UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

Polinômios Para-Ortogonais e Análise de Freqüência

Fabiano Alan Martins

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 093

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

Polinômios Para-Ortogonais e Análise de Freqüência

Fabiano Alan Martins

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Cleonice Fátima Bracciali

São José do Rio Preto

25 de fevereiro de 2005

Martins, Fabiano Alan.
Polinômios para-ortogonais e análise de freqüência / Fabiano Alan Martins. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2005
80 f. : 30 cm.

Orientador: Cleonice Fátima Bracciali
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Polinômios ortogonais. 2. Szego, Polinômios de. 3. Polinômios para-ortogonais. 4. Análise de freqüência. I. Bracciali, Cleonice Fátima. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.587

À Deus,

Aos meus pais,

Dedico.

Agradecimentos

Aos meus pais Ivonete Cunto Martins e Alaor Martins
que foram fundamentais no apoio para
a concretização deste trabalho.

Um agradecimento especial à Prof.ª Dr.ª Cleonice Fátima Bracciali,
pela paciência em todos esses anos de trabalho e, principalmente,
pelos últimos dois anos de atenção.

À Prof.ª Dr.ª Eliana Xavier Linhares de Andrade e ao
Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga pelo apoio e
atenção nesses anos todos.

A todos os professores que direta ou indiretamente contribuíram
em minha formação, propiciando-me condições para chegar
à conclusão de mais essa etapa de minha carreira.

A todos os companheiros desde o início desta jornada.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar uma aplicação de polinômios conhecidos, como polinômios para-ortogonais, na solução do problema de análise de freqüência. Para isto, estudamos os polinômios de Szegő que são ortogonais no círculo unitário e que dão origem aos polinômios para-ortogonais. Estudamos casos especiais de polinômios para-ortogonais que, através de uma transformação do círculo unitário no intervalo $[-1, 1]$, estão associados a certos polinômios ortogonais. Apresentamos também uma abordagem do problema de análise de freqüência utilizando esses polinômios ortogonais em $[-1, 1]$.

Palavras-chave: polinômios de Szegő, polinômios ortogonais, polinômios para-ortogonais, análise de freqüência

Abstract

The purpose of this work is to study an application of some polynomials, known as para-orthogonal polynomials, in the solution of the frequency analysis problem. We study the Szegő polynomials that are orthogonal polynomials on the unit circle and give origin to the para-orthogonal polynomials. We investigate some special cases of para-orthogonal polynomials that are associate with certain orthogonal polynomials on $[-1, 1]$ through a transformation from the unit circle to the real interval $[-1, 1]$. We also present an approach of the frequency analysis problem using these orthogonal polynomials on $[-1, 1]$.

Keywords: Szegő polynomials, orthogonal polynomials, para-orthogonal polynomials, frequency analysis

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Consideremos $x(m)$ uma função dada por

$$x(m) = \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^{I} (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \tag{1.1}$$

onde $I \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 \geq 0$, com $n_0 = 2I + 1$ se $\gamma_0 > 0$ e $n_0 = 2I$ se $\gamma_0 = 0$, ω_j, para $j = 1, 2, \ldots, I$, são tais que,

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{n_0-1} < \omega_{n_0} < 2\pi \;\text{ e }\; 2\pi - w_{n_0+1-j} = w_j \neq 0$$

e, ainda, $\gamma_j \in \mathbb{C}$, satisfazendo

$$\overline{\gamma}_{n_0+1-j} = \gamma_j \neq 0\,,$$

para $j = 1, 2, \ldots, I$. A função $x(m)$ é chamada de sinal trigonométrico.

As constantes γ_j e ω_j são chamadas, respectivamente, de amplitude e freqüência do sinal $x(m)$ e m representa o tempo discreto. O problema de análise de freqüência é determinar as variáveis n_0, γ_j e ω_j a partir de valores observados de $x(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, para $N > 0$.

Na literatura, alguns autores utilizam o modelo acima com algumas diferenças quanto a localização das freqüências. Em tal modelo, ver por exemplo Jones *et al.* [16], o sinal trigonométrico é dado por

$$y(m) = \sum_{j=-I}^{I} \gamma_j e^{im\omega_j}\,,$$

onde $I \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_j \in \mathbb{C}$ com $0 \neq \gamma_{-j} = \overline{\gamma}_j$ e ω_j são tais que $\omega_{-j} = -\omega_j$, $j = 1, 2, \ldots, I$ e satisfazem

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_I < \pi\,.$$

Nesse caso, o problema de análise de freqüência é determinar o valor de I, das amplitudes γ_j e das freqüências ω_j a partir de valores observados de $y(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Muitos fenômenos naturais podem ser representados por esses modelos, ou seja, podem ser representados como uma superposição de um número finito de funções trigonométricas.

Uma aplicação interessante deste modelo ocorre em situações em que é necessário detectar um objeto em movimento (veja [15]). Consideremos um objeto se movendo e um radar que emite, a todo instante, ondas eletromagnéticas numa determinada freqüência f_T. No instante em que essa onda atinge o objeto ela é refletida e, então, captada pelo radar com uma determinada freqüência f_R desconhecida. Pode-se utilizar a análise de freqüência para determinar a freqüência desconhecida f_R e estimar a distância desse objeto ao radar e, também, sua velocidade, calculando-se o tempo entre a onda ser lançada e seu reflexo ser captado pelo radar.

Essa teoria encontra utilidade em algumas aplicações médicas e, também, é muito utilizada no processamento digital de voz.

Seja $\psi(z)$ uma medida positiva no círculo unitário $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$, ou seja, $\psi(e^{i\theta})$, definida em $0 \le \theta \le 2\pi$, é uma função real, limitada e não-decrescente com infinitos pontos de aumento tal que os momentos

$$\mu_m = \int_\Gamma z^m d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\psi(e^{i\theta}) \,, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

existem. Note que esta medida $\psi(e^{i\theta})$ induz uma medida real $\widetilde{\psi}(\theta)$ tal que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\widetilde{\psi}(\theta) \,.$$

Consideremos o seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle = I_\psi(f\,\overline{g}) = \int_0^{2\pi} f(z)\overline{g(z)} d\psi(z) \,, \quad z = e^{i\theta} \,.$$

Uma seqüência de polinômios que é ortogonal com relação ao produto interno acima, ou seja, uma seqüência de polinômios $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfaz

$$\int_\Gamma \rho_n(z)\overline{\rho_m(z)} d\psi(z) = 0 \,, \qquad \text{para} \ \ n \neq m \,,$$

é chamada de *seqüência de polinômios ortogonais no círculo unitário* ou *seqüência de polinômios de Szegő* (ver [14, 20, 21]).

Uma maneira de determinar as freqüências em (1.1) utiliza os polinômios de Szegő. Este método tem origem nos trabalhos de Wiener [22] e Levinson [17] e foi desenvolvido por Jones *et al.* em [13, 16] e Pan e Saff em [18]. O método é baseado no comportamento das raízes dos polinômios de Szegő com relação à medida positiva $\psi_N(e^{i\theta})$, construída a partir de (1.1), dada por

$$\frac{d\psi_N(e^{i\theta})}{d\theta} = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-im\theta}\right|^2 .$$

Muitos resultados sobre esta abordagem do problema de análise de freqüência podem ser encontrados em Jones *et al.* [12, 13, 15, 16].

Consideremos, aqui, uma seqüência de polinômios, inicialmente estudada por Jones *et al.* em [14], dada por

$$\rho_n(\psi, w, z) = \rho_n(z) + w\rho_n^*(z)\,,$$

onde $|w| = 1$ e $\rho_n^*(z)$, conhecido como polinômio recíproco de $\rho_n(z)$, é definido por

$$\rho_n^*(z) = z^n\overline{\rho}_n(1/z) = z^n\sum_{j=0}^{n}\overline{a}_j z^{-j}\,.$$

A seqüência $\{\rho_n(\psi, w, z)\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de seqüência de polinômios para-ortogonais. Em Daruis *et al.* [7] encontramos um estudo desses polinômios ligado ao problema de análise de freqüência.

Através da transformação

$$x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})\,, \quad \text{para} \ \ z = e^{i\theta}\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,, \quad x \in [-1, 1]\,, \tag{1.2}$$

estudada em Delsarte e Genin [8], pode-se relacionar polinômios para-ortogonais com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$, ver Zhedanov [23]. Outras relações obtidas a partir dessa transformação podem ser encontradas em Berti e Sri Ranga [1]. No trabalho Bracciali *et al.* [3], os autores utilizam essas relações para estudar o problema de análise de freqüência com polinômios ortogonais obtidos a partir de uma seqüência de polinômios de Szegő e da transformação (1.2).

Neste trabalho, constituído de seis capítulos inicialmente fazemos um estudo dos polinômios de Szegő baseado principalmente em Jones *et al.* [14]. Posteriormente, abordamos um estudo dos polinômios para-ortogonais e também certos polinômios ortogonais obtidos de polinômios para-ortogonais através da transformação (1.2) e também suas aplicações ao problema de análise de freqüência.

No Capítulo 2, apresentamos algumas definições e resultados sobre polinômios ortogonais, fórmulas de quadratura gaussianas, frações contínuas, entre outros. Esses resultados são necessários para os estudos desenvolvidos durante o trabalho.

No Capítulo 3, fazemos um estudo sobre polinômios de Szegő, apresentando resultados encontrados em [14, 20, 21, 23]. Estudamos esses polinômios através de sua relação com frações contínuas de Perron-Carathéodory.

No Capítulo 4, apresentamos um estudo sobre os polinômios para-ortogonais, onde tratamos de alguns resultados interessantes a respeito desses polinômios como, por exemplo, a localização de suas raízes. Temos, ainda, uma seção dedicada especialmente à transformação (1.2), onde apresentamos algumas relações interessantes que podem ser obtidas entre os polinômios para-ortogonais e os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$.

Fazemos, no Capítulo 5, um estudo sobre o problema de análise de freqüência, onde apresentamos resultados sobre a abordagem desse assunto, utilizando polinômios de Szegő (ver [12, 13, 15, 16]), polinômios para-ortogonais (ver [7]) e, por fim, casos especiais dos polinômios para-ortogonais (ver [3]). Alguns resultados utilizando certos polinômios ortogonais no problema de análise de freqüência (ver [3]) também são apresentados.

Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões a respeito do trabalho desenvolvido, bem como as perspectivas de trabalhos futuros. Nas Referências Bibliográficas citamos os textos que foram citados ou consultados para que pudéssemos desenvolver esses assuntos.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar alguns conceitos que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Faremos isto de forma breve enunciando apenas definições e resultados a serem utilizados, mas sem demonstrá-los, pois são bastante conhecidos e podem ser encontrados em detalhes nos textos clássicos de Chihara [6] e de Szegő [20].

2.1 Polinômios ortogonais

Neste trabalho, utilizamos os conhecidos polinômios de Laurent que são definidos da seguinte forma.

Definição 2.1. *Para todo par de inteiros (p, q) com $p \leq q$, denotamos por $\Lambda_{p,q}$ o espaço dos polinômios de Laurent, ou L-polinômios, onde $L(z) \in \Lambda_{p,q}$ tem a forma*

$$L(z) = \sum_{n=p}^{q} c_n z^n \,, \quad c_n \in \mathbb{C} \,.$$

Denotamos por Λ o espaço de todos os L-polinômios, por Π o espaço de todos os polinômios e, ainda, por $\Pi_n = \Lambda_{0,n}$ o espaço dos polinômios de grau no máximo n.

Definição 2.2. *Considere uma função $\psi(x)$ definida em um intervalo real $[a, b]$, limitada, não-decrescente, com valores reais e com infinitos pontos de aumento. Chamamos $\psi(x)$ de função distribuição ou medida positiva ou, simplesmente, medida, se os momentos*

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x) \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

existem. O conjunto dos pontos de aumento da medida é chamado de suporte da medida.

Se considerarmos uma medida simétrica, isto é, se $\psi(x)$ é definida em $[-b, b]$ com $0 < b \leq \infty$ tal que $d\psi(x) = -d\psi(-x)$, então pode-se mostrar que os momentos (2.1) satisfazem $\mu_{2n-1} = 0\,,\ n = 1, 2, \ldots$.

Consideremos o produto interno definido em $\Pi \times \Pi$ da seguinte forma

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\psi(x)\,.$$

Utilizando o produto interno definido acima, podemos obter a seguinte definição para polinômios ortogonais.

Definição 2.3. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios de grau n. Dizemos que esta é uma seqüência de polinômios ortogonais em $[a, b]$ com relação à medida $\psi(x)$ se*

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\psi(x) = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq m \\ K_n \neq 0, & se \quad n = m \end{cases}.$$

Pode-se mostrar, ver [6], que a relação acima é equivalente a

$$\int_a^b x^m P_n(x)d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n < m \\ \widetilde{K}_n \neq 0, & \text{se} \quad n = m \end{cases}.$$

Considerando os polinômios ortogonais na forma mônica, ou seja, com os coeficientes dos termos de maior grau iguais a 1, podemos obter a seguinte relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{2.2}$$

onde $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - \beta_1$. Os coeficientes β_{n+1} e α_{n+1} satisfazem

$$\beta_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}\,, \quad \text{para } n \geq 1\,, \tag{2.3}$$

$\beta_1 = \dfrac{\langle xP_1, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle}$ e ainda, arbitrariamente, $\alpha_1 = \mu_0$. Os coeficientes β_n e α_n são reais e $\alpha_n > 0$, $n \geq 1$.

Se considerarmos uma medida simétrica, então pode-se mostrar que os coeficientes β_n são nulos. Como conseqüência segue que os correspondentes polinômios ortogonais são simétricos, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, ou seja, os polinômios de grau par são funções pares e os polinômios de grau ímpar são funções ímpares.

A partir da definição de α_{n+1} em (2.3) podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b P_n^2(x)d\psi(x) &= \alpha_{n+1}\int_a^b P_{n-1}^2(x)d\psi(x) \\ &= \alpha_{n+1}\alpha_n\int_a^b P_{n-2}^2(x)d\psi(x) \end{aligned}$$

e, assim sucessivamente, concluímos que

$$\int_a^b P_n^2(x)d\psi(x) = \alpha_{n+1}\alpha_n \dots \alpha_2\alpha_1 \,. \tag{2.4}$$

Pode-se utilizar a expressão (2.2) para a obtenção de algumas fórmulas bastante conhecidas na teoria de polinômios ortogonais, como exemplo citamos a identidade de Christoffel-Darboux, dada por

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k+1}} = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \,. \tag{2.5}$$

Para a correspondente seqüência de polinômios ortonormais, $p_n(x)$, definida por

$$\langle p_n, p_m \rangle = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \neq m\,, \\ 1\,, & \text{se } n = m\,, \end{cases}$$

pode-se escrever

$$p_n(x) = k_n P_n(x)\,, \qquad k_n = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n+1})^{-1/2}\,.$$

Neste caso, a fórmula de Christoffel-Darboux é dada por

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} \,. \tag{2.6}$$

Fazendo $y \to x$ em (2.5), obtemos a chamada fórmula confluente da identidade de Christoffel-Darboux,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(x)}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1}} \,. \tag{2.7}$$

Novamente, em termos de polinômios ortonormais, a expressão (2.7) torna-se

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}}(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x))\,. \tag{2.8}$$

Além disso, de (2.2) a relação de recorrência para os polinômios ortonormais pode ser dada por

$$xp_n(x) = \sqrt{\alpha_{n+1}}p_{n-1}(x) + \beta_{n+1}p_n(x) + \sqrt{\alpha_{n+2}}p_{n+1}(x)\,, \tag{2.9}$$

onde $p_{-1}(x) = 0$. Fazendo $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$ em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
xp_0(x) &= \beta_1 p_0(x) + \sqrt{\alpha_2}p_1(x) \\
xp_1(x) &= \sqrt{\alpha_2}p_0(x) + \beta_2 p_1(x) + \sqrt{\alpha_3}p_2(x) \\
xp_2(x) &= \sqrt{\alpha_3}p_1(x) + \beta_3 p_2(x) + \sqrt{\alpha_4}p_3(x) \\
&\vdots \\
xp_{m-1}(x) &= \sqrt{\alpha_m}p_{m-2}(x) + \beta_m p_{m-1}(x) + \sqrt{\alpha_{m+1}}p_m(x)
\end{aligned}$$

que, escrito na forma matricial, torna-se

$$x\begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{m-1} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\alpha_{m+1}}p_m(x) \end{pmatrix}.$$

Logo, tomando $x = x_{m,j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, as raízes do polinômio $p_m(x)$, o sistema acima se torna

$$x_{m,j}\underbrace{\begin{pmatrix} p_0(x_{m,j}) \\ p_1(x_{m,j}) \\ p_2(x_{m,j}) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x_{m,j}) \\ p_{m-1}(x_{m,j}) \end{pmatrix}}_{u_{m,j}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{m-2} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_{m-1} \end{pmatrix}}_{J_m} \underbrace{\begin{pmatrix} p_0(x_{m,j}) \\ p_1(x_{m,j}) \\ p_2(x_{m,j}) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x_{m,j}) \\ p_{m-1}(x_{m,j}) \end{pmatrix}}_{u_{m,j}}, \qquad (2.10)$$

onde a matriz J_m é chamada de matriz de Jacobi. Assim, de (2.10), concluímos que as raízes dos polinômios ortogonais são os autovalores da matriz de Jacobi.

Um importante resultado da teoria de polinômios ortogonais, que pode ser encontrado em [6], é dado pelo seguinte teorema, conhecido como Teorema de Favard.

Teorema 2.1. *Sejam $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ seqüências de números reais, com $\alpha_n > 0$ para $n \geq 1$, e seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios definida pela relação de recorrência*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)\,, \qquad n \geq 1\,,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - \beta_1$. Então, existe uma medida $\psi(x)$ definida em $[a, b]$, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tal que

$$\int_a^b d\psi(x) = \alpha_1 \qquad e \qquad \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\psi(x) = 0\,, \quad para \quad m \neq n\,,\ \ m, n \geq 0\,.$$

Os polinômios ortogonais satisfazem ainda, uma interessante propriedade a respeito de suas raízes, dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma medida $\psi(x)$ em (a,b). Então, todas as raízes de $P_n(x)$ são reais, distintas e estão no intervalo (a,b).*

Uma outra propriedade bastante útil dos polinômios ortogonais é o resultado a seguir, que fornece informações com respeito ao comportamento das raízes de polinômios de graus consecutivos.

Denotemos por $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$ as raízes de $P_n(x)$, $n \geq 1$, em ordem crescente.

Teorema 2.3. *Consideremos $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma medida $\psi(x)$. Então,*

$$x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Definição 2.4. *O intervalo fechado $[\xi_1, \eta_1]$, onde*

$$\xi_1 = \lim_{n\to\infty} x_{n,1} \qquad e \qquad \eta_1 = \lim_{n\to\infty} x_{n,n}$$

é chamado de verdadeiro intervalo de ortogonalidade da seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma certa medida $\psi(x)$. Observe que esses limites existem no conjunto dos números reais estendido.

2.2 Fórmulas de quadratura

Dados os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e os valores $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, a fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} W_j f(x_j) + E_n(f)$$

é conhecida como fórmula de quadratura de n pontos. Os valores x_j, W_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, e $E_n(f)$ são chamados, respectivamente, de nós, pesos e erro da fórmula de quadratura.

Pode-se definir as fórmulas de quadratura gaussianas associadas a $P_n(x)$ polinômios ortogonais com relação a uma medida $\psi(x)$ em $[a,b]$ como segue.

Sejam $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, as raízes de $P_n(x)$. Considere a expressão

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} W_{n,j} f(x_{n,j}) + E_n(f)\,, \tag{2.11}$$

com os pesos $W_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, dados por

$$W_{n,j} = \int_a^b L_{n,j}(x) d\psi(x) \,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \,,$$

onde

$$L_{n,j}(x) = \frac{P_n(x)}{P_n'(x_{n,j})(x - x_{n,j})} = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (x - x_{n,k})}{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (x_{n,j} - x_{n,k})} \,, \qquad j = 1, 2 \ldots, n \,,$$

são conhecidos como polinômios fundamentais de Lagrange. É bem conhecido que a fórmula de quadratura gaussiana é exata se $f \in \Pi_{2n-1}$.

Note que, no caso dos polinômios ortonormais, os pesos $W_{n,j}$ têm a mesma expressão.

Substituindo $y = x_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, em (2.6), obtemos

$$-\frac{k_{n+1}}{k_n p_{n+1}(x_{n,j})} \sum_{k=0}^{n} p_k(x) p_k(x_{n,j}) = \frac{p_n(x)}{x - x_{n,j}} \,.$$

Substituindo a expressão acima, na expressão de $W_{n,j}$ obtemos

$$\begin{aligned} W_{n,j} &= -\frac{k_{n+1}}{k_n p_{n+1}(x_{n,j}) p_n'(x_{n,j})} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x) p_k(x_{n,j}) d\psi(x) \\ &= \frac{k_{n+1}}{k_n p_{n+1}(x_{n,j}) p_n'(x_{n,j})} \int_a^b p_0(x) p_0(x_{n,j}) d\psi(x) \,. \end{aligned}$$

Lembrando que $\langle p_0, p_0 \rangle = 1$, concluímos que

$$W_{n,j} = -\frac{k_{n+1}}{k_n p_{n+1}(x_{n,j}) p_n'(x_{n,j})} \,. \tag{2.12}$$

Utilizando a fórmula confluente para a identidade de Christoffel-Darboux (2.8) no caso dos polinômios ortonormais com $x = x_{n,j}$, temos que

$$-\frac{k_n p_{n+1}(x_{n,j}) p_n'(x_{n,j})}{k_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} p_k^2(x_{n,j}) \,,$$

de onde obtemos que

$$W_{n,j} = -\frac{k_{n+1}}{k_n p_{n+1}(x_{n,j}) p_n'(x_{n,j})} = \left(\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x_{n,j}) \right)^{-1} \,. \tag{2.13}$$

Lembrando que $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são os autovalores da matriz de Jacobi, J_n dada em (2.10), podemos também calcular os pesos da fórmula de quadratura gaussiana associada a uma dada seqüência de polinômios ortonormais pela seguinte expressão

$$W_{n,j} = (t_{j,1})^2 \mu_0, \tag{2.14}$$

onde $t_{j,1}$ é a primeira componente do autovetor t_j normalizado ($t_j^T t_j = 1$), associado ao autovalor $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 2.5. *Dada uma seqüência de polinômios ortogonais* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *definimos os polinômios associados a* $P_n(x)$ *por*

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} d\psi(t)\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Pode-se mostrar que o grau dos polinômios associados $Q_n(x)$ é $n-1$ e que eles satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais, isto é,

$$Q_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x)\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{2.15}$$

com condições iniciais $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \mu_0$.

2.3 Frações contínuas

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}\,,$$

onde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências arbitrárias de números reais ou complexos ou ainda funções reais ou complexas.

Para simplificar a notação, vamos utilizar, para uma fração contínua, a seguinte notação

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots\,. \tag{2.16}$$

Consideremos a seqüência $\{C_n\}$ construída da seguinte forma

$$\begin{aligned}
C_0 &= b_0 \\
C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\
C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \\
&\vdots \\
C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

C_n é chamada de *n-ésimo convergente (aproximante)* da fração contínua. Observe que é possível que alguns convergentes sejam indefinidos. No entanto, temos condições de decidir se uma fração contínua é convergente.

Definição 2.6. *Uma fração contínua é convergente para um valor finito K, se no máximo um número finito de convergentes forem indefinidos e*

$$\lim_{n\to\infty} C_n = K \,.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Note que, da expressão para C_n, podemos escrever $C_n = \dfrac{A_n}{B_n}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, onde

$$\begin{array}{rclrcl} A_0 &=& b_0\,, & B_0 &=& 1\,, \\ A_1 &=& b_0b_1 + a_1\,, & B_1 &=& b_1\,, \\ A_2 &=& b_0b_1b_2 + b_0a_2 + a_1b_2\,, & B_2 &=& b_1b_2 + a_2\,, \\ &\vdots& & &\vdots& \end{array} .$$

Observe que, $A_2 = b_2A_1 + a_2A_0$ e $B_2 = b_2B_1 + a_2B_0$. Desta forma, por indução finita, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Sejam $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ seqüências tais que*

$$\begin{array}{rcl} A_n &=& b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2}\,, \\ && \qquad\qquad \textit{para} \;\; n \geq 1\,, \\ B_n &=& b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2}\,, \end{array} \tag{2.18}$$

onde $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$ e $B_0 = 1$. Então, o n-ésimo convergente C_n satisfaz $C_n = \dfrac{A_n}{B_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Os valores A_n e B_n são chamados, respectivamente, de n-ésimo numerador parcial e n-ésimo denominador parcial da fração contínua (2.16).

As equações (2.18), conhecidas como fórmulas de Wallis, podem fornecer uma ligação direta entre polinômios ortogonais e frações contínuas. Para mostrar essa ligação consideremos

$$b_0 = 0\,, \quad a_1 = \alpha_1 \neq 0\,, \quad a_{n+1} = -\alpha_{n+1} \neq 0\,, \quad b_n = x - \beta_n\,, \quad n \geq 1\,,$$

em (2.16). Teremos, assim, a seguinte fração contínua

$$\frac{\alpha_1}{x-\beta_1} - \frac{\alpha_2}{x-\beta_2} - \frac{\alpha_3}{x-\beta_3} - \cdots \quad , \tag{2.19}$$

com $\alpha_1 = \mu_0$. O n-ésimo denominador parcial $B_n(x)$ dado pela expressão (2.18) é

$$B_n(x) = (x - \beta_n)B_{n-1}(x) - \alpha_nB_{n-2}(x)\,, \quad n \geq 1\,,$$

com $B_{-1}(x) = 0$ e $B_1(x) = 1$. Assim, pelo Teorema 2.1, os denominadores parciais formam uma seqüência de polinômios ortogonais.

Voltando às equações (2.18), notamos que os numeradores parciais $A_n(x)$ da fração contínua (2.19) são dados por

$$A_n(x) = (x - \beta_n)A_{n-1}(x) - \alpha_n A_{n-2}(x)\,, \quad \text{para } n \geq 1\,,$$

com $A_{-1}(x) = 1$, $A_0(x) = 0$. Observe que essa relação de recorrência é a mesma dos polinômios associados aos polinômios ortogonais. Assim, temos que os numeradores parciais $A_n(x)$ formam a seqüência de polinômios associados aos polinômios ortogonais $B_n(x)$.

2.4 Seqüências encadeadas

Definição 2.7. *Uma seqüência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada de seqüência encadeada se existe uma seqüência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que*

$$\begin{array}{lll} (i) & 0 \leq g_0 < 1\,, \quad 0 < g_n < 1\,, & n \geq 1 \\ (ii) & a_n = (1 - g_{n-1})g_n\,, & n = 1, 2, 3, \ldots\,. \end{array}\,, \tag{2.20}$$

$\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada de seqüência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Consideremos $t_n(x)$ definida por

$$t_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x)}\,, \quad n \geq 1\,,$$

onde as seqüências $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\alpha_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ que são os coeficientes da relação de recorrência (2.2). Em Chihara [6, pag. 108] encontramos os seguintes resultados.

Teorema 2.5. *Considere $[\xi_1, \eta_1]$ o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da seqüência de polinômios ortogonais como na Definição 2.4.*

(i) Para $s \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \geq s$ se, e somente se, $\beta_n > s$ $(n \geq 1)$ e $\{t_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência encadeada.

(ii) Para $r \in \mathbb{R}$, $\eta_1 \leq r$ se, e somente se, $\beta_n < r$ $(n \geq 1)$ e $\{t_n(r)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência encadeada.

Uma conseqüência imediata do teorema acima é a seguinte

Corolário 2.1. *Suponha que* $\beta_n = 0$ *para* $n \geq 1$, $s = -1$ *e* $r = 1$. *Então,* $t_n(-1) = t_n(1) = \alpha_{n+1}$. *Assim, se* $\{\alpha_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma seqüência encadeada, então* $[-1, 1]$ *é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da seqüência de polinômios gerada pela relação de recorrência* (2.2).

Teorema 2.6. *O verdadeiro intervalo de ortogonalidade* $[\xi_1, \eta_1]$ *é limitado se, e somente se, as seqüências* $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *e* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *são limitadas, onde* β_n *e* α_n *são os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais.*

Capítulo 3

Polinômios de Szegő

Neste capítulo, estudaremos os polinômios ortogonais no círculo unitário, também conhecidos como polinômios de Szegő. Apresentaremos conceitualmente esses polinômios e exploraremos alguns resultados técnicos envolvendo os mesmos. A seguir, estudaremos a relação existente entre os polinômios de Szegő e as frações contínuas de Perron-Carathéodory e faremos um breve estudo sobre os polinômios associados aos polinômios de Szegő. Esses estudos foram baseados em Jones *et al.* [14] e Van Assche [21].

3.1 Introdução

Consideremos uma seqüência de números complexos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ hermitiana, ou seja,

$$\mu_n = \overline{\mu}_{-n}\,, \quad n = 0, 1, 2 \ldots .$$

Correspondente a essa seqüência podemos associar os determinantes de Toeplitz, Δ_n, definidos por

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots , \tag{3.1}$$

com $\Delta_{-1} = 1$ e o funcional linear μ definido em Λ por

$$\mu\left(\sum_{m=p}^{q} c_m z^m\right) = \sum_{m=p}^{q} c_m \mu_m\,, \quad c_m \in \mathbb{C}\,, \quad -\infty < p \leq q < \infty\,. \tag{3.2}$$

Em termos de μ definimos o seguinte produto interno em $\Lambda \times \Lambda$

$$\langle X, Y\rangle = \mu(X(z)\overline{Y}(1/z))\,, \quad X, Y \in \Lambda\,. \tag{3.3}$$

Claramente este produto interno satisfaz

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle &= \alpha\langle X, Y\rangle\,,\\ \langle X+Y, Z\rangle &= \langle X, Z\rangle + \langle Y, Z\rangle\,,\\ \langle X, Y\rangle &= \overline{\langle Y, X\rangle}\end{aligned}$$

e, além disso,

$$\langle X, X\rangle = \sum_{k,m=-n}^{n} x_m \overline{x}_k \mu_{m-k} \quad \text{se} \quad X(z) = \sum_{m=-n}^{n} x_m z^m\,,$$

para X, Y e $Z \in \Lambda$.

Um funcional expresso segundo (3.2) é quase-definido se $\Delta_n \neq 0$ e positivo definido se $\Delta_n > 0$ para $n = 0, 1, 2\ldots$ (ver [6]).

Para μ quase-definido, definimos uma seqüência de polinômios $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ por

$$\rho_0(z) = 1\,,\quad \rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix}\,,\quad n = 1, 2, 3\ldots\,, \tag{3.4}$$

onde os polinômios $\rho_n(z)$ têm grau n e são mônicos. Os polinômios recíprocos, $\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho}_n(1/z)$, são dados por

$$\rho_0^*(z) = 1\,,\quad \rho_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ z^n & z^{n-1} & \ldots & z & 1 \end{vmatrix}\,,\quad n = 1, 2, 3\ldots\,. \tag{3.5}$$

Observemos das definições acima que $\rho_n^*(0) = 1$ e ainda que o coeficiente $\overline{\rho}_n(0)$ de z^n em $\rho_n^*(z)$ pode ser nulo.

Suponhamos $\Delta_n \neq 0$, isto é, suponhamos o funcional μ quase-definido. Chamamos de seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação ao funcional μ os polinômios tais que

$$\langle \rho_n, z^m\rangle = \begin{cases} 0\,, & m = 0, 1, \ldots, n-1\,,\\ \widehat{K}_n \neq 0\,, & m = n\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

Seja $\rho_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} z^k$ com $a_{n,n} = 1$. Fazendo $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ em (3.6), obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \ldots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \ldots & \mu_1 \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_n(z) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Resolvendo o sistema acima pela regra de Cramer, temos que

$$1 = \Delta_{n-1}\rho_n(z) \Bigg/ \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \ldots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \ldots & \mu_1 \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix},$$

de onde obtemos

$$\rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \ldots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \ldots & \mu_1 \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

Para determinarmos o valor de $\widehat{K}_n$, basta substituirmos a última linha do sistema (3.7) por $\langle \rho_n, z^n \rangle = K_n$, obtendo, assim,

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \ldots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \ldots & \mu_1 \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \ldots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_n \end{pmatrix}.$$

Logo, usando novamente a regra de Cramer, $1 = \dfrac{\Delta_{n-1}\widehat{K}_n}{\Delta_n}$. Portanto, $\widehat{K}_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Substituindo $z = 1/z$ e conjugando os momentos na expressão (3.8), obtem-se que

$$\overline{\rho}_n(1/z) = \frac{1}{\overline{\Delta}_{n-1}} \begin{vmatrix} \overline{\mu}_0 & \overline{\mu}_1 & \cdots & \overline{\mu}_n \\ \overline{\mu}_{-1} & \overline{\mu}_0 & \cdots & \overline{\mu}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mu}_{-n+1} & \overline{\mu}_{-n+2} & \cdots & \overline{\mu}_1 \\ 1 & 1/z & \cdots & 1/z^n \end{vmatrix} .$$

Multiplicando a expressão acima por z^n e lembrando que $\overline{\mu}_{-n} = \mu_n$, concluímos que

$$\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho}_n(1/z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

Agora, da definição de produto interno (3.3), segue que

$$\langle \rho_n^*(z), z^m \rangle = \langle z^n \overline{\rho}_n(1/z), z^m \rangle = \mu(z^n \overline{\rho}_n(1/z)\overline{z^m}) = \mu(z^{n-m}\overline{\rho}_n(1/z)) = \langle z^{n-m}, \rho_n(z) \rangle .$$

Observe que a expressão acima é nula para $m = 1, 2, \ldots, n$ e, para $m = 0$, tem-se que

$$\langle \rho_n^*, z^n \rangle = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} .$$

Assim, concluímos que os polinômios definidos por (3.4) formam uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a μ. Se $\{\sigma_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios mônicos de grau n que satisfazem as relações

$$\langle \sigma_n, z^m \rangle = 0 \quad \text{para} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

e

$$\langle \sigma_n, z^m \rangle \neq 0 \quad \text{para} \quad m = n ,$$

então esses polinômios são iguais aos polinômios $\rho_n(z)$, $n \geq 0$.

Para $\{\rho_n(z)\}$ definido por (3.4), segue resumidamente que

$$\langle \rho_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0 , & m = 0, 1, \ldots, n-1 , \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} , & m = n , \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\langle \rho_n^*, z^m \rangle = \begin{cases} \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} , & m = 0 , \\ 0 , & m = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{3.10}$$

e

$$\langle \rho_n, \rho_k \rangle = \delta_{n,k} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\,,\ 0 \leq k \leq n\,,$$

onde $\delta_{n,k}$ é o delta de Kronecker.

Dizemos que $\psi(z)$ é uma medida positiva no círculo unitário $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\}$ se $\psi(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não-decrescente, com infinitos pontos de aumento, tal que os momentos

$$\mu_m = \int_\Gamma z^m d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\psi(e^{i\theta})\,,\ \ m = 0, 1, \ldots \tag{3.11}$$

existem.

Um caso particular do produto interno (3.3) pode ser obtido considerando-se uma medida positiva no círculo unitário $\psi(e^{i\theta})$, definindo-se o funcional integral

$$I_\psi(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta})\,,\ \ f \in \Lambda$$

e um produto interno em $\Lambda \times \Lambda$ por

$$\langle f, g \rangle = I_\psi(f\,\overline{g}) = \int_\Gamma f(z)\overline{g(z)} d\psi(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})} d\psi(e^{i\theta})\,,\ \ f\,, g\, \in \Lambda\,, \tag{3.12}$$

cujos momentos satisfazem

$$\mu_n = \overline{\mu}_{-n}$$

e, ainda,

$$\Delta_n > 0\,,\quad \text{para}\quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

onde Δ_n é o determinante de Toeplitz (ver [14]).

Os polinômios ortogonais segundo o produto interno definido acima são chamados de *polinômios de Szegő* ou de *polinômios ortogonais no círculo unitário.*

3.2 Relações com frações contínuas

Como no caso dos polinômios ortogonais, podemos relacionar os polinômios de Szegő a uma fração contínua e, assim, obtermos várias propriedades interessantes envolvendo esses polinômios.

Consideremos a fração contínua de Perron-Caratheódory (HPC-fração ou HPC$\{\delta_n\}$) dada por

$$\delta_0 - \frac{2\delta_0}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{\overline{\delta}_1\, z}\,\frac{}{+}\,\frac{(1-|\delta_1|^2)z}{\delta_1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{\overline{\delta}_2\, z}\,\frac{}{+}\,\frac{(1-|\delta_2|^2)z}{\delta_2}\,\frac{}{+}\,\ldots\,, \tag{3.13}$$

onde $\delta_n \in \mathbb{C}$ satisfaz

$$\delta_0 \neq 0\,,\ |\delta_n| \neq 1\,,\ n = 1, 2, \ldots\,.$$

A fração positiva de Perron-Caratheódory (PPC-fração ou PPC$\{\delta_n\}$) é também dada pela expressão (3.13) mas com

$$\delta_0 > 0 \quad \text{e} \quad |\delta_n| < 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

De (2.18) vemos que o n-ésimo numerador $P_n(z)$ e o n-ésimo denominador $Q_n(z)$ de uma HPC-fração são dados pelas equações

$$P_{2n}(z) = \overline{\delta}_n z P_{2n-1}(z) + P_{2n-2}(z)\,, \tag{3.14}$$

$$Q_{2n}(z) = \overline{\delta}_n z Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z)\,, \tag{3.15}$$

$$P_{2n+1}(z) = \delta_n P_{2n}(z) + (1 - |\delta_n|^2) z P_{2n-1}(z)\,, \tag{3.16}$$

$$Q_{2n+1}(z) = \delta_n Q_{2n}(z) + (1 - |\delta_n|^2) z Q_{2n-1}(z)\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots\,, \tag{3.17}$$

onde

$$\begin{array}{lll} P_{-1}(z) = -1\,, & P_0(z) = \delta_0\,, & P_1(z) = -\delta_0\,, \\ Q_{-1}(z) = 0\,, & Q_0(z) = 1\,, & Q_1(z) = 1\,. \end{array}$$

Assim, temos o seguinte resultado que garante a existência de uma HPC-fração associada a uma seqüência de polinômios de Szegő $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$.

Teorema 3.1. *Seja $\{\rho_n(z)\}$ uma seqüência de polinômios de Szegő com respeito a um dado funcional linear quase-definido μ. Então,*

(i) existe uma HPC-fração (HPC$\{\delta_n\}$) associada à seqüência $\{\rho_n(z)\}$ com n-ésimo denominador $Q_n(z)$, onde

$$\left.\begin{array}{lll} \delta_0 = \mu_0\,, & \delta_n = \rho_n(0)\,, & n = 1, 2, \ldots \\ Q_{2n+1}(z) = \rho_n(z)\,, & Q_{2n}(z) = \rho_n^*(z)\,, & n = 1, 2, \ldots \end{array}\right. .$$

(ii) Além disso, μ é definido positivo se, e somente se, HPC$\{\delta_n\}$ é uma PPC-fração.

Demonstração: (i) Da definição (3.3) temos que, para todo $L(z) \in \Lambda$,

$$\langle zL, z^n \rangle = \mu(zL(z)z^{-n}) = \mu(L(z)z^{-(n-1)}) = \langle L, z^{n-1} \rangle\,. \tag{3.18}$$

Para $n \geq 1$, seja

$$A_n(z) = \rho_n^*(z) - \alpha_n z \rho_{n-1}(z) - \rho_{n-1}^*(z)\,, \quad \alpha_n = -\frac{\langle \rho_{n-1}^*, z^n \rangle}{\langle z\rho_{n-1}, z^n \rangle}\,. \tag{3.19}$$

Note que α_n está bem definido, pois, de (3.18)

$$\langle z\rho_{n-1}, z^n\rangle = \langle \rho_{n-1}, z^{n-1}\rangle = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \neq 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.20}$$

De $\rho_n^*(0) = \rho_{n-1}^*(0) = 1$, segue que $A_n \in \Lambda_{1,n}$. Assim, podemos definir um polinômio $B_n(z)$ pela seguinte expressão

$$B_n(z) = z^n \overline{A}_n(1/z) \,\in\, \Pi_{n-1}\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.21}$$

e que vamos escrever como $B_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k \rho_k(z)\,.$

De (3.21), temos que

$$A_n(z) = z^n \overline{B}_n(1/z) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k z^{n-k} \rho_n^*(z)\,, \quad n \geq 1\,. \tag{3.22}$$

Note que, para $A_n(z)$ definido em (3.19), temos

$$\begin{aligned}
\langle A_n, z^n\rangle &= \langle \rho_n^* - \alpha_n z\rho_{n-1} - \rho_{n-1}^*, z^n\rangle \\
&= \langle \rho_n^*, z^n\rangle - \alpha_n\langle z\rho_{n-1}, z^n\rangle - \langle \rho_{n-1}^*, z^n\rangle \\
&= \langle \rho_n^*, z^n\rangle - \frac{\langle \rho_{n-1}^*, z^n\rangle}{\langle z\rho_{n-1}, z^n\rangle}\langle z\rho_{n-1}, z^n\rangle - \langle \rho_{n-1}^*, z^n\rangle \quad = \quad 0\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.22) e (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A_n, z^n\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k z^{n-k}\rho_n^*(z), z^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k \langle z^{n-k}\rho_n^*(z), z^n\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{b}_k \langle \rho_n^*(z), z^k\rangle = \overline{b}_0\langle \rho_0^*(z), z^0\rangle = \overline{b}_0\langle 1, 1\rangle = \overline{b}_0\mu_0\,.
\end{aligned}$$

Igualando as duas últimas expressões acima, concluímos que $\overline{b}_0 = 0$, pois $\mu_0 \neq 0$.

Usando argumento análogo, podemos provar que $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$, de onde obtemos $A_n(z) = 0$ e, então, de (3.19), temos

$$\rho_n^*(z) = \alpha_n z\rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z)\,. \tag{3.23}$$

Comparando os coeficientes de z^n em (3.23), obtemos $\alpha_n = \rho_n^*(0)$. Agora, como $\rho_n^*(0) = \overline{\rho}_n(0)$, temos que $\alpha_n = \overline{\delta}_n$ para $n \geq 1$. Logo, $\{Q_{2n}(z)\}$ satisfaz (3.15).

Agora, tomemos

$$C_n(z) = \rho_n^*(z) - \delta_n\rho_n^*(z) - \gamma_n z\rho_{n-1}(z)\,, \quad \text{com } \gamma_n = -\frac{\langle \rho_n, z^n\rangle}{\langle z\rho_{n-1}, z^n\rangle}\,.$$

Novamente, γ_n está bem definido, pois, de (3.18), temos

$$\langle z\rho_{n-1}, z^n\rangle = \langle \rho_{n-1}, z^{n-1}\rangle = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \neq 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Como $\rho_n^*(0) = 1$ e $\delta_n = \rho_n(0)$, segue que $C_n \in \Lambda_{1,n}$. Assim, definimos

$$D_n(z) = z^n \overline{C}_n(1/z) \,\in\, \Pi_{n-1}$$

e $D_n(z)$ pode ser escrito como $D_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \rho_k(z)$. Logo,

$$C_n(z) = z^n \overline{D}_n(1/z) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{d}_k z^{n-k} \rho_k^*(z)\,.$$

Procedendo como no caso anterior, concluímos que

$$\rho_n(z) = \delta_n \rho_n^*(z) + \gamma_n z \rho_{n-1}(z)\,. \tag{3.24}$$

Comparando os coeficientes de z^n obtemos $1 = \delta_n \overline{\delta}_n + \gamma_n$ e, assim, $\gamma_n = 1 - |\delta_n|^2$. Daí, (3.24) implica que $\{Q_{2n+1}\}$ satisfaz (3.17). As condições iniciais são imediatas, pois

$$Q_1(z) = \rho_0(z) = 1 \qquad \text{e} \qquad Q_0(z) = \rho_n^*(z) = 1\,.$$

Relembremos, ainda, que

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \langle \rho_n, z^n\rangle = \delta_n \langle \rho_n^*, z^n\rangle + (1 - |\delta|^2)\langle z\rho_{n-1}, z^n\rangle = (1 - |\delta_n|^2)\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\,.$$

Logo,

$$1 - |\delta_n|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} \neq 0\,. \tag{3.25}$$

(ii) Temos que, se μ é definido positivo, então a HPC$\{\delta_n\}$ é uma PPC$\{\delta_n\}$ pois $\delta_0 > 0$ e $|\delta_n| < 1$.

Reciprocamente, se HPC$\{\delta_n\}$ é positiva, então $\Delta_0 = \mu_0 = \delta_0 > 0$ e, para $n \geq 1$, $|\delta_n| < 1$ e, assim, (3.25) implica que $\Delta_n \Delta_{n-2} > 0$. Agora, como $\Delta_{-1} = 1$ e $\Delta_0 > 0$, concluímos que $\Delta_n > 0$. Logo, μ é definido positivo. ∎

O próximo teorema descreve um sistema de relações de recorrência para os polinômios de Szegő e seus recíprocos.

Teorema 3.2. *Seja HPC$\{\delta_n\}$ uma HPC-fração cujo denominador do n-ésimo aproximante, Q_n, é definido pelas equações de diferença (3.14)-(3.17). Para $n \geq 0$, sejam σ_n e σ_n^x definidos por*

$$\sigma_n(z) = Q_{2n+1}(z)\,, \quad \sigma_n^x(z) = Q_{2n}(z)\,. \tag{3.26}$$

Então,

(i) $\sigma_0(z) = \sigma_0^x = 1$ *e, para* $n \geq 1$,

$$\sigma_n(z) = z\sigma_{n-1}(z) + \delta_n \sigma_{n-1}^x(z)\,, \tag{3.27}$$

$$\sigma_n^x(z) = \overline{\delta}_n z\sigma_{n-1}(z) + \sigma_{n-1}^x(z)\,. \tag{3.28}$$

(ii) Para $n \geq 1$, $\sigma_n(z) = Q_{2n+1}(z)$ *é um polinômio mônico de grau* n *com* $\sigma_n(0) = \delta_n$, $\sigma_n^x(z) = Q_{2n}(z)$ *é um polinômio de grau no máximo* n *com* $\sigma_n^x(0) = 1$ *e*

$$Q_{2n+1}^*(z) = \sigma_n^*(z) = \sigma_n^x(z) = Q_{2n}(z)\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,. \tag{3.29}$$

(iii) Existe um funcional quase-definido μ *tal que* $\{\delta_n\}$ *é a seqüência de polinômios de Szegő com respeito a* μ. *O funcional* μ *é definido positivo, se e somente se,*

$$\delta_0 > 0\,, \quad |\delta_n| < 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.30}$$

Demonstração: (i) Substituindo (3.26) em (3.15), imediatamente obtemos (3.28), ou seja,

$$\sigma_n^x(z) = \overline{\delta}_n z\sigma_{n-1}(z) + \sigma_{n-1}^x(z)\,.$$

Agora, substituindo (3.26) em (3.17) também obtemos

$$\begin{aligned}\sigma_n(z) &= \delta_n\sigma_n^x(z) + (1-\delta_n\overline{\delta}_n)z\sigma_{n-1}(z) = z\sigma_{n-1}(z) + \delta_n\sigma_n^x(z) - \delta_n\overline{\delta}_n z\sigma_{n-1}(z)\\ &= z\sigma_{n-1}(z) + \delta_n(\sigma_n^x(z) - \overline{\delta}_n z\sigma_{n-1}(z))\end{aligned}$$

e usando (3.28), obtemos

$$\sigma_n(z) = z\sigma_{n-1}(z) + \delta_n\sigma_n^x(z)\,.$$

(ii) Da definição de polinômio recíproco, temos $\sigma_n^* = z^n\overline{\sigma}_n(1/z)$. Logo,

$$\sigma_n(z) = z^n\overline{\sigma}_n^*(1/z)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.31}$$

Mostremos (3.29) por indução. Para $n = 0$ a igualdade é trivial. Agora, para $n = 1$, temos que mostrar que $\sigma_1^*(z) = \sigma_1^x(z)$, o que de fato ocorre, pois, das equações (3.27) e (3.28), temos que

$$\sigma_1(z) = z\sigma_0(z) + \delta_n\sigma_0^x(z) \quad \Rightarrow \quad \sigma_1(z) = z + \delta_n\,.$$

Fazendo $z = 1/z$, conjugando os coeficientes e multiplicando por z a expressão anterior obtemos

$$\sigma_1^*(z) = \overline{\delta}_n z\delta_0(z) + \sigma_0^x(z) = \sigma_1^x(z)\,.$$

Suponha, por indução, que $\sigma^x_{n-1}(z) = \sigma^*_{n-1}(z)$ e mostremos que $\sigma^x_n(z) = \sigma^*_n(z)$. Novamente, das equações (3.27) e (3.28) e da hipótese indutiva, temos que

$$\sigma_n(z) = z\sigma_{n-1}(z) + \delta_n \sigma^*_{n-1}(z)\,.$$

Calculando o recíproco desse polinômio, obtemos

$$\sigma_n(z) = z\sigma_{n-1}(z) + \delta_n\sigma^*_{n-1} \Rightarrow \sigma_n(1/z) = (1/z)\sigma_{n-1}(1/z) + \delta_n\sigma^*_{n-1}(1/z)\,,$$

substituindo z por $1/z$. Conjugando os coeficientes,

$$\overline{\sigma}_n(1/z) = (1/z)\overline{\sigma}_{n-1}(1/z) + \overline{\delta}_n\,\overline{\sigma}^*_n(1/z)\,.$$

Assim, multiplicando por z^n,

$$z^n\overline{\sigma}_n(1/z) = z^{n-1}\overline{\sigma}_{n-1}(1/z) + \overline{\delta}_n z(z^{n-1}\overline{\sigma}^*_n(1/z))\,,$$

ou seja,

$$\sigma^*_n(z) = \sigma^*_{n-1}(z) + \overline{\delta}_n z\sigma_{n-1}(z) = \sigma^x_{n-1} + \overline{\delta}_n z\sigma_{n-1}(z)\,.$$

Portanto,

$$\sigma^*_n(z) = \sigma^x_n(z)\,, \quad n \geq 1\,.$$

(*iii*) O resultado é equivalente ao Teorema de Favard (Teorema 2.1). Sua demonstração pode ser encontrada em [14]. ■

A partir das equações (3.27) e (3.28), podemos obter o seguinte sistema de relações de recorrência para os polinômios de Szegő

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(z) &= z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho^*_n(z) && (3.32)\\ (1-|\delta_{n+1}|^2)z\rho_n(z) &= \rho_{n+1}(z) - \delta_{n+1}\rho^*_{n+1}(z)\,, \quad n \geq 0\,, && (3.33) \end{aligned}$$

onde $\rho_0(z) = \rho^*_0(z) = 1$. De fato, de (3.27) e (3.28), obtemos

$$\delta_n\rho^*_{n-1}(z) = \rho_n(z) - z\rho_{n-1}(z)\,, \tag{3.34}$$

$$\rho^*_n(z) = \overline{\delta}_n z\rho_{n-1}(z) + \rho^*_{n-1}(z)\,. \tag{3.35}$$

Logo, multiplicando (3.35) por δ_n, obtemos

$$\delta_n\rho^*_n(z) = |\delta_n|^2 z\rho_{n-1}(z) + \delta_n\rho^*_{n-1}(z)\,.$$

Substituindo (3.34) na expressão anterior, obtemos

$$\delta_n \rho_n^*(z) = |\delta_n|^2 z\rho_{n-1}(z) + \rho_n(z) - z\rho_{n-1}(z)$$

e, assim,

$$(1 - |\delta_n|^2) z\rho_{n-1}(z) = \rho_n(z) - \delta_n \rho_n^*(z)\,.$$

Os valores $\delta_n = \rho_n(0)$ são chamados de coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő. Note que, se tivermos $|\delta_n| = 1$, então, da expressão acima, concluímos que

$$\rho_n(z) = \delta_n \rho_n^*(z)\,. \tag{3.36}$$

O próximo resultado nos fornece informações sobre a localização das raízes dos polinômios de Szegő e a demonstração pode ser encontrada em Van Assche [21] ou, ainda, em Freud [10].

Teorema 3.3. *Considere $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios de Szegő com relação a uma medida $\psi(z)$ no círculo unitário. Então, as raízes de $\rho_n(z)$ estão todas no interior do círculo unitário.*

3.3 Polinômios associados aos polinômios de Szegő

De modo análogo ao desenvolvido para polinômios ortogonais, podemos definir polinômios associados aos polinômios de Szegő.

Consideremos um polinômio $L(t,z) \in \Lambda$, em t, dado pela seguinte expressão

$$L(t,z) = \sum_{k=p}^{q} a_k(z) t^k\,, \quad a_k(z) \in \mathbb{C}\,, \quad -\infty < p \le q < \infty\,.$$

Denotaremos por μ_t o funcional aplicado em t, ou seja,

$$\mu_t(L(t,z)) = \mu_t\left(\sum_{k=p}^{q} a_k(z) t^k\right) = \sum_{k=p}^{q} a_k(z)\mu_k\,.$$

Definição 3.1. *Definimos os polinômios associados a $\rho_n(z)$ e $\rho_n^*(z)$ respectivamente por*

$$\pi_n(z) = \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}(\rho_n(t) - \rho_n(z))\right)\,,\; n = 1, 2, \ldots\,,\; \pi_0 = -\mu_0 \tag{3.37}$$

e

$$\omega_n(z) = \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^n}{t^n}\rho_n^*(t) - \rho_n^*(z)\right)\right)\,,\; n = 1, 2, \ldots\,,\; \omega_0 = \mu_0\,. \tag{3.38}$$

O próximo resultado fornece uma relação entre os polinômios $\pi_n(z)$ e $\omega_n(z)$.

Teorema 3.4. *Seja* $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *uma seqüência de polinômios de Szegő com respeito a um funcional linear quase-definido* μ *e sejam* $\{\pi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *e* $\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *os polinômios associados definidos pelas expressões* (3.37) *e* (3.38), *respectivamente. Então,*

(i) para $n \geq 0$, $\pi_n(z)$ *é um polinômio de grau* n, $w_n(z)$ *é um polinômio de grau no máximo* n *em que*

$$\omega_n(z) = -\pi_n^*(z)\,. \tag{3.39}$$

(ii) para $n \geq 2$,

$$\pi_n(z) = \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^k}{t^k}\rho_n(t) - \rho_n(z)\right)\right)\,, \quad 0 \leq k \leq n-1 \tag{3.40}$$

e, para $n \geq 1$,

$$\omega_n(z) = \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^k}{t^k}\rho_n^*(t) - \rho_n^*(z)\right)\right)\,, \quad 1 \leq k \leq n\,. \tag{3.41}$$

Demonstração: (i) As afirmações sobre o grau de π_n e ω_n seguem diretamente das equações (3.37) e (3.38) e do fato de que ρ_n é um polinômio mônico de grau n e ρ_n^* é um polinômio de grau no máximo n. Para $n = 0$, temos que

$$w_0(z) = \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^0}{t^0}\rho_0^*(t) - \rho_0^*(z)\right)\right) = \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}(\overline{c}_0 - \overline{c}_0)\right) = 0 = -\pi_0\,.$$

Observe, agora, que

$$\overline{\mu_t(P(t))} = \overline{\mu_t\left(\sum_{k=0}^{m} a_k t^k\right)} = \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k \mu_{-k}} = \sum_{k=0}^{m} \overline{a}_k \overline{\mu}_k = \sum_{k=0}^{m} \overline{a}_k \mu_{-k} = \mu\left(\sum_{k=0}^{m} \overline{a}_k t^{-k}\right)\,.$$

Logo

$$\overline{\mu_t(P(t))} = \mu_t(\overline{P}(1/t))\,, \quad \text{para todo } P \in \Lambda\,.$$

Disto, de (3.37), (3.38) e da definição de polinômio recíproco, temos

$$\begin{aligned}
\pi_n^*(z) &= z^n\overline{\pi_n(1/\overline{z})} = z^n\overline{\mu(t)\left(\frac{\overline{z}^{-1}+t}{\overline{z}^{-1}-t}(\rho_n(t) - \rho_n(\overline{z}^{-1}))\right)} \\
&= z^n\mu_t\left(\frac{z^{-1}+t^{-1}}{z^{-1}-t^{-1}}(\overline{\rho}_n(t^{-1}) - \overline{\rho}_n(z^{-1}))\right) \\
&= -\mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^n}{t^n}t^n\overline{\rho}_n(t^{-1}) - z^n\overline{\rho}_n(z^{-1})\right)\right) \\
&= -\mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^n}{t^n}\rho_n^*(t) - \rho_n^*(z)\right)\right) = -\omega_n(z)\,.
\end{aligned}$$

(*ii*) Para $k = 0$, (3.40) segue de (3.37). Seja $n \geq 2$ um número dado. Então, para cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, definimos

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^k}{t^k}\rho_n(t) - \rho_n(z)\right)\right) - \pi_n(z) \\ &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^k}{t^k}\rho_n(t) - \rho_n(z)\right)\right) - \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}(\rho_n(t) - \rho_n(z))\right) \\ &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^k}{t^k} - 1\right)\rho_n(t)\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \end{aligned}$$

Portanto, para $k = 1$, usando o produto interno (3.3) e a ortogonalidade de $\rho_n(z)$, obtemos

$$F_1(z) = \mu_t\left(\frac{z+t}{t}\rho_n(t)\right) = z\langle \rho_n(t), t\rangle + \langle \rho_n(t), 1\rangle = 0\,.$$

Para cada $2 \leq k \leq n-1$, temos

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \mu_t\left((z+t)\rho_n(t)\sum_{m=0}^{k-1} t^{m-k}z^{k-1-m}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} z^{k-m}\langle \rho_n(t), t^{m-k}\rangle + \sum_{m=0}^{k-1} z^{k-1-m}\langle \rho_n(t), t^{m-k+1}\rangle = 0\,, \end{aligned}$$

o que demonstra (3.40).

A demonstração de (3.41) é análoga definindo-se

$$G_k(z) = \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z^k}{t^k}\rho_n^*(t) - \rho_n^*(z)\right)\right) - \omega_n(z)\,.$$

■

O próximo resultado fornece uma relação entre os polinômios associados aos polinômios de Szegő e os numeradores dos convergentes da HPC-fração associada aos polinômios de Szegő.

Teorema 3.5. *Consideremos* $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\pi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *e* $\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *satisfazendo às hipóteses do Teorema* 3.4. *Seja HPC*$\{\delta_n\}$ *a HPC-fração definida por*

$$\delta_0 = \mu_0\,, \quad \delta_n = \rho_n(0)\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.42}$$

e seja $P_n(z)$ *o n-ésimo numerador da HPC*$\{\delta_n\}$ *definido pelas equações de diferença* (3.14) *e* (3.16).

Então,

$$P_{2n}(z) = \omega_n(z) \quad e \quad P_{2n+1} = \pi_n(z)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.43}$$

e, assim, π_n *e* ω_n *satisfazem às relações de recorrência*

$$\pi_n(z) = z\pi_{n-1}(z) + \delta_n\omega_{n-1}(z)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{3.44}$$

$$\omega_n(z) = \overline{\delta}_n z\pi_{n-1}(z) + \omega_{n-1}(z)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.45}$$

Demonstração: Como $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é unicamente determinada pelas equações de diferença (3.14) a (3.17), provar (3.43) é equivalente a verificar que as equações de diferença são satisfeitas substituindo $P_{2n}(z)$ e $P_{2n+1}(z)$ por $\omega_n(z)$ e $\pi_n(z)$ respectivamente. Para $n = 0$ as condições iniciais são satisfeitas, pois $\pi_0(z) = -\mu_0 = -\delta_0$ e $\omega_0(z) = \mu_0 = \delta_0$.

Para $n = 1$ temos

$$\delta_1 = \rho_1(0) = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0}(-\mu_1) \Rightarrow \delta_1 = -\frac{\mu_1}{\mu_0},$$

assim,

$$\begin{aligned} P_2(z) &= \overline{\delta}_1 z P_1(z) = \overline{\delta}_1 z \pi_0(z) + \omega_0(z) = -\frac{\overline{\mu}_1}{\mu_0} z\,(-\mu_0) + \mu_0 = \mu_{-1} z + \mu_0 \\ &= (\mu_0 z + \mu_1)^* = -\pi_1^*(z) = \omega_1(z)\,, \end{aligned}$$

portanto, $\omega_1(z) = P_2(z)$.

Temos ainda, que

$$\begin{aligned} P_3(z) &= \delta_1 P_2(z) + (1 - |\delta_1|^2) z P_1(z) = \delta_1 \omega_1(z) + (1 - |\delta_1|^2) z \pi_0(z) \\ &= -\frac{\mu_1}{\mu_0}(\mu_0 + \mu_{-1} z) + \left(1 - \frac{|\mu_{-1}|^2}{\mu_0^2}\right) z(-\mu_0) = -\mu_1 - \mu_0 z = \pi_1(z)\,, \end{aligned}$$

logo, $\pi_1(z) = P_3(z)$.

Portanto, para $n = 1$, a expressão (3.43) é satisfeita.

Agora, para $n \geq 2$, de (3.40), (3.41) e do Teorema 3.2 partes (i) e (ii), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_n z \pi_{n-1}(z) + \omega_{n-1}(z) &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\overline{\delta}_n z(\rho_{n-1}(t) - \rho_{n-1}(z)) + \left(\frac{z}{t}\rho_{n-1}^*(t) - \rho_{n-1}^*(z)\right)\right)\right) \\ &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z}{t}(\overline{\delta}_n t \rho_{n-1}(t) + \rho_{n-1}^*(t)) - (\overline{\delta}_n z \rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z))\right)\right) \\ &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z}{t}\rho_n^*(t) - \rho_n^*(z)\right)\right) = \omega_n(z) \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} &\delta_n \omega_n(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \pi_{n-1}(z) = \\ &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\delta_n\left(\frac{z}{t}\rho_n^*(t) - \rho_n^*(z)\right) + (1 - |\delta_n|^2) z(\rho_{n-1}(t) - \rho_{n-1}(z))\right)\right) \\ &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z}{t}(\delta_n \rho_n^*(t) + (1 - |\delta_n|^2) t \rho_{n-1}(t))\right) - (\delta_n \rho_n^*(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z))\right) \\ &= \mu_t\left(\frac{z+t}{z-t}\left(\frac{z}{t}\rho_n(t) - \rho_n(z)\right)\right) = \pi_n(z)\,, \end{aligned}$$

o que mostra as relações (3.44) e (3.45). ∎

Capítulo 4

Polinômios para-ortogonais

Neste capítulo, estudamos polinômios da forma

$$\rho_n(z) + w\rho_n^*(z)\,, \qquad \text{e} \qquad w \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad |w| = 1\,,$$

que foram inicialmente considerados por Jones *et al.* em [14] e são chamados de polinômios para-ortogonais. Uma propriedade importante desses polinômios é que suas raízes são simples e estão contidas no círculo unitário $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$.

Baseamos nossos estudos em resultados encontrados em Jones *et al.* [14]. No entanto, vamos trabalhar com tais resultados utilizando uma medida definida no círculo unitário $\psi(z)$, definida em (3.11), em lugar do tratamento mais abrangente, via funcional de momento, dado pelos autores.

Para facilitar a notação posterior, passamos agora a identificar a medida com a qual os polinômios de Szegő estão relacionados. Assim, denotaremos a seqüência de polinômios de Szegő com relação a uma dada medida $\psi(z)$ no círculo unitário por

$$\rho_n(\psi, z)\,,$$

isto é

$$\langle \rho_n(\psi, z), \rho_m(\psi, z)\rangle = 0, \qquad \text{se} \quad n \neq m\,,$$

onde

$$\langle X, Y\rangle = \int_\Gamma X(z)\overline{Y}(1/z)d\psi(z)\,.$$

4.1 Introdução

Definição 4.1. *Uma seqüência* $\{X_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *é chamada de seqüência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida* $\psi(z)$ *se, para* $n \geq 0$, $X_n(z)$ *é um polinômio de grau* n *que satisfaz*

$$\begin{array}{rcl} \langle X_n, 1\rangle & \neq & 0, \\ \langle X_n, z^m\rangle & = & 0 \quad , \quad m = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ \langle X_n, z^n\rangle & \neq & 0\,. \end{array} \tag{4.1}$$

Esses polinômios são chamados de para-ortogonais, pois, diferentemente dos polinômios ortogonais, satisfazem $\langle X_n, 1\rangle \neq 0$.

Observe que $\{\rho_n(\psi, z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\rho_n^*(\psi, z)\}_{n=0}^{\infty}$ não são seqüências de polinômios para-ortogonais com respeito a $\psi(z)$.

Uma classe interessante de polinômios é a conhecida como polinômios κ-invariantes. Para $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$, um polinômio $X(z)$ é chamado κ-invariante se

$$X^*(z) = \kappa X(z)\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

A seqüência $\{X_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante se, para cada n, X_n é κ_n-invariante.

Podemos obter seqüências $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariantes de polinômios para-ortogonais tomando funções da forma

$$\rho_n(\psi, w_n, z) = \rho_n(\psi, z) + w_n\rho_n^*(\psi, z)\,, \quad z, w_n \in \mathbb{C}\,, n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4.2}$$

Note que $\rho_n(\psi, w_n, z)$ satisfaz à definição de polinômio para-ortogonal com relação à medida $\psi(z)$. De fato, fazendo o produto interno de $\rho_n(\psi, w_n, z)$ e z^m para $m = 0, 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{array}{rcl} \langle \rho_n(\psi, w_n, z), z^m\rangle & = & \langle \rho_n(\psi, z), z^m + w_n\rho_n^*(\psi, z), z^m\rangle \\ & = & \langle \rho_n(\psi, z), z^m\rangle + w_n\langle \rho_n^*(\psi, z), z^m\rangle\,. \end{array}$$

Utilizando as relações de ortogonalidade (3.9) e (3.10), concluímos que

$$\langle \rho_n(\psi, w_n, z), z^m\rangle = \begin{cases} \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \neq 0\,, & \text{para } m = 0 \text{ e } m = n\,, \\ 0\,, & \text{para } m = 1, 2, \ldots, n-1\,. \end{cases}$$

O próximo resultado, que fornece uma caracterização dos polinômios para-ortogonais κ-invariantes, garante que toda seqüência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida $\psi(z)$ é obtida a partir da expressão (4.2).

Teorema 4.1. *Seja $\{\rho_n(\psi, z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios de Szegő com relação a uma dada medida $\psi(z)$.*

(i) Sejam $c_n, w_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$ satisfazendo $c_n \neq 0$, $|w_n| = 1$ e seja $\kappa_n = \overline{c}_n \dfrac{\overline{w}_n}{c_n}$. Então, $\{c_n \rho_n(\psi, w_n, z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a $\psi(z)$ e $|\kappa_n| = 1$, $n \geq 0$.

(ii) Seja $\{X_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios para-ortogonais com respeito a $\psi(z)$. Então, para $n \geq 0$,

$$X_n(z) = c_n \rho_n(\psi, w_n, z), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

onde

$$c_n = \frac{\langle X_n(z), \rho_n(\psi, z)\rangle}{\langle \rho_n(\psi, z), \rho_n(\psi, z)\rangle} - d_n \frac{\langle \rho_n^*(\psi, z), \rho_n(\psi, z)\rangle}{\langle \rho_n(\psi, z), \rho_n(\psi, z)\rangle} \neq 0 \qquad e \qquad w_n = \frac{d_n}{c_n},$$

com (4.4)

$$d_n = \frac{\langle X_n(z), 1\rangle}{\langle \rho_n^*(\psi, z), 1\rangle} \neq 0,$$

Para cada $n \geq 0$, se $X_n(z)$ é também κ_n-invariante, então

$$|w_n| = 1, \kappa_n = \frac{\overline{c}_n \overline{w}_n}{c_n} \ \ e \ \ |\kappa_n| = 1. \tag{4.5}$$

Demonstração: (i) Sabemos que $\rho_n^*(\psi, 0) = 1$ e, assim,

$$\rho_n(\psi, w_n, z) = \rho_n(\psi, z) + w_n \rho_n^*(\psi, z) = (z^n + \cdots + \delta_n) + w_n(\overline{\delta}_n z^n + \cdots + 1).$$

Logo,

$$\rho_n(\psi, w_n, z) = (1 + w_n \overline{\delta}_n) z^n + \ldots + (w_n + \delta_n),$$

onde $\delta_n = \rho_n(\psi, 0)$.

Pelo Teorema 3.1 parte (i), $|\delta_n| \neq 1$. Assim, concluímos que o grau de $\rho_n(\psi, w_n, z)$ é n e, além disso, $\rho_n(\psi, w_n, 0) \neq 0$. Da definição de polinômio recíproco e da expressão (4.2), temos que

$$(c_n \rho_n(\psi, w_n, z))^* = \overline{c}_n(\rho_n^*(\psi, z) + \overline{w}_n \rho_n(\psi, z)) = \overline{c}_n \overline{w}_n(\rho_n(\psi, z) + w_n \rho_n^*(\psi, z)) = \kappa_n c_n \rho_n(\psi, w_n, z),$$

que mostra que $\{c_n \rho_n(\psi, w_n, z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante para todo $z \in \mathbb{C}$ e $n \geq 0$.

A para-ortogonalidade segue imediatamente da relação

$$\langle \rho_n(\psi, w_n, z), z^k\rangle = \langle \rho_n(\psi, z), z^k\rangle + w_n \langle \rho_n^*(\psi, z), z^k\rangle$$

e das propriedades de ortogonalidade dos polinômios $\rho_n(\psi, z)$ e $\rho_n^*(\psi, z)$, pois

$$\begin{aligned}
\langle \rho_n(\psi, w_n, z), z^k \rangle &= 0\,, \qquad 1 \le k \le n-1\,,\\
\langle \rho_n(\psi, w_n, z), 1 \rangle &= w_n \langle \rho_n^*(\psi, z), 1 \rangle \neq 0\,,\\
\langle \rho_n(\psi, w_n, z), z^n \rangle &= \langle \rho_n(\psi, z), z^n \rangle \neq 0\,.
\end{aligned}$$

(ii) Seja $T_n(z) = X_n(z) - c_n\rho_n(\psi, z) - d_n\rho_n^*(\psi, z)$, $n \ge 0$. Então, das definições de c_n e d_n, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle T_n(z), \rho_n(\psi, z) \rangle &= \langle X_n(z) - c_n\rho_n(\psi, z) - d_n\rho_n^*(\psi, z), \rho_n(\psi, z) \rangle\\
&= \langle X_n(z), \rho_n(\psi, z) \rangle - c_n\langle \rho_n(\psi, z), \rho_n(\psi, z) \rangle - d_n\langle \rho_n^*(\psi, z), \rho_n(\psi, z) \rangle\\
&= \langle X_n(z), \rho_n(\psi, z) \rangle - \langle X_n(z), \rho_n(\psi, z) \rangle + d_n\langle \rho_n^*(\psi, z), \rho_n(\psi, z) \rangle\\
&\quad - d_n\langle \rho_n^*(\psi, z), \rho_n(\psi, z) \rangle = 0
\end{aligned}$$

e, ainda, das relações de ortogonalidade dos polinômios de Szegő,

$$\begin{aligned}
\langle T_n(z), \rho_0(\psi, z) \rangle &= \langle X_n(z) - c_n\rho_n(\psi, z) - d_n\rho_n^*(\psi, z), \rho_0(\psi, z) \rangle\\
&= \langle X_n(z), \rho_0(\psi, z) \rangle - c_n\langle \rho_n(\psi, z), \rho_0(\psi, z) \rangle - d_n\langle \rho_n^*(\psi, z), \rho_0(\psi, z) \rangle\\
&= \langle X_n(z), \rho_0(\psi, z) \rangle - \frac{\langle X_n(z), 1 \rangle}{\langle \rho_n^*(\psi, z), 1 \rangle}\langle \rho_n^*(\psi, z), \rho_0(\psi, z) \rangle\\
&= \langle X_n(z), 1 \rangle - \langle X_n(z), 1 \rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\langle T_n(z), \rho_n(\psi, z) \rangle = \langle T_n(z), \rho_0(\psi, z) \rangle = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{4.6}$$

Vamos mostrar, agora, que $T_n(z) \equiv 0$ para $n \ge 0$. É imediato que $T_0(z) = 0$, pois

$$\begin{aligned}
T_0(z) &= X_0(z) - c_0\rho_0(\psi, z) - d_0\rho_0^*(\psi, z)\\
&= c_0(\rho_0(\psi, z) - w_0\rho_0^*(\psi, z)) - c_0\rho_0(\psi, z) - d_0\rho_0^*(\psi, z)\\
&= c_0\left(\rho_0(\psi, z) + \frac{d_0}{c_0}\rho_0^*(\psi, z)\right) - c_0\rho_0(\psi, z) - d_0\rho_0^*(\psi, z)\\
&= c_0\rho_0(\psi, z) + d_0\rho_0^*(\psi, z) - c_0\rho_0(\psi, z) - d_0\rho_0^*(\psi, z) = 0\,.
\end{aligned}$$

Para $n \ge 1$, podemos expressar $T_n(z)$ da forma

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k(\psi, z)\,, \quad a_k \in \mathbb{C}\,.$$

Disto e de (4.6), obtemos, para $n \ge 1$,

$$0 = \langle T_n(z), \rho_0(\psi, z) \rangle = a_0\langle \rho_0(\psi, z), \rho_0(\psi, z) \rangle \Rightarrow a_0 = 0\,.$$

Analogamente,

$$0 = \langle T_n(z), \rho_n(\psi, z)\rangle = a_n\langle \rho_n(\psi, z), \rho_n(\psi, z)\rangle \Rightarrow a_n = 0\,.$$

Portanto, em particular, $T_1(z) = 0$. Para $n \geq 2$, como $X(z)$ é para-ortogonal, temos

$$0 = \langle T_n(z), z\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n-1} a_k\rho_k(\psi, z), z \right\rangle = a_1\langle \rho_1(\psi, z), z\rangle \Rightarrow a_1 = 0\,.$$

Continuando dessa maneira, teremos $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Assim, $T_n(z) \equiv 0$ para $n \geq 0$ e

$$X_n(z) = c_n\rho_n(\psi, z) + d_n\rho_n^*(\psi, z)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4.7}$$

Se $c_n = 0$, então, por (4.7) e (4.1), temos

$$d_n\langle \rho_n^*(\psi, z), z^n\rangle = \langle X_n(z), z^n\rangle \neq 0$$

o que contradiz a ortogonalidade de $\rho_n^*(\psi, z)$ e, assim $c_n \neq 0$. Analogamente, se $d_n = 0$, novamente por (4.7) e (4.1), temos

$$c_n\langle \rho_n(\psi, z), 1\rangle = \langle X_n(z), 1\rangle \neq 0\,,$$

que contradiz a ortogonalidade de $\rho_n(\psi, z)$. Logo, $d_n \neq 0$. Podemos então escrever, para todo $n \geq 0$,

$$X_n(z) = c_n\left(\rho_n(\psi, z) + \frac{d_n}{c_n}\rho_n^*(\psi, z)\right) = c_n\rho_n(\psi, w_n, z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,, \quad w_n = \frac{d_n}{c_n}\,.$$

Agora, suponhamos que, para algum $n \geq 0$, $X_n(z)$ é κ_n-invariante. Então, $X_n^*(z) = \kappa_n X_n(z)$ e, assim (4.7) e $X_n^*(z) = \bar{c}_n\rho_n^*(\psi, z) + \overline{d}_n\rho_n(\psi, z)$ implicam que

$$(\overline{d}_n - \kappa_n c_n)\rho_n(\psi, z) + (\bar{c}_n - \kappa_n d_n)\rho_n^*(\psi, z) = 0\,.$$

Como $\rho_n(\psi, z)$ e $\rho_n^*(\psi, z)$ são linearmente independentes, podemos concluir que

$$\kappa_n = \frac{\overline{d}_n}{c_n} \quad \text{e} \quad \kappa_n = \frac{\bar{c}_n}{d_n}\,.$$

Isto significa que $|c_n| = |d_n|$ e, assim, as condições (4.5) estão provadas. ■

4.2 Raízes dos polinômios para-ortogonais

As raízes dos polinômios para-ortogonais possuem uma propriedade que será bastante utilizada neste trabalho e é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Seja $\{X_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida positiva $\psi(z)$. Então, para cada $n \geq 1$, os n zeros de $X_n(z)$ são simples e estão no círculo unitário $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Demonstração: Para $n \geq 1$ podemos escrever

$$X_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n\,, \quad c_n \neq 0\,, \quad c_k \in \mathbb{C}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

e

$$X_n^*(z) = \bar{c}_0 z^n + \bar{c}_1 z^{n-1} + \ldots + \bar{c}_n = \kappa_n X_n(z)\,, \quad \kappa_n \neq 0\,.$$

Observemos que

$$c_0 = X_n(0) = \kappa_n^{-1} X_n^*(0) = \frac{\bar{c}_n}{\kappa_n} \neq 0\,.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ as raízes de ordem ímpar de $X_n(z)$ de ordem ímpar em Γ, contadas com suas multiplicidades. Se não existem tais raízes, então $p = 0$, caso contrário, $1 \leq p \leq n$. Para demonstrar o teorema é suficiente mostrar que $p = n$.

Se β é uma raiz de $X_n(z)$ que não está em Γ, então, como $X_n(z)$ é κ_n-invariante, $1/\overline{\beta}$ é uma raiz de $X_n(z)$ e $1/\overline{\beta}$ também não está em Γ. Assim, as raízes de $X_n(z)$ que não pertencem a Γ ocorrem aos pares $(\beta, 1/\overline{\beta})$.

Se β é uma raiz de X_n em Γ, então $\beta = 1/\overline{\beta}$. Existem, assim, um número par de raízes de $X_n(z)$ em Γ mas que não estão no conjunto $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p]$. Segue, então, que as raízes de $X_n(z)$ que não estão em $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p]$ ocorrem aos pares $(\beta, 1/\overline{\beta})$. Denotemos todas as raízes que ocorrem aos pares $(\beta, 1/\overline{\beta})$ pelos $2q$ números

$$\beta_1, \frac{1}{\overline{\beta}_1}, \beta_2, \frac{1}{\overline{\beta}_2}, \ldots, \beta_q, \frac{1}{\overline{\beta}_q}\,,$$

que podem estar em Γ ou não. Se não existem tais raízes, tomamos $q = 0$. Claramente $p + 2q = n$. Como $X_n(0) \neq 0$, temos que $\beta_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, q$. Consideremos os polinômios

$$A(z) = \begin{cases} (z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_p)\,, & \text{se} \quad p \geq 1\,, \\ 1\,, & \text{se} \quad p = 0\,, \end{cases}$$

$$B(z) = \begin{cases} (z - \beta_1) \ldots (z - \beta_q)\,, & \text{se} \quad q \geq 1\,, \\ 1\,, & \text{se} \quad q = 0\,, \end{cases}$$

$$C(z) = z^q A(z)\,.$$

Note que

$$X_n(z) = A(z)B(z)\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_1}\right)\dots\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_q}\right).$$

Suponha que $p < n$ e, assim, $q \geq 1$. Então, da expressão (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle X_n, C\rangle &= \int_\Gamma X_n(z)\overline{C}(1/z)d\psi(z) = \int_\Gamma A(z)B(z)\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_1}\right)\dots\left(z - \frac{1}{\overline{\beta}_q}\right)\overline{A}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^q}d\psi(z) \\
&= \int_\Gamma A(z)B(z)\overline{A}\left(\frac{1}{z}\right)(-1)^q\frac{(1-\overline{\beta}_1 z)\dots(1-\overline{\beta}_q z)}{\overline{\beta}_1\dots\overline{\beta}_q z^q}d\psi(z) \\
&= \frac{(-1)^q}{\beta_1\dots\beta_q}\int_\Gamma A(z)B(z)\overline{A}\left(\frac{1}{z}\right)\overline{B}\left(\frac{1}{z}\right)d\psi(z) = \frac{(-1)^q}{\beta_1\dots\beta_q}\langle AB, AB\rangle \neq 0\,.
\end{aligned}$$

A desigualdade segue do fato de $\langle AB, AB\rangle > 0$, que é uma conseqüência de $\psi(z)$ ser positiva. Como $C(z)$ é um polinômio de grau $p+q$ e $\langle X_n, C\rangle \neq 0$, as condições de para-ortogonalidade implicam que o grau de $C(z)$ é n. Como tomamos $q \geq 1$, isto é impossível, pois o grau de $C(z)$ é igual a $p+q$ que é menor do que $p + 2q = n$. Logo, $q = 0$ e $p = n$. ∎

4.3 Fórmulas de quadratura no círculo unitário

Faremos, agora, um estudo sobre fórmulas de quadratura no círculo unitário, isto é, fórmulas de quadratura cujos nós pertencem a $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Como visto no Capítulo 2, uma fórmula de quadratura gaussiana é uma fórmula para aproximar integrais da forma

$$\int_a^b f(t)d\psi(t) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}f(x_{n,m})\,, \quad f \in \Pi_{2n-1}\,.$$

Estudaremos, agora, fórmulas de quadratura do tipo

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n}\lambda_{n,m}f(\xi_{n,m})\,, \tag{4.8}$$

onde os nós $\xi_{n,m}$, com $|\xi_{n,m}| = 1$, e os pesos $\lambda_{n,m}$ são tais que a fórmula acima é válida para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$. Fórmulas de quadratura desse tipo são chamadas de fórmulas de quadratura no círculo unitário (ou de Szegő) com n-pontos.

Considere $\{\rho_n(\psi, z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios de Szegő com respeito a $\psi(z)$ e também $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos, não necessariamente distintos, tais que

$$|w_n| = 1\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,.$$

Seja $\{\rho_n(\psi, w_n, z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios para-ortogonais $\{\overline{w}_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariantes dada por

$$\rho_n(\psi, w_n, z) = \rho_n(\psi, z) + w_n \rho_n^*(\psi, z)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Denotemos por $\xi_{n,m} = \xi_{n,m}(w_n)$, $m = 1, 2, \ldots, n$ as raízes de $\rho_n(\psi, w_n, z)$ que já sabemos, segundo o Teorema (4.2), que são simples e pertencem a $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Podemos construir os polinômios fundamentais de Lagrange $L_{n,m}(z, w_n)$ como

$$L_{n,m}(z, w_n) = \frac{\rho_n(\psi, w_n, z)}{(z - \xi_m^{(n)})\rho_n'(\psi, w_n, \xi_m^{(n)})}\,, \ 1 \le m \le n\,. \tag{4.9}$$

De fato, como $\delta_n = \rho_n(\psi, 0)$, logo $|\delta_n| < 1$. Denotemos $\rho_n(\psi, z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ com $a_n = 1$ e $a_0 = \rho_n(\psi, 0) = \delta_n$. Assim,

$$\rho_n^*(\psi, z) = z^n \overline{\rho}_n(\psi, 1/z) = z^n \left(\sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j z^{-j}\right) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j z^{n-j}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho_n(\psi, w_n, z) &= \rho_n(\psi, z) + w_n \rho_n^*(\psi, z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j + w_n \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j z^{n-j} \\
&= z^n + w_n \overline{a}_0 z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j + w_n \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j z^{n-j}\,.
\end{aligned}$$

Fazendo $a_0 = \delta_n$, obtemos

$$\rho_n(\psi, w_n, z) = (1 + \overline{\delta}_n w_n) z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j + w_n \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j z^{n-j}\,.$$

Observemos que $(1 + \overline{\delta}_n w_n)$ é o termo do coeficiente de maior grau de $\rho_n(\psi, w_n, z)$, logo

$$\rho_n(\psi, w_n, z) = (1 + \overline{\delta}_n w_n) \prod_{m=1}^{n} (z - \xi_{n,m})\,. \tag{4.10}$$

Calculando $\rho_n'(\psi, w_n, z)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_n'(\psi, w_n, z)}{(1 + \overline{\delta_n} w_n)} &= \left(\prod_{m=1}^{n} (z - \xi_{n,m})\right)' = \left[(z - \xi_{n,m}) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{n} (z - \xi_{n,k})\right)\right]' \\
&= \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{n} (z - \xi_{n,k}) + (z - \xi_{n,m}) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{n} (z - \xi_{n,k})\right)'\,.
\end{aligned}$$

Avaliando esta última expressão em $z = \xi_{n,m}$ temos

$$\rho_n^{'}(\psi, w_n, \xi_{n,m}) = (1 + \overline{\delta}_n w_n) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n} (\xi_{n,m} - \xi_{n,k}) \,, \quad \text{para} \quad 1 \leq m \leq n \,. \tag{4.11}$$

Substituindo (4.10) e (4.11) na expressão para $L_{n,m}(z, w_n)$, obtemos

$$L_{n,m}(z, w_n) = \frac{\rho_n(\psi, w_n, z)}{(z - \xi_{n,m})\rho_n(\psi, w_n, \xi_{n,m})} = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n} (z - \xi_{n,k})}{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n} (\xi_{n,m} - \xi_{n,k})} \,, \quad 1 \leq m \leq n \,.$$

Daí, segue que, para $1 \leq m \leq n$,

$$L_{n,m}(\xi_{n,k}, w_n) = \delta_{k,m} \,, \quad 1 \leq k \leq n \,, \tag{4.12}$$

onde $\delta_{k,m}$ é o delta de Kronecker. Observe, ainda, que $L_{n,m}(z, w_n) \in \Lambda_{0,n-1} = \Pi_{n-1}$ e

$$\overline{L}_{n,m}\left(\frac{1}{z}, w_n\right) = \overline{\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n} (\xi_{n,m} - \xi_{n,k})\right)^{-1}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z} - \overline{\xi}_{n,m}\right) \in \Lambda_{-(n-1),0} \,.$$

Definimos, então, os pesos $\lambda_{n,m}$ por

$$\lambda_{n,m} = \lambda_{n,m}(w_n) = \int_0^{2\pi} L_{n,m}(e^{i\theta}, w_n) d\psi(e^{i\theta}) \,, \qquad 1 \leq m \leq n \,, \quad n = 1, 2, \ldots \,, \tag{4.13}$$

O próximo teorema mostra que a expressão acima é uma quadratura de Szegő com n-pontos válida para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Teorema 4.3. *Seja $\psi(z)$ uma medida no círculo unitário. Para $n \geq 1$ e $1 \leq m \leq n$, denotemos por $\xi_{n,m}$ as raízes de $\rho_n(\psi, w_n, z)$ e sejam os pesos $\lambda_{n,m}$ definidos por (4.13). Então, para $n \geq 1$ e $1 \leq m \leq n$,*

$$\int_\Gamma f(z) d\psi(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} f(\xi_{n,m}) \tag{4.14}$$

é válida para toda $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ e, ainda,

$$\lambda_{n,m} > 0 \,, \quad \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} = \int_0^{2\pi} d\psi(e^{i\theta}) = \mu_0 > 0 \,. \tag{4.15}$$

Demonstração: Sejam $n \geq 1$ e $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ dados. Definimos

$$D(z) = f(z) - \sum_{m=1}^{n} f(\xi_{n,m}) L_{n,m}(z, w_n) \,,$$

onde $L_{n,m}(z,w_n)$ é dado por (4.9). Então, $D \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ e, por (4.12),

$$D(\xi_{n,k}) = f(\xi_{n,k}) - \sum_{m=1}^{n} f(\xi_{n,m})\delta_{m,k} = 0\,, \quad 1 \le k \le n\,.$$

Claramente, $E(z) = z^{n-1}D(z) \in \Pi_{2n-2}$ e $E(\xi_{n,m}) = 0$ para $1 \le m \le n$. Assim, existe um polinômio $S(z) \in \Pi_{n-2}$ tal que $E(z) = \rho_n(\psi, w_n, z)S(z)$, ou ainda,

$$D(z) = \frac{E(z)}{z^{n-1}} = \frac{\rho_n(\psi, w_n, z)S(z)}{z^{n-1}}\,.$$

Se tomarmos $S(z) = \sum_{m=0}^{n-2} s_m z^m$, então

$$\int_\Gamma D(z)d\psi(z) = \int_\Gamma \left(\rho_n(\psi, w_n, z)\sum_{m=0}^{n-2} \frac{s_m}{z^{n-m-1}}\right) d\psi(z) = \sum_{m=0}^{n-2}\langle \rho_n(\psi, w_n, z), \overline{s}_m z^{n-1-m}\rangle = 0$$

pela ortogonalidade de $\{\rho_n(\psi, w_n, z)\}_{n=0}^{\infty}$. Disto e da equação (4.13), segue que

$$\int_\Gamma f(z)d\psi(z) = \int_\Gamma \left[D(z) + \sum_{m=1}^{n} f(\xi_{n,m})L_{n,m}(z,w_n)\right] d\psi(z) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} f(\xi_{n,m})\,,$$

o que mostra que (4.14) é válida para toda $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Agora, para mostrar que $\lambda_{n,m} > 0$, tomemos

$$K_{n,m}(z,w_n) = L_{n,m}(z,w_n)\overline{L}_{n,m}(1/z,w_n) - L_{n,m}(z,w_n)\,. \tag{4.16}$$

Observe que $L_{n,m}(z,w_n)\overline{L}_{n,m}(1/z,w_n) \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$. Assim, $K_{n,m}(z,w_n) \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ e então

$$K_{n,m}(\xi_{n,k},w_n) = 0\,, \quad 1 \le k \le m\,.$$

Logo, de (4.14) para $1 \le m \le n$, segue que

$$\int_\Gamma K_{n,m}(z,w_n)d\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} K_{n,m}(\xi_{n,k},w_n) = 0\,. \tag{4.17}$$

Portanto, de (4.13), (4.16) e (4.17), para $1 \le m \le n$,

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,m} &= \int_\Gamma L_{n,m}(z,w_n)d\psi(z) = \int_\Gamma L_{n,m}(z,w_n)\overline{L}_{n,m}(1/z,w_n)d\psi(z) \\
&= \langle L_{n,m}(z,w_n), L_{n,m}(z,w_n)\rangle > 0\,, \qquad q \le m \le n\,,
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_{n,m} > 0$.

Finalmente, tomando $L(z) = 1$ em (4.14), obtem-se

$$\mu_0 = \int_\Gamma 1\, d\psi(z) = \int_0^{2\pi} 1\, d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} \cdot 1 \;>\; 0\,.$$

∎

4.4 Casos especiais de polinômios para-ortogonais

Nesta seção, apresentamos alguns resultados encontrados em [4] e [5]. Se consideramos $\psi(z)$ uma medida simétrica no círculo unitário, isto é, $d\psi(1/z) = -d\psi(z)$, então os momentos são todos reais. De fato, como

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^{\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) + \int_{\pi}^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta})\,, \tag{4.18}$$

fazendo $\theta = t + 2\pi$ na segunda integral do lado direito, obtemos

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{0} e^{in(t+2\pi)} d\psi(e^{i(t+2\pi)})\,,$$

Utilizando as relações $\cos(nt + 2n\pi) = \cos(nt)$ e $\mathrm{sen}(nt + 2n\pi) = \mathrm{sen}(nt)$, obtemos

$$\int_{-\pi}^{0} e^{in(t+2\pi)} d\psi(e^{i(t+2\pi)}) = \int_{-\pi}^{0} e^{int} d\psi(e^{it})\,.$$

Substituindo $t = -\theta$ na expressão acima segue que

$$\int_{-\pi}^{0} e^{int} d\psi(e^{it}) = \int_{\pi}^{0} e^{-in\theta} d\psi(e^{-i\theta})\,.$$

Agora, utilizando a simetria da medida $\psi(e^{i\theta})$, temos que

$$\int_{\pi}^{0} e^{-in\theta} d\psi(e^{-i\theta}) = \int_{0}^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta})\,.$$

Logo,

$$\mu_n = \int_0^{\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) + \int_0^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = 2\int_0^{\pi} \cos(n\theta) d\psi(e^{i\theta})\,,$$

de onde concluímos que μ_n é real para $n \geq 0$. Disto, vemos que os coeficientes de reflexão são reais e, assim, $-1 < \delta_n < 1$, onde $\delta_n = \rho_n(\psi, 0)$.

Consideremos agora as duas seqüências de polinômios para-ortogonais especiais denotadas, respectivamente, por

$$\{\rho_n(\psi, 1, z)\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad \{\rho_n(\psi, -1, z)\}_{n=0}^{\infty}\,,$$

as quais são obtidas de (4.2) quando fazemos $w_n = 1$ e $w_n = -1$, respectivamente. Observe que

$$\rho_n(\psi, -1, z) = \rho_n(\psi, z) - \rho_n^*(\psi, z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots,(z - z_n) - (1 - zz_1)(1 - zz_2)\ldots(1 - zz_n)\,.$$

Assim,

$$\rho_n(\psi, -1, 1) = 0\,.$$

Logo, $\rho_n(\psi,-1,z)$ é divisível por $(z-1)$ e podemos definir

$$R_n^{(1)}(\psi,z)=\frac{\rho_n(\psi,1,z)}{1+\rho_n(\psi,0)} \quad \text{e} \quad R_n^{(2)}(\psi,z)=\frac{\rho_{n+1}(\psi,-1,z)}{(z-1)(1-\rho_{n+1}(\psi,0))}, \quad n\geq 0, \tag{4.19}$$

onde $R_n^{(1)}(\psi,z)$ e $(z-1)R_n^{(2)}(\psi,z)$ são polinômios para-ortogonais mônicos.

Teorema 4.4. *Os polinômios $R_n^{(1)}(\psi,z)$ e $R_n^{(2)}(\psi,z)$ definidos por (4.19) satisfazem à seguinte relação*

$$2z\rho_{n-1}(\psi,z)=R_n^{(1)}(\psi,z)+(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z). \tag{4.20}$$

Demonstração: Observe que

$$\rho_n(\psi,1,z)+\rho_n(\psi,-1,z)=2\rho_n(\psi,z).$$

Por outro lado, usando as relações (4.19) tem-se que

$$\rho_n(\psi,1,z)+\rho_n(\psi,-1,z)=(1+\delta_n)R_n^{(1)}(\psi,z)+(1-\delta_n)(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z).$$

Assim,

$$2\rho_n(\psi,z)=R_n^{(1)}(\psi,z)+\delta_nR_n^{(1)}(\psi,z)+(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z)-\delta_n(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z)$$

ou, ainda,

$$2\rho_n(\psi,z)-\delta_n\left(\frac{(1-\delta_n)\rho_n(\psi,1,z)-(1+\delta_n)\rho_n(\psi,-1,z)}{(1-\delta_n)(1+\delta_n)}\right)=R_n^{(1)}(\psi,z)+(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z),$$

$$2\rho_n(\psi,z)-\frac{\delta_n}{1-\delta_n^2}(2\rho_n^*(\psi,z)-2\delta_n\rho_n(\psi,z))=R_n^{(1)}(\psi,z)+(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z),$$

$$\frac{2}{1-\delta_n^2}(\rho_n(\psi,z)-\delta_n\rho_n^*(\psi,z))=R_n^{(1)}(\psi,z)+(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z).$$

Agora, usando a relação de recorrência (3.33), segue que

$$2z\rho_{n-1}(\psi,z)=R_n^{(1)}(\psi,z)+(z-1)R_{n-1}^{(2)}(\psi,z).$$

■

O próximo resultado fornece uma relação de recorrência para os polinômios $R_n^{(1)}(\psi,z)$ e $R_n^{(2)}(\psi,z)$.

Teorema 4.5. *Os polinômios mônicos $R_n^{(\kappa)}(\psi,z)$ $(\kappa=1,2)$ satisfazem, para $n\geq 1$, a seguinte relação de recorrência*

$$R_{n+1}^{(\kappa)}(\psi,z)=(z+1)R_n^{(\kappa)}(\psi,z)-4\alpha_{n+1}^{(\kappa)}zR_{n-1}^{(\kappa)}(\psi,z) \tag{4.21}$$

com condições iniciais $R_0^{(\kappa)}(\psi,z)=1$ e $R_1^{(\kappa)}(\psi,z)=z+1$ e, ainda,

$$4\alpha_{n+1}^{(1)}=(1+\delta_{n-1})(1-\delta_n) \qquad e \qquad 4\alpha_{n+1}^{(2)}=(1-\delta_n)(1+\delta_{n+1}).$$

Demonstração: Considere os seguintes polinômios para-ortogonais

$$S_n^{(1)}(z) = \frac{\rho_n(\psi,z)+\rho_n^*(\psi,z)}{1+\rho_n(\psi,0)} \quad \text{e} \quad S_n^{(2)}(z) = \frac{\rho_n(\psi,z)-\rho_n^*(\psi,z)}{1-\rho_n(\psi,0)}\,,$$

ou seja, $R_n^{(1)}(\psi,z) = S_n^{(1)}(z)$ e $R_n^{(2)}(\psi,z) = \dfrac{S_{n+1}^{(2)}(z)}{z-1}$.

Provemos que estes polinômios satisfazem as seguintes relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1+\delta_{n-1})(1-\delta_n)zS_{n-1}^{(1)}(z)\,, \\ S_{n+1}^{(2)}(z) &= (z+1)S_n^{(2)}(z) - (1-\delta_{n-1})(1+\delta_n)zS_{n-1}^{(2)}(z)\,, \end{aligned}$$

para $n \geq 1$, com $S_0^{(1)}(z)=1$, $\delta_0=1$, $S_0^{(2)}(z)=1$, $S_1^{(1)}(z)=z+1$ e $S_1^{(2)}(z)=z-1$.

Utilizando as relações de recorrência dos polinômios de Szegő (3.32) e (3.35) obtemos

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= \frac{\rho_{n+1}(\psi,z)+\rho_{n+1}^*(\psi,z)}{1+\rho_{n+1}(\psi,0)} \\ &= \frac{(z\rho_n(\psi,z)+\delta_{n+1}\rho_n^*(\psi,z))+(\rho_n^*(\psi,z)+\delta_{n+1}z\rho_n(\psi,z))}{1+\delta_{n+1}} \\ &= (z\rho_n(\psi,z)+\rho_n^*(\psi,z))\frac{(1+\delta_{n-1})(1+\delta_n)}{(1+\delta_n)(1+\delta_{n-1})} \\ &= \frac{((z+1)-1+\delta_n z)(1+\delta_{n+1})\rho_n(\psi,z)+((z+1)-z+\delta_n)(1+\delta_{n-1})\rho_n^*(\psi,z)}{(1+\delta_n)(1+\delta_{n-1})} \\ &= (z+1)\left(\frac{\rho_n(\psi,z)+\rho_n^*(\psi,z)}{1+\delta_n}\right) - (1+\delta_{n-1})(1-\delta_n)z\left(\frac{\rho_{n-1}(\psi,z)+\rho_{n-1}^*(\psi,z)}{1+\delta_{n-1}}\right) \\ &= (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1+\delta_{n-1})(1-\delta_n)zS_n^{(1)}(z)\,. \end{aligned}$$

Temos, ainda, que

$$S_0^{(1)}(z) = \frac{\rho_0(\psi,z)+\rho_0^*(\psi,z)}{1+\rho_0(\psi,0)} = 1$$

e

$$S_1^{(1)}(z) = \frac{\rho_1(\psi,z)+\rho_1^*(\psi,z)}{1+\rho_1(\psi,0)} = \frac{z(1+\delta_1)+(1+\delta_1)}{1+\delta_1} = z+1\,.$$

De modo análogo, podemos provar que $S_n^{(2)}(z)$ satisfaz à relação de recorrência. Observemos que, para $n \geq 1$, $S_{n+1}^{(2)}(1)=0$. De fato, como

$$S_2^{(2)}(z) = (z+1)S_1^{(2)}(z) - (1-\delta_0)(1+\delta_1)zS_0^{(2)}(z) = (z-1)(z+1)\,,$$

pois $\delta_0=1$, então $S_2^{(2)}(1)=0$. Como

$$S_3^{(2)}(z) = (z+1)S_2^{(2)}(z) - (1-\delta_1)(1+\delta_2)zS_1^{(2)}(z) = (z+1)(z+1)(z-1) - (1-\delta_1)(1+\delta_2)z(z-1)$$

logo $S_3^{(2)}(1) = 0$. Como o termo $(z-1)$ estará sempre presente na expressão de $S_{n+1}^{(2)}(z)$, então $S_{n+1}^{(2)}(1) = 0$.

Portanto, para demonstrar as relações (4.21) basta tomarmos

$$4\alpha_{n+1}^{(1)} = (1+\delta_{n-1})(1-\delta_n)\,, \qquad \text{e} \qquad 4\alpha_{n+1}^{(2)} = (1-\delta_n)(1+\delta_{n+1})\,.$$

∎

4.5 Relações entre polinômios para-ortogonais e polinômios ortogonais

Podemos relacionar os polinômios $R_n^{(\kappa)}(\psi, z)$ $(\kappa = 1, 2)$, definidos por (4.19), com polinômios ortogonais $P_n^{(\kappa)}(x)$ em $[-1, 1]$ através da transformação

$$x = x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})\,, \tag{4.22}$$

que foi inicialmente estudada em Delsarte e Genin [8] (ver, também, Sri Ranga [19]). Note que, como $z = e^{i\theta}$, podemos escrever $x = \cos(\theta/2)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

A relação (4.22) fornece uma transformação do círculo unitário no intervalo $[-1, 1]$. Utilizando a mesma pode-se relacionar polinômios para-ortogonais no círculo unitário com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$. Os resultados a seguir, encontrados em Berti e Sri Ranga [1], serão necessários para descrever estes relacionamentos.

Primeiramente, consideremos $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$ duas medidas simétricas no intervalo $[-1, 1]$ satisfazendo

$$d\phi^{(2)}(x) = (1-x^2)d\phi^{(1)}(x)\,.$$

Vamos utilizar a notação $\{P_n^{(\kappa)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ para a seqüência de polinômios ortogonais com relação à medida $\phi^{(\kappa)}(x)$, i=1,2.

Se conhecermos uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma medida, por exemplo $\phi^{(1)}(x)$, podemos obter informações a respeito da seqüência de polinômios ortogonais com relação à medida $\phi^{(2)}(x)$.

A fórmula de Christoffel (ver [20, pag. 29]) fornece a seguinte representação dos polinômios $P_n^{(2)}(x)$ como combinação dos polinômios $P_n^{(1)}(x)$

$$(1-x^2)P_n^{(2)}(x) = \frac{-1}{P_n^{(1)}(1)}\left\{P_n^{(1)}(1)P_{n+2}^{(1)}(x) - P_{n+2}^{(1)}(1)P_n^{(1)}(x)\right\}\,.$$

Para obter uma representação para os polinômios $P_n^{(1)}(x)$ em termos dos $P_n^{(2)}(x)$, podemos expressar $P_n^{(1)}(x)$ como combinação linear de $P_i^{(2)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, de onde obtemos

$$P_n^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^{n} d_{n-i} P_{n-i}^{(2)}(x)\,.$$

Utilizando a ortogonalidade e a simetria desses polinômios, temos que a expressão acima torna-se

$$P_n^{(1)}(x) = P_n^{(2)}(x) + d_{n-2} P_{n-2}^{(2)}(x)\,, \quad n \geq 2\,, \tag{4.23}$$

onde

$$d_{n-2} = \frac{\int_{-1}^{1} P_n^{(1)}(x) P_{n-2}^{(2)}(x) d\phi^{(2)}(x)}{\int_{-1}^{1} (P_{n-2}^{(2)}(x))^2 d\phi^{(2)}(x)} = -\frac{\int_{-1}^{1} (P_n^{(1)}(x))^2 d\phi^{(1)}(x)}{\int_{-1}^{1} (P_{n-2}^{(2)}(x))^2 d\phi^{(2)}(x)}\,, \quad n \geq 2\,.$$

Daí obtemos a seguinte relação de recorrência entre os coeficientes d_n, $\alpha_n^{(1)}$ e $\alpha_n^{(2)}$.

Lema 4.1. *Dadas $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$ tais que $d\phi^{(2)}(x) = (1 - x^2) d\phi^{(1)}(x)$, então os coeficientes d_n na relação (4.23) satisfazem*

$$\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}}\,, \quad n \geq 2 \tag{4.24}$$

e

$$d_{n-1} - d_{n-2} = \alpha_{n+1}^{(2)} - \alpha_{n+1}^{(1)}\,, \quad n \geq 2\,, \tag{4.25}$$

com $d_0 = -\dfrac{\alpha_3^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}} = \alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(1)}$.

Demonstração: Pela expressão (2.4), temos que

$$\int_{-1}^{1} (P_n^{(k)}(x))^2 d\phi^{(k)}(x) = \alpha_{n+1}^{(k)} \alpha_n^{(k)} \ldots \alpha_2^{(k)} \alpha_1^{(k)}$$

e, assim,

$$d_{n-2} = -\frac{\alpha_{n+1}^{(1)} \alpha_n^{(1)} \ldots \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(1)}}{\alpha_{n+1}^{(2)} \alpha_n^{(2)} \ldots \alpha_2^{(2)} \alpha_1^{(2)}} \qquad \text{e} \qquad \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}}\,, \quad n \geq 2\,.$$

Fazendo $n = 2$ na expressão anterior obtemos a primeira expressão para d_0.

Para obter o restante, vamos utilizar (4.23) e a relação de recorrência para $P_n^{(2)}(x)$, ou seja,

$$P_n^{(2)}(x) = x P_{n-1}^{(2)}(x) - \alpha_n^{(2)} P_{n-2}^{(2)}(x)\,, \quad n \geq 2\,,$$

com $P_0^{(2)}(x) = 1$ e $P_1^{(2)}(x) = x$. Desta relação, temos

$$P_{n-2}^{(2)}(x) = \frac{x P_{n-1}^{(2)}(x) - P_n^{(2)}(x)}{\alpha_n^{(2)}}$$

e, de (4.23), obtemos

$$P_{n-2}^{(2)}(x) = \frac{P_n^{(1)}(x) - P_n^{(2)}(x)}{d_{n-2}}.$$

Igualando essas expressões, obtemos

$$\begin{aligned}(xP_{n-1}^{(2)}(x) - P_n^{(2)}(x))d_{n-2} &= (P_n^{(1)}(x) - P_n^{(2)}(x))\alpha_n^{(2)} \\ P_n^{(1)}(x) &= P_n^{(2)}(x) - \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{(2)}}P_n^{(2)}(x) + \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{(2)}}xP_{n-1}^{(2)}(x).\end{aligned}$$

Logo,

$$P_n^{(1)}(x) = \left(1 - \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{(2)}}\right)P_n^{(2)}(x) + \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{(2)}}xP_{n-1}^{(2)}(x), \quad n \geq 2.$$

Usando novamente (4.23) e a fórmula de recorrência para $P_n^{(1)}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{(1)}(x) &= xP_n^{(1)}(x) - \alpha_{n+1}^{(1)}P_{n-1}^{(1)}(x) \\ &= x(P_n^{(2)}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{(2)}(x)) - \alpha_{n+1}^{(1)}\left(\left(1 - \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{(2)}}\right)P_{n-1}^{(2)}(x) + \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{(2)}}xP_{n-2}^{(2)}(x)\right) \\ &= xP_n^{(2)}(x) - \left(\alpha_{n+1}^{(1)} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n-1}^{(2)}}\right)P_{n-1}^{(2)}(x) + x\left(d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n-1}^{(2)}}\right)P_{n-2}^{(2)}(x)\end{aligned}$$

ou, ainda,

$$P_{n+1}^{(2)}(x)+d_{n-1}P_{n-1}^{(2)}(x) = xP_n^{(2)}(x)-\left(\alpha_{n+1}^{(1)} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n-1}^{(2)}}\right)P_{n-1}^{(2)}(x)+x\left(d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n-1}^{(2)}}\right)P_{n-2}^{(2)}(x),$$

$$P_{n+1}^{(2)}(x) = xP_n^{(2)}(x) - \left(\alpha_{n+1}^{(1)} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n-1}^{(2)}} + d_{n-1}\right)P_{n-1}^{(2)}(x) + x\left(d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n-1}^{(2)}}\right)P_{n-2}^{(2)}(x).$$

Agora, usando (4.24), obtemos

$$P_{n+1}^{(2)}(x) = xP_n^{(2)}(x) - (\alpha_{n+1}^{(1)} - d_{n-2} + d_{n-1})P_{n-1}^{(2)}(x).$$

Logo,

$$\alpha_{n+1}^{(2)} = \alpha_{n+1}^{(1)} - d_{n-2} + d_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{n+1}^{(2)} - \alpha_{n+1}^{(1)} = d_{n-1} - d_{n-2}$$

o que mostra (4.25) para $n \geq 3$.

Novamente, por (4.23) com $n = 2$, obtemos

$$P_2^{(1)}(x) = P_2^{(2)}(x) + d_0P_0^{(2)}(x) \Rightarrow P_2^{(1)}(x) = P_2^{(2)}(x) - d_0 \Rightarrow x^2 - \alpha_2^{(1)} = x^2 - \alpha_2^{(2)} + d_0.$$

Então, $d_0 = \alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(1)}$ e, portanto, temos que a segunda expressão está provada. Falta ainda verificarmos que (4.25) vale para $n = 2$.

Procedendo como anteriormente, temos que

$$P_3^{(2)}(x) = xP_2^{(2)}(x) - (\alpha_3^{(1)} - d_0 + d_1)P_0^{(2)}(x)\,.$$

Logo, $\alpha_3^{(2)} - \alpha_3^{(1)} = d_1 - d_0$. ■

Definimos, agora, uma seqüência de números reais $\{l_n\}$ tal que

$$l_0 = 1\,, \quad (l_1 - 1) = -2\alpha_2^{(1)}\,, \quad (l_2 - 1) = \frac{-2\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}}$$

e

$$(l_{n+1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}}(l_{n-1} - 1)\,, \quad n \geq 2\,. \tag{4.26}$$

As relações

$$\begin{aligned} \frac{(l_{n+1} - 1)}{(l_{n-1} - 1)} &= \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\,, \quad n \geq 2 \\ (l_{n+1} - 1)(l_n - 1) &= -4d_{n-1}\,, \quad n \geq 1\,, \end{aligned} \tag{4.27}$$

são facilmente verificadas. De fato, de (4.26) e (4.27)

$$\frac{(l_{n+1} - 1)}{(l_{n-1} - 1)} = \frac{\alpha_{n+2}^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}} = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\,, \quad n \geq 2\,.$$

Por indução, vamos mostrar a segunda expressão. Para $n = 1$, temos

$$(l_2 - 1)(l_1 - 1) = \left(\frac{-2\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}}\right)(-2\alpha_2^{(1)}) = 4\frac{\alpha_3^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}} = -4d_0\,.$$

Suponhamos que vale para $n = k$, ou seja, $(l_{k+1} - 1)(l_k - 1) = -4d_{k-1}$.

Para $n = k + 1$,

$$(l_{k+2} - 1)(l_{k+1} - 1) = \frac{\alpha_{k+3}^{(1)}}{\alpha_{k+1}^{(2)}}(l_k - 1)(l_{k+1} - 1) = -4\frac{\alpha_{k+3}^{(1)}}{\alpha_{k+1}^{(2)}}d_{k-1} = -4\left(\frac{\alpha_{k+3}^{(1)}\alpha_{k+2}^{(1)}\ldots\alpha_2^{(1)}\alpha_1^{(1)}}{\alpha_{k+1}^{(2)}\alpha_k^{(2)}\ldots\alpha_2^{(2)}\alpha_1^{(2)}}\right)\,,$$

e, assim, $(l_{k+2} - 1)(l_{k+1} - 1) = -4d_k$.

Lema 4.2. *Dadas $\phi^{(2)}(x)$ e $\phi^{(1)}(x)$ tais que $d\phi^{(2)}(x) = (1 - x^2)d\phi^{(1)}(x)$, então os elementos da seqüência $\{l_n\}$ definida por (4.26), para $n \geq 1$, satisfazem*

$$\frac{(l_{2n+1} - 1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+2}^{(1)}\alpha_{2n}^{(1)}\ldots\alpha_4^{(1)}\alpha_2^{(1)}}{\alpha_{2n}^{(2)}\alpha_{2n-2}^{(2)}\ldots\alpha_4^{(2)}\alpha_2^{(2)}}\,, \quad \frac{(l_{2n} - 1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{(1)}\alpha_{2n-1}^{(1)}\ldots\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)}}{\alpha_{2n-1}^{(2)}\alpha_{2n-3}^{(2)}\ldots\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(2)}} \tag{4.28}$$

e

$$\frac{(l_{2n-1} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{(2)}\alpha_{2n-3}^{(2)}\ldots\alpha_1^{(2)}}{\alpha_{2n-1}^{(1)}\alpha_{2n-3}^{(1)}\ldots\alpha_1^{(1)}}\,, \quad \frac{(l_{2n} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{(2)}\alpha_{2n-2}^{(2)}\ldots\alpha_2^{(2)}}{\alpha_{2n}^{(1)}\alpha_{2n-2}^{(1)}\ldots\alpha_2^{(1)}}\,. \tag{4.29}$$

Demonstração: Fazendo $n = 2n$ em (4.26) temos

$$\begin{aligned}\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} &= \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{(1)}}{\alpha_{2n}^{(2)}}(l_{2n-1}-1) = \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{(1)}\alpha_{2n}^{(1)}}{\alpha_{2n}^{(2)}\alpha_{2n-2}^{(2)}}(l_{2n-3}-1) = \ldots \\ &= \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{(1)}\alpha_{2n}^{(1)}\ldots\alpha_{6}^{(1)}\alpha_{4}^{(1)}}{\alpha_{2n}^{(2)}\alpha_{2n-2}^{(2)}\ldots\alpha_{4}^{(2)}\alpha_{2}^{(2)}}(l_1-1) = \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{(1)}\alpha_{2n}^{(1)}\ldots\alpha_{6}^{(1)}\alpha_{4}^{(1)}\alpha_{2}^{(1)}}{\alpha_{2n}^{(2)}\alpha_{2n-2}^{(2)}\ldots\alpha_{4}^{(2)}\alpha_{2}^{(2)}}(-2)\,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+2}^{(1)}\alpha_{2n}^{(1)}\ldots\alpha_{4}^{(1)}\alpha_{2}^{(1)}}{\alpha_{2n}^{(2)}\ldots\alpha_{4}^{(2)}\alpha_{2}^{(2)}}\,.$$

Analogamente, fazendo $n = 2n-1$ em (4.26), obtemos

$$\frac{(l_{2n}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{(1)}\alpha_{2n-1}^{(1)}\ldots\alpha_{3}^{(1)}\alpha_{1}^{(1)}}{\alpha_{2n-1}^{(2)}\alpha_{2n-3}^{(2)}\ldots\alpha_{3}^{(2)}\alpha_{1}^{(2)}}\,.$$

De (4.27) e (4.25), temos que

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2}\frac{(l_{2n}-1)}{2} = -d_{2n-1}$$

e, portanto,

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} = -\frac{d_{2n-1}}{(l_{2n}-1)/2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{(2)}-\alpha_{2n+1}^{(1)}+d_{2n-2}}{(l_{2n}-1)/2}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Assim, da segunda relação em (4.28), temos

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} = \frac{\alpha_{2n+1}^{(2)}\alpha_{2n-1}^{(2)}\ldots\alpha_{3}^{(2)}\alpha_{1}^{(2)}}{\alpha_{2n+1}^{(1)}\alpha_{2n-1}^{(1)}\ldots\alpha_{1}^{(1)}} + \frac{(d_{2n-2}-\alpha_{2n+1}^{(1)})\alpha_{2n-1}^{(2)}\ldots\alpha_{3}^{(2)}\alpha_{1}^{(2)}}{\alpha_{2n+1}^{(1)}\alpha_{2n-1}^{(1)}\ldots\alpha_{3}^{(1)}\alpha_{1}^{(1)}}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Como o segundo termo do lado direito é igual a (-1), a expressão acima torna-se

$$\frac{l_{2n+1}}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{\alpha_{2n+1}^{(2)}\alpha_{2n-1}^{(2)}\ldots\alpha_{3}^{(2)}\alpha_{1}^{(2)}}{\alpha_{2n+1}^{(1)}\alpha_{2n-1}^{(1)}\ldots\alpha_{1}^{(1)}}\,,$$

de onde segue a primeira expressão em (4.29).

De modo análogo demonstramos também a segunda expressão. ■

Lema 4.3. *Dadas $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$ como nos lemas anteriores, então existe uma seqüência de números reais $\{l_n\}$ tal que*

$$\alpha_{n+1}^{(1)} = -\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n-1}+1)\,, \quad \alpha_{n+1}^{(2)} = -\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n+1}+1)\,, \quad n \geq 1$$

e

$$d_{n-1} = -\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n+1}-1)\,, \quad n \geq 1\,,$$

com $l_0 = 1$ e $l_1 = 1 - 2\alpha_2^{(2)}$.

Demonstração: De (4.28) e (4.29), temos que

$$(l_n - 1) = -2\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}\alpha_{n-1}^{(1)}\ldots\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)}}{\alpha_{n-1}^{(2)}\ldots\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(2)}}\,,$$

$$(l_{n-1} + 1) = 2\frac{\alpha_{n-1}^{(2)}\alpha_{n-3}^{(2)}\ldots\alpha_1^{(2)}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\alpha_{n-3}^{(1)}\ldots\alpha_1^{(1)}} \qquad \text{e} \qquad (l_{n+1} + 1) = 2\frac{\alpha_{n+1}^{(2)}\alpha_{n-1}^{(2)}\ldots\alpha_1^{(2)}}{\alpha_{n+1}^{(1)}\alpha_{n-1}^{(1)}\ldots\alpha_1^{(1)}}\,.$$

Assim,

$$(l_n - 1)(l_{n-1} + 1) = -4\alpha_{n+1}^{(1)}\,, \quad n \geq 1\,,$$

e, ainda,

$$(l_n - 1)(l_{n+1} + 1) = -4\alpha_{n+1}^{(2)}\,, \quad n \geq 1\,.$$

De (4.27), temos

$$d_{n-1} = -\frac{1}{4}(l_{n+1} - 1)(l_n - 1)\,, \quad n \geq 1$$

e, da definição da seqüência, obtemos $l_0 = 1$ e $l_1 = 1 - 2\alpha_2^{(1)}$. ∎

Utilizando os lemas anteriores podemos demonstrar o próximo teorema, que fornece uma relação entre os polinômios $P_n^{(\kappa)}(x)$ e $R_n^{(\kappa)}(\psi, z)$ ($\kappa = 1, 2$), ou melhor, uma relação entre as respectivas medidas e, também, entre as respectivas fórmulas de recorrência (veja [23, 4]).

Teorema 4.6. *(i) Seja $\psi(z)$ uma medida positiva no círculo unitário tal que os polinômios de Szegő $\{\rho_n(\psi, z)\}_{n=0}^{\infty}$ são reais. Sejam*

$$4\alpha_{n+1}^{(1)} = (1 + \delta_{n-1})(1 - \delta_n) > 0 \quad e \quad 4\alpha_{n+1}^{(2)} = (1 - \delta_n)(1 + \delta_{n+1}) > 0\,, \quad n \geq 1$$

e as medidas positivas $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$ definidas por

$$d\phi^{(1)}(x(z)) = -d\psi(z) \quad e \quad d\phi^{(2)}(x(z)) = -(1 - x^2)d\psi(z)\,,$$

onde $x(z) = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2})$. O suporte de $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$ estão contidos em $[-1, 1]$. Então, para $k = 1, 2$, as seqüências de polinômios $\{P_n^{(k)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, onde

$$P_n^{(\kappa)}(x(z)) = (4z)^{-n/2}R_n^{(\kappa)}(\psi, z)\,,$$

$P_0^{(k)}(x) = 1$, $P_1^{(k)}(x) = x$ e

$$P_{n+1}^{(k)}(x) = xP_n^{(k)}(x) - \alpha_{n+1}^{(k)}P_{n-1}^{(k)}(x)\,, \quad n \geq 1\,, \tag{4.30}$$

são seqüências de polinômios ortogonais mônicos em relação à medida $\phi^{(k)}(x)$.

(ii) Reciprocamente, sejam $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$ duas medidas positivas definidas em $[-1,1]$, tais que $d\phi^{(2)}(x) = (1-x^2)d\phi^{(1)}(x)$. Sejam os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{(1)}(x)$ e $P_n^{(2)}(x)$ satisfazendo

$$P_{n+1}^{(k)}(x) = xP_n^{(k)}(x) - \alpha_{n+1}^{(k)}P_{n-1}^{(k)}(x)\,, n \geq 1.$$

Então, os coeficientes de reflexão δ_n dos polinômios de Szegő, $\rho_n(z)$, associados à medida positiva $d\psi(z) = -d\phi^{(1)}(x(z))$, satisfazem

$$\delta_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{(1)}}{1+\delta_{n-1}} \quad e \quad \delta_{n+1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{(2)}}{1-\delta_n}\,,\ n \geq 1\,,$$

com $\delta_0 = 1$. Explicitamente podem ser dados por

$$\delta_{2n-1} = 2\frac{\alpha_{2n-1}^{(2)}\alpha_{2n-3}^{(2)}\ldots\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(2)}}{\alpha_{2n-1}^{(1)}\alpha_{2n-3}^{(1)}\ldots\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)}} - 1 \quad e \quad \delta_{2n} = 2\frac{\alpha_{2n}^{(2)}\alpha_{2n-2}^{(2)}\ldots\alpha_2^{(2)}}{\alpha_{2n}^{(1)}\alpha_{2n-2}^{(1)}\ldots\alpha_2^{(1)}} - 1\,,\ \ n \geq 1\,,$$

com $R_n^{(k)}(\psi,z) = (4z)^{n/2}P_n^{(k)}(x(z))$.

Demonstração: (i) Multiplicando ambos os lados de (4.21) por $(4z)^{-(n+1)/2}$, obtemos

$$(4z)^{-(n+1)/2}R_{n+1}^{(\kappa)}(\psi,z) = (z+1)(4z)^{-(n+1)/2}R_n^{(\kappa)}(\psi,z) - 4\alpha_{n+1}^{(\kappa)}z(4z)^{-(n+1)/2}R_{n-1}^{(\kappa)}(\psi,z)\,,$$

com $R_0^{(\kappa)}(\psi,z) = 1$ e $(4z)^{-1/2}R_1^{(\kappa)}(\psi,z) = (4z)^{-1/2}(z+1)$

Usando o fato de que $(z+1)(4z)^{-1/2} = (1/2)(z^{1/2}+z^{-1/2}) = x(z) = x$ e lembrando que $(4z)^{-n/2}R_n^{(\kappa)}(\psi,z) = P_n^{(\kappa)}(x)$, obtemos

$$P_{n+1}^{(\kappa)}(x) = xP_n^{(\kappa)}(x) - \alpha_{n+1}^{(\kappa)}P_{n-1}^{(\kappa)}(x)\,,$$

com $P_0^{(\kappa)}(x) = 1$ e $P_1^{(\kappa)}(x) = x$.

Portanto, temos que $P_n^{(\kappa)}(x) = (4z)^{-n/2}R_n^{(\kappa)}(\psi,z)$ satisfazem às relações de recorrência de três termos (4.30).

Observemos, agora, que as seqüências $\{g_n^{(1)} = (1-\delta_n)/2\}$ e $\{g_n^{(2)} = (1+\delta_{n+1})/2\}$ satisfazem

$$(1-g_{n-1}^{(1)})g_n^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\delta_{n-1}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+\delta_{n-1})(1-\delta_n) = \alpha_{n+1}^{(1)}$$

e

$$(1-g_{n-1}^{(2)})g_n^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\delta_n}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{4}(1-\delta_n)(1+\delta_{n+1}) = \alpha_{n+1}^{(2)}\,.$$

Assim, concluímos que $\{\alpha_{n+1}^{(1)}\}$ e $\{\alpha_{n+1}^{(2)}\}$ são seqüências encadeadas com seqüências de parâmetros dadas, respectivamente, por $\{g_n^{(1)}\}$ e $\{g_n^{(2)}\}$. Pelo Corolário 2.1, temos que o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da seqüência de polinômios é $[-1, 1]$, pois estamos considerando medidas simétricas e $\beta_n = 0$. Dessa forma, concluímos que as raízes de $P_n^{(k)}(x)$ estão em $(-1, 1)$ e, pelo teorema de Favard (Teorema 2.1), formam uma seqüência de polinômios ortogonais. Para obtermos as medidas $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$, basta tomarmos

$$d\phi^{(1)}(x) = -d\psi(z)$$

e lembrarmos que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma z^{-n+s} R_n^{(2)}(\psi, z)(z-1)d\psi(z) &= \int_\Gamma z^{-n+s} R_n^{(2)}(\psi, z)\frac{z}{z-1}\frac{z-1}{z}(z-1)d\psi(z) \\ &= \int_\Gamma z^{-n+s} R_n^{(2)}(\psi, x(z))\frac{z}{z-1}d\phi^2(x(z))\,, \end{aligned}$$

onde

$$d\phi^{(2)}(z) = \frac{(z-1)(z-1)}{z}d\psi(z) = -(1-x^2)d\psi(z)\,.$$

Fazendo $l_{2n-1} = \delta_{2n-1}$ e $l_{2n} = \delta_{2n}$ no Lema 4.2, obtemos a segunda parte do item (ii) demonstrada.

Para demostrar a primeira parte em (ii), basta tomarmos $l_n = \delta_n$ no Lema 4.3. ∎

O próximo resultado, encontrado em [2], nos ajudará a demonstrar que as raízes de $P_n^{(1)}(x)$ e $P_{n-1}^{(2)}(x)$ se entrelaçam.

Lema 4.4. *Sejam $q_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ e $q_{n-2}(x) = (x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_{n-2})$ polinômios reais simétricos cujas raízes positivas satisfazem*

$$x_{\lfloor n/2\rfloor} < y_{\lfloor (n-2)/2\rfloor} < \ldots < y_1 < x_1\,,$$

onde $\lfloor n/2\rfloor$ significa o maior inteiro menor do que $n/2$. Então, para $c \in \mathbb{R}$, o polinômio

$$Q(x) = q_n(x) - cq_{n-2}(x)$$

tem n raízes e suas raízes positivas $\xi_{\lfloor n/2\rfloor} < \xi_{\lfloor (n-1)/2\rfloor} < \ldots < \xi_2 < \xi_1$ se entrelaçam com as raízes de $q_n(x)$ e $q_{n-2}(x)$, ou seja,

(i) Se $c > 0$, então $x_1 < \xi_1$ e $x_r < \xi_r < y_r$ para $r = 2, \ldots, \lfloor n/2\rfloor$.

(ii) Se $c < 0$, então $y_r < \xi_r < x_r$ para $r = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2\rfloor - 1$ e $\xi_{\lfloor n/2\rfloor} < x_{\lfloor n/2\rfloor}$.

Teorema 4.7. *As raízes de $P_n^{(1)}(x)$ e $P_{n-1}^{(2)}(x)$ se entrelaçam.*

Demonstração: De (4.23), temos

$$P_n^{(1)}(x) = P_n^{(2)}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{(2)}(x)\,.$$

Agora, pelo Lema 4.3 com $l_n = \delta_n$, obtemos

$$P_n^{(1)}(x) = P_n^{(2)}(x) - \frac{1}{4}(1-\delta_n)(1-\delta_{n+1})P_{n-2}^{(2)}(x)\,.$$

Utilizando a relação de recorrência (4.30) para $P_{n-1}^{(2)}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} P_n^{(1)}(x) &= xP_{n-1}^{(2)}(x) - \frac{1}{4}(1-\delta_n)(1+\delta_{n+1})P_{n-2}^{(2)}(x) - \frac{1}{4}(1-\delta_n)(1-\delta_{n+1})P_{n-2}^{(2)}(x) \\ &= xP_{n-1}^{(2)}(x) - \frac{1}{4}(1-\delta_n)[(1+\delta_{n+1})+(1-\delta_{n+1})]P_{n-2}^{(2)}(x) \\ &= xP_{n-1}^{(2)}(x) - \frac{1}{2}(1-\delta_n)P_{n-2}^{(2)}(x)\,. \end{aligned}$$

Lembremos que as raízes de $P_{n-1}^{(2)}(x)$ e $P_{n-2}^{(2)}(x)$ se entrelaçam. Como $\frac{1}{2}(1-\delta_n) > 0$, utilizando a parte (i) do Lema 4.4, temos que as raízes de $P_n^{(1)}(x)$ e $xP_{n-1}^{(2)}(x)$ se entrelaçam. ■

O próximo resultado fornece uma relação entre a fórmula de quadratura associada aos polinômios ortogonais e a associada aos polinômios para-ortogonais, aqui denotadas, respectivamente por FQG e FQS. Esses resultados são encontrados em [3] e [5].

Para o próximo teorema, consideremos as seguintes condições. Sejam a medida positiva $\psi(z)$ no círculo unitário e as medidas positivas $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(2)}(x)$ definidas em $[-1,1]$ tais que

$$-d\psi(z) = d\phi^{(1)}(x(z)) = \frac{1}{(1-x^2(z))}d\phi^{(2)}(x(z))\,,$$

com $x(z)$ como em (4.22). Tomando $z = e^{i\theta}$ temos que a expressão acima torna-se

$$-d\psi(e^{i\theta}) = d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}d\phi^{(2)}(\cos(\theta/2))\,.$$

Considere a fórmula de quadratura gaussiana que é exata para $g \in \Pi_{2n-1}$,

$$FQG(\kappa): \qquad \int_{-1}^{1} g(x)d\phi^{(\kappa)}(x) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(\kappa)} g(x_{n,m}^{(\kappa)}) \quad (\kappa = 1,2)\,,$$

onde os nós estão ordenados da seguinte forma

$$1 > x_{n,1}^{(\kappa)} > x_{n,2}^{(\kappa)} > \ldots > x_{n,n}^{(\kappa)} > -1$$

e $x_{n,m}^{(\kappa)}$ são as raízes do polinômio ortogonal $P_n^{(\kappa)}(x)$ com relação à medida $\phi^{(\kappa)}(x)$.

Considere, também, a fórmula de quadratura de Szegő que, pelo Teorema 4.3, é exata para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$

$$FQS(w): \qquad \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m}(\psi,w) f(z_{n,m}(\psi,w)) \quad (w=-1,1)\,,$$

com os nós $z_{n,m}(\psi,w) = e^{-i\theta_{n,m}(\psi,w)}$ organizados como segue

$$0 < \theta_{n,1}(\psi,w) < \theta_{n,2}(\psi,w) < \ldots < \theta_{n,n}(\psi,w) \leq 2\pi\,,$$

onde $z_{n,m}(\psi,1)$ são as raízes dos polinômios para-ortogonais $R_n^{(1)}(\psi,z)$, $z_{n+1,m}(\psi,-1)$, $m=1,2,\ldots,n$, são as raízes dos polinômios $R_n^{(2)}(\psi,z)$ e $z_{n+1,n+1}(\psi,-1)=1$.

Teorema 4.8. *Nas condições anteriores, temos que as seguintes relações são válidas*

(i) $x_{n,m}^{(1)} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{n,m}(\psi,1)\right)\,, \quad W_{n,m}^{(1)} = \lambda_{n,m}(\psi,1)\,, \quad m=1,2,\ldots,n$

(ii) $x_{n,m}^{(2)} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{n+1,m}(\psi,-1)\right)\,, \quad W_{n,m}^{(2)} = \mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{2}\theta_{n+1,m}(\psi,-1)\right)\lambda_{n+1,m}(\psi,-1)$

para $m=1,2,\ldots,n$ *e, além disso,*

$$\lambda_{n+1,n+1}(\psi,-1) = \mu_0 - \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n+1,m}(\psi,-1)\,.$$

Demonstração: Lembrando que $z_{n,m}(\psi,1) = e^{i\theta_{n,m}(\psi,1)}$ são as raízes de $R_n^{(1)}(\psi,z)$, $P_n^{(1)}(x) = (4z)^{-n/2}R_n^{(1)}(\psi,z)$ e usando o fato de que $x=\cos(\theta/2)$, temos

$$P_n^{(1)}(\cos(\theta_{n,m}(\psi,1)/2)) = (4e^{i\theta_{n,m}(\psi,1)})^{-n/2}R_n^{(1)}(\psi,e^{i\theta_{n,m}(\psi,1)}) = 0\,,$$

para $m=1,2,\ldots,n$. Portanto, $x_{n,m} = \cos(\theta_{n,m}(\psi,1)/2)$ são raízes de $P_n^{(1)}(x)$ para $m=1,2,\ldots,n$.

Como $z_{n+1,m}(\psi,-1)$, $m=1,2,\ldots,n$, são as raízes de

$$R_n^{(2)}(\psi,z) = \frac{\rho_{n+1}(\psi,-1,z)}{(z-1)(1-\delta_{n+1})}\,,$$

novamente usando $z=e^{i\theta}$ e $x=\cos(\theta/2)$, para $m=1,2,\ldots,n$ temos que

$$P_n^{(2)}(\cos(\theta_{n+1,m}(\psi,-1)/2)) = (4e^{i\theta_{n+1,m}(\psi,-1)})^{-n/2}R_n^{(2)}(\psi,e^{i\theta_{n+1,m}(\psi,-1)}) = 0\,.$$

Assim, $x_{n,m}^{(2)} = \cos(\theta_{n+1,m}(\psi,-1)/2)$ são raízes de $P_n^{(2)}(z)$ para $m=1,2\ldots,n$.

Vamos, agora, mostrar as relações entre os pesos das regras de quadratura. Pela expressão de $FQS(1)$, se $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$, então

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m}(\psi,1)f(z_{n,m}(\psi,1)) \,. \tag{4.31}$$

Por outro lado, da $FQG(1)$ temos, para $g \in \Pi_{2n-2}$, que

$$\int_{-1}^{1} g(x)d\phi^{(1)}(x) \quad = \quad \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(1)} g(x_{n,m}^{(1)}) \,.$$

Fazendo $x = \cos(\theta/2)$ na expressão acima, obtemos

$$\int_{2\pi}^{0} g(\cos(\theta/2))d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) \quad = \quad \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(1)} g(\cos(\theta_{n,m}(\psi,1)/2))$$

e substituindo $d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) = -d\psi(e^{i\theta})$, temos

$$\int_0^{2\pi} g(\cos(\theta/2))d\psi(e^{i\theta}) \quad = \quad \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(1)} g(\cos(\theta_{n,m}(\psi,1)/2)) \,.$$

Logo,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(1)} f(z_{n,m}(\psi,1)) \tag{4.32}$$

para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Comparando (4.31) e (4.32), concluímos que

$$W_{m,n}^{(1)} = \lambda_{m,n}(\psi,1) \,, \quad \text{para} \quad m = 1,2,\ldots,n \,.$$

Agora, se $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$, então $\dfrac{f(z)(z-1)^2}{z} \in \Lambda_{-n,n}$. Assim, substituindo

$$\frac{f(z)(z-1)^2}{z} = -4\text{sen}^2(\theta/2)f(e^{i\theta})$$

em $FQS(-1)$, que é de ordem $n+1$, obtemos

$$-4\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta/2))f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = -4\sum_{m=1}^{n+1} \lambda_{n+1,m}(\psi,-1)\text{sen}^2(\theta_{n+1,m}/2)f(z_{n+1,m}(\psi,-1)) \,.$$

Como $\theta_{n+1,n+1}(\psi,-1) = 2\pi$, temos que a expressão acima torna-se

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta/2))f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n+1,m}(\psi,-1)\text{sen}^2(\theta_{n+1,m}/2)f(z_{n+1,m}(\psi,-1)) \,, \tag{4.33}$$

para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Por outro lado, substituindo $x = \cos(\theta/2)$ em $FQG(2)$, para $g \in \Pi_{2n-2}$ obtemos

$$\int_{2\pi}^{0} g(\cos(\theta/2))d\phi^{(2)}(\cos(\theta/2)) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(2)} g(\cos(\theta_{n,m}(\psi,-1)/2)) \,.$$

Substituindo $d\phi^{(2)}(\cos(\theta/2)) = -(1-\cos^2(\theta/2))d\psi(e^{i\theta})$ na expressão acima, obtemos

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta/2) g(\cos(\theta/2))d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(2)} g(\cos(\theta_{n,m}(\psi,-1)/2))$$

e, assim,

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta/2) f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(2)} f(z_{n+1,m}(\psi,-1)) \,, \tag{4.34}$$

para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Comparando (4.33) e (4.34), obtemos

$$W_{n,m}^{(2)} = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{n+1,m}(\psi,-1)}{2}\right) \lambda_{n+1,m}(\psi,-1) \,, \quad \text{para} \quad m = 1,2,\ldots,n \,.$$

Para determinar o valor de $\lambda_{n+1,n+1}(\psi,-1)$ associado à raiz $z_{n+1,n+1}(\psi,-1) = 1$, usamos

$$\mu_0 = \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_{n+1,m}(\psi,-1) \,.$$

∎

Capítulo 5

Análise de freqüência

No trabalho de Bracciali, Li e Sri Ranga [3], os autores abordam o problema de análise de freqüência utilizando um caso particular de polinômios para-ortogonais, escolhendo $w_n = \pm 1$ em (4.2). Esses polinômios estão relacionados aos polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ como visto no capítulo anterior. Neste capítulo, apresentamos um estudo dos resultados encontrados em Bracciali *et al.* [3] e Daruis *et al.* [7].

5.1 Introdução

Consideraremos, aqui, $x(m)$ o sinal trigonométrico dado por

$$x(m) = \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^{I} (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \tag{5.1}$$

onde $I \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 \geq 0$, com $n_0 = 2I + 1$ se $\gamma_0 > 0$ e $n_0 = 2I$ se $\gamma_0 = 0$, ω_j, para $j = 1, 2, \ldots, I$, são tais que,

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{n_0-1} < \omega_{n_0} < 2\pi \;\text{ e }\; 2\pi - w_{n_0+1-j} = w_j \neq 0$$

e, ainda, $\gamma_j \in \mathbb{C}$, satisfazendo

$$\overline{\gamma}_{n_0+1-j} = \gamma_j \neq 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, I\,.$$

Lembremos que o problema de análise de freqüência é determinar a variável n_0, as amplitudes γ_j e as freqüências ω_j a partir de valores observados de $x(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, $N > 0$.

Seja

$$\xi_j = e^{i\omega_j}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n_0\,,$$

o ponto associado à freqüência ω_j ou, simplesmente, ponto de freqüência.

Os trabalhos [12, 13, 17] são uma boa fonte de referências para a abordagem do problema de análise utilizando polinômios de Szegő.

5.2 Resultados preliminares

Nesta seção, vamos estudar o problema de análise de freqüência utilizando os polinômios para-ortogonais, construídos a partir de uma seqüência de polinômios de Szegő com relação à medida discreta $\psi(z)$ definida por

$$\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k(\psi)\delta(\theta - \omega_k)\,, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\,, \quad z = e^{i\theta}\,, \tag{5.2}$$

onde $\lambda_k(\psi) = |\gamma_k|^2$, $k = 1, 2, \ldots, n_0$,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0\,, \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0\,, \end{cases}$$

e ω_k, γ_k e n_0 são dados em (5.1).

A medida $\psi(z)$ tem n_0 pontos de aumento e existe uma seqüência de polinômios ortogonais reais mônicos $\rho_k(\psi, z)$ somente para $k = 1, 2, \ldots, n_0$. Observe que, neste caso, $|\rho_{n_0}(\psi, 0)| = |\delta_{n_0}| = 1$ o que acarreta, pela expressão (3.36), que

$$\rho_{n_0}(\psi, z) = \pm\rho^*_{n_0}(\psi, z)\,. \tag{5.3}$$

Suponhamos que conhecemos os valores de $x(m)$ para $m = 1, 2, \ldots, N-1$, onde $N \in \mathbb{N}$, e tomemos $x(m) = 0$ para $m < 0$ e para $m \geq N$. Neste caso, o sinal trigonométrico é chamado de N-truncado. Consideremos uma distribuição $\psi_N(e^{i\theta})$ dada por

$$\frac{d\psi_N(e^{i\theta})}{d\theta} = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-im\theta}\right|^2\,, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\,. \tag{5.4}$$

Vamos, neste capítulo, adotar a notação $\delta_n^{(N)}$ para os coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő, $\rho_n(\psi_N, z)$, com relação à medida $\psi_N(z)$. Usaremos, ainda, $z_{n,m}(\psi_N, w)$ para nos referirmos às raízes dos polinômios para-ortogonais $\rho_n(\psi_N, w, z)$ e $\lambda_{n,m}(\psi_N, w)$ para os pesos da fórmula de quadratura no círculo unitário associada aos polinômios $\rho_n(\psi_N, w, z)$.

Observe que o n-ésimo momento $\mu_n^{(N)}$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, é dado por

$$\begin{aligned}
\mu_n^{(N)} &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi_N(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left| \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-im\theta} \right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(m) x(j) e^{-im\theta} e^{-ij\theta} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(m) x(j) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m-j)\theta} d\theta
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\mu_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{m=n}^{N-1} x(m) x(m-n) \quad \text{para} \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.5}$$

e são chamados de coeficientes de autocorrelação do sinal. Esses momentos satisfazem, ainda, $\mu_{-n}^{(N)} = \overline{\mu_n^{(N)}}$.

Utilizando os momentos $\mu_n^{(N)}$ podemos obter os coeficientes de reflexão $\rho_n(\psi_N, 0) = \delta_n^{(N)}$ da seguinte forma

$$\delta_n^{(N)} = -\frac{\langle z\rho_{n-1}(\psi_N, z), 1\rangle}{\left\langle \rho_{n-1}^*(\psi_N, z), 1\right\rangle} .$$

Denotando $\rho_n(\psi_N, z) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} z^j$, onde $a_{n,j} \in \mathbb{R}$, temos que

$$\rho_n^*(\psi_N, z) = z^n \overline{\rho_n\left(\psi_N, \frac{1}{\bar{z}}\right)} = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} z^{n-j} .$$

Utilizando essas expressões, obtemos

$$\langle z\rho_{n-1}(\psi_N, z), 1\rangle = \int_0^{2\pi} z\rho_{n-1}(\psi_N, z) d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1,j} \int_0^{2\pi} z^{j+1} d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1,j} \mu_{j+1}^{(N)}$$

e, ainda,

$$\left\langle \rho_{n-1}^*(\psi_N, z), 1\right\rangle = \int_0^{2\pi} \rho_{n-1}^*(\psi_N, z) d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1,j} \int_0^{2\pi} z^{n-1-j} d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1,j} \mu_{n-1-j}^{(N)} .$$

Portanto, os coeficientes de reflexão em função dos coeficientes de autocorrelação do sinal são dados por

$$\delta_n^{(N)} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1,j} \mu_{j+1}^{(N)}}{\sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1,j} \mu_{n-1-j}^{(N)}} .$$

Este método de se obter os coeficientes de reflexão, juntamente com as relações de recorrência (3.32) e (3.33), é conhecido como algoritmo de Levinson (ver Jones *et al.* [13, 16]).

Serão utilizadas algumas propriedades do núcleo de Fejér na demonstração do próximo resultado. Por isso, apresentaremos sua definição.

Definição 5.1. *A função*

$$\Phi_N(t) = \frac{1}{2\pi N}\left(\frac{\operatorname{sen}(Nt/2)}{\operatorname{sen}(t/2)}\right)^2 ,$$

é conhecida como núcleo de Fejér de ordem $N-1$.

Algumas propriedades da função $\Phi_N(t)$ são

(i) $\Phi_N(t) \geq 0$ e $\Phi_N(t) = \Phi_N(-t)$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t)dt = 1\,, \qquad \text{para todo } N \in \mathbb{N}\,,$

(iii) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com período 2π. Então,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t) f(x-t)dt = f(x)\,.$$

As demonstrações dessas propriedades serão aqui omitidas, mas podem ser encontradas em [9, 11].

O próximo resultado, demonstrado por Jones *et al.* em [13], garante que a medida $\psi_N(z)$ definida por (5.4) converge "fracamente" para a medida $\psi(z)$ definida por (5.2).

Teorema 5.1. *A medida ψ_N converge "fracamente" para a medida discreta ψ. Isto significa que*

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi_N(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta})\,,$$

para toda f contínua no círculo unitário Γ.

Demonstração: Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\omega_j \notin [\omega_s - \varepsilon, \omega_s + \varepsilon]$ para $j \neq s$. Então, escrevendo

$$d\psi_N(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{im\theta}\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi N}|X_N(e^{i\theta})|d\theta\,,$$

de (5.1) e utilizando a soma da série geométrica, obtemos

$$X_N(e^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{im\theta} = \sum_{j=-I}^{I} \gamma_j \left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{im(\omega_j-\theta)}\right) = \sum_{j=-I}^{I} \gamma_j \left(\frac{1-e^{iN(\omega_j-\theta)}}{1-e^{i(\omega_j-\theta)}}\right),$$

onde $w_0 = 0$ e γ_0 é como em (5.1). Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\omega_s-\varepsilon}^{\omega_s+\varepsilon} f(e^{i\theta})d\psi_N(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi N}\int_{\omega_s-\varepsilon}^{\omega_s+\varepsilon} f(e^{i\theta})|X_N(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N}\int_{\omega_s-\varepsilon}^{\omega_s+\varepsilon} f(e^{i\theta})\left|\sum_{j=-I}^{I}\gamma_j \frac{1-e^{iN\omega_j}\,z^{-N}}{1-e^{i\omega_j}\,z^{-1}}\right|^2 d\theta \qquad (5.6)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\int_{\omega_s-\varepsilon}^{\omega_s+\varepsilon} f(e^{i\theta})\left(\sum_{j=-I}^{I}\gamma_j\frac{1-e^{iN(\omega_j-\theta)}}{1-e^{i(\omega_j-\theta)}}\right)\left(\sum_{m=-I}^{I}\gamma_m\frac{1-e^{iN(\omega_m-\theta)}}{1-e^{i(\omega_m-\theta)}}\right)d\theta\,.$$

Agora, considerando $m = j = s$ na última expressão, obtemos

$$\frac{1}{2\pi N}\int_{\omega_s-\varepsilon}^{\omega_s+\varepsilon} f(e^{i\theta})|\gamma_s|^2\left|\frac{1-e^{iN(\omega_s-\theta)}}{1-e^{i(\omega_s-\theta)}}\right|^2 d\theta$$

$$= \frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N}\int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} -f(e^{i(\omega_s-\theta)})\left|\frac{1-e^{iN\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|^2 d\theta = \frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(e^{i(\omega_s-\theta)})\left|\frac{1-e^{iN\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|^2 d\theta$$

$$= \frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(e^{i(\omega_s-\theta)})\left(\frac{\operatorname{sen}(N\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta/2)}\right)^2 d\theta\,.$$

Utilizando as propriedades do núcleo de Fejér, concluímos que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(e^{i(\omega_s-\theta)})\left(\frac{\operatorname{sen}(N\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta/2)}\right)^2 d\theta = |\gamma_s|^2 f(e^{i\omega_s})\,.$$

Além disso, os termos restantes do lado direito de (5.6) são de ordem $O(1/N)$ se $j \neq m$ e $j \neq s$, e são iguais a s e de ordem $O(1/\sqrt{N})$ se j ou m são iguais a s (não simultaneamente). Portanto, temos

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_{\omega_s-\varepsilon}^{\omega_s-\varepsilon} f(e^{i\theta})d\psi_N(e^{i\theta}) = |\gamma_s|^2 f(e^{i\omega_s})\,.$$

Agora, note que podemos particionar o intervalo $[0, 2\pi]$ de modo a obtermos $[\omega_s - \varepsilon, \omega_s + \varepsilon]$ como um intervalo contido nessa partição. Assim, temos que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi_N(\theta) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(\theta)\,.$$

■

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada, em parte, em Jones *et al.* [16], Levinson [17] e em Pan e Saff [18], nos diz que, como a medida $\psi_N(z)$ converge para $\psi(z)$, os polinômios de Szegő $\rho_n(\psi_N, z)$, $n \leq n_0$, associados à medida $\psi_N(z)$, convergem para os polinômios de Szegő $\rho_n(\psi, z)$. Além disso, as raízes do polinômio $\rho_{n_0}(\psi, z)$ são os pontos de freqüência ξ_j. Se $n > n_0$, então n_0 raízes de $\rho_n(\psi_N, z)$ tendem para ξ_m e $n - n_0$ raízes satisfazem $|z| < K_n < 1$. Este é um resultado sobre os polinômios de Szegő bastante utilizado para o estudo das soluções do problema de análise de freqüência.

Teorema 5.2. *(i) Para cada n fixo, $1 \leq n \leq n_0$,*

$$\lim_{N\to\infty}\rho_n(\psi_N, z) = \rho_n(\psi, z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

onde $\rho_n(\psi, z)$ é o polinômio de Szegő mônico de grau n associado à medida discreta ψ. Em particular,

$$\lim_{N\to\infty} \rho_{n_0}(\psi_N, z) = \rho_{n_0}(\psi, z) = \prod_{m=1}^{n_0} (z - \xi_m)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

onde $\xi_m = e^{i\omega_m}$ são os pontos de freqüência.

(ii) Para cada $n < n_0$, existe $L_n \in (0, 1)$ dependendo somente de n, tal que

$$|\rho_n(\psi_N, 0)| = |\delta_n^{(N)}| \le L_n < 1\,, \quad N = 1, 2, \ldots$$

(iii) Para cada $n > n_0$, as raízes de maior módulo de $\rho_n(\psi, z)$ tendem aos pontos ξ_m, $m = 1, 2, \ldots, n_0$. Além disso, existe um número $\check{K}_n < 1$, dependendo somente de n tal que as $n - n_0$ raízes restantes de $\rho_n(\psi_N, z)$ pertencem ao disco $|z| < \check{K}_n$.

O próximo teorema trata de algumas informações importantes a respeito do comportamento das raízes de $\rho_n(\psi_N, w, z)$, bem como sobre o comportamento dos pesos da fórmula de quadratura associada a esses polinômios. Na demonstração desses resultados, vamos utilizar o lema a seguir. A demonstração do lema pode ser encontrada em [16].

Lema 5.1. *Seja M uma seqüência de números naturais. Então, existe uma subseqüência M_1 de M que satisfaz*

(i) para todo $m \ge 1$ e para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in M_1}} \rho_{n_0+m}(\psi_k, z)\,,$$

denotado por $\rho_{n_0+m}(\{M_1\}, z)$, existe e a convergência é localmente uniforme em $\mathbb{C}$.

(ii) Existem polinômios $U_m(\{M_1\}, z)$ tais que

$$\rho_{n_0+m}(\{M_1\}, z) = U_m(\{M_1\}, z)\rho^*_{n_0}(\psi, z)\,.$$

Teorema 5.3. (i) *Para $n \ge 1$ fixo, temos*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) = \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi)\,,$$

onde $\lambda_m(\psi)$ são os módulos das amplitudes que aparecem em (5.2).

(ii) Seja $n \ge n_0$ fixo. Seja M uma seqüência arbitrária de números naturais e considere, também, w um valor arbitrário tal que $|w| = 1$. Então, existme uma subseqüência M_1 de M e um polinômio $W_{n-n_0}(\psi, w, z)$ de grau $n - n_0$ tais que

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_1}} \rho_n(\psi_N, w, z) = W_{n-n_0}(\psi, w, z)\rho_{n_0}(\psi, z)\,.$$

Demonstração: (i) Pelo Teorema 5.1, temos que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi} d\psi_N(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n_0}\lambda_m(\psi)\,.$$

Por outro lado, como a quadratura de Szegő é exata para $f(z)\equiv 1$, temos

$$\int_0^{2\pi} d\psi_N(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n}\lambda_{n,m}(\psi_N, w)\,, \quad \text{para todo } N\,.$$

Isto demonstra a parte (i).

(ii) Agora, fazendo $m = n - n_0$ no Lema 5.1, temos que, a cada seqüência de números naturais M, existem uma subseqüência M_1 e uma seqüência de polinômios $\{U_{n-n_0}(\{M_1\}, z)\}_{n-n_0=1}^{\infty}$, cada um com grau $n - n_0$, tais que

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in M_1}} \rho_n(\psi_k, z) = U_{n-n_0}(\{M_1\}, z)\rho^*_{n_0}(\psi, z)\,, \quad n \geq n_0\,, \tag{5.7}$$

onde a convergência é localmente uniforme em $\mathbb{C}$.

Lembrando que $\rho_n(\psi_k, w, z) = \rho_n(\psi_k, z) + w\rho^*_n(\psi_k, z)$, temos que

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in M_1}} \rho_n(\psi_k, w, z) \;=\; \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in M_1}} \rho_n(\psi_k, z) + w \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in M_1}} \rho^*_n(\psi_k, z)\,.$$

Usando a expressão (5.7), obtemos

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in M_1}} \rho_n(\psi_k, w, z) \;=\; U_{n-n_0}(\{M_1\}, z)\rho^*_{n_0}(\psi, z) + wz^{n-n_0}U_{n-n_0}(\{M_1\}, 1/z)\rho_{n_0}(\psi, z)\,.$$

Logo,

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in M_1}} \rho_n(\psi_k, w, z) = \rho_{n_0}(\psi, z)\left(U_{n-n_0}(\{M_1\}, z)\frac{\rho^*_{n_0}(\psi, z)}{\rho_{n_0}(\psi, z)} + wU^*_{n-n_0}(\{M_1\}, z)\right)\,. \tag{5.8}$$

Agora, usando o fato que $\rho_{n_0}(\psi, z) = \pm\rho^*_{n_0}(\psi, z)$ (veja (5.3) e para maiores detalhes veja [16]), temos que

$$\frac{\rho^*_{n_0}(\psi, z)}{\rho_{n_0}(\psi, z)} = (-1)^L\,,$$

onde $L = 0$ se $\gamma_0 = 0$ e $L = 1$ se $\gamma_0 > 0$ e γ_0 é dado na expressão (5.1). Portanto, (5.8) implica que

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in M_1}} \rho_n(\psi_k, w, z) = W_{n-n_0}(\psi, w, z)\rho_{n_0}(\psi, z)\,,$$

onde $W_{n-n_0}(\psi, w, z) = (-1)^L U_{n-n_0}(\{M_1\}, z) + wU^*_{n-n_0}(\{M_1\}, z)$. ■

Denotemos por $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}$ e $\xi_{n_0+1}(w), \xi_{n_0+2}(w), \ldots, \xi_n(w)$ as raízes de $\rho_{n_0}(\psi, z)$ e $W_{n-n_0}(\psi, z)$, respectivamente. Podemos supor que

$$\lim_{N\to\infty} z_{n,m}(\psi_N, w) = \xi_m\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n_0$$

e

$$\lim_{N\to\infty} z_{n,m}(\psi_N, w) = \xi_m(w)\,, \quad m = n_0+1, n_0+2, \ldots, n\,,$$

onde qualquer das raízes de $W_{n-n_0}(\psi, w, z)$ pode ou não coincidir com os pontos de freqüência, ou seja, com as raízes de $\rho_{n_0}(\psi, z)$. Os próximos resultados sobre o comportamento de $\lambda_{n,m}(\psi_N, w)$ podem ser encontrados em [7].

Teorema 5.4. *Seja $n > n_0$. Se a subseqüência $\{z_{n,m}(\psi_N, w) : N \in M_1\}$ converge para um ponto diferente de um ponto de freqüência, então*

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) = 0\,.$$

Demonstração: Considerando os polinômios de Szegő ortonormais, de modo análogo ao que foi descrito para obter (2.13) (ver [21]), obtemos

$$\lambda_{n,m}(\psi_N, w) = \left(\sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(\psi, z_{n,m}(\psi_N, w))|^2\right)^{-1}. \tag{5.9}$$

Observando que $|\varphi_{n_0}(\psi_N, z_{n,m}(\psi_N, w))|^2$ é um termo da soma no denominador, e lembrando que $\varphi_{n_0}(\psi_N, z)$ é um polinômio de Szegő ortonormal, ou seja, pode ser escrito como

$$\varphi_{n_0}(\psi_N, z) = \left(\prod_{j=1}^{n_0}(1 - |\rho_j(\psi_N, 0)|^2)\right)^{-1/2} \rho_{n_0}(\psi_N, z)\,,$$

onde $\left(\prod_{j=1}^{n_0}(1 - |\rho_j(\psi_N, 0)|^2)\right)^{-1/2}$ é a norma de $\rho_{n_0}(\psi_n, z)$, temos

$$|\varphi_{n_0}(\psi_N, z_{n,m}(\psi_N, w))|^2 = \frac{|\rho_{n_0}(\psi_N, z_{n,m}(\psi_N, w))|^2}{\prod_{j=1}^{n_0}(1 - |\rho_j(\psi_N, 0)|^2)}\,.$$

Note que

$$|\rho_{n_0}(\psi_N, z_{n,m}(\psi_N, w))| \longrightarrow |\rho_{n_0}(\psi, \xi_m)|\,, \quad N \to \infty$$

que é diferente de zero desde que ξ_m não seja um ponto de freqüência. Interessante observar que

$$|\rho_{n_0}(\psi_N, 0)| \longrightarrow 1\,,$$

pois $\rho_{n_0}(\psi_N, 0) = \pm\rho^*_{n_0}(\psi_N, 0) = \pm 1$. Logo, temos que

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_1}} |\varphi_{n_0}(\psi_N, z_{n,m}(\psi_N, w))|^2 = \infty\,.$$

Portanto, de (5.9), temos que $\lim\limits_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) = 0\,.$ ■

Consideremos os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} L_k^N(z) &= \frac{(z - z_{n,1}(\psi_N, w))\ldots(z - z_{n,k-1}(\psi_N, w))}{(z_{n,k}(\psi_N, w) - z_{n,1}(\psi_N, w))\ldots(z_{n,k}(\psi_N, w) - z_{n,k-1}(\psi_N, w))} \\ &\quad\times \frac{(z - z_{n,k+1}(\psi_N, w))\ldots(z - z_{n,n}(\psi_N, w))}{(z_{n,k}(\psi_N, w) - z_{n,k+1}(\psi_N, w))\ldots(z_{n,k}(\psi_N, w) - z_{n,n}(\psi_N, w))}\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Utilizando os polinômios $T_n^j(z)$ definidos por

$$\begin{aligned} T_n^j(z) &= (z - z_{n,1}(\psi_N, w))\ldots(z - z_{n,j-1}(\psi_N, w))(z - z_{n,j+1}(\psi_N, w))\ldots \\ &\quad (z - z_{n,n_0+j-1}(\psi_N, w))(z - z_{n,n_0+j+1}(\psi_N, w))\ldots(z - z_{n,n}(\psi_N, w)) \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \ldots, p$, podemos escrever

$$L_j^N(z) = \frac{(z - z_{n,n_0+j}(\psi_N, w))T_n^j(z)}{(z_{n,j}(\psi_N, w) - z_{n,n_0+j}(\psi_N, w))T_n^j(z_{n,j}(\psi_N, w))}$$

e

$$L_{n_0+j}^N(z) = \frac{(z - z_{n,j}(\psi_N, w))T_n^j(z)}{(z_{n,n_0+j}(\psi_N, w) - z_{n,j}(\psi_N, w))T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N, w))}\,,$$

para $j = 1, 2, \ldots, p$.

Daí, temos que

$$L_j^N(z) + L_{n_0+j}^N(z) = \frac{T_n^j(z)P_j(z)}{T_n^j(z_{n,j}(\psi_N, w))T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N, w))}\,, \tag{5.11}$$

onde

$$\begin{aligned} P_j(z) &= \frac{z - z_{n,n_0+j}(\psi_N, w)}{z_{n,j}(\psi_N, w) - z_{n,n_0+j}(\psi_N, w)} T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N, w)) \\ &\quad - \frac{z - z_{n,j}(\psi_N, w)}{z_{n,j}(\psi_N, w) - z_{n,n_0+j}(\psi_N, w)} T_n^j(z_{n,j}(\psi_N, w)) \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \ldots, p$. Note que, para $z = z_{n,j}(\psi_N, w)$, temos

$$P_j(z_{n,j}(\psi_N, w)) = T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N, w))\,.$$

Utilizando os resultados acima, podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 5.5. *Suponhamos que* $\xi_{n_0+m}(w) = \xi_m$ *para* $m = 1, 2, \ldots, p$ *e que* $\xi_1, \ldots, \xi_{n_0}$, $\xi_{n_0+p+1}(w), \ldots, \xi_n(w)$ *sejam pontos distintos. Então, para* $N \in M_1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} (\lambda_{n,m}(\psi_N, w) + \lambda_{n,n_0+m}(\psi_N, w)) &= \lambda_m(\psi)\,, \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots, p\,,\\
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) &= \lambda_m(\psi)\,, \quad \text{para} \quad m = p+1, \ldots, n_0\,,\\
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) &= 0\,, \quad \text{para} \quad m = n_0+p+1, \ldots, n\,.
\end{aligned}$$

Em particular, se as raízes de $W_{n-n_0}(\psi, w, z)\rho_{n_0}(\psi, z)$ *são simples, então, para* $N \in M_1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) &= \lambda_m(\psi)\,, \quad \text{para}\, m = 1, \ldots, n_0\,,\\
\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) &= 0\,, \quad \text{para}\, m = n_0+1, \ldots, n\,.
\end{aligned}$$

Demonstração: Suponhamos que $z_{n,m}(\psi_N, w) \to \xi_m$, quando $N \to \infty$ para $m = 1, 2, \ldots, n_0$ e $m = n_0+p+1, \ldots, n$ e, além disso, que $z_{n,n_0+j}(\psi_N, w) \to \xi_j$, quando $N \to \infty$ para $j = 1, 2, \ldots, p$ com $1 \le p \le n_0$.

Suponhamos, ainda, que $\xi_k \neq \xi_m$ para $k = n_0+p+1, \ldots, n$ e $m = 1, \ldots, n_0$ e, também, que os pontos $\xi_{n_0+p+1}, \ldots, \xi_n$ sejam distintos, ou seja, as raízes de $W_{n-n_0}(\psi, w, z)\rho_{n_0}(\psi, z)$ que são pontos de freqüência têm multiplicidade no máximo 2 e aqueles que não são pontos de freqüência são simples.

De (5.11), temos que

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} [L_j^N(z) + L_{n_0+j}^N(z)] = \frac{T_n^j(z)P_j(z)}{(T_n^j(\xi_j))^2}\,.$$

Lembrando que $z_{n,m}(\psi_N, w) \to \xi_m$ para $m = 1, 2, \ldots, n_0$ e $m = n_0+p+1, \ldots, n$ e $z_{n,n_0+j}(\psi_N, w) \to \xi_j$ para $j = 1, 2, \ldots, p$ com $1 \le p \le n_0$, obtemos, de (5.10) que

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_1}} L_m^N(z) = \pi_m(z)\,,$$

com

$$\pi_m(z) \;=\; \frac{(z-\xi_1)^2 \ldots (z-\xi_p)^2 (z-\xi_{p+1}) \ldots (z-\xi_{m-1})(z-\xi_{m+1}) \ldots (z-\xi_n)}{(\xi_m-\xi_1)^2 \ldots (\xi_m-\xi_p)^2 (\xi_m-\xi_{p+1}) \ldots (\xi_m-\xi_{m-1})(\xi_m-\xi_{m+1}) \ldots (\xi_m-\xi_n)}\,.$$

Observemos, agora, que

$$\frac{T_n^m(\xi_m)P_m(\xi_m)}{(T_n^m(\xi_m))^2} = 1\,, \qquad m = 1, 2, \ldots, p$$

e, também, que

$$\frac{T_n^m(\xi_k)P_m(\xi_k)}{(T_n^m(\xi_m))^2} = 0\,, \qquad k \neq m\,.$$

Note, ainda, que $\pi_m(\xi_k) = 0$ para $k \neq m$ e $\pi_m(\xi_m) = 1$ para $m = p+1,\ldots,n_0$ e $m = n_0+p+1,\ldots,n$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}[\lambda_{n,m}(\psi_N,w) + \lambda_{n,n_0+m}(\psi_N,w)] &= \lim_{N\to\infty}\left[\int_\Gamma (L_m^N(z) + L_{n_0+m}^N(z))d\psi_N(z)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\psi)\frac{T_n^m(\xi_k)P_m(\xi_k)}{(T_n^m(\xi_m))^2} = \lambda_m(\psi)
\end{aligned}$$

para $m = 1,2,\ldots,p$. Por outro lado,

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{n,m}(\psi_N,w) = \lim_{N\to\infty}\int_\Gamma L_m^N(z)d\psi_N(z) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\psi)\pi_m(\xi_k) = \lambda_m(\psi)$$

para $m = p+1,\ldots,n_0$ e, por fim,

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{n,m}(\psi_N,w) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\psi)\pi_m(\xi_k) = 0$$

para $k \neq m$ com $m = n_0+p+1,\ldots,n$.

Agora, se as raízes de $\rho_n(\psi_N,w,z)$ são todas simples, temos que

$$\begin{aligned}
L_m^N(z) &= \frac{(z - z_{n,1}(\psi_N,w))\ldots(z - z_{n,m-1}(\psi_N,w))}{(z_{n,m}(\psi_N,w) - z_{n,1}(\psi_N,w))\ldots(z_{n,m}(\psi_N,w) - z_{n,m-1}(\psi_N,w))} \\
&\times\frac{(z - z_{n,m+1}(\psi_N,w))\ldots(z - z_{n,n}(\psi_N,w))}{(z_{n,m}(\psi_N,w) - z_{n,m+1}(\psi_N,w))\ldots(z_{n,m}(\psi_N,w) - z_{n,n}(\psi_N,w))}
\end{aligned}$$

e

$$\pi_m(z) = \frac{(z-\xi_1)\ldots(z-\xi_{m-1})(z-\xi_{m+1})\ldots(z-\xi_n)}{(\xi_m-\xi_1)\ldots(\xi_m-\xi_{m-1})(\xi_m-\xi_{m+1})\ldots(\xi_m-\xi_n)}\,.$$

Assim,

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{n,m}(\psi_N,w) = \lim_{N\to\infty}\int_\Gamma L_m^N(z)d\psi_N(z) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\psi)\pi_m(\xi_k) = \lambda_m(\psi)$$

para $m = 1,\ldots,n_0$ e

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{n,m}(\psi_N,w) = 0$$

para $m = n_0+1,\ldots,n$. ■

Uma conseqüência imediata dos teoremas anteriores é dada pelo seguinte resultado (ver [3]).

Teorema 5.6. *Seja $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos $Y_j(\varepsilon) = (\omega_j-\varepsilon,\omega_j+\varepsilon)$, $j = 1,2,\ldots,n_0$, satisfazem*

$$Y_j(\varepsilon) \subset (0,2\pi) \quad e \quad \omega_k \notin Y_j(\varepsilon) \text{ se } k \neq j\,.$$

Consideremos $\hat{Y}(\varepsilon) = [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} Y_j(\varepsilon)$. *Então*

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N,w)\in Y_j(\varepsilon)} \lambda_{n,k}(\psi_N, w) &= \lambda_j(\psi)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n_0\,, \\ \lim_{N\to\infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N,w)\in \hat{Y}_j} \lambda_{n,k}(\psi_N, w) &= 0\,. \end{aligned}$$

Demonstração: Note que $Y_j(\varepsilon)$ contém apenas uma freqüência para $j = 1, 2, \ldots, n_0$. Observe, ainda, que $\hat{Y}(\varepsilon)$ não contém valores ω_j que sejam freqüências. Assim, pelo Teorema 5.4, temos

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_{n,m}(\psi_N, w) = 0\,.$$

Logo,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N,w)\in \hat{Y}_j} \lambda_{n,k}(\psi_N, w) = 0\,.$$

Utilizando o mesmo argumento para $\theta_{n,k}(\psi_N, w) \in Y_k(\varepsilon)$, tal que $\theta_{n,k}(\psi_N, w) \neq \omega_j$, temos pelo Teorema 5.4, que $\lim_{N\to\infty} \lambda_{n,k}(\psi_N, w) = 0$ e, pelo Teorema 5.5, que $\lambda_{n,j}(\psi_N, w) = \lambda_j(\psi)$. Assim, para $j = 1, 2, \ldots, n_0$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N,w)\in Y_j(\varepsilon)} \lambda_{n,k}(\psi_N, w) = \lambda_j(\psi)\,.$$

∎

Posteriormente, vamos demonstrar o Teorema 5.8 sobre as raízes dos polinômios para-ortogonais, encontrado em [3], que afirma que para cada N, podemos identificar as raízes $z_{n,m}(\psi_N, w)$, $m = 1, 2, \ldots, n_0$, de $\rho_n(\psi_N, w, z)$ tal que $\lim_{N\to\infty} z_{n,m}(\psi_N, w) = \xi_m$. Mas, para sua demonstração, precisaremos de um resultado sobre os polinômios definidos em [3] pela seguinte relação de recorrência

$$Q_m(n, \psi, w, z) = zQ_{m-1}(n, \psi, w, z) + zw\overline{\delta}_{n+1-m}Q^*_{m-1}(n, \psi, w, z)\,,\ m = 1, 2, \ldots, n\,,$$

com $Q_0(n, \psi, w, z) = Q^*_0(n, \psi, w, z) = 1$, $\delta_n = \rho_n(\psi, 0)$ e $|w| = 1$.

Observe que $Q_m(n, \psi, w, z)$ é mônico e de grau n. Dessa relação, podemos obter alguns resultados. Para simplificar a notação, nas demonstrações que envolverem os polinômios $Q_m(n, \psi, w, z)$ vamos denotá-los simplesmente por Q_m.

Teorema 5.7. *(i) Para qualquer z no disco fechado ($\{z : |z| \leq 1\}$),*

$$|Q_m(n, \psi, w, z)| \leq |z| \prod_{j=1}^{m} (1 + |\delta_{n+1-j}|) \tag{5.12}$$

e

$$0 < \prod_{j=1}^{m}(1 - |\delta_{n+1-j}|) \leq |Q_m^*(n, \psi, w, z)| \leq \prod_{j=1}^{m}(1 + |\delta_{n+1-j}|)\,, \tag{5.13}$$

para $m = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) As m *raízes de* $Q_m(n, \psi, w, z)$ *estão todas no disco unitário aberto (*$\{z : |z| < 1\}$*).*

(iii) $\rho_n(\psi, w, z) = Q_m(n, \psi, w, z)\rho_{n-m}(\psi, z) + wQ_m^*(n, \psi, w, z)\rho_{n-m}^*(\psi, z)$*, para* $m = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração: (i) Como

$$Q_m = zQ_{m-1} + zw\overline{\delta}_{n+1-m}Q_{m-1}^*\,,$$

temos que

$$Q_m^* = Q_{m-1}^* + \overline{w}\delta_{n+1-m}Q_{m-1}\,.$$

Por indução, para $m = 1$ temos

$$|Q_1| = |zQ_0 + zw\overline{\delta}_n Q_0^*| = |z + zw\overline{\delta}_n| = |z||1 + w\overline{\delta}_n| \leq |z|(1 + |\delta_n|)\,.$$

Logo,

$$|Q_1| \leq |z| \prod_{j=1}^{1}(1 + |\delta_{n+1-j}|)\,.$$

Temos, ainda, que $Q_1^* = Q_0^* + \overline{w}\delta_n Q_0 = 1 + \overline{w}\delta_n$, o que implica que $|Q_n^*| \leq 1 + |\delta_n|$. Agora, como $|\delta_n| < 1$, temos $1 - |\delta_n| \geq 0$, de onde obtemos

$$0 < 1 - |\delta_n| \leq |Q_1^*| \leq 1 + |\delta_n|\,.$$

Portanto, as afirmações em (i) são válidas para $m = 1$. Suponhamos, agora, que valem também para $m - 1$, ou seja,

$$|Q_{m-1}| \leq |z| \prod_{j=1}^{m-1}(1 + |\delta_{n+1-j}|)$$

e

$$0 < \prod_{j=1}^{m-1}(1 - |\delta_{n+1-j}|) \leq |Q_{m-1}^*| \leq \prod_{j=1}^{m-1}(1 + |\delta_{n+1-j}|)\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Primeiramente, provemos que (5.12) vale para m. Temos que

$$\begin{aligned} |Q_m| &= |zQ_{m-1} + zw\overline{\delta}_{n+1-m}Q_{m-1}^*| = |z||Q_{m-1} + w\overline{\delta}_{n+1-m}Q_{m-1}^*| \\ &\leq |z|(|Q_{m-1}| + |\delta_{n+1-m}||Q_{m-1}^*|)\,. \end{aligned}$$

Logo, pelas hipóteses de indução,

$$|Q_m| \quad \leq \quad |z| \left(|z| \prod_{j=1}^{m-1} (1 + |\delta_{n+1-j}|) + |\delta_{n+1-m}| \prod_{j=1}^{m-1} (1 + |\delta_{n+1-j}|) \right) ,$$

o que implica em

$$|Q_m| \quad \leq \quad |z| \prod_{j=1}^{m-1} (1 + |\delta_{n+1-j}|)(|z| + |\delta_{n+1-m}|) \leq |z| \prod_{j=1}^{m-1} (1 + |\delta_{n+1-j}|)(1 + |\delta_{n+1-m}|) .$$

Portanto,

$$|Q_m| \leq |z| \prod_{j=1}^{m} (1 + |\delta_{n+1-j}|) .$$

Agora, provemos que (5.13) é válida para m. Note que

$$\frac{Q^*_m}{Q^*_{m-1}} = 1 + \overline{w}\delta_{n+1-m} \frac{Q_{m-1}}{Q^*_{m-1}} .$$

Logo,

$$\left| \frac{Q^*_m}{Q^*_{m-1}} \right| \leq 1 + |\delta_{n+1-m}| \left| \frac{Q_{m-1}}{Q^*_{m-1}} \right| \leq 1 + |\delta_{n+1-m}| .$$

Agora, como $|\delta_{n+1-m}| < 1$, temos que $1 - |\delta_{n+1-m}| \geq 0$ o que implica que $1 - |\delta_{n+1-m}| \leq \left| \frac{Q^*_m}{Q^*_{m-1}} \right|$. Assim, obtemos

$$1 - |\delta_{n+1-m}| \leq \left| \frac{Q^*_m}{Q^*_{m-1}} \right| \leq 1 + |\delta_{n+1-m}| ,$$

ou seja,

$$(1 - |\delta_{n+1-m}|)|Q^*_{m-1}| \leq |Q^*_m| \leq (1 + |\delta_{n+1-m}|)|Q^*_{m-1}| ,$$

e, assim,

$$\prod_{j=1}^{m} (1 - |\delta_{n+1-j}|) \leq |Q^*_m| \leq \prod_{j=1}^{m} (1 + |\delta_{n+1-j}|) .$$

Para verificar (i) basta mostrar que $\left| \frac{Q_m}{Q^*_m} \right| < 1$. De fato, para $m = 1$, temos

$$\left| \frac{Q_1}{Q^*_1} \right| = \left| \frac{z(1 + w\overline{\delta}_1)}{1 + \overline{w}\delta_1} \right| = |z| \left| \frac{1 + w\overline{\delta}_1}{1 + \overline{w}\delta_1} \right| = |z| ,$$

de onde obtemos

$$\left| \frac{Q_1}{Q^*_1} \right| = |z| < 1 \Rightarrow \left| \frac{Q_1}{Q^*_1} \right| < 1 .$$

Note que, como $w = x + iy$ e $\delta_1 = r + is$, temos

$$\left| \frac{1 + w\overline{\delta}_1}{1 + \overline{w}\delta_1} \right| = \sqrt{\frac{(1 + xr + ys)^2 + (ry - xs)^2}{(1 + xr + ys)^2 + ((-1)(ry - xs))^2}} = 1 , \quad \forall\, x, y, r, s \in \mathbb{R} .$$

Suponhamos, para $m-1$, que $\left|\dfrac{Q_{m-1}}{Q^*_{m-1}}\right| \leq 1$. Provemos para m.

$$\begin{aligned}
|Q_m| &= \left|\prod_{j=1}^{m}(z-\xi_j)\right| = \prod_{j=1}^{m}|z-\xi_j| = |z-\xi_m|\prod_{j=1}^{m-1}|z-\xi_j| < \left|z-\frac{1}{\xi_m}\right|\prod_{j=1}^{m-1}|z-\xi_j| \\
&< \left|z-\frac{1}{\xi_m}\right|\prod_{j=1}^{m-1}\left|z-\frac{1}{\xi_j}\right| = \prod_{j=1}^{m}\left|z-\frac{1}{\xi_j}\right| = \left|\prod_{j=1}^{m}(z-\xi_m^{-1})\right| = |Q^*_m|\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|Q_m| < |Q^*_m\,.$$

Novamente, vamos utilizar indução para demonstrar a parte (iii). Assim, para $m=1$,

$$\begin{aligned}
Q_1\rho_{n-1}(\psi,z) + wQ^*_1\rho^*_{n-1}(\psi,z) = z(1+w\overline{\delta}_n)\rho_{n-1}(\psi,z) &+ w(1+\overline{w}\delta_n)\rho^*_{n-1}(\psi,z) \\
&= z\rho_{n-1}(\psi,z) + zw\overline{\delta}_n\rho_{n-1}(\psi,z) + w\rho^*_{n-1}(\psi,z) + \delta_n\rho^*_{n-1}(\psi,z) \\
&= z\rho_{n-1}(\psi,z) + \delta_n\rho^*_{n-1}(\psi,z) + w(z\overline{\delta}_n\rho_{n-1}(\psi,z) + \rho^*_{n-1}(\psi,z)) \\
&= \rho_n(\psi,z) + w(z\overline{\delta}_n\rho_{n-1}(\psi,z) + \rho^*_{n-1}(\psi,z)) \\
&= \rho_n(\psi,z) + w\rho^*_n(\psi,z) \\
&= \rho_n(\psi,w,z)\,.
\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que a propriedade seja válida para $m-1$, ou seja,

$$\rho_n(\psi,w,z) = Q_{m-1}\rho_{n-m+1}(\psi,z) + wQ^*_{m-1}\rho^*_{n-m+1}(\psi,z) = \rho_n(\psi,z) + w\rho^*_n(\psi,z)\,.$$

Vamos, então, verificar a propriedade para m. Assim,

$$\begin{aligned}
Q_m\rho_{n-m}(\psi,z) + wQ^*_m\rho^*_{n-m}(\psi,z) &= zQ_{m-1}\rho_{n-m}(\psi,z) + zw\overline{\delta}_{n+1-m}Q^*_{m-1}\rho_{n-m}(\psi,z) \\
&\quad + wQ^*_{m-1}\rho^*_{n-m}(\psi,z) + \delta_{n+1-m}Q_{m-1}\rho^*_{n-m}(\psi,z) \\
&= (z\rho_{n-m}(\psi,z) + \delta_{n+1-m}\rho^*_{n-m}(\psi,z))Q^*_{m-1} \\
&\quad + w(\overline{\delta}_{n+1-m}\rho_{n-m}(\psi,z) + \rho^*_{n-m}(\psi,z))Q^*_{m-1} \\
&= \rho_{n-m+1}(\psi,z)Q_{m-1} + wQ^*_{m-1}\rho^*_{n-m+1}(\psi,z) \\
&= \rho_n(\psi,w,z)\,,
\end{aligned}$$

o que verifica (iii). ■

Agora estamos em condições de demonstrar o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [3].

Teorema 5.8. *Seja $n \geq n_0$ fixo. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $N(\varepsilon)$ tal que para todo $N \geq N(\varepsilon)$, cada um dos arcos $\{z : |z| = 1$ e $|z - \xi_m| < \varepsilon\}$, $m = 1, 2, \ldots, n_0$, contém pelo menos uma raiz de $\rho_n(\psi_N, w, z)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5.7, temos que

$$|\rho_n(\psi_N, w, z)| = |Q_{n-n_0}\rho_{n_0}(\psi_N, z) + wQ^*_{n-n_0}\rho^*_{n_0}(\psi_N, z)|\,.$$

Integrando essa última expressão com relação a $d\psi(z)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |\rho_n(\psi_N, w, z)| d\psi(z) &= \int_\Gamma |\rho_{n_0}(\psi_N, z)||Q_{n-n_0} + w_m Q^*_{n-n_0}| d\psi(z) \\
&= \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi)|\rho_{n_0}(\psi_N, \xi_m)||Q_{n-n_0} + w_m Q^*_{n-n_0}|\,,
\end{aligned}$$

onde $w_m = w\rho^*_{n_0}(\psi_N, \xi_m)/\rho_{n_0}(\psi_N, \xi_m)$ para $m = 1, 2, \ldots, n_0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |\rho_n(\psi_N, w, z)| d\psi(z) &\leq \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi)|\rho_{n_0}(\psi_N, \xi_m)|(|Q_{n-n_0}| + |w_m||Q^*_{n-n_0}|) \\
&\leq \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi)|\rho_{n_0}(\psi_N, \xi_m)| \left(|z| \prod_{j=1}^{n-n_0} (1 + |\delta_{n+1-j}|) + |w_m| \prod_{j=1}^{n-n_0} (1 + |\delta_{n+1-j}|) \right). \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Note que $|w_m| = 1$ e, daí, (5.14) torna-se

$$\int_\Gamma |\rho_n(\psi_N, w, z)| d\psi(z) \leq 2 \left(\prod_{j=1}^{n-n_0} (1 + |\delta_{n+1-j}|) \right) \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi)|\rho_{n_0}(\psi_N, \xi_m)|\,.$$

Como $\lim_{N\to\infty} \rho_{n_0}(\psi_N, z) = \rho_{n_0}(\psi, z)$ e $|\delta_{n+1-j}| < 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n - n_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi)|\rho_n(\psi_N, \xi_m)| &= \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) \lim_{N\to\infty} |\rho_n(\psi_N, \xi_m)| = \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi)|\rho_{n_0}(\psi, \xi_m)| \\
&= \int_\Gamma |\rho_{n_0}(\psi_N, z)| d\psi(z) = \lim_{N\to\infty} \int_\Gamma |\rho_{n_0}(\psi_N, z)| d\psi(z) = 0\,,
\end{aligned}$$

pois ξ_m são raízes de $\rho_{n_0}(\psi_N, z)$ para $m = 1, 2, \ldots, n_0$.

Portanto, temos que

$$0 \leq \int_\Gamma |\rho_n(\psi_N, w, z)| d\psi(z) \leq 0 \quad \text{,ou seja,} \quad |\rho_n(\psi_N, w, z)| = 0\,,$$

de onde concluímos que existe ao menos uma raiz do polinômio para-ortogonal no arco $\{z : |z| = 1$ e $|z - \xi_m| < \varepsilon\}$. ■

O próximo resultado fornece uma maneira de identificar, dentre as raízes de $\rho_n(\psi_N, w, z)$, $n \geq 0$, quais são as raízes "desinteressantes", ou seja, quais as raízes que não convergem para pontos de freqüência.

Teorema 5.9. *Seja $n > n_0$ fixo. Seja M uma seqüência arbitrária de números naturais. Consideremos $W_{n-n_0}(\psi, w, z)$ como no Teorema 5.3. Então,*

(i) existe uma subseqüência M_1 de M tal que, para $N \in M_1$,

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_1}} W_{n-n_0}(\psi_N, w_1, z) = W_{n-n_0}(\psi, w_1, z)\,,$$

(ii) se $w_1 \neq w_2$, existe uma subseqüência M_2 de M_1 tal que, para $N \in M_2$,

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_2}} W_{n-n_0}(\psi_N, w_1, z) = W_{n-n_0}(\psi, w_1, z)$$

e

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_2}} W_{n-n_0}(\psi_N, w_2, z) = W_{n-n_0}(\psi, w_2, z)\,.$$

Além disso, $W_{n-n_0}(\psi, w_1, z)$ e $W_{n-n_0}(\psi, w_2, z)$ não tem raízes comuns.

Demonstração: Pelo Teorema 5.3 *(ii)*, temos que existem uma subseqüência M_1 de uma seqüência M de números naturais e um polinômio $W_{n-n_0}(\psi, w, z)$ de grau $n - n_0$ tais que

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_1}} \rho_n(\psi_N, w, z) = W_{n-n_0}(\psi, w, z)\rho_{n_0}(\psi, z)\,, \quad \text{para } w \in \mathbb{C} \text{ com } |w| = 1\,.$$

Dessa forma, para w_1 e w_2 considerados em (i) e (ii) temos, do fato acima, a garantia de existência dos polinômios $W_{n-n_0}(\psi, w_1, z)$ e $W_{n-n_0}(\psi, w_2, z)$.

Provemos, agora, que $W_{n-n_0}(\psi, w_1, z)$ e $W_{n-n_0}(w_2, z)$ não têm raízes comuns. Suponhamos que $W_{n-n_0}(\psi, w_1, z)$ e $W_{n-n_0}(\psi, w_2, z)$ têm uma raiz comum ξ, que esteja no círculo unitário. O ponto ξ pode ser igual a qualquer dos pontos de freqüência ou não. Escrevemos, então,

$$W_{n-n_0}(\psi, w_1, z) = (z - \xi)\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_1, z)$$

e

$$W_{n-n_0}(\psi, w_2, z) = (z - \xi)\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_2, z)\,.$$

Assim, usando a definição de polinômio para-ortogonal, obtemos

$$\begin{aligned}
(w_1 - w_2)\rho_n(\psi_N, z) &= w_1\rho_n(\psi_N, z) - w_2\rho_n(\psi_N, z) \\
&= w_1(\rho_n(\psi_N, w_2, z) - w_2\rho_n^*(\psi_N, z)) - w_2(\rho_n(\psi_N, w_1, z) - w_1\rho_n^*(\psi_N, z)) \\
&= w_1\rho_n(\psi_N, w_2, z) - w_2\rho_n(\psi_N, w_1, z)\,. \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

Agora, sejam $z_{n,m}(\psi_N, w)$, $m = 1, 2, \ldots, n_0$, as raízes de $\rho_n(\psi_N, w, z)$ tais que

$$\lim_{N\to\infty} z_{n,m}(\psi_N, w) = \xi_m\,, \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots, n_0\,.$$

Seja

$$V_{n_0}(\psi_N, w, z) = \prod_{m=1}^{n_0} (z - z_{n,m}(\psi_N, w))$$

e escrevemos

$$\rho_n(\psi_N, w, z) = V_{n_0}(\psi_N, w, z) W_{n-n_0}(\psi_N, w, z)\,. \tag{5.16}$$

Usando (5.16) e (5.15), temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_2}} (w_1 - w_2)\rho_n(\psi_N, z)\\
&\quad= \lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_2}} w_1\rho_n(\psi_N, w_2, z) - w_2\rho_n(\psi_N, w_1, z)\\
&\quad= \lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_2}} (w_1 V_{n_0}(\psi_N, w_2, z) W_{n-n_0}(\psi_N, w_2, z) - w_2 V_{n_0}(\psi_N, w_1, z) W_{n-n_0}(\psi_N, w_1, z))\\
&\quad= w_1\rho_{n_0}(\psi, z) W_{n-n_0}(\psi, w_2, z) - w_2\rho_{n_0}(\psi, z) W_{n-n_0}(\psi, w_1, z)\\
&\quad= w_1\rho_{n_0}(\psi, z)(z-\xi)\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_2, z) - w_2\rho_{n_0}(\psi, z)(z-\xi)\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_1, z)\\
&\quad= (z-\xi)\rho_{n_0}(\psi, z)(w_1\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_2, z) - w_2\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_1, z))\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in M_2}} \rho_n(\psi_N, z) = (z-\xi)\rho_{n_0}(\psi, z)(w_1\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_2, z) - w_2\widetilde{W}_{n-n_0-1}(\psi, w_1, z))\,.$$

Quando $w_1 \neq w_2$, observe que temos que as raízes de $\rho_n(\psi_N, -z)$ encontran-se fora ou no círculo unitário, mas isso é uma contradição para o fato que $n - n_0$ raízes de $\rho_n(\psi_N, z)$ estão dentro do disco $|z| \leq K_n$. ■

5.3 Casos especiais de polinômios para-ortogonais e análise de freqüência

O problema de análise de freqüência pode, também, ser abordado através do uso dos polinômios ortogonais oriúndos dos polinômios para-ortogonais estudados na Seção 4.4. Nossos estudos nesta seção estão baseados em [3].

Consideremos as seqüências de polinômios mônicos $P_n^{(\kappa)}(N, x)$, $\kappa = 1, 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dados por

$$P_{n+1}^{(\kappa)}(N, x) = xP_n^{(\kappa)}(N, x) - \alpha_{n+1}^{(\kappa)}(N) P_{n-1}^{(\kappa)}(N, x)\,, \quad n \geq 1\,, \tag{5.17}$$

com $P_0^{(\kappa)}(N,x) = 1$, $P_1^{(\kappa)}(N,x) = x$,

$$\alpha_{n+1}^{(1)}(N) = \frac{1}{4}(1+\delta_{n-1}^{(N)})(1-\delta_n^{(N)}) \qquad \text{e} \qquad \alpha_{n+1}^{(2)}(N) = \frac{1}{4}(1-\delta_n^{(N)})(1+\delta_{n+1}^{(N)}),$$

com $\delta_n^{(N)} = \rho_n(\psi_N, 0)$ e $\psi_N(e^{i\theta})$ definida em (5.4).

Pelo Teorema 4.6, os polinômios $P_n^{(\kappa)}(N,x)$, $\kappa = 1,2$, são ortogonais mônicos associados à medida positiva $\phi^{(\kappa)}(N,x)$ em $[-1,1]$, onde

$$d\phi^{(1)}(N,\cos(\theta/2)) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta/2)} d\phi^{(2)}(N,\cos(\theta/2)) = -d\psi_N(e^{i\theta}). \tag{5.18}$$

Consideremos a medida $\phi(x)$ definida por

$$d\phi(\cos(\theta/2)) = -d\psi(e^{i\theta}), \tag{5.19}$$

onde $\psi(x)$ é dada pela equação (5.2). Note que podemos escrever a expressão (5.19) da seguinte forma

$$d\phi(x) = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k(\psi)\delta(x-\xi_k),$$

onde $\xi_k = \cos(\omega_k/2)$ e $\lambda_k(\psi)$ são como na expressão (5.2).

Da relação entre $P_n^{(\kappa)}(x)$ e $R_n^{(\kappa)}(z)$, com $x = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2})$, temos

$$P_n^{(1)}(N,x(z)) = (4z)^{-n/2} R_n^{(1)}(N,z) = (4z)^{-n/2}\left(\frac{\rho_n(\psi_N,1,z)}{1+\rho_n(\psi_N,0)}\right)$$

e

$$P_n^{(2)}(N,x(z)) = (4z)^{-n/2} R_n^{(2)}(N,z) = (4z)^{-n/2}\left(\frac{\rho_{n+1}(\psi_N,-1,z)}{(z-1)(1+\rho_{n+1}(\psi_N,0))}\right).$$

Como o Teorema 4.6 fornece informações a respeito do comportamento das raízes e dos pesos das fórmulas de quadratura associadas aos polinômios $P_n^{(1)}(x)$ e $P_n^{(2)}(x)$, respectivamente, vamos nos restringir ao estudo apenas dos polinômios $P_n^{(1)}(x)$, pois os resultados e demonstrações para os polinômios $P_n^{(2)}(x)$ são análogos.

O próximo resultado fornece algumas informações sobre o comportamento assintótico da medida $\phi^{(1)}(N,x)$ e dos polinômios $P_n^{(1)}(N,x)$, quando $1 \le n \le n_0$ e $N \to \infty$.

Teorema 5.10. *(i)*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)d\phi^{(1)}(N,x) = \int_{-1}^{1} g(x)d\phi(x) \qquad \forall\, g \in C[-1,1]. \tag{5.20}$$

(ii) Para cada n fixo, $1 \leq n \leq n_0$,

$$\lim_{N\to\infty} P_n^{(1)}(N,x) = P_n(\phi,x)\,, \qquad x \in [-1,1]\,,$$

onde $P_n(\phi,x)$ são os polinômios ortogonais com relação à medida $\phi(x)$. Em particular, temos

$$\lim_{N\to\infty} P_{n_0}^{(1)}(N,x) = P_{n_0}(\phi,x) = \prod_{m=1}^{n_0}(x-\xi_m)\,, \qquad x \in [-1,1]\,,$$

onde $\xi_m = \cos(\omega_m/2)$.

Demonstração: (i) Substituindo $x = \cos(\theta/2)$ no lado esquerdo de (5.20) obtemos

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1} g(x)d\phi^{(1)}(N,x) = \lim_{N\to\infty}\int_{2\pi}^{0} g(\cos(\theta/2))d\phi^{(1)}(N,\cos(\theta/2))\,.$$

Como $d\phi^{(1)}(N,\cos(\theta/2)) = -d\psi_N(e^{i\theta})$ e tomando $g(\cos(\theta/2)) = f(e^{i\theta})$ temos

$$\lim_{N\to\infty}\int_{2\pi}^{0} g(\cos(\theta/2))d\phi^{(1)}(N,\cos(\theta/2)) = \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi_N(e^{i\theta})\,.$$

Pelo Teorema 5.1, a expressão acima torna-se

$$\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi_N(e^{i\theta}) = \int_{0}^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \int_{2\pi}^{0} f(e^{i\theta})(-d\psi(e^{i\theta}))$$

e, novamente usando $-d\psi(e^{i\theta}) = d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2))$ e $f(e^{i\theta}) = g(\cos(\theta/2))$, temos que a expressão acima torna-se

$$\int_{2\pi}^{0} f(e^{i\theta})(-d\psi(e^{i\theta})) = \int_{2\pi}^{0} g(\cos(\theta/2))d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2))\,.$$

Substituindo $x = \cos(\theta/2)$ na expressão anterior, obtemos

$$\int_{2\pi}^{0} g(\cos(\theta/2))d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) = \int_{-1}^{1} g(x)d\phi^{(1)}(\psi_N,x)\,.$$

Portanto, (5.20) é válida.

(ii) Temos, da relação entre os polinômios $P_n^{(1)}(x)$ e $R_n^{(1)}(z)$, que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} P_n^{(1)}(N,x) &= \lim_{N\to\infty}(4z)^{-n/2}R_n^{(1)}(\psi_N,z) = (4z)^{-n/2}\lim_{N\to\infty}R_n^{(1)}(\psi_N,z)\\ &= (4z)^{-n/2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\rho_n(\psi_N,z)+\rho_n^*(\psi_N,z)}{1+\rho_n(\psi_N,0)}\right).\end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.2, obtemos

$$(4z)^{-n/2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\rho_n(\psi_N,z)+\rho_n^*(\psi_N,z)}{1+\rho_n(\psi_N,0)}\right) = (4z)^{-n/2}R_n^{(1)}(\psi,z) = P_n^{(1)}(x)\,.$$

Em particular, para $n = n_0$, a demonstração é análoga e segue imediatamente. ∎

Consideremos, agora, as fórmulas de quadratura gaussianas relacionadas a $P_n^{(\kappa)}(N,x)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)d\phi^{(\kappa)}(x) = \sum_{m=1}^{n} W_{n,m}^{(\kappa)}(N) f(x_{n,m}^{(\kappa)}(N)) \,, \quad f \in \Pi_{2n-1} \,, \tag{5.21}$$

onde $x_{n,m}^{(\kappa)}(N)$ são as raízes de $P_n^{(\kappa)}(N,x)$. Do Teorema 4.8, temos que

$$\begin{array}{r} x_{n,m}^{(1)}(N) = \cos(\theta_{n,m}(\psi_N,1)/2) \\ \\ W_{n,m}^{(1)}(N) = \lambda_{n,m}(\psi_N,1) \end{array} \qquad m = 1,2,\ldots,n \,. \tag{5.22}$$

Como as freqüências ω_k estão ordenadas da forma

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{n_0-1} < \omega_{n_0} < 2\pi \,,$$

então $\xi_k = \cos(\omega_k/2)$ são ordenados como segue

$$-1 < \xi_{n_0} < \xi_{n_0-1} < \ldots < \xi_2 < \xi_1 < 1 \,.$$

Ordenemos os zeros de $P_n^{(\kappa)}(N,x)$ da seguinte forma

$$-1 < x_{n,n}^{(\kappa)}(N) < x_{n,n-1}^{(\kappa)}(N) < \ldots < x_{n,2}^{(\kappa)}(N) < x_{n,1}^{(\kappa)}(N) < 1 \,.$$

Utilizando as relações (5.22) e $\xi_m = \cos(\omega_m/2)$, $m = 1,2,\ldots,n$ nos Teoremas 5.6 e 5.8, obtemos o seguinte resultado que pode ser utilizado para aproximar os pontos de freqüência e os módulos das amplitudes de um dado sinal através dos nós e dos pesos da fórmula de quadratura (5.21).

Teorema 5.11. *Seja $n \geq n_0$ fixo.*

(i) Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que, para todo $N \geq N(\varepsilon)$, cada intervalo da forma $(\xi_m - \varepsilon, \xi_m + \varepsilon)$, $m = 1,2,\ldots,n_0$, contém pelo menos uma raiz de $P_n^{(1)}(N,x)$.

(ii) Seja $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos $\Delta_j(\varepsilon) = (\xi_j - \varepsilon, \xi_j + \varepsilon)$, $j = 1,2,\ldots,n_0$, satisfazem

$$\Delta_j(\varepsilon) \subset (-1,1) \qquad e \qquad \xi_k \notin \Delta_j(\varepsilon) \quad se \quad k \neq j \,.$$

Se $\hat{\Delta}(\varepsilon) = [0,2\pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} \Delta_j(\varepsilon)$, então

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{x_{n,k}^{(1)} \in \Delta_j(\varepsilon)} W_{n,k}^{(1)}(N) = \lambda_j(\psi) \,, \quad e \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{x_{n,k}^{(1)} \in \hat{\Delta}(\varepsilon)} W_{n,k}^{(1)}(N) = 0 \,.$$

Observe que a primeira parte deste resultado indica, que para cada N, podemos identificar uma raiz, $x_m^{(1)}(N)$, $m = 1, 2, \ldots, n_0$, de $P_n^{(1)}(N, x)$ tal que a seqüência $\{x_m^{(1)}(N)\}_{N=1}^{\infty}$ tem como limite o ponto de freqüência ξ_m, observando se $\lim \sum W_{n,k}^{(1)}(N) \neq 0$. A parte (ii) fornece uma maneira de encontrar o módulo das amplitudes $\lambda_j(\psi)$.

No próximo resultado observamos o comportamento de seqüências convergentes de raízes distintas dos polinômios $P_n^{(1)}(N, x)$.

Teorema 5.12. *Seja $n \geq n_0$ fixo. Consideremos M uma seqüência de números naturais e, para cada $N \in M$, seja $y(1, n) > y(2, n) > y(3, n)$ três raízes distintas de $P_n^{(1)}(N, x)$ tais que os limites*

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in M}} y(j, N) = y(j)\,, \quad j = 1, 2, 3\,,$$

existem. Então,

(i) se duas seqüências de raízes têm um limite comum, este limite deve ser igual a um ponto de freqüência, isto é

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in M}} y(1, N) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in M}} y(2, N) = \xi_m\,, \quad \textit{para algum } m = 1, 2, \ldots, n_0\,,$$

(ii) as três seqüências acima não podem ter o mesmo limite.

Demonstração: Pela definição dos polinômios $P_n^{(1)}(N, x(z))$ e $P_n^{(2)}(N, x(z))$, temos que

$$P_n^{(1)}(N, x(z)) = (4z)^{-n/2} \left(\frac{\rho_n(\psi_N, 1, z)}{1 + \rho_n(\psi_N, 0)} \right)$$

e

$$P_{n-1}^{(2)}(N, x(z)) = (4z)^{-(n-1)/2} \left(\frac{\rho_n(\psi_N, -1, z)}{(z-1)(1 - \rho_n(\psi_N, 0))} \right).$$

Lembrando que

$$x(z) = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2}\,,$$

obtemos, do Teorema 5.3, que existe uma subseqüência M_2 de M tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in M_2}} P_n^{(1)}(N, x) &= \lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in M_2}} (4z)^{-n/2} \frac{\rho_n(\psi_N, 1, z)}{1 + \rho_n(\psi_N, 0)} \\
&= \lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in M_2}} (4z)^{-n/2} \frac{W_{n-n_0}(\psi_N, 1, z) \prod_{m=0}^{n_0} (z - z_{n,m}(\psi_N, 1))}{1 + \rho_n(\psi_N, 0)} \\
&= (4z)^{-n/2} \frac{W_{n-n_0}(\psi, 1, z)}{1 + \rho_n(\psi_N, 0)} \prod_{m=0}^{n_0} (z - \xi_m)\,,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_2}} P_n^{(1)}(N,x) = Q_{n-n_0}^{(1)}(x) \prod_{m=0}^{n_0} (x-\xi_m) \,.$$

Repetindo o mesmo argumento para $P_{n-1}^{(2)}(x)$, obtemos

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M_2}} P_{n-1}^{(2)}(N,x) = Q_{n-n_0-1}^{(2)}(x) \prod_{m=0}^{n_0} (x-\xi_m) \,,$$

onde $Q_{n-n_0}^{(1)}(x)$ e $Q_{n-n_0-1}^{(2)}(x)$ não têm raízes comuns.

(i) Suponhamos que $y(1) = y(2) = y$.

Pelo Teorema 4.7, temos que existe uma raiz $\hat{y}(1,N)$ de $P_{n-1}^{(2)}(N,x)$ tal que

$$y(1,N) > \hat{y}(1,N) > y(2,N) \,.$$

Logo,

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M}} y(1,N) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M}} \hat{y}(1,N) = y \,.$$

Assim, como $Q_{n-n_0}^{(1)}(x)$ e $Q_{n-n_0-1}^{(2)}(x)$ não têm raízes comuns, y deve ser um ponto de freqüência.

(ii) Supondo que $y(1) = y(2) = y(3) = y$, novamente pelo Teorema 4.7, temos que existem duas raízes $\hat{y}(1,N)$ e $\hat{y}(2,N)$ de $P_{n-1}^{(2)}(N,x)$ tais que

$$y(1,N) > \hat{y}(1,N) > y(2,N) > \hat{y}(2,N) > y(3,N) \,.$$

Logo,

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M}} y(1,N) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M}} \hat{y}(1,N) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M}} y(2,N) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in M}} \hat{y}(2,N) = y \,.$$

Mas, isto implica que $Q_{n-n_0}^{(1)}(x)$ e $Q_{n-n_0-1}^{(1)}(x)$ têm raízes comuns, o que é um absurdo. ∎

Desta forma, podemos aproximar a solução do problema de análise de freqüência, ou seja, determinar n_0, as freqüências ω_j e o módulo das amplitudes $\lambda_j(\psi) = |\gamma_j|$, para $j = 1, 2, \ldots, n_0$. Conhecidos N valores do sinal trigonométrico $x(m)$ para $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, construímos a medida $\psi_N(z)$ como em (5.4), os momentos como em (5.5) e calculamos os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais, por exemplo, $P_n^{(1)}(N,x)$. Desses coeficientes, utilizando a matriz de Jacobi (2.10), calculamos as raízes $x_{n,m}^{(1)}(N)$ de $P_n^{(1)}(N,x)$ e de (2.14), calculamos os pesos $W_{n,m}^{(1)}(N)$ da fórmula de quadratura associada. Finalmente, observando o comportamento dos pesos e nós da quadratura e utilizando os Teoremas 5.11 e 5.12, podemos aproximar os pontos de freqüências e suas respectivas amplitudes.

Capítulo 6

Considerações finais

Com os estudos desenvolvidos nesse trabalho, conhecemos várias propriedades interessantes dos polinômios de Szegő como, por exemplo, resultados sobre a localização de suas raízes e, também, a maneira como estes estão relacionados a uma fração contínua. Os polinômios de Szegő são bastante utilizados na solução do problema de análise de freqüência. Encontramos resultados e algoritmos nesse sentido em Jones *et al.* [12, 13, 15, 16] em Pan e Saff [18].

Com relação ao estudo dos polinômios para-ortogonais, dados por uma combinação linear de um polinômio de Szegő e seu recíproco, vimos que possuem suas raízes no círculo unitário $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Essa propriedade permite, por exemplo, a construção de fórmulas de quadratura no círculo unitário Γ. A transformação

$$x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$$

que trata-se de uma transformação do círculo unitário para o intervalo real $[-1, 1]$, através da qual pode-se relacionar polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ com polinômios para-ortogonais em Γ, nos permitiu estudar o problema de análise de freqüência utilizando polinômios para-ortogonais e, também, polinômios ortogonais. Baseados no comportamento das raízes e dos pesos das regras de quadratura associadas aos polinômios para-ortogonais e ortogonais, respectivamente, pode-se encontrar as freqüências e amplitudes do sinal trigonométrico.

Assim, dados N valores do sinal trigonométrico $x(m)$, para $m = 0, 1, \ldots, N-1$, construímos a medida $\psi_N(z)$, dada em (5.4), e obtemos várias maneiras de se resolver o problema de análise de freqüência, ou seja, de determinar o valor de n_0, as freqüências ω_j e as amplitudes γ_j.

A primeira delas é construir a seqüência de polinômios de Szegő com relação a $\psi_N(z)$ e, como no Teorema 5.2, obter os pontos de freqüência.

Outra maneira é calcular a seqüência de polinômios para-ortogonais $\rho_n(\psi_N, w, z)$ para diferentes valores de w e, utilizando os Teoremas 5.6 e 5.8, determinar n_0 e aproximar os valores dos pontos de freqüência $\xi_j = e^{i\omega_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n_0$ e os valores das amplitudes. Finalmente, como já dissemos no final do Capítulo 5, podemos calcular as raízes e os pesos da regra de quadratura associada aos polinômios $P_n^{(1)}(N, x)$ e, através dos Teoremas 5.11 e 5.12, determinar n_0 e aproximar os valores de $\xi_j = \cos(\omega_j/2)$, $j = 1, 2, \ldots, n_0$, e do módulo das amplitudes.

Uma proposta para trabalhos futuros é, por exemplo, estudar algoritmos para a obtenção dos pesos e nós das fórmulas de quadratura e tentar encontrar uma maneira de melhorar a velocidade de convergência de tais processos. Outro ponto interessante seria comparar os algoritmos existentes para a solução do problema de análise de freqüência através dos polinômios de Szegő com algoritmos utilizando polinômios ortogonais. Acreditamos ser possível obter resultados interessantes com o estudo do problema de análise de freqüência via polinômios ortogonais.

Referências Bibliográficas

[1] A. C. Berti, A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials: some applications, *Appl. Numer. Maths.*, 39 (2001) 127-149.

[2] C. F. Bracciali, D. K. Dimitrov, A. Sri Ranga, Chain sequence and symmetric generalized orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 143 (2002) 95-106.

[3] C. F. Bracciali, X. Li, A. Sri Ranga, Real orthogonal polynomials in frequency analysis, *Math. Comput.*, 74 (2005) 341-362.

[4] C. F. Bracciali, A. P. da Silva, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 153 (2003) 79-88.

[5] R. Bressan, S. F. Menegasso, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: quadrature rules on the unit circle and on [-1,1], *Rocky Mountain J. Math.*, 33(2) (2003) 567-584.

[6] T. S. Chihara, *Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and Its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[7] L. Daruis, O. Njåstad, W. Van Assche, Para-orthogonal polynomials in frequency analysis, *Rocky Mountain J. Math.*, 33 (2003) 629-645.

[8] P. Delsarte, Y. V. Genin, The Split Levinson Algorithm, *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Process*, 34 (1986) 470-478.

[9] D. G. Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.

[10] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Pergamon Press, Oxford, 1971.

[11] D. Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Carus Marth. Monographs, vol. 6, Math. Assoc. America, Washington, D.C., 1941.

[12] W. B. Jones, O. Njåstad, Applications of Szegő polynomials to digital signal processing, *Rocky Mountain J. Math.*, 21(1) (1991) 387-436.

[13] W. B. Jones, O. Njåstad, E. B. Saff, Szegő polynomials associated with Wiener-Levinson filters, *J. Comput. Appl. Math.*, 32 (1990) 387-406.

[14] W. B. Jones, O. Njåstad, W. J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature rules and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. London Math. Soc.*, 21 (1989) 113-152.

[15] W. B. Jones, V. Petersen, Continued fractions and Szegő polynomials in frequency analisys and related topics, *Acta Appl. Math.*, 61 (2000) 149-174.

[16] W. B. Jones, W. J. Thron, O. Njåstad, H. Waadeland, Szegő polynomials applied to frequency analysis, *J. Comput. Appl. Math.*, 46 (1993) 217-228.

[17] N. Levinson, The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction, *J. Math. Phys.*, 25 (1947) 261-278.

[18] K. Pan, E. B. Saff, Asymptotics for zeros of Szegő polynomials associated with trigonometric polynomials signals, *J. Approx. Theory*, 71 (1992) 239-251.

[19] A. Sri Ranga, Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123 (1995) 3136-3141.

[20] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 23, fourth ed., Providence, RI, 1975.

[21] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line, In: Field Istitute Communications 14:*Special Functions, q-series and Related Topics* (M.E.H. Ismail, *et al.*, eds.), Amer. Math. Soc., 1997, 211-245.

[22] N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, MIT Press, New York, 1949.

[23] A. Zhedanov, On some classes of polynomials orthogonal on arcs of the unit circle connected with symmetric orthogonal polynomials on an interval, *J. Approx. Theory*, 94 (1998) 73-106.