (pp. 3–19). Springer. 2018.

HART, E. W.; SANDEFUR, J. (Eds.). **Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research**. Springer. 2018.

HOLANDA, D. S. **Investigando uma proposta de formação inicial de professores de matemática no interior de Pernambuco:** conhecimentos docentes de combinatória. 2017. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, Recife, 2017.

IFRAH, G. **Os Números**: a história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria de Freitas Senra. – 11 ed. – São Paulo: Globo, 2005.

INHELDER, B; PIAGET, J. **De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent**., Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

LANKSEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica**: do projeto à implementação. Tradução: Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008. 328 p.

LAVE, J. Aprendizagem como/na prática. **Horizontes Antropológicos**, Porto Alegre, ano 21, n. 44, p. 37-47, jul./dez. 2015.

LAVE, J. **Cognition in Practice**: Mind, mathematics and culture in everydat life. Cambridge. Cambridge University Press, 1988.

LAVE, J. Teaching, as Learning, in Practice. **Mind, Culture, and Activity**, v. 3, n. 3, p. 149-164, 1996.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated Learning:** Legitimate Peripheral Participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LEAL JUNIOR, L. C. **Tessitura sobre discursos acerca de Resolução de Problemas e seus pressupostos filosóficos em Educação Matemática**: cosi è, se vi pare. Tese (Doutorado em Educação Matemática). UNESP – Rio Claro, 2018.

LEHMANN, T.H. Making Sense of Algorithms in Discrete Mathematics. **Int J of Sci and Math Educ** (2021). https://doi.org/10.1007/s10763-021-10180-3

LIMA, A.P. **Ações colaborativas em uma CoP e o fortalecimento de conhecimentos docentes de professores de Matemática**. 2019. 221 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, Recife, 2019.

LIMA, E. L. et.al. A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, R. G. A. de. **Problemas de combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática**. 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. California: Sage Publications, Inc., 1985. 416 p.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 92-120.

MARCHAND, H. M. (1994). **The resolution of two combinatorial tasks bynmathematics teachers**. Proceeding of the 18 PME Conference, Lisbon (Apresentação oral).

MERAYO, F. **Matemática discreta**. Madri: Thomson Paraninfo, 2001.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FENANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

NAVARRO-PELAYO, V; BATANERO, C.; GODINO, J. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

ONUCHIC, L. de la R; NOGUTI, F. C. H. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In ONUCHIC, L. de la R; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.) **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. São Paulo: Paco, 2014. p. 53-68.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R. et al. (Org). Resolução de Problemas: teoria e prática (2ª edição). Jundiaí, São Paulo. Paco Editora, 2021.

ONUCHIC, L. R. et al. (org.). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PAMPLONA, A. S.; CARVALHO, D. L. Comunidades de Prática e conflitos de identidade na formação do professor de matemática que ensina estatística. In: FIORENTINI, D; GRANDO, R. C.; MISKULIN, R. G. (org.) **Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké**, Campinas, v. 17, jan-jun. 2009.

PITOMBEIRA, J.B. Princípio da casa dos pombos. **Revista do Professor de Matemática**, 8, p. 21-26, São Paulo: SBM, 1986.

PÓLYA, G. **How to solve it**: A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1995.

REZENDE, A. M.S; SANTOS, I. B. Apropriações de Princípios da Teoria de Edward Lee Thorndike para o Ensino dos Saberes Elementares Aritméticos: um exame de artigos da Revista do Ensino (1929) e Revista de Educação (1937). **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 10, n.23, 2017, p. 606-623.

ROA, R; BATANERO, C.; GODINO, J D; CAÑIZARES, M. J. Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. **Epsilon**, Espanha, v. 36, p.433-446, 1997.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Trad. ONUCHIC, L. de la R.; BOERO, M. L. **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 20, nº 27, p. 93-140, 2007.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSENSTEIN, J. G. The Absence of Discrete Mathematics in Primary and Secondary Education in the United States… and Why that Is Counterproductive. In E. W. Hart & J. Sandefur (Eds.), **Teaching and learning discrete mathematics worldwide**: Curriculum and research (pp. 21–40). Springer. 2018.

SANTOS, A. R. Metodologia Científica: a construção do conhecimento. 8.ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2015.

SANTOS-WAGNER, V. M. P; BORTOLOTI, R. D. M; FERREIRA, J. R. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p.692-629, 2013.

SCROEDER, T.L.; LESTER. F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A.P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p.31-43.

SERRAZINA, L. Resolução de problemas e Formação de professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, C.; PIRONEL, M. (Org.) **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p.55-83.

SILVA, J. C. T. **Jogo sobre análise combinatória e formação inicial de professores de matemática**. 2014. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, IFES, Vitória, 2014.

SILVA, M. A; MIARKA, R. Geni, a Pesquisa em [E]educação [M]matemática e o Zepelim. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 10, n. 24, p. 752-767, 2017.

SILVA, S. H; BARROS, M. Um estudo sobre o impacto de um possível retorno das atividades escolares presenciais durante a Pandemia da COVID-19 em Campina Grande. **Centro de Ciência e Tecnologia** (CCT), 2020. Disponível em: <https://cct.ufcg.edu.br/wp-content/uploads/2020/07/Impacto-de-reabertura-das-escolas-em-%C3%A9poca-de-Pandemia.pdf>. Acesso em: 07/02/2022.

SOUZA, A. C; ROCHA, C.A. Pesquisas Brasileiras Sobre Combinatória: uma investigação em periódicos na última década. In: CAMPOS, C. R; PERIN, A. P (org.) **Investigações hispano-brasileiras em educação estatística**. Taubaté: Editora Akademy, 2020.

TAVARES, C.S; BRITO, F.R.M. Contando a História da Contagem. **Revista do professor de Matemática.** v. 57, 2005.

WENGER, E. **Communities of Practice:** Learning, Meaning, And Identity. New York: Cambridge University Press, 1998.

WENGER, E. **Comunidades de Práctica:** Aprendizaje, significado e identidad. Tradução: Genís Sánchez Barberán. Barcelona: Paidós, 2001.

WENGER, E.; McDERMOT, R.; SNYDER, W. Cultivating Communities of Practice. Boston: Harvard Business School Press, 2002.