



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-D.008/12

**Estudo Analítico de Alguns Aspectos da Dinâmica na
Frente de Luz: Transformações de Lorentz, Sistemas de
Dois Corpos em Interação, Polarização do Vácuo e Integrais
de Feynman**

Luis Alberto Soriano Carrillo

Orientador

Alfredo Takashi Suzuki

Agosto de 2012

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por nunca me desamparar e estar sempre nos momentos mais difíceis da minha vida.

À minha esposa Nancy, por sempre me dar carinho, força, amor; como também pela sua compreensão e paciência o que tornou possíveis o desenvolvimento deste trabalho, e pelo grande presente que recebemos de Deus; que foi o nascimento de nossos filho Fernando. Graças a vocês meu mundo tem mais vida, razões, motivo e esperanças. Eu amo muito vocês.

Aos meus pais, Manuel e Ursula Antonia, por todo o apoio, compreensão e incentivo que me deram-me em cada momento da minha vida. Muito obrigado por me apoiarem em todas as minhas iniciativas e decisões.

Aos meus irmãos: Veronica, Antonio (In memoriam), Beatriz, Monica, pelo incentivo e constante preocupações. Muito obrigado meus irmãos eu sempre me lembrarei todo o seu apoio. Também, aos meus cunhados Sergio e Miguel, pelo carinho e amizade.

Aos meus sogros e também meus pais: papito Elias e mamita Adela; pelo carinho e amizade. Muito obrigado por todo seu apoio.

Ao Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki, pela oportunidade, pela orientação, pela amizade e pelo apoio; sem o qual não seria possível realizar este trabalho.

Ao Prof. Dr. B.M. Pimentel, pela amizade, pela sinceridade, conselhos, pelas valiosas sugestões e por toda sua ajuda. Muito obrigado professor.

Ao Prof. Dr. Jorge Henrique de Oliveira Sales, pela amizade, ajuda, pelas valiosas discussões que tivemos para a realização deste trabalho e pela acolhida na duas semanas que eu fiquei na Bahia. Também ao DCET-UESC-Bahia pela hospitalidade e a todos os bons Professores que eu conheci por lá: Prof. Luciana, Prof. German e Prof. Ricardo. Muito obrigados a todos.

A todos os professores que eu tive no IFT.

Aos amigos que conheci no IFT: Martin, Carlos, Daniel R., Daniel S., Alexander, Luisinho, Bruce, Flavia, Elaine, Juliana pela amizade e companherismo.

Ao grande amigo que conheci no Mestrado: Paulo José; pela sinceridade, camaradagem e pelas conversas valiosas no momentos de folgas.

Ao pessoal da secretaria de Pós-Graduação: Rosane, Luzinete, Meire e Vilma pela paciência e por toda ajuda que elas me deram ao logo desses quatro anos.

Ao pessoal da Biblioteca do IFT em particular a Neila e quem também fez parte desta equipe a Ana, pela amizade, pela boa vontade e paciência no atendimento.

A todos os funcionarios do IFT e todas as pessoas que direta o indiretamente me ajudaram a realizar este trabalho. Muito obrigado a todos
Agradeço à CAPES pelo essencial apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho discutimos vários aspectos da dinâmica relativística de partículas na forma frontal (frente de luz) assim como proposta por Dirac há mais de meio século.

Introduzimos nossas considerações pela transformação de Lorentz nas coordenadas da frente de luz, com o objetivo de vislumbrar a possibilidade de sugerir aquelas transformações nessas novas coordenadas. As transformações de Lorentz usuais, isto é, aquelas consideradas padrão no espaço-tempo de Minkowski $(x^0, \vec{x})$ com referenciais inerciais S e S' movendo-se com velocidade relativa ao longo dos eixos z/z' são tais que a coordenada tempo t' em S' é expressa em termos das coordenadas tempo t e espaço z em S ; e similarmente, a coordenada espaço z' em S' é expressa em termos das coordenadas tempo t e coordenada espaço z em S . Como as coordenadas da frente de luz são construídas pela combinação linear entre as coordenadas tempo (t) e coordenada espaço (z), espera-se que as transformações de Lorentz na frente de luz se manifestem conectando apenas coordenadas similares, isto é, tempo em S com tempo em S' e coordenada espacial em S com coordenada espacial em S' . Essa suspeita se confirma em nossa pesquisa e esse resultado é responsável pela introdução de profundas modificações nas estruturas algébricas das transformações. Demonstramos assim, novas maneiras, maneiras *sui generis* de expressar os resultados bem conhecidos da dilatação temporal e contração espacial.

O estudo do espalhamento de partículas sempre se constituiu numa ferramenta muito poderosa não somente para descrever as interações, mas também para compreender os processos físicos envolvidos em tais espalhamentos. Assim, usando o formalismo de coordenadas da frente de luz, calculamos a correção perturbativa de dois corpos a ordem $O(g^2)$ e a ordem $O(g^4)$, respectivamente. Este cálculo primeiro é feito para o caso de sistemas compostos por dois bósons em interação e em seguida para o caso de um sistema composto de dois bósons em interação com um campo de fundo. Também generalizamos essas correções para ordem $O(g^{2n})$. Para o caso de dois bósons interagindo com um campo de fundo, discutimos o processo de criação de par pelo fóton no referencial de Drell-Yan. Mostramos, para este caso, que não temos contribuição de modo zero.

Numa perspectiva mais técnica, analisamos também algumas sutilezas envolvendo as manipulações matemáticas nas coordenadas da frente de luz, em especial aspectos ligados ao modo zero e singularidades associadas a esse modo. Na frente de luz, tanto o propagador do fóton, quanto o propagador dos campos de matéria (férmions em

geral, mas em nosso caso específico, de elétrons e pósitrons), apresentam termos considerados “de contato”, ou seja, termos que não propagam informação. Nosso estudo focalizou especialmente em buscar elucidar o significado físico desses termos. Para tanto estudamos o tensor de polarização do vácuo para o fóton a um *loop* na frente de luz. Concluimos que no tratamento da sua regularização dimensional temos uma surpresa: usando a regularização dimensional, o tensor de polarização do vácuo resulta o mesmo, tanto para o propagador completo dos férmions (com o termo de contato incluso) quanto para o incompleto (somente o termo propagante). Usando o tensor de polarização, também testamos a identidade de Ward na frente de luz.

Ainda nessa vertente técnica, consideramos questões relacionadas com a ordem das integrações realizadas no espaço dos momentos para as integrais de Feynman na frente de luz. O uso de prescrições como a de Mandelstam-Leibbrandt exige que se inicie o cálculo pela componente q^+ dos momentos (que corresponde na convenção tradicional da frente de luz, à componente longitudinal do momento) para depois efetuar a integração na componente q^- (que corresponde à energia na frente de luz). Lembrando que no caso covariante, a integral na energia é que é sempre realizada em primeiro lugar, muitos tem advogado que assim também na frente de luz devemos iniciar os cálculos pela componente energia. Visando clarificar a questão, calculamos a integral do tipo *tadpole* na frente de luz, de duas maneiras diferentes: Começando em primeiro lugar fazendo a integração na variável q^- para depois realizar a integração na variável q^+ e vice-versa, começando pela integração em q^+ (mas sem usar a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt) para depois realizar a integração em q^- . Demonstramos que mesmo nesse simples exemplo, a mudança na ordem das integrações afeta o resultado final. Essas duas abordagens dão, aparentemente, dois resultados distintos e para solucionar esta ambiguidade, apresentamos uma possível solução, considerando a necessidade de incluir no cálculo, não somente as regiões do espaço de Fock com energia positiva (e momento positivo) - região das partículas - como também as regiões do espaço de Fock com energia negativa (momento negativo) - região das anti-partículas.

Palavras Chaves: Frente de Luz; Transformações de Lorentz; Propagação de Dois Bósons; Tensor de Polarização do vácuo.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos

Abstract

In this work we discuss several aspects of relativistic particle dynamics in the front form as proposed by Dirac more than half a century ago.

We introduce our considerations with Lorentz transformations in the light front coordinates, with the objective of seeing the possibility of expressing those transformations in the new coordinates. Usual Lorentz transformations, that is, those considered standard in the Minkowski space-time $(x^0, \vec{x})$ with inertial reference frames S and S' moving with relative velocity v along the z/z' direction are such that the time coordinate t' in S' is expressed in terms of both time coordinate t and space coordinate z in S ; and similarly, the longitudinal space coordinate z' in S' is also expressed in terms of both time coordinate t and space coordinate z in S . Since light front coordinates are defined as linear combinations of time coordinate (t) and space coordinate (z), we expect that the Lorentz transformations in the light front will manifest themselves connecting only similar coordinates, that is, time in S with time in S' and space coordinate in S with space coordinate in S' . This suspicion is confirmed in our research and this result is responsible for the profound modifications in the algebraic structures of the transformations. We thus show new *sui generis* ways of expressing the well-known results of time dilation and space contraction.

The study of particle scattering has always been a very powerful tool not only to describe the interactions but also to realize the physical processes involved in such scattering. So, using the light front formalism, we calculate the perturbative corrections for two body interactions to the order $O(g^2)$ and order $O(g^4)$ respectively. This calculation is first done for the case of systems composed by two interacting bosons, followed by the case of systems composed by two interacting bosons with a background field. We also generalize those corrections to general order $O(g^{2n})$. For the case of two interacting bosons with a background field, we discuss the process of pair production by the photon in the Drell-Yan frame. We show that in this particular case we do not have zero mode contributions.

In a more technical perspective, we also analyse some subtleties associated with mathematical manipulations in the light front, in special aspects related to zero modes and singularities associated to them. In the light front, both the photon propagator and the matter field propagators (fermion propagator in general, but in our specific case, of electrons and positrons), present what we call “contact terms”, which do not propagate physical information. Our study focused especially in se-

arching for a clarification as to the physical significance of such terms. For this purpose we studied the one-loop vacuum polarization tensor for the photon in the light front. We concluded that in the treatment of the dimensional regularization we have a surprise: using dimensional regularization, the vacuum polarization tensor results the same, both for the complete propagator for fermions (with the “contact term” included) and for the incomplete one (only with propagating term). Using the vacuum polarization tensor calculation, we also tested the Ward identity in the light front.

Still in the same technical line we considered questions related to the order of integrations in momentum space for the Feynman integrals in the light front. The use of Mandelstam-Leibbrandt prescription demands that one initiates the integration in the q^+ -component first (which corresponds to the longitudinal momentum in the traditional light front convention) and then integrate in the q^- -component (which corresponds to the energy in the light front). Remembering that in the covariant case, the energy integration is the one that is first done, many have advocated that in the light front we should do the same. In order to clarify the issue here, we calculated the tadpole type integral in the light front in two different ways: integrating first in the q^- variable and then in the q^+ and vice-versa (but without using the Mandelstam-Leibbrandt prescription). We show that even in this simple example, the change in the order of integration affects the outcoming result. These two approaches apparently give two distinct results and in order to solve this ambiguity, we present a possible solution considering the need to include in the computation, not only the regions of positive energy (and momentum) in the Fock space, but also regions of negative energy (momentum), regions that are associated with particles and anti-particles respectively.

Sumário

1	Introdução	1
2	Frente de Luz	5
2.1	Coordenadas na Frente de Luz	5
2.2	Transformação de Lorentz	7
2.2.1	<i>Boost</i> de Lorentz	7
2.2.2	<i>Boosts</i> na Frente de Luz	8
2.2.3	O Fator de Lorentz na Frente de Luz	8
2.2.4	Dilatação Temporal	12
2.2.5	Contração Espacial	14
2.2.6	Dilatação Temporal na Frente de Luz	15
2.2.7	Contração Espacial na Frente de Luz	17
2.2.8	Transformadas de Lorentz Próprias, Impróprias, Orto e Não- Ortocrônicas	18
2.2.9	Transformadas Próprias, Impróprias, Orto e Não-Ortocrônicas na Frente de Luz	20
3	O Propagador em Interação	24
3.1	Propagação de Dois Corpos com Troca de um Bóson Intermediário em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$	25
3.2	Propagação de Dois Corpos com Troca de dois Bósons Intermediários em Ordem $\mathcal{O}(g^4)$	30
3.3	Propagação de Dois Corpos com Troca de n Bósons Intermediários em Ordem $\mathcal{O}(g^{2n})$	38
4	O Propagador em Interação em um Campo de Fundo	40
4.1	Propagação de Dois Corpos Interagindo com um Campo Eletromagnético em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$	41
4.2	Propagação de Dois Corpos Interagindo com um Campo Eletromagnético em Ordem $\mathcal{O}(g^4)$	49

4.3	Propagação de Dois Corpos Interagindo com um Campo Eletromagnético em Ordem $\mathcal{O}(g^{2n})$	71
5	Corrente Eletromagnética	73
5.1	Cálculo da Corrente para o Propagador de Dois Corpos em um Campo de Fundo a Ordem $\mathcal{O}(g^2)$	74
5.2	Contribuição de Modo Zero em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$	78
5.3	Observação	83
5.4	Para n bósons intermediários e um Campo externo	84
6	Tensor de Polarização do Vácuo	85
6.1	A Função de 4 Pontos em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$	86
6.2	Correção a um <i>loop</i>	89
6.2.1	O Caso Incompleto	92
6.2.2	O Caso Completo	97
7	Integral de <i>Tadpole</i> na Frente de Luz	101
7.1	Integração em q^-	103
7.2	Integração em q^+	108
7.3	Observações	111
8	Conclusão	113
A	Apêndice do Capítulo 2	116
A.1	Propriedades na Frente de Luz	116
A.2	Elemento do Tensor Métrico na Frente de Luz	117
A.3	Fator de Lorentz na Frente de Luz	117
A.4	Transformada de Lorentz na Frente de Luz	119
A.5	Matriz da Transformação na Frente de Luz	123
B	Apêndice do Capítulo 3	125
B.1	Para Ordem $\mathcal{O}(g^2)$	125
B.2	Para Ordem $\mathcal{O}(g^4)$	131
C	Apêndice do Capítulo 4	146
C.1	Para Ordem $\mathcal{O}(g^2)$ com Fonte	146
C.2	Para Ordem $\mathcal{O}(g^4)$ com Fonte	155
D	Apêndice do Capítulo 5	195
D.1	Componentes do Operador Corrente	195

E	Apêndice do Capítulo 6	204
E.1	Propriedades das Matrizes de Dirac γ na Frente de Luz	204
E.2	Matriz γ^5 na Frente de Luz	205
E.3	Integrais Dimensionais	206
	Referências	208

Capítulo 1

Introdução

A descrição das interações de partículas pela teoria quântica de campos é uma das conquistas mais importantes da física teórica moderna. Existem pelo menos duas abordagens equivalentes utilizadas para esse fim: o formalismo lagrangiano e o formalismo hamiltoniano estendidos e generalizados da compreensão trazida da mecânica clássica newtoniana. Na formulação lagrangiana, as coordenadas do espaço e do tempo são tratadas em pé de igualdade, o que permite não só o tratamento no espaço de Minkowski como também no espaço euclidiano de quatro dimensões, por intermédio de uma rotação de Wick. Já na abordagem hamiltoniana, utiliza-se um parâmetro distinto para descrever a evolução temporal do sistema, o que o faz diferenciar das outras três coordenadas espaciais e a métrica de Minkowski está sempre subentendida. Entre as formulações hamiltonianas, destaca-se a formulação usual onde o tempo desempenha o parâmetro de evolução do sistema. Entretanto há também outras descrições possíveis da formulação hamiltoniana, escolhendo um outro parâmetro para a evolução temporal do sistema. Aqui, a descrição hamiltoniana na frente de luz tem atraído a atenção de muitos pesquisadores. Um dos ingredientes essenciais no estudo da teoria de campos na frente de luz é a descrição de sistemas dinâmicos que se deslocam com velocidades próximas à velocidade da luz. A descrição dos fenômenos para esses sistemas dinâmicos é feita utilizando-se o plano tangente ao cone de luz, daí a denominação frente de luz. Esse plano tangente é a combinação linear do tempo usual e de uma das coordenadas espaciais.

Em 1949 Dirac [1] propôs três diferentes formas dinâmicas para descrever as partículas relativísticas, dependendo do tipo de hipersuperfície escolhida para a evolução temporal do sistema. A dinâmica de forma instantânea é a usual, que consiste em especificar os dados iniciais (a posição inicial e a velocidade) sobre a superfície $x^0 = ct = \text{constante}$; a forma pontual, cuja superfície é especificado pelas condições iniciais em $x \cdot x = k^2$ com k constante e $x^0 > 0$, onde os dados são dados ao longo de um ramo de um hiperbolóide, e a terceira formulação proposta por

Dirac, a forma frontal, consiste em definir as condições iniciais sobre uma superfície tridimensional no espaço-tempo que é formado por um plano de frente de onda que avança com a velocidade da luz. Esta última forma também é comumente referida como frente de luz, definida por $x^+ = x^0 + x^3$ e $x^- = x^0 - x^3$, e a dinâmica neste sistema de coordenadas é chamada dinâmica da frente de luz. Na frente de luz a coordenada x^+ é geralmente considerada como o parâmetro de evolução temporal para o sistema. Na literatura encontramos trabalhos semelhantes que foram desenvolvidos de forma independente, e que são conhecidos como referencial de momento infinito [2, 3, 4, 5, 6, 7, 44]. Como o nome diz, nesse tipo de abordagem utiliza-se uma construção na forma instantânea, mas tomando o limite conveniente de uma das componentes do momento indo a infinito (normalmente a componente longitudinal do momento). Mas é importante ressaltar que a dinâmica da frente de luz e a do momento infinito não são equivalentes; na frente de luz, o parametro de evolução temporal é realizado não na coordenada usual t mas na coordenada x^+ , enquanto no referencial do momento infinito, o parametro de evolução temporal continua sendo a usual coordenada t .

Umas das vantagens de quantizar na frente de luz é que dos dez geradores de Poincaré [1, 9, 10], sete são cinemáticos na frente de luz, mas apenas seis na quantização a tempos iguais [1, 9, 10]. Destas dez quantidades fundamentais para o sistema dinâmico, alguns são simples e outros são complicados [1]. Simples no sentido que não contem interação que, de fato, deixam essas quantidades invariantes [1] e as complicadas são aquelas que envolvem o Hamiltoniano [1], ou seja, são dinâmicos, envolvendo a evolução do sistema.

Existem razões para se desejar quantizar as teorias de campos relativísticas na frente de luz. Uma delas é que o vácuo é simples [11, 12], problemas relacionados com o modo zero. Simples no sentido que o momento longitudinal é positivo definido, para o espectro das energias positivas. No caso de uma partícula livre com massa (*on-shell*) a relação de dispersão na frente de luz é dada por : $p^- = (\vec{p}_\perp^2 + m^2)(2p^+)^{-1}$. Como podemos ver a raiz quadrada não aparece, e a escolha de $p^+ > 0$ implicará uma energia positiva na frente de luz. Assim a representação no espaço de Fock na frente de luz tem uma estrutura mais simples [11]. Isto contrasta com o caso instantâneo, onde a relação de dispersão envolve uma relação irracional e o espectro de energias positivas não se correlaciona com o espectro dos momentos positivos univocamente.

A proposta de Dirac [1] estabeleceu a base para novos desenvolvimentos. Mas, este formalismo, como toda teoria, apresentam muitas sutilezas que merecem ser estudadas com muito cuidado. Nesta tese restringiremos nossa abordagem a problemas relacionados com a propagação de partículas na frente de luz, focalizando nossa

atenção nos processos envolvendo troca de bósons intermediários.

Problemas de renormalização na frente de luz estão associados intimamente com o processo de regularização dos infinitos, sejam de natureza infravermelha, sejam de natureza ultravioleta. As diversas abordagens para a implementação da regularização usando coordenadas na frente de luz, tem sido fortemente estudadas, como podemos citar algumas referências específicas nesse sentido, por exemplo, Hiller [13] que faz uso da regularização de Pauli-Villars para o cálculo não perturbativo de estados acoplados. Chabysheva e Hiller [14] usam a mesma regularização de Pauli-Villars [15] para os cálculos do estado do fóton não perturbado para uma base de Fock com um estado de fóton nu e estados de par elétron-pósitron. Suzuki et al. [16] por outro lado, usam a regularização dimensional no cálculo da auto-energia do fóton ao nível de um *loop*.

Este trabalho nasceu com o objetivo de se compreender com maior profundidade a dinâmica relativística na frente de luz. Com este objetivo, nosso trabalho é organizado da seguinte forma: No Capítulo 2 apresentamos a forma frente de luz da dinâmica relativística, proposta por Dirac [1]. Nesta nova forma de dinâmica ou frente de luz, como chamaremos daqui para a frente, definimos o momento canonicamente conjugado e o produto escalar de dois vetores, como também apresentamos, nessas coordenadas, a relação de dispersão entre energia e momento. Também, neste capítulo, discutimos as transformações de Lorentz. O objetivo de tal discussão tem em vista a possibilidade de sugerir essas transformações de Lorentz na frente de luz.

No Capítulo 3 fazemos uma revisão do propagador de dois bósons livres em interação em ordem g^2 e em ordem g^4 da constante de acoplamento. Obtemos todas as contribuições perturbativa ao propagador de dois corpos na frente de luz, em ordem g^2 e g^4

No Capítulo 4, calculamos o propagador de dois bósons em interação com um campo de fundo em ordem g^2 e em ordem g^4 na constante de acoplamento. Parte deste capítulo nos servirá como introdução para o Capítulo 5.

No Capítulo 5 realizamos o cálculo da corrente eletromagnética para o sistema composto por dois bósons em um campo de fundo a ordem g^2 da constante de acoplamento na frente de luz e derivamos os diagramas de produção de par. Mostramos que no referencial de Drell-Yan [17], $q^+ \rightarrow 0$, o termo de criação de par não sobrevive para a corrente J^- . Isso é uma indicação de que nesse particular caso, não há o aparecimento da contribuição do modo zero.

No Capítulo 6 calculamos o tensor de polarização do vácuo para o fóton na frente de luz. Exploramos alguns aspectos, quando fazemos o uso da regularização dimensional no cálculo da auto energia do fóton ao nível de um loop. No cálculo do propagador do férmion obtemos um resultado que não esperávamos, mas achamos

que vale a pena estudar com muito cuidado.

No Capítulo 7 mostramos duas diferentes maneiras de calcular a integral do tipo *tadpole*. Nestas duas abordagens obtemos, aparentemente, dois resultados distintos. Mas apresentaremos uma possível solução para esta aparente ambigüidade.

Capítulo 2

Frente de Luz

Em 1949, Dirac apresenta o seu famoso artigo sobre as Formas de Dinâmica Relativística [1], onde considera três tipos de dinâmica relativística dependente do tipo da hipersuperfície escolhida, isto é, a forma instantânea (ou instante), cuja superfície é especificada pelas condições iniciais em $x^0 = 0$, a forma de pontual, cuja superfície é uma hipérbole, e são especificados pelas condições iniciais em $x_\mu x^\mu = k^2$, com k constante e $x^0 > 0$, a forma frontal, cuja superfície é tangente ao cone de luz, que é definido pelas condições iniciais em $x^0 + x^3 = 0$.

Nesta seção apresentamos, brevemente, as definições das coordenadas na frente de luz e expressamos, nessas novas coordenadas, os momentos canonicamente conjugados, o produto escalar de dois quadrivetores e a relação de dispersão entre energia e momento.

2.1 Coordenadas na Frente de Luz

As coordenadas na frente de luz são definidas pela combinação das coordenadas do espaço-tempo de Minkowski, isto é, da coordenada espacial, $z = x^3$, com a temporal, $ct = x^0$, isto é:

$$\begin{aligned}x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), \\x^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3), \\ \vec{x}_\perp &= x^1 \vec{i} + x^2 \vec{j}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

No formalismo da frente de luz x^+ é escolhido para ser o parâmetro de evolução temporal e x^- a coordenada espacial longitudinal. As componentes do tensor

métrico, $g^{\mu\nu}$, na frente de luz, podem ser obtidas de [18] (Ver apêndice A)

$$g^{+\nu} = \frac{g^{0\nu} + g^{3\nu}}{\sqrt{2}}, \quad (2.2)$$

onde $g^{0\nu}$ e $g^{3\nu}$ são as componentes do tensor métrico no espaço de Minkowski, ou expressa na forma matricial

$$g^{\mu\nu} = \begin{matrix} & + & - & 1 & 2 \\ \begin{matrix} + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (2.3)$$

Os momentos canonicamente conjugados, na frente de luz são definidos por:

$$\begin{aligned} k^+ &= \frac{k^0 + k^3}{\sqrt{2}}, \\ k^- &= \frac{k^0 - k^3}{\sqrt{2}}, \\ \vec{k} &= k^1 \hat{i} + k^2 \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

O produto escalar de dois quadrivetores, nas coordenadas de frente de luz, tem a forma

$$\begin{aligned} v^\mu w_\mu &= v^+ w_+ + v^- w_- + v^i w_i \\ &= v^+ w^- + v^- w^+ - v_\perp w_\perp, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $v_\perp$ e $w_\perp$ são as componentes transversais dos quadrivetores.

No espaço-tempo de Minkowski, a invariabilidade da massa é dada pela relação entre o produto escalar do quadrimomento k^μ e a massa em repouso, $k^\mu k_\mu = m^2$. Fazendo uso da equação (2.5) o quadrado do momento se escreve como:

$$\begin{aligned} k^\mu k_\mu &= k^+ k^- + k^- k^+ - k^i k^i \\ &= 2k^+ k^- - k_\perp^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Isso nos leva à relação de dispersão de energia-momento, isto é.:

$$k^- = \frac{k_\perp^2 + m^2}{2k^+}. \quad (2.7)$$

Observamos que a energia k^0 no espaço de Minkowski tem uma dependência quadrática dada por $k^0 = \pm \sqrt{m^2 c^2 + \vec{k}^2}$. Nas coordenadas da frente de luz, não há mais essa dependência quadrática. Vemos que a nova hamiltoniana k^- tem uma dependência linear com $(k^+)^{-1}$. Isso significa que podemos evitar energias negativas simplesmente escolhendo adequadamente os valores para as variáveis dinâmicas, tal como foi previsto por Dirac.

2.2 Transformação de Lorentz

A relatividade restrita é baseada em dois postulados fundamentais, i.e.: (1) As leis físicas são as mesmas em quaisquer referenciais inerciais. (2) A velocidade da luz no vácuo é independente de qualquer referencial inercial. Assim a relatividade especial impõe que as medidas do intervalo entre eventos não deve depender do tipo de equipamento usado para medi-las nem do evento analisado. Porém, uma mudança de coordenadas do espaço de Minkowski para a frente de luz apresenta resultados que valem a pena considerarmos.

O Princípio da relatividade foi primeiramente formulado por Galileo e funciona muito bem quando estudamos sistemas se movendo com velocidades muito pequenas comparadas com a velocidade da luz no vácuo. Entretanto, este princípio apresenta problemas quando lidamos com sistemas se movendo com velocidades muito próximas à velocidade da luz, onde a mecânica Newtoniana é incapaz de ser harmonizada com a experiência. Um caso muito conhecido deste problema é a teoria de Maxwell, cuja interpretação não se coaduna com o que era esperado na mecânica newtoniana.

Este dilema foi resolvido quando se introduziu um fator de correção, chamado fator de Lorentz, que depende da velocidade. Na relatividade Galileana, este fator é igual a um. Deste modo, a relatividade especial nasceu como uma necessidade de entender o comportamento de sistemas dinâmicos movendo-se a velocidades próximas à velocidade da luz.

A generalização da relatividade Galileana implicou a generalização dos grupos de transformação, chamado de transformações de Lorentz. Assim, a transformação Galileana torna-se um caso particular da transformação de Lorentz. Mas, a nossa questão é: Podemos sugerir a transformada de Lorentz na frente de luz? Na seguinte seção, tentamos responder esta pergunta.

2.2.1 *Boost* de Lorentz

Consideramos dois referenciais inerciais, um S , com coordenadas espaço-temporais (t, x, y, z) e outro S' , com coordenadas espaço-temporais (t', x', y', z') , se movendo com velocidade relativa v em relação a S . Para simplicidade, tomamos v ao longo da direção z , de modo que as coordenadas transversais no *Boost* de Lorentz são dadas por $x' = x$ e $y' = y$. Então, os dois sistemas são relacionados um ao outro através da transformação de Lorentz, a partir de S para S' e vice-versa

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right), & t &= \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} z' \right), \\ z' &= \gamma (z - vt), & z &= \gamma (z' + vt'), \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde, γ é o fator de Lorentz, i.é., $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ com $\beta = \frac{v}{c}$.

Por outro lado, nós também podemos expressar a transformação de Lorentz e sua inversa em termos das funções hiperbólicas [19] , i.e.:

$$\begin{aligned} t' &= t \cosh \omega - \frac{z}{c} \sinh \omega, & t &= t' \cosh \omega + \frac{z'}{c} \sinh \omega, \\ z' &= z \cosh \omega - ct \sinh \omega, & z &= z' \cosh \omega + ct' \sinh \omega, \end{aligned} \quad (2.9)$$

de modo que quando fazemos $\tanh \omega = \frac{v}{c}$ na Eq (2.9), obtemos a expressão (2.8). Notamos da Eq (2.9) ou (2.8) que as coordenada espacial z é misturada com a temporal t .

2.2.2 *Boosts* na Frente de Luz

Fazendo uso da expressão (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} x'^+ &= x^+ \cosh \omega - x^+ \sinh \omega, \\ x'^- &= x^- \cosh \omega + x^- \sinh \omega. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A expressão acima foi obtida somando-se as componentes z' com ct' . Note aqui a peculiaridade: x'^+ agora depende somente de x^+ e de ω , mas não mais de x^- , a coordenada espacial longitudinal, como acontece na forma instante. De modo semelhante, x'^- agora depende somente de x^- e de ω , mas não mais de x^+ , como acontece na forma instante. Em seguida, com a ajuda das seguintes relações hiperbólicas, $\sinh \omega = \frac{1}{2}(e^\omega - e^{-\omega})$ e $\cosh \omega = \frac{1}{2}(e^\omega + e^{-\omega})$, a Eq. (2.10), torna-se

$$\begin{aligned} (a) \ x'^+ &= e^{-\omega} x^+, & (b) \ x'^- &= e^\omega x^-, \\ (c) \ x^+ &= e^\omega x'^+, & (d) \ x^- &= e^{-\omega} x'^-. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por outro lado, pelo fato de que $\tanh \omega = \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{e^\omega + e^{-\omega}} = \frac{v}{c}$, temos:

$$\omega = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right), \quad (2.12)$$

onde ω , é chamado de fator de escala. Podemos ver da Eq. (2.11) que o boost na direção x^3 não mistura espaço e tempo da frente de luz, mas sim reescala as coordenadas [20]. Podemos observar de (2.11) que x^+ e x^- são reescaladas inversamente uma em relação a outra.

2.2.3 O Fator de Lorentz na Frente de Luz

Tendo como referência a transformada de Lorentz (2.8) para a coordenada tempo, e sendo que em (2.11) o tempo na frente de luz não se mistura com a componente espacial x^- , podemos sugerir a transformada de Lorentz para a frente de luz utilizando

o seguinte *ansatz*

$$\begin{aligned} (e) \ x'^+ &= \tilde{\gamma} \left(x^+ - \frac{v}{c} x^+ \right), & (f) \ x'^- &= \tilde{\gamma} \left(x^- + \frac{v}{c} x^- \right), \\ (g) \ x^+ &= \tilde{\gamma} \left(x'^+ + \frac{v}{c} x'^+ \right), & (h) \ x^- &= \tilde{\gamma} \left(x'^- - \frac{v}{c} x'^- \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde, é claro, $\vec{x}' \perp = \vec{x} \perp$ e introduzimos $\tilde{\gamma}$ como um fator qualquer que nós desejamos conhecer. Temos aqui em (2.13) uma sutileza; vejamos por exemplo, que em (2.13e) escrevemos $x'^+ = \tilde{\gamma} \left(x^+ - \frac{v}{c} x^+ \right)$ seguindo a sugestão indicativa em (2.8). Mas a razão aqui é v/c ao invés de ser v/c^2 como em (2.8). Por que? A resposta é simples na realidade; é para manter a dimensão da unidade temporal, pois em (2.11a) só temos componente temporal na frente de luz. Desta forma fica justificada essa nossa escolha da razão v/c e não v/c^2 em contraste com a expressão sugestiva no coeficiente da coordenada z em (2.8).

Por outro lado, comparando (2.11) com (2.13) obtemos uma expressão para $\tilde{\gamma}$ (Para mais detalhes ver apêndice A), i.é.:

$$\begin{aligned} \gamma^> &= \tilde{\gamma} = \frac{e^\omega}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}, \\ \gamma^< &= \tilde{\gamma} = \frac{e^{-\omega}}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Portanto, a equação (2.13) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x'^+ &= \gamma^< \left(x^+ - \frac{v}{c} x^+ \right), & x'^- &= \gamma^> \left(x^- + \frac{v}{c} x^- \right), \\ x^+ &= \gamma^> \left(x'^+ + \frac{v}{c} x'^+ \right), & x^- &= \gamma^< \left(x'^- - \frac{v}{c} x'^- \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Este resultado é uma surpresa para nós, já que encontramos uma nova forma de expressar algebricamente o fator de Lorentz, e que nós simbolizamos daqui para frente como $\gamma^>$ e $\gamma^<$. Surpresa porque aparentemente temos dois fatores algebricamente diferentes, um para o tempo e outro para a coordenada longitudinal na frente de luz.

Deste resultado podemos afirmar o seguinte:

- Se um observador estiver no referencial da coordenada x^+ em S , ele vai observar que o sistema de referência na coordenada em x'^+ em S' é afetado por um fator $\gamma^> = \frac{e^\omega}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$;
- No entanto, se um observador estiver no referencial da coordenada x^- em S , ele vai observar que o sistema de referência na coordenada em x'^- em S' é afetado por um fator $\gamma^< = \frac{e^{-\omega}}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$;
- Também observamos que o produto dos gamas, $\gamma^>$ e $\gamma^<$, é igual ao quadrado do fator de Lorentz, γ^2 , isto é, $\gamma^> \cdot \gamma^< = \gamma^2$;

- Por último, os fatores $\gamma^>$, $\gamma^<$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ são, na realidade, equivalentes numericamente, conforme pode ser visto nos gráficos respectivos (ver figuras 2.1, 2.2, 2.3). Os gráficos mostram que apesar de os fatores $\gamma^>$, $\gamma^<$ e γ serem aparentemente funções matematicamente distintas, seu comportamento em termos da velocidade é exatamente o mesmo!

Os Graficos Para $\gamma^>$, $\gamma^<$ e o gama usual γ

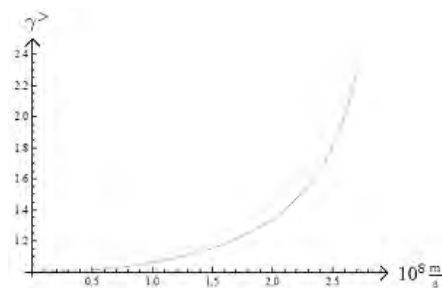


Figura 2.1: O Comportamento de $\gamma^>$, com velocidade variando de 0 a $2.9 \times 10^8 m/s$

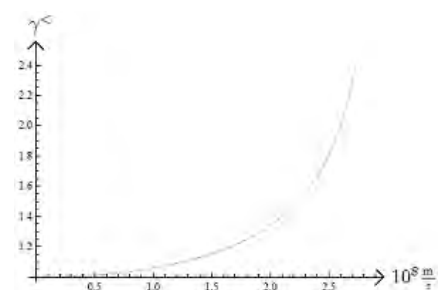


Figura 2.2: O Comportamento de $\gamma^<$, com velocidade variando de 0 a $2.9 \times 10^8 m/s$

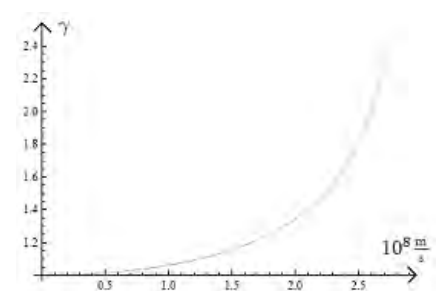


Figura 2.3: O Comportamento de γ , com velocidade variando de 0 a $2.9 \times 10^8 m/s$

Os gráficos 2.1-2.3 indicam que os $\gamma^>$ e $\gamma^<$ são os mesmos que os gamas de Lorentz, isso pode ser verificado quando se usa propriedade dos logaritmos, isto é

$$\begin{aligned}\gamma^> &= \frac{e^\omega}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} \\ &= \frac{e^{\ln\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{1/2}}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Assim, de $\gamma^>$ ou $\gamma^<$ chegamos ao factor de Lorentz usual. Vemos que temos outra forma, algébrica, como também formal, de expressar o fator de Lorentz em termo do fator de escala ω

2.2.4 Dilatação Temporal

A transformação de Lorentz do referencial S para S' com velocidade relativa v entre eles na direção ao longo dos eixos z e z' é dada por

$$\begin{aligned}a) \quad t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right), \\ b) \quad z' &= \gamma (z - vt),\end{aligned}\tag{2.17}$$

e sua inversa

$$\begin{aligned}c) \quad t &= \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} z' \right), \\ d) \quad z &= \gamma (z' + vt').\end{aligned}\tag{2.18}$$

Vamos imaginar que temos dois referenciais S e S' na configuração padrão, o que significa que S' se move com velocidade v no sentido positivo do eixo z (quando visto no referencial S), e no instante $t = 0$ as origens de ambos sistemas coincidem. Vamos também imaginar que temos em S' um relógio de luz (onde estamos considerando que o relógio de luz está parado no referencial S'). No referencial S' consideramos os eventos de emissão de feixe de luz em direção a um espelho (que está acima do relógio de luz) que vai refleti-lo, e um segundo evento de recepção do feixe de luz de volta à posição de onde foi emitido.

Então, dito de maneira explícita, os eventos que estamos considerando são: Emissão do feixe (E) e Recepção do feixe (R).

Agora vamos escrever quais são as coordenadas espaço-temporais desses eventos no referencial S' :

- No referencial S' temos um evento de emissão, que acontece na posição z'_E e no instante t'_E .
- O evento de recepção acontece na posição z'_R e num instante posterior t'_R , em o feixe é recebido de volta. Está claro, portanto, que nesse referencial, a emissão e a recepção ocorrem no mesmo lugar, portanto $z'_R = z'_E$.

A diferença entre t'_R e t'_E é $\Delta t' = t'_R - t'_E$ que neste caso é o intervalo de tempo próprio. Agora vamos usar a transformação de Lorentz para saber quem é o intervalo de tempo, $\Delta t = t_R - t_E$, que decorre entre esses dois eventos medido por um observador no referencial S . A transformação de Lorentz vai relacionar os referenciais S com S' , ou seja, esta transformação nos relaciona as coordenadas espaço-temporais linha com as coordenadas espaço-temporais sem linha. Isto é:

$$\begin{aligned} t_E &= \gamma \left(t'_E + \frac{v}{c^2} z'_E \right) \\ t_R &= \gamma \left(t'_R + \frac{v}{c^2} z'_R \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

A expressão (2.19) foi obtida usando (2.18c). Como nós queremos saber quem é o intervalo de tempo $\Delta t = t_R - t_E$ entre os dois eventos medido no referencial S , calculamos a diferença entre essas duas quantidades dadas em (2.19). Assim obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_R - t_E \\ &= \gamma \left\{ (t'_R - t'_E) - \frac{v}{c^2} (z'_R - z'_E) \right\} \\ &= \gamma \left\{ \Delta t' - \frac{v}{c^2} \Delta z' \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde a segunda parcela de (2.20) se anula devido a fato de que z'_E e z'_R são coincidentes. Então temos:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (2.21)$$

Desta forma obtemos o intervalo de tempo medido no referencial S que é γ vezes o intervalo de tempo próprio; sendo γ um número maior que um. Dito de outra forma o intervalo de tempo medido no referencial S será maior do que o intervalo de tempo medido no referencial S' , maior por um fator γ .

É interessante observar que aqui temos um outro ingrediente que vale a pena levar-se em conta.

- Para este problema usamos desde o início a condição de que os eventos ocorrem no mesmo lugar em S' , ou seja z'_E e z'_R são coincidentes e portanto, $\Delta z' = 0$. Esta condição nos leva à outra condição a mais. Vamos ver que com a ajuda da equação (2.17b), obtemos essa outra condição para a dilatação temporal:

$$\text{Se } \Delta z' = 0 \rightarrow \Delta z = v\Delta t. \quad (2.22)$$

A condição (2.22) foi obtida de (2.17b). Esta condição será útil quando trabalharmos nas coordenadas de frente de luz.

2.2.5 Contração Espacial

Agora suponhamos que estamos no referencial S' e nesse referencial temos uma régua com comprimento l' parada. Se ela está parada no referencial S' , então do ponto de vista de medida de comprimento, S' é um referencial próprio; o comprimento da régua nesse referencial é o comprimento próprio, que chamaremos de l_0 . O comprimento próprio é a diferença das posições entre as extremidades direita e esquerda da régua. Ou seja, $l_0 = \Delta z' = z'_D - z'_E$.

Por outro lado, em um referencial S , queremos medir as posições z_D e z_E , que são as extremidades direita e esquerda da régua no referencial S , e no mesmo instante de tempo. Já que só assim conseguimos medir o comprimento em um referencial com relação ao qual o objeto está em movimento. Isto quer dizer, que em S vamos medir a posição z_D , no tempo t_D e a posição z_E no tempo t_E , mas devido a que temos que medir as duas posições no mesmo instante de tempo no referencial S , temos que $t_D = t_E$.

Em seguida, vamos a relacionar as diferenças entre as duas posições do referencial S , com a diferença entre as duas posições do referencial S' . Para isso vamos usar as transformações de Lorentz (2.17b) obtendo:

$$\begin{aligned} z'_D &= \gamma(z_D - vt_D) \\ z'_E &= \gamma(z_E - vt_E). \end{aligned} \quad (2.23)$$

A diferença entre esses dois valores fica

$$\begin{aligned} \Delta z' &= z'_D - z'_E \\ &= \gamma \{ (z_D - z_E) - v(t_D - t_E) \} \\ l_0 &= \gamma \{ \Delta z - v\Delta t \}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Então como mencionamos acima, para medir o comprimento no referencial S , é necessário medir as posições no mesmo instante de tempo, portanto $\Delta t = t_D - t_E = 0$. Desta forma obtemos de (2.24)

$$\begin{aligned} l_0 &= \gamma \Delta z \\ &= \gamma l, \end{aligned} \tag{2.25}$$

ou

$$l = \frac{l_0}{\gamma}. \tag{2.26}$$

Ou seja, o comprimento medido no referencial S é igual ao comprimento medido no referencial S' dividido por γ . Como $\gamma > 1$ temos que o comprimento medido em S será menor ao comprimento medido em S' . Este é o que chamamos de contração do comprimento.

Da mesma forma que acima foi mencionado, aqui também temos um outro ingrediente importante.

- Para esta situação, usamos desde o início a condição de que o evento ocorre no mesmo instante do tempo, ou seja t_D e t_E são coincidentes e portanto, $\Delta t = t_D - t_E = 0$. Esta condição nos leva à outra condição a partir da equação (2.18c). Esta outra condição para a contração de comprimento nos diz:

$$\text{Se } \Delta t = 0 \rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta z'. \tag{2.27}$$

Lembrando que a condição (2.27) foi obtida de (2.18c). Esta condição será também útil quando trabalharmos nas coordenada de frente de luz.

2.2.6 Dilatação Temporal na Frente de Luz

Considere os mesmos dois sistemas de referencia inerciais, S e S' , com S' movendo-se a uma velocidade constante v na direção z/z' , e um evento que ocorre no sistema S' , nas posições inicial e final, $x_i'^-$ e $x_f'^-$, e tempos inicial e final $x_i'^+$ e $x_f'^+$, respectivamente, dados agora nas coordenadas da frente de luz. O mesmo evento é visto por um observador em S nas posições inicial e final x_i^- e x_f^- , entre os tempos inicial e final, x_i^+ e x_f^+ , respectivamente. Então, utilizando a Eq. (2.15), temos que:

$$\begin{aligned}
x_f^+ - x_i^+ &= \gamma^> \left\{ \left[x_f'^+ + \frac{v}{c} x_f'^+ \right] - \left[x_i'^+ + \frac{v}{c} x_i'^+ \right] \right\} \\
\Delta x^+ &= \gamma^> \Delta x'^+ \left\{ 1 + \frac{v}{c} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Considerando que a medida do tempo no referencial S' é feita usando relógios localizados em posições definidas, e que estão em repouso em relação a S' , o intervalo de tempo correspondente em S , será dado por

$$\Delta x^+ = e^\omega \Delta x'^+. \tag{2.29}$$

Para o observador em S , portanto, o intervalo de tempo está dilatado quando comparado com o mesmo intervalo de tempo medido no referencial S' .

Deste resultado podemos obter a dilatação temporal no espaço de Minkowski. Reescrevemos a expressão acima na forma:

$$c\Delta t + \Delta z = e^\omega (c\Delta t' + \Delta z'). \tag{2.30}$$

Lembrando que para este caso consideramos os eventos em S' acontecendo no mesmo local, i.é, $\Delta z' = 0$, a equação (2.30) se torna

$$c\Delta t + \Delta z = e^\omega c\Delta t'. \tag{2.31}$$

Utilizando agora o fato de que a condição $\Delta z' = 0$, implica a Eq. (2.22), isto é, $\Delta z = v\Delta t$, que substituído em (2.31), nos leva a:

$$c\Delta t + v\Delta t = e^\omega c\Delta t', \tag{2.32}$$

ou, fatorando o termo comum $c\Delta t$

$$c\Delta t \left(1 + \frac{v}{c} \right) = e^\omega c\Delta t', \tag{2.33}$$

resulta em

$$\Delta t = \frac{e^\omega}{\left(1 + \frac{v}{c} \right)} \Delta t', \tag{2.34}$$

ou utilizando nossa notação para $\gamma^>$

$$\Delta t = \gamma^> \Delta t' \tag{2.35}$$

em que $\gamma^> = \frac{e^\omega}{\left(1 + \frac{v}{c} \right)}$, é o nosso fator de Lorentz na frente de luz. Ou seja chegamos ao resultado da dilatação temporal, que é conhecido por todos nós, mas agora expressa por um outro coeficiente não tão familiar!

2.2.7 Contração Espacial na Frente de Luz

Sejam $x_i'^-$ e $x_f'^-$ as respectivas posições inicial e final de uma barra em repouso no sistema de referencia em movimento S' . Sejam, também x_i^- e x_f^- as respectivas posições inicial e final da mesma barra, medida no sistema de referência em repouso S . Logo de (2.15), temos:

$$\begin{aligned} x_f'^- - x_i'^- &= \gamma^> \left\{ \left[x_f^- + \frac{v}{c} x_f^- \right] - \left[x_i^- + \frac{v}{c} x_i^- \right] \right\} \\ \Delta x'^- &= \gamma^> \Delta x^- \left\{ 1 + \frac{v}{c} \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

o que implica

$$\Delta x'^- = e^\omega \Delta x^- \rightarrow \Delta x^- = e^{-\omega} \Delta x'^-. \quad (2.37)$$

Isso significa que o comprimento da barra medida no sistema de referencia em repouso está contraído quando comparado com seu comprimento medido no sistema em movimento S' .

Reescrevendo a equação acima, $\Delta x^- = e^{-\omega} \Delta x'^-$, temos:

$$c\Delta t - \Delta z = e^{-\omega} (c\Delta t' - \Delta z'). \quad (2.38)$$

Para esse particular caso, utilizamos a condição de que os eventos acontecem no mesmo instante de tempo em S , ou seja, $\Delta t = 0$. Portanto

$$-\Delta z = e^{-\omega} (c\Delta t' - \Delta z'). \quad (2.39)$$

Lembrando que a condição de simultaneidade no instante de medida em S , ou seja, $\Delta t = 0$ no espaço de Minkowski, implica em outra condição dada pela Eq. (2.27), ou seja, $c\Delta t' = -\frac{v}{c}\Delta z'$; e essa condição implementada em (2.39) nos leva a

$$-\Delta z = e^{-\omega} \left(-\frac{v}{c}\Delta z' - \Delta z' \right), \quad (2.40)$$

ou, de maneira equivalente

$$\Delta z = e^{-\omega} \left(\frac{v}{c} + 1 \right) \Delta z', \quad (2.41)$$

o que implica

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{\Delta z'}{\frac{e^\omega}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}} \\ \Delta z &= \frac{\Delta z'}{\gamma^>}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que utilizamos nossa notação $\gamma^> = \frac{e^\omega}{(1+\frac{v}{c})}$. Fazendo $\Delta z' = l_0$, que é o comprimento próprio e $\Delta z = l$, comprimento medido pelo observador no referencial em S , temos finalmente:

$$l = \frac{l_0}{\gamma^>}. \quad (2.43)$$

Desta forma, conseguimos reproduzir a contração do comprimento no espaço de Minkowski, expresso agora por um fator gama que não é tão comum algebricamente!

2.2.8 Transformadas de Lorentz Próprias, Impróprias, Orto e Não-Ortocrônicas

De um modo geral a matriz da transformação de Lorentz, no espaço de Minkowski, é dada pela transformação linear [21]

$$x'^\mu = L^\mu_\alpha x^\alpha, \quad (2.44)$$

onde L^μ_α é a matriz da transformação, e as letras gregas μ e α denotam as linhas e colunas respectivamente dessa matriz. Além disso a invariabilidade no espaço-tempo, requer que ela preserve o produto escalar [21], ou seja:

$$x'^\mu y'_\mu = x^\alpha y_\alpha. \quad (2.45)$$

O que implica que as matrizes L preservem a métrica g , ou seja

$$L^\mu_\alpha g_{\beta\mu} L^\beta_\rho = g_{\alpha\rho}. \quad (2.46)$$

A relação (2.46) é obtida substituindo (2.44) em (2.45) e fazendo uso da relação $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$. Por outro lado, a relação (2.46) implica que o determinante de uma matriz ortogonal só pode assumir certos valores restritos, i.é., só pode ter determinante igual a $+1$ ou -1 . De fato tomando o determinante da expressão (2.46)

$$(\det L) (\det g) (\det L) = (\det L)^2 (\det g) = \det g, \quad (2.47)$$

obtemos

$$\det L = \pm 1 \quad (2.48)$$

Quando $\det L = +1$ a transformação se chama própria ou contínua, enquanto que se $\det L = -1$ ela se chama imprópria ou descontínua [21]. Além dessa classificação de L pelo sinal do seu determinante, existe uma outra que envolve o elemento L^0_0 . Usando-se o tensor métrico com a seguinte convenção de sinais,

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

obtemos de (2.46)

$$\left(L_0^0\right)^2 = 1 + \sum_1^3 \left(L_0^k\right)^2, \quad (2.50)$$

o que implica que L_0^0 tenha os seguintes valores [21],

$$L_0^0 \geq +1, \quad (2.51)$$

ou

$$L_0^0 \leq -1. \quad (2.52)$$

Quando $L_0^0 \geq +1$, a transformação se chama ortocronica, pois ela não inverte o sinal do tempo. Se $L_0^0 \leq -1$, a transformação se denomina Não-Ortocronica ou heterocronica.

Considerando-se as observações acima, podemos ter então as seguinte classificações para L :

1. $L \uparrow\uparrow$ ($\det L = +1$ e $L_0^0 \geq +1$): Transformação de Lorentz Própria e Ortocrônica;
2. $L \uparrow\downarrow$ ($\det L = +1$ e $L_0^0 \leq -1$): Transformação de Lorentz Própria e Não-Ortocrônica;
3. $L \downarrow\uparrow$ ($\det L = -1$ e $L_0^0 \geq +1$): Transformação de Lorentz Imprópria e Ortocrônica;
4. $L \downarrow\downarrow$ ($\det L = -1$ e $L_0^0 \leq -1$): Transformação de Lorentz Imprópria e Não-Ortocrônica.

Observa-se que desses 4 tipos de L , apenas o $L \uparrow\uparrow$ forma um grupo, conhecido como grupo de Lorentz. Os demais não formam um grupo por não conterem o elemento unidade. Contudo, pode-se formar grupos com a união de $L \uparrow\uparrow$ com os outros três tipos, da seguinte maneira:

$$L \uparrow\uparrow \cup L \uparrow\downarrow; L \uparrow\uparrow \cup L \downarrow\uparrow \text{ e } L \uparrow\uparrow \cup L \downarrow\downarrow. \quad (2.53)$$

No caso da transformação de Lorentz representada pela expressão

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (2.54)$$

onde

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

temos que é do tipo $L \uparrow\uparrow$.

2.2.9 Transformadas Próprias, Impróprias, Orto e Não-Ortocrônicas na Frente de Luz

Vamos proceder de maneira muito similar como visto acima, porém agora na frente de luz. Então, fazendo uso da expressão (2.44),

$$x'^{\mu} = L_{\alpha}^{\mu} x^{\alpha},$$

nas coordenadas da frente de luz temos:

$$x'^{+} = L_{+}^{+} x^{+} + L_{-}^{+} x^{-} + \sum_{j=1}^2 L_j^{+} x^j, \quad (2.56)$$

$$x'^{-} = L_{+}^{-} x^{+} + L_{-}^{-} x^{-} + \sum_{j=1}^2 L_j^{-} x^j, \quad (2.57)$$

$$x'^i = L_{+}^i x^{+} + L_{-}^i x^{-} + \sum_{j=1}^2 L_j^i x^j. \quad (2.58)$$

Por outro lado, é dita uma transformação de Lorentz se é preservada o produto escalar,

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = x^{\alpha} y_{\alpha}.$$

Então vamos ver como este se comporta na frente de luz. Usando (2.45) o lado esquerdo pode ser escrito sob a forma

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = x'^{+} g_{+-} y'^{-} + x'^{-} g_{-+} y'^{+} + \sum_{i=1}^2 x'^i g_{ij} y'^j, \quad (2.59)$$

enquanto o lado direito fica igualmente

$$x^{\alpha} y_{\alpha} = x^{+} g_{+-} y^{-} + x^{-} g_{-+} y^{+} + \sum_{j=1}^2 x^j g_{ij} y^i. \quad (2.60)$$

Logo fazendo uso de:

$$x_+ = g_{+-}x^-, \quad x_- = g_{-+}x^+, \quad x_i = g_{ij}x^j, \quad (2.61)$$

nas equações (2.59) e (2.60) encontramos as seguintes identidades, (ver o apêndice A)

$$L_+^+ g_{+-} L_-^- + L_+^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho g_{\rho\tau} L_-^\tau = g_{+-} \quad (2.62)$$

$$L_-^+ g_{+-} L_+^- + L_-^- g_{-+} L_+^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho g_{\rho\tau} L_+^\tau = g_{-+} \quad (2.63)$$

$$L_i^+ g_{+-} L_j^- + L_i^- g_{-+} L_j^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_i^\rho g_{\rho\tau} L_j^\tau = g_{ij}. \quad (2.64)$$

Observamos que as equações (2.62), (2.63) e (2.64) poderão ser escritas em uma forma mais compacta, ou seja:

$$L_\alpha^\mu g_{\mu\nu} L_\rho^\nu = g_{\alpha\rho}, \quad (2.65)$$

onde $\mu, \nu, \alpha, \rho = +, -, i, j$ com $(i, j = 1, 2)$. Vamos, agora, calcular o determinante da expressão (2.65):

$$\begin{aligned} (\det L) (\det g) (\det L) &= (\det g) \\ (\det L) (-1) (\det L) &= -1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Desta maneira obtemos de (2.66)

$$(\det L)^2 = 1, \quad (2.67)$$

o que implica em

$$(\det L) = \pm 1. \quad (2.68)$$

Em seguida como em (2.50), mas agora, ao invés de fazer $\alpha = 0$ e $\rho = 0$, fazemos $\alpha = +$ e $\rho = -$ na relação $L_\alpha^\mu g_{\mu\nu} L_\rho^\nu = g_{\alpha\rho}$, ou seja:

$$L_+^\mu g_{\mu\nu} L_-^\nu = g_{+-}. \quad (2.69)$$

Dessa expressão obtemos

$$L_+^+ g_{+-} L_-^- + L_+^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{i=1}^2 L_+^i g_{ii} L_-^i = g_{+-}, \quad (2.70)$$

o que implica em

$$L_+^+ L_-^- + L_+^- L_-^+ - \sum_{i=1}^2 L_+^i L_-^i = 1, \quad (2.71)$$

ou

$$L_+^+ L_-^- = 1 + \sum_{i=1}^2 (L_-^i)^2 - L_+^- L_-^+. \quad (2.72)$$

Agora, como vamos resolver a expressão (2.72)?, para responder a esta pergunta usamos a seguinte definição [18], ou como em (2.2), podemos fazer

$$\begin{aligned} L_+^\mu &= \frac{L_0^\mu + L_3^\mu}{\sqrt{2}}, \\ L_-^\mu &= \frac{L_0^\mu - L_3^\mu}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde L_0^μ e L_3^μ são os elementos de matriz de (2.55). Assim, para L_+^+ é dada por

$$L_+^+ = \frac{L_0^0 + L_0^3 + L_3^0 + L_3^3}{2} = \frac{\gamma - \beta\gamma - \beta\gamma + \gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = e^{-\omega} \geq 1 > 0. \quad (2.74)$$

Do mesmo modo para L_-^-

$$L_-^- = \frac{L_0^0 - L_0^3 - L_3^0 + L_3^3}{2} = \frac{\gamma + \beta\gamma + \beta\gamma + \gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} = e^{\omega} \geq 1 > 0. \quad (2.75)$$

Em seguida para L_+^-

$$L_+^- = \frac{L_0^0 - L_0^3 + L_3^0 - L_3^3}{2} = \frac{\gamma + \beta\gamma - \beta\gamma - \gamma}{2} = 0. \quad (2.76)$$

Do mesmo modo para L_-^+

$$L_-^+ = \frac{L_0^0 + L_0^3 - L_3^0 - L_3^3}{2} = \frac{\gamma - \beta\gamma + \beta\gamma - \gamma}{2} = 0. \quad (2.77)$$

No caso, para L_+^i

$$L_+^i = \begin{cases} \frac{L_0^1 + L_3^1}{\sqrt{2}} = 0, \\ \frac{L_0^2 + L_3^2}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Finalmente para L_-^i

$$L_-^i = \begin{cases} \frac{L_0^1 - L_3^1}{\sqrt{2}} = 0, \\ \frac{L_0^2 - L_3^2}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases} \quad (2.79)$$

Portanto, para esse caso em particular, $L_+^+ L_-^- = 1$, com $0 \leq L_+^+ \leq 1$ e $1 \leq L_-^-$.

Neste caso, teremos 2 classes, ou seja:

1. $L \uparrow \uparrow (\det L = +1, 0 \leq L_+^+ \leq 1 \text{ e } 1 \leq L_-^-)$: Transformação Própria e Ortocrônica;

2. $L \downarrow \uparrow$ ($\det L = -1$, $0 \leq L_+^+ \leq 1$ e $1 \leq L_-^-$): Transformação Imprópria e Ortocrônica;

Da mesma forma, como acima, podemos representar a matriz da transformação (2.55) como:

$$\Lambda_{\text{FL}} = \begin{matrix} & + & - & 1 & 2 \\ \begin{matrix} + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} e^{-\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (2.80)$$

onde Λ_{FL} é a matriz da transformação de Lorentz na frente de luz. Os detalhes estão no apêndice A. Além disso, a matriz (2.80) satisfaz a seguinte relação:

$$\begin{pmatrix} x'^+ \\ x'^- \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Esta transformação é também do tipo $L \uparrow \uparrow$.

Capítulo 3

O Propagador em Interação

Em teoria quântica relativista, o propagador é uma ferramenta fundamental na descrição do sistema. Ele carrega informações de um ponto de espaço-tempo para o outro, de modo que ele é responsável pela dinâmica do sistema. A dinâmica de um sistema relativista é usualmente descrita em termos da evolução temporal dos estados, o qual representam partículas propagando-se no espaço, avançando no tempo a partir de um instante inicial de tempo t_i , até um instante posterior t_f .

Nas coordenadas da frente de luz o propagador quântico é comumente representada pela função de Green [22, 23]. Nestas novas coordenadas o parâmetro de evolução é dado por x^+ que é o tempo nas coordenadas de frente de luz e é definida por $x^+ = t + z/c = 1$.

O nosso objetivo neste capítulo é estudar sistemas de dois corpos para a dinâmica definida na frente de luz. Calculamos as correções perturbativas de dois corpos a ordem $O(g^2)$ e a ordem $O(g^4)$, respectivamente. Este cálculo primeiro é feito para o caso de sistemas compostos por dois bósons em interação e no próximo capítulo para o caso de um sistema composto de dois bósons em interação com um campo de fundo. Também generalizamos essas correções para ordem $O(g^{2n})$.

Para este fim nós usaremos um modelo bosônico para o qual a Lagrangeana de interação é definida por [22, 24, 25, 26, 27, 28]

$$\mathcal{L}_I = g\phi_1^\dagger\phi_1\sigma + g\phi_2^\dagger\phi_2\sigma, \quad (3.1)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 representam os bósons com massas m_1 e m_2 . Para facilitar os nossos cálculos consideramos m_1 e m_2 iguais a m . O termo σ representa o bóson intermediário com massa m_σ , e g é a constante de acoplamento.

Usando a idéia de Dirac [1] vamos a representar a dinâmica do sistema quântico na frente de luz, no tempo $x^+ = t + z$.

O propagador Livre

O propagador livre com spin zero, no espaço tempo em quatro dimensões, é representado pelo propagador de Feynman na forma [23, 28]

$$S(x^\mu) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Usando as tranformações de coordenadas na frente de luz, isto é

$$x^+ = \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}}, \quad x^- = \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \quad \vec{x}_\perp = (x_1, x_2), \quad (3.3)$$

obtemos o propagador livre na frente de luz, isto é. o propagador com todas suas medidas completas [23], com o Jacobiano de transformação igual a 1 ($d^4k \rightarrow dk^- dk^+ d^2k_\perp$)

$$S(x^+, x^-, \vec{x}_\perp) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \int dk_1^- dk_1^+ d^2k_{1\perp} \frac{e^{-ik_1^- x^+} e^{-ik_1^+ x^-} e^{i\vec{k}_{1\perp} \cdot \vec{x}_\perp}}{k_1^+ \left[k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{2k_1^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_1^+} \right]}. \quad (3.4)$$

Em 1+1 dimensões (3.4) fica [23, 28]

$$S(x^+) = \frac{i}{2(2\pi)} \int dk_1^- \frac{e^{-ik_1^- x^+}}{k_1^+ \left[k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{2k_1^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_1^+} \right]}. \quad (3.5)$$

Com ajuda da transformada de Fourier, $\tilde{S}(k^-) = \int dx^+ e^{ik^- x^+} S(x^+)$, passamos para o espaço dos momentos [23, 28], ou seja,

$$\tilde{S}(k^-) = \frac{1}{2} \frac{i}{k^+ \left(k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2}{2k^+} + \frac{i\varepsilon}{2k^+} \right)}, \quad (3.6)$$

em que fizemos uso da propriedade delta de Dirac, $\delta(k^- - k_1^-) = \frac{1}{(2\pi)} \int dx^+ e^{i(k^- - k_1^-)x^+}$.

O termo $H = \frac{k_\perp^2 + m^2}{2k^+}$ é a hamiltoniana na frente de luz para o sistema de uma partícula livre de massa m . Observe que escolhendo $x^+ > 0$ e $k^+ > 0$, temos que (3.6) representa uma partícula propagando-se para frente no tempo na frente de luz. No caso que $x^+ < 0$ e $k^+ < 0$, teremos antipartículas propagando-se no passado do tempo na frente de luz.

3.1 Propagação de Dois Corpos com Troca de um Bóson Intermediário em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$

A propagação de dois corpos em ordem $\mathcal{O}(g^2)$ é dada pela troca de um bóson intermediário. Esta correção perturbativa ao propagador é descrita pela seguinte expressão [28]:

$$S(x^+) = (ig)^2 \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) S_3(x^+ - \bar{x}_1^+) S_4(x^+ - \bar{x}_2^+) S_\sigma(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+). \quad (3.7)$$

A expressão (3.7) é ilustrada, na Fig. (3.1),

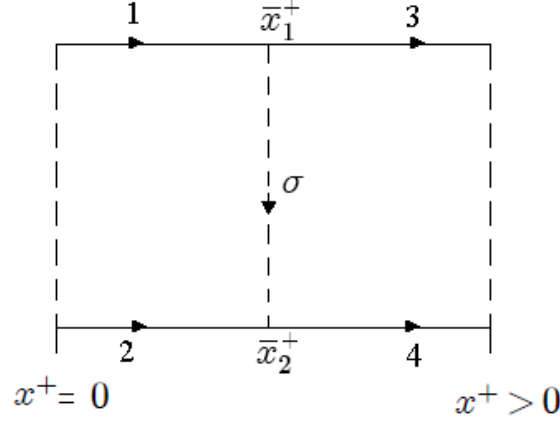


Figura 3.1: Propagação de dois corpos trocando um bóson intermediário

onde σ representa o bóson intermediário propagando-se no intervalo $\bar{x}_1^+ - \bar{x}_2^+$, com os momentos de entrada e de saída dados pelos índices 1, 2 e 3, 4 respectivamente. Usando a Eq.(3.4) obtemos todos os termos do propagador $S(x^+)$,

$$\begin{aligned} S_1(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_1^-}{k_1^+} \frac{e^{-ik_1^- \bar{x}_1^+}}{\left[k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{2k_1^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_1^+} \right]}, \\ S_2(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_2^-}{k_2^+} \frac{e^{-ik_2^- \bar{x}_2^+}}{\left[k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]}, \\ S_3(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_3^-}{k_3^+} \frac{e^{-ik_3^- (x^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]}, \\ S_4(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_4^-}{k_4^+} \frac{e^{-ik_4^- (x^+ - \bar{x}_2^+)}}{\left[k_4^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]}, \\ S_\sigma(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_\sigma^-}{k_\sigma^+} \frac{e^{-ik_\sigma^- (\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_\sigma^- - \frac{k_{\sigma\perp}^2 + m_\sigma^2}{2k_\sigma^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_\sigma^+} \right]}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

que serão substituídos na Eq.(3.7). Vemos que a expressão (3.7) tem sete integrais, mas a substituição de (3.8) em (3.7) produz três exponenciais, $e^{i\bar{x}_1^+ (k_3^- - k_1^- + k_\sigma^-)}$,

$e^{i\bar{x}_2^+(k_4^- - k_\sigma^- + k_2^-)}$ e $e^{-ix^+(k_3^- + k_4^-)}$, que na integração em $\bar{x}_1$ e em $\bar{x}_2$, são as deltas de Dirac, ficando apenas com as integrais em k_1^- , k_2^- , k_3^- , k_4^- , k_σ^- . Estas deltas, que correspondem à conservação do momento k^- em cada vértice, reduz ainda mais a expressão (3.7). Escolhemos integrar primeiro em k_1^- e depois em k_σ^- . Com isto, reduzimos de cinco para três as integrais em k^- .

$$\begin{aligned}
S(x^+) = & \frac{i^5 (ig)^2}{2^5 (2\pi)^3} \int \frac{dk_2^- dk_3^- dk_4^- e^{-ix^+(k_3^- + k_4^-)}}{(k_3^+ + k_4^+ - k_2^+) k_2^+ k_3^+ k_4^+ (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_3^- + k_4^- - k_2^- - \frac{(k_3 + k_4 - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_3^+ + k_4^+ - k_2^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_3^+ + k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \frac{1}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_2^- - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Assim como podemos observar a Eq. (3.9), fica unicamente com as integrais em k_2^- , k_3^- e k_4^- , e a exponencial $e^{-ix^+(k_3^- + k_4^-)}$, que será eliminada quando fazemos uso da transformada de Fourier, ou dito de outra maneira, quando passamos para o espaço dos momentos. Como resultado temos uma outra delta de Dirac, que corresponde à conservação de k^- total, isto é $k^- = k_1^- + k_2^- = k_3^- + k_4^-$, ou seja soma dos momentos de entrada é igual à soma dos momento de saída. Esta é a lei da conservação da energia na frente de luz.

Finalmente, fazemos uso da transformada de Fourier na Eq. (3.9) para obter:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & \frac{i^5 (ig)^2}{2^5 (2\pi)^2} \int \frac{dk_2^- dk_4^-}{(k^+ - k_2^+) k_2^+ (k^+ - k_4^+) k_4^+ (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - k^- + (k - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_4^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]}, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
(k - k_2)_{\text{on}} &= \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k^+ - k_2^+)}, & k_{4\text{on}} &= \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+}, \\
k_{2\text{on}} &= \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+}, & (k_4 - k_2)_{\text{on}} &= \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)}. \\
(k - k_4)_{\text{on}} &= \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k^+ - k_4^+)},
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Vemos que a integral dupla (3.10) fica apenas em função de k_2^- e k_4^- . Esta será resolvida usando a fórmula de integral de Cauchy.

Por outro lado da Eq. (3.10) localizamos os seguintes pólos

$$\begin{aligned}
1 & : k_2^- = k^- - (k - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)}, \\
2 & : k_2^- = k_{2\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+}, \\
3 & : k_2^- = k_4^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Cada um dos pólos pode estar localizado seja na metade inferior ou superior do plano complexo k^- , dependendo dos valores de k^+ , k_2^+ e k_4^+ . Vamos ver que existem 6 possibilidades ou regiões, como mostrada na tabela a seguir.

1) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k^+$	4) $0 < k^+ < k_2^+ < k_4^+$
2) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k^+$	5) $0 < k_4^+ < k^+ < k_2^+$
3) $0 < k_2^+ < k^+ < k_4^+$	6) $0 < k^+ < k_4^+ < k_2^+$

(3.13)

Como resultado da integração em k_2^- , usando a fórmula de integral de Cauchy, as regiões 5 e 6, se anulam, isto é, duas regiões levam a contribuições que se anulam. Em seguida, na integração em k_4^- , anulam-se as contribuições das regiões 3 e 4, ou seja, mais duas regiões. Portanto apenas duas regiões das seis conduzem a contribuições que sobrevivem, isto é, as contribuições das regiões 1 e 2. No que se segue damos os resultados das regiões cujas contribuições não se anulam (para mais detalhes ver o apêndice B)

- Região 1: $0 < k_2^+ < k_4^+ < k^+$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) &= -i \frac{(ig)^2}{2^5} \frac{1}{k_2^+ k_4^+ (k^+ - k_2^+) (k^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
&\quad \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

O resultado da expressão (3.14) nos diz que os dois corpos, com a partícula intermediária σ , estão viajando para a frente no tempo. Este resultado é ilustrado na Fig. 3.2

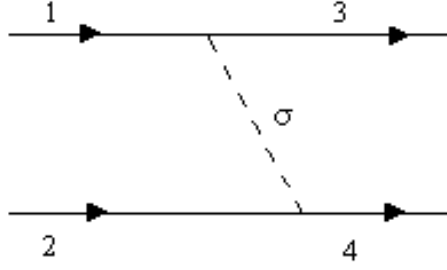


Figura 3.2: Representação diagramática da região 1 com uma partícula intermediária viajando para frente no tempo

- Região 2: $0 < k_4^+ < k_2^+ < k^+$

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(k^-) = & i \frac{(ig)^2}{2^5} \frac{1}{k_2^+ k_4^+ (k^+ - k_2^+) (k^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
 & \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
 & \times \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

O resultado da expressão (3.15) nos diz que os dois corpos estão viajando para a frente no tempo. Mas a partícula intermediária σ , está viajando para trás no tempo. Este resultado é ilustrado na Fig. 3.3

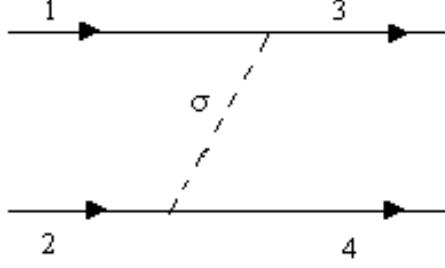


Figura 3.3: Representação diagramática da região 2 com uma partícula intermediária viajando para trás no tempo

3.2 Propagação de Dois Corpos com Troca de dois Bósons Intermediários em Ordem $\mathcal{O}(g^4)$

De forma semelhante à seção anterior, podemos construir a correção perturbativa à propagação de dois corpos em ordem $\mathcal{O}(g^4)$ na constante de acoplamento. Esta vem da troca de dois bósons intermediários, sendo descrita pela seguinte expressão [28] :

$$S(x^+) = (ig)^4 \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+ d\bar{x}_4^+ S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) S_3(\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+) S_4(\bar{x}_4^+ - \bar{x}_2^+) \times \\ \times S_5(x^+ - \bar{x}_3^+) S_6(x^+ - \bar{x}_4^+) S_{\sigma_1}(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+) S_{\sigma_2}(\bar{x}_4^+ - \bar{x}_3^+), \quad (3.16)$$

Nesta ordem teremos oito propagadores como mostrado na Fig. 3.4, sendo que dois são propagadores do bóson associado a interação, identificados como k_{σ_1} e k_{σ_2} . em seguida, a Eq. (3.16) é ilustrada, como mostramos na Fig. 3.4

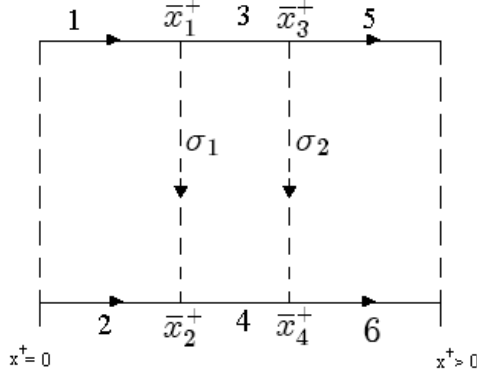


Figura 3.4: Propagação de dois corpos trocando dois bósons intermediários, σ_1 e σ_2

A expressão (e o diagrama correspondente) representa a correção perturbativa do propagador em ordem $\mathcal{O}(g^4)$ com a troca de dois bósons intermediários σ_1 e σ_2 propagando-se entre os intervalos $\bar{x}_1^+ - \bar{x}_2^+$ e $\bar{x}_3^+ - \bar{x}_4^+$, com momentos iniciais k_1 e k_2 , momentos finais k_5 e k_6 e momentos internos k_3 e k_4 . Usando a Eq.(3.4) obtemos todos os termos do propagador $S(x^+)$,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_1^-}{k_1^+} \frac{e^{-ik_1^- \bar{x}_1^+}}{\left[k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{2k_1^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_1^+} \right]}, \\
S_2 &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_2^-}{k_2^+} \frac{e^{-ik_2^- \bar{x}_2^+}}{\left[k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]}, \\
S_3 &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_3^-}{k_3^+} \frac{e^{-ik_3^- (\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]}, \\
S_4 &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_4^-}{k_4^+} \frac{e^{-ik_4^- (\bar{x}_4^+ - \bar{x}_2^+)}}{\left[k_4^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]}, \\
S_5 &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_5^-}{k_5^+} \frac{e^{-ik_5^- (x^+ - \bar{x}_3^+)}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]}, \\
S_6 &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_6^-}{k_6^+} \frac{e^{-ik_6^- (x^+ - \bar{x}_4^+)}}{\left[k_6^- - \frac{k_{6\perp}^2 + m^2}{2k_6^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]}, \\
S_{\sigma_1} &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_{\sigma_1}^-}{k_{\sigma_1}^+} \frac{e^{-ik_{\sigma_1}^- (\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_{\sigma_1}^- - \frac{k_{\sigma_1\perp}^2 + m_{\sigma_1}^2}{2k_{\sigma_1}^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_{\sigma_1}^+} \right]},
\end{aligned}$$

$$S_{\sigma_2} = \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_{\sigma_2}^-}{k_{\sigma_2}^+} \frac{e^{-ik_{\sigma_2}^-(\bar{x}_4^+ - \bar{x}_3^+)}}{\left[k_{\sigma_2}^- - \frac{k_{\sigma_2\perp}^2 + m_{\sigma_2}^2}{2k_{\sigma_2}^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_{\sigma_2}^+} \right]}, \quad (3.17)$$

que serão substituídos na Eq.(3.16). Vemos que a expressão (3.16) tem doze integrais, mas a substituição de (3.17) em (3.16) produzirá cinco exponenciais, $e^{i\bar{x}_1^+(k_3^- - k_1^- + k_{\sigma_1}^-)}$, $e^{i\bar{x}_2^+(k_4^- - k_2^- - k_{\sigma_1}^-)}$, $e^{i\bar{x}_3^+(k_5^- - k_3^- + k_{\sigma_2}^-)}$, $e^{i\bar{x}_4^+(k_6^- - k_4^- - k_{\sigma_2}^-)}$ e $e^{-ix^+(k_5^- + k_6^-)}$, que integrando em $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ e $\bar{x}_4$, representam as deltas de Dirac. Estas reduzem o número total de integrações, restando as integrais em k_1^- , k_2^- , k_3^- , k_4^- , k_5^- , k_6^- , $k_{\sigma_1}^-$ e $k_{\sigma_2}^-$, ou seja ficamos com oito integrais. Estas deltas, que correspondem à conservação do momento k^- em cada vértice, reduzem ainda mais a expressão (3.16). Escolhemos integrar primeiro em k_1^- , depois em k_3^- , seguido de $k_{\sigma_1}^-$ e finalmente em $k_{\sigma_2}^-$. Com isto, reduzimos de oito para quatro as integrais em k^- ,

$$\begin{aligned} S(x^+) = & \frac{i^8 (ig)^4}{2^8 (2\pi)^4} \int \frac{dk_2^- dk_4^- dk_5^- dk_6^- e^{-ix^+(k_5^- + k_6^-)}}{\left(k_5^+ + k_6^+ - k_2^+ \right) k_2^+ \left(k_5^+ + k_6^+ - k_4^+ \right) k_4^+ k_5^+ k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+ \right) \left(k_6^+ - k_4^+ \right)} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_5^- + k_6^- - k_2^- - (k_5 + k_6 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_5^+ + k_6^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_5^- + k_6^- - k_4^- - (k_5 + k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_5^+ + k_6^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_5^- - k_{5\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_2^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_4^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Podemos observar que a Eq. (3.18) fica unicamente com as integrais em k_2^- , k_4^- , k_5^- , k_6^- , e a exponencial $e^{-ix^+(k_5^- + k_6^-)}$, que será eliminada quando passamos ao espaço dos momentos. Como resultado temos uma outra delta de Dirac, que corresponde à conservação de k^- total, isto é $k^- = k_1^- + k_2^- = k_3^- + k_4^- = k_5^- + k_6^-$, que é a lei da conservação da energia na frente de luz. Finalmente, ao fazer uso da transformada de Fourier a Eq. (3.18) é ainda mais reduzida,

$$\tilde{S}(k^-) = \frac{i^8 (ig)^4}{2^8 (2\pi)^3} \int \frac{dk_2^- dk_4^- dk_6^-}{\left(k^+ - k_2^+ \right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+ \right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+ \right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+ \right) \left(k_6^+ - k_4^+ \right)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_2^- - (k - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_4^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_6^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_2^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_4^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

O passo seguinte será integrar a expressão acima, mas agora temos 24 possíveis regiões, como mostrada na tabela abaixo.

1) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+ < k^+$	9) $0 < k_2^+ < k^+ < k_4^+ < k_6^+$	17) $0 < k_6^+ < k^+ < k_2^+ < k_4^+$
2) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+ < k^+$	10) $0 < k^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+$	18) $0 < k^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+$
3) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+ < k^+$	11) $0 < k_4^+ < k^+ < k_2^+ < k_6^+$	19) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k^+ < k_2^+$
4) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+ < k^+$	12) $0 < k^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+$	20) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k^+ < k_2^+$
5) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+ < k^+$	13) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k^+ < k_4^+$	21) $0 < k_4^+ < k^+ < k_6^+ < k_2^+$
6) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+ < k^+$	14) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k^+ < k_4^+$	22) $0 < k^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+$
7) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k^+ < k_6^+$	15) $0 < k_2^+ < k^+ < k_6^+ < k_4^+$	23) $0 < k_6^+ < k^+ < k_4^+ < k_2^+$
8) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k^+ < k_6^+$	16) $0 < k^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+$	24) $0 < k^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+$

(3.20)

Quando integramos em k_2^- , as regiões 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23 e 24, conduzem a contribuições que se anulam, i.é, oito regiões não contribuem; em seguida, na integração em k_4^- , anulam-se as contribuições vindas das regiões 13, 14, 15, 16, 17 e 18, ou seja, mais seis regiões não contribuem; e, por último, quando integramos em k_6^- , as regiões 7, 8, 9 e 10, também apresentam contribuições que se anulam. Portanto só, sobrevivem as contribuições que vem das 6 regiões restantes, istoé, das regiões 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Por outro lado, quando integramos em k_2^- , as regiões que sobrevivem se reagrupam em dois conjuntos de regiões. Um primeiro conjunto composto pelas regiões 1, 3 e 4 e um segundo conjunto composto pelas regiões 2, 5 e 6. Cada conjunto de regiões é identificado pelos polos como mostram a Fig. B.9 e Fig. B.10 (ver apêndice B).

A seguir, na integração em k_4^- , o primeiro conjunto volta a reagrupar-se em mais dois conjuntos (ou subconjuntos) de regiões; um primeiro subconjunto formado pela

região 1, ver Fig. B.11, e um segundo subconjunto formado pela regiões 3 e 4, ver Fig. B.12.

Por outro lado, na integração em k_4^- , o segundo conjunto de regiões também volta a reagrupar-se em mais dois subconjuntos de regiões; o primeiro subconjunto sendo formado pelas regiões 2 e 5, ver Fig. B.13, e o segundo subconjunto formado pela região 6, ver Fig. B.14.

A escolha do pólo para a integração pode ficar mais simples ou complexa de acordo com a escolha do caminho de integração. No caso de pólos duplos como das regiões 1 (ver Fig. B.11) e 6 (ver Fig. B.14), escolher integrar pelo plano superior ou inferior não é a melhor opção.

Para resolver este problema, usaremos o método das frações parciais (B.8) para poder separar esses pólos.

Para os casos das regiões 1 (ver Fig. B.11) e 6 (ver Fig. B.14) usaremos A como sendo o polo 1 e B como o polo 2. A combinação dos polos 1 e 2 nos permitirá continuar com o processo de integração em k_4^- nas regiões 1 e 6. No caso da região 1 vamos a ter dois integrando parciais cujas configurações de polos mostramos na Fig. B.15, e para a região 6, as configurações é mostrada na Fig. B.16

Finalmente na integração de k_6^- os polos das regiões 1 e 6 estão ilustrada nas figuras B.17 e B.20. Para o caso dos conjuntos das regiões 3, 4, a escolha do caminho de integração fica mais simples, quando escolhemos o pólo 2, que esta na metade inferior do plano complexo (ver Fig. B.18), e para as regiões 2, 5 escolhemos o pólo 1, que está na metade superior do plano complexo como mostramos na Fig. B.19.

No que se segue damos os resultados das regiões cujas contribuições sobrevivem (para mais detalhes ver o apêndice B)

- Região 1: $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+ < k^+$

$$\tilde{S}(k^-) = \tilde{S}_1(k^-) + \tilde{S}_2(k^-), \quad (3.21)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k^-) = & \frac{i (ig)^4}{2^8} \frac{1}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}\right]} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{[k^- - k_{6\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}]}, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_2(k^-) &= -\frac{i(ig)^4}{2^8} \frac{1}{(k^+ - k_2^+) k_2^+ (k^+ - k_4^+) k_4^+ (k^+ - k_6^+) k_6^+ (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{6\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}]} \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

O processo em (3.22) e em (3.23) nos diz que os dois corpos, com partículas intermediárias σ_1 e σ_2 , tem propagação global de três e quatro corpos e estão avançando para a frente no tempo, k é a energia total do estado inicial, antes e depois da absorção, na frente de luz. A sua estrutura é mostrada na Fig. 3.5

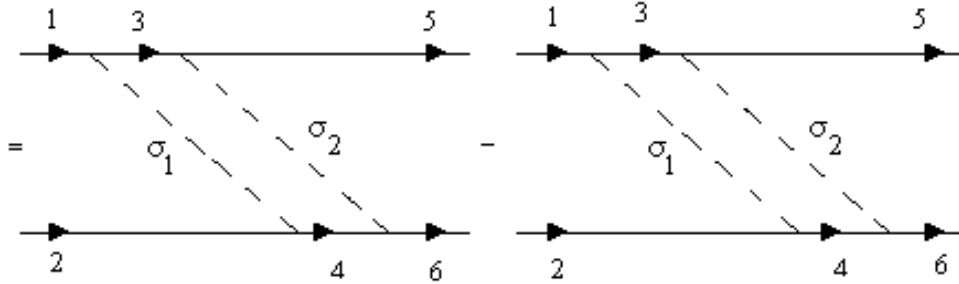


Figura 3.5: Representação diagramática da região 1 com duas partículas intermediárias viajando para frente no tempo

- Região 3, 4: $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+ < k^+$ e $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+ < k^+$

$$\tilde{S}(k^-) = -\frac{i(ig)^4}{2^8} \frac{1}{(k^+ - k_2^+) k_2^+ (k^+ - k_4^+) k_4^+ (k^+ - k_6^+) k_6^+ (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

O resultado (3.24) pode ser interpretado com dois corpos, com partículas intermediárias σ_1 e σ_2 viajando para frente e para trás no tempo, respectivamente, além disso, com propagação global de dois e três corpos, avançando para a frente no tempo como é mostrado na Fig. 3.6

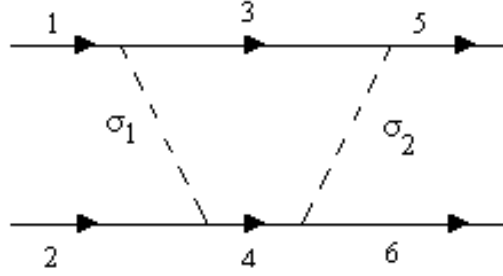


Figura 3.6: Representação diagramática das Regiões 3 e 4 com as partículas intermediárias, σ_1 e σ_2 viajando para frente e para trás no tempo respectivamente

- Região 2, 5: $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+ < k^+$ e $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+ < k^+$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) &= -\frac{i(ig)^4}{2^8} \frac{1}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}\right]}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

O resultado (3.25) é semelhante ao resultado (3.24), com a diferença que a partícula intermediária σ_1 , está viajando para trás no tempo como é mostrado na Fig. 3.7

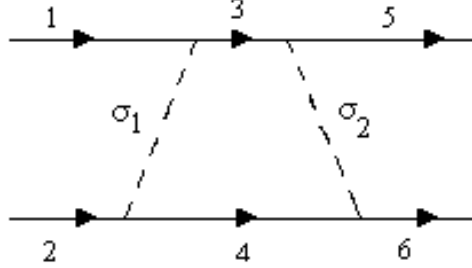


Figura 3.7: Representação diagramática das Regiões 2 e 5 com as partículas intermediárias, σ_2 e σ_1 viajando para frente e para trás no tempo respectivamente

- Região 6: $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+ < k^+$.

$$\tilde{S}(k^-) = \tilde{S}_1(k^-) + \tilde{S}_2(k^-) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k^-) &= \frac{i (ig)^4}{2^8} \frac{1}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(k^-) &= \frac{i (ig)^4}{2^8} \frac{1}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k - k_6)_{\text{on}} \right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}} \right]}. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Os processos (3.27) e (3.28) são semelhantes aos processos (3.22) e (3.23) com a diferença que as partículas intermediárias σ_1 e σ_2 , estão viajando para trás no tempo, como é ilustrada na Fig. 3.8

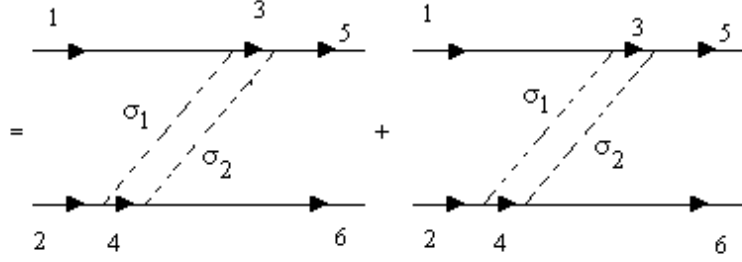


Figura 3.8: Representação diagramática da Região 8 com duas partículas intermediárias viajando para trás no tempo

3.3 Propagação de Dois Corpos com Troca de n Bósons Intermediários em Ordem $\mathcal{O}(g^{2n})$

Aqui apresentamos a estrutura geral do propagador de dois corpos com a troca de n bósons intermediários:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) &= \frac{i^{3n+2} (ig)^{2n}}{2^{3n+2} (2\pi)^{n+1}} \int \prod_{r=1}^{n+1} \frac{dk_{2r}^-}{\left[k^+ - k_{2r}^+ \right] k_{2r}^+} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\left[k_{2(j+1)}^+ - k_{2j}^+ \right]} \times \\
& \times \prod_{r=1}^{n+1} \frac{1}{\left[k^- - k_{2r}^- - (k - k_{2r})_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_{2r}^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_{2r}^- - (k_{2r})_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_{2r}^+} \right]} \times \\
& \times \prod_{s=1}^n \frac{1}{\left[k_{2(s+1)}^- - k_{2s}^- - \left[k_{2(s+1)} - k_{2s} \right]_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_{2(s+1)}^+ - k_{2s}^+)} \right]} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
(k - k_{2r})_{\text{on}} &= \frac{(k - k_{2r})_{\perp}^2 + m^2}{2(k^+ - k_{2r}^+)} \\
(k_{2(s+1)} - k_{2s})_{\text{on}} &= \frac{(k_{2(s+1)} - k_{2s})_{\perp}^2 + m_{\sigma_s}^2}{2(k_{2(s+1)}^+ - k_{2s}^+)}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

A expressão 3.29 representa a correção perturbativa ao propagador em ordem $\mathcal{O}(g^{2n})$.

Por outro lado, usando a fórmula abaixo, podemos saber quantas regiões, N_{rp} , possíveis existem, isto é

$$N_{rp} = (n_{bi} + 2)! \tag{3.31}$$

onde n_{bi} é o número de bósons intermediários.

- Para $n_{bi} = 1$, para o caso de ordem $\mathcal{O}(g^2)$, temos que $N_{rp} = (1 + 2)! = 6$, ou seja, temos 6 regiões possíveis que podemos analisar.
- para $n_{bi} = 2$, para o caso de ordem $\mathcal{O}(g^4)$, temos que $N_{rp} = (2 + 2)! = 24$, isto é existem 24 regiões possíveis.

A esta ordem, teremos também estados intermediários com números de partículas superior a dois.

Capítulo 4

O Propagador em Interação em um Campo de Fundo

Neste capítulo construímos o sistema composto de dois bósons até a ordem $\mathcal{O}(g^4)$ na frente de luz. Consideramos o caso dos propagadores globais na frente de luz quando um campo de fundo eletromagnético atua sobre uma das partículas. Derivamos todos os diagramas em ordem $\mathcal{O}(g^2)$ e $\mathcal{O}(g^4)$. Fazemos também a generalização a ordem $\mathcal{O}(g^{2n})$.

A densidade Lagrangiana de interação é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= D_\mu \phi_1 D^\mu \phi_1^* - m^2 \phi_1^* \phi_1 - m^2 \phi_2^* \phi_2 + g \phi_1^* \phi_1 \sigma + g \phi_2^* \phi_2 \sigma \\ &= \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1^* - m^2 \phi_1^* \phi_1 - m^2 \phi_2^* \phi_2 - ie A^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_1^* - \phi_1^* \partial_\mu \phi_1) \\ &\quad + e^2 A^\mu A_\mu \phi_1 \phi_1^* + g \phi_1^* \phi_1 \sigma + g \phi_2^* \phi_2 \sigma.\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde os bosóns ϕ_1 e ϕ_2 têm massas m_1 e m_2 , e cargas e_1 e e_2 . O termo σ é o bosón intermediário de massa μ . Para facilitar os nossos cálculos consideramos m_1 e m_2 iguais a m , como também e_1 e e_2 iguais a e .

No cálculo do propagador de uma partícula em um campo de fundo, usamos o Lagrangiano de interação de um campo escalar e campo electromagnético. A Lagrangeana (4.1) mostra imediatamente que existem dois tipos de vértices. O primeiro termo corresponde a um vértice que contém um fóton e duas partículas escalares. O segundo vértice contém dois fótons e duas partículas escalares.

Com essa estrutura, no próximo capítulo construímos o operador corrente electromagnética para o sistema composto de dois bósons livres na frente de luz. A técnica que usamos para deduzir esses operadores é definir os propagadores globais na frente de luz, quando um campo electromagnético de fundo actua sobre uma das partículas.

O gerador funcional normalizado é dado por:

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp[i\mathcal{S} + i \int J\phi dx]}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}}} \quad (4.2)$$

onde $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dx$. Assim, podemos encontrar os propagadores, ou funções de Green, em um campo eletromagnético. Nas seguintes seções montamos nosso propagador em um campo de fundo eletromagnético em ordem $\mathcal{O}(g^2)$ e em ordem $\mathcal{O}(g^4)$

4.1 Propagação de Dois Corpos Interagindo com um Campo Eletromagnético em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$

A correção em $\mathcal{O}(g^2)$ do propagador de dois corpos, com fonte, na frente de luz, é dado pela troca de um bóson intermediário e se expressa como [29] :

$$\begin{aligned} S(x^+) &= e (ig)^2 \int dq^- F(q^-) \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+ e^{-iq^- \bar{x}_3^+} S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) \times \\ &\times S_4(x^+ - \bar{x}_2^+) S_\sigma(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+) \left[S_3 \frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^+} - \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^+} S_5 \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

A expressão acima é ilustrada na Fig. 4.1

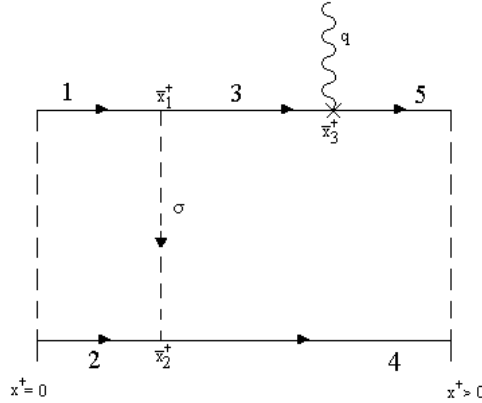


Figura 4.1: Troca de um bóson intermediário em um campo de fundo

A Fig. 4.1, mostra o diagrama que representa a correção perturbativa do propagador com fonte em ordem $\mathcal{O}(g^2)$, isto é. com a troca de um bóson intermediário. O bóson intermediário σ propaga-se entre o intervalo $\bar{x}_1^+ - \bar{x}_2^+$, e o termo fonte q acopla com o campo no ponto $\bar{x}_3^+$. Os índices 1, 2, 3, 4 e 5, indicam os momentos iniciais k_1 e k_2 , o momento interno k_3 e os momentos finais k_4 e k_5 . Usando a definição do propagador obtemos todos os termos do propagador $S(x^+)$,

$$\begin{aligned}
S_1(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_1^-}{k_1^+} \frac{e^{-ik_1^- \bar{x}_1^+}}{\left[k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{2k_1^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_1^+} \right]}, \\
S_2(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_2^-}{k_2^+} \frac{e^{-ik_2^- \bar{x}_2^+}}{\left[k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]}, \\
S_3(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_3^-}{k_3^+} \frac{e^{-ik_3^- (\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]}, \\
S_4(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_4^-}{k_4^+} \frac{e^{-ik_4^- (x^+ - \bar{x}_2^+)}}{\left[k_4^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]}, \\
S_5(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_5^-}{k_5^+} \frac{e^{-ik_5^- (x^+ - \bar{x}_3^+)}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]}, \\
S_\sigma(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_\sigma^-}{k_\sigma^+} \frac{e^{-ik_\sigma^- (\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_\sigma^- - \frac{k_{\sigma\perp}^2 + m^2}{2k_\sigma^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_\sigma^+} \right]}, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

e suas derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^+} &= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_5^-}{k_5^+} \frac{k_5^- e^{-ik_5^- (x^+ - \bar{x}_3^+)}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]}, \\
\frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^+} &= \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_3^-}{k_3^+} \frac{k_3^- e^{-ik_3^- (\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]}, \tag{4.5}
\end{aligned}$$

que serão substituídos em (4.3). Vemos que a Eq. (4.3) tem dez integrais correspondentes aos momentos, vértices e a fonte q^- , respectivamente, mais uma exponencial associada ao termo de fonte, $e^{-iq^- \bar{x}_3^+}$. A substituição das equações (4.4) e (4.5) em (4.3) nos dará quatro exponenciais, $e^{-i\bar{x}_1^+ (k_1^- - k_\sigma^- - k_3^-)}$, $e^{-i\bar{x}_2^+ (k_2^- - k_4^- + k_\sigma^-)}$, $e^{-i\bar{x}_3^+ (k_3^- - k_5^- + q^-)}$, $e^{-i\bar{x}^+ (k_4^- + k_5^-)}$, que integrando em $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$, representam as deltas de Dirac correspondentes à conservação do momento k^- em cada vértice, ficando apenas com as integrais em k_1^- , k_2^- , k_3^- , k_4^- , k_5^- , k_σ^- . Essas deltas vão fazer com que

a expressão (4.3) seja reduzida ainda mais. Assim, a expressão (4.3) fica com três integrais em k^- ,

$$\begin{aligned}
S(x^+) = & \frac{-ie (ig)^2}{2^6(2\pi)^3} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_2^- dk_4^- dk_5^-}{k_2^+ k_4^+ k_5^+} \frac{e^{-ix^+(k_4^-+k_5^-)}}{[k_4^+ + k_5^+ - k_2^+ - q^+]} \times \\
& \times \frac{2k_5^- - q^-}{[k_5^+ - q^+]} \frac{1}{[k_4^+ - k_2^+]} \frac{1}{\left[k_4^- - \frac{k_4^2+m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- + k_5^- - k_2^- - q^- - \frac{(k_4+k_5-k_2-q)^2+m^2}{2(k_4^++k_5^+-k_2^+-q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^++k_5^+-k_2^+-q^+)}\right]} \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - \frac{k_2^2+m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+}\right]} \frac{1}{\left[k_5^- - q^- - \frac{(k_5-q)^2+m^2}{2(k_5^+-q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_5^+-q^+)}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_5^- - \frac{k_5^2+m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+}\right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_2^- - \frac{(k_4-k_2)^2+m^2}{2(k_4^+-k_2^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+-k_2^+)}\right]}, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

o que significa que (4.6) fica apenas em função das integrais em k_2^- , k_4^- , k_5^- , q^- e a exponencial $e^{-ix^+(k_4^-+k_5^-)}$. Essa exponencial será eliminada quando passarmos para o espaço dos momentos através da transformação de Fourier, $\tilde{S}(k_f^-) = \int dx^+ e^{ik_f^- x^+} S(x^+)$, de forma semelhante como efetuada no capítulo anterior. Como um resultado desta operação temos uma outra delta de Dirac, que corresponde à conservação de k_f^- total, ou seja $k_f^- = k_4^- + k_5^- = k_1^- + k_2^- + q^- = k_3^- + k_4^- + q^- = k_i^- + q^-$. Finalmente, depois de fazer uso da transformada de Fourier, a Eq. (4.6) é ainda mais reduzida,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & -\frac{ie (ig)^2}{2^6(2\pi)^2} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_2^- dk_4^- [k_f^- + k_i^- - 2k_4^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+-k_2^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2on} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+-k_4^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4on} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+-k_2^+)}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+-k_4^+)}\right]}, \quad (4.7)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
k_{2on} &= \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+}, & (k_i - k_2)_{on} &= \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)}, \\
k_{4on} &= \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+}, & (k_4 - k_2)_{on} &= \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_4^+ - k_2^+)}, \\
(k_i - k_4)_{on} &= \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)}, & (k_f - k_4)_{on} &= \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ficando, o propagador, escrito no espaço dos momentos apenas com as integrais em q^- , k_2^- e em k_4^- . O propagador (4.7), na representação do espaço dos momentos será resolvido usando a formula de integral de Cauchy. Cada um dos pólos pode estar localizado seja na metade inferior ou superior do plano complexo k^- , dependendo dos valores de k_2^+ , k_4^+ , k_i^+ e k_f^+ . Para esse fim temos 24 possibilidades ou regiões onde o propagador pode existir. Vamos ver que integrando, primeiro, em k_2^- , oito dessas regiões conduzem a contribuições que se anulam ficando com dezesseis regiões para continuar analisando. Depois, ao integrar em k_4^- , observa-se que as contribuições de mais seis regiões se anulam, sobrevivendo apenas dez regiões. Em seguida, damos apenas os resultados finais; os detalhes estão no Apêndice C.

- Regiões 2, 8 e 11:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= \frac{-ie(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) (k_f^- + k_i^- - 2k_{4on})}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on} \right] \left[k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on} \right]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{4on} - (k_2 - k_4)_{on} \right]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on} \right]}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Vemos que em (4.9) há propagação global de dois e tres corpos avançando para a frente no tempo, antes e depois da interação com o campo externo, e com a partícula intermediária σ viajando para trás no tempo, onde k_i^- é a energia total do estado inicial, antes da absorção, e $k_f^- = k_i^- + q^-$ é energia total final, após da absorção. A expressão (4.9) esta ilustrada na Fig. 4.2.

- Região 4:

$$\tilde{S}(k_f^-) = \frac{-ie(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) \left[k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_4)_{on} \right]}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times$$

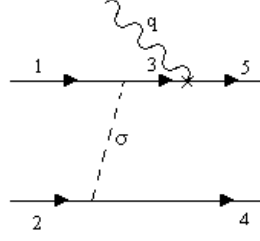


Figura 4.2: Representação diagramática das regiões 2, 8 e 11

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{[k_f^- - k_i^- - (k_2 - k_i)_{\text{on}} - (k_f - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_f^- - k_{2\text{on}} - (k_f - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}}] [k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_f - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_f^- - k_i^- - (k_4 - k_i)_{\text{on}} - (k_f - k_4)_{\text{on}}]}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

O processo dado por (4.10) nos diz que há criação de termos pares devido ao fóton, que é dada pelos denominadores $[k_f^- - k_i^- - (k_2 - k_i)_{\text{on}} - (k_f - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}}]^{-1}$ e $[k_f^- - k_i^- - (k_4 - k_i)_{\text{on}} - (k_f - k_4)_{\text{on}}]^{-1}$, correspondendo à propagação no estado intermediário de partícula e antipartícula, compostos pelo estado inicial, a antipartícula, e a partícula produzida pelo fóton, como é ilustrada na Fig. 4.3.

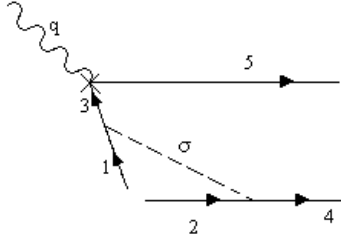


Figura 4.3: Representação diagramática da região 4

- Regiões 9 e 10:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & \frac{ie (ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) [k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_4)_{on}]}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on}] [k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{on} - (k_4 - k_f)_{on}]} . \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Neste processo físico também apresenta produção de pares. Podemos observar que a partir do resultado (4.11), temos a propagação no estado intermediário de partícula e anti-partícula dada pelo quarto denominador. O resultado (4.11) é ilustrado na Fig. 4.4.

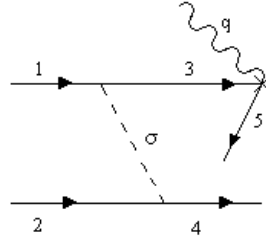


Figura 4.4: Representação diagramática das regiões 9 e 10

- Região 3:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & \frac{ie (ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) [k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_4)_{on}]}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on}] [k_f^- - k_{2on} - (k_f - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_f^- - k_i^- - (k_4 - k_i)_{on} - (k_f - k_4)_{on}] [k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on}]} \cdot (4.12)
\end{aligned}$$

Neste outro processo também ocorre produção de pares. Podemos observar a partir do resultado (4.12), a propagação no estado intermediário de partícula e anti-partícula dada pelo terceiro denominador, $[k_f^- - k_i^- - (k_4 - k_i)_{on} - (k_f - k_4)_{on}]^{-1}$. O resultado (4.12) é ilustrada na Fig. 4.5.

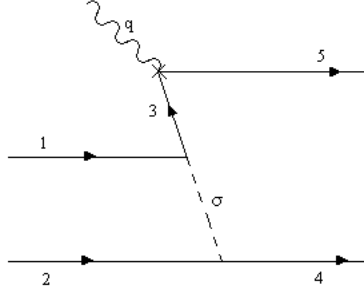


Figura 4.5: Representação diagramática da Região 3. O grafico Z

O gráfico dessa região, representado na Fig. 4.5, e comumente chamado de "Gráfico Z", é um resultado importante da nossa técnica.

- Regiões 1 e 7:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & \frac{ie (ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_2)_{on}] [k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\
& \times \left\{ \frac{[k_f^- + k_i^- - 2k_{2on} - 2(k_4 - k_2)_{on}]}{[k_f^- - k_{2on} - (k_f - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}]} + \right. \\
& \left. + \frac{[k_f^- - k_i^- + 2(k_i - k_4)_{on}]}{[k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on}]} \right\}. (4.13)
\end{aligned}$$

Vemos que no resultado de (4.13) há propagação global de dois e três corpos avançando para a frente no tempo, ou seja não há produção de pares antes e depois da interação com o campo externo. A interpretação pictórica de (4.13) está na Fig. 4.6.

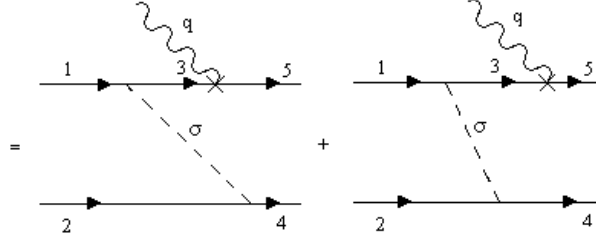


Figura 4.6: Representação diagramática das regiões 1 e 7

- Região 12:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= \frac{ie(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
&\times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on}][k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on}]} \times \\
&\times \frac{1}{[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_2)_{on} - (k_4 - k_f)_{on} - (k_2 - k_4)_{on}]} \times \\
&\times \left\{ \frac{k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_4)_{on}}{[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{on} - (k_4 - k_f)_{on}]} + \right. \\
&\left. - \frac{k_f^- + k_i^- - 2k_{4on}}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{4on} - (k_2 - k_4)_{on}]} \right\}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Neste último processo obtemos produção de pares. Podemos ver do resultado (4.14), que há propagação no estado intermediário de partícula e anti-partícula dada pelo denominadores $[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_2)_{on} - (k_4 - k_f)_{on} - (k_2 - k_4)_{on}]^{-1}$, $[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{on} - (k_4 - k_f)_{on}]^{-1}$ e $[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{4on} - (k_2 - k_4)_{on}]^{-1}$. O resultado (4.14) é ilustrado na Fig. 4.7.

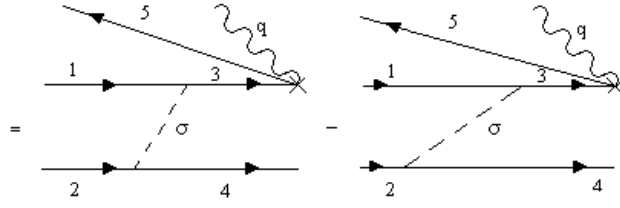


Figura 4.7: Representação diagramática da região 12

4.2 Propagação de Dois Corpos Interagindo com um Campo Eletromagnético em Ordem $\mathcal{O}(g^4)$

A correção em $\mathcal{O}(g^4)$ do propagador de dois corpos com fonte, na frente de luz, é dado pela troca de dois bósons intermediários e é dada por [29] :

$$\begin{aligned}
 S(x^+) = & e (ig)^4 \int dq^- F(q^-) \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+ d\bar{x}_4^+ d\bar{x}_5^+ e^{-iq^- \bar{x}_5^+} S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) \times \\
 & \times S_3(\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+) S_4(\bar{x}_4^+ - \bar{x}_2^+) S_6(x^+ - \bar{x}_4^+) S_{\sigma_1}(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+) S_{\sigma_2}(\bar{x}_4^+ - \bar{x}_3^+) \times \\
 & \times \left[S_5(\bar{x}_5^+ - \bar{x}_3^+) \frac{\partial S_7(x^+ - \bar{x}_5^+)}{\partial \bar{x}_5^+} - \frac{\partial S_5(\bar{x}_5^+ - \bar{x}_3^+)}{\partial \bar{x}_5^+} S_7(x^+ - \bar{x}_5^+) \right], \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

sendo que a expressão acima é ilustrada na Fig. 4.8.

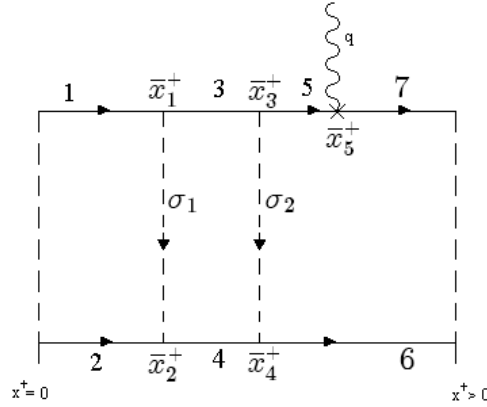


Figura 4.8: Troca de dois bósons intermediários em um campo de fundo

A Fig. 4.8 mostra o diagrama que representa a correção perturbativa do propagador com fonte em ordem $\mathcal{O}(g^4)$, isto é com a troca de dois bósons intermediários. Os bósons intermediários σ_1 e σ_2 propagam-se entre o intervalo $\bar{x}_1^+ - \bar{x}_2^+$, e $\bar{x}_3^+ - \bar{x}_4^+$,

respectivamente e o termo fonte q acopla com o campo no ponto $\bar{x}_5^+$. Os índices 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, indicam os momentos iniciais k_1 e k_2 , os momentos internos k_3 , k_4 e k_5 os momentos finais k_6 e k_7 . Usando a definição do propagador obtemos todos os termos do propagador $S(x^+)$,

$$\begin{aligned}
S_1(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_1^-}{k_1^+} \frac{e^{-ik_1^- \bar{x}_1^+}}{\left[k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{2k_1^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_1^+} \right]}, \\
S_2(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_2^-}{k_2^+} \frac{e^{-ik_2^- \bar{x}_2^+}}{\left[k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]}, \\
S_3(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_3^-}{k_3^+} \frac{e^{-ik_3^- (\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]}, \\
S_4(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_4^-}{k_4^+} \frac{e^{-ik_4^- (\bar{x}_4^+ - \bar{x}_2^+)}}{\left[k_4^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]}, \\
S_5(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_5^-}{k_5^+} \frac{e^{-ik_5^- (\bar{x}_5^+ - \bar{x}_3^+)}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]}, \\
S_6(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_6^-}{k_6^+} \frac{e^{-ik_6^- (x^+ - \bar{x}_4^+)}}{\left[k_6^- - \frac{k_{6\perp}^2 + m^2}{2k_6^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]}, \\
S_7(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_7^-}{k_7^+} \frac{e^{-ik_7^- (x^+ - \bar{x}_5^+)}}{\left[k_7^- - \frac{k_{7\perp}^2 + m^2}{2k_7^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_7^+} \right]}, \\
S_{\sigma_1}(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_{\sigma_1}^-}{k_{\sigma_1}^+} \frac{e^{-ik_{\sigma_1}^- (\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_{\sigma_1}^- - \frac{k_{\sigma_1\perp}^2 + m^2}{2k_{\sigma_1}^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_{\sigma_1}^+} \right]}, \\
S_{\sigma_2}(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)} \int \frac{dk_{\sigma_2}^-}{k_{\sigma_2}^+} \frac{e^{-ik_{\sigma_2}^- (\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+)}}{\left[k_{\sigma_2}^- - \frac{k_{\sigma_2\perp}^2 + m^2}{2k_{\sigma_2}^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_{\sigma_2}^+} \right]}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

e suas derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_7}{\partial \bar{x}_5^+} &= -\frac{1}{2(2\pi)} \int \frac{dk_7^-}{k_7^+} \frac{k_7^- e^{-ik_7^- (x^+ - \bar{x}_5^+)}}{\left[k_7^- - \frac{k_{7\perp}^2 + m^2}{2k_7^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_7^+} \right]}, \\
\frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_5^+} &= \frac{1}{2(2\pi)} \int \frac{dk_5^-}{k_5^+} \frac{k_5^- e^{-ik_5^- (\bar{x}_5^+ - \bar{x}_3^+)}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

que serão substituídos em (4.15). Vemos aqui que a Eq. (4.15) tem quinze integrais, mais uma exponencial, $e^{-iq^- \bar{x}_5^+}$, associada ao termo de fonte. A substituição

das equações (4.16) e (4.17) em (4.15) nos dará seis exponenciais, $e^{-i\bar{x}_1^+(k_1^- - k_{\sigma_1}^- - k_3^-)}$, $e^{-i\bar{x}_2^+(k_2^- - k_4^- + k_{\sigma_1}^-)}$, $e^{-i\bar{x}_3^+(k_3^- - k_{\sigma_2}^- - k_5^-)}$, $e^{-i\bar{x}_4^+(k_4^- + k_{\sigma_2}^- - k_6^-)}$, $e^{-i\bar{x}_5^+(k_5^- - k_7^- - q^-)}$, $e^{-i\bar{x}^+(k_4^- + k_5^-)}$, que integrando em $\bar{x}_1^+$, $\bar{x}_2^+$, $\bar{x}_3^+$, $\bar{x}_4^+$ e $\bar{x}_5^+$, aparecem como deltas de Dirac correspondentes à conservação do momento k^- em cada vértice, ficando apenas com as integrais em k_1^- , k_2^- , k_3^- , k_4^- , k_5^- , k_6^- , k_7^- , $k_{\sigma_1}^-$ e $k_{\sigma_2}^-$. Essas deltas vão fazer com que a expressão (4.15) seja reduzida ainda mais. Com isso, reduzimos a expressão (4.15) para cinco integrais (quatro integrais com respeito a k^- e um com respeito a q^-),

$$\begin{aligned}
S(x^+) = & -\frac{e(ig)^4}{2^9(2\pi)^4} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_2^- dk_4^- dk_6^- dk_7^- e^{-ix^+(k_6^- + k_7^-)}}{(k_6^+ - k_2^+ + k_7^+ - q^+) k_2^+ (k_6^+ - k_4^+ + k_7^+ - q^+)} \times \\
& \times \frac{[2k_7^- - q^-]}{k_4^+ (k_7^+ - q^+) k_6^+ k_7^+ (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_2^- + k_7^- - q^- - \frac{(k_6 - k_2 + k_7 - q)_\perp^2 + m^2}{2(k_6^+ - k_2^+ + k_7^+ - q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_2^+ + k_7^+ - q^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_4^- + k_7^- - q^- - \frac{(k_6 - k_4 + k_7 - q)_\perp^2 + m^2}{2(k_6^+ - k_4^+ + k_7^+ - q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+ + k_7^+ - q^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_7^- - q^- - \frac{(k_7 - q)_\perp^2 + m^2}{2(k_7^+ - q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_7^+ - q^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - \frac{k_{6\perp}^2 + m^2}{2k_6^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_7^- - \frac{k_{7\perp}^2 + m^2}{2k_7^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_7^+} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_2^- - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_4^- - \frac{(k_6 - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_6^+ - k_4^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Observamos que além de q^- , a equação (4.18) fica apenas, em função das integrais em k_2^- , k_4^- , k_6^- , k_7^- e o exponencial $e^{-ix^+(k_6^- + k_7^-)}$. Essa exponencial será eliminada quando passarmos para o espaço dos momentos, $\tilde{S}(k_f^-) = \int dx^+ e^{ik_f^- x^+} S(x^+)$. Assim, de forma semelhante como efetuada nos capítulo anterior, temos uma outra delta de Dirac, que corresponde à conservação de k_f^- total, ou seja $k_f^- = k_6^- + k_7^- = k_1^- + k_2^- + q^- = k_3^- + k_4^- + q^- = k_5^- + k_6^- + q^- = k_i^- + q^-$. Finalmente, depois de fazer uso da transformada de Fourier, a Eq. (4.18) é ainda mais reduzida. Deste modo obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & -\frac{e(ig)^4}{2^9(2\pi)^3} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_2^- dk_4^- dk_6^-}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{[k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_2^- - (k_i - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_4^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_6^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_6^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_2^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_4^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}\right]}, \quad (4.19)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
k_{2\text{on}} &= \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+}, & (k_i - k_6)_{\text{on}} &= \frac{(k_i - k_6)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_6^+)}, \\
k_{4\text{on}} &= \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+}, & (k_f - k_6)_{\text{on}} &= \frac{(k_f - k_6)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_6^+)}, \\
k_{6\text{on}} &= \frac{k_{6\perp}^2 + m^2}{2k_6^+}, & (k_6 - k_4)_{\text{on}} &= \frac{(k_6 - k_4)_\perp^2 + m_{\sigma_1}^2}{2(k_6^+ - k_4^+)}, \\
(k_i - k_2)_{\text{on}} &= \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)}, & (k_4 - k_2)_{\text{on}} &= \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_{\sigma_1}^2}{2(k_4^+ - k_2^+)}, \\
(k_i - k_4)_{\text{on}} &= \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)}.
\end{aligned} \quad (4.20)$$

Aqui, o propagador, escrito no espaço dos momentos se expressa apenas com as integrais em k_2^- , k_4^- , k_6^- e a integral correspondente ao termo fonte q . Novamente, como no caso anterior, o propagador (4.19), na representação dos espaço dos momentos, será resolvido usando a fórmula de integral de Cauchy. Cada um dos pólos pode estar localizado seja a metade inferior ou superior do plano complexo k^- , dependendo dos valores de k_2^+ , k_4^+ , k_6^+ , k_i^+ e k_f^+ . Neste caso temos 120 regiões onde o propagador pode existir; destes a integração em k_2^- resulta em quarenta contribuições que se anulam, ficando com oitenta restantes regiões para se continuar analisando. Ao se integrar em k_4^- , mais trinta regiões mostram que tem contribuições que se anulam e finalmente na integração em k_6^- , anulam-se mais dezesseis dessas contribuições, sobrevivendo apenas trinta e quatro regiões. Abaixo damos os resultados; os detalhes estão no Apêndice C.

- Regiões 1, 25

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-) + \tilde{S}_3(k_f^-) + \tilde{S}_4(k_f^-) + \tilde{S}_5(k_f^-), \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) &= ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ &\times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(k_f^-) &= -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- + k_f^- - 2k_{6\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ &\times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ &\times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_3(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- - k_f^- + 2(k_f - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_4(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_f^- + k_i^- - 2(k_6 - k_4)_{\text{on}} - 2k_{4\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_5(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- - k_f^- + 2(k_f - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}} \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_f^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\right\}}. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Os resultados de (4.22) até (4.26) nos dizem que os dois corpos, com partículas intermediárias σ_1 e σ_2 estão avançando para a frente no tempo, além disso há propagação global de três e quatro corpos, onde k_i e k_f são as energias totais do estado inicial e final respectivamente, com $k_f = k_i + q^-$ como é mostrada na Fig. 4.9.

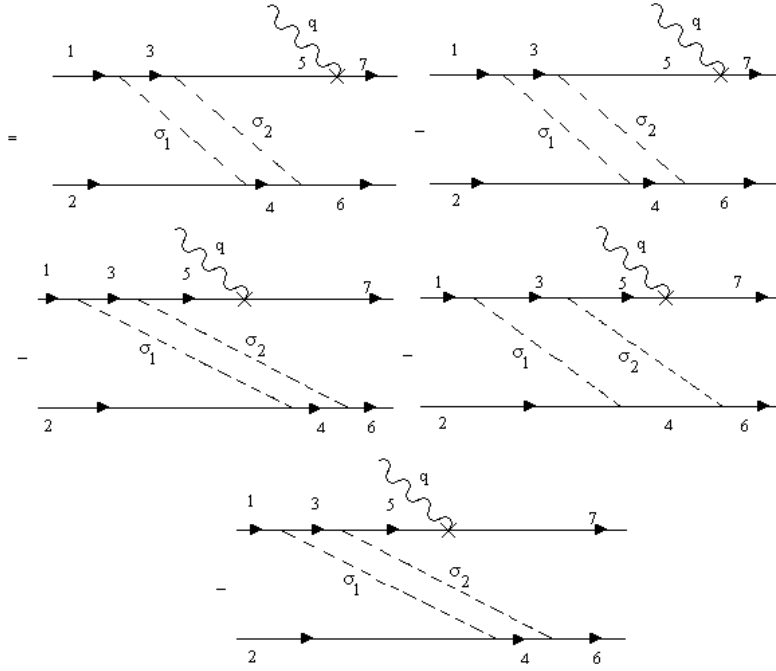


Figura 4.9: Representação diagramática das regiões 1 e 25

- Região 7

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-), \quad (4.27)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ & \times \frac{\theta(k_6^+ - k_i^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_i)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ & \times \frac{\theta(k_6^+ - k_i^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_i)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Os resultados de (4.27) e (4.28) nos dizem que os dois corpos, com partículas intermediárias σ_1 e σ_2 estão avançando para a frente no tempo, temos produção de pares e temos propagação global de três e quatro corpos. Este resultado nos produz também o grafico Z, como é mostrado na Fig. 4.10.

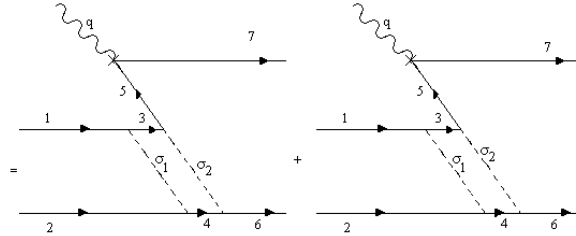


Figura 4.10: Representação diagramática da região 7

- Região 31, 33, 34

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-), \quad (4.30)$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_1(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_f^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_2(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_f^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Nos resultados de (4.31) e (4.32) temos também duas partículas intermediárias σ_1 e σ_2 que estão avançando para a frente no tempo, vemos que temos produção de pares e temos propagação global de três e quatro corpos. Este resultado nos produz gráficos de antipartículas por não possuírem pernas externas. Apresentamos esquematicamente isso na Fig. 4.11.

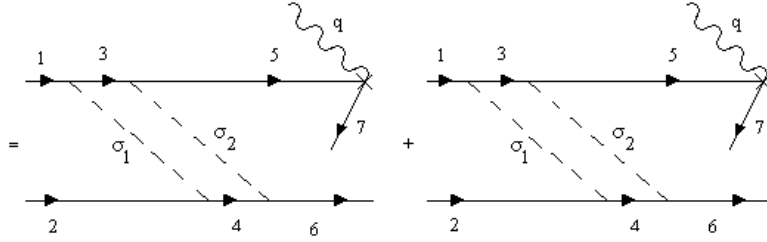


Figura 4.11: Representação diagramática das regiões 31, 33 e 34

- Região 3, 4, 27, 28, 37, 38, 41

$$\tilde{S}(k_f^-) = ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- + k_f^- - 2k_{6\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\}}. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Deste resultados em (4.33) podemos observar que as partículas intermediárias σ_1 e σ_2 estão avançando para a frente e para trás no tempo, respectivamente. Mas não temos produção de pares, Como é mostrada na Fig. 4.12.

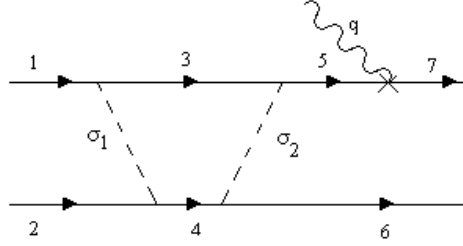


Figura 4.12: Representação diagramática das regiões 3, 4, 27, 28, 37, 38 e 41

- Região 39, 40, 42

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-), \tag{4.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_1(k_f^-) &= -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_i^- - k_f^- + 2(k_f - k_6)_{\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}} \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_f^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\right\}}. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_2(k_f^-) &= ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_4)_{\text{on}} + 2(k_6 - k_4)_{\text{on}}\right\} \theta(k_i^+ - k_2^-)}{\left(k_i^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k_i^+ - k_4^+\right) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{\left(k_i^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_f^+ - k_6^+\right) \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}} \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}}\right\}}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Nos processos (4.35) e (4.36) podemos dizer que as partículas intermediárias σ_1 e σ_2 estão avançando para a frente e para trás no tempo, respectivamente; além disso vemos que ocorre produção de pares. Este resultado, também produz gráficos de antipartículas como é mostrada na Fig. 4.13.

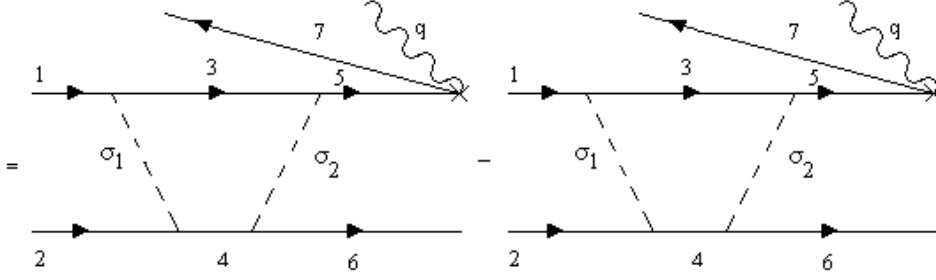


Figura 4.13: Representação diagramática das regiões 39, 40, e 42

- Região 9

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_6)_{\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_4^+ - k_i^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
&\times \frac{\theta(k_6^+ - k_i^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
&\times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \times \\
&\times \frac{1}{\{k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6) - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_i)_{\text{on}}\}} \\
&\times \frac{1}{\{k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_f - k_6) - (k_6 - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
&\times \frac{1}{\{k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_i)_{\text{on}}\}} \times \\
&\times \frac{1}{\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
&\times \frac{1}{\{k_f^- - k_{2\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}}\}}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

No processo (4.37) podemos observar que as partículas intermediárias σ_1 e σ_2 avançam para a frente no tempo, e apresenta produção de pares. Este resultado produz um gráfico tipo Z, como é mostrada na Fig. 4.14.

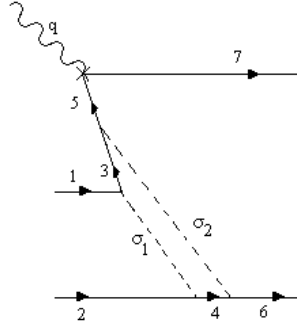


Figura 4.14: Representação diagramática da região 9

- Regiões 2, 5, 26, 29, 43

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-), \quad (4.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) = & ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_f^- + k_i^- - 2k_{4\text{on}} - 2(k_6 - k_4)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ & \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\ & \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\tilde{S}_2(k_f^-) = ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- - k_f^- + 2(k_f - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\}}. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Nos processos (4.39) e (4.40) temos também que as partículas intermediárias σ_1 e σ_2 avançando para trás e para frente no tempo, respectivamente, como são mostrados na Fig. 4.15.

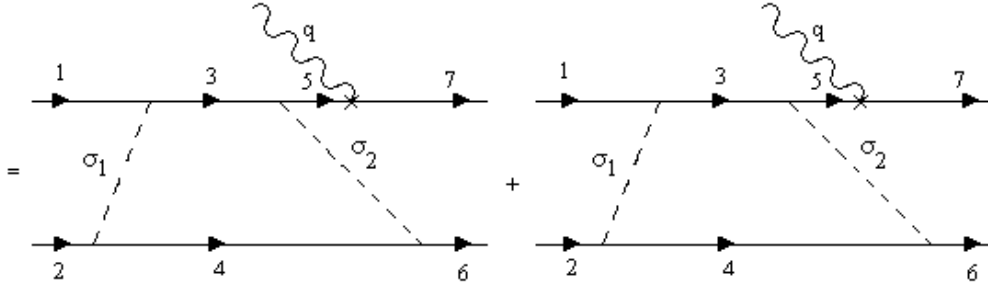


Figura 4.15: Representação diagramática das regiões 2, 5, 26, 29, 43

- Região 8

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_6)_{\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\{k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_i)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}}\}}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

O processo (4.41), nos diz que temos partículas intermediárias σ_1 e σ_2 avançando para trás e para frente no tempo, respectivamente, além disso temos produção de pares. Este gráfico é também tipo gráfico Z, como é mostrado na Fig. 4.16.

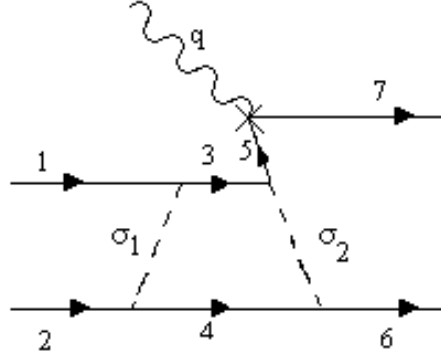


Figura 4.16: Representação diagramática da região 8

- Regiões 32, 35, 36, 45, 46

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}} \right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{ k_i^- - k_f^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}} \right\}}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

O processo (4.42), também nos diz que as partículas intermediárias σ_1 e σ_2 avançam para trás e para frente no tempo, respectivamente, além disso temos produção de pares, mas este resultado, também, produz gráficos de antipartículas, como é mostrado na Fig. 4.17.

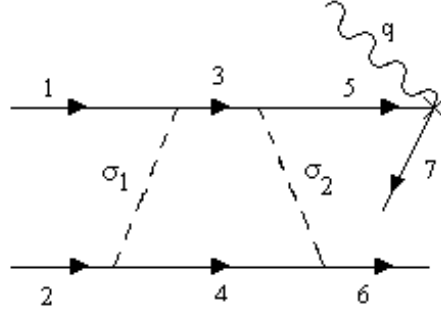


Figura 4.17: Representação diagramática das regiões 32, 35, 36, 45, 46

- Regiões 6, 30, 44, 47

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-), \quad (4.43)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_f^- + k_i^- - 2k_{6\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ & \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_f^- + k_i^- - 2k_{6\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ & \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nos resultados de (4.44) e (4.45) as partículas intermediárias σ_1 e σ_2 estão avançando para trás no tempo; não temos produção de pares, mas temos propagação

global de tres e quatro corpos avançando para frente no tempo. Os resultados são mostrados na Fig. 4.18.

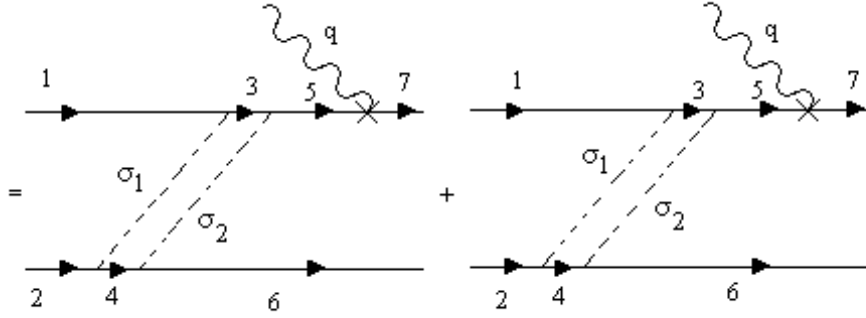


Figura 4.18: Representação diagramática das regiões 6, 30, 44, 47

- Região 48

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-) + \tilde{S}_3(k_f^-) + \tilde{S}_4(k_f^-) + \tilde{S}_5(k_f^-), \quad (4.46)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) = & ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_i^- - k_f^- + 2(k_f - k_6)_{\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\ & \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_f^- - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_f^- - (k_6 - k_f)_{\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\ & \times \frac{1}{\{k_i^- - k_f^- - (k_6 - k_f)_{\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_2(k_f^-) = & ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_i^- + k_f^- - 2k_{6\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_f^- - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}}\}}. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_3(k_f^-) = & -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_i^- - k_f^- + 2(k_6 - k_4)_{\text{on}} - 2(k_i - k_4)_{\text{on}}\}}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\}} \frac{1}{\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_f^- - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{k_i^- - k_f^- - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\}}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_4(k_f^-) = & ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \{k_i^- - k_f^- + 2(k_f - k_6)_{\text{on}}\} \theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}} \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_f^- - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_f^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\right\}}. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_5(k_f^-) &= -ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{k_i^- - k_f^- + 2(k_4 - k_2)_{\text{on}} + 2(k_6 - k_4)_{\text{on}} - 2(k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}}{\left(k_i^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k_i^+ - k_4^+\right) k_4^+} \times \\
& \times \frac{\theta(k_i^+ - k_2^-) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_i^+ - k_6^+) \theta(k_6^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_6^+)}{\left(k_i^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_f^+ - k_6^+\right) \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}} \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_i - k_6)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_f^- - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_f)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}} \times \\
& \times \frac{1}{\left\{k_i^- - k_{6\text{on}} - (k_2 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_6)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}\right\}}. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Nos resultados de (4.47) a (4.51), temos partículas intermediárias σ_1 e σ_2 avançando para trás no tempo e temos produção de pares. Estes resultados produzem gráficos de antipartículas e são mostrados na Fig. 4.19.

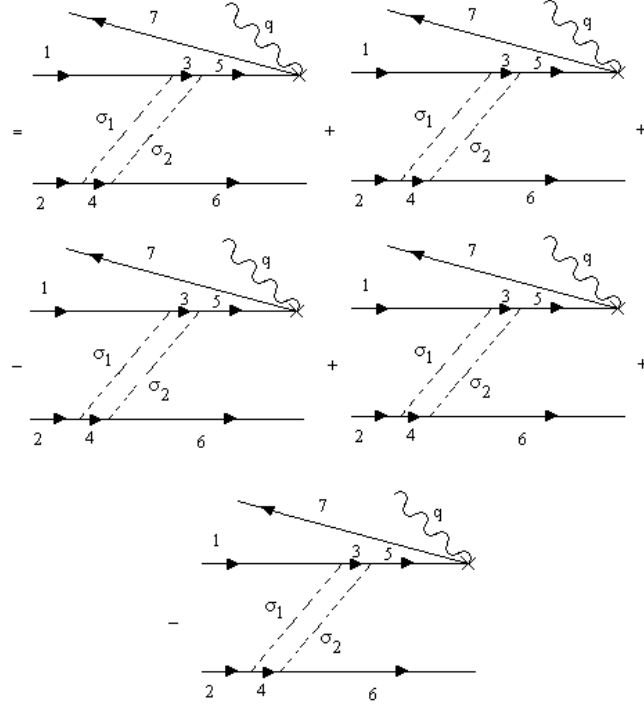


Figura 4.19: Representação diagramática da região 48

- Região 10

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= ie \frac{(ig)^4}{2^9} \int \frac{dq^- f(q^-) \left\{ k_i^- + 2(k_f - k_6)_{\text{on}} \right\} \theta(k_2^+ - k_i^-) \theta(k_4^+ - k_i^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+} \times \\
&\times \frac{\theta(k_6^+ - k_i^+) \theta(k_f^+ - k_6^+) \theta(k_4^+ - k_2^+) \theta(k_6^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+) (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
&\times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_2 - k_i)_{\text{on}} \right\}} \times \\
&\times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{2\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} \right\}} \times \\
&\times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_i)_{\text{on}} \right\}} \times \\
&\times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_{4\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} \right\}} \times \\
&\times \frac{1}{\left\{ k_f^- - k_i^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_i)_{\text{on}} \right\}} \times
\end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{\left\{k_f^- - k_{6\text{on}} - (k_f - k_6)_{\text{on}}\right\}}. \quad (4.52)$$

Finalmente do resultado de (4.52), obtemos, também partículas intermediárias σ_1 e σ_2 que estão avançando para frente no tempo e temos produção de pares; além disso, este resultado produz gráfico de antipartícula como mostramos na Fig. 4.20.

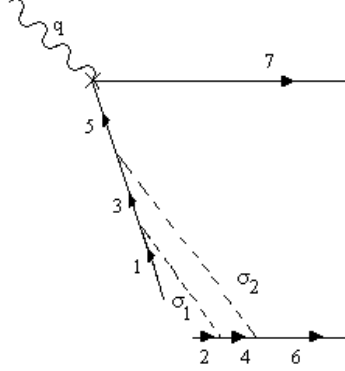


Figura 4.20: Representação diagramática da região 10

4.3 Propagação de Dois Corpos Interagindo com um Campo Eletromagnético em Ordem $\mathcal{O}(g^{2n})$

A Generalização do propagador sob um campo de fundo para N partículas em qualquer ordem no acoplamento é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) = & -\frac{i^{3n+2} (ig)^{2n}}{2^{3(n+1)} (2\pi)^{n+1}} \int dq^- f(q^-) \int \prod_{r=1}^{n+1} \frac{dk_{2r}^-}{[k_i^+ - k_{2r}^+] k_{2r}^+} \frac{\{k_f^- + k_i^- - 2k_{2(n+1)}^-\}}{[k_f^+ - k_{2(n+1)}^+]} \times \\ & \times \prod_{j=1}^n \frac{1}{[k_{2(j+1)}^+ - k_{2j}^+]} \times \\ & \times \prod_{r=1}^{n+1} \frac{1}{\left[k_i^- - k_{2r}^- - (k_i - k_{2r})_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_{2r}^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_{2r}^- - k_{2ron} + \frac{i\varepsilon}{2k_{2r}^+} \right]} \times \\ & \times \prod_{s=1}^n \frac{1}{\left[k_{2(s+1)}^- - k_{2s}^- - (k_{2(s+1)} - k_{2s})_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_{2(s+1)}^+ - k_{2s}^+)} \right]} \times \end{aligned}$$

$$\times \overline{\left[k_f^+ - k_{2(n+1)}^+ - \left[k_f - k_{2(n+1)} \right]_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_{2(n+1)}^+)} \right]}. \quad (4.53)$$

onde

$$\begin{aligned} (k_{2r})_{on} &= \frac{k_{2r\perp}^2 + m^2}{2k_{2r}^+} \\ (k_i - k_{2r})_{on} &= \frac{(k_i - k_{2r})_{\perp}^2 + m^2}{2(k^+ - k_{2r}^+)} \\ (k_{2(s+1)} - k_{2s})_{on} &= \frac{(k_{2(s+1)} - k_{2s})_{\perp}^2 + m_{\sigma_s}^2}{2(k_{2(s+1)}^+ - k_{2s}^+)} \\ (k_f - k_{2(n+1)})_{on} &= \frac{(k_f - k_{2(n+1)})_{\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_{2(n+1)}^+)}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

A expressão 4.53 representa a correção perturbativa ao propagador em ordem $\mathcal{O}(g^{2n})$.

Por outro lado, usando a fórmula abaixo, podemos saber quantas regiões, N_{rp} , possíveis existem

$$N_{rp} = (n_{bi} + n_q + 2)!, \quad (4.55)$$

onde n_{bi} é o número de bósons intermediários e n_q é o número de fontes.

- Para $n_{bi} = 1$, $n_q = 0$, para o caso de ordem $\mathcal{O}(g^2)$, temos que $N_{rp} = (1 + 0 + 2)! = 6$, ou seja, temos 6 regiões possíveis que podemos analisar;
- para $n_{bi} = 1$, $n_q = 1$, para o caso de ordem $\mathcal{O}(g^2)$, temos que $N_{rp} = (1 + 1 + 2)! = 24$, isto é existe 24 regiões possíveis;
- para $n_{bi} = 2$, $n_q = 1$, para o caso de ordem $\mathcal{O}(g^4)$, temos que $N_{rp} = (2 + 1 + 2)! = 120$, isto é existe 120 regiões possíveis.

Capítulo 5

Corrente Eletromagnética

Neste capítulo realizamos o cálculo da corrente eletromagnética para o sistema composto de dois bósons em um campo de fundo a ordem $\mathcal{O}(g^2)$ na frente de luz e derivamos os diagramas de produção de par. A técnica utilizada é baseada na ref. [29]. A corrente eletromagnética para um sistema ligado com vértice constante é construído no referencial de Drell-Yan [17] no limite do momento transferido do fóton $q^+ = \frac{q^0+q^3}{\sqrt{2}} \rightarrow 0$. Vamos mostrar que neste limite, o termo de criação de pares não sobrevive para a corrente J^- . Este resultado é uma surpresa para nós, já que foi mostrado em outros trabalhos que o termo J^- , responsável pela a covariância da corrente [29, 30], sobrevive neste modelo.

Geralmente a corrente electromagnética de sistemas ligados na frente de luz é construída no referencial Drell-Yan [17], no limite onde o momento transferido desaparece, $q^+ = q^- \rightarrow 0$. Nesse limite, o termo criação de par sobrevive e é responsável pela covariância da corrente [30]. Na descrição da corrente electromagnética na frente de luz, temos também o conceito de componente de corrente “bom” e “ruim” [30, 31, 32]. A corrente electromagnética na frente de luz pode ser construída a partir do diagrama triangular de Feynman covariante [33, 34].

Sawicki [33, 34] considerou o diagrama de triângulo para o modelo ϕ^3 , mostrando que no limite $q^+ \rightarrow 0$, a componente J^+ da corrente electromagnética, após a integração na componente k^- não tem nenhuma contribuição de produção de pares. Como consequência deste fato, ele conclui que o obtido é idêntico ao covariante.

Por outro lado, trabalho semelhantes tem sido feitos. Por exemplo, de Melo et al. [30], mostraram que a componente de corrente J^- da corrente de um estado de dois bósons ligados tem contribuição de um termo a mais na corrente no limite $q^+ = q^- \rightarrow 0$, o que é necessário para manter as propriedades de covariância da corrente. Sales et al. [29], derivaram esse mesmo efeito, da corrente eletromagnética, a partir do diagrama de dois bósons não interagentes. Eles mostraram, de fato, que o termo a mais vem da criação de pares, partículas e antipartículas na frente de luz.

Para as componentes J^+ e $J_\perp$ não há contribuição no limite $q^+ \rightarrow 0$. Neste artigo fica claro que mesmo escolhendo momento $q^+ > 0$, para a corrente eletromagnética, há necessidade da contribuição de $q^+ < 0$ para manter a covariância rotacional da corrente J^μ .

O cálculo da corrente em primeira ordem tem sido obtido em [29]. Neste trabalho nos ocuparemos com o cálculo em ordem $\mathcal{O}(g^2)$, com a inclusão de uma troca de bóson. A situação está ilustrada na Fig. 4.1.

5.1 Cálculo da Corrente para o Propagador de Dois Corpos em um Campo de Fundo a Ordem $\mathcal{O}(g^2)$

A descrição do operador corrente eletromagnética, de um sistema composto por dois bósons, é dada pelo processo no qual dois bósons de massa m propagam-se para frente no tempo, e em um dado instante do tempo x^+ , um dos bóson interage com um campo eletromagnético de fundo. As componentes desse operador corrente eletromagnética são obtidas da interação de um dos bósons com o campo eletromagnético de fundo. Na frente de luz este operador de corrente eletromagnética, J^μ , é dada por [29]

$$A \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \bar{x}^\mu} B = A \frac{\partial B}{\partial \bar{x}^\mu} - \frac{\partial A}{\partial \bar{x}^\mu} B, \quad (5.1)$$

onde o índice grego, μ , indica as componentes $-$, $+$ e $\perp$.

Então o propagador de dois corpos em um campo de fundo a ordem $\mathcal{O}(g^2)$ na frente de luz é reescrito como:

$$\begin{aligned} S(x^+) = & (ig)^2 \int dq^- F(q^-) \left\{ \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+ e^{-iq^- \bar{x}_3^+} S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) \times \right. \\ & \left. \times S_4(x^+ - \bar{x}_2^+) S_\sigma(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+) \left[S_3 \frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^\mu} - \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^\mu} S_5 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde $S_3(\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)$ é o propagador do bóson antes da interação com o campo de fundo e $S_5(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_3^+)$ após da interação, como mostrada na Fig. 4.1. A função $F(q^-)$ é a transformada de Fourier do campo externo e é definida como [29] :

$$A^+ = \int dq^- F(q^-) e^{-iq^- \bar{x}^+}. \quad (5.3)$$

A componente do operador de corrente J^μ é obtida a partir do operador $\mathcal{O}^\mu$ que está representado pelo colchete na Eq.(5.2), portanto [29]:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{O}}^\mu &= (ig)^2 \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+ e^{-iq^-\bar{x}_3^+} S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) \times \\ &\times S_4(x^+ - \bar{x}_2^+) S_\sigma(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+) \left[S_3 \frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^\mu} - \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^\mu} S_5 \right].\end{aligned}\quad (5.4)$$

Então usando a definição do propagador e deixando explícita a integração e a dependência em k^- , k^+ e $k_\perp$, temos que

$$\begin{aligned}S_1(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_1^- dk_1^+ d^2 k_{1\perp}}{k_1^+} \frac{e^{-ik_1^- \bar{x}_1^+} e^{-ik_1^+ \bar{x}_1^-} e^{i \vec{k}_{1\perp} \cdot \vec{x}_{1\perp}}}{\left[k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{2k_1^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_1^+} \right]}, \\ S_2(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_2^- dk_2^+ d^2 k_{2\perp}}{k_2^+} \frac{e^{-ik_2^- \bar{x}_2^+} e^{-ik_2^+ \bar{x}_2^-} e^{i \vec{k}_{2\perp} \cdot \vec{x}_{2\perp}}}{\left[k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]}, \\ S_3(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_3^- dk_3^+ d^2 k_{3\perp}}{k_3^+} \frac{e^{-ik_3^- (\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)} e^{-ik_3^+ (\bar{x}_3^- - \bar{x}_1^-)} e^{i \vec{k}_{3\perp} \cdot (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)_\perp}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]}, \\ S_4(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_4^- dk_4^+ d^2 k_{4\perp}}{k_4^+} \frac{e^{-ik_4^- (x^+ - \bar{x}_2^+)} e^{-ik_4^+ (x^- - \bar{x}_2^-)} e^{i \vec{k}_{4\perp} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2)_\perp}}{\left[k_4^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]}, \\ S_5(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_5^- dk_5^+ d^2 k_{5\perp}}{k_5^+} \frac{e^{-ik_5^- (x^+ - \bar{x}_3^+)} e^{-ik_5^+ (x^- - \bar{x}_3^-)} e^{i \vec{k}_{5\perp} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_3)_\perp}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]}, \\ S_\sigma(x^+) &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_\sigma^- dk_\sigma^+ d^2 k_{\sigma\perp}}{k_\sigma^+} \frac{e^{-ik_\sigma^- (\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+)} e^{-ik_\sigma^+ (\bar{x}_2^- - \bar{x}_1^-)} e^{i k_{\sigma\perp} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)_\perp}}{\left[k_\sigma^- - \frac{k_{\sigma\perp}^2 + m^2}{2k_\sigma^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_\sigma^+} \right]},\end{aligned}\quad (5.5)$$

e suas derivadas:

- Com respeito a $\bar{x}_3^+$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^+} &= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_5^- dk_5^+ d^2 k_{5\perp}}{k_5^+} \frac{k_5^- e^{-ik_5^- (x^+ - \bar{x}_3^+)} e^{-ik_5^+ (x^- - \bar{x}_3^-)} e^{i \vec{k}_{5\perp} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_3)_\perp}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_5^+} \right]}, \\ \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^+} &= \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_3^- dk_3^+ d^2 k_{3\perp}}{k_3^+} \frac{k_3^- e^{-ik_3^- (\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)} e^{-ik_3^+ (\bar{x}_3^- - \bar{x}_1^-)} e^{i \vec{k}_{3\perp} \cdot (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)_\perp}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\varepsilon}{2k_3^+} \right]}\end{aligned}\quad (5.6)$$

- Com respeito a $\bar{x}_3^-$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^-} &= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_5^- dk_5^+ d^2 k_{5\perp}}{k_5^+} \frac{k_5^+ e^{-ik_5^-(x^+ - \bar{x}_3^+)} e^{-ik_5^+(x^- - \bar{x}_3^-)} e^{i \vec{k}_{5\perp} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_3)_\perp}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\epsilon}{2k_5^+} \right]}, \\
\frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^-} &= \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_3^- dk_3^+ d^2 k_{3\perp}}{k_3^+} \frac{k_3^+ e^{-ik_3^-(\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)} e^{-ik_3^+(\bar{x}_3^- - \bar{x}_1^-)} e^{i \vec{k}_{3\perp} \cdot (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)_\perp}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\epsilon}{2k_3^+} \right]} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

- Com respeito a $\bar{x}_{3\perp}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_{3\perp}} &= \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_5^- dk_5^+ d^2 k_{5\perp}}{k_5^+} \frac{k_{5\perp} e^{-ik_5^-(x^+ - \bar{x}_3^+)} e^{-ik_5^+(x^- - \bar{x}_3^-)} e^{i \vec{k}_{5\perp} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_3)_\perp}}{\left[k_5^- - \frac{k_{5\perp}^2 + m^2}{2k_5^+} + \frac{i\epsilon}{2k_5^+} \right]}, \\
\frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_{3\perp}} &= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dk_3^- dk_3^+ d^2 k_{3\perp}}{k_3^+} \frac{k_{3\perp} e^{-ik_3^-(\bar{x}_3^+ - \bar{x}_1^+)} e^{-ik_3^+(\bar{x}_3^- - \bar{x}_1^-)} e^{i \vec{k}_{3\perp} \cdot (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)_\perp}}{\left[k_3^- - \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{2k_3^+} + \frac{i\epsilon}{2k_3^+} \right]} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.5) e suas correspondentes derivadas em (5.2), e integrando em $d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+$ em seguida, fazer a transformada de Fourier $\tilde{S}(k_f^-) = \int dx^+ e^{ik_f^- x^+} S(x^+)$, com ajuda das seguintes relações de conservação de momento:

$$\begin{aligned}
k_i &= \text{momento inicial} & k_f &= \text{momento final} & k_\sigma &= k_4 - k_2; \\
k_\sigma &= k_1 - k_3; & k_f &= k_i + q; & q &= k_5 - k_3; \\
k_3 &= k_i - k_4; & k_i &= k_1 + k_2; & k_f &= k_4 + k_5,
\end{aligned} \quad (5.9)$$

o propagador final poderá ser escrito então em função de apenas dois dos momentos, e neste caso escolhemos partículas "espectadoras" em relação à corrente, a 2 e a 4:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= -\frac{i(ig)^2}{2^6(2\pi)^2} \int dq^- F(q^-) \left\{ \int \frac{dk_2^- dk_4^- (k_f^\mu + k_i^\mu - 2k_4^\mu)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \right. \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_2)^+} \right] \left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\epsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+} \right] \left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\epsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+} \right]} \times \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_f - k_4)^+} \right]} \right\}, \quad (5.10)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} k_{2\text{on}} &= \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+}; & (k_i - k_2)_{\text{on}} &= \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)}; & (k_i - k_4)_{\text{on}} &= \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)}; \\ k_{4\text{on}} &= \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+}; & (k_f - k_4)_{\text{on}} &= \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)}; & (k_4 - k_2)_{\text{on}} &= \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Começamos nossa discussão com um exemplo ilustrativo, onde um termo par aparece. Para esta finalidade usamos o “Gráfico Z”, isto é a região 3, $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$. Neste exemplo mostramos que a componente J^- , deste exemplo, não tem contribuição do termo par no referencial de Drell-Yan [17], isto é no limite $q^+ = q^- = 0$.

Vamos a procurar as componentes do operador de corrente J^μ , que como acima se referiu, será obtida a partir do operador $\hat{\mathcal{O}}^\mu$ que está representado pelo colchete na Eq.(5.10), portanto

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}_3^\mu &= -\frac{i(ig)^2}{2^6(2\pi)^2} \int \frac{dk_2^- dk_4^- (k_f^\mu + k_i^\mu - 2k_4^\mu)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_2)^+} \right] \left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\epsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+} \right] \left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\epsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_f - k_4)^+} \right]}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde k_i^μ e k_f^μ são os quadri-momentos iniciais e finais do sistema e m é a massa do bóson. A integração na Eq. (5.12), usando a fórmula de integral de Cauchy sobre k_2^- e k_4^- , tem dez contribuições diferentes de zero para o cálculo de resíduo, mas para o nosso exemplo vamos concentrar nossa atenção em uma região ou seja no intervalo $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$, que corresponde ao Grafico Z ou região 3. A integral, para a componente $\hat{\mathcal{O}}_3^-$ foi feita no capítulo anterior. Assim que só damos a sua solução.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}_3^- &= \frac{i(ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 (k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ &\quad \times \frac{\left[k_f^- - k_i^- - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{(k_f - k_4)} \right]}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

O processo físico representado pela equação (5.13) é a criação de par devido ao fóton. O denominador $\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]^{-1}$ corresponde à propagação no estado intermediário de partícula e antipartícula, composto pelo estado ligado inicial, a antipartícula e a partícula produzido pelo fóton. Os denominadores $\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} \right]^{-1}$, $\left[k_f^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]^{-1}$ e $\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]^{-1}$ são os estados intermediários de duas e três partículas propagado-se para frente no tempo.

Do mesmo modo obtemos para as componentes $\hat{\mathcal{O}}_3^+$ e $\hat{\mathcal{O}}_3^\perp$ que é dada por

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_3^\beta &= -\frac{i(ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 (k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{[k_f^\beta + k_i^\beta - 2k_4^\beta]}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

onde $\beta = +, \perp$. A diferença entre os operadores $\hat{\mathcal{O}}_3^-$ e $\hat{\mathcal{O}}_3^\beta$ está no numerador de (5.13) e (5.14), que têm componentes $+$ e $\perp$ no lugar da componente $-$.

5.2 Contribuição de Modo Zero em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$

Para calcular a corrente eletromagnética gerada pelas diversas configurações, devemos ter os elementos da matriz $J^{-,+, \perp} = \langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} | \Gamma \rangle$, onde Γ é o vértice constante e $\hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp}$ são os operadores da corrente, que podemos obter diretamente da

soma dos resultados finais de cada região. Introduzindo a resolução da unidade em $J^{-,+, \perp} = \langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} | \Gamma \rangle$, ou seja [29]

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} | \Gamma \rangle &= \int dk_j^+ d^2 k_{j\perp} \langle \Gamma | k_j^+, \vec{k}_{j\perp} \rangle \langle k_j^+, \vec{k}_{j\perp} | \times \\
&\quad \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} \int dk_j'^+ d^2 k_{j\perp}' | k_j'^+, \vec{k}_{j\perp}' \rangle \langle k_j'^+, \vec{k}_{j\perp}' | \Gamma \rangle \\
&= \Gamma \int dk_j^+ d^2 k_{j\perp} dk_j'^+ d^2 k_{j\perp}' \langle k_j^+, \vec{k}_{j\perp} | \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} | k_j'^+, \vec{k}_{j\perp}' \rangle \Gamma \\
&= \Gamma^2 \int dk_j^+ d^2 k_{j\perp} dk_j'^+ d^2 k_{j\perp}' \delta(k_j^+ - k_j'^+ - q^+) \delta(\vec{k}_{j\perp} - \vec{k}_{j\perp}' - \vec{q}_\perp) \\
&\quad \times \langle k_j^+, \vec{k}_{j\perp} | \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} | k_j'^+, \vec{k}_{j\perp}' \rangle \\
&= \Gamma^2 \int dk_2^+ d^2 k_{2\perp} dk_4^+ d^2 k_{4\perp} \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp}, \tag{5.15}
\end{aligned}$$

então, continuando com o exemplo da Fig. 4.1, a corrente electromagnética, $J_3^{-,+, \perp}$, da região 3, $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$, , é dada por [29]

$$J_3^{-,+, \perp} = \langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}_3^{-,+, \perp} | \Gamma \rangle = \Gamma^2 \int dk_2^+ d^2 k_{2\perp} dk_4^+ d^2 k_{4\perp} \hat{\mathcal{O}}_3^{-,+, \perp}, \tag{5.16}$$

onde $\hat{\mathcal{O}}_3^-$ é dada pela expressão (5.13),

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_3^- &= \frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 (k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
&\quad \times \left[k_f^- - k_i^- - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{(k_f - k_4)} \right] \times \\
&\quad \times \left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} \right] \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]},
\end{aligned}$$

e as componente + e $\perp$ é dada por (5.14),

$$\hat{\mathcal{O}}_3^\beta = -\frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 (k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{[k_f^\beta + k_i^\beta - 2k_4^\beta]}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}.
\end{aligned}$$

O passo seguinte será efetuar o limite de $q^+ \rightarrow 0$ [29], para logo integrar em k_2^+ e k_4^+ , mas antes fazemos duas mudanças de variáveis, que facilitarão a nossa integração,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{k_i^+ - k_2^+}{q^+} \\
y &= \frac{k_f^+ - k_4^+}{q^+}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Por outro lado, usando (5.9) obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
k_1^+ &= xq^+ \\
k_3^+ &= (y - 1)q^+ \\
k_5^+ &= yq^+ \\
k_\sigma^+ &= (x - y + 1)q^+.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

• **Corrente J_3^-**

Substituindo (5.17) e (5.18) nas equações, (5.13), (5.14) e (5.16) obtemos:

$$\begin{aligned}
J_3^- &= \langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}_3^- | \Gamma \rangle = \Gamma^2 \int dk_2^+ d^2 k_{2\perp} dk_4^+ d^2 k_{4\perp} \hat{\mathcal{O}}^- \\
&= \Gamma^2 \int d^2 k_{2\perp} d^2 k_{4\perp} \left\{ (q^+)^2 \int dx dy \hat{\mathcal{O}}_3^- \right\},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde a contribuição $\hat{\mathcal{O}}_3^-$ toma a forma, como sendo

$$\hat{\mathcal{O}}_3^- = \frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 xq^+ (k_i^+ - xq^+) (y - 1)q^+ (k_f^+ - yq^+) yq^+ (x - y + 1)q^+} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\left[k_f^- - k_i^- - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{yq^+} \right]}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2xq^+} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2yq^+} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x - y + 1)q^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y - 1)q^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2yq^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2yq^+} \right]}, \tag{5.20}
\end{aligned}$$

ou escrita de uma forma mais conveniente

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_3^- &= \frac{i (ig)^2}{2^6} \left(\frac{1}{q^+} \right) \frac{\theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{x(k_i^+ - xq^+) (y - 1)(k_f^+ - yq^+) y(x - y + 1)} \times \\
& \times \frac{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{y} \right]}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x - y + 1)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y - 1)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]}. \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Observamos que a substituição de (5.21) em (5.19), implicará que o elemento de matriz de J_3^- é proporcional a q^+ . Então no referencial de Drell-Yan [17], $q^+ = q^- \rightarrow 0$, a corrente J_3^- não tem contribuição.

• **Corrente J_3^+**

De uma forma semelhante para a componente J_3^+ , temos:

$$\begin{aligned}
J_3^+ &= \langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}_3^+ | \Gamma \rangle = \Gamma^2 \int dk_2^+ d^2 k_{2\perp} dk_4^+ d^2 k_{4\perp} \hat{\mathcal{O}}^+ \\
&= \Gamma^2 \int d^2 k_{2\perp} d^2 k_{4\perp} \left\{ (q^+)^2 \int dx dy \hat{\mathcal{O}}_3^+ \right\}, \tag{5.22}
\end{aligned}$$

onde a contribuição $\hat{\mathcal{O}}_3^+$ será expressa como

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_3^+ &= \frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6} \times \\
&\quad \frac{1}{x(k_i^+ - xq^+) (y-1) (k_f^+ - yq^+) y (x-y+1)} \times \\
&\quad \frac{q^+ (2y-1)}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ \right]} \times \\
&\quad \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\
&\quad \frac{1}{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]} \times \\
&\quad \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]}, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

onde usamos (5.17) e (5.18) e encontramos que $[k_f^+ + k_i^+ - 2k_4^+] = q^+ (2y - 1)$. Observamos que na substituição de (5.23) em (5.22) a corrente J_3^+ é proporcional a $(q^+)^3$. Então no referencial de Drell-Yan, a corrente J^+ , também não há contribuição.

• **Corrente $J_3^\perp$**

Do mesmo modo para $J_3^\perp$

$$\begin{aligned}
J_3^\perp &= \langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}_3^\perp | \Gamma \rangle = \Gamma^2 \int dk_2^+ d^2 k_{2\perp} dk_4^+ d^2 k_{4\perp} \hat{\mathcal{O}}^\perp \\
&= \Gamma^2 \int d^2 k_{2\perp} d^2 k_{4\perp} \left\{ (q^+)^2 \int dx dy \hat{\mathcal{O}}_3^\perp \right\}, \tag{5.24}
\end{aligned}$$

onde a contribuição $\hat{\mathcal{O}}_3^\perp$ tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_3^\perp &= \frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6} \times \\
&\quad \frac{1}{x(k_i^+ - xq^+) (y-1) (k_f^+ - yq^+) y (x-y+1)} \times \\
&\quad \frac{[k_f^\perp + k_i^\perp - 2k_4^\perp]}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ \right]} \times \\
&\quad \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\
&\quad \frac{1}{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]} \times \\
&\quad \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]}. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Observamos que na substituição de (5.25) em (5.24) a corrente $J_3^\perp$ é proporcional a $(q^+)^2$. Então no referencial de Drell-Yan, a corrente $J_3^\perp$, também não há contribuição.

Desta forma, mostramos que para as componentes das correntes J_3^- , J_3^+ e $J_3^\perp$, apenas a contribuição para o resíduo correspondente ao sistema composto sobrevive na integração pelo método da fórmula de Cauchy sobre k^- . Contudo, estas componentes não tem contribuição à produção de pares no limite $q^+ \rightarrow 0$.

De uma forma geral, para este exemplo, contaremos os termos em q^+ para uma análise rápida do resultado no referencial $q^+ \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
& \int dk_2^+ dk_4^+ \Rightarrow (q^+)^2 \int dx dy \\
& \frac{1}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \Rightarrow \frac{1}{(q^+)^4} \\
& \frac{1}{\left[\text{pernas do tipo } a + \frac{b}{cq^+} + \frac{d}{eq^+} + \dots \right]^4} \Rightarrow (q^+)^4 \\
& \text{Numerador do tipo } (a + k_{2on}) \text{ ou } (a + k_{4on}) \Rightarrow (q^+)^0 = 1 \\
& \text{Numerador do tipo } (a + k_{jon}) \text{ com } j \neq 2, 4 \Rightarrow \frac{1}{q^+}, \tag{5.26}
\end{aligned}$$

onde a são os k_i , k_f , $k_f - k_i$, etc e os b , d , etc são os k_{2on} , k_{4on} ou k_{jon} . Percebemos então, ao multiplicar esses fatores, que sempre sobrarão ao menos $(q^+)^1$, e no limite $q^+ \rightarrow 0$, a corrente para todas as regiões se anula. O que se conclui desse resultado, é que ter introduzido um bóson virtual em comparação à configuração de [29], não altera a corrente, visto que os fatores da segunda e terceira linhas de (5.26) se cancelam. O fator importante é o vértice com fóton, visto que o mesmo aumenta a ordem do numerador, e apenas com fatores corretos de $\frac{1}{q^+}$ consegue-se cancelar o fator da mudança de variável. Os cálculos das outras regiões estão no apêndice D.

5.3 Observação

Neste Capítulo fazemos os cálculos de corrente na frente de luz o resultado completo para se comparar a frente de luz com o resultado covariante é a soma de (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14). No referencial de Drell-Yan [17] não há contribuição para a corrente em ordem $\mathcal{O}(g^2)$. Para outras ordens, não adianta introduzir mais bósons, visto que as ordens em q^+ dadas pela segunda e terceira linhas de (5.26) sempre se cancelarão. Quem faz a diferença é o numerador, o qual vem justamente do vértice eletromagnético $\left[S_3 \frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^+} - \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^+} S_5 \right]$ que faz cair da exponencial um termo k^- , o que modificará a ordem da última linha em (5.26). Então, suspeitamos que,

no referencial de Drell-Yan [17], o próximo gráfico que contribuiria, além da ordem $\mathcal{O}(g^2)$, seria uma mesma situação da Fig. 4.1, mas com um segundo fóton compondo o campo de fundo. Na seguinte seção generalizamos para n ordens

5.4 Para n bósons intermediários e um Campo externo

De um modo geral podemos contar os termos em q^+ para n bósons intermediários :

$$\begin{aligned}
& \int \Pi_{j=1}^{n+1} dk_{2j}^+ \Rightarrow (q^+)^{n+1} \int \Pi_{j=1}^{n+1} dx_j \\
& \Pi_{j=0}^n \frac{1}{(k_i^+ - k_{2j+2}^+) k_{2j+2}^+} \Pi_{j=1}^n \frac{1}{(k_{2j+2}^+ - k_{2j}^+) (k_f^+ - k_{2n+2}^+)} \Rightarrow \frac{1}{(q^+)^{2n+2}} \\
& \frac{1}{\left[\text{pernas do tipo } a + \frac{b}{cq^+} + \frac{d}{eq^+} + \dots \right]} \Rightarrow (q^+)^{2n+2} \\
& \text{Numerador do tipo } (a + k_{2on}) \text{ ou } (a + k_{4on}) \Rightarrow (q^+)^0 = 1 \\
& \text{Numerador do tipo } (a + k_{jon}) \text{ com } j \neq 2, 4, \dots, 2n+2 \Rightarrow \frac{1}{q^+} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

onde n : Número de bósons intermediários e os a são os k_i , k_f , $k_f - k_i$, etc e os b , d , etc são os k_{2on} , k_{4on} ou k_{jon} . Novamente percebemos que ao multiplicar esses fatores sempre sobrar um termo que é proporcional a $(q^+)^n$, e no limite $q^+ \rightarrow 0$, a corrente para todas as regiões se anula. Portanto, não adianta introduzir mais bósons, visto que as ordens em q^+ dadas pela segunda e terceira linhas de (5.27) sempre se cancelarão.

Capítulo 6

Tensor de Polarização do Vácuo

A teoria quântica de campos é uma consequência da união da mecânica quântica com a relatividade restrita. Esta teoria baseia-se na teoria de perturbação. Portanto, as quantidades de interesse físico, como as funções de Green, são construídas por meio de séries perturbativas. Contudo, a teoria quântica de campos tem enormes problemas de divergências em todos seus aspectos perturbativos. Como exemplo, podemos citar o seguinte propagador de Feynman [35].

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \quad (6.1)$$

Este propagador é uma quantidade divergente, o qual modifica o propagador livre e contribui para a auto-energia. Para fazer com que quantidades semelhantes a estas tenham um significado físico (seja finita), é necessário introduzir um parâmetro auxiliar chamado de parâmetro regulador. Este parâmetro é introduzido a fim de separar as singularidades existentes no propagador e logo, usando-se uma prescrição de renormalização, ajustar os parâmetros da teoria, eliminamos as divergências isoladas e restabelecemos a teoria original com a eliminação do parâmetro regulador. O valor renormalizado é aquele ao qual atribuímos significado físico. Na literatura existe uma variedade de técnicas ou métodos de regularização, como podemos citar algumas: regularização dimensional, regularização de Pauli-Villars [15], regularização analítica [36, 37], cut-off, etc. Mas, o critério para escolher uma boa regularização, vai ser aquele que preserva a maior quantidade de simetrias físicas originais quanto possível [38].

O uso das coordenadas da frente de luz na teoria quântica de campos sempre trouxe algumas controvérsias e problemas. Neste trabalho exploramos aspectos do formalismo com respeito ao uso da regularização dimensional na auto-energia do fóton e como o propagador fermiônico tem uma participação importante nos resultados.

Começamos a calcular, como um exemplo de aplicação, a regularização dimensional da função de 4 pontos a ordem $\mathcal{O}(g^2)$ do modelo escalar ϕ^4 , no formalismo das coordenadas de frente de luz [1]. Nossa motivação em estudar esse modelo está no fato de que o cálculo serve para se estudar as correções de um *loop* nas auto-interações dos campos não abelianos de gauge (campos de gluons).

Em seguida estudamos o tensor de polarização do vácuo (TPV) para o fóton, numa primeira correção ao propagador desta partícula. O *loop* é composto de um férmion e um anti-férmion, e por isso temos uma situação ideal para testar a necessidade ou não do termo instantâneo e de suas consequências naturais, sendo que uma delas é a importância do modo zero. O vácuo na frente de luz pode não ser tão trivial assim, sendo necessário considerar a divisão entre partícula e anti-partícula dada pela condição de momento nulo. Usando o tensor de polarização é possível testar também a identidade de Ward nessa ordem de expansão. Em um resultado anterior, usando outros meios mais diretos [39], foi mostrado que o propagador incompleto é insuficiente para que a identidade de Ward seja obedecida, como podia ser esperado. Porém, veremos que no tratamento da sua regularização dimensional temos uma surpresa.

6.1 A Função de 4 Pontos em Ordem $\mathcal{O}(g^2)$

Como exemplo de aplicação calculamos a função de 4 pontos a ordem $\mathcal{O}(g^2)$ [35]. Nosso objetivo nesta seção é mostrar (com um exemplo), a técnica de regularização dimensional, na frente de luz

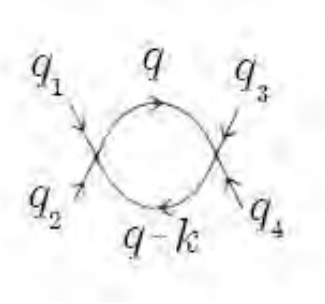


Figura 6.1: Diagrama da Função 4 pontos

Definimos a Lagrangiana em D dimensões [35]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\mu^{4-D}}{4!} g \phi^4, \quad (6.2)$$

onde μ é um parâmetro de massa arbitrária. A integral de *loop* é dada por

$$I = \frac{1}{2}g^2 (\mu^2)^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)} \frac{1}{(p^2 - m^2)}, \quad (6.3)$$

onde

$$p^\mu = (q - k)^\mu. \quad (6.4)$$

Agora expressamos (6.3) na frente de luz

$$I = \frac{1}{2}g^2 (\mu^2)^{2-d} \int \frac{dq^+ d^d q_\perp}{(2\pi)(2\pi)^d} \int \frac{dq^-}{(2\pi)} \frac{1}{4q^+ p^+ \left(q^- - \frac{q_\perp^2 + m^2}{2q^+} + \frac{i\varepsilon}{2q^+} \right) \left(p^- - \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p^+} + \frac{i\varepsilon}{2p^+} \right)}, \quad (6.5)$$

e integramos em q^- , com a aplicação do método do residuo de Cauchy. Estes pólos são localizados em

$$\begin{aligned} (1) \quad q^- &= \frac{q_\perp^2 + m^2}{2q^+} - \frac{i\varepsilon}{2q^+}; \\ (2) \quad q^- &= k^- + \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p^+} - \frac{i\varepsilon}{2(q^+ - k^+)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

É facil mostrar que apenas na região $0 < q^+ < k^+$, temos resultado não nulo. Assim escolhemos o pólo 2, i.é., $q^- = k^- + \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p^+}$. Então a expressão (6.5) fica

$$I = \frac{i}{2}g^2 (\mu^2)^{2-d} \int_0^{k^+} \frac{dq^+}{(2\pi)} \int \frac{d^d q_\perp}{(2\pi)^d} \frac{1}{4q^+ p^+ \left(k^- + \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p^+} - \frac{q_\perp^2 + m^2}{2q^+} \right)}. \quad (6.7)$$

Para facilitar as contas expressamos (6.7) na seguinte forma

$$I = ig^2 \frac{(\mu^2)^{2-d}}{4k^+} \int_0^{k^+} \frac{dq^+}{(2\pi)} \int \frac{d^d q_\perp}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(q_\perp^2 + \frac{q^+}{k^+} [k_\perp^2 - 2q_\perp k_\perp + 2p^+ k^-] + m^2 \right)}, \quad (6.8)$$

onde

$$\begin{aligned} q_\perp^2 &= q_i \cdot q_i, \\ k_\perp^2 &= k_i \cdot k_i, \\ q_\perp \cdot k_\perp &= q_i \cdot k_i, \end{aligned} \quad (6.9)$$

logo fazendo uso do seguinte *shift* $q_\perp = l_\perp + \left(\frac{q^+}{k^+} \right) k_\perp$, o denominador de (6.8) fica

$$I = ig^2 \frac{(\mu^2)^{2-d}}{4k^+} \int_0^{k^+} \frac{dq^+}{(2\pi)} \int \frac{d^d l_\perp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_\perp^2 + \Delta)}, \quad (6.10)$$

onde

$$\Delta = \left\{ \left(\frac{p^+}{k^+} \right) \left(\frac{q^+}{k^+} \right) M^2 + m^2 \right\}, \quad (6.11)$$

com

$$M^2 = 2k^+k^- - k_\perp^2. \quad (6.12)$$

Agora usando a integral do apêndice E, obtemos:

$$I = ig^2 \frac{(\mu^2)^{2-d}}{4k^+} \int_0^{k^+} \frac{dq^+}{(2\pi)} \left\{ \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}} \right\}, \quad (6.13)$$

e fazendo um pouco de álgebra obtemos

$$I = ig^2 \frac{(\mu)^{2-d}}{4k^+} \int_0^{k^+} \frac{dq^+}{(2\pi)} \left\{ \frac{1}{(4\pi)} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \right\} (\mu)^{2-d} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}}. \quad (6.14)$$

Por outro lado temos na regularização dimensional do espaço bidimensional transversal,

$$d = 2 \rightarrow 2 - d = \varepsilon, \quad (6.15)$$

de (6.15), obtemos

$$1 - \frac{d}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6.16)$$

ou seja

$$\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon). \quad (6.17)$$

Substituindo (6.17) em (6.14), obtemos

$$\begin{aligned} I &= ig^2 \frac{\mu^\varepsilon}{4k^+} \int_0^{k^+} \frac{dq^+}{(2\pi)} \left\{ \frac{1}{(4\pi)} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)\right) \right\} \mu^\varepsilon \Delta^{-\frac{\varepsilon}{2}} \\ &= \left\{ ig^2 \frac{\mu^\varepsilon}{16\pi^2 \varepsilon k^+} \int_0^{k^+} dq^+ - ig^2 \frac{\mu^\varepsilon \gamma}{32\pi^2 k^+} \int_0^{k^+} dq^+ + O(\varepsilon) \right\} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right)^\varepsilon \\ &= \left\{ ig^2 \frac{\mu^\varepsilon}{16\pi^2 \varepsilon k^+} [q^+]_0^{k^+} - ig^2 \frac{\mu^\varepsilon \gamma}{32\pi^2 k^+} [q^+]_0^{k^+} + O(\varepsilon) \right\} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right)^\varepsilon \\ &= \left\{ ig^2 \frac{\mu^\varepsilon}{16\pi^2 \varepsilon} - ig^2 \frac{\mu^\varepsilon \gamma}{32\pi^2} + O(\varepsilon) \right\} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right)^\varepsilon \end{aligned} \quad (6.18)$$

Portanto

$$I = \frac{ig^2 \mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right\} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right)^\varepsilon. \quad (6.19)$$

Por outro lado, usando a seguinte serie em nossas contas

$$a^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln a + \dots, \quad (6.20)$$

temos que $\left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right)^\varepsilon$, é

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right) + \dots \quad (6.21)$$

Substituindo (6.21) em (6.19), obtemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right\} \left\{ 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right) + \dots \right\} \\ &= \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + 2 \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right) - \gamma - \varepsilon \gamma \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}\right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

e finalmente

$$I = \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} + \textit{finito}. \quad (6.22)$$

Este resultado está em concordância com o resultado de [35]. Mostramos desta forma nossa técnica de regularização dimensional na frente de luz. Na próxima seção estudamos o TPV para o fóton, numa primeira correção ao propagador desta partícula.

6.2 Correção a um *loop*

A correção a um *loop* é a contribuição de segunda ordem do operador de espalhamento para a auto-interação do campo de radiação, conhecida como auto-energia do fóton. Uma maneira de escrevermos o espalhamento de partículas é pelo uso da representação de interação da mecânica quântica. Nessa representação temos a transição de um estado inicial $|a\rangle$ para um estado final $\langle b|$, ou seja, o efeito da interação, é descrito pelo operador de espalhamento ou matriz S , tal que

$$\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle = \langle b | S | a \rangle. \quad (6.23)$$

A matriz S , nos fornece todas as formas pelas quais o estado $|a\rangle$ é levado ao estado final $|b\rangle$. Na representação de interações isso pode ser feito iterativamente através de uma expansão em série de potências da carga elétrica, ou seja

$$S = 1 + \sum_1^\infty S_n, \quad (6.24)$$

onde

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x^1 \int d^4x^2 \dots \int d^4x^{(n)} T \left[H_I(x^1) H_I(x^2) \dots H_I(x^{(n)}) \right] \quad (6.25)$$

O símbolo $T \left[H_I(x^1) H_I(x^2) \dots H_I(x^{(n)}) \right]$ significa que os $H_n(x^{(i)})$ estão ordenados no tempo de forma que ele é crescente da direita para esquerda, é chamado ordenamento temporal. Na eletrodinâmica quântica a interação entre fótons e elétrons é dada pela densidade hamiltoniana de interação

$$H_I(x) = -ie : A_\mu(x) \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) :, \quad (6.26)$$

onde os operadores de criação e aniquilação de fótons e elétrons estão ordenados.

Substituindo (6.26) em (6.25) o produto cronológico pode ser reduzido ao produto ordenado normal envolvendo todos os possíveis conjuntos de contrações. As que não se anulam são

$$\langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(x')] | 0 \rangle = -i\delta_{\mu\nu} S(x - x') \quad (6.27)$$

$$\langle 0 | T [\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x')] | 0 \rangle = iD_{\alpha\beta}(x - x') \quad (6.28)$$

onde

$$D_{\text{foton}}(x - x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (6.29)$$

é o propagador do fóton no gauge de Feynman, enquanto que

$$S_{\text{eletron}}(x - x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iqx} \frac{i\gamma^\mu q_\mu - m}{q^2 + m^2 + i\varepsilon} \quad (6.30)$$

é o propagador do elétron.

Interessa-nos neste estudo abordar somente o termo da matriz S que indica a auto-energia do fóton, ou a polarização do vácuo. Portanto, para ordens superiores do desenvolvimento de S , o termo de auto-energia pode parecer como correção de uma linha interna ou externa do diagrama. Podemos dizer que todo diagrama que, por si ou por parte de um diagrama mais complexo, tenha duas pernas externas de fótons e nenhuma de elétron é diagrama de auto-energia do fóton. Nesse caso, podemos escrever

$$D^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} D(k) + D(k) P^{\mu\nu}(k^2) D(k) \quad (6.31)$$

onde o primeiro termo da correção do lado direito representa o propagador do foton sem correção, $D^{\mu\nu}(k)$ é o propagador corrigido até a segunda ordem e $P^{\mu\nu}$ é o tensor de polarização.

Por conveniência, vamos reescrever o tensor de polarização, como

$$P^{\mu\nu} = i\Pi^{\mu\nu} \quad (6.32)$$

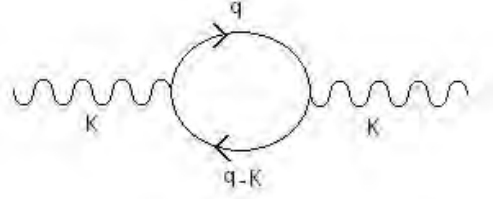


Figura 6.2: Loop da auto-energia do fóton

Sendo k^μ o momento do fóton e q^μ e $p^\mu = (q - k)^\mu$ os momentos internos dos férmions, a primeira correção para a auto-energia do fóton é dada por:

$$i\Pi^{\mu\nu} = -(-ie)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \gamma^\mu S(q) \gamma^\nu S(p) \}, \quad (6.33)$$

onde $S(q)$ é o propagador do férmion no espaço dos momentos. O sinal negativo tem origem na matriz S , pela propriedade de anti-comutação dos férmions. Dividiremos o propagador fermiônico na sua parte principal, aqui chamada de “incompleta” e na parte instantânea que é comumente descartada:

$$S_C(q) = S_I + \frac{i\gamma^+}{2q^+}, \quad (6.34)$$

$$S_I = \frac{i(\not{q}_{on} + m)}{2q^+(q^- - q_{on})}, \quad (6.35)$$

onde

$$\begin{aligned} q_{on} &= \frac{m^2 + q_\perp^2}{2q^+} \\ \not{q}_{on} &= q^+ \gamma^- + q_{on} \gamma^+ + q_i \gamma^i, \text{ índice latino } = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Substituindo (6.34) em (6.33), teremos

$$i\Pi_C^{\mu\nu} = i\Pi_I^{\mu\nu} - (-ie)^2 \int \frac{d^2 q dq^- dq^+}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma^\mu S_I(q) \gamma^\nu i\gamma^+}{2p^+} + \right. \quad (6.37)$$

$$\left. + \frac{\gamma^\mu i\gamma^+ \gamma^\nu S_I(q-k)}{2q^+} + \frac{\gamma^\mu i\gamma^+ \gamma^\nu i\gamma^+}{4q^+ p^+} \right\}; \quad (6.38)$$

onde

$$i\Pi_I^{\mu\nu} = -\frac{e}{4(2\pi)^4} \int d^2 q dq^+ dq^- \frac{\text{Tr}(N_I^{\mu\nu})}{q^+ p^+ \left(q^- - q_{on} + \frac{i\varepsilon}{2q^+} \right) \left(p^- - p_{on} + \frac{i\varepsilon}{2p^+} \right)} \quad (6.39)$$

com

$$N_I^{\mu\nu} = \gamma^\mu (\not{q}_{on} + m) \gamma^\nu (\not{p}_{on} + m)$$

6.2.1 O Caso Incompleto

Começando então com o caso incompleto, teremos de (6.33) e (6.35) o seguinte termo dentro do traço no numerador:

$$N_I^{\mu\nu} = \gamma^\mu (\not{q}_{on} + m) \gamma^\nu (\not{p}_{on} + m). \quad (6.40)$$

Temos que calcular o traço deste termo e devemos então usar várias propriedades das matrizes gama na frente de luz, além de conferir se as propriedades do caso covariante também valem aqui. A propriedade de que o traço de um número ímpar de matrizes gama é nulo é verificada usando-se γ^5 na notação covariante, junto com suas propriedades $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ e $(\gamma^5)^2 = I$. Teremos que descobrir o que é γ^5 na Frente de Luz e determinar se ele também obedece essas propriedades. Esta conta está feita no Apêndice E, e felizmente poderemos também usar que o traço de um número ímpar de matrizes gama é nulo, eliminando vários termos. Usando então (6.36) temos:

$$\begin{aligned} N_I^{\mu\nu} = & q^+ p^+ \gamma^\mu \gamma^- \gamma^\nu \gamma^- + q^+ p_{on} \gamma^\mu \gamma^- \gamma^\nu \gamma^+ + q_{on} p_{on} \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu \gamma^+ + \\ & + q_{on} p^+ \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu \gamma^- + q^+ p_j \gamma^\mu \gamma^- \gamma^\nu \gamma^j + q_i p^+ \gamma^\mu \gamma^i \gamma^\nu \gamma^- + \\ & + q_{on} p_j \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu \gamma^j + q_i p_{on} \gamma^\mu \gamma^i \gamma^\nu \gamma^+ + q_i p_j \gamma^\mu \gamma^i \gamma^\nu \gamma^j + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Traços

Como também partimos da propriedade fundamental $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ na frente de luz, podemos usar a seguinte propriedade na qual se chega usando apenas $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (6.42)$$

Devemos agora fazer o traço deste numerador escolhendo as componentes uma a uma. Devemos lembrar as propriedades listadas no Apêndice E (principalmente a métrica na frente de luz) e a ciclicidade do traço, além da simetria do tensor:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(N_I^{++}) &= 8q^+p^+; \\
\text{Tr}(N_I^{-+}) &= \text{Tr}(N_I^{+-}) = 4(m^2 + q^j \cdot p^j); \\
\text{Tr}(N_I^{r+}) &= \text{Tr}(N_I^{+r}) = 4(q^+p^r + q^r p^+); \\
\text{Tr}(N_I^{--}) &= 8q_{on}p_{on}; \\
\text{Tr}(N_I^{r-}) &= \text{Tr}(N_I^{-r}) = 4(q_{on}p^r + q^r p_{on}); \\
\text{Tr}(N_I^{sr}) &= \text{Tr}(N_I^{rs}) = 4[(m^2 - q^+p_{on} - q_{on}p^+ + q^j \cdot p^j)g^{sr} + q^s p^r + q^r p^s].
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Integração em q^-

De (6.33), e (6.35) temos

$$i\Pi_I^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4(2\pi)^4} \int d^2q dq^+ dq^- \frac{\text{Tr}(N_I^{\mu\nu})}{q^+p^+ \left(q^- - q_{on} + \frac{i\varepsilon}{2q^+}\right) \left[p^- - p_{on} + \frac{i\varepsilon}{2p^+}\right]}, \tag{6.44}$$

e a integral em dq^- é igual para todos, independentemente do numerador. Temos dois pólos para a integral complexa:

1. $q^- = q_{on} - \frac{i\varepsilon}{2q^+}$;
2. $q^- = k^- + p_{on} - \frac{i\varepsilon}{2p^+}$.

Considerando apenas o setor positivo (partícula), temos duas regiões possíveis para integral complexa, $0 < q^+ < k^+$ e $0 < k^+ < q^+$. Na Fig. 6.3 vemos que apenas para a primeira região temos um resultado não-nulo. Tomando como pólo $q^- = k^- + p_{on}$, ficaremos com

$$\Pi_I^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4(2\pi)^3} \int d^2q dq^+ \frac{\text{Tr}(N_I^{\mu\nu}) \Theta(q^+) \Theta(k^+ - q^+)}{q^+p^+ [k^- - q_{on} + p_{on}]}, \tag{6.45}$$

ou

$$\Pi_I^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{2(2\pi)^3 k^+} \int_0^{k^+} dq^+ \int d^2q_{\perp} \frac{\text{Tr}(N_I^{\mu\nu})}{\left[q_{\perp}^2 + \left(\frac{q^+}{k^+}\right) (k_{\perp}^2 - 2q_{\perp} \cdot k_{\perp} + 2p^+k^-) + m^2\right]}. \tag{6.46}$$

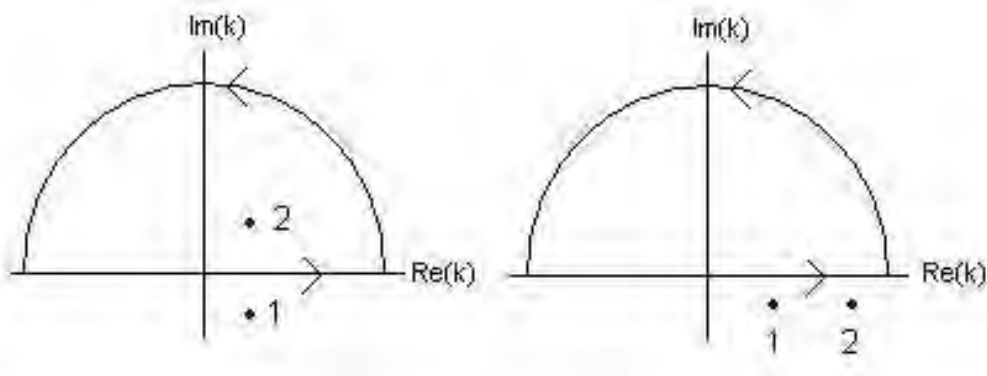


Figura 6.3: Distribuição dos pólos no plano complexo $0 < q^+ < k^+$ e $0 < k^+ < q^+$

Regularização Dimensional

O método de regularização dimensional, que consiste em introduzir o parâmetro regularizador na dimensão do espaço-tempo, foi introduzido por Bollini e Giambiagi [40, 41], 't Hooft e Veltman [42], Ashmore [43] entre outros. A idéia do método é generalizar o número de dimensões no espaço-tempo para 2ω dimensões (o fator 2 é mera conveniência nas manipulações algébricas). Pode-se questionar sobre o significado físico dessa generalização, já que 2ω é qualquer complexo. Podemos afirmar que os métodos de regularização são artifícios matemáticos para obter resultados finitos de integrais divergentes. Nesse sentido não há nenhum problema. Porém devemos ressaltar que a idéia de passar de uma descrição usando parâmetros discretos para uma descrição na qual usamos parâmetros contínuos é comum na Física.

Faremos em seguida o cálculo da integral em $d^2q_\perp$ na Eq.(6.46). Para tanto, usaremos a regularização dimensional para um espaço Euclidiano, e no nosso caso $D = 2$. Para usar as fórmulas do Apêndice E.3, precisamos fazer, também, uma mudança de variáveis, dada por $q_\perp = l_\perp + \left(\frac{q^+}{k^+}\right) k_\perp$. O denominador ficará

$$q_\perp^2 + \left(\frac{q^+}{k^+}\right) (k_\perp^2 - 2q_\perp \cdot k_\perp + 2p^+ k^-) + m^2 = (l_\perp^2 + \Delta), \quad (6.47)$$

onde

$$\Delta = \left\{ \frac{q^+ p^+}{(k^+)^2} M^2 + m^2 \right\}$$

com

$$M^2 = k^\mu k_\mu = 2k^+ k^- + k_\perp^2$$

A expressão (6.46) será então escrita como

$$\Pi_I^{\mu\nu} = -\frac{\mu^{2-D}e^2}{4\pi k^+} \int_0^{k^+} dq^+ \int \frac{d^D l_\perp}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr}(N_I^{\mu\nu})}{(l_\perp^2 + \Delta)}, \quad (6.48)$$

lembrando que também devemos fazer a mudança $q_\perp = l_\perp + \left(\frac{q^+}{k^+}\right) k_\perp$ no numerador.

Integração em q^+

Usando os resultados (6.43), e também (E.14 – E.17), teremos

$$\begin{aligned} \Pi_I^{++} &= \frac{e^2}{12\pi^2} [k^+]^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) - \gamma + \dots \right\} \\ \Pi_I^{-+} &= \frac{e^2}{12\pi^2} [k^+ k^- - M^2] \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) - \gamma + \dots \right\} \\ \Pi_I^{r+} &= \frac{e^2}{12\pi^2} [k^r k^+] \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) - \gamma + \dots \right\} \\ \Pi_I^{--} &= \frac{e^2}{12\pi^2} \left[(k^-)^2 - 3m^2 g^{ij} \frac{k_i k_j}{(k^+)^2} \right] \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) - \gamma + \dots \right\} \\ \Pi_I^{-r} &= \frac{e^2}{12\pi^2} \left[k^- k^r + 3m^2 g^{ri} \frac{k_i}{k^+} \right] \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) - \gamma + \dots \right\} \\ \Pi_I^{rs} &= \frac{e^2}{12\pi^2} [k^r k^s - g^{sr} (M^2 + 3m^2)] \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) - \gamma + \dots \right\} \end{aligned} \quad (6.49)$$

Por uma questão de conveniência, usaremos somente os primeiros termos dos resultados de (6.49), ou seja

$$\begin{aligned} \Pi_I^{++} &= \frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon} [k^+]^2; \\ \Pi_I^{-+} &= \frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon} [k^+ k^- - M^2]; \\ \Pi_I^{r+} &= \frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon} [k^r k^+]; \\ \Pi_I^{--} &= \frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon} \left[(k^-)^2 - 3m^2 g^{ij} \frac{k_i k_j}{(k^+)^2} \right]; \\ \Pi_I^{-r} &= \frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon} \left[k^- k^r + 3m^2 g^{ri} \frac{k_i}{k^+} \right]; \\ \Pi_I^{rs} &= \frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon} [k^r k^s - g^{sr} (M^2 + 3m^2)]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

A Identidade de Ward

A invariancia por transformações de gauge é um aspecto importante da teoria e, por consistência, não deve ser perdida, ou seja, a invariancia de gauge deve ser um guia para definir integrais divergentes que são indeterminadas. Essa é a importância da

identidade de Ward, que afirma: o momento do fóton é transversal ao seu tensor de polarização.

Com os resultados (6.50), poderemos testar se a Identidade de Ward é obedecida para o caso do propagador incompleto, ou seja,

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0. \quad (6.51)$$

Na frente de luz, esta identidade se tornará

$$k^- \Pi^{+\nu} + k^+ \Pi^{-\nu} + k_r \Pi^{r\nu} = 0. \quad (6.52)$$

Devemos checar a identidade (6.52) escolhendo todas as componentes para o índice ν . Teremos então:

$$\begin{aligned} k^- \Pi_I^{++} + k^+ \Pi_I^{-+} + k_r \Pi_I^{r+} &= 0, \\ k^- \Pi_I^{+-} + k^+ \Pi_I^{--} + k_r \Pi_I^{r-} &= 0, \\ k^- \Pi_I^{+r} + k^+ \Pi_I^{-r} + k_s \Pi_I^{rs} &= 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Surpreendentemente, o propagador incompleto obedece a identidade de Ward. Não esperaríamos isso, já que em [39], através de um outro caminho, foi mostrado que é necessário o propagador completo do férmion para chegarmos corretamente na identidade de Ward em primeira ordem através do vértice. Talvez esse fato aponte para apenas uma coincidência, o que permitiu que em trabalhos anteriores fosse usado o propagador incompleto sem que se percebesse a necessidade do modo zero.

Traço do Tensor de Polarização

Além da identidade de Ward, temos outra propriedade do tensor de polarização que deveria ser obedecida, $\Pi_\mu^\mu(M^2 = 0) = 0$. Aqui na verdade não é claro para nós se a condição é $k^\mu k_\mu = 0$ ou $k = 0$, já que em bibliografias diferentes essas duas condições são colocadas. Na frente de luz, essa propriedade daria, tomando o traço do tensor incompleto (usando a métrica dada no Apêndice A.1):

$$\begin{aligned} (\Pi_I)_\mu^\mu &= \Pi_I^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \\ &= \Pi_I^{+-} g_{+-} + \Pi_I^{-+} g_{-+} + \Pi_I^{rs} g_{rs} \\ &= 2\Pi_I^{+-} + \Pi_I^{rs} g_{rs} \\ &= -\frac{e^2}{2\pi^2\epsilon} (M^2 + 2m^2), \end{aligned} \quad (6.54)$$

o que implica em

$$\Pi_\mu^\mu(M^2=0) = -\frac{e^2 m^2}{\pi^2 \varepsilon}. \quad (6.55)$$

No caso covariante esta conta também não se anula, e o termo que sobra é justamente o que se subtrai do tensor de polarização no começo das contas para eliminar os infinitos. No caso da frente de luz, ainda não está claro para nós qual seria o papel deste termo. A presença de m^2 talvez indique o mesmo problema das componentes Π_I^{--} , Π_I^{-r} e Π_I^{rs} . Uma análise do caso completo pode apontar a solução.

6.2.2 O Caso Completo

Apesar de haver uma diferença entre o tensor completo e o incompleto, mostraremos a seguir que os termos a mais se anulam na regularização dimensional. Devido ao fato de só aparecer um polo imaginário nestes casos, é preciso tomar cuidado com a integral complexa no contorno, pois ela dará uma contribuição. Os dois primeiros termos são semelhantes, diferindo apenas por um *shift* no momento. Analisando o segundo termo de (6.37), teríamos em dq^- uma integral do tipo $\int \frac{dq^-}{[q^- - k^- - (q_{on} - k_{on})]}$:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^R f(z) dz + \int_0^{-\pi} \frac{d\theta i R e^{i\theta}}{[i R e^{i\theta} - k^- - (q_{on} - k_{on})]} \right\} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq^-}{[q^- - k^- - (q_{on} - k_{on})]} + \int_0^{-\pi} d\theta i &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq^-}{[q^- - k^- - (q_{on} - k_{on})]} &= i\pi, \end{aligned} \quad (6.56)$$

o que daria

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 q dq^- dq^+}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{\gamma^\mu i \gamma^+ \gamma^\nu S_I(q-k)}{2q^+} \right\} &= i\pi \int \frac{d^2 q dq^+}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{i \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu \gamma^-}{4q^+} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i p_{on} \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu \gamma^+}{4q^+ p^+} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i p_i \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu \gamma^i}{4q^+ p^+} \right\}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

O próximo passo seria resolver a integral em $d^2 q$, mas nenhum denominador depende de q^2 e portando não podemos reescrever tudo como $\frac{A^{\mu\nu}}{(q^2+\Delta)}$. Usaremos o truque de multiplicar tudo por $\frac{(q^2+\Delta)}{(q^2+\Delta)}$. O mesmo será feito com o primeiro e o último termo de (6.37). De acordo com o numerador, teríamos termos do tipo $\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2+\Delta)}{(q^2+\Delta)}$, $\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_{on}(q^2+\Delta)}{(q^2+\Delta)}$, $\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{p_{on}(q^2+\Delta)}{(q^2+\Delta)}$ ou $\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_i(q^2+\Delta)}{(q^2+\Delta)}$; o último termo é

imediato ver que se anula por ser um integrando ímpar num intervalo simétrico. Os outros também se anularão:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2 + \Delta)}{(q^2 + \Delta)} &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{q^2}{(q^2 + \Delta)} + \frac{\Delta}{(q^2 + \Delta)} \right] \\
&= \left(-\frac{\Delta}{2\pi\epsilon} \right) + \Delta \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} \right) \\
&= 0;
\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_{on}(q^2 + \Delta)}{(q^2 + \Delta)} &= \frac{1}{2q^+} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(m^2 - q^2)(q^2 + \Delta)}{(q^2 + \Delta)} \\
&= \frac{1}{2q^+} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{m^2(q^2 + \Delta)}{(q^2 + \Delta)} - \frac{q^2(q^2 + \Delta)}{(q^2 + \Delta)} \right] \\
&= 0 - \frac{1}{2q^+} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4 + q^2\Delta}{(q^2 + \Delta)} \\
&= -\frac{1}{2q^+} \left[\left(\frac{\Delta^2}{2\pi\epsilon} \right) + \Delta \left(-\frac{\Delta}{2\pi\epsilon} \right) \right] \\
&= 0;
\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{p_{on}(q^2 + \Delta)}{(q^2 + \Delta)} &= \frac{1}{2p^+} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{-q^4 + 2q^2(q \cdot k) + q^2(m^2 - k^2 - \Delta) +}{(q^2 + \Delta)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\Delta(q \cdot k) + \Delta(m^2 - k^2)}{(q^2 + \Delta)} \right] \\
&= \frac{1}{2p^+} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{[-q^4 + q^2(m^2 - k^2 - \Delta) + \Delta(m^2 - k^2)]}{(q^2 + \Delta)} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon p^+} (-\Delta^2 - \Delta m^2 + \Delta k^2 + \Delta^2 + \Delta m^2 - \Delta k^2) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Teremos então $\Pi_C^{\mu\nu} = \Pi_I^{\mu\nu}$ e conseqüentemente $k_\mu \Pi_C^{\mu\nu}(k) = k_\mu \Pi_I^{\mu\nu}(k) = 0$ e $(\Pi_C)_\mu^\mu = -(\Pi_I)_\mu^\mu = \frac{e^2 m^2}{\epsilon \pi^2}$. Temos um resultado bastante inusitado por um lado, mas justificável por outro. Na regularização dimensional o tensor de polarização do vácuo é o mesmo tanto para o propagador completo do férmion quanto para o incompleto. Esperaríamos ver uma diferença entre eles, já que alegamos que o modo zero (presente na parte instantânea do propagador completo) não pode ser esquecido. Ora, acabamos de mostrar que todos os termos em que o modo zero se pronunciaria foram cancelados na regularização dimensional devido ao truque de transformar um volume infinito numa integral de valor nulo. Chegamos na igualdade

$\Pi_C^{\mu\nu} = \Pi_I^{\mu\nu}$ mas deixamos para trás vários problemas, como os termos de massa nas componentes Π_I^{-} , Π_I^{-r} e Π_I^{rs} e a interpretação do traço $(\Pi_I)_\mu^\mu = -\frac{e^2 m^2}{\epsilon \pi^2}$.

Como não há distinção entre os casos completos e incompletos, calculamos o TPV e comparamos com os resultados conhecidos, por exemplo, de Brodsky et al [44]. Uma vez que a identidade de Ward-Takahashi é mantida, a estrutura do tensor para o TPV do fóton é

$$\Pi^{\mu\nu}(k^2) = (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2) \Pi(k^2), \quad (6.61)$$

onde $\Pi(k^2)$ é obtida com a ajuda de (6.46). Depois de fazer uma mudança de variável na Eq. (6.46), isto é $x = \frac{q^+}{k^+}$, usamos a regularização dimensional. Obtemos

$$\Pi(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_1^0 dx x (1-x) \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) - \gamma + \dots \right\}, \quad (6.62)$$

com $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ e o parâmetro de massa μ^2 decorre do procedimento de regularização. A renormalização é realizada através da subtração da contribuição de $k^2 = 0$, ou seja,

$$\Pi_{ren}(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(k^2 = 0), \quad (6.63)$$

produzindo

$$\Pi_{ren}(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \left\{ \ln\left(1 - \frac{k^2 x (1-x)}{m^2}\right) \right\}. \quad (6.64)$$

Este é exatamente o resultado reportado em [44]. Se analisarmos o primeiro termo de (6.62), isto é, o termo divergente, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{div}(k^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \frac{2}{\epsilon} \\ &= \frac{4\alpha}{6\pi\epsilon} \\ &= \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Com isso obtemos as partes divergentes:

$$\begin{aligned} \Pi_{div}^{\mu\nu}(k^2) &= (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2) \Pi_{div}(k^2) \\ &= (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2) \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Este resultado nos mostra que:

- As componentes Π_{div}^{++} e Π_{div}^{+-} são exatamente aos nossos resultados (ver Eq. 6.49);
- As componentes Π_{div}^{--} , Π_{div}^{r-} e Π_{div}^{rs} “Aparentemente” não coincidem com os nossos cálculos. No entanto, este pode ser facilmente resolvido e justificado Brodsky et al. usa um referencial cinemático específico em que $k = (P + \frac{k^2}{2P}, 0, P)$ de modo que em sua escolha, as componentes transversais k_1 e k_2 são zero. Se considerarmos as componentes transversais igual a zero em nossos resultados, obtemos exatamente o resultado de [44].

Nosso próximo passo é tomar um outro caminho, escolhendo um outro método, como a regularização de Pauli-Villars [15] e ver se os termos da parte instantâneas decorrentes do propagador completo contribuem para o resultado global. Isso é para um outro trabalho, ainda a ser feito.

Capítulo 7

Integral de *Tadpole* na Frente de Luz

Em *gauge* covariantes regularizados com regularização dimensional é um procedimento padrão definir todos os diagramas de *tadpole* das integrais de Feynman para zero, porém, explicitamente, eles divergem quadraticamente como o volume do espaço-tempo.

Por outro lado, é notoriamente sutil que no *gauge* na frente de luz algumas integrais divergentes são ditas serem não nulas, isto é, não podem ser zero, como no caso dos *gauges* covariantes. Neste capítulo vamos analisar as razões por trás destes resultados aparentemente ambíguos.

O estudo de campos de *gauge* no formalismo de frente luz apresenta várias características vantajosas, tais como desacoplamento de fantasmas, relação de dispersão linear entre a energia e momento, para citar apenas alguns deles. No entanto, o formalismo é cercado por singularidades que são mais difíceis de lidar do que no formalismo covariante, só para citar uma das características problemáticas da mesma. Isto pode ser melhor visto no fato de que a incorretamente chamada singularidade "não física" é muito físico, estragando a rotação Wick, violando causalidade e assim por diante.

A singularidade se manifesta com o fator $(q.n)^{-1} = (q^+)^{-1}$ no integrando das integrais de Feynman. O primeiro obstáculo que enfrentamos é que o produto das coordenadas q^+ e q^- , coordenadas na frente luz, são acoplados em conjunto por um vínculo, de modo que pode-se desconfiar de considerá-las como variáveis independentes para a integração.

Em segundo lugar, ela define um pólo real no plano complexo q^+ que tem de ser tratado como tal, isto é, como um pólo colocado sobre todo o contorno de integração. Em terceiro lugar, o emprego de prescrições, tais como a de Mandelstam-Leibbrandt para o tratamento de tais pólos obriga executar as integrações do momento a partir

primeiro da variável q^+ , impedindo a integrar primeiramente em q^- .

Para tornar a questão mais transparente, quando se avalia o tensor polarização do vácuo a um *loop* para campos de glúons, encontram-se várias integrais para se lidar, e uma das mais simples tem a forma

$$I = \int \frac{dq^+ dq^- d^{2\omega-2} q_\perp}{\{2(p^+ - q^+)(p^- - q^-) - (p - q)_\perp^2 + i\varepsilon\} q^+}. \quad (7.1)$$

Este tipo de integral é referida como *tadpole* ou integral tipo *tadpole*. O aparecimento do factor q^+ no denominador da integrais de Feynman é característica do gauge do cone de luz. Ele apresenta uma peculiar singularidade que exige tratamento cuidadoso.

Vários trabalhos demonstram a equivalência entre a formulação covariante e a da frente luz para campos quânticos; essa equivalência tem sido considerada antes [45]. Em todos eles, a integração do momento é realizada seguindo a consideração de que a variável de energia q^- é realizada em primeiro lugar na avaliação das integrais. No entanto, para o *gauge* no cone de luz especificamente, onde se tem que lidar com as potências isoladas de q^+ no denominador das integrais de Feynman, o emprego da prescrição de Mandelstam-Leibbrandt para lidar com tais pólos se opõe à integração prévia na variável q^- , devido à natureza do modo pelo qual a prescrição é definida. A prescrição ML consiste em substituir

$$\frac{1}{q^+} \longrightarrow \frac{q^-}{q^+ q^- + i\varepsilon}, \quad (7.2)$$

enquanto todos os propagadores covariantes são exponenciados via parametrização de Schwinger. Assim, deixando de lado a prescrição ML e integrando em primeiro lugar na variável q^+ e comparando com o resultado obtido, via integração primeiro com a variável q^- , pode nos dar indicações de alguns problemas inesperados que poderiam ter sido esquecidos antes.

Para este fim, calculamos a integral (7.1) de duas maneiras diferentes: começando em primeiro lugar fazendo integração em q^- , ou começando com a integração em q^+ através da integral de contorno em seu correspondente plano complexo. Desta forma, evita-se o problema da utilização da prescrição de Mandelstam-Leibbrandt, que como dissemos antes, obriga a começar a integrar em primeiro lugar na variável q^+ . Estas duas abordagens dão dois resultados distintos, uma indicação de que a integração no plano complexo ingenuamente realizada nas componentes na frente de luz q^+ e q^- é enganosa. Nesta seção apresentamos uma possível cura para a aparente ambigüidade.

7.1 Integração em q^-

No formalismo da frente de luz, é uma suposição implícita e padrão de que a integração em q^- representa a integração da energia, correspondendo à integração em q^0 do caso covariante. Assim, a hipótese é que como tal, tem que ser executada em primeiro lugar. Assim, na linguagem de coordenadas da frente de luz,

$$\begin{aligned} I_{q^-} &= \int \frac{dq^+ d^{2\omega-2} q_\perp}{2q^+ (p^+ - q^+)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^-}{\left\{ p^- - q^- - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right\}} \\ &= - \int \frac{dq^+ d^{2\omega-2} q_\perp}{2q^+ (p^+ - q^+)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^-}{\left\{ q^- - p^- + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right\}}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Uma vez que o sinal da parte imaginária depende do sinal da diferença $(p^+ - q^+)$ segue-se que há duas possibilidades para a região de integração na variável q^+ a qual é definida tomando todas as componentes mais do momento como positivas, $q^+ > 0$, $p^+ > 0$, $(p^+ - q^+) > 0$ ou todas as componente mais do momento como negativas, $q^+ < 0$, $p^+ < 0$, $(p^+ - q^+) < 0$. Estes podem ser resumidos como se segue:

- 1) **Região** $0 < q^+ < p^+$

Para este caso o pólo simples está localizado na metade superior do plano complexo q^- . Dependendo do valor de $p^- - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)}$, o polo simples q^- pode estar localizado tanto no primeiro ou no segundo quadrantes. Mas escolhemos uma situação específica, onde o pólo está localizado no primeiro quadrante (ver Fig. 7.1),

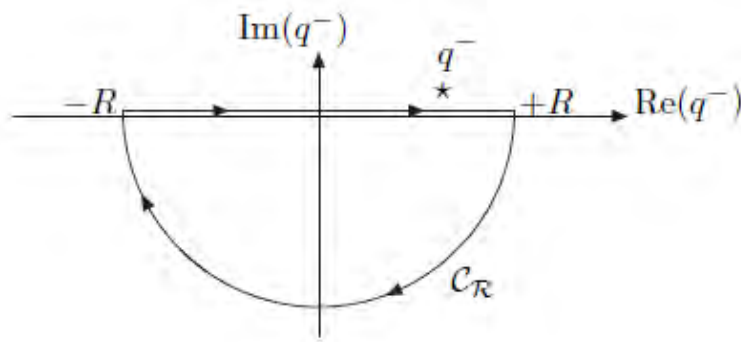


Figura 7.1: Pólo no plano complexo q^- , para $(p^+ - q^+) > 0$ e localizado no primeiro quadrante.

- 2) **Região** $p^+ < q^+ < 0$

Neste caso ele está localizado na metade inferior e dependendo do valor de $p^- - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)}$, o polo simples q^- pode estar localizado tanto no terceiro ou no quarto quadrantes. Mas, aqui também, escolhemos uma situação específica, onde o pólo está localizado no quarto quadrante, como mostramos na Fig. 7.2.

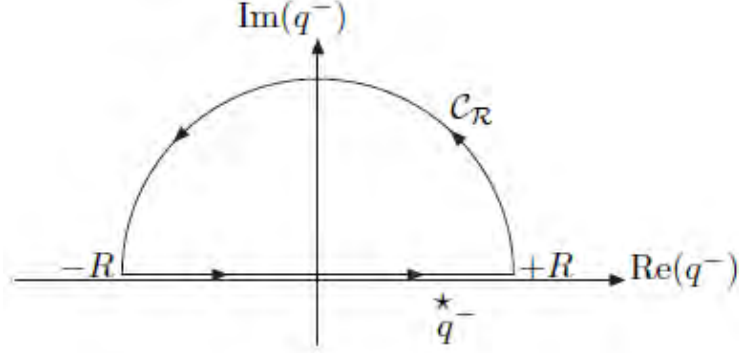


Figura 7.2: Pólo no plano complexo q^- , para $(p^+ - q^+) < 0$ e localizado no quarto quadrante.

Para avaliar (7.3) em primeiro lugar, realizamos a integração q^- . Olhando a Figura 7.1 podemos ser tentados a descartá-lo de imediato como sendo zero, visto que não há pólo no interior do contorno. Não ter pólo significa nenhum resíduo e do teorema do resíduo de Cauchy, ele deve ser zero. Observe que o contorno fechado de integração é zero, mas devido ao fato de que existe uma contribuição não nula proveniente do semi-círculo c_R , a integral real em q^- de menos infinito a mais infinito não é zero. A partir do contorno escolhido, o intervalo de integração q^+ torna-se restringido para $0 \leq q^+ \leq p^+$. Vamos ver explicitamente o cálculo: em primeiro lugar, pelo teorema de resíduo,

$$\oint \frac{dq^-}{\left\{ q^- - p^- + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right\}} = 0, \quad (7.4)$$

que pode ser reescrito como:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^{+R} \frac{dq^-}{\{q^- - q_2^-\}} + \int_{c_R} \frac{dq^-}{\{q^- - q_2^-\}} \right\} = 0, \quad (7.5)$$

onde

$$q_2^- = p^- - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)}, \quad (7.6)$$

o que implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^-}{\{q^- - q_2^-\}} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_R} \frac{dq^-}{\{q^- - q_2^-\}}. \quad (7.7)$$

No integrando do lado direito de (7.7), fazemos uma mudança de variáveis, isto é $q^- = Re^{i\theta}$, o que implica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{c_R} \frac{dq^-}{\{q^- - q_2^-\}} = iR \int_0^{-\pi} \frac{d\theta e^{i\theta}}{Re^{i\theta} - q_2^-} \right\}, \quad (7.8)$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^-}{\{q^- - q_2^-\}} = i\pi. \quad (7.9)$$

Logo, substituindo (7.9) em (7.3) obtemos

$$\begin{aligned} I_{q^-} &= \int \frac{dq^+ d^{2\omega-2} q_\perp}{2q^+ (p^+ - q^+)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^-}{\left\{ p^- - q^- - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right\}} \\ &= - \underbrace{\int \frac{dq^+}{2q^+ (p^+ - q^+)}}_{\text{Log. divergente}} \underbrace{\int d^{2\omega-2} q_\perp [i\pi]}_{\text{Vol. divergente}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Portanto (7.3), quando integradas em primeiro lugar q^- leva a um resultado muito divergente proporcional ao volume de espaço bidimensional vezes $\ln 0$. No entanto, no esquema de regularização dimensional (DR) destas diferenças de volume pode ser definida igual a zero. Uma verificação de consistência pode ser realizada multiplicando ao integrando por $1 = \frac{2q^+ q^- - q_\perp^2}{q^2}$ e avaliar as integrais que se seguiram. Estes irão adicionar-se a zero de forma consistente, como veremos em seguida:

Da equação (7.1), temos

$$I = \int \frac{d^{2\omega} q}{\{(p-q)^2 + i\varepsilon\} q^+}, \quad (7.11)$$

agora multiplicando ao integrando por $1 = \frac{2q^+ q^- - q_\perp^2}{q^2}$,

$$I = \int \frac{d^{2\omega} q}{[(p-q)^2 + i\varepsilon] q^+} \left(\frac{2q^+ q^- - q_\perp^2}{q^2} \right), \quad (7.12)$$

o que implica

$$I = I_1 - I_2, \quad (7.13)$$

onde

$$I_1 = 2 \int \frac{d^{2\omega} q q^-}{(q^2 + i\varepsilon) [(p - q)^2 + i\varepsilon]}; \quad (7.14)$$

$$I_2 = \int \frac{d^{2\omega} q q_\perp^2}{(q^2 + i\varepsilon) [(p - q)^2 + i\varepsilon] q^+}. \quad (7.15)$$

A primeira integral de (7.13) é direta. Usando a integral base,

$$\int \frac{d^{2\omega} q q^\mu}{(q^2 + i\varepsilon) [(p - q)^2 + i\varepsilon]} = \frac{p^\mu}{2} \pi^\omega (p^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2 - \omega) \Gamma(\omega - 1) \Gamma(\omega - 1)}{\Gamma(2\omega - 2)}, \quad (7.16)$$

5 a primeira integral de (7.13) é

$$I_1 = 2 \int \frac{d^{2\omega} q q^-}{(q^2 + i\varepsilon) [(p - q)^2 + i\varepsilon]} = p^- \pi^\omega (p^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2 - \omega) \Gamma(\omega - 1) \Gamma(\omega - 1)}{\Gamma(2\omega - 2)}, \quad (7.17)$$

a segunda integral será

$$I_2 = \int \frac{d^{2\omega} q q_\perp^2}{(q^2 + i\varepsilon) [(p - q)^2 + i\varepsilon] q^+}, \quad (7.18)$$

ou expressa em coordenadas na frente de luz

$$I_2 = - \int \frac{dq^+}{4 (q^+)^2 (p^+ - q^+)} \int d^{2\omega-2} q_\perp q_\perp^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^-}{\left(q^- - \frac{q_\perp^2}{2q^+} + \frac{i\varepsilon}{2q^+}\right) \left[q^- - p^- + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)}\right]}. \quad (7.19)$$

Agora, primeiramente vamos integrar q^- , então os pólos são localizados no terceiro termo de (7.19), i. é,

$$\begin{aligned} 1 & : q^- = \frac{q_\perp^2}{2q^+} - \frac{i\varepsilon}{2q^+} \\ 2 & : q^- = p^- - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Dependendo dos valores de q^+ e p^+ estes pólos podem estar localizados na metade superior ou inferior no plano complexo de q^- . Para o caso $0 < q^+ < p^+$, temos suas configurações (ver Fig. 7.3)

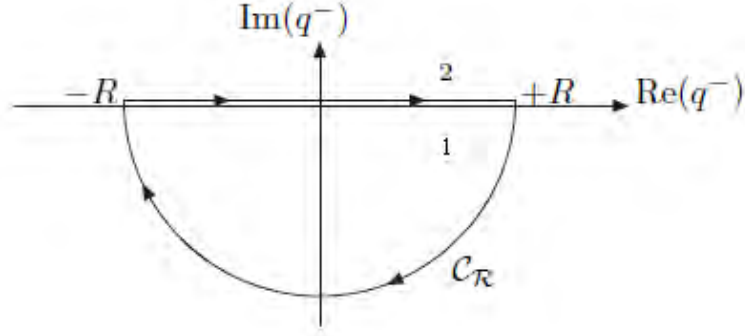


Figura 7.3: Pólo no plano complexo k^-

O pólo que escolhemos é o pólo 1, isto é $q^- = \frac{q_\perp}{2q^+}$. Assim (7.19) fica

$$I_2 = 2\pi i \int \frac{dq^+}{4(q^+)^2(p^+ - q^+)} \int \frac{d^{2\omega-2}q_\perp q_\perp^2}{\left[\frac{q_\perp}{2q^+} - p^- + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^+ - q^+)}\right]}, \quad (7.21)$$

ou arrumando, a Eq.(7.21), de uma forma mais conveniente temos

$$I_2 = 2\pi i \int \frac{dq^+}{2q^+p^+} \int \frac{d^{2\omega-2}q_\perp q_\perp^2}{\left[q_\perp^2 + \frac{q^+}{p^+}(p_\perp^2 - 2(p^+ - q^+)p^- - 2p_\perp q_\perp)\right]}, \quad (7.22)$$

usando o seguinte *shift* $q_\perp = l_\perp + \left(\frac{q^+}{p^+}\right)p_\perp$ na equação (7.22) obtemos

$$I_2 = 2\pi i \int \frac{dq^+}{2q^+p^+} \int \frac{d^{2\omega-2}q_\perp \left[l_\perp^2 + \left(\frac{q^+}{p^+}\right)^2 p_\perp^2 + 2l_\perp p_\perp \left(\frac{q^+}{p^+}\right)\right]}{[l_\perp^2 + \Delta]}, \quad (7.23)$$

onde

$$\Delta = \frac{q^+(q^+ - p^+)}{(p^+)^2} p^2, \quad (7.24)$$

com $p^2 = 2p^+p^- - p_\perp^2$.

Por outro lado, usando as integrais dimensionais e lembrando que integrais com uma potência ímpar de l no numerador se anulam, então a Eq.(7.23) resulta:

$$I_2 = p^- \pi^\omega (p^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega) \Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)}. \quad (7.25)$$

Substituindo (7.17) e (7.25) na Eq. (7.13), obtemos

$$I = 0 \quad (7.26)$$

Em resumo, podemos dizer que (7.1) quando integrada em primeiro lugar em q^- conduz a um resultado consistente com a regularização dimensional (DR) para tadpoles, isto é, pode ser consistentemente definida para ser igual a zero.

7.2 Integração em q^+

Se começarmos pela integração primeiro em q^+ , temos:

$$\begin{aligned} I_{q^+}^{\geq} &= \int \frac{dq^- d^{2\omega-2} q_{\perp}}{2(p^- - q^-)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^+}{\left\{ p^+ - q^+ - \frac{(p-q)_{\perp}^2}{2(p^- - q^-)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^- - q^-)} \right\} q^+} \\ &= - \int \frac{dq^- d^{2\omega-2} q_{\perp}}{2(p^- - q^-)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^+}{\left\{ q^+ - p^+ + \frac{(p-q)_{\perp}^2}{2(p^- - q^-)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right\} q^+}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

onde de (7.27) localizamos o pólo, no intervalo $0 < q^+ < p^+$

$$q^+ = p^+ - \frac{(p-q)_{\perp}^2}{2(p^- - q^-)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \quad (7.28)$$

$$q^+ = i\varepsilon, \quad (7.29)$$

onde $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto significa que agora temos um pólo adicional real sobre o contorno de integração, $q^+ = 0$. Temos, assim, que dobrar o contorno para evitá-lo. Veja a Figura 7.4.

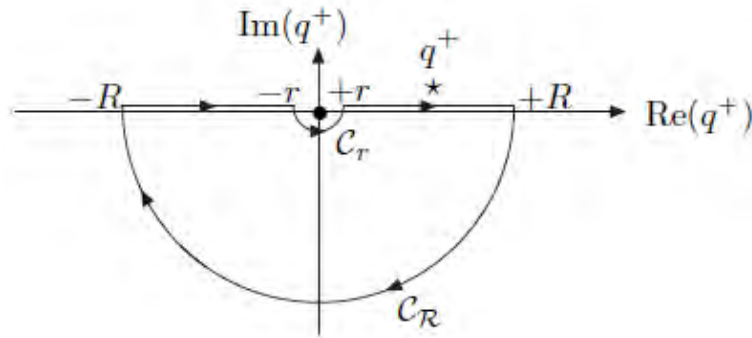


Figura 7.4: Pólo no plano complexo q^+ , para $(p^- - q^-) > 0$, localizado no primeiro quadrante. Com pólo real em $q^+ = 0$

Cálculos explícitos para este caso são, em seguida, como se segue:

$$\oint \frac{dq^+}{\left\{q^+ - p^+ + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^- - q^-)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)}\right\} q^+} \equiv \oint \Im = 0, \quad (7.30)$$

que em termos de contornos diversos pode ser reescrita como

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-r} + \int_{c_r} + \int_{+R}^{+r} + \int_{c_R} \right\} \Im = 0. \quad (7.31)$$

No limite para $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ a primeira e a terceira integrais da expressão acima levam para a integral desejada, o que, pelo teorema de resíduo é igual a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Im = - \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left\{ \int_{c_r} + \int_{c_R} \right\} \Im. \quad (7.32)$$

Para semi-círculo c_r em torno de zero define $q^+ = r \exp i\theta$, $-\pi \leq \theta \leq 0$ e para o semi-círculo c_R define $q^+ = R \exp i\Theta$, $0 \leq \Theta \leq -\pi$. Então, para o semi-círculo menor temos

$$\begin{aligned} \int_{c_r} \Im &\equiv \int_{c_r} \frac{dq^+}{\left\{q^+ - p^+ + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^- - q^-)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)}\right\} q^+} \\ &= - \lim_{r \rightarrow 0} i \int_{-\pi}^0 \frac{d\theta}{\left[p^+ - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^- - q^-)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right]} = \\ &= -i \frac{\pi}{\left[p^+ - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^- - q^-)} + \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right]}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

enquanto que para o semi-círculo maior temos

$$\begin{aligned} \int_{c_R} \Im &\equiv \int_{c_R} \frac{dq^+}{\left\{q^+ - p^+ + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^- - q^-)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)}\right\} q^+} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{i}{R} \int_0^{-\pi} d\Theta e^{-i\Theta} = 0. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Em seguida, a partir de (7.33), temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Im &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^+}{\left\{q^+ - p^+ + \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^- - q^-)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)}\right\} q^+} = \\ &= \frac{i\pi}{\left[p^+ - \frac{(p-q)_\perp^2}{2(p^- - q^-)} - \frac{i\varepsilon}{2(p^+ - q^+)} \right]}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

onde $\varepsilon \rightarrow 0$.

Substituindo (7.35) em (7.27), obtemos

$$\begin{aligned}
I_{q^+}^{\omega} &= -i\pi \int \frac{dq^-}{2(p^- - q^-)} \int \frac{d^{2\omega-2}q_{\perp}}{\left[p^+ - \frac{(p-q)_{\perp}^2}{2(p^- - q^-)}\right]} \\
&= i\pi \int dq^- \int \frac{d^{2\omega-2}q_{\perp}}{\left[(p-q)_{\perp}^2 - 2(p^- - q^-)p^+\right]}. \tag{7.36}
\end{aligned}$$

A partir deste resultado não nulo, podemos realizar a integração em $q_{\perp}$ usando regularização dimensional, mas antes vamos usar o seguinte *shift* $q_{\perp} = l_{\perp} + p_{\perp}$, ficando (7.36)

$$I_{q^+}^{\omega} = i\pi \int dq^- \int \frac{d^{2\omega-2}q_{\perp}}{[l_{\perp}^2 + \Delta]}, \tag{7.37}$$

onde $\Delta = 2(q^- - p^-)p^+$, em seguida usando as integrais dimensionais (ver apêndice E) obtemos

$$I_{q^+}^{\omega} = i(\pi)^{\omega-1} \Gamma(2-\omega) \int_0^{p^-} dq^- \left[2(q^- - p^-)p^+\right]^{\omega-2}, \tag{7.38}$$

e, finalmente, na integração em q^- obtemos

$$I_{q^+}^{\omega} = ip^- (-\pi)^{\omega} \left(2p^+p^-\right)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{\omega-1}. \tag{7.39}$$

Note que o resultado (7.39) é válido somente para a região positiva $p^+ > 0$. Como é costume, é preciso considerar apenas o setor de momentos positivos (“o setor de partículas”) para a dinâmica de partículas na frente de luz. Assim, de acordo com esta visão, este é o resultado global para a integral de *tadpole* (7.1).

Em primeiro lugar, é evidente que o resultado acima não é igual ao resultado obtido através da integração primeiramente em q^- . Em segundo lugar, quando se compara este resultado com o obtido usando a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt [46, 36, 37] para o pólo na frente de luz, existe uma diferença de um fator 1/2.

Por isso, é uma coisa curiosa a ser observada aqui. Comparação de (7.39) com o cálculo da prescrição Mandelstam-Leibbrandt [46, 36, 37] mostra que nosso resultado é a metade do seu resultado. Nós suspeitamos que a parametrização empregada em seu procedimento impede que eles vejam a faixa válida de integração em ambas componentes q^+ ou q^- , levando a resultados errados, neste caso, o dobro do valor “correto” para o “setor de partículas”.

Lembrando e considerando que há um outro setor, com momentos negativos, $p^+ < 0$, (“O setor antipartícula”), uma análise semelhante pode ser realizada e o resultado que temos é:

$$I_{q^+}^< = ip^- (-\pi)^\omega (2p^+ p^-)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{\omega-1}. \quad (7.40)$$

Agora, se somarmos esta contribuição com o resultado obtido em (7.39), o resultado geral é:

$$\begin{aligned} I_{q^+} &= I_{q^+}^> + I_{q^+}^< \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Que é válido para todo $p^+ \neq 0$. Esta última condição é uma reminiscência do problema do modo zero na frente de luz que está relacionada com a divergência no ponto $p^+ = 0$. Portanto, nosso resultado (7.41) é agora consistente com o resultado da regularização dimensional para tadpoles.

Note-se que em (7.41) o resultado para o “setor de partículas” $I_{q^+}^> > 0$, vem multiplicado pela função de Heaviside $H(p^+)$, enquanto o resultado para o “setor antipartícula” $I_{q^+}^<$ vem multiplicado por $H(-p^+)$, onde

$$H(p^+) = \begin{cases} 1 & \text{para } p^+ > 0; \\ 0 & \text{para } p^+ < 0. \end{cases} \quad (7.42)$$

Embora a partir das propriedades da função de Heaviside temos:

$$H(p^+) + H(-p^+) = 1, \quad (7.43)$$

aqui, ao contrário do que se pode ingenuamente saltar para uma conclusão precipitada que o resultado global para (7.41) deve ser o mesmo como em (7.39), contudo não é. A razão é como se segue:

Vamos enfatizar que em (7.41) o “setor de partículas” $I_{q^+}^>$ é multiplicado não só pela função de Heaviside $H(p^+)$, mas também com $H(p^-)$, enquanto o “setor antipartícula” $I_{q^+}^<$, é multiplicado por $H(-p^+) H(-p^-)$. Isto é devido à característica inerente da relação de dispersão na frente de luz $2p^+ p^- - p_\perp^2 = m^2$, que liga o sinal de p^+ com a de p^- e vice-versa. E uma vez que ambos $I_{q^+}^>$ e $I_{q^+}^<$ são proporcionais a p^- , seus resultados na soma resulta em zero:

$$p^- f(\omega) \{ H(p^+) H(p^-) + H(-p^+) H(-p^-) \} = 0. \quad (7.44)$$

7.3 Observações

Os resultados obtidos nos dizem que:

- A ordem de integração nas integrais na frente de luz afeta o resultado, se considerarmos apenas o “setor de partículas”;
- Se seguirmos a ordem padrão de integração, ou seja se integramos em primeiro lugar em q^- , a variável de energia na frente de luz, então pode-se assumir que o resultado é zero, resultado padrão na regularização dimensional para a integral de tadpole, embora a integral de volume é divergente, que pode ser ajustado para zero, de forma consistente;
- Se a ordem de integração é mudada e usamos primeiramente a variável q^+ , então o resultado não é nulo, se considerarmos apenas o “setor de partículas” e a divergência não é de tipo “volume” divergente, e portanto, não é consistente com a suposição de que as contribuições dos tadpoles são zero na regularização dimensional.
- É curioso notar que o resultado para o “setor de partículas” (7.39) é exatamente a metade do que o obtido usando a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt para o pólo $(q^+)^{-1}$. O mesmo resultado pode ser encontrado na Ref.[47] calculado via prescrição do valor principal causal, para calcular a integral básica a um *loop* na frente de luz, onde uma região de integração teve de ser definida cuidadosamente, a fim de evitar que a causalidade seja quebrada. Lá, foi identificado que o resultado difere do que o obtido pela prescrição de Mandelstam-Leibbrandt por um fator geral $1/2$. Uma vez que a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt é implementada em conjunto com a exponenciação do propagador covariante via parametrização de Schwinger, seu procedimento esconde as regiões relevantes de integração ligadas entre a energia na frente de luz e as coordenadas do momento transversal.
- Se a presença de uma singularidade de modo zero $(q^+)^{-1} = 0$ no integrando de (7.1) é interpretado como significando que temos que adicionar (7.39) e (7.40), então é possível recuperar o resultado $I_{q^+} = 0$, uma vez que (7.39) e (7.40) têm sinais opostos. Esta adição representa fisicamente a soma dos setores de partícula e anti-partícula do espaço de Fock. Isso nos mostra que a manipulação ingenua das integrais de Feynman na frente de luz pode levar a resultados errados. Frente de luz é muito mais sutil do que nós esperávamos. Muito mais esforço deve ser direcionado para entender o que realmente está acontecendo quando fizermos os cálculos nesta forma frontal.

Capítulo 8

Conclusão

Nesta tese tratamos alguns aspectos da teoria de campos, como é o caso dos propagadores de um sistema composto por duas partículas, a identidade de Ward-Takahashi e integrais do tipo *tadpole* na abordagem desenvolvida por Dirac, isto é na frente de luz.

Com o fim de entender a relatividade restrita na frente de luz estudamos, no segundo capítulo, a transformação de Lorentz entre dois sistemas que estão nas coordenadas do cone de luz e obtemos dois fatores gama, $\gamma^>$ e $\gamma^<$, presentes na transformação de coordenadas, isto é, para x^+ e x^- , que tem a mesma função no espaço de Minkowski. É muito interessante e ao mesmo tempo inesperado que haja dois fatores aparentemente distintos na transformação de Lorentz na frente de luz; no entanto, apesar destas expressões serem algebricamente diferentes, elas são numericamente iguais ao fator de Lorentz no espaço de Minkowski. E mais, é inusitado que três funções de velocidade expressas de maneiras completamente distintas apresentem o mesmo comportamento em função da mesma velocidade.

Em seguida no capítulo 3 estudamos, a título de revisão, a propagação de um sistema composto por dois bósons interagentes. Neste sistema, também chamado de propagador quântico, mostramos como projetar o propagador covariante na frente de luz. Este propagador carrega informações de um ponto do espaço-tempo para outro, isto é propaga a função onda de $x^+ = 0$ até $x^+ > 0$. Nas coordenadas de frente de luz x^+ é escolhido para ser o parâmetro de evolução temporal. Neste capítulo começamos a calcular a correção de ordens mais altas na constante de acoplamento ao sistema composto por dois bósons interagentes; primeiro na ordem dois ($O(g^2)$) e depois a ordem quatro ($O(g^4)$). Neste último caso, de quarta ordem na constante de acoplamento, foi necessário usar a técnica de separação de polos por frações parciais. Esta técnica nos permitiu desmembrar aquelas integrais que contem pólos duplos em suas configurações e nos levou, após a integração nas componentes k^- dos momentos (de fato, energia na frente de luz), a obter propagação global de quatro corpos, como

mostrado na equações (3.22) e (3.23).

No capítulo 4 estudamos a propagação de um sistema composto por dois bósons interagentes em um campo de fundo. Este resultado é também mostrado em [24], usando-se uma técnica diferente. Mas não mostram todas as possibilidades de configurações. Nós obtemos mais gráficos que os mostrados em [24]. Neste capítulo encontramos gráficos que chamamos de “gráficos de antipartículas” por não possuírem pernas externas, e que não podem ser vistos no trabalho [24] devido ao tipo de montagem que fazem, excluindo desde o começo a produção de par na frente de luz. Este capítulo também nos serviu como uma introdução para o capítulo 5. Nesse capítulo calculamos a corrente eletromagnética para dois bósons em um campo de fundo, nas coordenadas da frente de luz em ordem $O(g^2)$, ou seja com uma troca de bóson. Como nos referimos anteriormente, em nossos cálculos encontramos gráficos que chamamos de “gráficos de antipartículas” por não possuírem pernas externas, e esse ponto é especialmente importante, já que a produção de par partícula-antipartícula está ligada ao “modo zero” na frente de luz, o qual foi discutido também na Ref. [39]. Contudo mostramos que não há contribuição para a corrente a ordem $O(g^2)$ no limite $q^+ \rightarrow 0$. Mas suspeitamos que uma situação da Fig. 4.1 com um segundo fóton compondo o campo de fundo poderia contribuir, nesse limite, para a corrente a ordem $O(g^2)$. Algo que reservamos para investigações futuras.

No capítulo 6 exploramos alguns aspectos com relação ao emprego da regularização dimensional no cálculo da auto energia do fóton ao nível um *loop* e vimos como o propagador do férmions tem um papel importante nos resultados. O uso do propagador fermiônico completo e incompleto mostrou-nos um resultado curioso.

Embora exista uma diferença entre os tensores completo e incompleto, mostramos que na abordagem da regularização dimensional, todos os termos que aparecem no caso completo estão ausentes no incompleto. Esperaríamos ver uma diferença entre eles, já que alegamos que o modo zero (presente na parte instantânea do propagador completo) não pode ser esquecido. Mas mostramos que todos os termos em que o modo zero se pronunciaria foram cancelados na regularização dimensional devido ao truque de transformar um volume infinito numa integral de valor nulo.

Surpreendentemente, o propagador do férmions incompleto é suficiente para calcular o tensor de polarização do vácuo. No entanto, na Ref.[39] foi demonstrado que o propagador completo é necessário para obter a identidade de Ward corretamente na ordem mais baixa. Talvez este resultado aponte para uma mera coincidência, o que permitiu, para alguns autores (por exemplo [48]), obterem resultados coerentes sem nunca ter a necessidade da parte de modo zero. Um caminho que propomos como projeto futuro é a utilização da regularização de Pauli-Villars [15], que a nosso entender não descartará os termos do modo zero e achamos apontará uma diferença

entre o tensor completo e o incompleto. Entretanto, isso no momento é apenas uma especulação que necessitamos confirmar ou desmentir refazendo os devidos cálculos de maneira cuidadosa utilizando um método de regularização diferente.

Finalmente no capítulo 7 calculamos a integral do tipo *tadpole*, primeiro seguindo o procedimento padrão, isto é, realizando a integração primeiramente na variável energia da frente de luz, ou seja, q^- . No entanto, para o *gauge* do cone de luz, especificamente onde se tem que lidar com o termo q^+ no denominador das integrais de Feynman, o emprego da prescrição de Mandelstam-Leibbrandt, para lidar com tais pólos, se opõe à integração prévia na variável q^- , devido à natureza do modo pelo qual a prescrição é definida. Assim, deixando de lado a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt começamos, em primeiro lugar, fazendo a integração em q^- e em seguida q^+ , através da integral de contorno em seu correspondente plano complexo. Em seguida, realizamos o mesmo cálculo, desta vez utilizando a componente longitudinal do momento, q^+ , como primeira variável de integração, utilizando a integral de contorno no seu correspondente plano complexo, ao invés de utilizar a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt. Estas duas abordagens dão dois resultados distintos, uma indicação de que a integração realizada em ordens diferentes nas componentes q^+ e q^- na frente de luz não conduzem ao mesmo resultado, de modo que devemos exercer extremo cuidado na realização de qualquer cálculo na frente de luz. Essa discrepancia está relacionada com o fato de que nessas duas abordagens está implícito que trabalhamos considerando somente o setor de partículas, isto é, com energia e momento positivos. Uma possível solução para esta aparente ambigüidade é considerar o setor de anti-partículas no espaço de Fock, ou seja, aqueles com momentos negativos. A soma desses dois setores dá um resultado nulo. Portanto este resultado é consistente com o resultado de regularização dimensional para *tadpoles*. Isso nos mostra que a manipulação das integrais de Feynman na frente de luz, ingenuamente, pode nos levar a resultados errôneos.

Apêndice A

Apêndice do Capítulo 2

A.1 Propriedades na Frente de Luz

As coordenadas do espaço-tempo quadridimensional na frente de luz são dadas por

$$\begin{aligned}x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) \\x^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) \\ \hat{x} &= x^1 \vec{i} + x^2 \vec{j},\end{aligned}\tag{A.1}$$

de modo que o produto escalar entre dois quadrivetores é dado por

$$a^\mu b_\mu = (a^+ b^- + a^- b^+) + a_i b^i.\tag{A.2}$$

Nessas coordenadas, a métrica do espaço de Minkowski se escreve em termos da seguinte matriz:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\tag{A.3}$$

que por conseguinte nos permite escrever as componentes covariantes em termos das contravariantes e vice-versa, $a^\pm = a_\mp$, $a^i = -a_i$, $i = 1, 2$.

Além disso, é conveniente introduzir os vetores n_μ e $\bar{n}_\mu$ com componentes

$$\begin{aligned}n_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1) \\ \bar{n}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)\end{aligned}\tag{A.4}$$

de modo que

$$\begin{aligned} q \cdot n &= q^+ \\ q \cdot \bar{n} &= q^- \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde $q^\mu = (q^0, q^1, q^2, q^3)$ e $n_\mu = (n_0, n_1, n_2, n_3)$.

A.2 Elemento do Tensor Métrico na Frente de Luz

Aqui vamos mostrar que a partir da Eq. (2.2) [18]

$$g^{+\nu} = \frac{g^{0\nu} + g^{3\nu}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.6})$$

obtemos as componentes do tensor métrico na frente de luz. Os elementos $g^{0\nu}$ e $g^{3\nu}$ são as componentes do tensor métrico no espaço de Minkowski. O que implica

$$\begin{aligned} g^{++} &= \frac{g^{0\nu} + g^{3\nu}}{\sqrt{2}} = \frac{g^{00} + g^{03} + g^{30} + g^{33}}{2} = \frac{1 + 0 + 0 - 1}{2} = 0 \\ g^{+-} &= \frac{g^{0-} + g^{3-}}{\sqrt{2}} = \frac{g^{00} - g^{03} + g^{30} - g^{33}}{2} = \frac{1 - 0 - 0 - (-1)}{2} = 1 \\ g^{-+} &= g^{+-} = 1 \\ g^{ij} &= -\delta_{i,j} \quad (i = 1, 2, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.3 Fator de Lorentz na Frente de Luz

Nesta parte do apêndice vamos mostrar a expressão (2.14). Vimos que ação do *boost* na frente de luz é:

$$\begin{aligned} (a) \quad x'^+ &= e^{-\omega} x^+, & (b) \quad x'^- &= e^{\omega} x^-, \\ (c) \quad x^+ &= e^{\omega} x'^+, & (d) \quad x^- &= e^{-\omega} x'^-, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e as transformações de Lorentz, expressa nas novas coordenadas, são dadas por:

$$\begin{aligned} (e) \quad x'^+ &= \tilde{\gamma} \left(x^+ - \frac{v}{c} x^+ \right), & (f) \quad x'^- &= \tilde{\gamma} \left(x^- + \frac{v}{c} x^- \right), \\ (g) \quad x^+ &= \tilde{\gamma} \left(x'^+ + \frac{v}{c} x'^+ \right), & (h) \quad x^- &= \tilde{\gamma} \left(x'^- - \frac{v}{c} x'^- \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Dessas duas relações observamos o seguinte:

No referencial S'

Para x'^{+}

Vemos, que ao fazer uso das expressões (A.8a) e (A.9e)

$$x'^{+} = \tilde{\gamma} \left(x^{+} - \frac{v}{c} x^{+} \right) = e^{-\omega} x^{+}, \quad (\text{A.10})$$

obtemos

$$\tilde{\gamma} = \frac{e^{-\omega}}{\left(1 - \frac{v}{c} \right)}. \quad (\text{A.11})$$

Para x'^{-}

De igual maneira, quando fazemos uso de (A.8b) e (A.9f)

$$x'^{-} = \tilde{\gamma} \left(x^{-} + \frac{v}{c} x^{-} \right) = e^{\omega} x^{-}, \quad (\text{A.12})$$

vemos que $\tilde{\gamma}$, tem a seguinte forma

$$\tilde{\gamma} = \frac{e^{\omega}}{\left(1 + \frac{v}{c} \right)}. \quad (\text{A.13})$$

No referencial S

Para x^{+}

Das expressões (A.8c) e (A.9g),

$$x^{+} = \tilde{\gamma} \left(x'^{+} + \frac{v}{c} x'^{+} \right) = e^{\omega} x'^{+}, \quad (\text{A.14})$$

obtemos

$$\tilde{\gamma} = \frac{e^{\omega}}{\left(1 + \frac{v}{c} \right)}. \quad (\text{A.15})$$

Para x^{-}

Das expressões (A.8d) e (A.9h)

$$x^{-} = \tilde{\gamma} \left(x'^{-} - \frac{v}{c} x'^{-} \right) = e^{-\omega} x'^{-}, \quad (\text{A.16})$$

encontramos

$$\tilde{\gamma} = \frac{e^{-\omega}}{\left(1 - \frac{v}{c} \right)}. \quad (\text{A.17})$$

Desta maneira obtemos a expressão (2.14), e que daqui para a frente, iremos chamá-los de

$$\gamma^> = \frac{e^\omega}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}, \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma^< = \frac{e^{-\omega}}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}. \quad (\text{A.19})$$

A.4 Transformada de Lorentz na Frente de Luz

Nesta parte do apêndice vamos mostrar as expressões (2.62), (2.63) e (2.64). Para isso, partimos da seguinte transformação linear

$$x'^\mu = L_\alpha^\mu x^\alpha, \quad (\text{A.20})$$

onde $\mu = +, -, i$. Isso implica o seguinte:

$$\begin{aligned} x'^+ &= L_\alpha^+ x^\alpha = L_+^+ x^+ + L_-^+ x^- + L_j^+ x^j \\ x'^- &= L_\alpha^- x^\alpha = L_+^- x^+ + L_-^- x^- + L_j^- x^j \\ x'^i &= L_\alpha^i x^\alpha = L_+^i x^+ + L_-^i x^- + L_j^i x^j. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Além disso de $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, obtemos:

$$x_+ = g_{+-} x^-, \quad x_- = g_{-+} x^+, \quad x_i = g_{ij} x^j. \quad (\text{A.22})$$

O tensor métrico na frente de luz é dado pela matriz:

$$g^{\mu\nu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} + & - & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (\text{A.23})$$

de tal modo que o seu determinante é

$$\det g = -1 \quad (\text{A.24})$$

Como a transformação de Lorentz por definição preserva o produto escalar,

$$x'^\mu y'_\mu = x^\alpha y_\alpha. \quad (\text{A.25})$$

O lado esquerdo da Eq. (A.25) toma a forma

$$x'^\mu y'_\mu = x'^+ y'_+ + x'^- y'_- + \sum_{\rho=1}^2 x'^\rho y'_\rho. \quad (\text{A.26})$$

Em seguida, fazemos uso de (A.22) na expressão (A.26) e obtemos:

$$\begin{aligned} x'^\mu y'_\mu &= x'^+ g_{+-} y'^- + x'^- g_{-+} y'^+ + \sum_{\rho=1}^2 x'^\rho g_{\rho\tau} y'^\tau \\ &= I + II + III, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\begin{aligned} I &= x'^+ g_{+-} y'^-, \\ II &= x'^- g_{-+} y'^+, \\ III &= \sum_{\rho=1}^2 x'^\rho g_{\rho\tau} y'^\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Logo usando (A.21) em (A.28), temos

$$\begin{aligned} I &= \left(L_+^+ x^+ + L_-^+ x^- + \sum_{k=1}^2 L_k^+ x^k \right) g_{+-} \left(L_+^- y^+ + L_-^- y^- + \sum_{s=1}^2 L_s^- y^s \right), \\ II &= \left(L_+^- x^+ + L_-^- x^- + \sum_{k=1}^2 L_k^- x^k \right) g_{-+} \left(L_+^+ y^+ + L_-^+ y^- + \sum_{s=1}^2 L_s^+ y^s \right), \\ III &= \sum_{\rho=1}^2 \left(L_+^\rho x^+ + L_-^\rho x^- + \sum_{k=1}^2 L_k^\rho x^k \right) g_{\rho\tau} \left(L_+^\tau y^+ + L_-^\tau y^- + \sum_{s=1}^2 L_s^\tau y^s \right) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

que arrumamos de uma forma mais conveniente, i.é,

$$\begin{aligned} I &= L_+^+ x^+ g_{+-} L_-^- y^- + L_-^+ x^- g_{+-} L_+^- y^+ + \sum_{k=1}^2 L_k^+ x^k g_{+-} \sum_{s=1}^2 L_s^- y^s + \\ &\quad + L_+^+ x^+ g_{+-} \left(L_+^- y^+ + \sum_{s=1}^2 L_s^- y^s \right) + L_-^+ x^- g_{+-} \left(L_-^- y^- + \sum_{s=1}^2 L_s^- y^s \right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 L_k^+ x^k g_{+-} \left(L_+^- y^+ + L_-^- y^- \right), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$II = L_+^- x^+ g_{-+} L_-^+ y^- + L_-^- x^- g_{-+} L_+^+ y^+ + \sum_{k=1}^2 L_k^- x^k g_{-+} \sum_{s=1}^2 L_s^+ y^s$$

$$\begin{aligned}
& + L_+^- x^+ g_{-+} \left(L_+^+ y^+ + \sum_{s=1}^2 L_s^+ y^s \right) + L_-^- x^- g_{-+} \left(L_-^+ y^- + \sum_{s=1}^2 L_s^+ y^s \right) + \\
& + \sum_{k=1}^2 L_k^- x^k g_{-+} \left(L_+^+ y^+ + L_-^+ y^- \right), \tag{A.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
III = & \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho x^+ g_{\rho\tau} L_-^\tau y^- + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho x^- g_{\rho\tau} L_+^\tau y^+ + \sum_{\rho=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_k^\rho x^k g_{\rho\tau} \sum_{s=1}^2 L_s^\tau y^s + \\
& + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho x^+ g_{\rho\tau} \left(L_+^\tau y^+ + \sum_{s=1}^2 L_s^\tau y^s \right) + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho x^- g_{\rho\tau} \left(L_-^\tau y^- + \sum_{s=1}^2 L_s^\tau y^s \right) + \\
& + \sum_{\rho=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_k^\rho x^k g_{\rho\tau} \left(L_+^\tau y^+ + L_-^\tau y^- \right). \tag{A.32}
\end{aligned}$$

Ao somarmos I , II e III , temos que

$$\begin{aligned}
x'^\mu y'_\mu = & \left(L_+^+ g_{+-} L_-^- + L_-^- g_{-+} L_+^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho g_{\rho\tau} L_-^\tau \right) x^+ y^- + \\
& + \left(L_-^+ g_{+-} L_+^- + L_+^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho g_{\rho\tau} L_+^\tau \right) x^- y^+ + \\
& + \sum_{k=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(L_k^+ g_{+-} L_s^- + L_k^- g_{-+} L_s^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_k^\rho g_{\rho\tau} L_s^\tau \right) x^k y^s + \\
& + \sum_{s=1}^2 \left(L_+^+ g_{+-} L_s^- + L_+^- g_{-+} L_s^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho g_{\rho\tau} L_s^\tau \right) x^+ y^s + \\
& + \sum_{s=1}^2 \left(L_-^+ g_{+-} L_s^- + L_-^- g_{-+} L_s^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho g_{\rho\tau} L_s^\tau \right) x^- y^s + \\
& + \sum_{k=1}^2 \left(L_k^+ g_{+-} L_+^- + L_k^- g_{-+} L_+^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_k^\rho g_{\rho\tau} L_+^\tau \right) x^k y^+ + \\
& + \sum_{k=1}^2 \left(L_k^+ g_{+-} L_-^- + L_k^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_k^\rho g_{\rho\tau} L_-^\tau \right) x^k y^- + \\
& + \left(L_+^+ g_{+-} L_+^- + L_+^- g_{-+} L_+^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho g_{\rho\tau} L_+^\tau \right) x^+ y^+ + \\
& + \left(L_-^+ g_{+-} L_-^- + L_-^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho g_{\rho\tau} L_-^\tau \right) x^- y^-. \tag{A.33}
\end{aligned}$$

Por outro lado, vimos que, devido à invariância do espaço-tempo, ela tem que preservar o produto escalar, i.é:

$$\begin{aligned}
x'^\mu y'_\mu &= x^\alpha y_\alpha = x^+ y_+ + x^- y_- + \sum_{k=1}^2 x^k y_k \\
&= g_{+-} x^+ y^- + g_{-+} x^- y^+ + \sum_{k=1}^2 g_{sk} x^k y^s.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Assim, comparando cada termo da Eq. (A.34) com cada termos da eq. (A.33), temos:

$$\left(L_+^+ g_{+-} L_-^- + L_+^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho g_{\rho\tau} L_-^\tau \right) x^+ y^- = g_{+-} x^+ y^-, \tag{A.35}$$

o que implica

$$L_+^+ g_{+-} L_-^- + L_+^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho g_{\rho\tau} L_-^\tau = g_{+-}. \tag{A.36}$$

Da mesma forma para o segundo termo

$$\left(L_-^+ g_{+-} L_+^- + L_-^- g_{-+} L_+^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho g_{\rho\tau} L_+^\tau \right) x^- y^+ = g_{-+} x^- y^+, \tag{A.37}$$

obtemos

$$L_-^+ g_{+-} L_+^- + L_-^- g_{-+} L_+^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho g_{\rho\tau} L_+^\tau = g_{-+}. \tag{A.38}$$

E para o terceiro termo, temos:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(L_k^+ g_{+-} L_s^- + L_k^- g_{-+} L_s^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_k^\rho g_{\rho\tau} L_s^\tau \right) x^k y^s = \sum_{k=1}^2 g_{sk} x^k y^s. \tag{A.39}$$

É fácil mostrar que os únicos termos que sobrevivem, na identidade (A.39), tem a forma

$$\left(L_m^+ g_{+-} L_m^- + L_m^- g_{-+} L_m^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_m^\rho g_{\rho\tau} L_m^\tau \right) x^m y^m = g_{mm} x^m y^m, \tag{A.40}$$

e isso nos fornecará a seguinte identidade:

$$L_m^+ g_{+-} L_m^- + L_m^- g_{-+} L_m^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_m^\rho g_{\rho\tau} L_m^\tau = g_{mm}. \tag{A.41}$$

Uma maneira mais geral, podemos escrever (A.41) como

$$L_i^+ g_{+-} L_j^- + L_i^- g_{-+} L_j^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_i^\rho g_{\rho\tau} L_j^\tau = g_{ij}, \quad (\text{A.42})$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, os termos restantes serão nulos, pela identidade (A.34). Desta forma mostramos que:

$$\begin{aligned} L_+^+ g_{+-} L_-^- + L_+^- g_{-+} L_-^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_+^\rho g_{\rho\tau} L_-^\tau &= g_{+-}, \\ L_-^+ g_{+-} L_+^- + L_-^- g_{-+} L_+^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_-^\rho g_{\rho\tau} L_+^\tau &= g_{-+}, \\ L_i^+ g_{+-} L_j^- + L_i^- g_{-+} L_j^+ + \sum_{\rho=1}^2 L_i^\rho g_{\rho\tau} L_j^\tau &= g_{ij}. \end{aligned}$$

A.5 Matriz da Transformação na Frente de Luz

Nesta seção mostramos obteremos as componentes do tensor de transformação da Eq. (2.80). A matriz usual da transformação de Lorentz para velocidade relativa entre referenciais ao longo da direção z é:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

Usando a relação dada por [18], temos

$$a) \quad \Lambda_\nu^+ = \frac{\Lambda_\nu^0 + \Lambda_\nu^3}{\sqrt{2}}, \quad b) \quad \Lambda_\nu^- = \frac{\Lambda_\nu^0 - \Lambda_\nu^3}{\sqrt{2}}, \quad c) \quad \Lambda_\nu^i, \quad (\text{A.43})$$

onde $i = 1, 2$. Então começamos a avaliar o caso $a)$

- Para $\nu = +$, temos:

$$\begin{aligned} \Lambda_+^+ &= \frac{\Lambda_+^0 + \Lambda_+^3}{\sqrt{2}} = \frac{\Lambda_0^0 + \Lambda_3^0 + \Lambda_0^3 + \Lambda_3^3}{2} \\ &= \gamma(1 - \beta) = e^{-\omega}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

onde consideramos $\gamma = \gamma^< = \frac{e^{-\omega}}{1 - \frac{v}{c}}$.

- Para $\nu = -$

$$\Lambda_{-}^{+} = \frac{\Lambda_{-}^0 + \Lambda_{-}^3}{\sqrt{2}} = \frac{\Lambda_0^0 - \Lambda_3^0 + \Lambda_0^3 - \Lambda_3^3}{2} = 0. \quad (\text{A.45})$$

- Para $\nu = j$ onde $j = 1, 2$

$$\Lambda_j^{+} = \frac{\Lambda_j^0 + \Lambda_j^3}{\sqrt{2}} = 0. \quad (\text{A.46})$$

De forma semelhante para o caso $b)$, temos:

$$\Lambda_{\nu}^{-} = \frac{\Lambda_{\nu}^0 - \Lambda_{\nu}^3}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.47})$$

- Para $\nu = +$

$$\Lambda_{+}^{-} = \frac{\Lambda_{+}^0 - \Lambda_{+}^3}{\sqrt{2}} = 0, \quad (\text{A.48})$$

- Para $\nu = -$

$$\Lambda_{-}^{-} = \frac{\Lambda_{-}^0 - \Lambda_{-}^3}{\sqrt{2}} = \gamma(1 + \beta) = e^{\omega}, \quad (\text{A.49})$$

onde, para este caso, consideramos $\gamma = \gamma^{>} = \frac{e^{\omega}}{1 + \frac{v}{c}}$.

- para $\nu = j$

$$\Lambda_j^{-} = \frac{\Lambda_j^0 - \Lambda_j^3}{\sqrt{2}} = 0 \quad (\text{A.50})$$

Finalmente para o caso $c)$

- Para $\nu = \pm$

$$\Lambda_{\pm}^i = \frac{\Lambda_0^i \pm \Lambda_3^i}{\sqrt{2}} = 0, \quad (\text{A.51})$$

- Para $\nu = j$

$$\Lambda_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (\text{A.52})$$

Desta forma obtemos todas as componente do tensor (2.80).

Apêndice B

Apêndice do Capítulo 3

B.1 Para Ordem $\mathcal{O}(g^2)$

Neste Apêndice vamos mostrar alguns passos com maiores detalhes para se obter os resultados do capítulo 3. Começamos pela ordem $\mathcal{O}(g^2)$.

O propagador na representação do espaço dos momentos, é dado por (3.10),

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k^-) = & \frac{i^5 (ig)^2}{2^5 (2\pi)^2} \int \frac{dk_2^- dk_4^-}{\underbrace{(k^+ - k_2^+)}_1 \underbrace{k_2^+}_{1} \underbrace{(k^+ - k_4^+)}_1 \underbrace{k_4^+}_{1} \underbrace{(k_4^+ - k_2^+)}_1} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_2^- - k^- + (k - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k^- - k_4^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]}, \end{aligned}$$

em que esta dupla integral será resolvida usando a fórmula de integral de Cauchy.

Integração em k_2^-

Primeiramente vamos integrar em k_2^- . Para este fim vamos determinar a localização dos pólos, com ajuda de (3.10)

$$\begin{aligned} 1 : \quad k_2^- &= k^- - (k - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \\ 2 : \quad k_2^- &= k_{2\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \\ 3 : \quad k_2^- &= k_4^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \end{aligned}$$

Cada um dos pólos vai estar localizado seja na metade inferior ou superior do plano complexo k^- , dependendo dos valores de k^+ , k_2^+ e k_4^+ . Estes pólos são analisadas nas seguintes regiões,

1) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k^+$	4) $0 < k^+ < k_2^+ < k_4^+$
2) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k^+$	5) $0 < k_4^+ < k^+ < k_2^+$
3) $0 < k_2^+ < k^+ < k_4^+$	6) $0 < k^+ < k_4^+ < k_2^+$

(B.1)

Vemos que existe 6 possibilidades o regiões onde esse propagador pode existir. Veremos que estes 6 regiões serão divididas em 4 grupos de regiões. Abaixo ilustramos a localização desses pólos.

- **Regiões 1 e 3:** Nesta região os pólos (B.1), tem a seguinte configuração ilustrada na Fig. B.1.

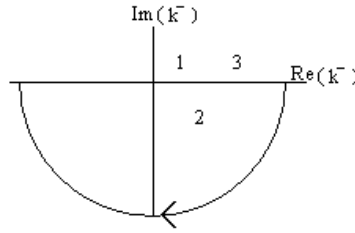


Figura B.1: Regiões 1 e 3

- **Região 2:** Nesta outra região os pólos de (B.1) são ilustrada na Fig. B.2.

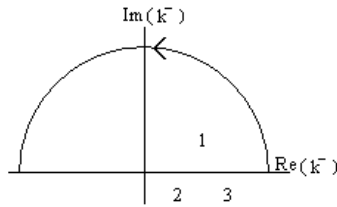


Figura B.2: Região 2

- **Região 4:** Para esta região, os pólos tem a seguinte configuração (ver Fig. B.3.)

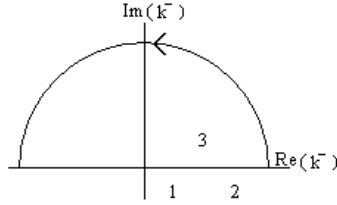


Figura B.3: Região 4

- **Regiões 5 e 6:** Os pólos desta últimas regiões estão ilustradas na Fig. B.4

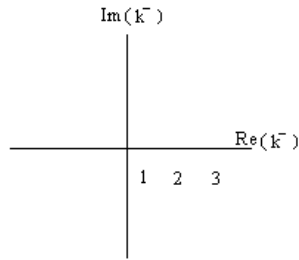


Figura B.4: Regiões 5 e 6

Como podemos observar, as regiões 5 e 6 não contribuem. Em seguida, vamos fazer a integração em k_2^- , de acordo com as configurações mostradas nas figuras B.1, B.2, B.3 e B.4

- Para a regiões 1 e 3, o pólo escolhido é o pólo 2 (ver Fig. B.1)

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k^-) = & -\frac{(ig)^2}{2^5(2\pi)} \int \frac{dk_4^-}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right)} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} + (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]}. \tag{B.2}
\end{aligned}$$

- Para a região 2, o pólo escolhido é o pólo 1 (ver Fig. B.2)

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) &= -\frac{(ig)^2}{2^5(2\pi)} \int \frac{dk_4^-}{\left(k^+ - k_2^+ \right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+ \right) k_4^+ \left(k_4^+ - k_2^+ \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} + (k - k_2)_{\text{on}} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_2)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]}. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

- Para a região 4, o pólo escolhido é o pólo 3 (ver Fig. B.3)

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) &= \frac{(ig)^2}{2^5(2\pi)} \int \frac{dk_4^-}{\left(k^+ - k_2^+ \right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+ \right) k_4^+ \left(k_4^+ - k_2^+ \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]}. \tag{B.4}
\end{aligned}$$

- Para a região 5 e 6 vemos que não há contribuição (ver Fig. B.4), ou seja, as contribuições são nulas. O passo seguinte será integrar em k_4^-

Integração em k_4^-

- Da integral (B.2), localizamos os seguintes pólos, tanto para a região de 1 como para a região 3

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \\
2 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
3 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}
\end{aligned}$$

Como mencionado acima, cada um dos pólos vai estar localizado seja na metade inferior ou na superior do plano complexo k^- , dependendo dos valores de k^+ , k_2^+ e k_4^+ . As configurações desses pólos são mostradas nas figuras abaixo.

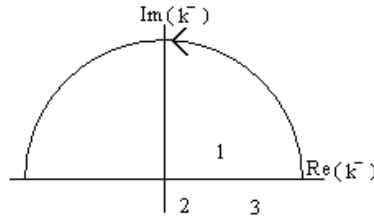


Figura B.5: Região 1

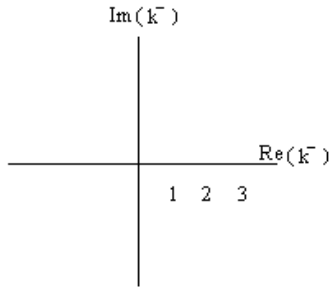


Figura B.6: Região 3

- Do mesmo modo, para a integral (B.3), localizamos os seguintes pólos, ou seja, para a região 2 temos:

$$1 : k_4^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)}$$

$$2 : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}$$

$$3 : k_4^- = k^- - (k - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}$$

e a configuração, desses pólos é dada na Fig. B.7.

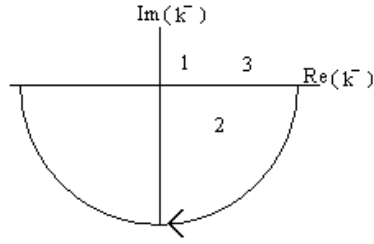


Figura B.7: Região 2

- Também para a integral (B.4), localizamos os seguintes pólos

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k^- + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_4^- = (k_4 - k_2)_{\text{on}} + k_{2\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \\
3 & : k_4^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \\
4 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}
\end{aligned}$$

e ilustramos sua configuração, mostrada na Fig. B.8. Como podemos ver, na inte-

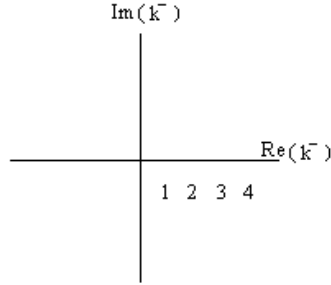


Figura B.8: Região 4

gração em k_4^- , as regiões 3 e 4 são canceladas. Assim ficamos só com as regiões 1 e 2. Deste modo, escolhendo o polo 1 para região 1 (ver Fig. B.5) e o pólo2 para a região 2 (ver Fig. B.7), obtemos os resultados (3.14) e (3.15), respectivamente.

B.2 Para Ordem $\mathcal{O}(g^4)$

Nesta parte do Apêndice, o procedimento é semelhante ao do caso para ordem $\mathcal{O}(g^2)$

Integração em k_2^-

Vamos integrar a Eq. (3.19) sobre k_2^- por resíduos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) &= \frac{(ig)^4}{2^8(2\pi)^3} \int \frac{dk_2^- dk_4^- dk_6^-}{(k^+ - k_2^+) k_2^+ (k^+ - k_4^+) k_4^+ (k^+ - k_6^+) k_6^+ (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[k_2^- - k^- + (k - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_4^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_6^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_4^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

onde os pólos estão localizados em

$$\begin{aligned}
1 & : k_2^- = k^- - (k - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_2^- = k_{2\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \\
3 & : k_2^- = k_{4\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}
\end{aligned}$$

Cada um dos pólos pode estar localizado seja na metade inferior ou na superior do plano complexo k^- , dependendo dos valores de k^+ , k_2^+ e k_4^+ . Estes pólos são analisados nas regiões 1, 2, 3, 4, 5 e 6 (ver tabela 3.20). Em seguida, vamos ver que estes conjunto de regiões, quando são analisadas, vai formar mais dois conjunto de regiões, um primeiro conjunto composta pelas regiões 1, 3 e 4, e um segundo conjunto composto pelas regiões 2, 5 e 6. Como vamos ver na seguinte seção.

• Primeiro conjuntos de Regiões

Logo ao se analisar as seis regiões, vemos que um primeiro conjunto estará formado pelas regiões 1, 3 e 4. Estes pólos estão localizados como ilustrado na Fig. B.9

• Segundo Conjuntos de Regiões

Neste, outro segundo grupos formada pelas regiões 2, 5 e 6, os pólos estão localizados como ilustrado na Fig. B.10 Assim, depois de localizar os polos de cada grupo de regiões, aplicamos o teorema de resíduos de Cauchy. Vemos que para as regiões 1, 3 e 4 o integrando torna-se mais facil se escolhemos o polo 2, da mesma maneira para as regiões 2, 5 e 6 é muito mais simple integrar em k_2^- se escolhemos o pólo 1. O passo seguinte será integrar em k_4^- . Como veremos na proxima seção

• Integrando nas Regiões: 1, 3 e 4

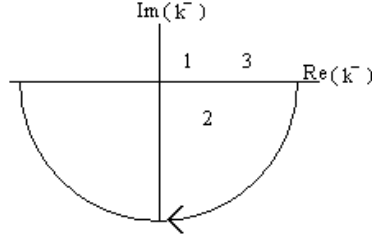


Figura B.9: Regiões 1, 3 e 4

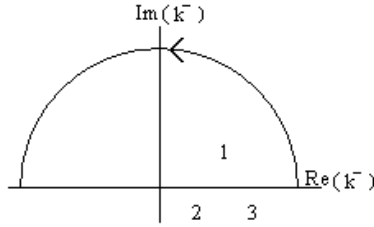


Figura B.10: Regiões 2, 5 e 6

Depois de integrar em k_2^- a expressão (B.5) fica

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(k^-) = & -\frac{i(ig)^4}{2^8(2\pi)^2} \int \frac{dk_4^- dk_6^-}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)}\right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_6^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)}\right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}\right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}\right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}\right]}. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

• **Integrando nas Regiões: 2, 5 e 6**

Logo de integrar em k_2^- , isto é depois de escolher o polo 1 e aplicar o teorema do residuo à Eq. (B.5), este outro grupo de regiões, fica expresso como

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & -\frac{i(ig)^4}{2^8(2\pi)^2} \int \frac{dk_4^- dk_6^-}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_6^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}\right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_2)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}\right]}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Integração em k_4^-

- **Regiões 1, 3 e 4:** Da expressão (B.6) localizamos os seguinte pólos, isto é

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \\
2 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
3 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
4 & : k_4^- = k_{6\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}.
\end{aligned}$$

Quando os pólos são analisados nas regiões 1, 3 e 4, vamos ver que, nestas três regiões, voltam a dividir-se em mais dois grupos de regiões. No caso da região 1, teremos dois pólos, como ilustrados na Fig. B.11, e no caso das regiões 3 e 4 teremos um único pólo como mostrado na Fig. B.12.

- **Regiões 2, 5 e 6:** Do mesmo modo, da integral (B.7), localizamos os seguinte pólos

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \\
2 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}
\end{aligned}$$

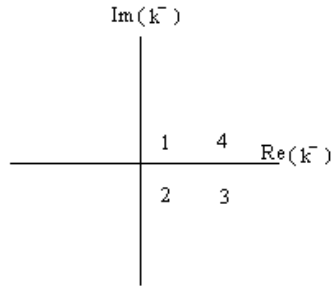


Figura B.11: Região 1

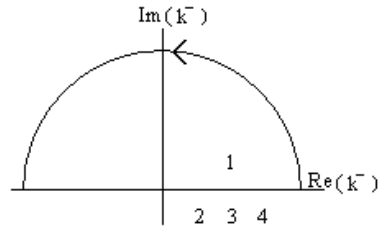


Figura B.12: Regiões 3 e 4

$$\begin{aligned}
 3 & : k_4^- = k^- - (k - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
 4 & : k_4^- = k_{6\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)},
 \end{aligned}$$

que depois de analisar nas regiões 2, 5 e 6, obtemos outros dois subconjuntos de regiões. Um primeiro formado pelas regiões 2 e 5, como mostrado na Fig. B.13, e outro formado pela região 6, que é ilustrado na Fig. B.14

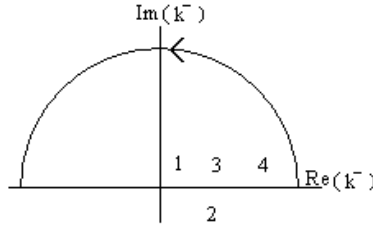


Figura B.13: Regiões 2 e 5

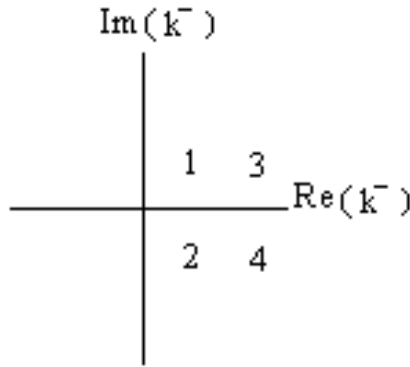


Figura B.14: Região 6

Vemos mais uma vez que neste grupo de regiões aparece uma região (região 6) com dois pólos (ver Fig. B.14.), tanto na parte de cima como na debaixo. Mas não devemos preocupar-nos, já que vamos fazer o mesmo raciocínio que foi discutido acima.

• Integração na região 1

No que se segue, começamos por integrar na região 1 com respeito a k_4^- . Mas observamos de que nesta região temos dois pólos, o que aparentemente torna o nosso integrando complicado, mas este dilema poderá ser resolvido usando a seguinte identidade por frações parciais:

$$\frac{1}{(x-A)(x-B)(x-C)(x-D)} = \frac{1}{(A-B)(x-C)(x-D)} \times \left[\frac{1}{(x-A)} - \frac{1}{(x-B)} \right], \quad (\text{B.8})$$

onde A , B , C e D são os polos de integração. Esta identidade vai desmembrar o integrando (B.6) em duas partes, como veremos abaixo.

Voltando ao nosso problema: Dissemos que a região 1, tem dois pólos, dificultando o processo de integração. Assim, escolher integrar na metade superior ou inferior do plano complexo k^- não ameniza em nada a dificuldade. Mas isto se tornará fácil se usarmos a identidade (B.8). Deste modo escolhemos A como sendo o pólo 1 e B como sendo o pólo 2 (ver Fig. B.11), i.é. $A = k^- - (k - k_4)_{\text{on}}$ e $B = k_{4\text{on}}$. Assim o integrando (B.6) fica

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & -\frac{i(ig)^4}{2^8(2\pi)^2} \int \frac{dk_4^- dk_6^-}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_6^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}\right]} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)}\right]} - \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}\right]} \right\}. \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Da análise do integrando (B.9), localizamos os seguintes pólos para a primeira fração parcial:

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
3 & : k_4^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)}
\end{aligned}$$

e da segunda parte da fração do integrando temos

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
3 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}
\end{aligned}$$

Estes pólos estão ilustrados nas seguinte figuras

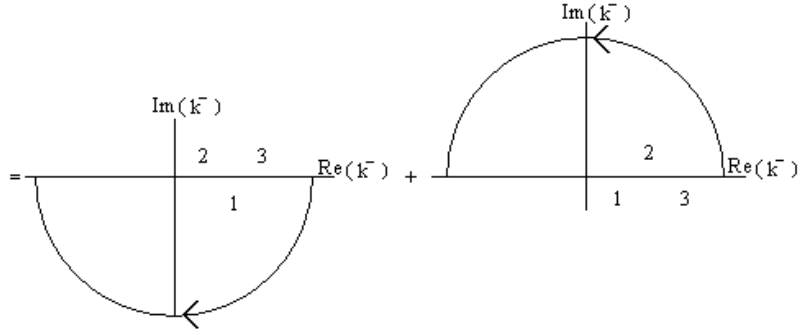


Figura B.15: Configuração de pólos na região 1

Vemos assim, de que com o uso da identidade (B.8), a expressão (B.6) é desmembrada em duas partes como podemos observar na Eq. (B.9). Isso fará com que os dois pólos que tínhamos no princípio, sejam agora também desmebrados em duas partes, como ilustradas na Fig. B.15. A escolha desses pólos separados facilitará nossas contas no momento de integrar em k_4^- . Em seguida da Fig. B.15, escolhemos o contorno que fecha na metade inferior (pólo 1) num caso e o contorno que fecha na metade superior (pólo 2) no outro caso e integramos em k_4^- . Usando a fórmula de integral de Cauchy obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & \frac{(ig)^4}{2^8(2\pi)} \int \frac{dk_6^-}{\left(k^+ - k_2^+\right) k_2^+ \left(k^+ - k_4^+\right) k_4^+ \left(k^+ - k_6^+\right) k_6^+ \left(k_4^+ - k_2^+\right) \left(k_6^+ - k_4^+\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}\right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k^- + (k - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)}\right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}\right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}\right]} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\left[k_6^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}\right]} + \right. \\
& \left. - \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}\right]} \right\}. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

• Integração nas região 3 e 4

Para estas região escolhemos o polo 1 ver Fig. B.12 e aplicamos o teorema do resíduo em k_4^- à Eq (B.6). Obtendo

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & \frac{(ig)^4}{2^8(2\pi)} \int \frac{dk_6^-}{\left(\frac{1}{(k^+ - k_2^+) k_2^+ (k^+ - k_4^+) k_4^+ (k^+ - k_6^+) k_6^+ (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \right)} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k^- + (k - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

• **Integração nas Região 2 e 5**

Nestas regiões, a integração é simples; o pólo escolhido é o pólo 2 (ver Fig. B.13), isto é, $k_4^- = k_{4\text{on}}$. Aplicamos a fórmula de Cauchy na Eq (B.7) temos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & -\frac{(ig)^4}{2^8(2\pi)} \int \frac{dk_6^-}{\left(\frac{1}{(k^+ - k_2^+) k_2^+ (k^+ - k_4^+) k_4^+ (k^+ - k_6^+) k_6^+ (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \right)} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k^- + (k - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

• **Integração na região 6**

Como mencionado acima, novamente, nesta região, lidamos com dois pólos (ver Fig. B.14). Então como discutido acima fazemos uso da identidade B.8 e escolhemos A como sendo o polo 1 e B como sendo o polo 2, i.é. $A = k^- - (k - k_4)_{\text{on}}$ e $B = k_{4\text{on}}$. Assim, o integrando (B.7) torna-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & -\frac{i(ig)^4}{2^8(2\pi)^2} \int \frac{dk_4^- dk_6^-}{\left(\frac{1}{(k^+ - k_2^+) k_2^+ (k^+ - k_4^+) k_4^+ (k^+ - k_6^+) k_6^+ (k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \right)} \times \\
& \times \frac{1}{[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}}]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_6^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_2)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\left[k_4^- - k^- + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} - \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \right\}, \tag{B.13}
\end{aligned}$$

de modo que analisando o integrando de (B.13) localizamos os seguintes pólos para a primeira fração parcial:

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k^- - (k - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
3 & : k_4^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)},
\end{aligned}$$

e da outra segunda parte da fração parcial:

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k^- - (k - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
3 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}.
\end{aligned}$$

As configurações desses pólos são ilustrada na Fig. B.16

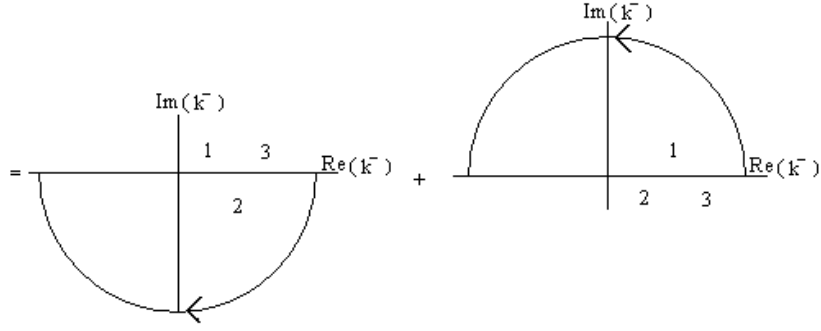


Figura B.16: Configuração de pólos na região 6

Assim, a Eq (B.13), expressa nessa forma torna-se mais fácil quando se aplica o teorema de resíduo, devido ao fato de que não temos mais dois pólos no mesmo hemisfério. Agora como o integrando foi desmembrado, em duas integrais, fica fácil de se integrar; escolhemos para o primeiro integrando o polo 2, ou seja o caminho de integração é por baixo e para o segundo integrando o polo 1, isto é o caminho de integração é por cima (ver Fig. B.16). Integração em k_4^- para a região 6 resulta em

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k^-) = & \frac{(ig)^4}{2^8(2\pi)} \int \frac{dk_6^-}{\underbrace{(k^+ - k_2^+)}_1 \underbrace{k_2^+}_{1} \underbrace{(k^+ - k_4^+)}_1 \underbrace{k_4^+}_{1} \underbrace{(k^+ - k_6^+)}_1 \underbrace{k_6^+}_{1} \underbrace{(k_4^+ - k_2^+)}_1 \underbrace{(k_6^+ - k_4^+)}_1} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k^- - k_{2\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}} \right]} \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k^- + (k - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k - k_2)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\left[k_6^- - k^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)} \right]} + \right. \\
& \left. - \frac{1}{\left[k^- - k_{4\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} \right]} \right\} \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

Resta agora a integração em k_6^- .

Integrando em k_6^-

- **Região 1:** Seguindo o mesmo raciocínio, como elaborado acima, da Eq. (B.10) localizamos, de cada parte do integrando, os seguintes pólos para a primeira parte da fração parcial

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \\
2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
3 & : k_6^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
4 & : k_6^- = k_{4\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}
\end{aligned}$$

e da segunda parte da fração parcial

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \\
2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
3 & : k_6^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}.
\end{aligned}$$

Estes pólos são ilustradas nas figuras abaixo

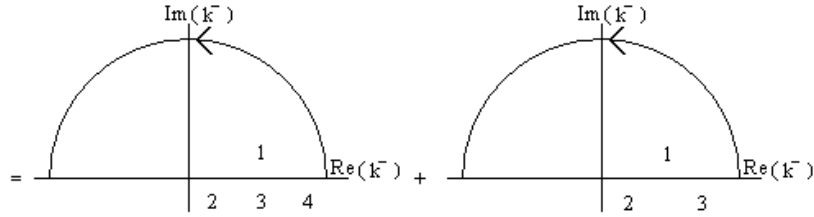


Figura B.17: Configuração de pólos na região 1

Deste modo, podemos observar, da Fig. B.17, que a integração se tornará mais simples quando escolhermos os pólos que estão localizados na metade superior do plano complexo k^- , ou dito de outra maneira, escolhermos os pólos 1. A escolha desse caminho de integração produzirá o resultado (3.22) e (3.23). No que se segue, vamos fazer procedimento semelhante para as outras regiões.

- **Regiões 3 e 4:** Da da Eq. (B.11) localizamos os pólos

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \\
2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
3 & : k_6^- = k^- - (k - k_4)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)},
\end{aligned}$$

que estão ilustrados na figura de abaixo

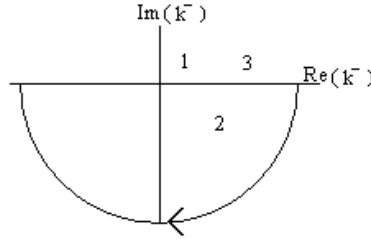


Figura B.18: Configuração de pólos nas regiões 3 e 4

É facil ver, da Fig. B.18, que a escolha do pólo 2 é a mais conveniente e resultará na Eq. (3.24)

- **Regiões 2 e 5:** Os polos são obtido de B.12, como sendo

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)} \\
2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
3 & : k_6^- = k_{4\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}
\end{aligned}$$

e são representados no seguinte gráfico

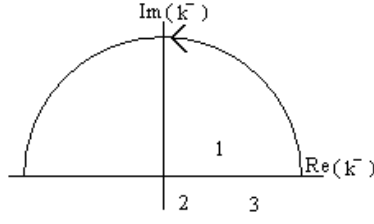


Figura B.19: Configuração de pólos nas regiões 2 e 5

Da Fig. B.19, vemos que a escolha do pólo 1 é mais conveniente e que nos dará o resultado (3.25)

- **Região 6:** Finalmente, de (B.14) localizamos os seguinte polos da primeira parte da fração parcial

$$1 : k_6^- = k^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)}$$

$$2 : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}$$

$$3 : k_6^- = k^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}$$

$$4 : k_6^- = k^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_4^+)}$$

e da segunda parte da fração parcial

$$1 : k_6^- = k^- - (k - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k^+ - k_6^+)}$$

$$2 : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}$$

$$3 : k_6^- = k^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}$$

cujas configurações são mostrada na Fig. B.20

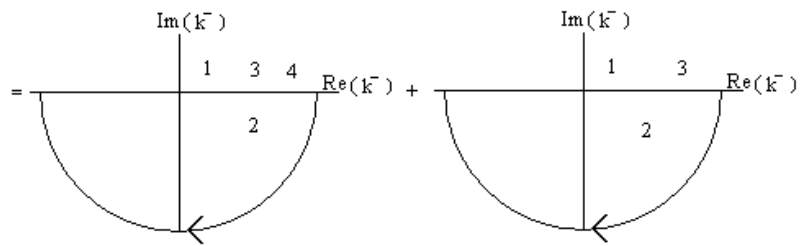


Figura B.20: Configuração de pólos na região 6

Novamente é facil, ver da Fig. B.20, que a escolha dos dois polos 2 (metade inferior do plano complexo k^-) é a mais conveniente e fornecerá os resultados de (3.27) e (3.28)

Apêndice C

Apêndice do Capítulo 4

C.1 Para Ordem $\mathcal{O}(g^2)$ com Fonte

Integração em k_2^-

O propagador na representação dos momentos é dado por (4.7),

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(k_f^-) = & -\frac{i (ig)^2}{2^6 (2\pi)^2} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_2^- dk_4^- [k_f^- + k_i^- - 2k_4^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)} \right] \left[k_2^- - k_{2on} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right] \left[k_4^- - k_{4on} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]},
 \end{aligned}$$

Para continuarmos os cálculos, devemos escolher regiões de integração que relacionem esses momentos. Abaixo estão enumeradas todas as possibilidades:

1) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+$	9) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+$	17) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+$
2) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+$	10) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+$	18) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+$
3) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$	11) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+$	19) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+$
4) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+$	12) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+$	20) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+$
5) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+$	13) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+$	21) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+$
6) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+$	14) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+$	22) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+$
7) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+$	15) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+$	23) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+$
8) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+$	16) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+$	24) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+$

(C.1)

Integrando primeiro em k_2^- , temos 3 pólos imaginários:

$$\begin{aligned}
1 & : k_2^- = k_i^- - (k_i - k_2)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_2)^+} \\
2 & : k_2^- = k_{2on} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \\
3 & : k_2^- = k_4^- - (k_4 - k_2)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4 - k_2)^+}.
\end{aligned}
\tag{C.2}$$

Dependendo da região escolhida esses pólos ficarão na metade inferior ou superior do plano complexo em k^- . A Fig. C.1 mostra essas configurações.

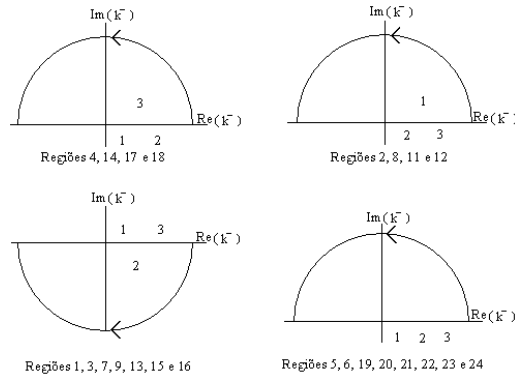


Figura C.1: pólos em k_2^- para as 24 regiões e as respectivas escolha de caminho de integração

Como se pode ver, oito regiões conduzem a contribuições que se anulam, isto é: 5, 6, 19, 20, 21, 22, 23 e 24 (ver Fig. C.1). Fazendo a integração em k_2^- de acordo com a Fig. C.1, teremos:

- Regiões 1, 3, 7, 9, 10, 13, 15 e 16:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= \frac{-i(ig)^2(-2\pi i)}{2^6(2\pi)^2} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_4^- (k_f^- + k_i^- - 2k_4^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_2)_{on} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_4)^+} \right] \left[k_4^- - k_{4on} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{2on} - (k_4 - k_2)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4 - k_2)^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f - k_4)^+} \right]}. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

- Regiões 2, 8, 11 e 12:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= -\frac{ig^2(2\pi i)}{2^6(2\pi)^2} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_4^- (k_f^- + k_i^- - 2k_4^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{(k_i - k_4)^+} \right] \left[k_4^- - k_{4on} + \frac{i\varepsilon}{k_4^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{on} - (k_4 - k_2)_{on} + \frac{i\varepsilon}{(k_4 - k_2)^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{(k_f - k_4)^+} \right]}. \tag{C.4}
\end{aligned}$$

- Regiões 4, 14, 17 e 18:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= \frac{i(ig)^2(2\pi i)}{2^6(2\pi)^2} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_4^- (k_f^- + k_i^- - 2k_4^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{on} - (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_2)^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{2on} - (k_4 - k_2)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_4)^+} \right] \left[k_4^- - k_{4on} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f - k_4)^+} \right]}. \tag{C.5}
\end{aligned}$$

Integração em k_4^-

O próximo passo é a integração em k_4^- , mas esta é bastante trabalhosa em alguns casos devido ao grande número de pólos. Faremos tudo em partes para deixar claro o que acontece em cada região. A seguir listamos os pólos, e nas Figuras C.2, C.3 e C.4 ilustramos as configurações.

- Regiões 1, 3, 7, 9, 10, 13, 15 e 16:

$$\begin{aligned}
 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_4)^+} \\
 2 & : k_4^- = k_{4on} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
 3 & : k_4^- = k_f^- - (k_f - k_4)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f - k_4)^+} \\
 4 & : k_4^- = k_{2on} + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4 - k_2)^+}
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

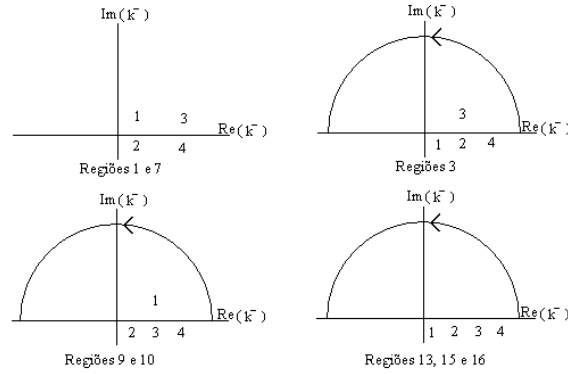


Figura C.2: pólos em k_4^- para o primeiro grupo de regiões

- Regiões 2, 8, 11 e 12:

$$\begin{aligned}
 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_4)^+} \\
 2 & : k_4^- = k_{4on} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
 3 & : k_4^- = k_f^- - (k_f - k_4)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f - k_4)^+} \\
 4 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_2)_{on} + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4 - k_2)^+}
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

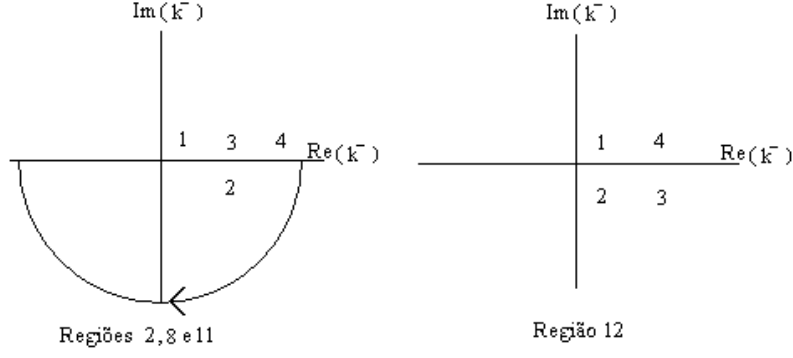


Figura C.3: pólos em k_4^- para o segundo grupo de regiões

- Regiões 4, 14, 17 e 18:

$$\begin{aligned}
 1 &: k_4^- = k_i^- - (k_i - k_2)_{on} + (k_4 - k_2)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_2)^+} \\
 2 &: k_4^- = k_{2on} + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \\
 3 &: k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i - k_4)^+} \\
 4 &: k_4^- = k_{4on} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
 5 &: k_4^- = k_f^- - (k_f - k_4)_{on} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f - k_4)^+}
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

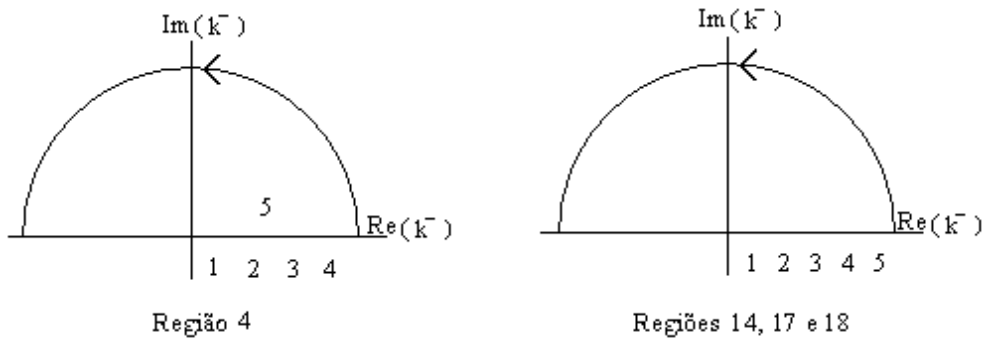


Figura C.4: pólos em k_4^- para o terceiro grupo de regiões

Vemos que mais 6 regiões resultam em contribuições que se anulam, isto é 13, 15, 16, 14, 17, e 18 (ver quarta e segunda configuração das figuras, C.2 e C.4), e do

total inicial de 24, sobram apenas 10. Discutiremos mais tarde o caso das regiões em que não é possível escolher um caminho com apenas um pólo, por isso deixamos estes caminhos sem indicação na primeira configuração da Fig. C.2 (regiões 1 e 7), e a segunda configuração da Fig. C.3 (região 12). Para as regiões em que é possível tal escolha (conforme mostrado nas Figuras C.2, C.3 e C.4), os resultados da integração em k_4^- , são muito simples de serem obtidos.

- Regiões 2, 8 e 11: Podemos observar da primeira configuração da Fig. C.3 que a escolha do pólo 2 é a mais conveniente e nos conduz ao resultado (4.9),

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) = & \frac{-i(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) (k_f^- + k_i^- - 2k_{4on})}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ & \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on}] [k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{4on} + (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on}]} . \end{aligned} \quad (C.9)$$

- Região 4: De forma semelhante, na primeira configuração da Fig. C.4 a escolha do pólo 5 é mais conveniente e conduzirá ao resultado (4.10),

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) = & \frac{-i(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) [k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_4)_{on}]}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ & \times \frac{1}{[k_f^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{on} - (k_f - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_f^- - k_{2on} - (k_f - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}] [k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_f^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - (k_f - k_4)_{on}]} . \end{aligned} \quad (C.10)$$

- Regiões 9 e 10: Nestas regiões a escolha do pólo 1 (ver terceira configuração da Fig. C.2) implicará o resultado (4.11)

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) = & \frac{i(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) [k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_4)_{on}]}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ & \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on}] [k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{on} + (k_f - k_4)_{on}]} . \end{aligned} \quad (C.11)$$

- Região 3: para esta região escolhemos o pólo 3 (ver segunda configuração da Fig. C.2) o que nos fornece a expressão (4.12)

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) = & \frac{i(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-) [k_f^- - k_i^- - 2(k_f - k_4)_{on}]}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ & \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on}] [k_f^- - k_{2on} - (k_f - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\ & \frac{1}{[k_f^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - (k_f - k_4)_{on}] [k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on}]} \cdot (C.12) \end{aligned}$$

Para os termos com dois polos, a integração pode ficar mais simples ou complexa de acordo com a escolha do caminho. No caso das regiões 1 e 7, escolher simplesmente integrar pelo plano superior ou inferior não é a melhor opção. Vemos que a combinação dos pólos 3 com 2, para o caso das regiões 1 e 7 (ver primeira configuração da Fig. C.2) ou a combinação dos pólos 3 com 4 para a região 12 (ver segunda configuração da Fig. C.3) permitem-nos resolver este problema. Para poder separar esses pólos usaremos o método das frações parciais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-A)(x-B)(x-C)(x-D)} &= \frac{1}{(A-B)(x-C)(x-D)} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{(x-A)} - \frac{1}{(x-B)} \right\}, \quad (C.13) \end{aligned}$$

sendo que escolheremos os polos convenientemente, como mostrado a seguir.

- Regiões 1 e 7: Como acima se referiu, escolhemos A como o polo 3 e B como o polo 2 (ver primeira configuração da Fig. C.2), e substituímos em (C.13). Então a expressão (C.3) fica

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) = & -\frac{i(ig)^2(-2\pi i)}{2^6(2\pi)^2} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_4^- (k_f^- + k_i^- - 2k_4^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ & \frac{1}{[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_2)_{on}] [k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on}]} \times \\ & \frac{1}{[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+}]} \times \\ & \frac{1}{[k_4^- - k_{2on} - (k_4 - k_2)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+}]} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{on} - \frac{i\epsilon}{2(k_f - k_4)^+}]} - \frac{1}{[k_4^- - k_{4on} + \frac{i\epsilon}{2k_4^+}]} \right\}, (C.14) \end{aligned}$$

e de (C.14) localizamos os seguintes pólos na primeira parcela da fração parcial

$$\begin{aligned} 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+} \\ 2 & : k_4^- = k_{2on} + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+} \\ 3 & : k_4^- = k_f^- - (k_f - k_4)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_f - k_4)^+} \end{aligned}$$

e da segunda parcela da fração parcial obtemos

$$\begin{aligned} 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+} \\ 2 & : k_4^- = k_{2on} + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+} \\ 3 & : k_4^- = k_{4on} - \frac{i\epsilon}{2k_4^+}. \end{aligned}$$

Na Fig. C.5 ilustramos as configurações.

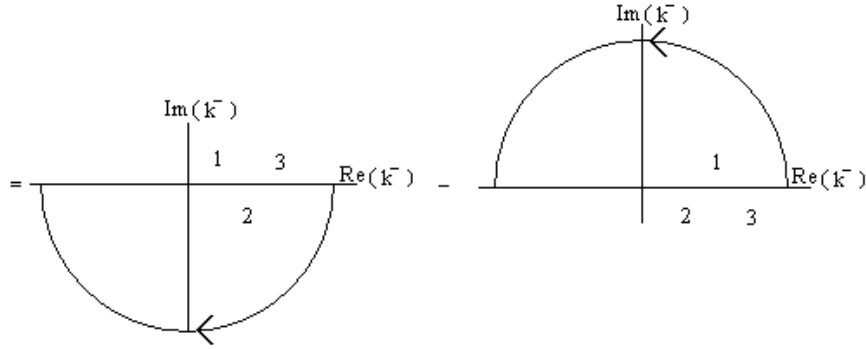


Figura C.5: Configurações final das regiões 1 e 7

É facil ver de que a escolha do pólo 2 e o pólo 1 respectivamente para as parcelas primeira e segunda são as mais convenientes e produzem o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) &= \frac{i (ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_2)_{on} \right] \left[k_f^- - k_{4on} - (k_f - k_4)_{on} \right]} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k_i^- - k_{2on} - (k_i - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on} \right]} \times \\ &\times \left\{ \frac{\left[k_f^- + k_i^- - 2k_{2on} - 2(k_4 - k_2)_{on} \right]}{\left[k_f^- - k_{2on} - (k_f - k_4)_{on} - (k_4 - k_2)_{on} \right]} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left. \frac{\left[k_f^- - k_i^- + 2(k_i - k_4)_{on} \right]}{\left[k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on} \right]} \right\}. \quad (C.15)$$

Este resultado está apresentado em (4.13)

- Região 12: Novamente não é possível obter um resultado direto com os polos 1 e 4 ou 2 e 3 (Ver segunda configuração da Fig. C.3). Neste caso, novamente, vamos usar a identidade (C.13), com $A = 3$ e $B = 4$. Deste modo a expressão (C.4) fica

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) = & \frac{-i(ig)^2(2\pi i)}{2^6(2\pi)^2} \int \frac{dq^- F(q^-) dk_4^- (k_f^- + k_i^- - 2k_4^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on} \right] \left[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_2)_{on} + (k_f - k_4)_{on} + (k_4 - k_2)_{on} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{on} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+} \right] \left[k_4^- - k_{4on} + \frac{i\epsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{on} - \frac{i\epsilon}{2(k_f - k_4)^+} \right]} + \right. \\ & \left. - \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{on} - (k_4 - k_2)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+} \right]} \right\} \end{aligned} \quad (C.16)$$

e os pólos da primeira fração parcial são localizados em

$$\begin{aligned} 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+} \\ 2 & : k_4^- = k_{4on} - \frac{i\epsilon}{2k_4^+} \\ 3 & : k_4^- = k_f^- - (k_f - k_4)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_f - k_4)^+} \end{aligned}$$

enquanto dos pólos da segunda fração parcial são localizados em

$$\begin{aligned} 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{on} + \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+} \\ 2 & : k_4^- = k_{4on} - \frac{i\epsilon}{2k_4^+} \\ 3 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_2)_{on} + (k_4 - k_2)_{on} - \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+} \end{aligned}$$

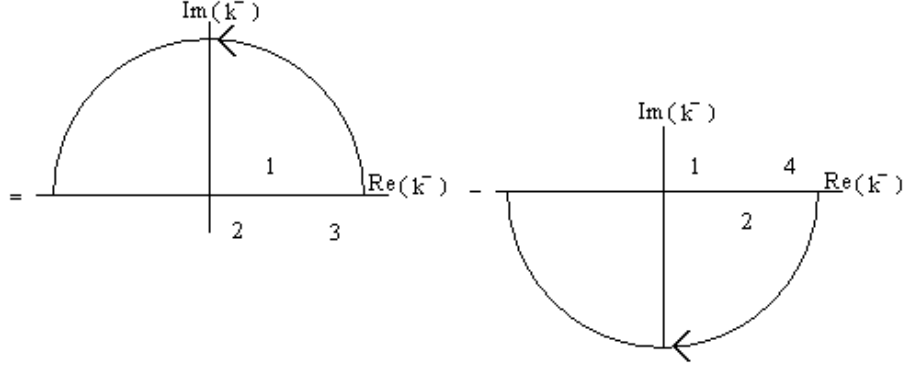


Figura C.6: Configuração final da região 12

Estes pólos são ilustradas na Fig. C.6.

Finalmente a escolha do pólo 1 e o pólo 2 produzem o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(k_f^-) = & \frac{-i(ig)^2}{2^6} \int \frac{dq^- F(q^-)}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ (k_f - k_4)^+ (k_4 - k_2)^+} \times \\
 & \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{2on}][k_i^- - (k_i - k_4)_{on} - k_{4on}]} \times \\
 & \times \frac{1}{[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_2)_{on} + (k_f - k_4)_{on} + (k_4 - k_2)_{on}]} \times \\
 & \times \left\{ \frac{k_i^- - k_f^- - 2(k_i - k_4)_{on}}{[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{on} + (k_f - k_4)_{on}]} + \right. \\
 & \left. - \frac{k_f^- + k_i^- - 2k_{4on}}{[k_i^- - (k_i - k_2)_{on} - k_{4on} + (k_4 - k_2)_{on}]} \right\}. \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

Este resultado é o mesmo que o resultado (4.14)

C.2 Para Ordem $\mathcal{O}(g^4)$ com Fonte

Os cálculos para ordem $\mathcal{O}(g^4)$ são semelhantes aos da ordem $\mathcal{O}(g^2)$, porém, vamos a mostrar em detalhe os procedimento para se obter os resultados apresentado no capítulo 4. O propagador a ordem $\mathcal{O}(g^4)$, na representação dos momentos, é dada por (4.19),

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(k_f^-) = & -\frac{(ig)^4}{2^9 (2\pi)^3} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_2^- dk_4^- dk_6^-}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
 & \times \frac{[k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_2^- - (k_i - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_4^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_6^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_6^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_2^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_4^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]}.
\end{aligned}$$

Para continuarmos os cálculos, devemos escolher regiões de integração que relacionem esses momentos. Neste caso teremos 120 possibilidades ou regiões que serão analisadas, como mostramos nas tabelas seguintes:

1) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_f^+$	31) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_i^+$
2) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_f^+$	32) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_i^+$
3) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+$	33) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_i^+$
4) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+$	34) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_i^+$
5) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+$	35) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_i^+$
6) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+$	36) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_i^+$
7) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_f^+$	37) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+$
8) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_f^+$	38) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+$
9) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_f^+$	39) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_i^+$
10) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_f^+$	40) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_i^+$
11) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_f^+$	41) $0 < k_6^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+$
12) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_f^+$	42) $0 < k_f^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+$
13) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$	43) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+$
14) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$	44) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+$
15) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_f^+$	45) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_i^+$
16) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_f^+$	46) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_i^+$
17) $0 < k_6^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+$	47) $0 < k_6^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+$
18) $0 < k_i^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+$	48) $0 < k_f^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+$
19) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+$	49) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_6^+$
20) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+$	50) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_6^+$
21) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_f^+$	51) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_6^+$
22) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_f^+$	52) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_6^+$
23) $0 < k_6^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+$	53) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_6^+$
24) $0 < k_i^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+$	54) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_6^+$
25) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_i^+$	55) $0 < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_6^+$
26) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_i^+$	56) $0 < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_6^+$
27) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+$	57) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_6^+$
28) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+$	58) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_6^+$
29) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+$	59) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_6^+$
30) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+$	60) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_6^+$

61) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_6^+$	91) $0 < k_6^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+$
62) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_6^+$	92) $0 < k_i^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+$
63) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_6^+$	93) $0 < k_6^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+$
64) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_6^+$	94) $0 < k_f^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+$
65) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+$	95) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+$
66) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_4^+ < k_6^+$	96) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_4^+$
67) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_6^+$	97) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+$
68) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_6^+$	98) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+$
69) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_6^+$	99) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_2^+$
70) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_6^+$	100) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_2^+$
71) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+$	101) $0 < k_6^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+$
72) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+ < k_6^+$	102) $0 < k_i^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_2^+$
73) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+$	103) $0 < k_4^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+$
74) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+$	104) $0 < k_6^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+$
75) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_4^+$	105) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_2^+$
76) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_4^+$	106) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_2^+$
77) $0 < k_6^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+$	107) $0 < k_6^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+$
78) $0 < k_i^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_4^+$	108) $0 < k_f^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_2^+$
79) $0 < k_2^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+$	109) $0 < k_4^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_2^+$
80) $0 < k_6^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+$	110) $0 < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_2^+$
81) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_4^+$	111) $0 < k_4^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_2^+$
82) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_4^+$	112) $0 < k_f^+ < k_4^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_2^+$
83) $0 < k_6^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+$	113) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+$
84) $0 < k_f^+ < k_6^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+$	114) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_6^+ < k_2^+$
85) $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_4^+$	115) $0 < k_6^+ < k_i^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+$
86) $0 < k_i^+ < k_2^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_4^+$	116) $0 < k_i^+ < k_6^+ < k_f^+ < k_4^+ < k_2^+$
87) $0 < k_2^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_4^+$	117) $0 < k_6^+ < k_f^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+$
88) $0 < k_f^+ < k_2^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_4^+$	118) $0 < k_f^+ < k_6^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_2^+$
89) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+$	119) $0 < k_i^+ < k_f^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+$
90) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_2^+ < k_6^+ < k_4^+$	120) $0 < k_f^+ < k_i^+ < k_6^+ < k_4^+ < k_2^+$

Integração em k_2^-

O procedimento é análogo ao que já fizemos anteriormente. Precisamos localizar os polos no plano complexo em k^- , analisar as diferentes configurações possíveis e escolher o caminho de integração mais conveniente de modo que a integração seja a mais simples possível. Assim, começando com a integração em k_2^- temos da expressão (4.19) os seguintes polos

$$\begin{aligned} 1 & : k_2^- = k_i^- - (k_i - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)} \\ 2 & : k_2^- = k_{2\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \\ 3 & : k_2^- = k_4^- - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \end{aligned}$$

Cada um dos pólos pode estar localizado na metade inferior ou superior do plano complexo em k^- , dependendo dos valores de k_2^+ , k_4^+ e k_i^+ . A seguir mostramos as configurações formada em cada grupo de regiões.

- I) Primeiro grupo de regiões: 1, 3, 4, 7, 9, 13, 14, 15, 25, 27, 28, 31, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 49, 51, 55, 57, 58, 61, 63, 64, 73, 74, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88.

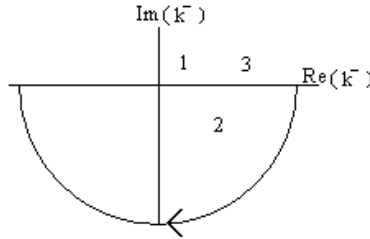


Figura C.7: Primeiro grupo de regiões

- II) Segundo grupo de regiões: 2, 5, 6, 8, 26, 29, 30, 32, 35, 36, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 56, 59, 60, 75.

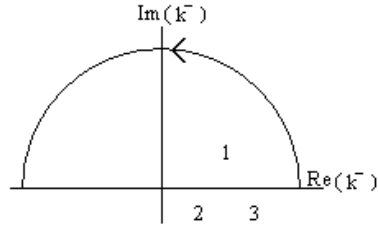


Figura C.8: Segundo grupo de regiões

- III) Terceiro grupo de regiões: 10, 16, 17, 18, 52, 62, 65, 66, 76, 77, 78, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96.

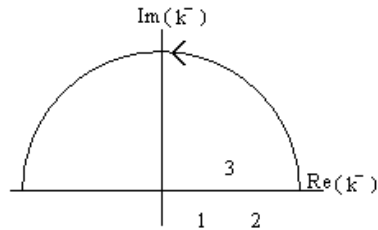


Figura C.9: Terceiro grupo de regiões

- IV) Quarto grupo de regiões: 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 53, 54, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120.

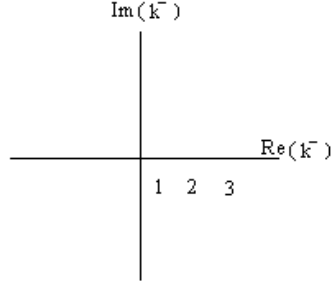


Figura C.10: Quarto grupo de regiões

Como podemos ver, neste quarto grupo, quarenta regiões tem contribuições que se anulam (ver Fig. C.10), e do total inicial de 120, sobram apenas 80 para continuar analisando. O passo seguinte será escolher o caminho que torna facil a integração. Então começamos a integração em k_2^- , de acordo com a Figuras C.7, C.8 e C.9.

- I) Para o primeiro grupo de regiões, o pólo escolhido é o pólo 2 (ver Fig. C.7). usando a fórmula integral de Cauchy a equação (4.19) fica:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & \frac{i(ig)^4}{2^9(2\pi)^2} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_4^- dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]}. \tag{C.18}
\end{aligned}$$

- II) Para o segundo grupo de regiões o pólo escolhido é pólo 1 (ver Fig. C.8). Assim, a integral (4.19) torna-se

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & \frac{i (ig)^4}{2^9 (2\pi)^2} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_4^- dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_2) - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]}. \tag{C.19}
\end{aligned}$$

- III) Para o terceiro grupo de regiões o pólo escolhido é o pólo 3 (ver Fig. C.9). Assim, o uso da fórmula integral de Cauchy, na equação (4.19), nos fornece

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & -\frac{i (ig)^4}{2^9 (2\pi)^2} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_4^- dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_2) - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]}. \tag{C.20}
\end{aligned}$$

Integração em k_4^-

Do mesmo modo como no caso acima, agora vamos integrar em k_4^- . Aqui também é bastante trabalhosa, em alguns caso, devido ao grande número de pólos. A seguir vamos localizar os pólos e ilustramos suas configurações.

- I) Da expressão (C.18), localizamos os pólos, para o primeiro grupo de regiões:

$$\begin{aligned}
 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \\
 2 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
 3 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
 4 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}
 \end{aligned}$$

Observe, que estamos novamente etiquetando com I), para indicar que estamos trabalhando com primeiro grupo, para o segundo será II) e para o terceiro grupo será III).

De modo semelhante como acima, cada um dos pólos pode estar localizado na metade inferior ou superior do plano complexo em k^- , dependendo dos valores de k_2^+ , k_4^+ , k_6^+ , k_i^+ . Veremos que os grupos serão novamente divididos em novos grupos de regiões. No caso do primeiro grupo de regiões, eles vão ser divididos em quatro grupos. A localização destes pólos está ilustradas nas figuras C.11, C.12, C.13 e C.14. A seguir mostramos as configurações desses novos grupos de regiões.

- I.1) Regiões: 1, 7, 25, 31, 33, 34, 49, 55, 57, 58.

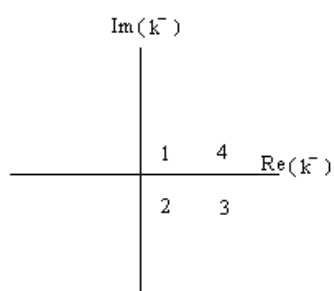


Figura C.11: Configuração de pólos das regiões 1, 7, 25, 31, 33, 34, 49, 55, 57, 58

- I.2) Regiões 3, 4, 27, 28, 37, 38, 39, 40, 41.

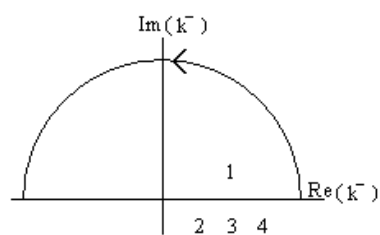


Figura C.12: Configuração de pólos das regiões 3, 4, 27, 28, 37, 38, 39, 40, 41

- I.3) Regiões: 9, 51, 61, 63, 64.

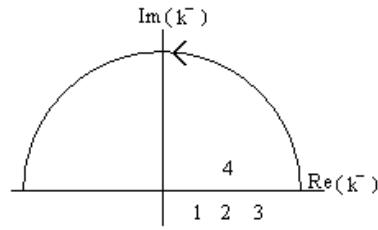


Figura C.13: Configuração de pólos das regiões 9, 51, 61, 63, 64

- I.4) Regiões: 13, 14, 15, 73, 74, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88.

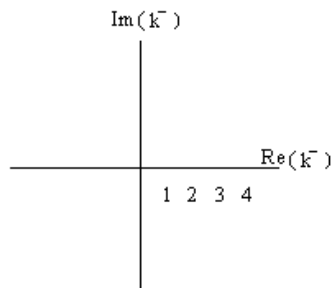


Figura C.14: Configuração de pólos das regiões 13, 14, 15, 73, 74, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88

Como podemos ver, neste grupo, catorze regiões são canceladas (ver Fig. C.14), ficando só 66 regiões.

- II) Do mesmo modo como acima, da expressão (C.19) localizamos os pólos para o segundo grupo de regiões.

$$\begin{aligned}
 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \\
 2 & : k_4^- = k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
 3 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_2) + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
 4 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}
 \end{aligned}$$

De forma semelhante ao primeiro grupo, neste grupo também vão ser divididos em outros três grupos. Para este segundo grupo de regiões, a localização destes pólos está ilustradas nas figuras C.15, C.16 e C.17. Abaixo mostramos as configurações desses novos grupos de regiões.

- II.1) Regiões: 2, 5, 8, 26, 29, 32, 35, 36, 43, 45, 46, 50, 56, 59, 60.

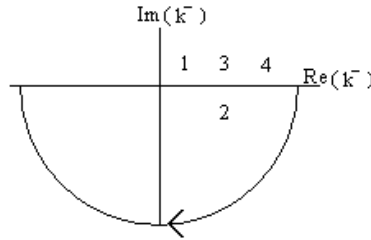


Figura C.15: Configuração de pólos das regiões 2, 5, 8, 26, 29, 32, 35, 36, 43, 45, 46, 50, 56, 59, 60

- II.2) Regiões: 6, 30, 44, 47, 48.

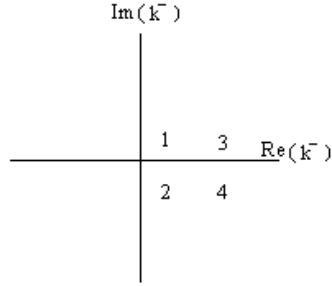


Figura C.16: Configuração de pólos das regiões 6, 30, 44, 47, 48

- II.3) Região: 75

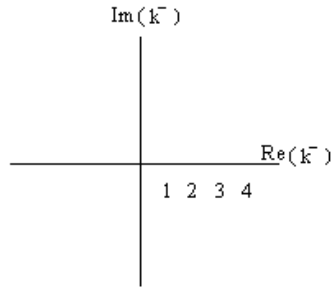


Figura C.17: Configuração de pólo da região 75

Vemos aqui, mais uma região se anulam (ver Fig. C.17) ficando só 65 regiões.

- III) Agora, da expressão (C.20), localizamos os pólos para o terceiro grupos de regiões:

$$\begin{aligned}
 1 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_2) + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)} \\
 2 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \\
4 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
5 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}
\end{aligned}$$

De maneira semelhante, também aqui, cada um dos pólos pode estar localizado na metade inferior ou superior do plano complexo em k^- , que dependerá dos valores, k_2^+ , k_4^+ , k_6^+ e k_i^+ . Veremos que os grupos, também aqui, serão divididos em dois outros grupos. A localização destes pólos estão ilustradas nas figuras C.18 e C.19. Abaixo mostramos as configurações desses novos grupos de regiões.

- III.1) Regiões: 10, 52, 62, 65, 66.

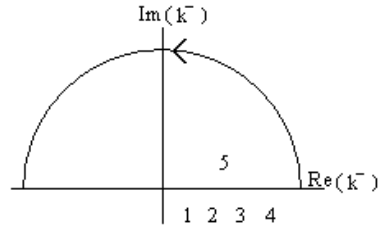


Figura C.18: Configuração de pólos das regiões 10, 52, 62, 65, 66

- III.2) Regiões: 16, 17, 18, 76, 77, 78, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96.

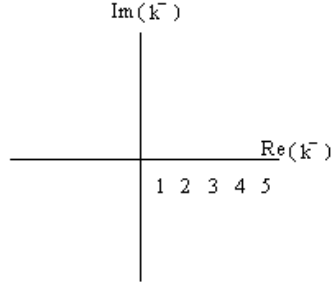


Figura C.19: Configuração de pólos das regiões 16, 17, 18, 76, 77, 78, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96

Como se pode ver, mais quinze regiões resultam em contribuições que se anulam (ver Fig. C.19), ou seja temos 50 regiões que ainda sobrevivem.

O passo seguinte será escolher o caminho de integração de acordo com as configurações dada pelas figuras C.11, C.12, C.13, C.14, C.15, C.16, C.17, C.18 e C.19. A seguir vamos dar os resultados das integrações em k_4^- .

Para o grupo de regiões composto por I

- Para o conjunto de regiões composto por (I.1), vemos, que nesta região não podemos escolher diretamente um caminho de integração, devido à presença de dois pólos em cada hemisfério (ver Fig. C.11). Assim, para poder resolver este problema vamos a desmembrar a integral (C.18) com ajuda da técnica das frações parciais (C.13),

$$\frac{1}{(x-A)(x-B)(x-C)(x-D)} = \frac{1}{(A-B)(x-C)(x-D)} \times \left[\frac{1}{(x-A)} - \frac{1}{(x-B)} \right],$$

Para esta finalidade, escolhemos A , como o pólo 1 e B como o pólo 2 (ver Fig. C.11), ou seja

$$\begin{aligned} A &= k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} \\ B &= k_{4\text{on}}. \end{aligned}$$

Assim, usando frações parciais, a integral (C.18) é expressa de outra forma equivalente:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) = & \frac{i(ig)^4}{2^9(2\pi)^2} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_4^- dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k_4^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}]} \\
& \times \frac{1}{[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}]} \frac{1}{[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}]} \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}]} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)}]} - \frac{1}{[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}]} \right\}, \tag{C.21}
\end{aligned}$$

e desta nova expressão (C.21), localizamos os seguintes pólos da primeira fração parcial

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
3 & : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)}
\end{aligned}$$

e da segunda fração parcial de (C.21) obtemos

$$\begin{aligned}
1 & : k_4^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
3 & : k_4^- = k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+},
\end{aligned}$$

onde, como antes, cada um dos pólos pode estar localizado na metade inferior ou superior do plano complexo em k^- , que dependendo dos valores de k_2^+ , k_4^+ , k_6^+ e k_i^+ . Esses pólos estão ilustrados na Fig. C.20

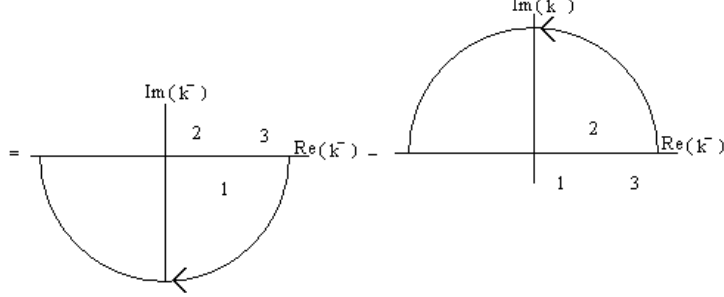


Figura C.20: Desmembrando as regiões 1, 7, 25, 31, 33, 34, 49, 55, 57, e 58

Vemos da Fig. C.20 que agora fica facil escolher o caminho de integração. Escolhendo o pólo 1 que está na metade inferior do plano inferior (figura esquerda) e o pólo 2 que está na metade superior do plano (figura direita) a equação (C.21) fica

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-), \quad (\text{C.22})$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) = & \frac{(ig)^4}{2^9 (2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\ & \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k_6^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}]} \\ & \times \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \times \\ & \times \frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}]} \frac{1}{[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}]} \\ & \times \frac{1}{[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}]}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\tilde{S}_2(k_f^-) = \frac{(ig)^4}{2^9 (2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+)(k_6^+ - k_4^+)[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k_6^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}]} \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}]} \frac{1}{[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}]} \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}]}. \tag{C.24}
\end{aligned}$$

- Para o conjunto de regiões composto por (I.2), escolhemos o pólo 1 (ver Fig. C.12). Aplicando a fórmula de integral de Cauchy, na Eq. (C.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= \frac{(ig)^4}{2^9(2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+)(k_6^+ - k_4^+)[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}]} \frac{1}{[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}]} \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}]}. \tag{C.25}
\end{aligned}$$

- Para o conjunto de regiões composto por (I.3), o pólo escolhido é o pólo 4 (ver Fig. C.13), então (C.18) fica

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= -\frac{(ig)^4}{2^9(2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+)(k_6^+ - k_4^+)[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]}. \tag{C.26}
\end{aligned}$$

- Para o conjunto de regiões composto por (I.4), vemos que não há contribuição para a integral em k_4^- (ver Fig. C.14), sendo nulo.

Para o grupo de regiões composto por II

- Para o conjunto de regiões composto por (II.1), o pólo escolhido é o pólo 2, ou seja, o caminho do circuito passa por baixo no hemisfério inferior da configuração mostrada na Fig. C.15. Assim logo pelo teorema de residuo a expressão (C.19) fica:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= -\frac{(ig)^4}{2^9 (2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]}. \tag{C.27}
\end{aligned}$$

- Para o conjunto de regiões composto por (II.2), vemos novamente, não podemos escolher diretamente um caminho de integração, uma vez que temos dois pólos em cada hemisfério do plano complexo (ver Fig. C.16). Assim, novamente usaremos a técnica das frações parciais (C.13). Desta maneira, da Fig. C.14, escolhemos A , como o pólo 1 e B como o pólo 2, ou seja

$$\begin{aligned} A &= k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} \\ B &= k_{4\text{on}}. \end{aligned}$$

Assim a integral (C.19) é expressa de outra forma equivalente:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k_f^-) &= \frac{i (ig)^4}{2^9 (2\pi)^2} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_4^- dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\ &\times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\ &\times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \\ &\times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \\ &\times \frac{1}{\left[k_4^- - k_6^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]} \times \\ &\times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]} - \frac{1}{\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Da expressão (C.28), localizamos os seguintes pólos para a parte da primeira fração parcial

$$\begin{aligned} 1 &: k_4^- = k_i^- - (k_i - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\ 2 &: k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \end{aligned}$$

$$3 : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)}$$

e da segunda parte da fração parcial

$$1 : k_4^- = k_i^- - (k_i - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}$$

$$2 : k_4^- = k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}$$

$$3 : k_4^- = k_{4\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}$$

onde, cada um dos pólos pode estar localizado na metade inferior ou superior do plano complexo em k^- , dependendo dos valores de k_2^+ , k_4^+ , k_6^+ e k_i^+ . Em seguida, os pólos estão localizados conforme ilustrado na Fig. C.21

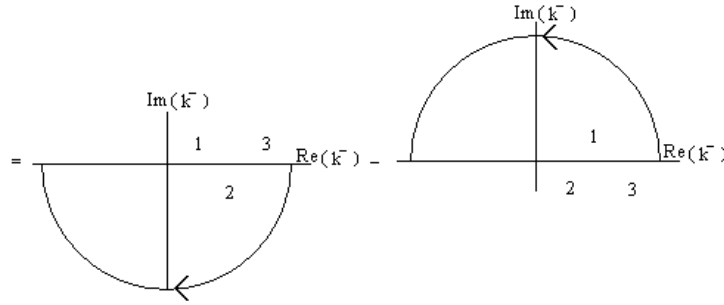


Figura C.21: Desmembrando as regiões 6, 30, 44, 47 e 48

Vemos da Fig. C.21 que agora podemos escolher o caminho de integração de uma maneira mais simples. Escolhendo o pólo 2 que esta na metade do plano complexo (figura esquerda) e o pólo 1 que esta na metade do plano complexo (figura direita) a equação (C.28) fica:

$$\tilde{S}(k_f^-) = \tilde{S}_1(k_f^-) + \tilde{S}_2(k_f^-), \quad (\text{C.29})$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) &= \frac{(ig)^4}{2^9 (2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\ &\times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} - k_{4\text{on}} \right]} \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]}, \tag{C.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_2(k_f^-) &= -\frac{(ig)^4}{2^9(2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- \left[k_i^- + k_f^- - 2k_6^- \right]}{\left(k_i^+ - k_2^+ \right) k_2^+ \left(k_i^+ - k_4^+ \right) k_4^+ \left(k_i^+ - k_6^+ \right) k_6^+ \left(k_f^+ - k_6^+ \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left(k_4^+ - k_2^+ \right) \left(k_6^+ - k_4^+ \right)} \frac{1}{\left[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} - k_{4\text{on}} \right]} \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k_i - k_2)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - (k_i - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - k_{4\text{on}} \right]}. \tag{C.31}
\end{aligned}$$

- Para a região de (II.3), isto é região 75, Fig. C.17, não há contribuição. Sendo nula.

Para o grupo de regiões composto por III

- Para o conjunto de regiões composto por (III.1), o pólo escolhido é o pólo 5. Isto é, o caminho que fecha o contorno por cima da configuração mostrada na Fig. C.18. Assim, ao aplicar a fórmula integral de Cauchy, a expressão (C.20) fica:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(k_f^-) &= \frac{(ig)^4}{2^9(2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\
&\times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_i - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k_i - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_6^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \right]} \frac{1}{\left[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \right]} \times \\
&\times \frac{1}{\left[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \right]}. \tag{C.32}
\end{aligned}$$

- Para as regiões de (III.2) vemos, novamente, que não há contribuição (ver Fig. C.19), o que implica que é nula

Integração em k_6^-

Para o grupo de regiões composto por I

Agora, como último passo, vamos integrar em k_6^- . Aqui também é trabalhoso, devido ao grande número de pólos. A seguir vamos localizar os pólos e ilustramos suas configurações.

- I.1) Da integral (C.22), que é a soma de (C.23) e (C.24), localizamos os seguintes pólos da primeira fração parcial

$$\begin{aligned}
1 &: k_6^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
2 &: k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
4 & : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}
\end{aligned} \tag{C.33}$$

e da segunda fração parcial

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_6^- = k_{4\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
3 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \\
4 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
5 & : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Note-se, que (C.33) e (C.34), foram obtida de (C.23) e (C.24), respectivamente. Agora, dependendo dos valores de k_2^+ , k_4^+ , k_6^+ , k_i^+ e k_f^+ , esses pólos ficarão na metade inferior ou superior do plano complexo em k^- . Veremos, aqui também, que os grupos serão novamente divididos em novos grupos de regiões. No caso das regiões composta por (I.1), eles vão ser divididos em mais quatro grupos. A seguir mostramos as configurações conforme mostradas nas figura C.22, C.23, C.24 e C.25.

- I.1.1) Regiões: 1, 25.

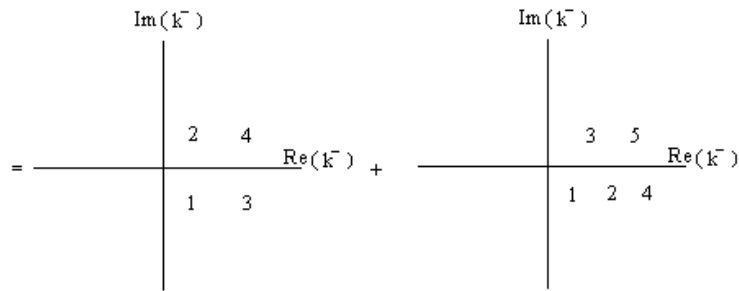


Figura C.22: Configuração de pólos das regiões 1 e 25

- I.1.2) Região: 7.

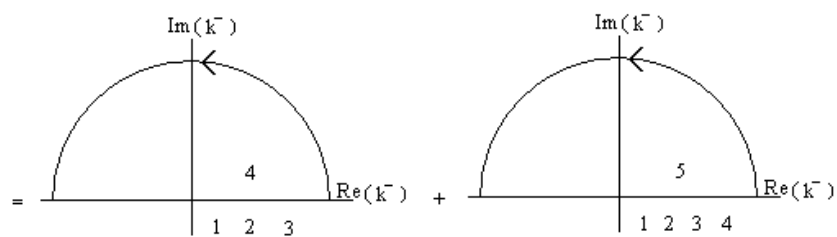


Figura C.23: Configuração de pólo da região 7

- I.1.3) Regiões 31, 33, 34.

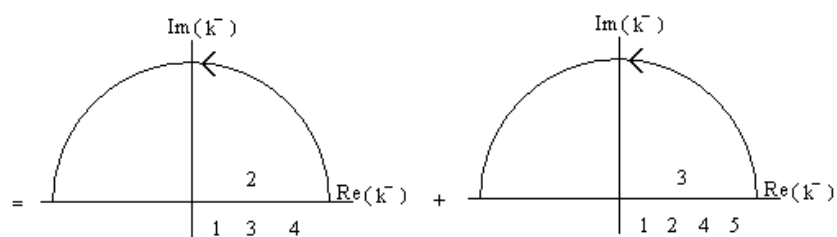


Figura C.24: Configuração de pólos das regiões 31, 33 e 34

- I.1.4) Regiões 49, 55, 57, 58.

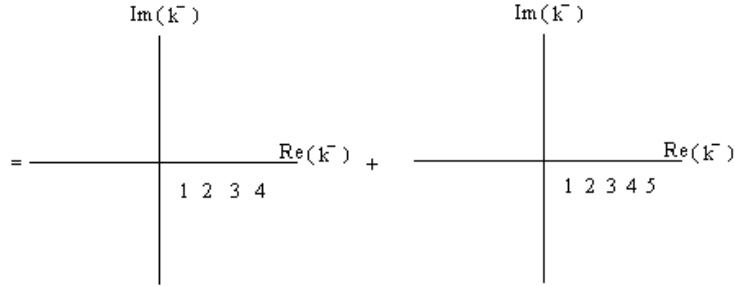


Figura C.25: Configuração de pólos das regiões 49, 55, 57 e 58

Como podemos ver a partir da Fig. C.25, mais quatro regiões apresentam contribuições nulas, ou seja, ainda sobram 46 regiões.

- I.2) Por outro lado, de (C.25) localizamos os seguintes pólos

$$\begin{aligned}
 1 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \\
 2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
 3 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
 4 & : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}
 \end{aligned}$$

Neste grupo regiões serão divididos em mais dois grupos. Abaixo mostramos as configurações conforme mostradas nas figuras C.26 e C.27.

- I.2.1) Regiões 3, 4, 27, 28, 37, 38, 41.

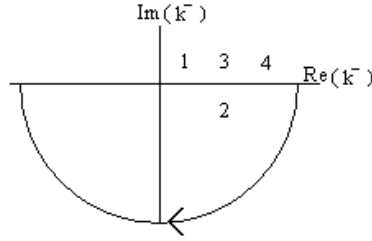


Figura C.26: Configuração de pólos das regiões 3, 4, 27, 28, 37, 38 e 41

- I.2.2) Regiões 39, 40, 42.

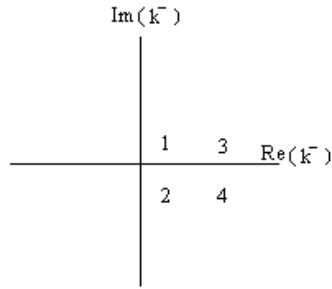


Figura C.27: Configuração de pólos das regiões 39, 40 e 42

- I.3) Da mesma maneira, de (C.26), localizamos os seguintes pólos

$$\begin{aligned}
 1 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_4)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \\
 2 & : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
 3 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}
 \end{aligned}$$

$$4 : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}$$

$$5 : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}$$

$$6 : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}$$

Neste grupo regiões serão divididos em mais dois grupos. Abaixo mostramos as configurações conforme mostradas nas figuras C.28 e C.29.

- I.3.1) Região 9.

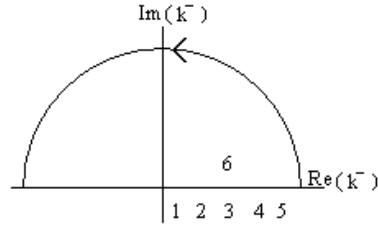


Figura C.28: Configuração de pólo da região 9

- I.3.2) Regiões 51, 61, 63, 64.

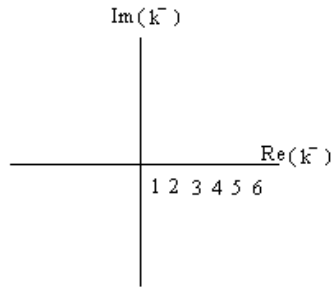


Figura C.29: Configuração de pólos das regiões 51, 61, 63 e 64

Note-se que no grupo composto por I.3.2, mais quatro regiões apresentam contribuições nulas (ver Fig. C.28). Ficamos agora com 42 regiões restantes.

Para o grupo de regiões composto por II

- II.1) Da integral (C.27), localizamos os seguintes pólos

$$\begin{aligned}
 1 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \\
 2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
 3 & : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
 4 & : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}
 \end{aligned}$$

Neste grupo, novamente serão divididos em mais quatro grupos. Em seguida mostramos as configurações conforme mostradas nas figuras C.30, C.31, C.32 e C.33

- II.1.1) Regiões: 2, 5, 26, 29, 43.

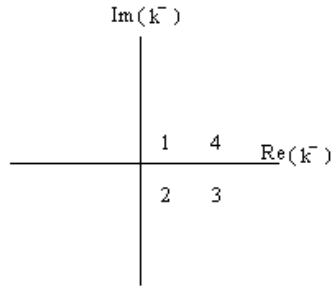


Figura C.30: Configuração de pólos das regiões 2, 5, 26, 29 e 43

- II.1.2) Região: 8.

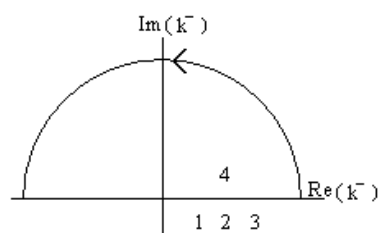


Figura C.31: Configuração de pólo da região 8

- II.1.3) Regiões: 32, 35, 36, 45, 46.

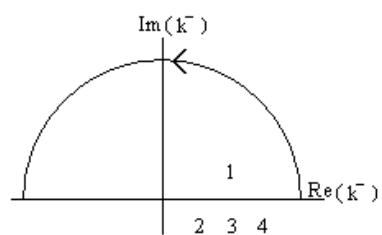


Figura C.32: Configuração de pólos das regiões 32, 35, 36, 45 e 46

- II.1.4) Regiões: 50, 56, 59, 60.

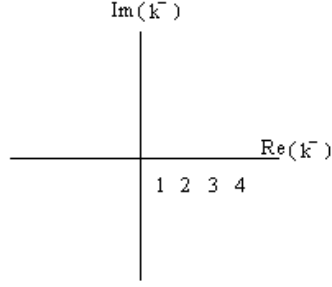


Figura C.33: Configuração de pólos das regiões 50, 56, 59 e 60

No grupo composto por II.1.4, mais quatro regiões apresentam contribuições nulas. Ficamos agora com 38 regiões remanescentes.

- II.2) Agora de (C.29) que é a soma de (C.30) e (C.31), localizamos os seguintes pólos da primeira fração parcial

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \\
2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
3 & : k_6^- = k_i^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)} \\
4 & : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \\
5 & : k_6^- = k_i^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \tag{C.35}
\end{aligned}$$

e da segunda fração parcial

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \\
2 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
3 & : k_6^- = k_i^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)} \\
4 & : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)} \tag{C.36}
\end{aligned}$$

onde (C.35) e (C.36) foram obtidas de (C.30) e (C.31), respectivamente. Neste grupo os pólos são também divididos em mais dois grupos. A seguir ilustramos as configurações nas figuras C.34 e C.35

- II.2.1) Regiões: 6, 30, 44, 47.

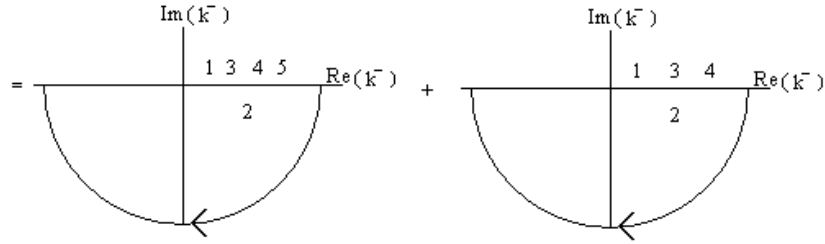


Figura C.34: Configuração de pólos das regiões 6, 30, 44 e 47

- II.2.2) Região: 48.

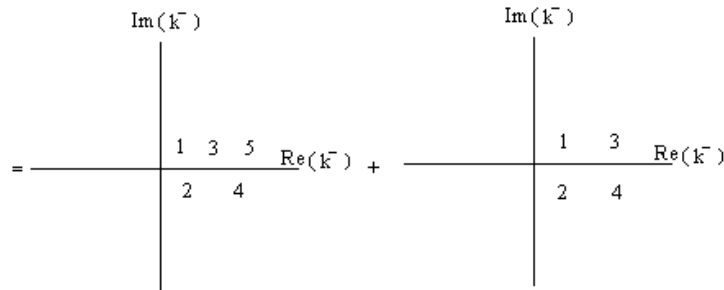


Figura C.35: Configuração de pólo da região 48

Para o grupo de regiões composto por III

- III.1) Da integral (C.32), localizamos os seguintes pólos

$$\begin{aligned}
1 & : k_6^- = k_i^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_2^+)} \\
2 & : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + k_{2\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_2^+} \\
3 & : k_6^- = k_i^- + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_4^+)} \\
4 & : k_6^- = k_{4\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
5 & : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)} \\
6 & : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+} \\
7 & : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}
\end{aligned}$$

A seguir mostramos as configurações conforme mostradas nas figuras abaixo

- III.1.1) Região: 10

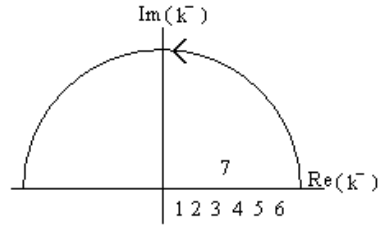


Figura C.36: Configuração de pólo da região 10

- III.1.2) Regiões: 52, 62, 65, 66.

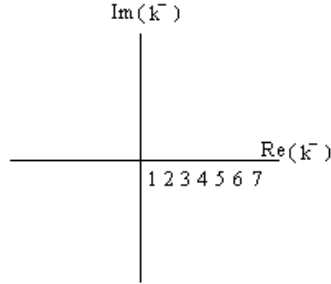


Figura C.37: Configuração de pólos das regiões 52, 62, 65 e 66

Note-se que nesta região os pólos também foram dividida em mais dois grupos. Além disso, no grupo composto por III.1.2, mais quatro regiões apresentam contribuições nulas (ver Fig. C.37). Desta forma, finalmente sobram 34 regiões. O passo final será escolher o caminho de integração de acordo com as configurações mostrada acima. Finalmente damos os resultados das integrações em k_6^-

Para o grupo de regiões composto por I

- **Regiões 1, 25** : Para o conjunto de regiões composto por (I.1.1), vemos, que nesta região não podemos escolher diretamente um caminho de integração mais fácil, uma vez que apresenta dois pólos em cada hemisfério (ver Fig. C.22). Como antes, para poder resolver este dilema vamos a desmembrar a integral (C.22), que é a soma de (C.23) e (C.24), com ajuda da tecnica das frações parciais. Vemos que a Fig. C.22, tem soma de dois configurações, uma de 4 pólos e outra de 5 pólos, respectivamente. Para a configurações de 4 pólos usaremos (C.13),

$$\frac{1}{(x-A)(x-B)(x-C)(x-D)} = \frac{1}{(A-B)(x-C)(x-D)} \times \left\{ \frac{1}{(x-A)} - \frac{1}{(x-B)} \right\},$$

e para o caso de 5 pólos usamos a expressão abaixo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-A)(x-B)(x-C)(x-D)(x-E)} &= \frac{1}{(A-B)(C-D)(x-E)} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{(x-A)(x-C)} - \frac{1}{(x-A)(x-D)} + \right. \\ &\left. - \frac{1}{(x-B)(x-C)} + \frac{1}{(x-B)(x-D)} \right\} \quad (C.37) \end{aligned}$$

Agora, do lado esquerdo da Fig. C.22, escolhemos A como o pólo 2 e B como o pólo 1, para a figura da esquerda, isto é:

$$\begin{aligned} A &= k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} \\ B &= k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} \end{aligned}$$

Então a integral (C.22) é expressa de outra forma equivalente

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(k_f^-) &= \frac{(ig)^4}{2^9 (2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times \\ &\times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+) (k_6^+ - k_4^+)} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\ &\times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \frac{1}{[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \times \\ &\times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}}]} \times \\ &\times \frac{1}{[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}]} \frac{1}{[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}]} \times \\ &\times [F_1 + F_2], \quad (C.38) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}]} \\ F_2 &= - \frac{1}{[k_6^- - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}]} \end{aligned}$$

Agora de Eq. (C.38), localizamos os seguintes pólos da primeira fração parcial

$$1 : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}$$

$$2 : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}$$

$$3 : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}$$

e da segunda fração parcial

$$1 : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}$$

$$2 : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}$$

$$3 : k_6^- = k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_6^+ - k_4^+)}$$

Em seguida ilustramos esses pólos na Fig. C.38

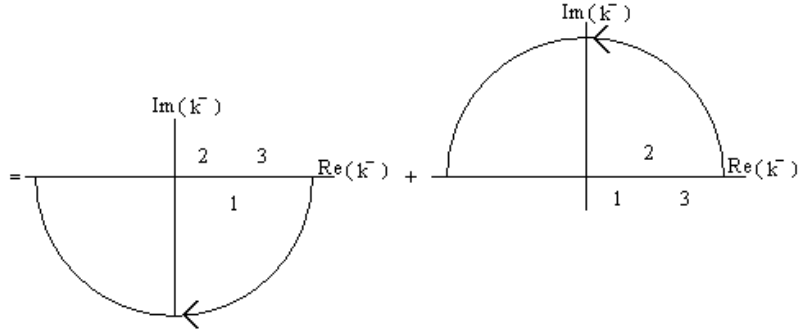


Figura C.38: Desmembrando a primeira configuração das regiões 1 e 25

Agora, do lado direito da Fig. C.22 escolhemos A como o pólo 3, B como o pólo 1, C como o pólo 5 e D como o pólo 4, isto é:

$$\begin{aligned} A &= k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} \\ B &= k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} + (k_6 - k_4)_{\text{on}} \\ C &= k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} \\ D &= k_{6\text{on}} \end{aligned}$$

Então a integral (C.22) é expressa como segue

$$\tilde{S}_2(k_f^-) = \frac{(ig)^4}{2^9 (2\pi)} \int dq^- F(q^-) \int \frac{dk_6^- [k_i^- + k_f^- - 2k_6^-]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_i^+ - k_6^+) k_6^+ (k_f^+ - k_6^+)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{(k_4^+ - k_2^+)(k_6^+ - k_4^+)[k_i^- - k_{2\text{on}} - (k_i - k_2)_{\text{on}}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - k_{4\text{on}} - (k_i - k_4)_{\text{on}}]} \\
& \times \frac{1}{[k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}}]} \\
& \times \frac{1}{[k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} - k_{6\text{on}}]} \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_{4\text{on}} - (k_6 - k_4)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}]} \times \\
& \times [F_1 + F_2 + F_3 + F_4], \tag{C.39}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}]}, \\
F_2 &= -\frac{1}{[k_6^- - k_i^- + (k_i - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}]}, \\
F_3 &= -\frac{1}{[k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_f^- + (k_f - k_6)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}]}, \\
F_4 &= \frac{1}{[k_6^- - (k_6 - k_4)_{\text{on}} - k_{2\text{on}} - (k_4 - k_2)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}]} \times \\
& \times \frac{1}{[k_6^- - k_{6\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}]}. \tag{C.40}
\end{aligned}$$

A seguir localizamos os pólos, para cada parte do integrando de C.39

$$\begin{aligned}
1 &: k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+} \\
2 &: k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}
\end{aligned}$$

$$3 : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}$$

$$1 : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}$$

$$2 : k_6^- = k_i^- - (k_i - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_i^+ - k_6^+)}$$

$$3 : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}$$

$$1 : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}$$

$$2 : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}$$

$$3 : k_6^- = k_f^- - (k_f - k_6)_{\text{on}} + \frac{i\varepsilon}{2(k_f^+ - k_6^+)}$$

$$1 : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{4\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_4^+}$$

$$2 : k_6^- = (k_6 - k_4)_{\text{on}} + k_{2\text{on}} + (k_4 - k_2)_{\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2(k_4^+ - k_2^+)}$$

$$3 : k_6^- = k_{6\text{on}} - \frac{i\varepsilon}{2k_6^+}$$

e ilustramos suas configurações na Fig. C.39

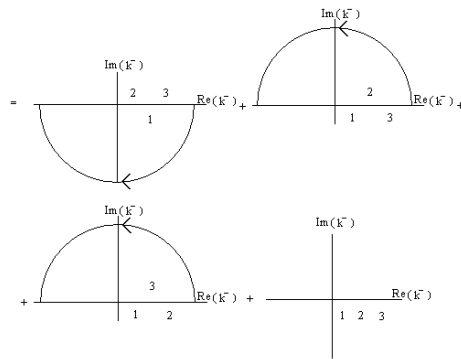


Figura C.39: Desmembrando a segunda configuração das regiões 1 e 25

Como passo final, temos que escolher o caminho que torna fácil a integração. Vemos da Fig. C.38 que o pólo escolhido é o pólo 1 para o contorno no hemisfério

inferior e o pólo 2 para o contorno no hemisfério superior. Da Fig. C.39 temos: o pólo 1 para o caminho que contorna por baixo, 2, para o caminho que contorna por cima e o pólo 3, para o caminho que contorna por cima. Substituindo, esses pólos, em (C.38) e em (C.39) implicará o resultado (4.21)

- **Região 7** : Nesta região composto por (I.1.2), é direto; o pólo escolhido é o pólo 4 e o pólo 5 (Ver Fig. C.23). Substituindo em (C.22) nos dará (4.27)
- **Regiões 31,33, 34** : Para o conjunto de regiões composto por (I.1.3), também é direto, o pólo escolhido é o pólo 2 e o pólo 3 (Ver Fig. C.24). Substituindo em (C.22) nos dará (4.30)
- **Regiões 49, 55, 57, 58** : Para o conjunto de regiões composto por (I.1.4), não temos contribuição (Ver fig. C.25), ou seja é nula.
- **Regiões 3, 4, 27, 28, 37, 38, 41**: Para o conjunto de regiões composto por (I.2.1), vemos, que podemos escolher diretamente um caminho de integração. O pólo escolhido é o pólos 2 (ver Fig. C.26). Usando a fórmula de integral de Cauchy na integral (C.25) obtemos o resultado (4.33)
- **Regiões 39, 40, 42** : Para o conjunto de regiões composto por (I.2.2), vemos, que não podemos escolher diretamente um caminho de integração, devido ao fato de que nesta região temos dois pólos em cada hemisfério (ver Fig. C.27). Como antes, para poder resolver temos que desmembrar a integral (C.25) com ajuda da técnica das frações parciais. O procedimento é semelhante ao caso das regiões 1, 25, portanto achamos que já não é necessario mostrar em detalhes. Assim que após um pouco de álgebra, obtemos o resultado (4.34)
- **Região 9** : Para o caso da região composto por (I.3.1), vemos, que podemos escolher diretamente um caminho de integração. O pólo escolhido é o pólos 6 (ver Fig. C.28). Usando a fórmula de integral de Cauchy na integral (C.26) obtemos o resultado (4.37)
- **Regiões 51, 61, 63, 64** : Para o conjunto de regiões composto por (I.3.2), não tem contribuição (Ver Fig. C.29), ou seja a contribuição é nula.

Para o grupo de regiões composto por II

- **Regiões 2, 5, 26, 29, 43** : Para o conjunto de regiões composto por (II.1.1), vemos, também que não podemos escolher diretamente um caminho de integração, devido ao fato de termos dois pólos em cada hemisfério (ver Fig. C.30). Como antes, vamos a desmembrar a integral (C.27) com ajuda da tecnica das

frações parciais. A técnica foi mostrada acima, para o caso das regiões 1, 25. Assim, com esse procedimento chegamos ao resultado (4.38)

- **Região 8** : Esta região que forma parte de (II.1.2), também podemos escolher diretamente um caminho de integração. O pólo escolhido é o pólos 4 (ver Fig. C.31). Usando a fórmula de integral de Cauchy na integral (C.27) obtemos o resultado (4.41)
- **Regiões 32, 35, 36, 45, 46** : Para o conjunto de regiões composto por (II.1.3), também podemos escolher diretamente um caminho de integração. O pólo escolhido é o pólos 1 (ver Fig. C.32). Usando a fórmula de integral de Cauchy na integral (C.27) obtemos o resultado (4.42)
- **Regiões 50, 56, 59, 66** : Para o conjunto de regiões composta por (II.1.4), não temos contribuição (Ver fig. C.33), ou seja é nula
- **Regiões 6, 30, 44, 47** : Para o conjunto de regiões composto por (II.2.1), vemos também a escolha é simples, ja que podemos escolher diretamente um caminho de integração. Os pólos escolhidos são os pólos 2, o caminho que passa por baixo no plano complexo, e o outro pólo 2, que é o outro pólo que está na metade inferior do plano complexo (ver Fig. C.31). Usando a fórmula de integral de Cauchy na integral (C.29) obtemos o resultado (4.43)
- **Região 48** : Para esta região que é dada por (II.2.2), vemos também que não podemos escolher diretamente um caminho de integração, devido ao fato de que nesta região também temos dois (ou três) pólos em cada hemisfério (ver Fig. C.35). Desmembramos a integral (C.29) com ajuda da técnica das frações parciais. Isso nos levará ao resultado (4.46)

Para o grupo de regiões composto por III

- **Região 10** : Nesta última região dada por (III.1.1), vemos, que a escolha do caminho de integração é direta. Assim o pólo escolhido é o pólo 7 (ver Fig. C.36). Usando a fórmula de integral de Cauchy na integral (C.29) obtemos o resultado (4.52)
- **Regiões 52, 62, 65, 66** : Para o conjunto de regiões composto por (III.1.2), não temos contribuição (Ver Fig. C.37), ou seja é nula

Apêndice D

Apêndice do Capítulo 5

D.1 Componentes do Operador Corrente

Neste Apêndice vamos dar os resultados restantes sobre o cálculo de correntes. A expressão geral em termos de componentes é dada por

$$\begin{aligned} J^- &= \langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} | \Gamma \rangle = \Gamma^2 \int dk_2^+ d^2 k_{2\perp} dk_4^+ d^2 k_{4\perp} \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} \\ &= \Gamma^2 \int d^2 k_{2\perp} d^2 k_{4\perp} \left\{ (q^+)^2 \int dx dy \hat{\mathcal{O}}^{-,+, \perp} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Regiões 2, 8 e 11

- Corrente J^-

Para estas regiões, o resultado final para a componente $\hat{\mathcal{O}}^-$ é

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}^- &= -\frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_2^+ - k_4^+)}{2^6 (k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\ &\quad \left\{ k_f^- + k_i^- - 2 \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Vemos que em (D.2) há propagação global de dois e três corpos avançando para a frente no tempo, antes e depois da interação com o campo externo, onde k_i^- é a energia total do estado inicial, antes da absorção, e $k_f^- = k_i^- + q^-$ é energia total final, após da absorção, na frente de luz.

- Corrente J^+ e $J^\perp$ é dada por

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^\beta = & -\frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_2^+ - k_4^+)}{2^6 (k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{\{k_f^\beta + k_i^\beta - 2k_4^\beta\}}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

De forma semelhante, vemos que em (D.3) há propagação global de dois e três corpos avançando para a frente no tempo. A única diferença entre o operadores $\hat{\mathcal{O}}^-$ e $\hat{\mathcal{O}}^\beta$ está no numerador de (D.2) e (D.3), que têm componentes $+$ e $\perp$ no lugar da componente $-$.

Região 4

- Corrente J^-

Para este caso, o resultado final de $\hat{\mathcal{O}}^-$ é

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^- = & -\frac{i (ig)^2 \theta(k_2^+ - k_i^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 (k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{\{k_f^- - k_i^- - 2\frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)}\}}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

O processo físico representado pela equação (D.4) é a criação de pares devido ao fóton. Esta é dada pelo primeiro e quarto denominador de (D.4) que corresponde à propagação no estado intermediário de partícula e antipartícula, compostos pelo estado ligado inicial, a antipartícula, e a partícula produzidas pelo fóton.

Em seguida, usando as mudança de variável dada por (5.17) e (5.18) obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^- &= -\frac{i(ig)^2}{2^6} \frac{1}{q^+} \frac{\theta(k_2^+ - k_i^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{x(k_i^+ - xq^+) (y-1) (k_f^+ - yq^+) y(x-y+1)} \times \\
& \quad \left\{ (k_f^- - k_i^-) q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{y} \right\} \\
& \times \frac{1}{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ + \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]}. \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Substituindo (D.5) em (D.1), vemos que é proporcional a q^+ ; então não contribui no limite, $q^+ \rightarrow 0$.

- Corrente J^+ e $J^\perp$

Do mesmo modo, o resultado final para estas regiões, as componentes $\hat{\mathcal{O}}^\beta$ são

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^\beta &= \frac{i(ig)^2}{2^6} \frac{\theta(k_2^+ - k_i^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \quad \left\{ k_f^\beta + k_i^\beta - 2k_4^\beta \right\} \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}. \end{aligned}$$

para $\beta = +$, temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}^+ &= -\frac{i (ig)^2 \theta(k_2^+ - k_i^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 x (k_i^+ - xq^+) (y-1) (k_f^+ - yq^+) y (x-y+1)} \times \\ & \times \frac{q^+ \{2y-1\}}{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ + \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[(k_f^- - k_i^-) q^+ + \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Substituindo (D.6) em (D.1), vemos que J^+ é proporcional a $(q^+)^3$, então não contribui no limite, $q^+ \rightarrow 0$. De forma semelhante para a corrente $J^\perp$ se mostra facilmente que é proporcional a $(q^+)^3$; então também não contribui no limite, $q^+ \rightarrow 0$.

Regiões 9 e 10

- Corrente J^-

Para a componente $\hat{\mathcal{O}}^-$ obteve-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}^- &= \frac{i (ig)^2 \theta(k_2^+ - k_i^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 (k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\ & \times \frac{\left\{ k_i^- - k_f^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{(k_i^+ - k_4^+)} \right\}}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_f^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}. \tag{D.7}
\end{aligned}$$

Neste processo físico, representado pela Eq. (D.7), também temos a produção de pares. Podemos observar que (D.7), tem propagação no estado intermédio de partícula e anti-partícula dada pelo denominador $\left[k_i^- - k_f^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]^{-1}$ e este é responsável pela criação de par devido ao fóton.

Em seguida de forma análoga como acima, usamos as mudança de variável dada por (5.17) e (5.18) obtendo

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^- &= \frac{i (ig)^2}{2^6} \frac{1}{q^+} \frac{\theta(k_2^+ - k_i^+) \theta(k_2^+) \theta(k_4^+ - k_i^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{x(k_i^+ - xq^+) (y-1) (k_f^+ - yq^+) y(x-y+1)} \times \\
& \times \frac{\left\{ (k_i^- - k_f^-) q^+ - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{(y-1)} \right\}}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{k_{4\perp}^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ \right]} \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- q^+ - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[(k_i^- - k_f^-) q^+ - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]}. \tag{D.8}
\end{aligned}$$

Substituindo (D.8) em (D.1), vemos que é proporcional a q^+ , portanto não contribui no limite, $q^+ \rightarrow 0$.

- Corrente J^+ e $J^\perp$

Do mesmo modo como acima, as correntes J^+ e $J^\perp$ serão obtidas de

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^\beta &= -\frac{i (ig)^2}{2^6} \frac{[k_f^\beta + k_i^\beta - k_4^\beta]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+} \right]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_f^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]}, \tag{D.9}
\end{aligned}$$

onde $\beta = +, \perp$. Depois de usar as mudança de variáveis dada por (5.17) e (5.18), vemos que J^+ também é proporcional a $(q^+)^3$; então, no limite de interesse, não contribui. De forma semelhante para a corrente $J^\perp$, se mostra de uma forma simples que é proporcional a $(q^+)^2$. Vemos aqui também que a única diferença entre os operadores $\hat{\mathcal{O}}^-$ e $\hat{\mathcal{O}}^\beta$ está no numerador de (D.8) e (D.9).

Regiões 1 e 7

- Corrente J^-

Para a componente $\hat{\mathcal{O}}^-$ temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^- &= \frac{i (ig)^2 \theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_4^+) \theta(k_f^+ - k_4^+) \theta(k_4^+ - k_2^+)}{2^6 (k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \left\{ \frac{\left[k_f^- + k_i^- - 2 \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - 2 \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]}{\left[k_f^- - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} + \right. \\
& \left. + \frac{\left[k_f^- - k_i^- + 2 \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} \right]}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} \right]} \right\}. \tag{D.10}
\end{aligned}$$

Vemos que em (D.10) há propagação global de dois e três corpos avançando para a frente no tempo, ou seja não há produção de pares antes e depois da interação com o campo externo,

- Corrente J^+ e $J^\perp$

Também para J^+ e $J^\perp$ só há propagação global de dois e três corpos como mostrado abaixo

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^\beta = & \frac{i (ig)^2}{2^6} \frac{[k_f^\beta + k_i^\beta - 2k_4^\beta]}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} \times \\
& \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} - \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} - \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} \right]} \right\}. \tag{D.11}
\end{aligned}$$

A única diferença entre o operadores $\hat{\mathcal{O}}^-$ e $\hat{\mathcal{O}}^\beta$ está no numerador de (D.10) e (D.11)

Região 12

- Corrente J^-

Nestas região a componente $\hat{\mathcal{O}}^-$ tem o seguinte resultado final

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}^- = & -\frac{i (ig)^2}{2^6} \frac{\theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_4^+) \theta(k_4^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times \\
& \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_2^2_\perp + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_4^2_\perp + m^2}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \frac{1}{\left[k_i^- - k_f^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{k_i^- - k_f^- - 2 \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)}}{\left[k_i^- - k_f^- - (k_i - k_4)_{on} + (k_f - k_4)_{on} \right]} + \right. \\ \left. - \frac{k_f^- + k_i^- - 2 \frac{k_4^2 + m^2}{2k_4^+}}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_4^2 + m^2}{2k_4^+} + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \right\}, \quad (D.12)$$

e usando as mudanças de variáveis dada por (5.17) e (5.18) obtemos

$$\hat{\mathcal{O}}^- = -\frac{i(ig)^2}{2^6} \frac{\theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_4^+) \theta(k_4^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+)}{x(k_i^+ - xq^+) (y-1) (k_f^+ - yq^+) y(x-y+1)} \times \\ \times \frac{1}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{k_2^2 + m^2}{2(k_i^+ - xq^+)} q^+ \right]} \times \\ \times \frac{1}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{k_4^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ \right]} \times \\ \times \frac{1}{\left[(k_i^- - k_f^-) q^+ - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]} \times \\ \times [f_1 + f_2]. \quad (D.13)$$

onde

$$f_1 = \frac{1}{q^+} \frac{(k_i^- - k_f^-) q^+ - 2 \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)}}{\left[(k_i^- - k_f^-) q^+ - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2y} \right]} \\ f_2 = - \frac{k_f^- + k_i^- - 2 \frac{k_4^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)}}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{k_4^2 + m^2}{2(k_f^+ - yq^+)} q^+ + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)} \right]}.$$

Podemos ver que (D.13) tem dois termo associado a f_1 e f_2 . O primeiro termo associado a f_1 , quando substituído em (D.1) é proporcional a q^+ e o segundo termo associado a f_2 é proporcional a $(q^+)^2$, no limite $q^+ \rightarrow 0$ a componente J^- é nula. Portanto nenhum dos dois termos contribui naquele limite.

- Corrente J^+ e $J^\perp$

$$\hat{\mathcal{O}}^\beta = \frac{i(ig)^2}{2^6} \frac{\theta(k_i^+ - k_2^+) \theta(k_2^+) \theta(k_i^+ - k_4^+) \theta(k_4^+) \theta(k_4^+ - k_f^+) \theta(k_2^+ - k_4^+)}{(k_i^+ - k_2^+) k_2^+ (k_i^+ - k_4^+) k_4^+ (k_f^+ - k_4^+) (k_4^+ - k_2^+)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{[k_f^\beta + k_i^\beta - 2k_4^\beta]}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_2^2{}_\perp + m^2}{2k_2^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} - \frac{k_4^2{}_\perp + m^2}{2k_4^+} \right]} \times \\
& \times \frac{1}{\left[k_i^- - k_f^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\left[k_i^- - k_f^- - \frac{(k_i - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)} + \frac{(k_f - k_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_f^+ - k_4^+)} \right]} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\left[k_i^- - \frac{(k_i - k_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} - \frac{k_4^2{}_\perp + m^2}{2k_4^+} + \frac{(k_4 - k_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)} \right]} \right\}, \tag{D.14}
\end{aligned}$$

onde $\beta = +, \perp$. Finalmente usando as mudanças de variáveis (5.17) e (5.18) em (D.14), vemos que J^+ também é proporcional a $(q^+)^3$; então não contribui no límite $q^+ \rightarrow 0$. De forma semelhante para a corrente $J^\perp$ se mostra facilmente que é proporcional a $(q^+)^2$ e também não contribui no límite $q^+ \rightarrow 0$.

Apêndice E

Apêndice do Capítulo 6

E.1 Propriedades das Matrizes de Dirac γ na Frente de Luz

Listamos a seguir inúmeras propriedades das matrizes de Dirac na frente de luz:

$$\begin{aligned}
 \gamma^+ \gamma^+ &= \gamma^- \gamma^- = 0 & \gamma^1 \gamma^\pm \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^\pm \gamma^1 &= 0 \\
 \gamma^+ \gamma^- \gamma^+ &= 2\gamma^+ & \gamma^\mp \gamma^\pm \gamma^{1,2} + \gamma^{1,2} \gamma^\pm \gamma^\mp &= 2\gamma^{1,2} \\
 \gamma^- \gamma^+ \gamma^- &= 2\gamma^- & \{(\gamma_i p^i), \gamma^\pm\} &= 0 \\
 \gamma^1 \gamma^\pm \gamma^1 &= \gamma^\pm & \{\gamma^+, \gamma^-\} &= 2I \\
 \gamma^2 \gamma^\pm \gamma^2 &= \gamma^\pm & (\gamma_i p^i) \gamma^\pm (\gamma_i p^i) &= -p_i p^i \gamma^\pm \\
 \{\gamma^\pm, \gamma^{1,2}\} &= 0 & \{(\gamma_i p^i), \gamma^{1,2}\} &= -2p_{1,2} \\
 \gamma^\pm \gamma^{1,2} \gamma^\pm &= 0 & \gamma^\pm \gamma^\mp (\gamma_i p^i) + (\gamma_i p^i) \gamma^\mp \gamma^\pm &= 2(\gamma_i p^i) \\
 \gamma^1 \gamma^1 &= \gamma^2 \gamma^2 = -I & \gamma^\pm \gamma^{1,2} (\gamma_i p^i) + (\gamma_i p^i) \gamma^{1,2} \gamma^\pm &= -2\gamma^\pm p_{1,2} \\
 \gamma^\pm \gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1 \gamma^\pm &= 0 & \gamma^+ \gamma^{1,2} \gamma^- + \gamma^- \gamma^{1,2} \gamma^+ &= -2\gamma^{1,2} \\
 \{\gamma^1, \gamma^2\} &= 0 & (\gamma_i p^i) \gamma^{1,2} (\gamma_i p^i) &= \pm (p_1)^2 \gamma^{1,2} \mp (p_2)^2 \gamma^{1,2} + 2p_1 p_2 \gamma^{2,1}
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Todas essas propriedades foram derivadas de $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. A partir desta propriedade também podemos achar os traços de duas matrizes gama:

$$\begin{aligned}
 \{\gamma^+, \gamma^-\} &= 2I \\
 \text{Tr}(\{\gamma^+, \gamma^-\}) &= 2\text{Tr}(\gamma^+ \gamma^-) = 2\text{Tr}(I) \\
 \text{Tr}(\gamma^+ \gamma^-) &= 4;
 \end{aligned}$$

da mesma forma, encontramos

$$\text{Tr}(\gamma^\pm \gamma^\pm) = \text{Tr}(\gamma^\pm \gamma^i) = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$\text{Tr}(\gamma^i \gamma^j) = 4g^{ij} = -4\delta^{ij}. \quad (\text{E.3})$$

E.2 Matriz γ^5 na Frente de Luz

Vamos usar a definição covariante $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e transformar para a Frente de Luz usando $\gamma^0 = \frac{\gamma^+ + \gamma^-}{\sqrt{2}}$ e $\gamma^3 = \frac{\gamma^+ - \gamma^-}{\sqrt{2}}$:

$$\gamma^5 = \frac{i}{2} (\gamma^+ \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ - \gamma^+ \gamma^1 \gamma^2 \gamma^- + \gamma^- \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ - \gamma^- \gamma^1 \gamma^2 \gamma^-). \quad (\text{E.4})$$

Usando as propriedades de anti-comutação e do quadrado das matrizes gama do Apêndice E.1, chegamos em

$$\gamma^5 = i(\gamma^1 \gamma^2 - \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^-). \quad (\text{E.5})$$

Para checar $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, devemos fazer as contas para cada componente μ da Frente de Luz:

$$\begin{aligned} \{\gamma^+, \gamma^5\} &= i\{\gamma^+, \gamma^1 \gamma^2\} - i\{\gamma^+, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^-\} \\ &= i\left[2\gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ - \gamma^1 \gamma^2 (\gamma^+)^2 \gamma^- - 2\gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ + \gamma^1 \gamma^2 \gamma^- (\gamma^+)^2\right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} \{\gamma^-, \gamma^5\} &= i\{\gamma^-, \gamma^1 \gamma^2\} - i\{\gamma^-, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^-\} \\ &= i\left[2\gamma^1 \gamma^2 \gamma^- - \gamma^1 \gamma^2 \gamma^- \gamma^+ \gamma^-\right] \\ &= i\left[2\gamma^1 \gamma^2 \gamma^- + 2\gamma^1 \gamma^2 \gamma^-\right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} \{\gamma^1, \gamma^5\} &= i\{\gamma^1, \gamma^1 \gamma^2\} - i\{\gamma^1, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^-\} \\ &= i\left[-\gamma^2 - \gamma^1 \gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^+ \gamma^- - \gamma^1 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^+ \gamma^-\right] \\ &= i\left[-\gamma^2 + \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^+ \gamma^- + \gamma^1 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^-\right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma^2, \gamma^5\} &= i \{\gamma^2, \gamma^1 \gamma^2\} - i \{\gamma^2, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^-\} \\
&= i [\gamma^1 \gamma^2 \gamma^2 - \gamma^1 \gamma^2 \gamma^2 + \gamma^1 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^- - \gamma^1 \gamma^2 \gamma^+ \gamma^-] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{E.9}$$

No caso de $(\gamma^5)^2 = I$, devemos escolher uma representação e testar a propriedade, que acaba se confirmando. Utilizando então essas duas propriedades e $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, é possível mostrar que o traço de um número ímpar de matrizes gama é nulo também na Frente de Luz.

E.3 Integrais Dimensionais

A seguir estão listadas as integrais dimensionais para um espaço Euclidiano. Integrais com uma potência ímpar de l no numerador se anulam pois teríamos uma integral ímpar num intervalo simétrico.

$$I_1 = \mu^{2-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l^2 + \Delta)^n} = \frac{\mu^{2-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-D/2}. \tag{E.10}$$

$$I_2 = \mu^{2-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^2}{(l^2 + \Delta)^n} = \frac{\mu^{2-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-D/2-1}. \tag{E.11}$$

$$I_3 = \mu^{2-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^4}{(l^2 + \Delta)^n} = \frac{\mu^{2-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D(D+2)}{4} \frac{\Gamma(n - D/2 - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-D/2-2}. \tag{E.12}$$

$$I_4 = \mu^{2-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 + \Delta)^n} = \frac{\mu^{2-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-D/2-1}. \tag{E.13}$$

Será necessário expandir cada uma dessas integrais em torno de $D = 2$. Para tanto, fazemos $\epsilon = 2 - D$ e usamos $n = 1$. Nos interessarão apenas os termos do tipo $1/\epsilon$, que explicitam a divergência:

$$I_1 = \mu^\epsilon (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} = \frac{1}{(4\pi)} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) - \gamma + O(\epsilon, \epsilon^2, \dots) \right] \tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\mu^\epsilon (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \left(\frac{-D}{2}\right) \Gamma(-D/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-1+\epsilon/2} \\
&= -\mu^\epsilon (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-1+\epsilon/2} \\
&= \frac{-\Delta}{(4\pi)} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) - \gamma + O(\epsilon, \epsilon^2, \dots) \right]
\end{aligned} \tag{E.15}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \mu^\epsilon (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \left(\frac{-D}{2}\right) \left(\frac{-D}{2} - 1\right) \Gamma(-1 - D/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-2-\epsilon/2} \\
&= \mu^\epsilon (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \left(\frac{-D}{2}\right) \Gamma(-D/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-2-\epsilon/2} \\
&= \mu^\epsilon (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-2-\epsilon/2} \\
&= \frac{\Delta^2}{(4\pi)} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) - \gamma + O(\epsilon, \epsilon^2, \dots) \right]
\end{aligned} \tag{E.16}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \mu^\epsilon g^{\mu\nu} (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \left(-\frac{1}{D}\right) \left(-\frac{D}{2}\right) \Gamma(-D/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-1+\epsilon/2} \\
&= -\mu^\epsilon \frac{g^{\mu\nu}}{D} (4\pi)^{-1+\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-1+\epsilon/2} \\
&= \frac{-g^{\mu\nu} \Delta}{2(4\pi)} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) - \gamma + O(\epsilon, \epsilon^2, \dots) \right]
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Referências Bibliográficas

- [1] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, (1949) 392.
- [2] S. Fubini and G. Furlan, Physics **1**, (1965) 229.
- [3] L. Susskind and G. Frye, Phys. Rev. **164**, (1967) 2003.
- [4] L. Susskind, Phys. Rev. **165**, (1968) 1535.
- [5] S. Weinberg, Phys. Rev. **150**, (1966) 1313.
- [6] J. B. Kogut and D. E. Soper, Phys. Rev. **D1**, (1970) 2901.
- [7] J. D. Bjorken, J. B. Kogut and D. E. Soper, Phys. Rev. **D3**, (1971) 1382.
- [8] S.J. Brodsky, R. Roskies and R. Suaya, Phys. Rev. **D8**, (1973) 4574.
- [9] M. Burkardt, Light Front Quantization, hep-ph 9505259 (1995).
- [10] N.C.J. Schoonderwoerd, B.L.G. Bakker and V.A. Karmanov Phys. Rev. **C 58**, (1998) 3093.
- [11] S.J. Brodsky, H.C. Pauli and S.S. Pinsky, Phys. Rept. **301**, (1998) 299.
- [12] L.R.U. Manssur, Phys. Lett. **B 480**, (2000) 229.
- [13] J. Hiller, Pauli-Villars regularization of field theories on the light front, hep-ph/arXiv:1010.0028 (2010).
- [14] S.S. Chabysheva, J.R. Hiller, Phys.Rev. **D 82**, (2010) 034004.
- [15] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, (1949) 434.
- [16] A.T. Suzuki, J.H.O. Sales, L.A. Soriano and J.D. Bolzan, Few Body Syst. **52** (2012) 443-448.
- [17] S.D. Drell and Tung-Mow Yan, Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 181-185.
- [18] G. A. Miller Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, (2000) 83-155.

- [19] H. P. Robertson and T. W. Noonan, Relativity and Cosmology.
- [20] T. Heinzl, Light-Cone Dynamics of Particles and Fields, hep-th/9812190 (1998).
- [21] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980; J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Jhon Wiley and Sons, Inc, 3rd edition, 1999; J.M.F. Basalo, *Eletrodinâmica Quântica*, Livraria da Física, 2006.
- [22] J.H.O Sales, T. Frederico, B.M. Pimentel and B.V. Carlson, Iterated resolvent function for the ladder Bethe-Salpeter equation, nucl-th/0211089 (2006).
- [23] B.M. Pimentel, J.H.O Sales and T. Frederico, Gauge field divergences in the light front, nucl-th/0307079 (2003).
- [24] J. A. O. Marinho, T. Frederico, P. U. Sauer, Phys. Rev. **D76**, (2007) 096001.
- [25] J.H.O. Sales and A.T.Suzuki, Commun. Theor. Phys. **55**, (2011) 1029.
- [26] J. H.O. Sales, T. Frederico, B.V. Carlson and P.U. Sauer, Phys. Rev. C 61 (2000) 044003.
- [27] T. Frederico, J.H.O. Sales, B.V. Carlson and P.U. Sauer, Nucl.Phys. **A737** (2004) 260-264
- [28] J.H.O. Sales and A.T.Suzuki, Antiparticle contribution in the cross ladder diagram for two boson propagation in the light-front, hep-th/0510157 (2005).
- [29] J.H.O. Sales · A.T. Suzuki, Int J Theor Phys **48**, (2009) 2340-2352.
- [30] J.P.B.C. de Melo, J.H.O. Sales, T. Frederico, P.U. Sauer, Nucl. Phys. **A** 631, (1998) 574c.
- [31] S. Fubini, G. Segré and D. Walecka, Ann. of Phys. **39**, (1966) 381.
- [32] T. Frederico and G. A. Miller, Phys. Rev. **D50** (1994) 210.
- [33] M. Sawicki, Phys. Rev. **D44**, (1991) 433.
- [34] M. Sawicki, Phys. Rev. **D46**, (1992) 474.
- [35] L.H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1985.
- [36] G. Leibbrandt, Phys. Rev. **D29** (1984) 1699.

- [37] G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **59** (1987) 1067.
- [38] T. Muta, Foundation of Quantum Chromodynamics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1987).
- [39] J.H.O. Sales and A.T. Suzuki, Nucl. Phys. Proc. Suppl.**199**, (2010) 211.
- [40] Bolliniand, C.G and J.J. Giambiagi, Nuovo Cimento **B12**, (1972) 20.
- [41] Bolliniand, C.G and J.J. Giambiagi, Physics Letters **B40** , n. 5, (1972) 566.
- [42] 't Hooft, G. and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, (1972) 189.
- [43] Ashmore, J.F., Nuovo Cimento Lett. **4**, (1972) 289.
- [44] S.J. Brodsky, R. Roskies, R. Suay, Phys. Rev. **D8** (1973) 4574
- [45] N.E. Ligterink and B. L.G. Bakker, Phys. Rev. **D52** (1995) 5954; A.Misra and S. Warawdekar, Phys. Rev. **D71** (2005) 125011; B. L. G. Bakker, M. A. De-Witt, C.-R. Ji, and Y. Mishchenko, Phys. Rev. **D72** (2005) 076005.
- [46] S. Mandelstam, Nucl. Phys. **B213** (1983) 149.
- [47] A.T. Suzuki, B.M. Pimentel, Phys. Rev. **D42** (1990) 2115.
- [48] J.H.O. Sales, T. Frederico, B.V. Carlson, P.U. Sauer, Phys.Rev. **C63** (2001) 064003.