



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Vinicius Vítório

**Existência de soluções para equações diferenciais neutras
abstratas via teoria de semigrupos**

São José do Rio Preto
2020

Vinicius Vítório

**Existência de soluções para equações diferenciais neutras
abstratas via teoria de semigrupos**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto
2020

V845e Vitório, Vinicius
Existência de soluções para equações diferenciais neutras abstratas via teoria de semigrupos / Vinicius Vitório. -- São José do Rio Preto, 2020
117 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Andréa Cristina Prokopczyk Arita

1. Matemática. 2. Semigrupos analíticos. 3. Equações diferenciais neutras. 4. Existência de solução. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Vinicius Vitório

**Existência de soluções para equações diferenciais neutras
abstratas via teoria de semigrupos**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Profa. Dra. Karina Schiabel
UFSCar - Universidade Federal de São Carlos

São José do Rio Preto
27 de fevereiro de 2020

*Dedico à minha
família.*

AGRADECIMENTOS

Nestes anos de estudo, esforço e empenho, gostaria de agradecer algumas pessoas que foram fundamentais para a realização deste projeto.

Primeiramente a minha família, que sempre me apoiaram e incentivaram.

A orientadora Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita pela dedicação, comprometimento, paciência e esforços aplicados durante este trabalho.

Aos membros da banca examinadora Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz e Profa. Dra. Karina Schiabel, que tão gentilmente aceitaram participar e colaborar com esta dissertação.

A todos os amigos que de forma direta ou indireta, contribuíram na elaboração deste projeto, pela atenção e força que prestaram nos momentos difíceis.

Agradeço também a todos, que compõe a Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho que proporcionam a estrutura necessária para o crescimento acadêmico.

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq).

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos alguns conceitos e resultados da Teoria de semigrupos de operadores lineares limitados para então, aplicá-los no estudo de existência de solução para uma classe de equações diferenciais funcionais do tipo neutro, com retardo finito, que podem ser escritas na seguinte forma abstrata

$$\frac{d}{dx}[x(t) + F(t, x_t)] = Ax(t) + G(t, x_t), \quad t \in [0, a),$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados em um espaço de Banach, o retardo $x_t \in C([-r, 0], X)$ e as funções F e G satisfazem condições apropriadas.

Palavras-chave: Semigrupos analíticos. Equações diferenciais neutras. Existência de solução.

ABSTRACT

In this work we developed some concepts and results from the Theory of Semigroups of bounded linear operators and we applied them in the study of existence of solutions for a class of neutral functional differential equations with bounded delay that can be described in an abstract form by

$$\frac{d}{dx}[x(t) + F(t, x_t)] = Ax(t) + G(t, x_t), \quad t \in [0, a),$$

where A is the infinitesimal generator of an analytic semigroup of bounded linear operators in a Banach space, the history $x_t \in C([-r, 0], X)$ and the functions F and G satisfy appropriate conditions.

Keywords: Analytic semigroups. Neutral differential equations. Existence of solutions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	Região onde $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é analítico.	43
Figura 2.2	Círculo de convergência da série.	45
Figura 2.3	Curva Γ .	49
Figura 2.4	Curva γ_1 .	51
Figura 2.5	Curva γ_2 .	52
Figura 2.6	Curva γ_3 .	53
Figura 2.7	Curva γ_4 .	53
Figura 2.8	Curva $\Gamma_r \cup C_r$.	55
Figura 2.9	Região R_2	58
Figura 2.10	Curva $ z \Gamma$.	59
Figura 2.11	Curvas Γ , Γ' e J_r .	61
Figura 2.12	Região delimitada pela curva $\tilde{J}_r$.	62
Figura 2.13	Caminho C.	73

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS	11
2.1	Semigrupos uniformemente contínuos	11
2.2	Semigrupos formemente contínuos	20
2.3	O Teorema de Hille-Yosida	28
2.4	Semigrupos compactos e diferenciáveis	39
2.5	Semigrupos analíticos	42
2.6	Potências fracionárias de operadores lineares fechados	72
3	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NEU- TRAS COM RETARDO	85
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A - Resultados auxiliares	115

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros resultados da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados surgiram na primeira metade do século passado no estudo de equações diferenciais, tendo como ponto central o Teorema de geração de Hille-Yosida, publicado em 1948, que caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Este resultado foi obtido simultaneamente por Hille e Yosida, cada um construindo o semigrupo a partir de um dado operador A de maneira distinta. Este teorema marcou o avanço da teoria de semigrupos e tem sido seu foco desde então.

Posteriormente, podemos dizer que esta teoria assumiu seu primeiro ápice com a edição de 1957 do livro "Semigroups and functional analysis" de E. Hille e R. S. Phillips, estando já bem consolidada nos anos 70 e 80, graças aos esforços de muitas escolas diferentes e de nomes como Davis, Goldstein, Pazy, entre outros.

Hoje a situação é caracterizada por múltiplas aplicações desta teoria não apenas às áreas tradicionais, como equações diferenciais parciais ou processos estocásticos, mas se tornou uma importante ferramenta para as equações integro-diferenciais e as equações diferenciais funcionais, na mecânica quântica ou na teoria de controle infinito-dimensional. A teoria de semigrupos também é aplicada com grande sucesso às equações concretas, como por exemplo, em dinâmica de populações ou teoria do transporte.

Nosso objetivo neste trabalho é desenvolver parte da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach para então, usá-la com ferramenta no estudo de existência de soluções fracas para equações diferenciais funcionais abstratas do tipo neutro com retardo finito.

A escolha de uma equação do tipo neutro se deve ao grande número de trabalhos existentes na literatura sobre o assunto, como por exemplo, (1), (2), (3) e (4) que tratam de equações diferenciais ordinárias do tipo neutro, cujas aplicações chegam na Biologia e em processos de Engenharia, e (5), (6), (7), (8), (9), (10) e (11) para equações diferenciais parciais e equações diferenciais funcionais abstratas.

Além disso, se comparado ao problema de Cauchy, o problema neutro requer muito mais cuidado e atenção, incluindo o uso de outras ferramentas, como por exemplo, as potências fracionárias, e o aparecimento de um operador linear, não necessariamente limitado, na expressão que define a solução fraca do problema.

Já o fato de considerarmos que a equação possui retardo nos permite tratar de uma classe de equações abstratas que podem modelar, por exemplo, a equação do calor em espaços com memória.

Desse modo, dividimos este texto em três capítulos: sendo este o primeiro, o segundo dedicado à teoria de semigrupos de operadores lineares limitados e baseado nos livros (12), (13) e (14). O terceiro, baseado no artigo (15), referente ao estudo de existência de solução fraca para uma classe de equações diferenciais do tipo neutro, com retardo finito, que podem

ser descritas na forma

$$\frac{d}{dx}[x(t) + F(t, x_t)] = Ax(t) + G(t, x_t), \quad t \in [0, a), \quad (1.1)$$

$$x(0) = \varphi \in \Omega, \quad (1.2)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados em um espaço de Banach, $\Omega \subset C([-r, 0], X)$ é um aberto, o retardo $x_t \in C([-r, 0], X)$ e as funções F e G satisfazem condições apropriadas.

O Capítulo 2 está dividido em seis seções. Na primeira seção introduzimos o conceito de semigrupos de operadores lineares limitados e consideramos, em particular, os semigrupos uniformemente contínuos, bem como um resultado que relaciona um semigrupo deste tipo com o fato de seu gerador infinitesimal ser um operador linear limitado. Na Seção 2.2, descrevemos as propriedades dos semigrupos fortemente contínuos, muitas das quais serão utilizadas no Capítulo 3. Já na seção seguinte, apresentamos o clássico Teorema de Hille-Yosida, que caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. A Seção 2.4 trata brevemente de duas classes especiais de semigrupos: os semigrupos compactos e os semigrupos diferenciáveis. Na sequência, temos uma seção dedicada aos semigrupos analíticos, que farão parte das hipóteses assumidas para a equação neutra. Por fim, na Seção 2.6 definimos e analisamos as principais propriedades das potências fracionárias de um operador linear fechado e densamente definido. Esta ferramenta será fortemente usada no próximo capítulo.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo de existência de solução fraca para a equação diferencial funcional do tipo neutro (1.1) – (1.2). Nesta parte do trabalho, apresentamos os conceitos de solução clássica e fraca para (1.1) – (1.2) e provamos três resultados que garantem a existência de uma solução fraca para esta equação.

O primeiro deles é demonstrado usando o Teorema do ponto fixo de Sadovskii e garante apenas a existência de uma solução. O segundo resultado é um corolário do primeiro onde trocamos uma hipótese de compacidade pelo fato do semigrupo ser compacto. Já no último teorema, usamos o Teorema do ponto fixo de Banach para garantir a existência e a unicidade de solução para (1.1) – (1.2). Este trabalho conta ainda com apêndice onde enunciamos os principais resultados que são utilizados no decorrer dos capítulos.

2 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS

Neste capítulo, vamos introduzir o conceito de semigrupo de operadores lineares limitados e apresentar algumas de suas propriedades. Essa teoria será utilizada para estudar a existência de solução para uma classe de equações diferenciais funcionais neutras com retardo.

Ao longo deste capítulo iremos considerar que X é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$ e $\mathcal{L}(X, Y)$ é o espaço das transformações lineares limitadas de X em Y , no caso em que $X = Y$ usaremos a notação $\mathcal{L}(X)$.

2.1 Semigrupos uniformemente contínuos

Nessa seção, introduziremos o conceito de semigrupo uniformemente contínuo, apresentaremos sua relação com seu gerador infinitesimal e algumas de suas propriedades.

Definição 2.1. *Uma família a um parâmetro $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo** se:*

- (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in [0, +\infty)$.

Definição 2.2. *Dizemos que um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(X)$ é **uniformemente contínuo** se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0,$$

isto é, a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $t = 0$.

Observação 2.3. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo, a propriedade (ii) da Definição 2.1 nos garante que a função $t \mapsto T(t)$ é contínua à direita em $[0, +\infty)$.

De fato, dados $t \in [0, +\infty)$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t + h) - T(t)\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)T(h) - T(t)\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)(T(h) - I)\| \\ &\leq \|T(t)\| \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(h) - I\| = 0. \end{aligned}$$

A continuidade à esquerda da função $t \mapsto T(t)$ também é válida, fato que provaremos mais adiante.

Definição 2.4. *O operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por*

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde $x \in \mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$, é chamado de **gerador infinitesimal** do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados.

A seguir observamos algumas propriedades que o conjunto $\mathcal{D}(A)$ satisfaz.

- (1) O conjunto $\mathcal{D}(A)$ não é vazio, pois $0 \in \mathcal{D}(A)$.
- (2) $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de X .
- (3) Fixado $x \in \mathcal{D}(A)$, considere a função $f : [0, +\infty) \rightarrow X$ dada por $f(t) = T(t)x$. Então,

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0),$$

onde f'_+ representa a derivada de f à direita, ou seja,

$$Ax = \left. \frac{d}{dt} T(t)x \right|_{t=0}, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

O teorema a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 2.5. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador limitado.*

Demonstração: Seja A um operador limitado em X e considere a família $(T(t))_{t \geq 0}$ dada por

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Mostremos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo, com gerador infinitesimal igual a A .

Primeiramente, observe que $T(t)$ está bem definido para todo $t \in [0, +\infty)$.

De fato, para $t \in [0, +\infty)$ temos

$$\left\| \sum_{j=0}^n \frac{(tA)^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=0}^n \frac{\|tA\|^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{t^j \|A\|^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j \|A\|^j}{j!} = e^{t\|A\|}, \quad \forall n > 0.$$

Portanto,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{(tA)^j}{j!} \right\| \leq e^{t\|A\|} < +\infty.$$

Agora, observe também que $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \in [0, +\infty)$.

Para tanto, consideremos $s_k = \sum_{n=0}^k \frac{t^n A^n}{n!}$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, como $\frac{t^n}{n!} \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$, segue que $s_k \in \mathcal{L}(X)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, dados $m, k \in \mathbb{N}$, com $k \leq m$, temos

$$\|s_m - s_k\| = \left\| \sum_{n=k+1}^m \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=k+1}^m \frac{t^n \|A\|^n}{n!}.$$

Desse modo, como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}$, temos que para $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} < \varepsilon.$$

Logo, para $k, m \geq n_0$,

$$\|s_m - s_k\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} < \varepsilon,$$

o que nos garante que $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X)$.

Mais ainda, como X é um espaço de Banach, segue que $\mathcal{L}(X)$ também é um espaço de Banach, e assim, a sequência $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = T(t) \in \mathcal{L}(X).$$

Vejamos também que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo.

Para isso, observe que:

(i) $T(0) = I$;

(ii) Dados $t, s \in [0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} T(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (t+s)^n \frac{A^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k s^{n-k} \right) \frac{A^n}{n!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k s^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) A^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!} \frac{s^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!} \right) \\ &= T(t)T(s), \end{aligned}$$

o que garante que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo.

(iii) Dado $t > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
 \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| = \left\| tA \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{n!} \right\| \\
 &\leq t\|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\|A\|^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\
 &= t\|A\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\|A\|^n}{n!} \right) \\
 &= t\|A\|e^{t\|A\|}
 \end{aligned}$$

e então,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t\|A\|e^{t\|A\|} = 0,$$

implicando que $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo.

Para finalizarmos, basta mostrar que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Para tanto, note que, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned}
 \frac{T(t) - I}{t} - A &= \frac{1}{t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) - A = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{n!} \right) - A \\
 &= A \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right) - I \right] = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right).
 \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &\leq \|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \right) \\
 &= \|A\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} - 1 \right) \\
 &= \|A\|(e^{t\|A\|} - 1),
 \end{aligned}$$

e assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \|A\|(e^{t\|A\|} - 1) = 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A,$$

isto é, A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Reciprocamente, suponhamos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo e mostremos que A é um operador linear limitado.

Para isso, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, para todo $0 < t < \delta_\varepsilon$, temos

$$\|T(t) - I\| < \varepsilon.$$

Assim, para $0 < t < \delta_\varepsilon$ segue que

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds - I \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t I ds \right\| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|T(s) - I\| ds \leq \varepsilon.$$

Em particular, para $\varepsilon < 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t) ds - I \right\| < 1,$$

para algum ρ fixo, com $0 < \rho < \delta_1$.

Pelo Corolário A.14, segue que $\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds$ é inversível e $\left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Mais ainda, como $\rho \in \mathbb{R}$, $\left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Desse modo, para mostrar que A é limitado, basta provarmos que

$$A = (T(\rho) - I) \left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}.$$

Para tanto, observe que, para $0 < h < \rho$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(h+s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right). \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right).$$

A seguir, iremos calcular os limites acima separadamente.

$$(i) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds = I.$$

De fato, temos que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds - I \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^h I ds \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s) - I\| ds.$$

Agora, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que para $0 < h < \delta_\varepsilon$,

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds - I \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s) - I\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon = \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds = I$.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds = T(\rho).$$

Com efeito, usando o limite em (i), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(\rho) T(s) ds \\ &= T(\rho) \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) \\ &= T(\rho). \end{aligned}$$

Logo, por (i) e (ii) temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = T(\rho) - I,$$

e assim,

$$A \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = T(\rho) - I.$$

Portanto, $A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, ou seja, A é limitado.

■

Proposição 2.6. Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, então a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $[0, +\infty)$.

Demonstração: Pela Observação 2.3 a função $t \mapsto T(t)$ é contínua à direita em $[0, +\infty)$. Mostremos então a continuidade à esquerda.

Para tanto, observe inicialmente que $\|T(s)\|$ é limitado em $[0, t+1]$ para todo $t > 0$.

De fato, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $s \in [0, \delta]$, $\|T(s) - I\| < 1$.

Desse modo,

$$\|T(s)\| \leq \|T(s) - I\| + \|I\| < 2.$$

Agora, seja n , o primeiro número natural tal que $t+1 < n\delta$.

Assim, dado $s \in [0, t+1]$, pelo Algoritmo da divisão euclidiana, existem $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ e $r \in [0, \delta)$ tais que $s = k\delta + r$, e então

$$\|T(s)\| = \|T(k\delta)T(r)\| \leq \|T(\delta)\|^k \|T(r)\| \leq 2^k 2 \leq 2^{n+1},$$

ou seja, $\|T(s)\| \leq 2^{n+1}$ para todo $s \in [0, t+1]$.

Agora, dado $h > 0$ tal que $t - h > 0$, observe que

$$\begin{aligned} \|T(t-h) - T(t)\| &= \|T(t-h) - T(t-h+h)\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|I - T(h)\| \\ &\leq 2^{n+1} \|T(h) - I\|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h) - T(t)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 2^{n+1} \|T(h) - I\| = 0,$$

garantindo que a função $t \mapsto T(t)$ é contínua à esquerda para todo $t > 0$.

Portanto, a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $[0, +\infty)$.

■

Sabemos pelo Teorema 2.5 que um operador linear limitado A gera um semigrupo uniformemente contínuo. O resultado a seguir nos garante que esse semigrupo é único.

Teorema 2.7. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ semigrupos uniformemente contínuos com o mesmo gerador A . Então, $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Mostremos, primeiramente, que para $\tau > 0$,

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \in [0, \tau].$$

De fato, pela Proposição 2.6, as funções $t \mapsto T(t)$ e $t \mapsto S(t)$ são contínuas em $[0, +\infty)$. Logo, as funções $t \mapsto \|T(t)\|$ e $t \mapsto \|S(t)\|$ também são contínuas em $[0, +\infty)$.

Assim, visto que $[0, \tau]$ é compacto, existem constantes positivas k_1 e k_2 , tais que

$$\|T(t)\| \leq k_1 \text{ e } \|S(t)\| \leq k_2, \text{ para todo } t \in [0, \tau].$$

Além disso, como A é gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}.$$

Desse modo, para $k = k_1 k_2$, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$(i) \quad \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| < \frac{\varepsilon}{2k\tau}, \quad \forall 0 < t < \delta_1;$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| < \frac{\varepsilon}{2k\tau}, \quad \forall 0 < t < \delta_2.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $0 < t < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)}{t} - \frac{S(t)}{t} \right\| &= \left\| \left(\frac{T(t)}{t} - \frac{I}{t} - A \right) - \left(\frac{S(t)}{t} - \frac{I}{t} - A \right) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| + \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2k\tau} + \frac{\varepsilon}{2k\tau} \\ &= \frac{\varepsilon}{k\tau}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|T(t) - S(t)\| < \frac{\varepsilon t}{k\tau}, \text{ para todo } 0 < t < \delta.$$

Dado $t \in [0, \tau]$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned} \|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right] S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} k_1 \frac{\varepsilon}{\tau k n} k_2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{\varepsilon}{\tau k n} \\ &= \frac{\varepsilon t}{\tau} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, temos $\|T(t) - S(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \in [0, \tau]$. Assim, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e, posteriormente, $\tau \rightarrow \infty$, concluímos que $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. ■

Corolário 2.8. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo, então:*

(i) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$.*

- (ii) O operador A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.
- (iii) Existe $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, $\forall t \geq 0$.
- (iv) A função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável em norma e

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A, \forall t \geq 0.$$

Demonstração:

- (i) O Teorema 2.5 nos garante que o gerador infinitesimal A do semigrupo uniformemente contínuo $(T(t))_{t \geq 0}$ é limitado.

Além disso, o mesmo teorema nos garante que este gerador infinitesimal A gera um semigrupo uniformemente contínuo $(S(t))_{t \geq 0}$, com $S(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$.

Assim, como A é o gerador dos semigrupos uniformemente contínuos $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$, o Teorema 2.7 nos garante que $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$.

Mais ainda, visto que o gerador infinitesimal de um semigrupo é único, obtemos que o operador linear A é o único tal que $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$.

- (ii) Esta propriedade é consequência direta do item (i) e dos resultados obtidos na demonstração do Teorema 2.5.
- (iii) Do item (i) sabemos que $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$. Assim,

$$\|T(t)\| = \|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|} = e^{wt}, \forall t \geq 0,$$

onde $w = \|A\| > 0$.

- (iv) Sejam $t \geq 0$ e $h > 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| &= \left\| T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} - A \right) \right\| \\ &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \\ &\leq e^{wt} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\|. \end{aligned}$$

Como A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, segue que $\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0^+$, ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| = 0.$$

Desse modo, a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável à direita de t , sendo $\frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A$.

Por outro lado, sabemos que a função $t \mapsto T(t)$ é contínua, mais ainda, como A é limitado, a função $t \mapsto T(t)A$ também é contínua. Assim, o Lema de Dini (Lema A.3) nos garante que a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável, com

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A.$$

Do mesmo modo, temos

$$\left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \|T(t)\| \leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| e^{wt}.$$

Logo, pelo mesmo argumento acima, segue que

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d^+}{dt}T(t) = AT(t), \forall t \geq 0.$$

Portanto,

$$AT(t) = \frac{d}{dt}T(t) = T(t)A, \forall t \geq 0.$$

■

2.2 Semigrupos fortemente contínuos

Nesta seção vamos introduzir o conceito de semigrupos fortemente contínuos e apresentar algumas de suas propriedades.

Definição 2.9. Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo **fortemente contínuo** se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \forall x \in X.$$

Observação 2.10. (1) A função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $t = 0$ para todo $x \in X$.

(2) Chamamos um semigrupo fortemente contínuo de C_0 -semigrupo, ou semigrupo de classe C_0 .

Teorema 2.11. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então, existem constantes $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que existem $\eta > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M, \text{ para todo } t \in [0, \eta].$$

De fato, suponha por absurdo que, para todo $\eta > 0$ e $M \geq 1$ dados, existe $t_{\eta, M} \in [0, \eta]$ de modo que $\|T(t_{\eta, M})\| > M$.

Em particular, tomando $\eta = \frac{1}{n}$ e $M = n$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tal que

$$\|T(t_n)\| > n.$$

Logo, variando $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$, com $\|T(t_n)\| > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desse modo,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|T(t_n)\|\} = +\infty,$$

e assim, pelo Princípio da limitação uniforme, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|T(t_n)x_0\|\} = +\infty,$$

ou seja, existe uma subsequência $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $(\|T(t_{n_k})x_0\|)_{k \in \mathbb{N}}$ é ilimitada.

Por outro lado, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, temos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x_0 = x_0$. Em particular, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_0 = x_0$, pois $t_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Logo, a sequência $(T(t_n)x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em X , ou seja, $(T(t_n)x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, o que é uma contradição.

Portanto, existem $\eta > 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \eta]$.

Agora, seja $t > 0$ qualquer, pelo Algoritmo da divisão euclidiana, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \eta]$ de modo que $t = n\eta + \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\eta + \delta)\| \\ &\leq \|T(\eta)\|^n \|T(\delta)\| \\ &\leq M^n M \\ &\leq M^{\frac{t}{\eta}} M \\ &= Me^{wt}, \end{aligned}$$

onde $w = \frac{\ln M}{\eta} > 0$.

Portanto, existem $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$.

■

Corolário 2.12. Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo então, para cada $x \in X$, a função $t \rightarrow T(t)x$ é contínua de $[0, +\infty)$ em X .

Demonstração: Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo, assim, dados $x \in X$, $t > 0$ fixo e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(h)x - x\| \leq \frac{\varepsilon}{Me^{wt}}$, para todo $0 < h < \delta$.

Logo, para $0 < h < \delta$ segue que

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt} \frac{\varepsilon}{Me^{wt}} \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

garantindo que a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita.

Agora, para mostrarmos a continuidade à esquerda, consideremos que $0 < h \leq t < \delta$, assim

$$\begin{aligned}\|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{wt} \frac{\varepsilon}{Me^{wt}} \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

garantindo que a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à esquerda.

Portanto, $t \mapsto T(t)x$ é contínua de $[0, +\infty)$ em X , para todo $x \in X$ fixo.

■

Teorema 2.13. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:*

(i) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$,*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x;$$

(ii) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, segue que $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x;$$

(iii) *Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $t \geq 0$, temos $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

(iv) *Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t, s \geq 0$,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Demonstração:

- (i) Sejam $x \in X$, $t \geq 0$ e $a > 0$ fixo, com $t < a$. Logo, pelo Corolário 2.12 a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, a]$, mais ainda, como $[0, a]$ é compacto, segue que $t \mapsto T(t)x$ é uniformemente contínua em $[0, a]$. Assim, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t, s \in [0, a]$ com $|t - s| < \delta$, temos

$$\|T(t)x - T(s)x\| < \varepsilon.$$

Seja $0 < h < \delta$, com $t + h \in [0, a]$, então

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)x \, ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| \, ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon \, ds \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x$.

- (ii) Sejam $x \in X$, $t \geq 0$, $h > 0$ e $y = \int_0^t T(s)x \, ds$.

Desse modo, usando o item (i), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)y - y}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[T(h) \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) - \int_0^t T(s)x \, ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_0^t T(s+h)x \, ds - \int_0^t T(s)x \, ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_h^{t+h} T(s)x \, ds - \int_0^t T(s)x \, ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds \\ &= T(t)x - T(0)x \\ &= T(t)x - x. \end{aligned}$$

Logo, como o limite acima existe, concluímos que $y = \int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x.$$

- (iii) Dados $x \in X$ e $t \geq 0$, mostremos, primeiramente, que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$.

Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)[T(h)x - x]}{h} \\
 &= T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $A(T(t)x) = T(t)Ax$.

Por outro lado, note que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax.$$

Mais ainda,

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h}.$$

Logo, para $h > 0$, com $t - h > 0$, temos

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| &= \left\| T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax \right] - T(t)Ax \right\| \\
 &\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
 &\quad + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
 &\leq M e^{w(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
 &\quad + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(M e^{w(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \right. \\
 &\quad \left. + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \right) \\
 &= M e^{wt} 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluimos que $\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax = \frac{d^+}{dt}T(t)x$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

(iv) Dado $x \in \mathcal{D}(A)$, pelo item (iii), $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

Desse modo, pelo Teorema fundamental do cálculo temos

$$T(t)x - T(0)x = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x ds = \int_0^t AT(s)x ds = \int_0^t T(s)Ax ds.$$

■

Corolário 2.14. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então $\mathcal{D}(A)$ é denso em X , isto é, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, e A é um operador fechado.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Sabemos que $\overline{\mathcal{D}(A)} \subset X$. Logo, nos resta mostrar que $X \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Para tanto, consideremos $x \in X$, assim, pelo item (ii) do Teorema 2.13 temos que $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$, mais ainda, como $\mathcal{D}(A)$ é um espaço vetorial, para $t > 0$,

$$\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A).$$

Além disso, do item (i) do Teorema 2.13, segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds = T(0)x = x.$$

Logo, fazendo $t = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por

$$x_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds,$$

onde:

(i) $x_n \in \mathcal{D}(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Desse modo, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e portanto, $X \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Agora, mostremos que A é um operador fechado.

De fato, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(A)$ de modo que $x_n \rightarrow x$, com $x \in X$, e $Ax_n \rightarrow y$, para algum $y \in X$.

Observe que, pelo item (iv) do Teorema 2.13 temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\tau)Ax_n d\tau, \quad (2.1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$.

Além disso, como $x_n \rightarrow x$ e $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, segue que $T(t)x_n \rightarrow T(t)x$.

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t T(\tau)Ax_n d\tau - \int_0^t T(\tau)y d\tau \right\| &\leq \int_0^t \|T(\tau)\| \|Ax_n - y\| d\tau \\ &\leq \int_0^t M e^{w\tau} \|Ax_n - y\| d\tau \\ &\leq M e^{wt} \int_0^t \|Ax_n - y\| d\tau. \end{aligned}$$

Logo, como $Ax_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\int_0^t T(\tau)Ax_n d\tau \rightarrow \int_0^t T(\tau)y d\tau$. Assim, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (2.1), obtemos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)y d\tau.$$

Portanto, pelo item (i) do Teorema 2.13, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y d\tau = T(0)y = y,$$

ou seja, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = y$, o que garante que A é um operador fechado.

■

Teorema 2.15. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ dois C_0 -semigrupos com geradores infinitesimais A e B respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Suponha que $A = B$ e seja $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

Assim, pelo item (iii) do Teorema 2.13 obtemos que:

$$(i) \quad \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}S(t)x = BS(t)x = S(t)Bx.$$

Observe que, se $t = 0$, então $S(0) = I = T(0)$.

Agora, para $t > 0$, defina $\psi_t : [0, t] \mapsto X$ por $\psi_t(s) = T(t-s)S(s)x$. Assim, visto que $A = B$ temos

$$\begin{aligned} \psi'_t(s) &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x \\ &= T(t-s) \left[\frac{d}{ds}S(s)x \right] + \frac{d}{ds}(T(t-s))S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - AT(t-s)S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - T(t-s)AS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\psi'_t(s) = 0$, para todo $s \in [0, t]$, e desse modo, ψ_t é constante em $[0, t]$.

Em particular, considerando $s = 0$ temos

$$T(t)x = T(t-0)S(0)x = \psi_t(0) = \psi_t(t) = T(t-t)S(t)x = S(t)x,$$

ou seja, $T(t)x = S(t)x$, para todo $t \geq 0$ e todo $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

Por outro lado, consideremos $x \in X$. Assim, como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Desse modo, $T(t)x_n = S(t)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto,

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t)x_n = S(t)x, \forall t \geq 0.$$

■

Exemplo 2.16. Seja $X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é limitada e uniformemente contínua}\}$ com a norma $\|f\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Para cada $t \geq 0$, defina $T(t) : X \rightarrow X$ por $T(t)f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $(T(t)f)(s) = f(t+s)$. Assim, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em $\mathcal{L}(X)$ e seu gerador infinitesimal A é dado por $Af = f'$, com $\mathcal{D}(A) = \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}$.

O fato de $T(t)f \in X$, para todo $f \in X$ e $t \geq 0$, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$, $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in [0, +\infty)$, e $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)f = f$, para todo $f \in X$, segue diretamente da definição de X e de $T(t)$.

Analisemos, então, seu gerador infinitesimal.

Para isso, observe que

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existe} \right\} = \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}.$$

De fato, considere $f \in X$ tal que f' existe e $f' \in X$.

Assim, se $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\| &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} - f'(s) \right| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{f(t+s) - f(s)}{t} - f'(s) \right| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{t} \int_s^{s+t} f'(\tau) d\tau - \frac{1}{t} \int_s^{s+t} f'(s) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} |f'(\tau) - f'(s)| d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Logo, como $f' \in X$, f' é uniformemente contínua, e assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, com $|\xi - \eta| < \delta$,

$$|f'(\xi) - f'(\eta)| < \varepsilon.$$

Desse modo, fazendo $t < \delta$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\| &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} |f'(\tau) - f'(s)| d\tau \right\} \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \varepsilon d\tau \right\} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $f \in \mathcal{D}(A)$ com $Af = f'$. Assim, $\mathcal{D}(A) \subset \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}$.

Por outro lado, considere $f \in \mathcal{D}(A)$, e mostremos que f' existe e $f' \in X$.

Como $f \in \mathcal{D}(A)$, segue que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t}$ existe e digamos que esse limite é $g \in X$.

Assim, visto que

$$\begin{aligned} \left| \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} - g(s) \right| &\leq \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - g \right\|, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - g \right\| &= 0, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} - g(s) \right| = 0, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} = g(s),$$

ou seja, f'_+ existe e $f'_+(s) = g(s)$, mais ainda, como $g \in X$, g é uniformemente contínua, e assim, o Lema de Dine nos garante que f' existe e $f'(s) = f'_+(s) = g(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, ou seja, $\{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\} \subset \mathcal{D}(A)$.

Portanto, $\mathcal{D}(A) = \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}$ e $Af = f'$.

2.3 O Teorema de Hille-Yosida

Nesta Seção vamos estudar o Teorema de Hille-Yosida que nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um operador linear A seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo.

Sabemos pelo Teorema 2.11 que dado um C_0 -semigrupo, existem constantes $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$. No decorrer desta seção as constantes w e M serão usadas como notação.

Definição 2.17. Um C_0 -semigrupo é chamado **uniformemente limitado** quando

$$\|T(t)\| \leq M, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 2.18. Um C_0 -semigrupo é chamado **semigrupo de contrações** quando

$$\|T(t)\| \leq 1, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 2.19. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O **conjunto resolvente** de A é dado por

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \text{ é um operador limitado em } X\}.$$

O **espectro** de A é o complementar do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(A) = \rho(A)^c$.

Definição 2.20. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, para $\lambda \in \rho(A)$, é chamada **família resolvente** de A e o operador $R(\lambda : A)$, **operador resolvente**.

Lema 2.21. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ linear e fechado com $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$, $\forall x \in X$.

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Para todo $\lambda > 0$, observe que

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - Ix\| &= \|\lambda R(\lambda : A)x - R(\lambda : A)(\lambda I - A)x\| \\ &= \|R(\lambda : A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda R(\lambda : A)x - Ix\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\|Ax\|}{\lambda} = 0,$$

isto é, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

Agora, seja $x \in X$. Como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, ou seja, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - Ix\| &\leq \|\lambda R(\lambda : A)(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq 2\|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\|. \end{aligned}$$

Logo, fixando $n = n_0$, para todo $\lambda > 0$ obtemos

$$\|\lambda R(\lambda : A)x - Ix\| \leq 2\|x - x_{n_0}\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_0} - x_{n_0}\| < \varepsilon + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_0} - x_{n_0}\|.$$

Desse modo, visto que $x_{n_0} \in \mathcal{D}(A)$, segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda R(\lambda : A)x - Ix\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\varepsilon + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_0} - x_{n_0}\|) = \varepsilon.$$

Por fim, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| = 0$.

■

Definição 2.22. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ com $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Para cada $\lambda > 0$, definimos a **aproximação de Yosida** de A por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Observação 2.23. No contexto das definições anteriores, temos:

- (i) O operador linear A_λ é limitado, pois $\lambda^2 R(\lambda : A)$ e λI são operadores limitados em X ;
- (ii) A igualdade $\lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$ ocorre pois, como $I = (\lambda I - A)R(\lambda : A) = \lambda R(\lambda : A) - AR(\lambda : A)$, temos $\lambda I = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda AR(\lambda : A)$, e portanto $\lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$.
- (iii) $R(\lambda : A)$ e A comutam, para todo $\lambda \in \rho(A)$.

De fato, sabemos que $I = (\lambda I - A)R(\lambda : A)$, ou seja, $AR(\lambda : A) = \lambda R(\lambda : A) - I$.

Por outro lado, $I = R(\lambda : A)(\lambda I - A) = \lambda R(\lambda : A) - R(\lambda : A)A$, isto é, $R(\lambda : A)A = \lambda R(\lambda : A) - I$.

Portanto, $AR(\lambda : A) = R(\lambda : A)A$.

- (iv) $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ comutam, para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Isso ocorre pois, como

$$I = R(\lambda : A)R(\mu : A)(\mu I - A)(\lambda I - A),$$

então,

$$R(\lambda : A) = R(\lambda : A)R(\mu : A)(\mu I - A).$$

Assim, pela observação anterior segue que

$$R(\lambda : A) = (\mu I - A)R(\lambda : A)R(\mu : A).$$

Portanto,

$$R(\mu : A)R(\lambda : A) = R(\lambda : A)R(\mu : A).$$

- (v) A_λ e A_μ comutam, para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Com efeito,

$$A_\lambda A_\mu = (\lambda AR(\lambda : A))(\mu AR(\mu : A)) = (\mu AR(\mu : A))(\lambda AR(\lambda : A)) = A_\mu A_\lambda.$$

(vi) A_λ e e^{tA_λ} comutam, para todo $t \geq 0$, e $\lambda \in \rho(A)$.

De fato,

$$\begin{aligned} A_\lambda e^{tA_\lambda} &= [\lambda AR(\lambda : A)] \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda AR(\lambda : A))^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\lambda AR(\lambda : A))^{n+1}}{n!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda AR(\lambda : A))^n}{n!} \right) [\lambda AR(\lambda : A)] \\ &= e^{tA_\lambda} A_\lambda. \end{aligned}$$

(vii) A_λ e e^{tA_μ} comutam, para todo $t \geq 0$ e $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} A_\lambda e^{tA_\mu} &= \lambda AR(\lambda : A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu AR(\mu : A))^n}{n!} \right) \\ &= \lambda AR(\lambda : A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mu^n A^n R(\mu : A)^n}{n!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu AR(\mu : A))^n}{n!} \right) (\lambda AR(\lambda : A)) \\ &= e^{tA_\mu} A_\lambda. \end{aligned}$$

Lema 2.24. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado com $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Visto que $AR(\lambda : A) = R(\lambda : A)A$, segue pelo Lema 2.21 que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda : A)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

■

Lema 2.25. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado com $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $R(\lambda : A) \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, onde $T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$, $t \geq 0$. Além disso, para todo $x \in X$ e para todo $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$, temos*

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| = \|e^{A_\lambda t} - e^{A_\mu t}\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração: Sabemos que, para todo $\lambda > 0$, A_λ é um operador linear limitado.

Dessa forma, pelo Teorema 2.5, segue que A_λ gera um semigrupo uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, dado por

$$T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA_\lambda)^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0.$$

A seguir mostraremos que $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contração.

Para tanto, note que, para $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)\| &= \|e^{A_\lambda t}\| = \|e^{(\lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I)t}\| \\ &\leq e^{\|\lambda^2 R(\lambda; A)\|t} e^{-\lambda t} \\ &\leq e^{(\lambda^2 \frac{1}{\lambda})t} e^{-\lambda t} = 1, \end{aligned}$$

pois $e^{It}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(It)^n}{n!}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}x = e^t x$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in X$.

Mostremos agora que $\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| = \|e^{A_\lambda t} - e^{A_\mu t}\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|$.

De fato, pela Observação 2.23 segue que

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x &= \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}x \right) \Big|_{s=1} - \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}x \right) \Big|_{s=0} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}x \right) ds \\ &= \int_0^1 \left(tA_\lambda e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}x + e^{tsA_\lambda} (-tA_\mu) e^{t(1-s)A_\mu}x \right) ds \\ &= \int_0^1 e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} [tA_\lambda x - tA_\mu x] ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda}\| \|e^{t(1-s)A_\mu}\| \|t(A_\lambda x - A_\mu x)\| ds \\ &\leq \int_0^1 t \|A_\lambda x - A_\mu x\| ds \\ &= t \|A_\lambda x - A_\mu x\|. \end{aligned}$$

■

O resultado a seguir é o mais importante desta seção, ele nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um operador linear A gere um C_0 -semigrupo.

Teorema 2.26. (Teorema de Hille-Yosida) Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se,

(i) A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;

(ii) $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.

Demonstração: Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $(T(t))_{t \geq 0}$.

Assim, pelo Corolário 2.14 temos que A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Agora, considere $\lambda > 0$ e defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \text{ para todo } x \in X.$$

Desse modo, observe que:

(I) $R(\lambda)x$ está bem definida.

De fato, para todo $t \geq 0$, $\lambda > 0$ e $x \in X$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \|x\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \\ &= \|x\| \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda)} - \frac{e^0}{(-\lambda)} \right] \\ &= \frac{\|x\|}{\lambda} < +\infty. \end{aligned}$$

(II) $R(\lambda) : X \rightarrow X$ é um operador linear, pois $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$.

(III) $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ visto que, para $t \geq 0$ e $\lambda > 0$, temos

$$\|R(\lambda)x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

(IV) $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$, para todo $x \in X$.

Para tanto, considere $x \in X$ e observe que

$$\begin{aligned} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h} \left[T(h) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h+t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_h^0 e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s)x ds + \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s)x ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \right] \\ &= -\frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x ds + \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x ds \\
 &+ \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) R(\lambda)x \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\lambda h} \right) \left(- \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^{0+h} e^{-\lambda s} T(s)x ds \right) \\
 &+ \lambda R(\lambda)x \\
 &= -e^{-\lambda 0} T(0)x + \lambda R(\lambda)x \\
 &= \lambda R(\lambda)x - Ix.
 \end{aligned}$$

Portanto, $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - Ix$.

(V) $R(\lambda) = R(\lambda : A)$ com $\lambda \in \rho(A)$.

Com efeito, visto que $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - Ix$, $\forall x \in X$, temos $I = (\lambda I - A)R(\lambda)$

Agora, seja $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\begin{aligned}
 R(\lambda)(\lambda I - A)x &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax \\
 &= \lambda R(\lambda)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt \\
 &= \lambda R(\lambda)x - A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\
 &= (\lambda I - A)R(\lambda)x \\
 &= x,
 \end{aligned}$$

ou seja, $R(\lambda)$ é a inversa de $(\lambda I - A)$, com $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$.

Logo, $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda : A) = R(\lambda)$.

Consequentemente, como isso é válido para todo $\lambda \in (0, +\infty)$ segue que

$$(0, +\infty) \subset \rho(A) \text{ e } \|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

Resiprocamente, sejam A um operador linear que satisfaz as condições (i) e (ii) do enunciado do Teorema e seja A_λ sua aproximação de Yosida.

Assim, pelo Lema 2.25 temos que A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo de contração $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, com $T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$, e também,

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|,$$

para todo $x \in X$, $t \geq 0$ e $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$.

Além disso, pelo Lema 2.24 sabemos que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

Logo, considerando $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t \in [0, a]$, com $a > 0$, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_\lambda x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2a}$ e $\|A_\mu x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2a}$, para todo $\lambda, \mu > n$.

Desse modo, para todo $\lambda, \mu > N$ e $t \in [0, a]$, temos

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq a(\|A_\lambda x - Ax\| + \|A_\mu x - Ax\|) \\ &< a\left(\frac{\varepsilon}{2a} + \frac{\varepsilon}{2a}\right) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $(T_\lambda(t))_{\lambda>0}$ é uma sequência de Cauchy em X , aliás, como X é um espaço de Banach, essa sequência é convergente.

Defina $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)x$, para $t \in [0, a]$ e $x \in \mathcal{D}(A)$.

Observe que, o limite acima existe para todo $t \geq 0$, mas a convergência é uniforme apenas para t em intervalos limitados de $[0, +\infty)$.

Agora, visto que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, para $x \in X$ dado, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(A)$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Mais ainda, para $\lambda > 0$ fixo, $T_\lambda(t) \in \mathcal{L}(X)$, e assim, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)x_n = T_\lambda(t)x$.

Note que, para λ e μ suficientemente grandes e x_n fixo de modo que $\|x_n - x\|$ é pequeno,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &\leq \|T_\lambda(t)x - T_\lambda(t)x_n\| + \|T_\lambda(t)x_n - T_\mu(t)x_n\| + \|T_\mu(t)x_n - T_\mu(t)x\| \\ &\leq \|T_\lambda(t)\|\|x_n - x\| + \|T_\lambda(t)x_n - T_\mu(t)x_n\| + \|T_\mu(t)\|\|x_n - x\| \\ &\leq 2\|x_n - x\| + \|T_\lambda(t)x_n - T_\mu(t)x_n\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Desse modo, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)x$ existe, para todo $x \in X$.

Defina $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, por $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)x$.

Mostremos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contração com gerador A .

Para isso, observe que:

1. $T(t)x$ é um operador linear, para todo $t \geq 0$.

De fato, sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, assim

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)(\alpha x + y) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)(\alpha x) + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)(y) \\ &= \alpha T(x) + T(y). \end{aligned}$$

2. $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$.

Com efeito, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}\|T(t)x\| &= \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)x \right\| \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|T_\lambda(t)\| \|x\| \\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

3. $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Neste caso, usando a desigualdade do item anterior, obtemos que

$$\|T(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|T(t)x\|\} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|x\|\} = 1.$$

4. $T(0) = I$, pois como $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo, $T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} x = x$, para todo $x \in X$.
5. $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $s, t \geq 0$.

De fato, sejam $x \in X$ e $t, s \in [0, +\infty)$. Note primeiramente que

$$T(s+t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x\| &\leq \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| \\ &\quad + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\leq \|T_\lambda(t)\| \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \|T_\lambda(t)y - T(t)y\|,\end{aligned}$$

sendo $y = T(s)x$.

Assim, como $(\|T_\lambda(t)\| \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \|T_\lambda(t)y - T(t)y\|) \rightarrow 0$, quando $\lambda \rightarrow +\infty$, segue que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x\| = 0$.

Portanto, $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $s, t \geq 0$.

6. $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.

Isso ocorre pois, para $x \in X$, $t > 0$ e $\lambda > 0$, temos

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t)x - T_\lambda(t)x\| + \|T_\lambda(t)x - x\|,$$

com $T_\lambda(t)x \rightarrow T(t)x$, quando $\lambda \rightarrow +\infty$, uniformemente em intervalos limitados de $[0, +\infty)$ e $t \mapsto T_\lambda(t)x$ contínua em $t = 0$.

7. Por fim, mostremos que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Seja $B : \mathcal{D}(B) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Observe que, se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| &\leq \|T_\lambda(s)A_\lambda x - T_\lambda(s)Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \\ &\leq \|T_\lambda(s)\| \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)y - T(s)y\|, \end{aligned}$$

onde $y = Ax$.

Assim, como a expressão à direita da desigualdade acima tende a zero quando $\lambda \rightarrow +\infty$, com essa convergência sendo uniforme para s em intervalos limitados de $[0, +\infty)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{T(h)x - x}{h} &= \frac{1}{h} \left[\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(h)x - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(0)x \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^h T_\lambda(s)A_\lambda x ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^h T(s)Ax ds \right]. \end{aligned}$$

Desso modo,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_0^h T(s)Ax ds \right] = T(0)Ax = Ax.$$

Logo, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $Bx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax$.

Por outro lado, pela primeira parte desta demonstração, sabemos que $(0, +\infty) \subset \rho(B)$. Em particular, $1 \in \rho(B)$. Sabemos também, por hipótese, que $1 \in \rho(A)$ e assim, $R(1 : B) = (I - B)^{-1}$ e $R(1 : A) = (I - A)^{-1}$ existem e pertencem a $\mathcal{L}(X, \mathcal{D}(A))$.

Logo, $(I - A)\mathcal{D}(A) = X$, pois $(I - A)$ é bijetora.

Agora, visto que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $A = B$ em $\mathcal{D}(A)$, segue que $X = (I - A)\mathcal{D}(A) = (I - B)\mathcal{D}(A)$.

Portanto, $\mathcal{D}(A) = (I - B)^{-1}(I - B)\mathcal{D}(A) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(B)$, e consequentemente, $A = B$.

Com isso, segue que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Corolário 2.27. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $(T(t))_{t \geq 0}$. Então, $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.*

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ e considere o operador

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt, \text{ com } x \in X.$$

Observe que:

(i) $R(\lambda)$ está bem definido.

De fato, note que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^r e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &\leq \int_0^r |e^{-\lambda t}| \|T(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \int_0^r e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} \|x\| dt, \quad \forall r > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &= \left\| \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \\ &\leq \|x\| \left(\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} dt \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t}}{\operatorname{Re}(\lambda)} \Big|_0^\alpha \right) \|x\| \\ &= \frac{\|x\|}{\operatorname{Re}(\lambda)} < +\infty. \end{aligned}$$

Desse modo, procedendo analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema de Hille-Yosida, podemos garantir que:

(ii) $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$;

(iii) $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A)$.

Portanto, $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

■

Corolário 2.28. Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e algum $w > 0$, se e somente se,

(i) A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;

(ii) $(w, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$, para todo $\lambda > w$.

Demonstração: Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e algum $w > 0$.

Desse modo, o Corolário 2.14 nos garante que A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Agora, considere $(S(t))_{t \geq 0}$ o C_0 -semigrupo de contração, dado por $S(t) = e^{-wt}T(t)$, $t \geq 0$.

Como o gerador de $(S(t))_{t \geq 0}$ é $B = A - wI$, pelo Teorema de Hille-Yosida temos que $(0, +\infty) \subset \rho(B)$ e $\|R(\lambda : B)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.

Consideremos $\mu \in (w, +\infty)$, assim, como $\mu > w$, existe $\beta > 0$ de modo que $\mu = w + \beta$.

Logo,

$$\mu I - A = (w + \beta)I - A = \beta I - (A - wI) = \beta I - B.$$

Mais ainda, como $\beta > 0$, $\beta \in \rho(B)$ e $\beta I - B$ possui inversa limitada. Assim, $\mu I - A$ possui inversa limitada, e portanto, $\mu \in \rho(A)$.

Além disso, para $\mu > w$ temos

$$\|R(\mu : A)\| = \|(\mu I - A)^{-1}\| = \|(\beta I - B)^{-1}\| = \|R(\beta : B)\| \leq \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\mu - w}.$$

Reciprocamente, suponha que as hipóteses (i) e (ii) do enunciado acima sejam válidas.

Mostremos que A gera um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$.

De fato, seja $B = A - wI$, assim, para $\lambda > 0$, temos

$$\lambda I - B = \lambda I - A + wI = (\lambda + w)I - A.$$

Além disso, como $\lambda + w > w$, por (ii) segue que $((\lambda + w)I - A)^{-1}$ existe e é limitada, ou seja, $(\lambda I - B)^{-1}$ existe e é limitada, e portanto, $\lambda \in \rho(B)$. Mais ainda,

$$\|R(\lambda : B)\| = \|(\lambda I - B)^{-1}\| = \|(\lambda + w)I - A\| = \|R(\lambda + w : A)\| \leq \frac{1}{(\lambda + w) - w} = \frac{1}{\lambda}.$$

Agora, visto que $B = A - wI$, com $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ e A é fechado, temos que B é fechado.

Portanto, para o operador B as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida são satisfeitas, nos garantindo que B é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $(S(t))_{t \geq 0}$.

Assim, tomando $T(t) = e^{wt}S(t)$, $t \geq 0$, concluímos o resultado. ■

2.4 Semigrupos compactos e diferenciáveis

Além dos semigrupos apresentados nas seções anteriores, existem várias outras classes de semigrupos, como por exemplo, os semigrupos compactos e os semigrupos diferenciáveis, os quais apresentaremos brevemente nesta seção pois não são o foco deste trabalho mas, serão úteis para alguns resultados futuros.

Definição 2.29. Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado **compacto** para $t > t_0$ se $T(t)$ é um operador compacto para todo $t > t_0$. Se $t_0 = 0$, $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado **C_0 -semigrupo compacto**.

Observe que quando $T(t)$ é compacto para $t = 0$, como $T(0) = I \in \mathcal{L}(X)$, segue que o espaço X tem dimensão finita.

Definição 2.30. Um C_0 -semigrupo é chamado **diferenciável** para $t > t_0$ se, para todo $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. Caso $t_0 = 0$, dizemos apenas que $(T(t))_{t \geq 0}$ é diferenciável.

A seguir, vamos ver alguns resultados sobre semigrupos diferenciáveis que serão necessários na próxima seção.

Proposição 2.31. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e seja A seu gerador infinitesimal. Então:

- (i) Para $t > nt_0$, $n = 1, 2, \dots$, $T(t) : X \rightarrow \mathcal{D}(A^n)$ e $T^n(t) = A^n T(t)$ é um operador linear limitado;
- (ii) Para $t > nt_0$, $n = 1, 2, \dots$, $t \mapsto T^{(n-1)}(t)$ é contínua na topologia do operador uniforme.

Demonstração:

- (i) Dados $t > t_0$ e $x_0 \in X$, consideremos primeiramente o caso em que $n = 1$.

Como $s \mapsto T(s)x$ é diferenciável em $s = t$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) T(t)x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T'(t)x,$$

o que garante que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $AT(t)x = T'(t)x$.

Além disso, do Corolário 2.14 temos que A é fechado e então, como $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, $AT(t)$ é um operador fechado. Logo, como $AT(t)$ está definido em todo X quando $t > t_0$, o Teorema do gráfico fechado nos permite concluir que $AT(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t > t_0$. Isso completa a prova do item (i) no caso em que $n = 1$.

Suponha agora que a propriedade é válida para $n > 1$ e tomemos $t > (n+1)t_0$. Seja $s > nt_0$ tal que $t - s > t_0$. Então

$$T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x = T(t-s)A^n T(s)x, \quad x \in X.$$

Note que o lado direito da igualdade acima é diferenciável em t , pois $t - s > t_0$, ou seja, $t \mapsto T(t)x$ é $(n+1)$ -vezes diferenciável e, para todo $x \in X$ e $t > (n+1)t_0$, temos

$$T^{(n+1)}(t)x = AT(t-s)A^n T(s)x,$$

isto é, $T(t-s)A^nT(s)x = A^nT(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e assim, $T(t)(X) \subset \mathcal{D}(A^{n+1})$ e $T^{(n+1)}(t)x = A^{n+1}T(t)x$ para todo $x \in X$ e todo $t > (n+1)t_0$.

Procedendo como no caso em que $n = 1$, obtemos que $A^{n+1}T(t)$ é um operador fechado com domínio X . Portanto $A^{n+1}T(t)$ é limitado para todo $t > (n+1)t_0$.

- (ii) Por conta do Teorema 2.11, podemos assumir que existe $\tilde{M} > 0$ tal que $\|T(t)\| < \tilde{M}$ para todo $t \in [0, 1]$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $nt_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$. Então, de (i), segue que, para $s \in [t_1, t_1 + 1]$ e $x \in X$,

$$T^{(n)}(s)x = A^nT(s)x = T(s-t_1)A^nT(t_1)x,$$

garantindo que a função $s \mapsto T^{(n)}(s)x$ é contínua em $[t_1, t_2]$. Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} \|T^{(n-1)}(t_2)x - T^{(n-1)}(t_1)x\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} T^{(n-1)}(s)x ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} T^{(n)}(s)x ds \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|T(s-t_1)A^nT(t_1)x\| ds \\ &\leq \tilde{M} \|A^nT(t_1)\| (t_2 - t_1) \|x\|. \end{aligned}$$

Note que, fazendo $t_1 = t$ e $t_2 = t + h$, para algum $0 < h < 1$ a desigualdade acima nos garante a continuidade à direita da função $s \mapsto T^{(n-1)}(s)$ no ponto $t > nt_0$ e isso, com relação a norma da topologia uniforme.

Analogamente, obtem-se a continuidade à esquerda.

■

Proposição 2.32. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo diferenciável e A seu gerador infinitesimal. Então*

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Demonstração: O caso em que $n = 1$ segue do item (i) da Proposição 2.31. Suponhamos que a propriedade é válida para $n > 1$ e tomemos $t > s$.

Assim,

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n = T(t-s) \left(AT\left(\frac{s}{n}\right) \right)^n.$$

Derivando a igualdade acima com relação a t segue que

$$T^{(n+1)}(t) = AT(t-s) \left(AT\left(\frac{s}{n}\right) \right)^n.$$

Fazendo, em particular, $s = \frac{nt}{n+1}$, obtemos que

$$\begin{aligned} T^{(n+1)}(t) &= AT\left(t - \frac{nt}{n+1}\right) \left[AT\left(\frac{1}{n} \frac{nt}{n+1}\right) \right]^n \\ &= AT\left(\frac{t}{n+1}\right) \left[AT\left(\frac{t}{n+1}\right) \right]^n \\ &= \left[AT\left(\frac{t}{n+1}\right) \right]^{n+1}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do resultado. ■

2.5 Semigrupos analíticos

Nesta seção iremos estudar a Teoria de Semigrupos Analíticos, que é uma generalização do C_0 -semigrupo a um setor do plano complexo. Para isso, vamos considerar $0 < \alpha \leq \pi$ e definir o seguinte setor no plano complexo

$$\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}; |arg(z)| < \alpha, z \neq 0\}.$$

Definição 2.33. Uma família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ de operadores lineares limitados, com $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, é um **semigrupo analítico** em $\Delta(\alpha)$ se:

- (i) $T(0) = I$;
- (ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \Delta(\alpha)$;
- (iii) $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$;
- (iv) $z \mapsto T(z)$ é uma função analítica em $\Delta(\alpha)$.

Proposição 2.34. Se $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico, com $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, então existem $M > 1$ e $w \geq 0$ tais que, para todo $z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$,

$$\|T(z)\| \leq M e^{wRe(z)}.$$

Demonstração: (14, Theorem 2.2.6, p. 31).

Observe que um semigrupo analítico restrito ao conjunto $[0, +\infty) \subset \Delta(\alpha) \cup \{0\}$ é um C_0 -semigrupo.

A seguir apresentaremos um resultado que nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um C_0 -semigrupo admita uma extensão analítica em $\Delta(\alpha)$ para algum α tal que $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

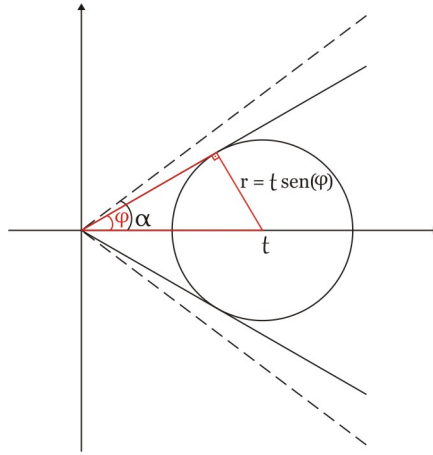
Teorema 2.35. Para que um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ admita uma extensão analítica em $\Delta(\alpha)$, para algum α tal que $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, é necessário e suficiente que esse semigrupo seja diferenciável e exista uma constante $N \geq 1$ tal que

$$\|tAT(t)\| \leq N, \quad 0 < t \leq 1. \quad (2.2)$$

Demonstração: Suponha que $(T(t))_{t \geq 0}$ admite uma extensão analítica no setor $\Delta(\alpha)$ e que A seja o seu gerador infinitesimal.

Assim, para $t > 0$ dado e $r = t \sin(\varphi)$, com $0 < \varphi < \alpha$ fixo, temos que o círculo de centro em t e raio r está totalmente contido na região $\Delta(\alpha)$, como podemos ver na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Região onde $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é analítico.



Fonte: elaborado pelo autor.

Desse modo, pela Fórmula integral de Cauchy temos

$$AT(t) = \frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=t \sin \varphi} \frac{T(z)}{(z-t)^2} dz.$$

Além disso, pela Proposição 2.34, existem $M > 1$ e $w \geq 0$ tais que, para todo $z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$, $\|T(z)\| \leq M e^{w \operatorname{Re}(z)}$.

Logo, se $0 < t \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \|AT(t)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=t \sin(\varphi)} \frac{T(z)}{(z-t)^2} dz \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{T(t + t \sin(\varphi)e^{i\theta})}{(t \sin(\varphi)e^{i\theta})^2} t \sin(\varphi) i e^{i\theta} d\theta \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \frac{T(t + t \sin(\varphi)e^{i\theta})}{t \sin(\varphi)e^{i\theta}} \right\| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\|T(t + t \sin(\varphi)e^{i\theta})\|}{t \sin(\varphi)} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M}{2\pi t \sin(\varphi)} \int_0^{2\pi} e^{wt(1+\sin(\varphi)\cos(\theta))} d\theta \\
&\leq \frac{Me^{2wt}}{2\pi t \sin(\varphi)} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{Me^{2wt}}{t \sin(\varphi)}.
\end{aligned}$$

Desse modo, tomando $N = \frac{Me^{2w}}{\sin(\varphi)}$, para $0 < t \leq 1$, obtemos que

$$\|tAT(t)\| \leq \frac{tMe^{2w}}{t \sin(\varphi)} = N.$$

Reciprocamente, suponha que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo diferenciável, com gerador infinitesimal A e $\|tAT(t)\| \leq N$, para todo $0 < t \leq 1$, e algum $N \geq 1$.

Dessa forma, como $t \mapsto T(t)$ é diferenciável, pelas Proposições 2.31 e 2.32 segue que

$$T^{(n)}(t) = A^n T(t) \text{ e}$$

$$T^{(n)}(t) = \left[AT\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n = \left[T'\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n,$$

para todo $t > 0$ e $n = 1, 2, \dots$.

Além disso, para $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $0 < \frac{t}{n} \leq 1$, temos

$$\left\| \frac{t}{n} AT\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq N,$$

ou seja, $\left\| AT\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq N \frac{n}{t}$.

Desse modo, segue que

$$\|A^n T(t)\| = \|T^{(n)}(t)\| = \left\| \left[AT\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \right\| \leq \left\| AT\left(\frac{t}{n}\right) \right\|^n \leq \frac{N^n n^n}{t^n},$$

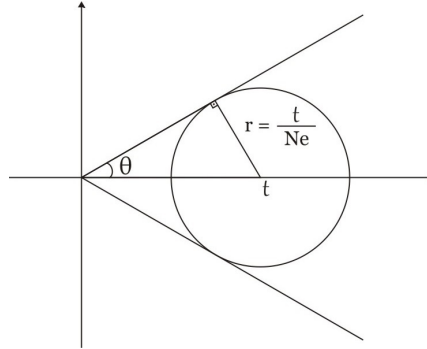
e assim,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{|z-t|^n}{n!} A^n T(t) \right\| &\leq \frac{|z-t|^n}{n!} \frac{N^n n^n}{t^n} \\
&\leq \frac{|z-t|^n}{t^n} N^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!} \right) \\
&= \frac{|z-t|^n}{t^n} N^n e^n \\
&= \left(\frac{|z-t|}{\frac{t}{Ne}} \right)^n.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo, para $|z - t| < \frac{t}{Ne}$, $\frac{|z - t|}{\frac{t}{Ne}} < 1$, e então, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - t|}{\frac{t}{Ne}} \right)^n$ é convergente, mais ainda, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - t|^n}{n!} A^n T(t)$ é convergente para z no círculo de raio $\frac{t}{Ne}$ e centro em t .

Agora, seja θ o ângulo formado pela reta que passa na origem e é tangente ao círculo de convergência da série, como na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Círculo de convergência da série.



Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que, z pertencerá a região setorial acima quando $\sin(|\arg(z)|) < \sin(\theta) = \frac{1}{Ne}$, isto é, $|\arg(z)| < \arcsen(\frac{1}{Ne})$.

Considere $\alpha = \arcsen(\frac{1}{Ne})$ e $\Delta(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0, |\arg(z)| < \arcsen(\frac{1}{Ne}) \right\}$.

Sejam $z \in \Delta(\alpha)$, r_1 a reta passando pela origem e por z , e r_2 a reta perpendicular a r_1 e passando por z .

Tomemos também t como sendo o ponto de interseção da reta r_2 e o eixo positivo.

Desse modo, temos

$$t = \frac{|z|}{\cos(\arg(z))} \text{ e } |z - t| = t \sin(\arg(z)).$$

Assim, z pertence ao círculo de centro t e raio $\frac{t}{Ne}$, ou seja, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - t|^n}{n!} A^n T(t)$ é convergente.

Agora, defina o operador $\tilde{T}(z) : X \rightarrow X$ por

$$\tilde{T}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - t)^n}{n!} A^n T(t), \text{ para } z \in \Delta(\alpha),$$

e, para $z = 0$ defina $\tilde{T}(0) = I$.

A seguir, mostraremos que $(\tilde{T}(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico que estende $(T(t))_{t \geq 0}$.

De fato, por definição temos que $\tilde{T}(0) = I = T(0)$. Já para $z \in (0, +\infty)$, segue que

$$t = \frac{|z|}{\cos(\arg(z))} = \frac{z}{\cos(0)} = z.$$

Logo,

$$\tilde{T}(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t)^n}{n!} A^n T(t) = T(t), \text{ para todo } z \geq 0.$$

Portanto, $(\tilde{T}(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é uma extensão de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Além disso, observe que $\tilde{T}(z) \in \mathcal{L}(X)$ pois, pela Proposição 2.31, $T^{(n)}(t) = A^n T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e cada $t > 0$. Assim, $\tilde{T}(z)$, com $z \in \Delta(\alpha)$, é limite uniforme de uma sequência de elementos em $\mathcal{L}(X)$, logo, visto que $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach, concluímos que $\tilde{T}(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$.

Observe ainda que:

- (i) $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, pois $\tilde{T}(z)$ é uma série de potências.
- (ii) $\tilde{T}(z_1 + z_2) = \tilde{T}(z_1)\tilde{T}(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \Delta(\alpha)$.

De fato, sejam $z_1, z_2 \in \Delta(\alpha)$. Tomemos t_1 e t_2 , $t_1 = \frac{|z_1|}{\cos(\arg(z_1))}$ e $t_2 = \frac{|z_2|}{\cos(\arg(z_2))}$, como na construção anterior. Assim, temos $|z_1 - t_1| \leq \frac{t_1}{Ne}$ e $|z_2 - t_2| \leq \frac{t_2}{Ne}$.

Desse modo,

$$|(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2)| \leq |z_1 - t_1| + |z_2 - t_2| \leq \frac{t_1}{Ne} + \frac{t_2}{Ne} = \frac{t_1 + t_2}{Ne},$$

isto é, $z_1 + z_2$ pertence ao círculo de centro $t_1 + t_2$ e raio $\frac{t_1 + t_2}{Ne}$, o que nos garante a convergência da série para $z_1 + z_2$.

Mais ainda, como

$$\frac{[(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2)]^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{(z_1 - t_1)^{n-i} (z_2 - t_2)^i}{i!(n-i)!},$$

temos

$$\begin{aligned} \tilde{T}(z_1 + z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2)]^n A^n T(t_1 + t_2)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=0}^n \frac{(z_1 - t_1)^{n-i} (z_2 - t_2)^i}{i!(n-i)!} \right) A^n T(t_1) T(t_2) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \frac{(z_1 - t_1)^{n-i} A^{n-i}}{(n-i)!} \frac{(z_2 - t_2)^i A^i}{i!} T(t_1) T(t_2) \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - t_1)^n A^n}{n!} T(t_1) \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z_2 - t_2)^i A^i}{i!} T(t_2) \right) \\ &= \tilde{T}(z_1) \tilde{T}(z_2). \end{aligned}$$

- (iii) $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)x = x$, para todo $x \in X$ e $z \in \Delta(\alpha)$.

Com efeito, como $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, obtemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{T}(z) = \tilde{T}(z_0), \text{ para todo } z_0 \in \Delta(\alpha).$$

Em particular, para todo $t > 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z+t) = \tilde{T}(t) = T(t)$.

Assim,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)T(t) = \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z+t) = T(t), \text{ para todo } t > 0.$$

Logo, para todo $x \in X$ e $t > 0$,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)T(t)x = T(t)x.$$

Agora, seja $X_0 = \bigcup_{0 < t \leq 1} T(t)X$. Assim, segue que $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)y = y$, para todo $y \in X_0$.

Mostraremos a seguir que podemos estender o limite $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)y = y$, para todo $y \in X$.

Para tanto, provaremos que X_0 é denso em X e que $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é limitada em uma região $\Sigma(v) \subset \Delta(\alpha)$.

Dado, $x \in X$, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo sabemos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$.

Em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\frac{1}{n})x = x$, ou seja, x é o limite da sequência $(T(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ em X_0 , e assim, $X \subset \overline{X_0}$.

Logo, como $X_0 \subset X$ temos que $X = \overline{X_0}$.

Analisemos ainda a limitação de $z \mapsto \tilde{T}(z)$ no conjunto

$$\Sigma(v) = \left\{ z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re}(z) < \frac{(Ne)^2 - v^2}{(Ne)^2}, |\arg(z)| < \arcsen\left(\frac{v}{Ne}\right), 0 < v < 1 \right\}.$$

Para isso, note que, como $\alpha = \arcsen\left(\frac{1}{Ne}\right)$, temos $\Sigma(v) \subset \Delta(\alpha)$.

Dado $z \in \Delta(\alpha)$, da construção inicial, segue que

$$t = \frac{|z|}{\cos(\arg(z))} \text{ e } \frac{|z-t|}{t} = \sin(\arg(z)).$$

Em particular, se $z \in \Sigma(v)$, então $|\arg(z)| < \arcsen\left(\frac{v}{Ne}\right)$ e assim,

$$\frac{|z-t|}{t} < \sin\left(\arcsen\left(\frac{v}{Ne}\right)\right) = \frac{v}{Ne}, \quad (2.4)$$

ou seja, $\frac{|z-t|}{t}Ne < v$.

Por outro lado, como $\sin(\arg(z)) < \frac{v}{Ne}$ temos que $[\sin(\arg(z))]^2 < \frac{v^2}{(Ne)^2}$, e então,
 $1 - [\cos(\arg(z))]^2 < \frac{v^2}{(Ne)^2}$, ou ainda,

$$[\cos(\arg(z))]^2 > 1 - \frac{v^2}{(Ne)^2} = \frac{(Ne)^2 - v^2}{(Ne)^2}.$$

Além disso, como $Re(z) = |z| \cos(\arg(z)) = t[\cos(\arg(z))]^2$, temos

$$t = \frac{Re(z)}{\cos^2(\arg(z))} < \frac{Re(z)}{\frac{(Ne)^2 - v^2}{(Ne)^2}} < 1.$$

Desse modo, por (3.3) e (3.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(z)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| \\ &\leq \|T(t)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|T(s)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|z-t|Ne}{t} \right)^n \\ &\leq C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \\ &= C_1 + \frac{v}{1-v} \\ &= C_2, \end{aligned}$$

onde, $C_1 = \sup_{0 \leq s \leq 1} \|T(s)\| < \infty$ e $C_2 = C_1 + \frac{v}{1-v}$.

Portanto, $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é limitada em $\Sigma(v)$.

Por fim, dado $x \in X$, como $X_0 = \overline{X}$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X_0 de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{C_2 + 2}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Fixando $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, sabemos que, para $z \in \Delta(\alpha)$, $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)x_{n_1} = x_{n_1}$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que, se $z \in \Delta(\alpha)$ e $|z| < \delta$, então

$$\|\tilde{T}(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| < \frac{\varepsilon}{C_2 + 2}.$$

Consequentemente, se $z \in \Sigma(v)$ e $|z| < v$, temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}(z)x - x\| &\leq \|\tilde{T}(z)x - \tilde{T}(z)x_{n_1}\| + \|\tilde{T}(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - x_n\| \\
&\leq \|\tilde{T}(z)\| \|x - x_{n_1}\| + \frac{\varepsilon}{C_2 + 2} + \frac{\varepsilon}{C_2 + 2} \\
&\leq C_2 \frac{\varepsilon}{C_2 + 2} + \frac{2\varepsilon}{C_2 + 2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

garantindo que $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)x = x$, para todo $x \in X$.

Portanto, concluímos que $(\tilde{T}(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico.

■

Vamos agora determinar condições para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de classe C_0 , para isso, precisaremos de algumas definições e resultados preliminares.

Definição 2.36. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que A é de classe (θ, M) , onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e $M > 0$, e escrevemos $A \in (\theta, M)$, se:*

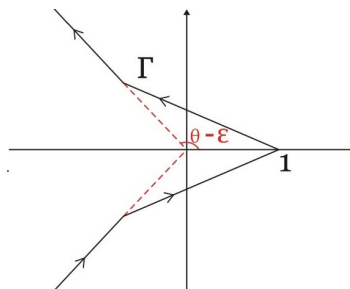
- (i) A é fechado e seu domínio é denso em X ;
- (ii) $\Delta(\theta) = \{z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| < \theta\} \subset \rho(A)$;
- (iii) $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$, para todo $\lambda \in \Delta(\theta)$.

Sejam $A \in (\theta, M)$ e $\varepsilon > 0$ de modo que $0 < 2\varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$. Consideremos Γ como sendo a curva no plano complexo composta pelas semiretas

$$\tilde{r}e^{i(\theta-\varepsilon)}, \tilde{r}e^{-i(\theta-\varepsilon)}, \text{ onde } 1 \leq \tilde{r} < +\infty,$$

e pelos segmentos que ligam os pontos $e^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ ao ponto $z = 1$, orientada de $-\infty e^{i(\theta-\varepsilon)}$ para $+\infty e^{-i(\theta-\varepsilon)}$, como ilustrado na figura a seguir.

Figura 2.3 – Curva Γ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, seja $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$. Assim, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \pi$ e então

$$\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |\arg(z)| < \alpha\} \subset \Delta(\theta) \subset \rho(A).$$

Consideremos também a curva $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| < r\}$, com $r \geq 1$, e observe que

$$\Gamma_r \subset \Gamma \subset \Delta(\theta) \subset \rho(A).$$

Mais ainda, as funções $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$, com $z \in \Delta(\alpha)$, e $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$ são contínuas para $\lambda \in \Gamma_r$, sendo que a continuidade da segunda função ocorre pois, como

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A), \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A),$$

dados $\lambda, \mu \in \Gamma_r$, obtemos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda : A) - R(\mu : A)\| &\leq |\mu - \lambda| \|R(\lambda : A)\| \|R(\mu : A)\| \\ &\leq |\mu - \lambda| \frac{M^2}{|\lambda||\mu|}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \|R(\lambda : A) - R(\mu : A)\| \leq \lim_{\mu \rightarrow \lambda} |\mu - \lambda| \frac{M^2}{|\lambda||\mu|} = 0,$$

garantindo a continuidade de $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$, para $\lambda \in \Gamma_r$.

Desse modo, para cada $r \geq 1$ e $z \in \Delta(\alpha)$ podemos definir a família $T_r(z) : X \rightarrow X$ por

$$T_r(z)x = \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda.$$

Note que, $T_r(z)$ é um operador linear para todo $z \in \Delta(\alpha)$.

Mostremos que $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_r(z)x\| \leq C\|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

Para tanto, observe inicialmente que:

(i) Para todo $z \in \Delta(\alpha)$ e $\lambda \in \Delta(\theta)$ temos

$$\|e^{\lambda z} R(\lambda : A)\| = |e^{\lambda z}| \|R(\lambda : A)\| \leq e^{Re(\lambda z)} \frac{M}{|\lambda|};$$

(ii) Para todo $z, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda z = |\lambda||z|e^{i(\arg(\lambda) + \arg(z))}$ e mais,

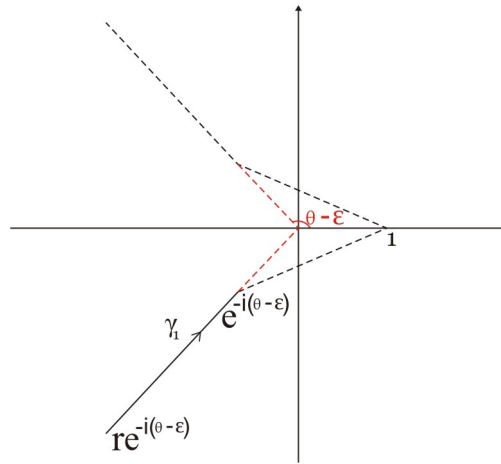
$$Re(\lambda z) = |\lambda z| \cos(\arg(\lambda) + \arg(z)) \leq |\lambda||z|.$$

Agora, para analisarmos $\|T_r(z)\|$ vamos dividir a curva Γ_r em quatro partes: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 , de modo que

$$T_r(z)x = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda + \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda + \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda + \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right).$$

- (I) Seja $\tilde{\gamma}_1 : [1, r] \rightarrow \Gamma_r$ definida por $\tilde{\gamma}_1(t) = te^{-i(\theta-\varepsilon)}$. E considere γ_1 como sendo $\tilde{\gamma}_1$ percorrida no sentido contrário, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 2.4 – Curva γ_1 .



Fonte: elaborado pelo autor.

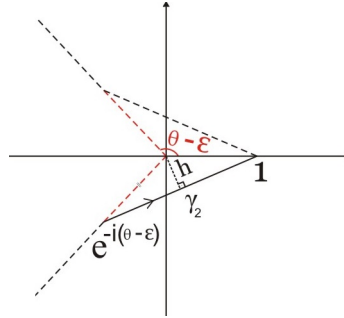
Então,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| &= \left\| - \int_{\tilde{\gamma}_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| \\ &= \left\| \int_1^r e^{(te^{-i(\theta-\varepsilon)})z} R(te^{-i(\theta-\varepsilon)} : A)x e^{-i(\theta-\varepsilon)} dt \right\| \\ &\leq \int_1^r |e^{(te^{-i(\theta-\varepsilon)})z}| \|R(te^{-i(\theta-\varepsilon)} : A)\| \|x\| |e^{-i(\theta-\varepsilon)}| dt \\ &\leq \int_1^r \frac{e^{\operatorname{Re}(te^{-i(\theta-\varepsilon)}z)} M \|x\|}{|te^{-i(\theta-\varepsilon)}|} dt \\ &\leq \int_1^r \frac{e^{|t||z|} M \|x\|}{|t|} dt \\ &\leq M \|x\| \int_1^r e^{t|z|} dt \\ &= M \|x\| \left(\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right) \\ &= C_1 \|x\|, \end{aligned}$$

onde $C_1 = M \left(\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right)$.

- (II) Seja γ_2 a curva dada pelo segmento de extremos $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ e 1, orientada de $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ para 1, como na figura abaixo.

Figura 2.5 – Curva γ_2 .



Fonte: elaborado pelo autor.

Seja h a altura do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$. Note que $0 < h < 1$. Além disso, para $\lambda \in \gamma_2$, temos $h \leq |\lambda| \leq 1$.

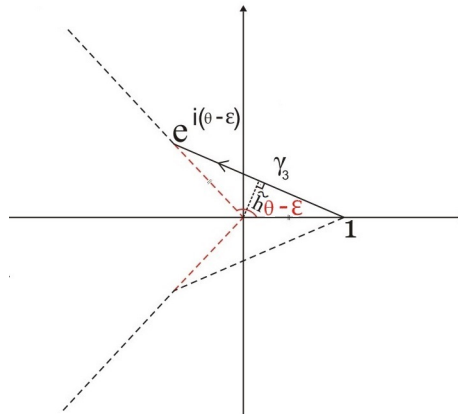
Assim,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma_2} \|e^{\lambda z} R(\lambda : A)x\| d|\lambda| \\
 &\leq \int_{\gamma_2} \frac{e^{Re(\lambda z)} M\|x\|}{|\lambda|} d|\lambda| \\
 &\leq M\|x\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{|\lambda||z|}}{|\lambda|} d|\lambda| \\
 &\leq M\|x\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{|z|}}{h} d|\lambda| \\
 &= \frac{Me^{|z|}\|x\|}{h} \int_{\gamma_2} d|\lambda| \\
 &= C_2\|x\|,
 \end{aligned}$$

onde $C_2 = \frac{Me^{|z|}|\gamma_2|}{h}$ e $|\gamma_2|$ é o comprimento da curva γ_2 .

- (III) Seja γ_3 o segmento de extremo 1 e $e^{i(\theta-\varepsilon)}$ orientado de 1 para $e^{i(\theta-\varepsilon)}$, como ilustrado na Figura 2.6.

Desse modo, tomando $\tilde{h}$ como a altura do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $e^{i(\theta-\varepsilon)}$, temos $0 < \tilde{h} < 1$ e, para $\lambda \in \gamma_3$, $\tilde{h} \leq |\lambda| \leq 1$.

Figura 2.6 – Curva γ_3 .

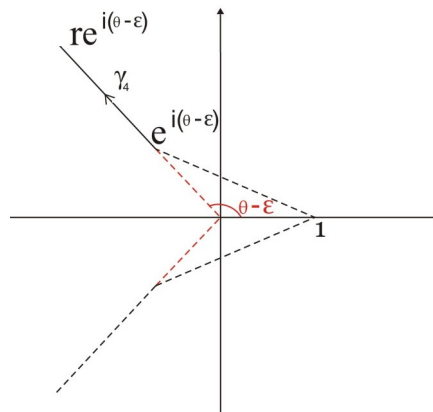
Fonte: elaborado pelo autor.

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma_3} \|e^{\lambda z} R(\lambda : A)x\| d|\lambda| \\
 &\leq \int_{\gamma_3} \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda z)} M \|x\|}{|\lambda|} d|\lambda| \\
 &\leq M \|x\| \int_{\gamma_3} \frac{e^{|z|}}{h} d|\lambda| \\
 &= \frac{M e^{|z|} \|x\|}{h} \int_{\gamma_3} d|\lambda| \\
 &= C_3 \|x\|,
 \end{aligned}$$

onde $C_3 = \frac{M e^{|z|} |\gamma_3|}{h}$ e $|\gamma_3|$ é o comprimento da curva γ_3 .

(IV) Seja $\gamma_4 : [1, r] \rightarrow \Gamma_r$ a curva definida por $\gamma_4(t) = t e^{i(\theta-\varepsilon)}$, como ilustrado na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Curva γ_4 .

Fonte: elaborado pelo autor.

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda \right\| &= \left\| \int_1^r e^{(te^{i(\theta-\varepsilon)})z} R(te^{i(\theta-\varepsilon)} : A) x e^{i(\theta-\varepsilon)} dt \right\| \\
&\leq \int_1^r |e^{(te^{i(\theta-\varepsilon)})z}| \|R(te^{i(\theta-\varepsilon)} : A)\| \|x\| e^{i(\theta-\varepsilon)} |dt| \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{\operatorname{Re}(te^{i(\theta-\varepsilon)}z)} M \|x\|}{|te^{i(\theta-\varepsilon)}|} dt \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{|t||z|} M \|x\|}{|t|} dt \\
&\leq M \|x\| \int_1^r e^{t|z|} dt \\
&= M \|x\| \left(\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right) \\
&= C_1 \|x\|.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $C = 4 \max \left\{ \frac{C_j}{2\pi}, j = 1, 2, 3 \right\}$ temos, para todo $x \in X$, que

$$\begin{aligned}
\|T_r(z)x\| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \left(\left\| \int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda \right\| + \left\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda \right\| \right. \\
&\quad \left. + \left\| \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda \right\| + \left\| \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} (C_1 \|x\| + C_2 \|x\| + C_3 \|x\| + C_1 \|x\|) \\
&\leq C \|x\|,
\end{aligned}$$

ou seja, $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$.

Agora, considere $T(z) : X \rightarrow X$ definida por

$$T(z)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda, \text{ para } z \in \Delta(\alpha), \text{ e } T(0) = I.$$

Note que, $T(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} T_r(z)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$. Mais ainda, como $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, e a convergência acima é uniforme, obtemos que $T(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$.

A seguir, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados posteriormente quando formos provar que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico.

Lema 2.37. *Sejam $z \in \Delta(\alpha)$, $A \in (\theta, M)$ e Γ como descrita anteriormente, então:*

$$(i) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0, \text{ para todo } \lambda' \text{ situado à direita de } \Gamma;$$

$$(ii) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i;$$

$$(iii) \int_{\Gamma} e^{\lambda z} d\lambda = 0;$$

$$(iv) \int_{\Gamma} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda = 0;$$

$$(v) \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\lambda \eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda \eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda, \text{ onde } \eta = \frac{z}{|z|}.$$

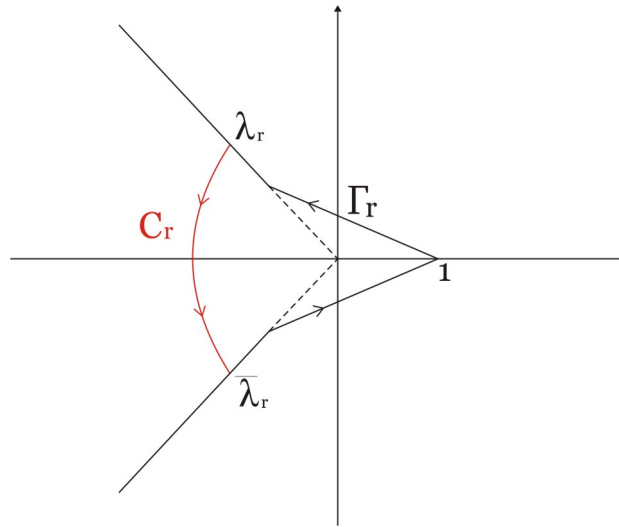
Demonstração:

- (i) Para provarmos o primeiro item do enunciado, dado $r \geq 1$, consideremos $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma, |\lambda| < r\}$, $\lambda_r = r e^{i(\theta-\varepsilon)}$, $\bar{\lambda}_r = r e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ e

$$C_r = \{\eta \in \mathbb{C}, |\eta| = r, \text{ com } \eta \text{ à esquerda de } \Gamma_r \text{ e com extremos } \lambda_r \text{ e } \bar{\lambda}_r\},$$

como na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Curva $\Gamma_r \cup C_r$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Seja $\lambda' \in \mathbb{C}$ à direita de Γ . Observe que

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda.$$

Além disso, como a aplicação $\lambda \mapsto \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}$ é analítica sobre Γ_r e na região à esquerda de Γ_r , pelo Teorema de Cauchy, temos

$$\int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0,$$

$$\text{ou seja, } \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = - \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda.$$

Desse modo,

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = - \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda.$$

Por outro lado, observe que, como $z \in \Delta(\alpha)$, $-\alpha \leq \arg(z) \leq \alpha$, e mais, para $\lambda \in C_r$, temos $\lambda = re^{i\varphi}$, onde $\theta - \varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi - (\theta - \varepsilon)$.

Assim, como $\arg(\lambda z) = \arg(\lambda) + \arg(z) = \varphi + \arg(z)$, obtemos que

$$\theta - \varepsilon - \alpha \leq \varphi + \arg(z) \leq 2\pi - \theta + \varepsilon + \alpha,$$

e então, visto que $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, concluímos que

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \varphi + \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon.$$

Logo,

$$\cos(\varphi + \arg(z)) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\varepsilon) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\varepsilon) = -\sin(\varepsilon),$$

onde $-\sin(\varepsilon) \leq 0$ pois, da escolha de ε , temos $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$.

Mais ainda, se $\lambda = re^{i\varphi}$, então $|e^{\lambda z}| = e^{Re(re^{i\varphi}z)}$ e como

$$Re(re^{i\varphi}z) = r|z|\cos(\varphi + \arg(z)) \leq -r|z|\sin(\varepsilon),$$

segue que

$$|e^{\lambda z}| = |e^{re^{i\varphi}z}| \leq e^{-r|z|\sin(\varepsilon)}.$$

Agora, defina $m_r = \inf_{\lambda \in C_r} |\lambda - \lambda'|$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda \right| &= \left| \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{e^{(re^{i\varphi})z} rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - \lambda'} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{|e^{(re^{i\varphi})z}| r |i| |e^{i\varphi}|}{|(re^{i\varphi} - \lambda')|} d\varphi \\ &\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{re^{-r|z|\sin(\varepsilon)}}{m_r} d\varphi \\ &= \frac{2r(\pi - (\theta - \varepsilon))}{m_r e^{r|z|\sin(\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda \right| = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda \right| \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{2r(\pi - (\theta - \varepsilon))}{m_r e^{r|z|\sin(\varepsilon)}} = 0,$$

pois, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{m_r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{2r(\pi - (\theta - \varepsilon))}{e^{r|z| \operatorname{sen}(\varepsilon)}} = 0.$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0.$$

(ii) Seja R_1 a região limitada por $\Gamma_r \cup C_r$. Como a aplicação $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$ é analítica em R_1 , pela Fórmula integral de Cauchy temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = e^{0z} = 1,$$

isto é,

$$\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i - \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda$$

Por outro lado, observe que, como $r \geq 1$, $\frac{1}{r} \leq 1$, e assim

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda \right| &= \left| \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{e^{(re^{i\varphi})z} rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} r |e^{(re^{i\varphi})z}| d\varphi \\ &\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} r e^{-r|z| \operatorname{sen}(\varepsilon)} d\varphi \\ &= r e^{-r|z| \operatorname{sen}(\varepsilon)} [2\pi - (\theta - \varepsilon) - (\theta - \varepsilon)] \\ &= \frac{2r(\pi - (\theta - \varepsilon))}{e^{r|z| \operatorname{sen}(\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Desse modo, $\int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow +\infty$.

Então,

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(2\pi i - \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda \right) = 2\pi i.$$

(iii) Seja R_1 a região considerada no item anterior. Assim, como a aplicação $\lambda \mapsto e^{\lambda}$ é analítica em R_1 , pelo Teorema de Cauchy temos que

$$\int_{\Gamma_r \cup C_r} e^{\lambda z} d\lambda = 0,$$

e então,

$$\int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} d\lambda = - \int_{C_r} e^{\lambda z} d\lambda.$$

Além disso, procedendo como nos itens anteriores, obtemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} e^{\lambda z} d\lambda \right| &= \left| \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} e^{(re^{i\varphi})z} r i e^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} r |e^{(re^{i\varphi})z}| d\varphi \\ &\leq \frac{2r(\pi - (\theta - \varepsilon))}{e^{r|z|\sin(\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

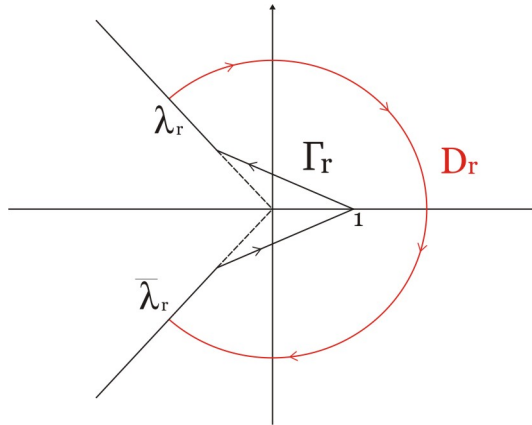
Desse modo, $\int_{C_r} e^{\lambda z} d\lambda \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda z} d\lambda = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} d\lambda = 0.$$

- (iv) Seja R_2 a região delimitada pelo arco D_r , que percorre a circunferência de centro na origem e raio r do ponto λ_r até $\bar{\lambda}_r$ e por Γ_r , como ilustrado na figura abaixo.

Figura 2.9 – Região R_2



Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que a aplicação $\lambda \mapsto \frac{R(\lambda : A)}{\lambda}$ é analítica em R_2 .

De fato, como $A \in (\theta, M)$, A satisfaz as condições do Teorema de Hille-Yosida, e assim

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \text{ para todo } x \in X,$$

onde $(T(t))_{t \geq 0}$ é o C_0 -semigrupo gerado por A .

Desse modo, temos que $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$ é n -vezes diferenciável, e portanto, $\lambda \mapsto \frac{R(\lambda : A)}{\lambda}$ é analítica em R_2 .

Logo, pelo Teorema de Cauchy, segue que

$$\int_{D_r \cup \Gamma_r} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda = 0,$$

Desse modo, a aplicação $\lambda \mapsto \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right)$, onde $\eta = \frac{z}{|z|}$, é analítica sobre o contorno e no interior de $\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1^-$.

Logo, pelo Teorema de Cauchy, temos

$$\int_{\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1^-} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda = - \int_{|z|\Gamma_1^-} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda = \int_{|z|\Gamma_1} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda &= \int_{|z|\Gamma_1} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda \\ &= \int_{\Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda \\ &= \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda\eta}}{|\lambda|} R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} : A\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Para o caso em que $|z| < 1$ o resultado segue de modo análogo ao que foi feito no caso anterior, porém, a curva $|z|\Gamma$ estará à esquerda de Γ , e quando $|z| = 1$ o resultado é trivial. ■

Lema 2.38. Dado $\delta > 0$, seja Γ' a curva no plano complexo definida por

$$\Gamma' = \{\lambda' \in \mathbb{C}; \lambda' = \lambda + \delta, \lambda \in \Gamma\},$$

com a orientação induzida por Γ . Então, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, temos:

- (i) $\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda;$
- (ii) $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z},$ para todo λ situado à esquerda de Γ' .

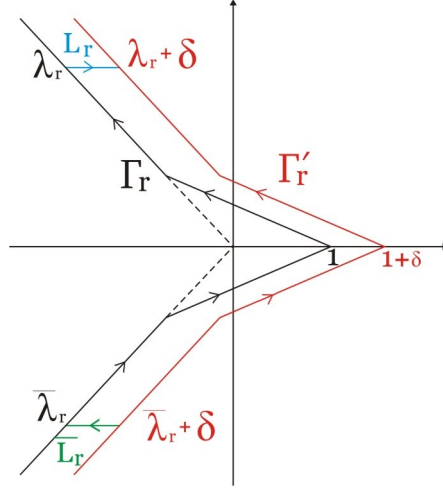
Demonstração: Para provarmos esses itens usaremos as notações estabelecidas na demonstração do Lema 2.37.

- (i) Para $r \geq 1$ dado, considere a curva Γ'_r contida em Γ' cujos extremos são $\bar{\lambda}_r + \delta$ e $\lambda_r + \delta$, onde $\lambda_r = r e^{i(\theta-\varepsilon)}$, e $\bar{\lambda}_r = r e^{-i(\theta-\varepsilon)}$.

Consideremos também os segmentos de retas L_r e $\bar{L}_r$ cujos extremos são λ_r e $\lambda_r + \delta$ e $\bar{\lambda}_r$ e $\bar{\lambda}_r + \delta$, respectivamente.

Seja J_r a curva formada por $\Gamma_r \cup L_r \cup \Gamma_r'^- \cup \bar{L}_r$, onde $\Gamma_r'^-$ é a curva Γ_r' percorrida no sentido contrário, como ilustrado na figura a seguir.

Figura 2.11 – Curvas Γ , Γ' e J_r .



Fonte: elaborado pelo autor.

Note que a aplicação $\lambda \mapsto e^{\lambda z} R(\lambda : A)$ é analítica em J_r , e assim, pelo Teorema de Cauchy, $\int_{J_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = 0$.

Desse modo,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{L}_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda &= - \int_{L_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda \\ &\quad - \int_{\Gamma_r'^-} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda. \end{aligned}$$

Observe também que, para r suficientemente grande, $\operatorname{Re}(\lambda_r + \delta) < 0$, $|\lambda| \geq |\lambda_r + \delta|$ e $\theta - 2\varepsilon \leq \arg(\lambda) \leq \theta - \varepsilon$, para todo $\lambda \in L_r$.

Logo, como $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$ e $\theta - \varepsilon < \pi$, segue que

$$\frac{\pi}{2} < \arg(\lambda) + \arg(z) = \arg(\lambda z) < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon < \frac{3\pi}{2},$$

para todo $\lambda \in L_r$, com r suficientemente grande.

Assim, visto que o comprimento de L_r é igual a δ , obtemos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{L_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda \right\| &\leq \int_{L_r} |e^{\lambda z}| \|R(\lambda : A)\| d|\lambda| \\ &\leq \int_{L_r} e^{\operatorname{Re}(\lambda z)} \frac{M}{|\lambda|} d|\lambda| \\ &\leq \int_{L_r} e^{|\lambda||z| \cos(\arg(\lambda z))} \frac{M}{|\lambda_r + \delta|} d|\lambda| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{|\lambda_r + \delta|} \int_{L_r} d|\lambda| \\ &= \frac{M\delta}{|\lambda_r + \delta|}, \end{aligned}$$

pois, $\cos(\arg(\lambda z)) \leq 0$, para todo $\lambda \in L_r$.

Então, visto que $\lambda_r = re^{i(\theta-\varepsilon)}$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M\delta}{|\lambda_r + \delta|} = 0$ e portanto,

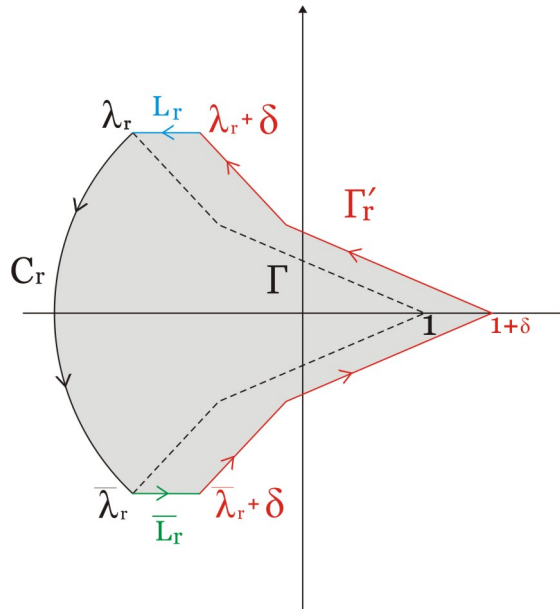
$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{L_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = 0.$$

De maneira análoga, mostra-se que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\bar{L}_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = 0$, e assim, concluímos que

$$\int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda.$$

- (ii) Consideremos λ situado a esquerda de Γ' e tomemos $r > 0$ suficientemente grande para que λ esteja no interior da curva fechada $\tilde{J}_r = \Gamma'_r \cup L_r \cup C_r \cup \bar{L}_r$, onde C_r é o arco da circunferência de centro na origem e raio r que vai de λ_r até $\bar{\lambda}_r$, L_r e $\bar{L}_r$ são os segmentos descritos no item anterior, como na figura a seguir.

Figura 2.12 – Região delimitada pela curva $\tilde{J}_r$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que a aplicação $\lambda' \mapsto e^{\lambda' z}$ é analítica no interior da curva $\tilde{J}_r$.

Assim, pela Fórmula integral de Cauchy, temos

$$\int_{\tilde{J}_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}.$$

Agora, tomando $m_r = \inf\{|\lambda' - \lambda|; \lambda' \in L_r\}$, segue que $\frac{1}{m_r} \geq \frac{1}{|\lambda' - \lambda|}$, para todo $\lambda' \in L_r$, e desse modo, procedendo como em (i),

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right| &\leq \int_{L_r} \frac{e^{Re(\lambda'z)}}{|\lambda' - \lambda|} d|\lambda'| \\ &\leq \frac{1}{m_r} \int_{L_r} e^{Re(\lambda'z)} d|\lambda'| \\ &\leq \frac{1}{m_r} \int_{L_r} d|\lambda'| \\ &= \frac{\delta}{m_r}. \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\delta}{m_r} = 0$ segue que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{L_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0.$$

De modo análogo, mostra-se que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\bar{L}_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0$.

Além disso, usando uma argumentação semelhante ao que foi feito no item (i) do Lema 2.37, podemos afirmar que $\int_{C_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{\lambda z} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{\tilde{J}_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{C_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\bar{L}_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\Gamma'_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{L_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right) \\ &= \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda', \end{aligned}$$

ou seja, $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}$, para todo λ' situado à esquerda de Γ' .

■

O resultado a seguir é o mais importante desta seção, e nos fornece uma condição necessaria para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Teorema 2.39. *Seja $A \in (\theta, M)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico no setor $\Delta(\theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon)$.*

Demonstração: Mostraremos que a família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ dada por

$$\begin{cases} T(0) = I, \\ T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda, \quad z \in \Delta(\alpha), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$ e Γ é a curva descrita como anteriormente, é um semigrupo analítico e A é seu gerador infinitesimal.

Como visto anteriormente, $T(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$.

Agora, mostremos que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ satisfaz as propriedades de semigrupo, isto é:

- (i) $T(0) = I$, o que ocorre pela definição.
- (ii) $T(z + \eta) = T(z)T(\eta)$, para todo $z, \eta \in \Delta(\alpha)$.

Para mostrarmos este fato, usaremos os resultados e as notações dos dois lemas anteriores.

Seja $\rho \in \Delta(\alpha)$, do item (i) do Lema 2.38, obtemos que

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda \rho} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \rho} R(\lambda' : A) d\lambda'.$$

Desse modo, para $z, \eta \in \Delta(\alpha)$ e todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} T(z)T(\eta)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A) x d\lambda' \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A) x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} e^{\lambda' \eta} \left(\frac{R(\lambda : A) - R(\lambda' : A)}{(\lambda' - \lambda)} \right) x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' \eta}}{\lambda' - \lambda} x d\lambda' d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} x d\lambda d\lambda'. \end{aligned}$$

Além disso, como $\lambda \in \Gamma$, λ está à esquerda de Γ' e assim, pelo item (ii) do Lema 2.38,

segue que $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}$.

Mais ainda, pelo item (i) do Lema 2.37 e pelo fato de λ' estar à direita de Γ , temos que

$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0$, consequentemente

$$T(z)T(\eta)x = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) (2\pi i e^{\lambda \eta}) x d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(z+\eta)} R(\lambda : A) x d\lambda \\
&= T(z + \eta)x,
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

A seguir, mostraremos que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é uniformemente limitado em $\Delta(\alpha)$.

Para tanto, observe que, fazendo a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$, com $z \in \Delta(\alpha)$, em (1.3), a curva Γ será transformada na curva $|z|\Gamma$, e assim, pelo item (v) do Lema 2.37, temos

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu,$$

onde $\eta = \frac{z}{|z|} = e^{i\arg(z)}$.

Por outro lado, $A \in (\theta, M)$, o que garante que

$$\left\| R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| \leq \frac{M|z|}{\mu},$$

e então,

$$\begin{aligned}
\|T(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|e^{\mu\eta}|}{|z|} \left\| R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| |d\mu| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{|\mu|} |d\mu| \\
&= \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| + \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu|,
\end{aligned}$$

onde Γ_1 é a curva Γ_r , com $r = 1$, apresentada no início da demonstração do Lema 2.37.

Agora, observe que, para $\mu \in \Gamma_1$, $|\mu| \leq 1$, e desse modo,

$$\operatorname{Re}(\mu\eta) = |\mu||\eta| \cos(\arg(\mu\eta)) \leq 1.$$

Logo, tomando $r_0 = \inf\{|\lambda|; \lambda \in \Gamma_1\}$, temos

$$\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^1}{r_0} |d\mu| = \frac{Me}{2\pi r_0} |\Gamma_1|, \quad (2.6)$$

sendo $|\Gamma_1|$ o comprimento da curva Γ_1 .

Mais ainda, a curva $\Gamma \setminus \Gamma_1$ é formada pelas semiretas σ_1 e σ_2 , onde $\sigma_1(r) = re^{i(\theta-\varepsilon)}$, com $1 \leq r < \infty$ e σ_2 é a curva $\bar{\sigma}_2(r) = re^{-i(\theta-\varepsilon)}$, com $1 \leq r < \infty$, percorrida no sentido contrário. Logo,

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| = \int_{\sigma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| + \int_{\sigma_2} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu|$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\sigma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| - \int_{\bar{\sigma}_2} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| \\
&= \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} \left| e^{i(\theta-\varepsilon)} \right| dr - \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} \left| e^{-i(\theta-\varepsilon)} \right| dr \\
&= \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr - \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr.
\end{aligned}$$

A seguir iremos analisar separadamente as integrais acima.

Para a primeira integral, observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta \right) &= \left| re^{i(\theta-\varepsilon)} \right| \left| \eta \right| \cos((\theta - \varepsilon) + \arg(\eta)) \\
&= r \cos((\theta - \varepsilon) + \arg(z)).
\end{aligned}$$

Além disso, como $-\alpha < \arg(z) < \alpha$ e $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, obtemos

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \theta - \varepsilon + \arg(z) \leq 2\theta - 3\varepsilon - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} - 3\varepsilon \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon,$$

e portanto, $\operatorname{Re} \left(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta \right) \leq r \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)$, com $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) < 0$.

Mais ainda, como $\frac{1}{r} \leq 1$ temos que

$$\int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr \leq \int_1^\infty e^{r \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)} dr = -\frac{e^{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)}.$$

Agora, para a segunda integral, segue que

$$\operatorname{Re} \left(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta \right) = r \cos((-\theta + \varepsilon) + \arg(z)),$$

com,

$$-\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \leq -\frac{3\pi}{2} + 3\varepsilon \leq -2\theta + 3\varepsilon + \frac{\pi}{2} \leq -\theta + \varepsilon + \arg(z) \leq -\frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Desse modo, como $-\frac{1}{r} \leq 0 < 1$,

$$-\int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr \leq \int_1^\infty e^{r \cos \left(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)} dr = \int_1^\infty e^{r \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)} dr.$$

Logo,

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| \leq -\frac{2e^{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)}, \quad (2.7)$$

o que nos permite concluir que

$$\|T(z)\| \leq \frac{Me}{2\pi r_0} |\Gamma_1| + \frac{Me^{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)}}{\pi \left(-\cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \right)} = M_0, \text{ para todo } z \in \Delta(\alpha).$$

Nosso próximo passo é mostrar que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$, $z \in \Delta(\alpha)$, é fortemente contínuo, isto é, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$.

Para tanto, observe inicialmente que, para $\lambda \in \rho(A)$,

$$\begin{aligned} R(\lambda : A)(\lambda I - A) &= I \Leftrightarrow \lambda R(\lambda : A) - R(\lambda : A)A = I \\ &\Leftrightarrow \lambda R(\lambda : A) - I = R(\lambda : A)A \\ &\Leftrightarrow R(\lambda : A) - \lambda^{-1}I = \frac{R(\lambda : A)A}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Assim, para $z \in \Delta(\alpha)$, com $|z| < 1$, e $x \in \mathcal{D}(A)$, usando o item (ii) do Lema 2.37, e a igualdade (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} T(z)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \left(R(\lambda : A) - \lambda^{-1}I \right) x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda : A)Ax d\lambda. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left\| \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} Ax \right\| \leq \frac{|e^{\lambda z}|}{|\lambda|} \|R(\lambda : A)\| \|Ax\| \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda z)}}{|\lambda|} \cdot \frac{M}{|\lambda|} \|Ax\| \leq \frac{M}{|\lambda|^2} \|Ax\|,$$

com a função $\lambda \mapsto \frac{M}{\lambda^2} \|Ax\|$ integrável sobre a curva Γ .

Assim, pelo Teorema da convergência dominada e pelo item (iv) do Lema 2.37, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} (T(z)x - x) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} Ax d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} Ax d\lambda = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

Agora, dado $y \in X$, como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X , com $y_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$. Desse modo, para $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\|y - y_n\| \leq \frac{\epsilon}{2(M_0 + 1)}.$$

Além disso, para $n_1 \in \mathbb{N}$, com $n_1 > n_0$, temos que $y_{n_1} \in \mathcal{D}(A)$, e então, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)y_{n_1} = y_{n_1}$, ou ainda, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < |z| < \delta$,

$$\|T(z)y_{n_1} - y_{n_1}\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, para $0 < |z| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|T(z)y - y\| &\leq \|T(z)\| \|y - y_{n_1}\| + \|T(z)y_{n_1} - y_{n_1}\| + \|y_{n_1} - y\| \\ &\leq M_0 \frac{\epsilon}{2(M_0 + 1)} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(M_0 + 1)} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

isto é, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$.

Mostremos também que $z \mapsto T(z)$ é uma função analítica em $\Delta(\alpha)$.

De fato, considerando novamente a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$ em (2.5), com $z \in \Delta(\alpha)$, tomando $\eta = \frac{z}{|z|}$ e $r \geq 1$, usando novamente o item (v) do Lema 2.37, obtemos

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu. \end{aligned}$$

Procedendo de modo similar ao que já fizemos anteriormente podemos escrever a curva $\Gamma \setminus \Gamma_r$ como sendo a união das curvas Γ_1 , σ_1 e σ_2 , onde $\sigma_1(\rho) = \rho e^{i(\theta-\varepsilon)}$, com $r \leq \rho < +\infty$, e σ_2 é a curva $\bar{\sigma}_2(\rho) = \rho e^{-i(\theta-\varepsilon)}$, com $r \leq \rho < +\infty$, percorrida no sentido contrário. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \left\| T(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \left(\left\| \int_{\sigma_1} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| + \left\| \int_{\sigma_2} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left\| \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{i(\theta-\varepsilon)}\eta}}{|z|} R\left(\frac{\rho e^{i(\theta-\varepsilon)}}{|z|} : A\right) e^{i(\theta-\varepsilon)} d\rho \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| - \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta}}{|z|} R\left(\frac{\rho e^{-i(\theta-\varepsilon)}}{|z|} : A\right) e^{-i(\theta-\varepsilon)} d\rho \right\| \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_r^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho e^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{\rho} d\rho + \int_r^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho e^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{\rho} d\rho \right) \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \left[\int_r^\infty e^{\rho \cos(\theta-\varepsilon+\arg z)} d\rho + \int_r^\infty e^{\rho \cos(-\theta+\varepsilon+\arg z)} d\rho \right] \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \left[\int_r^\infty e^{\rho \cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} d\rho + \int_r^\infty e^{\rho \cos(-\frac{\pi}{2}-\varepsilon)} d\rho \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{\pi} \int_r^\infty e^{\rho \cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)} d\rho \\
&= \frac{M}{\pi} \frac{e^{r \cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)}}{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\right]} \\
&= \frac{M}{\pi} \frac{e^{-r \sin(\varepsilon)}}{\sin(\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Assim, tomando limite na desigualdade acima, quando $r \rightarrow +\infty$, obtemos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\| T(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M}{\pi} \frac{e^{-r \sin(\varepsilon)}}{\sin(\varepsilon)} = 0,$$

Dou seja, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda$ converge uniformemente para $T(z)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$.

Por outro lado, como a função $\lambda \mapsto e^{\lambda z} R(\lambda : A)$ é analítica em $\Delta(\theta)$ e Γ_r é uma curva simples de classe C^1 por partes, temos que a função $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, para todo $r \geq 1$.

Portanto, $z \mapsto T(z)$ é o limite uniforme de uma função analítica, e assim, $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, o que prova que a família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico.

Finalmente, basta mostrarmos que A é o gerador infinitesimal de $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ quando restringimos o semigrupo ao semi-eixo positivo.

Para tanto, usando a igualdade (2.8) e o item (iii) do Lema 2.37, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} T(z)x &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \left(e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \lambda R(\lambda : A)x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} (R(\lambda : A)A + I)x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)Ax d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} x d\lambda \\
&= T(z)Ax.
\end{aligned}$$

Desse modo, $\frac{d}{dz} T(z)x = T(z)Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $z \in \Delta(\alpha)$. Assim, para $h > 0$,

$$\frac{1}{h} \int_0^h T(t)Ax dt = \frac{T(t)x}{h} \Big|_0^h = \frac{T(h)x - x}{h}. \quad (2.9)$$

Além disso, visto que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$, restrito ao intervalo $[0, +\infty)$, é um C_0 -semigrupo,

denotaremos por $B : \mathcal{D}(B) \subset X \rightarrow X$ seu gerador infinitesimal e mostraremos que $B = A$.

De fato, tomando o limite quando $h \rightarrow 0^+$ em (2.9), concluimos que

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(t)Ax dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Bx,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

Portanto, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $A = B$ em $\mathcal{D}(A)$.

Por outro lado, como $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$, existe $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, e assim, considerando que $x \in \mathcal{D}(B)$ e $y = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x$, segue que, $y \in \mathcal{D}(A)$ e

$$(\lambda I - A)y = (\lambda I - B)x,$$

o que nos garante que

$$0 = (\lambda I - A)y - (\lambda I - B)x = (\lambda I - B)(y - x).$$

Consequentemente, pelo fato de $(\lambda I - B)$ ser injetor, obtemos que $x = y$. Portanto, $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ e $A = B$.

■

Corolário 2.40. *Seja $A \in (\theta, M)$. O semigrupo analítico $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ obtido no teorema anterior e gerado por A , com $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, satisfaz as seguintes condições:*

- (i) *Para todo $n \geq 1$, $T(z)x \in \mathcal{D}(A^n)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in \Delta(\alpha)$;*
- (ii) *Para todo $n \geq 1$ existe uma constante $M_n(\varepsilon)$, que só depende ε , tal que*

$$\|A^n T(z)\| \leq \frac{M_n(\varepsilon)}{|z|^n}, \text{ para todo } z \in \Delta(\alpha).$$

Demonstração:

- (i) Sejam $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$ e $h \in (0, +\infty)$. Assim,

$$\frac{T(h) - I}{h} T(z)x = \frac{T(h+z)x - T(z)x}{h}.$$

Mais ainda, fazendo $v = h + z$ e $h \rightarrow 0^+$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} T(z)x = \lim_{v \rightarrow z} \frac{T(v)x - T(z)x}{v - z}. \quad (2.10)$$

Logo, visto que $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, o limite acima existe, e então, $T(z)x \in \mathcal{D}(A)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in \Delta(\alpha)$.

Além disso, para todo $n \geq 1$ vale que

$$A^n T(z) = A^n T\left(\frac{z}{n} + \frac{z}{n} + \dots + \frac{z}{n}\right) = A^n \left[T\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n = \left[AT\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n$$

e consequentemente, $T(z)x \in \mathcal{D}(A^n)$, para todo $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$ e $n \geq 1$.

(ii) Da demonstração do teorema anterior sabemos que, para $z \in \Delta(\alpha)$,

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu,$$

com, $\eta = \frac{z}{|z|}$.

Mais ainda, usando (2.8) e o fato de A ser um operador linear fechado, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, obtemos que

$$AT(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} AR\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} \left[\frac{\mu}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) - I\right] d\mu.$$

Desse modo, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, segue que

$$\begin{aligned} \|AT(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|z|} \left[\left\| \frac{\mu}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| + \|I\| \right] d\mu \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|z|} \left[\frac{|\mu|}{|z|} \cdot \frac{M|z|}{|\mu|} + 1 \right] d|\mu| \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|z|} d|\mu| \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[\int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)} d|\mu| + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)} d|\mu| \right] \\ &\leq \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[e|\Gamma_1| + \frac{2e^{-\operatorname{sen}(\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(\varepsilon)} \right] \\ &= \frac{M_1(\varepsilon)}{|z|}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } M_1(\varepsilon) = \frac{(M+1)}{2\pi} \left[e|\Gamma_1| + \frac{2e^{-\operatorname{sen}(\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(\varepsilon)} \right].$$

Agora, consideremos $n \geq 1$ qualquer. Usando o item (i), para todo $z \in \Delta(\alpha)$, temos que

$$\begin{aligned} \|A^n T(z)\| &= \left\| \left[AT\left(\frac{z}{n}\right) \right]^n \right\| \leq \left\| AT\left(\frac{z}{n}\right) \right\|^n \\ &\leq \left(\frac{M_1(\varepsilon)}{\left|\frac{z}{n}\right|} \right)^n = \frac{n^n M_1(\varepsilon)^n}{|z|^n} \\ &= \frac{M_n(\varepsilon)}{|z|^n}, \end{aligned}$$

onde $M_n = n^n M_1(\varepsilon)$.

■

2.6 Potências fracionárias de operadores lineares fechados

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de potências fracionárias de operadores lineares fechados e densamente definidos, bem como estudar algumas de suas propriedades quando este operador for o gerador infinitesimal de um semigrupo. Para tanto, iremos considerar a seguinte condição:

Condição 2.41. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido, ou seja, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, para o qual*

$$\Sigma_w^+ \cup V \subset \rho(A) \text{ e } \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_w^+,$$

onde $\Sigma_w^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < w < |\arg(\lambda)| \leq \pi\}$ e V é uma vizinhança de zero.

Observação 2.42. *Seja A um operador que satisfaz a Condição 2.41.*

- (i) Suponha que $M = 1$ e $w = \frac{\pi}{2}$. Então $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo.

De fato, como $M = 1$ e $w = \frac{\pi}{2}$, $\Sigma_w^+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{2} < |\arg(\lambda)| \leq \pi \right\} \subset \rho(A)$. Assim, se $\lambda \in \Sigma_w^+$, então $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado.

Além disso, para $\mu = -\lambda$ temos

$$(\lambda I - A)^{-1} = ((-1)(A - \lambda I))^{-1} = -(\mu I - (-A))^{-1},$$

ou seja, se $\lambda \in \rho(A)$, então $\mu \in \rho(-A)$.

Desse modo, como $(-\infty, 0) \subset \Sigma_{\frac{\pi}{2}}^+ \subset \rho(A)$ segue que $(0, +\infty) \subset \rho(-A)$, além disso, visto que $R(\lambda : A) = -R(\mu : -A)$,

$$\|R(\mu : -A)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\mu}, \quad \forall \mu > 0.$$

Assim, como $\mathcal{D}(-A) = \mathcal{D}(A)$ e $-A$ é fechado, o Teorema de Hille-Yosida nos permite concluir que $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo.

- (ii) Fixando $0 < w < \frac{\pi}{2}$, segue que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Com efeito, tome $\theta = \pi - w$ e considere o setor $\Delta(\theta) = \{z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| < \theta\}$.

Desse modo, para $\lambda \in \Sigma_w^+$ temos $0 < |\arg(-\lambda)| < \pi - w$, e assim, $-\lambda \in \Delta(\theta)$.

Por outro lado, como $\Sigma_w^+ \subset \rho(A)$ e $(\lambda I - A)^{-1} = -(\mu I - (-A))^{-1}$, para todo $\lambda \in \Sigma_w^+$, com $\mu = -\lambda$, concluímos que $\mu \in \rho(-A)$ e desse modo, $\Delta(\theta) \subset \rho(-A)$.

Além disso, para todo $\mu \in \Delta(\theta)$ temos

$$\|R(\mu : -A)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\mu|}.$$

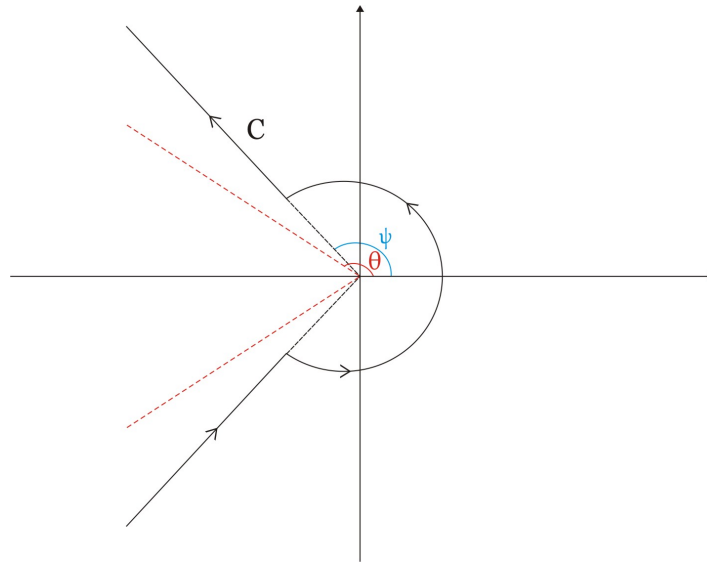
Portanto, $-A \in (\theta, M)$ e pelo Teorema 2.39, para $\varepsilon > 0$ dado, com $2\varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$, $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico no setor $\Delta\left(\theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right) = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - w - 2\varepsilon\right)$.

Agora, consideremos A um operador satisfazendo a Condição 2.41 e tomemos $\alpha > 0$. Defina o operador $A^{-\alpha}$ por

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

onde C é o caminho contido no conjunto resolvente de A e dado por $C = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, onde γ_1 é a curva $\bar{\gamma}_1(\rho) = \rho e^{-i\psi}$, $1 \leq \rho < \infty$, percorrida no sentido contrário, $\gamma_2(\varphi) = e^{i\varphi}$, com $-\psi \leq \varphi \leq \psi$, e $\gamma_3(\rho) = \rho e^{i\psi}$, $1 \leq \rho < \infty$, com $0 < \psi < \theta$ e $\theta = \pi - w$, como descrita na figura a seguir.

Figura 2.13 – Caminho C .



Fonte: elaborado pelo autor.

Na sequência mostraremos que, para $\alpha > 0$, a integral que define $A^{-\alpha}$ é uniformemente convergente e portanto, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado.

Para tanto, tomemos $r > 1$ e consideremos o caminho C_r formado pela parte da curva C que vai de $re^{-i\psi}$ até $re^{i\psi}$.

Desse modo,

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C \setminus C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Logo, denotando por $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$ as curvas $\gamma_{1,r}(\rho) = \rho e^{-i\psi}$ e $\gamma_{2,r}(\rho) = \rho e^{i\psi}$, para $r \leq \rho < \infty$,

obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| A^{-\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{C \setminus C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty |\rho^{-\alpha} e^{i\alpha\psi}| \|(A - \rho e^{-i\psi} I)^{-1}\| d\rho + \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty |\rho^{-\alpha} e^{-i\alpha\psi}| \|(A - \rho e^{i\psi} I)^{-1}\| d\rho \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{Re(i\alpha\psi)} \frac{M}{1+\rho} d\rho + \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{Re(-i\alpha\psi)} \frac{M}{1+\rho} d\rho \\
&= \frac{M}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^0 \frac{\rho}{1+\rho} \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{M}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^0 \frac{\rho}{1+\rho} \frac{1}{\rho} d\rho \\
&\leq \frac{M}{\pi} \int_r^\infty \frac{\rho^{-\alpha}}{\rho} d\rho \\
&= \frac{M}{\pi} \frac{1}{\alpha r^\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, $\left\| A^{-\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\| \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow +\infty$.

Mais ainda, como $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$ é um operador linear limitado, para todo $r > 1$ e a convergência acima é uniforme, podemos afirmar que $A^{-\alpha}$ é um operador limitado.

Vejamos, em particular, o que ocorre quando $\alpha = n$. Neste caso, visto que A satisfaz a Condição 2.41, temos que função $\lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1} = R(\lambda : A)$ é analítica em uma vizinhança de zero. Além disso, para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$,

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A).$$

Desse modo, por um processo indutivo, podemos garantir que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda : A) = (-1)^n n! R(\lambda : A)^{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, a série de Taylor de $\lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1} = R(-\lambda : -A)$ em torno de zero é dada por

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k! R(0 : -A)^{k+1}}{k!} (-\lambda - 0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1})^{k+1} \lambda^k.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1})^{k+1} \lambda^{k-n} \\
&= \frac{(A^{-1})}{\lambda^n} + \frac{(A^{-1})^2}{\lambda^{n-1}} + \dots + \frac{(A^{-1})^n}{\lambda} + (A^{-1})^{n+1} + (A^{-1})^{n+2} \lambda \dots,
\end{aligned}$$

é a série de Laurent da função $\lambda \mapsto \lambda^{-n}(A - \lambda I)^{-1}$. Note que o coeficiente do índice -1 é $(A^{-1})^n$ e a função $\lambda \mapsto \lambda^{-n}(A - \lambda I)^{-1}$ é analítica em $B_r(0) - \{0\} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| \leq r\}$, para algum $r > 0$, com $\lambda = 0$ sendo a única singularidade desta função neste conjunto. Dessa forma aplicando o Teorema dos Resíduos para qualquer curva fechada Λ em $B_r(0) - \{0\}$ temos que

$$\int_{\Lambda} \lambda^{-n}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda = 2\pi i \operatorname{Res}(\lambda^{-n}(A - \lambda I)^{-1}) = 2\pi i (A^{-1})^n.$$

Mais ainda, como a integral sobre a curva C pode ser transformada em uma integral de uma curva fechada em torno da origem, podemos concluir que

$$A^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-n}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda = (A^{-1})^n. \quad (2.11)$$

Portanto, para $\alpha = n$, com $n \in \mathbb{N}$, A^{-n} é a n -ésima iterada de A^{-1} .

Outro caso particular ocorre quando $0 < \alpha < 1$. Nessas condições, pela definição de $A^{-\alpha}$ temos que

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,r}} \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{3,r}} \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\gamma_{1,r}$ é a curva $\bar{\gamma}_{1,r}(\rho) = \rho e^{-i\psi}$, $r \leq \rho < +\infty$, percorrida no sentido contrário, $\gamma_{2,r}(\varphi) = r e^{i\varphi}$, com $-\psi \leq \varphi \leq \psi$, e $\gamma_{3,r}(\rho) = \rho e^{i\psi}$, $r \leq \rho < +\infty$, e $r > 1$.

A seguir vamos analisar cada uma dessas integrais separadamente.

(i) Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{1,r}} \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda &= - \int_r^\infty (\rho e^{-i\psi})^{-\alpha} (A - \rho e^{-i\psi} I)^{-1} e^{-i\psi} d\rho \\ &= - \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha} (A - \rho e^{-i\psi} I)^{-1} e^{-i\psi} d\rho. \end{aligned}$$

Além disso, note que $e^{i\pi} = -1$ e $\psi \rightarrow \pi$, quando $w \rightarrow 0$, pois $0 < \psi < \pi - w$. Então,

$$\rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha} (A - \rho e^{-i\psi} I) e^{-i\psi} \rightarrow \rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A - \rho e^{-i\pi} I) e^{-i\pi} = -\rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1},$$

quando $w \rightarrow 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha} (A - \rho e^{-i\psi} I) e^{-i\psi}\| &\leq |\rho^{-\alpha}| \|e^{i\psi\alpha}\| \|(A - \rho e^{-i\psi} I)\| \\ &\leq \rho^{-\alpha} \frac{M}{1 + \rho} = g(\rho). \end{aligned}$$

Assim, como $g(\rho)$ é integrável em $(r, +\infty)$ pois, $\int_r^{+\infty} g(\rho) d\rho \leq M \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{-\alpha}}{1+\rho} d\rho = MB(1-\alpha, \alpha)$, onde $B(1-\alpha, \alpha)$ representa a função Beta com $x = 1-\alpha$ e $y = \alpha$, ambos positivos já que estamos com $0 < \alpha < 1$. Logo, pelo Teorema da convergência dominada, obtemos que

$$\lim_{w \rightarrow 0} \int_r^\infty (\rho^{-\alpha} e^{-i\psi})(A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{-i\psi} d\rho = \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho.$$

(ii) Para analisarmos a segunda integral em (2.12), note inicialmente, que

$$\int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda = \int_{-\psi}^{\psi} (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi} d\varphi$$

e

$$\begin{aligned} \|(re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi}\| &\leq |r^{-\alpha}| |e^{-i\varphi\alpha}| \|(A - re^{i\varphi})^{-1}\| |r| |i| |e^{i\varphi}| \\ &\leq r^{-\alpha} \frac{M}{1+r} r \\ &= \frac{M}{1+r} r^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, tomando o limite em $\int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$, quando $w \rightarrow 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda &= \lim_{w \rightarrow 0} \int_{-\psi}^{\psi} (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi} d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Além disso, fazendo $r \rightarrow 0$ e usando o Teorema da convergência dominada, concluímos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi} d\varphi = 0.$$

(iii) Para a última integral, observe que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{3,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda &= \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi} I)^{-1} e^{i\psi} d\rho, \\ \rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi} I)^{-1} e^{i\psi} &\rightarrow -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1}, \end{aligned}$$

quando $w \rightarrow 0$, e

$$\|\rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi} I)^{-1} e^{i\psi}\| \leq \rho^{-\alpha} \frac{M}{1+\rho} = g(\rho).$$

Assim, como $g(\rho)$ é integrável em $(r, +\infty)$, pelo Teorema da convergência dominada,

temos

$$\lim_{w \rightarrow 0} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi} d\rho = \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho.$$

Desse modo, por (i), (ii) e (iii), fazendo $w \rightarrow 0$ em (2.12) obtemos que

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^\pi (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi} d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $r \rightarrow 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho \\ &= \left(\frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i} \right) \int_0^\infty \rho^{-\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho \\ &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \rho^{-\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ou seja,

$$A^{-\alpha} = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \rho^{-\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho, \text{ para } 0 < \alpha < 1. \quad (2.14)$$

Na sequência, assumiremos que $0 < w < \frac{\pi}{2}$. Desse modo, se A satisfaz a Condição 2.41, então $-A$ gera um semigrupo analítico $(T(z))_{z \in \Delta(\theta) \cup \{0\}}$, com $\theta = \pi - w$, conforme o item (ii) da Observação 2.42.

Mais ainda, da teoria de perturbação de geradores infinitesimais de semigrupos analíticos, sabemos que existe uma constante $\delta > 0$ tal que $-A + \delta I$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(S(z))_{z \in \Delta(\theta) \cup \{0\}}$, com $S(t) = T(t)e^{\delta t}$, $\forall t \geq 0$, ver capítulo 3 de (12).

Logo, pelo Corolário 2.40 temos, para $t \geq 0$, que

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\delta t}, \quad (2.15)$$

$$\|AT(t)\| \leq M_1 t^{-1} e^{-\delta t}, \quad (2.16)$$

$$\|A^n T(t)\| \leq M_n t^{-n} e^{-\delta t}. \quad (2.17)$$

Assim, a desigualdade (2.15) nos garante que

$$R(\rho : -A) = (\rho I + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\rho s} T(s) ds \quad (2.18)$$

converge uniformemente na topologia do operador uniforme para $\rho \geq 0$.

Logo, se $0 < \alpha < 1$, voltando a (2.14) e usando o Teorema de Fubini, obtemos que

$$\begin{aligned}
 A^{-\alpha} &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \rho^{-\alpha} \left(\int_0^\infty e^{-\rho s} T(s) ds \right) d\rho \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty T(s) \int_0^\infty \rho^{-\alpha} e^{-\rho s} d\rho ds \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty T(s) \left(\int_0^\infty (us^{-1})^{-\alpha} e^{-u} s^{-1} du \right) ds \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) \left(\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du \right) ds \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \left(\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du \right) \left(\int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds \right).
 \end{aligned}$$

Como $\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du = \Gamma(1 - \alpha)$ e $\frac{\pi}{\text{sen}(\pi\alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)$, onde $\Gamma(z)$ representa a função gama, concluímos que

$$\begin{aligned}
 A^{-\alpha} &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{\pi}{\text{sen}(\pi\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds, \quad 0 < \alpha < 1.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds \right\| &\leq \int_0^\infty |s^{\alpha-1}| \|T(s)\| ds \\
 &\leq \int_0^\infty s^{\alpha-1} M e^{-\delta s} ds \\
 &\leq M \int_0^\infty \left(\frac{u}{\delta} \right)^{\alpha-1} e^{-u} \delta^{-1} du \\
 &= M \delta^{-\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \\
 &= M \delta^{-\alpha} \Gamma(\alpha),
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

para qualquer que seja $\alpha > 0$, isto é, $\int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds$ converge na topologia do operador uniforme para todo $\alpha > 0$.

Portanto, quando $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico, a igualdade (2.19) e a limitação em (2.20) nos motivam a definir as potências fracionárias de A da seguinte forma:

$$A^{-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds, & \alpha > 0, \\ I, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Proposição 2.43. Se $\alpha, \beta \geq 0$, então $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$.

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) A^{-\beta} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} T(s) ds \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty s^{\beta-1} T(t+s) ds \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_t^\infty (u-t)^{\beta-1} T(u) du \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^u t^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} dt \right) T(u) du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^1 u^{\alpha-1} v^{\alpha-1} (u)^{\beta-1} (1-v)^{\beta-1} u dv \right) T(u) du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv \right) \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} T(u) du.
\end{aligned}$$

Além disso, visto que $\int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, concluímos que

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^\infty u^{(\alpha+\beta)-1} T(u) du = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

■

Proposição 2.44. Se $0 \leq \alpha \leq 1$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|A^{-\alpha}\| \leq C.$$

Demonstração: Se $\alpha = 0$, então $A^{-\alpha} = I$, e assim, $\|A^{-\alpha}\| = \|I\| \leq 1$.

Para o caso em que $\alpha = 1$, observe que, como $0 \in \rho(A)$, A^{-1} é um operador linear limitado e então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|A^{-1}\| \leq C_1$.

Por fim, consideremos que $0 < \alpha < 1$. Assim, de (2.13), temos

$$\begin{aligned}
\|A^{-\alpha}\| &= \left\| \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \left[\int_0^1 t^{-\alpha} (tI + A)^{-1} dt + \int_1^\infty t^{-\alpha} (tI + A)^{-1} dt \right] \right\| \\
&\leq \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_0^1 t^{-\alpha} \|(tI + A)^{-1}\| dt + \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_1^\infty t^{-\alpha} \|(tI + A)^{-1}\| dt \\
&\leq \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_0^1 t^{-\alpha} \frac{M}{1+t} dt + \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_1^\infty t^{-\alpha} \frac{M}{1+t} dt \\
&\leq \left| \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \right| M \left(\int_0^1 t^{-\alpha} dt + \int_1^\infty t^{-\alpha-1} dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M \frac{|\operatorname{sen}(\pi\alpha)|}{\pi} \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right] \\
&= M \left[\frac{|\operatorname{sen}(\pi\alpha)|}{\pi(1-\alpha)} + \frac{|\operatorname{sen}(\pi\alpha)|}{\pi\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Além disso, como $\operatorname{sen}(\pi(1-\alpha)) = \operatorname{sen}(\pi\alpha)$, segue que

$$\|(-A)^{-\alpha}\| \leq M \left[\frac{|\operatorname{sen}(\pi(1-\alpha))|}{\pi(1-\alpha)} + \frac{|\operatorname{sen}(\pi\alpha)|}{\pi\alpha} \right].$$

Desse modo, visto que a função $t \mapsto \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$ é limitada em $(0, \pi)$, existe uma constante $C > 0$, $C = \max \left\{ 1, C_1, 2M \sup_{t \in (0, \pi)} \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{t} \right\}$, tal que

$$\|A^{-\alpha}\| \leq C \text{ para todo } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

■

Observação 2.45. . Usando as Proposições 2.43 e 2.43, podemos estender a limitação de $A^{-\alpha}$ para qualquer que seja $\alpha > 0$. Porém, neste caso, a constante de limitação irá depender de α .

De fato, dado $\alpha > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ de modo que $0 < \alpha - n < 1$. Assim, pela igualdade (2.11) temos

$$\|A^{-\alpha}\| = \|A^{-\alpha+n}A^{-n}\| \leq \|A^{-(\alpha-n)}\| \|(A^{-1})^n\| \leq CC^n = C_n.$$

Portanto, concluímos que $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado para todo $\alpha \geq 0$.

Proposição 2.46. *O operador $A^{-\alpha}$ é injetor para todo $\alpha \geq 0$.*

Demonstração: Temos que $0 \in \rho(A)$, logo A^{-1} existe e assim é injetor.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $A^{-n} = (A^{-1})^n$ e então, A^{-n} é injetor.

Sejam $\alpha > 0$, $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $A^{-\alpha}x = 0$ e $n \geq \alpha$.

Logo,

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = A^{-n+\alpha}0 = 0.$$

Assim, $x = 0$, e portanto $A^{-\alpha}$ é injetor para todo $\alpha \geq 0$.

■

Definição 2.47. *Seja A um operador linear que satisfaz a Condição 2.41 com $w < \frac{\pi}{2}$. Para todo $\alpha > 0$, considere $A^\alpha : \mathcal{D}(A^\alpha) \subset X \rightarrow X$ definido por*

$$A^\alpha = \begin{cases} (A^{-\alpha})^{-1}, & \alpha \neq 0, \\ I, & \alpha = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

com $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$, onde $\mathcal{R}(A^{-\alpha})$ denota a imagem de $A^{-\alpha}$.

A próxima proposição apresenta algumas propriedades de A^α .

Proposição 2.48. *Cosidere A^α como definido acima. Então:*

- (a) A^α é um operador linear fechado;
- (b) Se $\alpha \geq \beta > 0$, então $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset \mathcal{D}(A^\beta)$;
- (c) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A^\gamma)$, com $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Demonstração:

- (a) Quando $\alpha \leq 0$ temos $\alpha = -\beta$, com $\beta > 0$, e assim, pela Observação 2.45, segue que A^α é um operador linear limitado e assim, fechado.

Agora, se $\alpha > 0$, pela Definição 2.47, A^α é inversível e $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$, com $A^{-\alpha}$ limitado.

Desse modo, dados $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(A^\alpha)$ e $u, v \in X$ tais que $u_n \rightarrow u$ e $A^\alpha u_n \rightarrow v$, observe que, se $w_n = A^\alpha u_n$, então $A^{-\alpha} w_n = u_n$, e assim

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{-\alpha} w_n = A^{-\alpha} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right) = A^{-\alpha} v,$$

ou seja, $u \in \mathcal{R}(A^{-\alpha}) = \mathcal{D}(A^\alpha)$ e, além disso,

$$A^\alpha u = A^\alpha (A^{-\alpha} v) = v,$$

pois $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$.

Portanto, A^α é um operador linear fechado.

- (b) Sejam $\alpha \geq \beta > 0$. Temos, pelo Lema 2.43, que

$$A^{-\alpha} = A^{-\alpha+\beta-\beta} = A^{-\beta} A^{-(\alpha-\beta)}.$$

Portanto, $\mathcal{R}(A^{-\alpha}) \subset \mathcal{R}(A^{-\beta})$ e assim, $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset \mathcal{D}(A^\beta)$.

- (c) Para provarmos este item, iremos analisar alguns casos separadamente:

- (i) Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, o resultado segue da Proposição 2.43 para qualquer que seja $x \in X$.
- (ii) Para o caso em que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, consideremos inicialmente que $x \in \mathcal{D}(A^\alpha A^\beta)$, e então, $x \in \mathcal{D}(A^\beta)$ e $A^\beta x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$.

Agora, tomando $y = A^\alpha A^\beta x$, temos

$$A^\beta x = A^{-\alpha} y \text{ e } x = A^{-\beta} A^{-\alpha} y = A^{-(\alpha+\beta)} y.$$

Logo, $x \in \mathcal{R}(A^{-(\alpha+\beta)}) = \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$ e $A^{\alpha+\beta}x = y = A^\alpha A^\beta x$.

Portanto, $\mathcal{D}(A^\alpha A^\beta) \subset \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$.

Por outro lado, se $x \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$ e $z = A^{\alpha+\beta}x$, então

$$x = A^{-(\alpha+\beta)}z = A^{-(\beta+\alpha)}z = A^{-\beta-\alpha}z = A^{-\beta}A^{-\alpha}z,$$

ou seja, $A^\beta x = A^{-\alpha}z$, o que implica que $A^\alpha A^\beta x = z$.

Desse modo, $A^{\alpha+\beta}x = z = A^\alpha A^\beta x$, isto é, $x \in \mathcal{D}(A^\alpha A^\beta)$, e assim $\mathcal{D}(A^{\alpha+\beta}) \subset \mathcal{D}(A^\alpha A^\beta)$.

Consequentemente, $\mathcal{D}(A^{\alpha+\beta}) = \mathcal{D}(A^\alpha A^\beta)$ e $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$.

(iii) Sejam $\alpha < 0$ e $\beta > 0$.

Se $\alpha + \beta > 0$, então, pelo item (ii) temos que

$$A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta}x = A^{(-\alpha)+(\alpha+\beta)}x = A^{\beta}x, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta}).$$

Logo, se $y = A^{\alpha+\beta}x$ para algum $x \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$, temos que $A^{-\alpha}y = A^\beta x$, e assim, $A^\beta x \in \mathcal{R}(A^{-\alpha}) = \mathcal{D}(A^\alpha)$.

Desse modo,

$$A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^{-\alpha}y = y = A^{\alpha+\beta}x, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta}).$$

Agora, se $\alpha + \beta < 0$ temos, pelo item (i), que

$$A^{-\beta}A^{\alpha+\beta}x = A^{(-\beta)+(\alpha+\beta)}x = A^\alpha x, \text{ para todo } x \in X.$$

Assim, se $z = A^{\alpha+\beta}x$, então $A^{-\beta}z = A^\alpha x$, o que implica que $A^\alpha x \in \mathcal{R}(A^{-\beta}) = \mathcal{D}(A^\beta)$.

Desse modo, obtemos que

$$A^\beta A^\alpha x = A^\beta A^{-\beta}z = z = A^{\alpha+\beta}x, \text{ para todo } x \in X.$$

Portanto, tomando $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$, segue que $\mathcal{D}(A^\gamma)$ está contido em $\mathcal{D}(A^\alpha)$, $\mathcal{D}(A^\beta)$ e $\mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$, e além disso, as igualdades em (i), (ii) e (iii) são satisfeitas para todo $x \in \mathcal{D}(A^\gamma)$.

■

Teorema 2.49. *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo analítico*

($T(z)$) $_{z \in \Delta(\theta) \cup \{0\}}$, para algum $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Se $0 \in \rho(A)$, então:

(a) $T(t) : X \rightarrow \mathcal{D}(A^\alpha)$ para todo $t > 0$ e $\alpha \geq 0$;

(b) $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$, para $\alpha > 0$ e todo $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$;

(c) para todo $\alpha > 0$ e $t > 0$, o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado e

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t};$$

(d) sejam $0 < \alpha < 1$ e $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, então

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Demonstração:

(a) Como $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável para $t > 0$, e assim, da Proposição 2.31, temos $T(t) : X \rightarrow \mathcal{D}(A^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desse modo, dado $\alpha \geq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \alpha$, e assim, pelo item (b) do Teorema 2.48, segue que $\mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A^\alpha)$.

Portanto, $T(t) : X \rightarrow \mathcal{D}(A^\alpha)$ para todo $t > 0$ e $\alpha \geq 0$.

(b) Sejam $\alpha > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$. Pelo fato de $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$, temos que $x = A^{-\alpha}y$ para algum $y \in X$.

Logo,

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y \\ &= T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} T(s)y ds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} T(s)T(t)y ds \\ &= A^{-\alpha}T(t)y \\ &= A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x, \end{aligned}$$

e assim, $A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\alpha > 0$.

(c) Como $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$, e A^α é fechado, segue que $A^\alpha T(t)$ é fechado.

Dessa forma, visto que, pelo item (a), $A^\alpha T(t)$ está definido em todo X , o Teorema do gráfico fechado, nos permite concluir que $A^\alpha T(t)$ é limitado.

Mais ainda, para $\alpha > 0$ dado, considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq \alpha < n$, e então, usando (2.17) temos

$$\begin{aligned} \|A^\alpha T(t)\| &= \|A^{\alpha-n} A^n T(t)\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} T(s) A^n T(t) ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} \|A^n T(t+s)\| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} M_n (t+s)^{-n} e^{-\delta(t+s)} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty (tu)^{n-\alpha-1} M_n t^{-n} (1+u)^{-n} e^{-\delta t(1+u)} t du \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} e^{-\delta t} M_n u^{n-\alpha-1} (1+u)^{-n} e^{-\delta t u} du \\
&\leq \frac{e^{-\delta t}}{t^\alpha} \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty u^{n-\alpha-1} (1+u)^{-n} du \\
&\leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},
\end{aligned}$$

onde $M_\alpha = \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty u^{n-\alpha-1} (1+u)^{-n} du = \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} B(n-\alpha, \alpha)$ é uma constante que independe de t e $B(n-\alpha, \alpha)$ representa a função Beta com $x = n-\alpha$ e $y = \alpha$.

Portanto, $\|A^\alpha T(t)\| < M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}$, para todo $t > 0$.

(d) Sejam $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$. Assim, pelo Teorema 2.13, temos

$$T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x ds = \int_0^t A^{1-\alpha+\alpha} T(s)x ds = \int_0^t A^{1-\alpha} T(s) A^\alpha x ds.$$

Desse modo, pelo item (c),

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\| &\leq \int_0^t \|A^{1-\alpha} T(s)\| \|A^\alpha x\| ds \\
&\leq \int_0^t M_{1-\alpha} s^{\alpha-1} e^{-\delta s} \|A^\alpha x\| ds \\
&\leq M_{1-\alpha} \|A^\alpha x\| \int_0^t s^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{M_{1-\alpha}}{\alpha} t^\alpha \|A^\alpha x\| \\
&= C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_\alpha = \frac{M_{1-\alpha}}{\alpha}$.

■

3 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NEUTRAS COM RETARDO

Neste capítulo, usando a teoria de semigrupos analíticos desenvolvida no Capítulo 2, estudaremos a existência de soluções para uma classe de equações diferenciais funcionais neutras abstratas com retardo finito, descritas na forma

$$\frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) = Ax(t) + G(t, x_t), t \in [0, a), \quad (3.1)$$

$$x_\sigma = \varphi \in \Omega \subset C, \quad (3.2)$$

onde $a > 0$, $0 \leq \sigma < a$, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(z)_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ em $\mathcal{L}(X)$, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $\Omega \subset C$ é um aberto, em que $C = C([-r, 0], X)$ denota o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ em X munido da norma $\|z\|_C = \sup_{t \in [-r, 0]} \|z(t)\|$, $x_t \in C$ para todo $t \in [0, a)$, com $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$, e as funções $F, G : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ são funções contínuas.

Para facilitar os cálculos vamos supor que $\sigma = 0$. Além disso, assumiremos que $0 \in \rho(A)$, desse modo podemos utilizar o conceito de potências fracionárias do operador A e assim, considerar o operador linear fechado $(-A)^\beta$, para $0 < \beta \leq 1$, cujo domínio $\mathcal{D}((-A)^\beta)$, com a norma $\|x\|_\beta = \|(-A)^\beta x\|$ é um espaço de Banach.

Além disso, como vimos no capítulo anterior, existem constantes $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$. Em particular, consideremos $\tilde{M} > 1$ de modo que $\|T(t)\| \leq \tilde{M}$, para todo $t \in [0, a]$.

Agora, a fim de definirmos o conceito de solução para o problema neutro (3.1) – (3.2), faremos uma comparação com o problema de Cauchy abstrato.

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), t \in (0, a), \quad (3.3)$$

$$x(0) = x^0 \in X, \quad (3.4)$$

cujas definições de solução clássica e fraca estão enunciadas a seguir.

Definição 3.1. Uma função $x : [0, a) \rightarrow X$ é uma **solução clássica** de (3.3) – (3.4) em $[0, a)$ se x é contínua em $[0, a)$, continuamente diferenciável em $(0, a)$, $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in (0, a)$ e as equações (3.3) e (3.4) são satisfeitas.

Indiquemos por $L^1([0, a], X)$ o conjunto das classes de equivalência, segundo a relação $f \sim g$, em que $f = g$ quase sempre em $[0, a]$, das funções integráveis em $[0, a]$.

Proposição 3.2. Se $f \in L^1([0, a], X)$, então para todo $x^0 \in X$, o sistema (3.3) – (3.4) tem no máximo uma solução clássica. Além disso, essa solução, quando existe, é dada por

$$x(t) = T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, t \in [0, a]. \quad (3.5)$$

Demonstração: Suponhamos que o problema (3.3) – (3.4) tem uma solução clássica, que denotaremos por x .

Para $t \in [0, a)$ fixo, considere a função $g : [0, t] \rightarrow X$ dada por $g(s) = T(t - s)x(s)$.

Assim, g é diferenciável em $(0, a)$, com

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{d}{ds} [T(t - s)]x(s) + T(t - s)x'(s) \\ &= -AT(t - s)x(s) + T(t - s)[Ax(s) + f(s)] \\ &= T(t - s)f(s). \end{aligned}$$

Logo, como $f \in L^1([0, a], X)$, temos que a função $s \mapsto T(t - s)f(s)$ é integrável e então, do Teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s)ds = \int_0^t T(t - s)f(s)ds,$$

ou seja,

$$x(t) = T(t)x^0 + \int_0^t T(t - s)f(s)ds, \text{ para todo } t \in [0, a).$$

■

A expressão integral (3.5) motiva a seguinte definição, que enfraquece o conceito de solução para o problema (3.3) – (3.4) pois não requer a diferenciabilidade da função.

Definição 3.3. A função $x \in C([0, a], X)$ dada por

$$x(t) = T(t)x(0) + \int_0^t T(t - s)f(s)ds, \text{ para } t \in [0, a),$$

é chamada **solução fraca** de (3.3) – (3.4) em $[0, a)$.

Na sequência, consideremos a equação neutra em sua forma simplificada, isto é,

$$\frac{d}{dt}(x(t) + f(t, x(t))) = Ax(t) + g(t), t \in (0, a), \quad (3.6)$$

$$x(0) = x^0 \in X \quad (3.7)$$

Definição 3.4. Uma função $x : [0, a) \rightarrow X$ é uma **solução clássica** de (3.6) – (3.7) em $[0, a)$ se x é contínua em $[0, a)$, continuamente diferenciável em $(0, a)$, $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in (0, a)$, a função $s \mapsto AT(t - s)f(s, x(s))ds$, com $s \in [0, t]$, é integrável e as equações (3.6) e (3.7) são satisfeitas.

Desse modo, assumindo que x é uma solução clássica de (3.6) – (3.7) e que as funções $g, \tilde{f} : [0, a) \rightarrow X$, com $\tilde{f}(t) = f(t, x(t))$, são diferenciáveis, podemos reescrever a equação neutra na forma

$$x'(t) = Ax(t) + g(t) - \frac{d}{dt}f(t, x(t)).$$

Agora, considerando $\tilde{g}(t) = g(t) - \frac{d}{dt}f(t, x(t))$, obtemos a equação diferencial

$$x'(t) = Ax(t) + \tilde{g}(t). \quad (3.8)$$

Assim, baseado na solução fraca do problema de Cauchy, a solução da equação (3.6) – (3.7) tem a forma

$$x(t) = T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)\tilde{g}(s)ds.$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)[g(s) - \tilde{f}'(s)]ds \\ &= T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)g(s)ds - \int_0^t T(t-s)\tilde{f}'(s)ds \\ &= T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)g(s)ds - T(t-s)f(s, x(s)) \Big|_0^t \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{d}{ds}T(t-s) \right) f(s, x(s))ds \\ &= T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)g(s)ds - f(t, x(t)) + T(t)f(0, x^0) \\ &\quad - \int_0^t [AT(t-s)]f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Dessa forma, é natural considerarmos a seguinte definição de solução fraca para a equação neutra com retardo.

Definição 3.5. Uma função $x : [-r, a) \rightarrow X$ é uma **solução fraca** de (3.1) – (3.2) se x é contínua em $[0, a)$, para cada $t \in [0, a)$ a função $s \mapsto AT(t-s)F(s, x_s)$, com $s \in [0, t)$, é integrável, $x_0 = \varphi$ e, para $t \in [0, a)$, a equação integral abaixo é satisfeita

$$x(t) = T(t)[\varphi(0) + F(0, \varphi)] - F(t, x_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, x_s)ds + \int_0^t T(t-s)G(s, x_s)ds.$$

Apresentaremos alguns resultados de existência de solução fraca para (3.1) – (3.2), usando como ferramenta a Teoria de semigrupos analíticos desenvolvida no Capítulo 1, as condições já estabelecidas na introdução deste capítulo e um Teorema de ponto fixo.

Teorema 3.6. Seja $\varphi \in \Omega$ e assuma que valem as seguintes condições:

- (i) Existem constantes $\beta \in (0, 1)$ e $L \geq 0$ tais que a função F assume valores em $X_\beta = (\mathcal{D}(-A)^\beta, \|\cdot\|_\beta)$, $L\|(-A)^{-\beta}\| < 1$ e

$$\|(-A)^\beta F(t, \psi_1) - (-A)^\beta F(s, \psi_2)\| \leq L(|t-s| + \|\psi_1 - \psi_2\|_C),$$

para todo $t, s \in [0, a]$ e $\psi_1, \psi_2 \in \Omega$.

- (ii) Existem constantes $0 < b_\varphi < a$ e $r(\varphi) > 0$ tais que, para cada $t \in [0, b_\varphi]$, existe um conjunto compacto $U_t \subset X$ tal que $T(t)G(s, \psi) \in U_t$, para todo $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi] = \{\psi \in C, \|\psi - \varphi\|_C \leq r(\varphi)\}$ e todo $s \in [0, b_\varphi]$.

Então, existe uma solução fraca para o problema (3.1) – (3.2) definida em $[-r, b]$, para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Primeiramente, vamos definir algumas estimativas.

Sejam $t \in [0, b_\varphi]$ e $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$, observe que

$$\begin{aligned} \|(-A)^\beta F(t, \psi)\| &\leq \|(-A)^\beta F(t, \psi) - (-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| \\ &\leq L(|t - b_\varphi| + \|\psi - \varphi\|_C) + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| \\ &\leq L(b_\varphi + r(\varphi)) + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| \\ &= C_1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde, $C_1 = L(b_\varphi + r(\varphi)) + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\|$.

Além disso, da condição (ii), temos que existe um compacto $U_0 \subset X$, de modo que $G(s, \psi) \in U_0$, para todo $s \in [0, b_\varphi]$ e $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$, assim, visto que U_0 é limitado, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|G(t, \psi)\| \leq C_2 \text{ para todo } t \in [0, b_\varphi] \text{ e toda } \psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]. \tag{3.10}$$

Seja $y : [-r, a] \rightarrow X$ a função dada por

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -r \leq t < 0, \\ T(t)\varphi(0), & 0 \leq t \leq a. \end{cases}$$

Desse modo, para $\theta \in [-r, 0]$, temos

$$y_t(\theta) = y(t + \theta) = \begin{cases} \varphi(t + \theta), & -r \leq t + \theta < 0, \\ T(t + \theta)\varphi(0), & 0 \leq t + \theta \leq a, \end{cases}$$

o que nos permite concluir que a função $t \mapsto y_t$ é contínua em $[-r, a]$.

De fato, como $\varphi \in \Omega \subset C$ e $[-r, 0]$ é compacto, φ é uniformemente contínua em $[-r, 0]$, além disso, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, a função $t \mapsto T(t)\varphi(0)$ é uniformemente contínua em $[0, a]$. Mais ainda, como y é contínua em $t = 0$, podemos concluir que y é uniformemente contínua em $[-r, a]$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [-r, a]$ e $0 < |h| < \delta$ com $t + h \in [-r, a]$, temos

$$\|y(t + h) - y(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, se $t \in [0, a]$ e $0 < |h| < \delta$, com $t + h \in [0, a]$, então

$$\begin{aligned}\|y_{t+h} - y_t\|_C &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|y_{t+h}(\theta) - y_t(\theta)\|\} \\ &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|y(t+h+\theta) - y(t+\theta)\|\} < \varepsilon,\end{aligned}$$

garantindo que $t \mapsto y_t$ é contínua.

Em particular, esta função é contínua em $t = 0$. Consequentemente, dado $\varepsilon = \frac{r(\varphi)}{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|y_t - \varphi\|_C = \|y_t - y_0\|_C < \frac{r(\varphi)}{2}, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta_1. \quad (3.11)$$

Para simplificar a notação chamaremos $\frac{r(\varphi)}{2} = \rho$.

Na sequência, vamos determinar um intervalo onde se verificam certas desigualdades. Para tanto, fixemos $\eta > 0$ suficientemente pequeno, de modo que a desigualdade

$$(1 + \|(-A)^{-\beta}\| \widetilde{M}L)\eta < \frac{1 - \|(-A)^{-\beta}\|L}{2}, \quad (3.12)$$

seja válida.

Dessa forma, visto que a função $t \mapsto y_t$ é contínua, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|y_t - \varphi\|_C < \eta, \text{ para todo } t \in [0, \delta_2].$$

Além disso, como F também é contínua o conjunto $W = \{F(t, y_t); t \in [0, \delta_2]\}$ é um subconjunto compacto do espaço de Banach X , e então, W é totalmente limitado. Logo, existem $F(t_1, y_{t_1}), F(t_2, y_{t_2}), \dots, F(t_n, y_{t_n}) \in W$ tais que

$$W \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\eta}{2(M+1)}}(F(t_i, y_{t_i})),$$

onde $B_{\frac{\eta}{2(M+1)}}(F(t_i, y_{t_i}))$ denota a bola aberta de centro em $F(t_i, y_{t_i})$ e raio $\frac{\eta}{2(M+1)}$ em X .

Mais ainda, visto que a função $t \mapsto T(t)F(t_i, y_{t_i})$ é uniformemente contínua em $[0, a]$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, existem $\delta_{t_i} > 0$, tais que, para todo $0 < t < \delta_{t_i}$,

$$\|T(t)F(t_i, y_{t_i}) - T(0)F(t_i, y_{t_i})\| < \frac{\eta}{2}.$$

Tomando $0 < \delta_3 < \min\{a, \delta_{t_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$, para $t \in [0, \delta_3]$, sabemos que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $F(t, y_t) \in B_{\frac{\eta}{2(M+1)}}(F(t_j, y_{t_j}))$ e então,

$$\begin{aligned}\|T(t)F(t, y_t) - F(t, y_t)\| &\leq \|T(t)F(t, y_t) - T(t)F(t_j, y_{t_j})\| \\ &\quad + \|T(t)F(t_j, y_{t_j}) - F(t_j, y_{t_j})\| + \|F(t_j, y_{t_j}) - F(t, y_t)\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \widetilde{M} \frac{\eta}{2(\widetilde{M} + 1)} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2(\widetilde{M} + 1)} \\
&= \eta.
\end{aligned}$$

Considere ainda a função $H(t) = \int_0^t \frac{M_{1-\beta} C_1}{(t-s)^{1-\beta}} ds$, onde $t \in [0, a]$, C_1 foi definida no início desta demonstração e $M_{1-\beta}$ é a constante que aparece no Teorema 2.49. Note que esta função é contínua, assim, dado $\varepsilon_1 = \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4} \right) \rho > 0$, pela hipótese (i), existe $\widetilde{\delta}_4 > 0$ tal que, para todo $0 < t < \widetilde{\delta}_4$, temos

$$|H(t) - H(0)| < \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4} \right) \rho.$$

Por outro lado, observe também que

$$|H(t) - H(0)| = \left| \int_0^t \frac{M_{1-\beta} C_1}{(t-s)^{1-\beta}} ds \right| = \frac{M_{1-\beta} C_1 t^\beta}{\beta}.$$

Desse modo, para $\delta_4 = \frac{\widetilde{\delta}_4}{2}$, temos $0 < \delta_4 < \widetilde{\delta}_4$ e assim,

$$\frac{M_{1-\beta} C_1 \delta_4^\beta}{\beta} < \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4} \right) \rho.$$

Analogamente, considere a função $H_1(t) = \int_0^t \frac{LM_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} ds$, $t \in [0, a]$. Pelo fato desta função ser contínua, dado $\varepsilon_2 = 1 - L\|(-A)^{-\beta}\|$, existe $\widetilde{\delta}_5 > 0$ tal que, para todo $t \in [0, \widetilde{\delta}_5]$,

$$\frac{LM_{1-\beta} t^\beta}{\beta} = \left| \int_0^t \frac{LM_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} ds \right| = |H_1(t) - H_1(0)| < 1 - L\|(-A)^{-\beta}\|,$$

Logo, para $\delta_5 = \frac{\widetilde{\delta}_5}{2}$, segue que $0 < \delta_5 < \widetilde{\delta}_5$ e então,

$$L \left(\|(-A)^{-\beta}\| + \frac{M_{1-\beta} \delta_5^\beta}{\beta} \right) < 1.$$

Da mesma forma, considerando a função $H_2(t) = \widetilde{M}(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2)t$, $t \in [0, a]$, com C_2 definida em (3.10), segue da continuidade desta função que, para $\varepsilon_1 = \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4} \right) \rho$, existe $\widetilde{\delta}_6 > 0$ tal que, para $0 < t < \widetilde{\delta}_6$,

$$|H_2(t) - H_2(0)| = |\widetilde{M}(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2)t| < \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4} \right) \rho.$$

Logo, para $\delta_6 = \frac{\tilde{\delta}_6}{2}$, temos $0 < \delta_6 < \tilde{\delta}_6$ o que implica em

$$\tilde{M}(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2)\delta_6 < \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4}\right)\rho.$$

Finalmente, tomando $b = \min\{b_\varphi, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}$, usando as estimativas anteriores e a desigualdade (3.12), segue que, para todo $t \in [0, b]$,

$$\|y_t - \varphi\| < \eta, \quad (3.13)$$

$$\|T(t)F(t, y_t) - F(t, y_t)\| < \eta, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{M}(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2)b + (1 + \|(-A)^{-\beta}\|\tilde{M}L)\eta + \frac{C_1M_{1-\beta}b^\beta}{\beta} \\ & \leq \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4}\right)\rho + \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{2}\right)\rho + \left(\frac{1 - L\|(-A)^{-\beta}\|}{4}\right)\rho \\ & = (1 - L\|(-A)^{-\beta}\|)\rho, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$L\left(\|(-A)^{-\beta}\| + \frac{M_{1-\beta}b^\beta}{\beta}\right) < 1. \quad (3.16)$$

Consideremos agora o conjunto

$$S = \{u \in C([0, b], X); u(0) = 0; \|u(t)\| \leq \rho; \forall t \in [0, b]\},$$

munido da norma $\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0, b]} \|u(t)\|$.

Observe que:

- (a) S é limitado, com $\|u\|_\infty \leq \rho$, para todo $u \in S$
- (b) S é fechado, pois sua norma é a norma da convergência uniforme.
- (c) S é convexo.

De fato, dados $u, v \in S$, $\lambda \in [0, 1]$ e $z = (1 - \lambda)u + \lambda v$, temos $z \in C([0, b], X)$, $z(0) = (1 - \lambda)u(0) + \lambda v(0) = 0$ e, para todo $t \in [0, b]$,

$$\|z(t)\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v\| \leq (1 - \lambda)\|u(t)\| + \lambda\|v(t)\| \leq (1 - \lambda)\rho + \lambda\rho = \rho,$$

o que garante que $z \in S$ e portanto, S é convexo.

Além disso, para $u \in S$ dado, vamos considerar a extensão $\tilde{u}$ de u para o intervalo $[-r, b]$,

dada da seguinte forma

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & -r \leq t < 0, \\ u(t), & 0 \leq t \leq b. \end{cases}$$

Desse modo, para $\theta \in [-r, 0]$ temos

$$\tilde{u}_t(\theta) = \tilde{u}(t + \theta) = \begin{cases} 0, & -r \leq t + \theta < 0, \\ u(t + \theta), & 0 \leq t + \theta \leq b. \end{cases}$$

Observe que $t \mapsto \tilde{u}_t$ é contínua em $[-r, b]$, pois, como $u \in C([0, b], X)$, temos que $t \mapsto u(t)$ é uniformemente contínua no compacto $[0, b]$, além disso, visto que a função nula é uniformemente contínua em $[-r, 0]$ e $\tilde{u}$ é contínua em $t = 0$, concluímos que $\tilde{u}$ é uniformemente contínua em $[-r, b]$.

Logo, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [-r, b]$ e $0 < |h| < \delta$ com $t + h \in [-r, b]$, temos

$$\|\tilde{u}(t + h) - \tilde{u}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, se $t \in [0, b]$ e $0 < |h| < \delta$, com $t + h \in [0, b]$, então

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{t+h} - \tilde{u}_t\|_C &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|\tilde{u}_{t+h}(\theta) - \tilde{u}_t(\theta)\|\} \\ &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|\tilde{u}(t + h + \theta) - \tilde{u}(t + \theta)\|\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que garante que $t \mapsto \tilde{u}_t$ é contínua.

Note ainda que, para $u \in S$, $\tilde{u}_t + y_t \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $t \in [0, b]$.

Com efeito, como $\tilde{u}|_{[-r, 0]} = 0$ e $\tilde{u}|_{[0, b]} = u$, com $u(0) = 0$, $\tilde{u}$ é contínua em $[-r, b]$, e pelo fato de $u \in S$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_t\|_C &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|\tilde{u}_t(\theta)\|\} \\ &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|\tilde{u}(t + \theta)\|\} \\ &\leq \sup_{\tau \in [-r, b]} \|\tilde{u}(\tau)\| \\ &= \sup_{s \in [0, b]} \|u(s)\| \\ &\leq \rho, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, b]$.

Desse modo, de (3.11)

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_t + y_t - \varphi\|_C &\leq \|\tilde{u}_t\|_C + \|y_t - \varphi\|_C \\ &\leq \rho + \rho \\ &= r(\varphi).\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{u}_t + y_t \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $t \in [0, b]$.

Agora, defina $\Gamma : S \rightarrow C([0, b], X)$ por

$$\begin{aligned}\Gamma u(t) &= T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds, \quad \forall t \in [0, b].\end{aligned}$$

A seguir, a fim de usarmos o Teorema do ponto fixo de Sadovskii (Teorema A.11), o qual nos fornecerá uma solução fraca para (3.1) – (3.2), mostraremos que

- (I) a função Γ está bem definida;
- (II) $\Gamma(S) \subset S$;
- (III) Γ é um operador condensante (Definição A.9).

(I) Para garantirmos que Γ está bem definida, precisamos provar que as integrais que definem Γu existem e que $\Gamma u \in C([0, b], X)$ para toda $u \in S$. Faremos isso em 4 etapas:

Etapa I.1: Mostremos que $t \mapsto T(t)F(0, \varphi)$ é contínua em $[0, b]$.

Isso ocorre pois $F(0, \varphi) \in X$ e $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, ver Corolário 2.12.

Etapa I.2: Analisemos a continuidade da função $t \mapsto F(t, \tilde{u}_t + y_t)$ em $[0, b]$.

Neste caso, a continuidade segue do fato de $F : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ e $t \mapsto \tilde{u}_t + y_t$ para $t \in [0, b]$, serem contínuas.

Etapa I.3.(a): Mostremos que a função $s \mapsto AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é integrável em $[0, t]$, para todo $t \in (0, b]$.

De fato, como $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico, temos da Proposição 2.31 que a função $s \mapsto AT(t-s)$ é contínua em $[0, t)$, na topologia do operador uniforme. Desse modo,

$$s \mapsto AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s),$$

é contínua em $[0, t)$, e então é mensurável.

Por outro lado, pelo Teorema 2.49 e por (3.9) temos

$$\begin{aligned} \|AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| &\leq \|(-A)^{1-\beta}T(t-s)\| \|(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| \\ &\leq \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds &\leq \int_0^t \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}} ds \\ &= M_{1-\beta}C_1 \frac{t^\beta}{\beta} < +\infty, \end{aligned}$$

e portanto, do Teorema de Bochner (Teorema A.16) concluímos que $s \mapsto AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é integrável.

Etapa I.3.(b): Provemos agora a continuidade da função $t \mapsto \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds$ em $[0, b]$.

Dado $t \in [0, b]$, seja $h > 0$ tal que $t+h \in [0, b]$. Usando novamente o Teorema 2.49 e a desigualdade (3.9), segue que

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t+h} AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds + \int_t^{t+h} AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\ &\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|(-A)^{1-\beta}T(t+h-s)\| \|(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| + \int_t^{t+h} \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t+h-s)^{1-\beta}} ds \\ &= \left\| (T(h) - I) \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| + \frac{M_{1-\beta}C_1 h^\beta}{\beta}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \int_0^{t+h} AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\left\| (T(h) - I) \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| + \frac{M_{1-\beta}C_1 h^\beta}{\beta} \right) = 0, \end{aligned}$$

pois, tomando $v = \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \in X$, usamos o fato de $t \mapsto T(t)v$ ser contínua para $t \geq 0$.

Portanto, $t \mapsto \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds$ é contínua à direita.

Para mostrarmos a continuidade à esquerda, considere $t \in (0, b]$ e $\tilde{\varepsilon} > 0$.

Tome ε , de modo que $0 < \varepsilon < \min \left\{ t, \sqrt[\beta]{\frac{\tilde{\varepsilon}\beta}{4M_{1-\beta}C_1}} \right\}$.

Observe que a função $\tau \mapsto T(\tau) \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s-\varepsilon)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds$ é uniformemente contínua em $[0, b]$, isto é, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $\tau, \xi \in [0, b]$, com $0 < |\tau - \xi| < \delta_1$, temos

$$\left\| [T(\tau) - T(\xi)] \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s-\varepsilon)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}.$$

Logo, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon\}$ e $0 < h < \delta$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-h} AT(t-h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds + \int_{t-\varepsilon}^{t-h} AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right. \\ &+ \left. \int_{t-h}^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right. \\ &- \left. \int_{t-\varepsilon}^{t-h} AT(t-h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\ &\leq \left\| [T(\varepsilon) - T(\varepsilon-h)] \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s-\varepsilon)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\ &+ \int_{t-\varepsilon}^{t-h} \|(-A)^{1-\beta}T(t-s)\| \|(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &+ \int_{t-h}^t \|(-A)^{1-\beta}T(t-s)\| \|(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &+ \int_{t-\varepsilon}^{t-h} \|(-A)^{1-\beta}T(t-h-s)\| \|(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &< \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \left(\frac{-(t-s)^\beta}{\beta} \Big|_{t-\varepsilon}^{t-h} \right) + \left(\frac{-(t-s)^\beta}{\beta} \Big|_{t-h}^t \right) \\ &+ M_{1-\beta}C_1 \left[\left(\frac{-(t-h-s)^\beta}{\beta} \Big|_{t-\varepsilon}^{t-h} \right) \right] \\ &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + M_{1-\beta}C_1 \left[\frac{\varepsilon^\beta}{\beta} + \frac{(\varepsilon-h)^\beta}{\beta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + 2M_{1-\beta}C_1 \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} \\
&< \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon},
\end{aligned}$$

garantindo a continuidade à esquerda.

Etapa I.4.(a): Mostremos que a função $s \mapsto T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é integrável em $[0, t]$, para todo $t \in (0, b]$.

De fato, como $G : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ e $t \mapsto \tilde{u}_t + y_t$ são funções contínuas e $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico, a função

$$s \mapsto T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)$$

é contínua em $[0, t]$ e então, é mensurável.

Além disso, como $\tilde{u}_s + y_s \in B_r(\varphi)[\varphi]$ para todo $t \in [0, b]$, de (3.10) segue que

$$\|T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| < \tilde{M}C_2,$$

para todo $s \in [0, t]$ e $t \in [0, b]$. Logo,

$$\int_0^t \|T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \leq \int_0^t \tilde{M}C_2 ds = \tilde{M}C_2 t < +\infty,$$

e portanto, do Teorema de Bochner, $s \mapsto T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é integrável em $[0, t]$.

Etapa I.4.(b): Mostremos a continuidade da função $t \mapsto \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds$ em $[0, b]$.

Para isso, dado $t \in [0, b]$, seja $h > 0$ tal que $t+h \in [0, b]$. Assim

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^t T(h)T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds + \int_t^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&\quad + \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| + \int_t^{t+h} \tilde{M}C_2 ds \\
&= \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| + \tilde{M}C_2 h.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| + \tilde{M}C_2 h = 0,
\end{aligned}$$

pois, tomando $\tilde{v} = \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \in X$, usamos o fato de $t \mapsto T(t)\tilde{v}$ ser contínua.

Portanto, $t \mapsto \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds$ é contínua à direita.

Para provarmos a continuidade à esquerda, considere $t \in (0, b]$ e $h > 0$, com $t-h \in (0, b]$.

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-h} T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^{t-h} \| [T(t-s) - T(t-h-s)]G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \\
&+ \int_{t-h}^t \| T(t-s) \| \| G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \\
&= \int_0^{t-h} \| [T(t-s) - T(t-h-s)]G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds + \tilde{M}C_2 h.
\end{aligned}$$

Pelo fato de $(s, \tilde{u}_s + y_s) \in [0, b] \times B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $s \in [0, b]$ e $u \in S$, pela hipótese (ii) existe um compacto U_0 tal que $G(s, \tilde{u}_s + y_s) \in U_0$, para todo $s \in [0, t]$, com $t \in (0, b]$.

Assim, como X é um espaço de Banach, segue que U_0 é totalmente limitado, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomando $r = \frac{\varepsilon}{8\tilde{M}b}$, existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in U_0$ tais que

$$U_0 \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\tilde{r}}(x_i).$$

Além disso, sabemos que para todo $x \in X$ a função $t \mapsto T(t)x$ é uniformemente contínua em $[0, b]$. Em particular para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t \mapsto T(t)x_i$ é uniformemente contínua em $[0, b]$, logo, existe $\delta_i > 0$ tal que, para todo $\xi, \tau \in [0, b]$ com $0 < |\xi - \tau| < \delta_i$,

$$\|T(\xi)x_i - T(\tau)x_i\| < \frac{\varepsilon}{4b}.$$

Mais ainda, para $x \in U_0$, existe $x_j \in U_0$ de modo que $x \in B_{\tilde{r}}(x_j)$, e assim, tomando $\tilde{\delta} = \min\{\delta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, temos, para todo $\xi, \tau \in [0, b]$ com $0 < |\xi - \tau| < \tilde{\delta}$, que

$$\begin{aligned} \|T(\xi)x - T(\tau)x\| &\leq \|T(\xi)x - T(\xi)x_j\| + \|T(\xi)x_j - T(\tau)x_j\| \\ &\quad + \|T(\tau)x_j - T(\tau)x\| \\ &< \tilde{M}\|x - x_j\| + \frac{\varepsilon}{4b} + \tilde{M}\|x_j - x\| \\ &\leq \tilde{M}\frac{\varepsilon}{8\tilde{M}b} + \frac{\varepsilon}{4b} + \tilde{M}\frac{\varepsilon}{8\tilde{M}b} \\ &= \frac{\varepsilon}{2b}, \end{aligned}$$

ou seja, dado $x \in U_0$, e $\xi, \tau \in [0, b]$, com $0 < |\xi - \tau| < \tilde{\delta}$, temos

$$\|T(\xi)x - T(\tau)x\| < \frac{\varepsilon}{2b}.$$

Agora, considere $\delta = \min\left\{\tilde{\delta}, \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}C_2}\right\}$, desse modo, como $G(s, \tilde{u}_s + y_s) \in U_0$ para todo $s \in [0, t]$, se $0 < h < \delta$, então

$$\|[T(t-s) - T(t-h-s)]G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| < \frac{\varepsilon}{2b}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-h} T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\ &\leq \int_0^{t-h} \|[T(t-s) - T(t-h-s)]G(s, \tilde{u}_s + y_s)\|ds + \tilde{M}C_2h \\ &\leq \int_0^{t-h} \frac{\varepsilon}{2b}ds + \tilde{M}C_2h \\ &\leq b\frac{\varepsilon}{2b} + \tilde{M}C_2h \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{M}C_2\delta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{M}C_2\frac{\varepsilon}{2\tilde{M}C_2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que garante a continuidade à esquerda da função.

Portanto, pelas etapas I.1, I.2, I.3.(a), I.3.(b), I.4.(a) e I.4.(b), concluímos que a função Γ está bem definida e $\Gamma u \in C([0, b], X)$ para todo $u \in S$.

Nosso próximo passo será mostrar o item (II), isto é, que $\Gamma(S) \subset S$. Para isso, vamos reescrever Γ como a soma de duas aplicações: Γ_1 e Γ_2 , onde $\Gamma_1, \Gamma_2 : S \rightarrow C([0, b], X)$ são definidas por

$$(\Gamma_1 u)(t) = T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds, t \in [0, b],$$

$$(\Gamma_2 u)(t) = \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds, t \in [0, b].$$

(II) $\Gamma(S) \subset S$

Dado $u \in S$, já provamos que $\Gamma u \in C([0, b], X)$.

Além disso, note que

$$(\Gamma u)(0) = (\Gamma_1 u)(0) + (\Gamma_2 u)(0) = F(0, \varphi) - F(0, \tilde{u}_0 + y_0) = F(0, \varphi) - F(0, 0 + \varphi) = 0.$$

Desse modo, basta mostrarmos que $\|\Gamma u(t)\| < \rho$, para todo $t \in [0, b]$.

Seja $t \in [0, b]$, observe, inicialmente, que, pela hipótese (i), as desigualdades (3.13) e (3.14), e o Teorema 2.49,

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_1 u)(t)\| &\leq \|T(t)F(0, \varphi) - T(t)F(t, y_t)\| + \|T(t)F(t, y_t) - F(t, y_t)\| \\ &\quad + \|F(t, y_t) - F(t, \tilde{u}_t + y_t)\| + \left\| \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\ &= \|(-A)^{-\beta}T(t)[(-A)^{\beta}F(0, \varphi) - (-A)^{\beta}F(t, y_t)]\| \\ &\quad + \|(T(t) - I)F(t, y_t)\| \\ &\quad + \|(-A)^{-\beta}[(-A)^{\beta}F(t, y_t) - (-A)^{\beta}F(t, \tilde{u}_t + y_t)]\| + \\ &\quad + \int_0^t \|A^{1-\beta+\beta}T(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)\|ds \\ &\leq \|(-A)^{-\beta}\|\tilde{M}L(|0-t| + \|\varphi - y_t\|_C) + \eta \\ &\quad + \|(-A)^{-\beta}\|L(|t-t| + \|y_t - (\tilde{u}_t + y_t)\|_C) + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}}ds \\ &\leq \|(-A)^{-\beta}\|\tilde{M}L(b + \eta) + \eta + \|(-A)^{-\beta}\|L\rho + \frac{M_{1-\beta}C_1b^{\beta}}{\beta}. \end{aligned}$$

Também, usando a desigualdade (3.10), para $t \in [0, b]$ obtemos

$$\|(\Gamma_2 u)(t)\| \leq \int_0^t \|T(t-s)\|\|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\|ds \leq \int_0^t \tilde{M}C_2ds \leq \tilde{M}C_2b.$$

Desse modo, por (3.15) concluímos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t)\| &\leq \|(-A)^{-\beta}\|\tilde{M}L(b + \eta) + \eta + \|(-A)^{-\beta}\|L\rho + \frac{M_{1-\beta}C_1b^{\beta}}{\beta} + \tilde{M}C_2b \\ &= \left(\tilde{M}(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2)b + (1 + \|(-A)^{-\beta}\|\tilde{M}L)\eta + \frac{C_1M_{1-\beta}b^{\beta}}{\beta} \right) \\ &\quad + L\|(-A)^{-\beta}\|\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \|(-A)^{-\beta}\|L)\rho + \|(-A)^{-\beta}\|L\rho \\
&= \rho,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, b]$.

Portanto, $\Gamma u \in S$, para todo $u \in S$.

(III) Por fim, mostremos que Γ é um operador condensante.

Para isso, provaremos que Γ_1 é uma contração e que Γ_2 é completamente contínua. Faremos isso em 3 etapas.

Etapa III.1: Γ_1 é uma contração.

Sejam $u, v \in S$ e $t \in [0, b]$. Como $\tilde{u}|_{[-r,0]} = 0, \tilde{v}|_{[-r,0]} = 0, \tilde{u}|_{[0,b]} = u$ e $\tilde{v}|_{[0,b]} = v$, temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C &= \sup_{\theta \in [-r,0]} \|\tilde{u}(t+\theta) - \tilde{v}(t+\theta)\| \\
&\leq \sup_{s \in [0,b]} \|u(s) - v(s)\| \\
&= \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma_1 u)(t) - (\Gamma_1 v)(t)\| &= \left\| T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - T(t)F(0, \varphi) \right. \\
&\quad \left. + F(t, \tilde{v}_t + y_t) + \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{v}_s + y_s)ds \right\| \\
&\leq \|(-A)^{-\beta}\| \|(-A)^\beta F(t, \tilde{u}_t + y_t) - (-A)^\beta F(t, \tilde{v}_t + y_t)\| \\
&\quad + \int_0^t \|A^{1-\beta}T(t-s)A^\beta [F(s, \tilde{v}_s + y_s) - F(s, \tilde{u}_s + y_s)]\| ds \\
&\leq \|(-A)^{-\beta}\|L\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}}L\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_C ds \\
&\leq L \left(\|(-A)^{-\beta}\| + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} ds \right) \|u - v\|_\infty \\
&\leq L \left(\|(-A)^{-\beta}\| + \frac{M_{1-\beta}b^\beta}{\beta} \right) \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $K = L \left(\|(-A)^{-\beta}\| + \frac{M_{1-\beta}b^\beta}{\beta} \right)$, por (3.16) segue que $0 < K < 1$.

Logo, $\|\Gamma_1 u - \Gamma_1 v\|_\infty = \sup_{t \in [0,b]} \|(\Gamma_1 u)(t) - (\Gamma_1 v)(t)\| \leq K\|u - v\|_\infty$, para quaisquer $u, v \in S$, ou seja, Γ_1 é uma contração.

Etapa III.2: Mostremos que Γ_2 é contínua em S .

Para tanto, sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em S e $u \in S$ tal que $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Queremos mostrar que $\|\Gamma u_n - \Gamma u\|_\infty \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Observe que o conjunto $\{u_n, u; n \in \mathbb{N}\}$ é sequencialmente compacto, e assim compacto. Além disso, considerando as extensões de u_n e u em $[-r, 0]$, obtemos que o conjunto

$$W_1 = \{(s, \tilde{u}_s + y_s), (s, (\tilde{u}_n)_s + y_s); n \in \mathbb{N}, s \in [0, b]\}$$

também é compacto.

Desse modo, como G é contínua no compacto W_1 , G é uniformemente contínua em W_1 , assim, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(s, \phi_1), (s, \phi_2) \in W_1$, com $\|(s, \phi_1) - (s, \phi_2)\| < \delta$, temos

$$\|G(s, \phi_1) - G(s, \phi_2)\| < \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}b}.$$

Agora, como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para u , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$ e todo $s \in [0, b]$,

$$\|(s, (\tilde{u}_n)_s + y_s) - (s, \tilde{u}_s + y_s)\| = \|(\tilde{u}_n)_s + y_s - \tilde{u}_s - y_s\|_C \leq \|u_n - u\|_\infty < \delta.$$

Logo, para $t \in [0, b]$ e $n > n_0$, segue que

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_2 u_n)(t) - (\Gamma_2 u)(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|G(s, (\tilde{u}_n)_s + y_s) - G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &\leq \int_0^b \tilde{M} \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}b} ds = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n > n_0$, concluímos que

$$\|\Gamma_2 u_n - \Gamma_2 u\|_\infty = \sup_{t \in [0, b]} \|(\Gamma_2 u_n)(t) - (\Gamma_2 u)(t)\| < \varepsilon,$$

garantindo a continuidade de Γ_2 .

Etapa III.3: Provemos que Γ_2 é um operador compacto.

Observe inicialmente que, como $\Gamma_2(S) \subset C([0, b], X)$ e S é limitado, basta mostrarmos que Γ_2 satisfaz as hipóteses do Teorema de Arzelá-Ascoli, ou seja, $\Gamma_2(S) = \{\Gamma_2 u; u \in S\}$ é equicontínuo e $\Gamma_2(S)(t) = \{(\Gamma_2 u)(t); u \in S\}$ é relativamente compacto em X , para todo $t \in [0, b]$.

Etapa III.3.(a): Provemos que $\Gamma_2(S)$ é equicontínuo.

Para isso, sejam $t \in (0, b]$, $h > 0$ e $\tilde{\varepsilon} > 0$ com $t + h \in (0, b]$. Tomemos $0 < \varepsilon < \min \left\{ t, \frac{\tilde{\varepsilon}}{b + 3\tilde{M}C_2} \right\}$, temos

$$\begin{aligned}
& \|(\Gamma_2 u)(t+h) - (\Gamma_2 u)(t)\| = \\
& = \left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
& \leq \left\| \int_0^{t-\varepsilon} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
& + \left\| \int_{t-\varepsilon}^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| + \left\| \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
& \leq \left\| \int_0^{t-\varepsilon} T(t+h-s+\varepsilon-\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s+\varepsilon-\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
& + \int_{t-\varepsilon}^{t+h} \|T(t+h-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds + \int_{t-\varepsilon}^t \|T(t-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
& \leq \left\| \int_0^{t-\varepsilon} [T(t+h-s-\varepsilon) - T(t-s-\varepsilon)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
& + \int_{t-\varepsilon}^{t+h} \tilde{M}C_2 ds + \int_{t-\varepsilon}^t \tilde{M}C_2 ds \\
& \leq \int_0^{t-\varepsilon} \|[T(t+h-s-\varepsilon) - T(t-s-\varepsilon)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
& + \tilde{M}C_2(h+\varepsilon) + \tilde{M}C_2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Observe agora que, como $(s, \tilde{u}_s + y_s) \in [0, b] \times B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $s \in [0, b]$ e $u \in S$, pela hipótese (ii) existe um compacto U_ε tal que $T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \in U_\varepsilon$, para todo $s \in [0, b]$.

Assim, como X é um espaço de Banach, U_ε é totalmente limitado, ou seja, dado $\tilde{r} = \frac{\varepsilon}{4\tilde{M}}$, existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in U_\varepsilon$ tais que

$$U_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\tilde{r}}(x_i).$$

Além disso, sabemos que para todo $x \in X$ a função $t \mapsto T(t)x$ é uniformemente contínua em $[0, b]$. Em particular, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t \mapsto T(t)x_i$ é uniformemente contínua em $[0, b]$, logo, existe $\delta_i > 0$ tal que, para todo $\xi, \tau \in [0, b]$ com $0 < |\xi - \tau| < \delta_i$,

$$\|T(\xi)x_i - T(\tau)x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais ainda, para $x \in U_\varepsilon$, existe $x_j \in X$ de modo que $x \in B_{\tilde{r}}(x_j)$, e assim, tomando

$\tilde{\delta} = \min\{\delta_i; i = 1, 2, \dots, n\}$, para todo $\xi, \tau \in [0, b]$ com $0 < |\xi - \tau| < \tilde{\delta}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \|T(\xi)x - T(\tau)x\| &\leq \|T(\xi)x - T(\xi)x_j\| + \|T(\xi)x_j - T(\tau)x_j\| \\
 &\quad + \|T(\tau)x_j - T(\tau)x\| \\
 &< \tilde{M}\|x - x_j\| + \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{M}\|x_j - x\| \\
 &\leq \tilde{M}\frac{\varepsilon}{4\tilde{M}} + \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{M}\frac{\varepsilon}{4\tilde{M}} \\
 &= \varepsilon,
 \end{aligned}$$

isto é, dado $x \in U_\varepsilon$, para todo $\xi, \tau \in [0, b]$ com $0 < |\xi - \tau| < \tilde{\delta}$, $\|T(\xi)x - T(\tau)x\| < \varepsilon$.

Em particular, como $T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \in U_\varepsilon$ para todo $s \in [0, t]$, dado $0 < h < \min\{\tilde{\delta}, \varepsilon\}$ concluímos que

$$\|[T(t+h-s-\varepsilon) - T(t-s-\varepsilon)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 &\|(\Gamma_2 u)(t+h) - (\Gamma_2 u)(t)\| \\
 &\leq \int_0^{t-\varepsilon} \|[T(t+h-s-\varepsilon) - T(t-s-\varepsilon)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
 &\quad + \tilde{M}C_2(h+\varepsilon) + \tilde{M}C_2\varepsilon \\
 &\leq \int_0^{t-\varepsilon} \varepsilon ds + \tilde{M}C_2(h+\varepsilon) + \tilde{M}C_2\varepsilon \\
 &= \varepsilon(t-\varepsilon) + \tilde{M}C_2(h+\varepsilon) + \tilde{M}C_2\varepsilon \\
 &\leq \varepsilon b + 3\tilde{M}C_2\varepsilon \\
 &= (b + 3\tilde{M}C_2)\varepsilon \\
 &< (b + 3\tilde{M}C_2)\frac{\tilde{\varepsilon}}{b + 3\tilde{M}C_2} \\
 &= \tilde{\varepsilon},
 \end{aligned}$$

garantindo que $\Gamma_2(S)$ é equicontínuo à direita de t .

Mostremos agora que $\Gamma_2(S)$ é equicontínuo à esquerda de t .

Para tanto, sejam $t \in (0, b]$, e $\tilde{\varepsilon} > 0$ dados e consideremos $0 < \varepsilon < \min\left\{t, \frac{\tilde{\varepsilon}}{b + 3\tilde{M}C_2}\right\}$.

Assim, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 < h < t - \varepsilon$ e $t - h \in (0, b]$, temos

$$\begin{aligned}
 &\|(\Gamma_2 u)(t) - (\Gamma_2 u)(t-h)\| = \\
 &= \left\| \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-h} T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^{t-h-\varepsilon} T(t-\varepsilon-s)T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds + \int_{t-h-\varepsilon}^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right. \\
&\quad - \int_0^{t-h-\varepsilon} T(t-\varepsilon-h-s)T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \\
&\quad \left. - \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^{t-h-\varepsilon} \| [T(t-\varepsilon-s) - T(t-\varepsilon-h-s)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \\
&\quad + \int_{t-h-\varepsilon}^t \| T(t-s) \| \| G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds + \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} \| T(t-h-s) \| \| G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \\
&\leq \int_0^{t-h-\varepsilon} \| [T(t-\varepsilon-s) - T(t-\varepsilon-h-s)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \\
&\quad + \int_{t-h-\varepsilon}^t \tilde{M}C_2 ds + \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} \tilde{M}C_2 ds.
\end{aligned}$$

Já vimos que, para $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \in U_\varepsilon$, onde U_ε é um conjunto compacto. Além disso, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que para todo $\xi, \tau \in [0, b]$, com $0 < |\xi - \tau| < \tilde{\delta}$, $\|T(\xi)[T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)] - T(\tau)[T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)]\| < \varepsilon$.

Logo, se $0 < h < \min\{\tilde{\delta}, \varepsilon\}$, então

$$\| [T(t-\varepsilon-s) - T(t-\varepsilon-h-s)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| < \varepsilon$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
&\|(\Gamma_2 u)(t) - (\Gamma_2 u)(t-h)\| \leq \\
&\leq \int_0^{t-h-\varepsilon} \| [T(t-\varepsilon-s) - T(t-\varepsilon-h-s)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \\
&\quad + \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} \tilde{M}C_2 ds + \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} \tilde{M}C_2 ds \\
&\leq \int_0^{t-h-\varepsilon} \varepsilon ds + \tilde{M}C_2(h+\varepsilon) + \tilde{M}C_2\varepsilon \\
&= \varepsilon(t-h-\varepsilon) + \tilde{M}C_2(h+\varepsilon) + \tilde{M}C_2\varepsilon \\
&\leq \varepsilon b + \tilde{M}C_2(\varepsilon + \varepsilon) + \tilde{M}C_2\varepsilon \\
&= (b + 3\tilde{M}C_2)\varepsilon \\
&< (b + 3\tilde{M}C_2) \frac{\tilde{\varepsilon}}{b + 3\tilde{M}C_2} \\
&= \tilde{\varepsilon},
\end{aligned}$$

garantindo que $\Gamma_2(S)$ é equicontínuo à esquerda de t .

Por fim, como o domínio das funções em $\Gamma_2(S)$ é compacto $[0, b]$, podemos concluir que

$\Gamma_2(S)$ é equicontínuo. (ver Teorema A.17)

Etapa III.3.(b): Mostremos que $\Gamma_2(S)(t)$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [0, b]$.

Dados $t > 0$ e $u \in S$, seja $0 < \varepsilon < t$.

Assim,

$$\begin{aligned} (\Gamma_2 u)(t) &= \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \\ &= \int_0^{t-\varepsilon} T(t-\varepsilon-s)T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \\ &\quad + \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds. \end{aligned}$$

Pela hipótese (ii), existe um conjunto $U_\varepsilon \subset X$ compacto tal que $T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \in U_\varepsilon$ para todo $u \in S$ e $t \in [0, b]$. Mais ainda, como a função $s \mapsto T(s)x$ é contínua para todo $x \in X$ fixo, concluímos que o conjunto

$$V_\varepsilon = \{T(s)w; s \in [0, t-\varepsilon], w \in U_\varepsilon\}$$

é sequencialmente compacto e então, compacto.

Consideremos agora a envoltória convexa de V_ε , denotada por $co(V_\varepsilon)$. Como V_ε é compacto, $\overline{co(V_\varepsilon)}$ também é compacto. Mais ainda, $(t-\varepsilon)\overline{co(V_\varepsilon)}$ é compacto.

Além disso, pelo Teorema do valor médio para integrais, temos

$$\int_0^{t-\varepsilon} T(t-\varepsilon-s)T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds = (t-\varepsilon)T(t-\varepsilon-\xi)T(\varepsilon)G(\xi, \tilde{u}_\xi + y_\xi),$$

para algum $\xi \in [0, t-\varepsilon]$.

Logo, segue que

$$\int_0^{t-\varepsilon} T(t-\varepsilon-s)T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \in (t-\varepsilon)\overline{co(V_\varepsilon)},$$

para todo $u \in S$.

Por outro lado, para todo $u \in S$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| &\leq \int_{t-\varepsilon}^t \|T(t-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &\leq \tilde{M}C_2\varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, podemos afirmar que, para ε suficientemente pequeno,

$$(\Gamma_2 u)(t) = \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \in (t-\varepsilon)\overline{co(V_\varepsilon)},$$

para todo $u \in S$.

Dessa forma, a compacidade de $(t-\varepsilon)\overline{co(V_\varepsilon)}$ nos garante que $\Gamma_2(S)(t)$ é relativamente compacto em X , para todo $t \in [0, b]$.

Portanto, pelas etapas III3.(a) e III3.(b) e pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, concluímos que $\Gamma_2(S)$ é relativamente compacto. Logo, Γ_2 é compacta.

Assim, das etapas (II) e (III) obtemos que Γ_2 é completamente contínua e portanto, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ é um operador condensante em S . Por fim, usando o Teorema do ponto fixo de Sadovskii, existe $v \in S$ tal que v é o ponto fixo de Γ .

Desse modo, definindo $x : [-r, b] \rightarrow X$ por $x(t) = \tilde{v}(t) + y(t)$, temos:

- (i) x é contínua em $[0, b]$;
- (ii) $x_t = \tilde{v}_t + y_t$, para todo $t \in [0, b]$, e, em particular, $x_0 = v_0 + y_0 = 0 + \varphi = \varphi$;
- (iii) As funções $s \mapsto AT(t-s)F(s, x_s)$ e $s \mapsto T(t-s)G(s, x_s)$ são integráveis;
- (iv) Para $t \in [0, b]$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{v}(t) + y(t) \\ &= v(t) + y(t) \\ &= (\Gamma v)(t) + T(t)\varphi(0) \\ &= T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{v}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{v}_s + y_s)ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{v}_s + y_s)ds + T(t)\varphi(0) \\ &= T(t)[\varphi(0) + F(0, \varphi)] - F(t, x_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, x_s)ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, x_s)ds. \end{aligned}$$

Portanto, x é uma solução fraca para o problema (3.1) – (3.2) em $[-r, b]$.

■

O resultado a seguir é uma variação do teorema anterior, onde, a hipótese (ii) é trocada pelo fato de $(T(t))_{t \geq 0}$ ser um semigrupo compacto para $t > 0$ e a função G levar um conjunto limitado em um conjunto limitado.

Corolário 3.7. *Seja $\varphi \in \Omega$ e assumamos que a condição (i) do teorema anterior seja satisfeita. Se o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto para $t > 0$ e a função G leva um conjunto limitado em um*

conjunto limitado, então existe uma solução fraca para o problema (3.1) – (3.2) em $[-r, b]$, para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Sejam $b_\varphi \in (0, a)$ e $r(\varphi) > 0$.

Assim, como o conjunto $[0, b_\varphi] \times B_{r(\varphi)}[\varphi]$ é um conjunto limitado, segue por hipótese, que

$$\{G(s, \psi); s \in [0, b_\varphi] \text{ e } \psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]\}$$

também é limitado.

Além disso, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo compacto, o conjunto

$$\{T(t)G(s, \psi); s \in [0, b_\varphi] \text{ e } \psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]\}$$

é relativamente compacto, para todo $t > 0$.

Logo, para cada $t \in (0, b_\varphi]$, existe um compacto $U_t \subset X$ tal que $T(t)G(s, \psi) \in U_t$, para todo $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ e $s \in [0, b_\varphi]$.

Desse modo, obtemos as hipóteses do Teorema 3.6, com exceção de $G(s, \psi)$ pertencer a um compacto U_0 , quando $s \in [0, b_\varphi]$ e $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$. Porém, se procedermos como na demonstração do Teorema 3.6, veremos que para obter a estimativa (3.10) basta que $\{G(s, \psi); (s, \psi) \in [0, b_\varphi] \times B_{r(\varphi)}[\varphi]\}$ seja limitado, o que ocorre pelo fato de G levar conjunto limitado em conjunto limitado. Além disso, como $s \mapsto G(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é contínua $\{G(s, \tilde{u}_s + y_s); s \in [0, b_\varphi]\}$ é compacto e assim, as estimativas feitas no Teorema 3.6 continuam válidas.

Portanto, o Teorema 3.6 nos garante que existe uma solução fraca para o problema (3.1) – (3.2) definida em $[-r, b]$ com $0 < b \leq a$.

■

A seguir apresentaremos outro resultado de existência de solução fraca para (3.1) – (3.2), usando o Teorema do ponto fixo de Banach.

Teorema 3.8. *Assuma que a condição (i) do Teorema 3.6 é satisfeita. Se G é contínua e existe $N > 0$ tal que*

$$\|G(t, \phi) - G(t, \psi)\| \leq N\|\phi - \psi\|_C,$$

para todo $0 \leq t \leq a$ e $\phi, \psi \in C$, então, para cada $\varphi \in \Omega$, existe uma única solução fraca do problema (3.1) – (3.2) em $[-r, b]$, para algum $b > 0$.

Demonstração: Primeiramente, vamos definir algumas limitações.

Sejam $b_\varphi \in (0, a)$ e $r(\varphi) = b_\varphi$. Procedendo como na demonstração do Teorema 3.6 temos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|(-A)^\beta F(t, \psi)\| \leq C_1,$$

para todo $t \in [0, b_\varphi]$ e todo $\psi \in B_{b_\varphi}[\varphi]$.

Além disso, como a função $t \mapsto G(t, \varphi)$ é contínua no compacto $[0, b_\varphi]$, segue que $G(\cdot, \varphi)$ é limitada em $[0, b_\varphi]$ e assim,

$$\begin{aligned} \|G(t, \psi)\| &\leq \|G(t, \psi) - G(t, \varphi)\| + \|G(t, \varphi)\| \\ &\leq N\|\psi - \varphi\|_C + \max_{t \in [0, b_\varphi]} \|G(t, \varphi)\| \\ &\leq Nb_\varphi + \max_{t \in [0, b_\varphi]} \|G(t, \varphi)\| \\ &= C_2, \end{aligned} \tag{3.17}$$

para todo $t \in [0, b_\varphi]$ e todo $\psi \in B_{b_\varphi}[\varphi]$, onde $C_2 = Nb_\varphi + \max_{t \in [0, b_\varphi]} \|G(t, \varphi)\|$.

Seja $y : [-r, a] \rightarrow X$ a função dada por

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -r \leq t < 0, \\ T(t)\varphi(0), & 0 \leq t \leq a. \end{cases}$$

Desse modo, a função $t \mapsto y_t$ é uniformemente contínua em $[0, a]$, como visto na demonstração do Teorema 3.6.

Assim, para $\varepsilon = \frac{b_\varphi}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para $t \in [0, \delta_1]$,

$$\|y_t - \varphi\|_C < \frac{b_\varphi}{2}.$$

Para facilitar a notação, chamaremos $\rho = \frac{b_\varphi}{2}$.

Agora, procedendo de maneira semelhante ao que foi feito no início da demonstração do Teorema 3.6, para $\eta > 0$ suficientemente pequeno, existe $0 < b < b_\varphi$ tal que, para $t \in [0, b]$ as desigualdades a seguir são satisfeitas:

$$\|T(t)F(t, y_t) - F(t, y_t)\| \leq \eta, \tag{3.18}$$

$$\tilde{M}(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2)b + (1 + \|(-A)^{-\beta}\|\tilde{M}L)\eta + \frac{C_1M_{1-\beta}b^\beta}{b} \leq (1 - \|(-A)^{-\beta}\|L)\rho, \tag{3.19}$$

$$\left(\|(-A)^{-\beta}\|L + \frac{M_{1-\beta}Lb^\beta}{b} + \tilde{M}Nb \right) < 1. \tag{3.20}$$

Consideremos o conjunto

$$S = \{u \in C([0, b], X); u(0) = 0, \|u(t)\| \leq \rho, t \in [0, b]\},$$

munido da norma $\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0, b]} \|u(t)\|$. Temos que $S \subset X$ é um espaço de Banach, limitado, fechado e convexo.

Além disso, para $u \in S$ dado, consideremos a extensão $\tilde{u}$ de u para o intervalo $[-r, b]$, dada

da seguinte forma

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & -r \leq t < 0, \\ u(t), & 0 \leq t \leq b. \end{cases}$$

Desse modo, como já visto anteriormente, a função $t \mapsto \tilde{u}_t$ é contínua em $[-r, b]$.

Defina $\Gamma : S \rightarrow C([0, b], X)$ por

$$\begin{aligned} \Gamma u(t) &= T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds, \quad 0 \leq t \leq b. \end{aligned}$$

Observe que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, com Γ_1 e Γ_2 definidas na demonstração do Teorema 3.6.

Desse modo, podemos afirmar que:

- (i) Se $u \in S$, então $\tilde{u}_t + y_t \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $t \in [0, b]$.
- (ii) A função Γ está bem definida.

De fato, como as hipóteses sobre a função F continuam as mesmas que no Teorema 3.6, Γ_1 está bem definida.

Mostremos, então, que Γ_2 está bem definida.

Primeiramente, note que a continuidade das funções G e $t \mapsto \tilde{u}_t + y_t$, bem como o fato de $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ ser um semigrupo analítico, garantem que $s \mapsto T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é contínua em $[0, t]$ e então, mensurável. Além disso, visto que $\tilde{u}_t + y_t \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $t \in [0, b]$, de (3.17), concluímos que

$$\int_0^t \|T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\|ds \leq \int_0^t \tilde{M}C_2 ds = \tilde{M}C_2 t \leq \tilde{M}C_2 b < +\infty,$$

ou seja, pelo Teorema de Bochner, $s \mapsto T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é integrável em $[0, t]$, para todo $t \in [0, b]$.

Observe ainda que a função $t \mapsto \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds$ é contínua em $[0, b]$.

Com efeito, dado $t \in [0, b]$, seja $h > 0$ tal que $t+h \in [0, b]$, assim

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t T(h)T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds + \int_t^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&+ \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
&\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| + \int_t^{t+h} \tilde{M}C_2 ds \\
&= \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| + \tilde{M}C_2 h.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| + \tilde{M}C_2 h = 0,
\end{aligned}$$

pois, tomando $\tilde{v} = \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \in X$, usamos o fato da função $t \mapsto T(t)\tilde{v}$ ser contínua.

Portanto, $t \mapsto \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds$ é contínua à direita.

Para mostrarmos a continuidade à esquerda, considere $t \in (0, b]$ e $\tilde{\varepsilon} > 0$.

Tomemos ε tal que $0 < \varepsilon < \min \left\{ t, \frac{\tilde{\varepsilon}}{4\tilde{M}C_2} \right\}$. Desse modo, a função $\tau \mapsto T(\tau) \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds$ é uniformemente contínua em $[0, b]$, isto é, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $\tau, \xi \in [0, b]$ com $0 < |\tau - \xi| < \delta_1$, temos

$$\left\| [T(\tau) - T(\xi)] \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}.$$

Logo, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $t-h \in (0, b]$ e $0 < h < \delta$, onde $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-h} T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds + \int_{t-\varepsilon}^{t-h} T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right. \\
&+ \int_{t-h}^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - \int_0^{t-\varepsilon} T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \\
&\left. - \int_{t-\varepsilon}^{t-h} T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&\leq \left\| [T(\varepsilon) - T(\varepsilon-h)] \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right\| \\
&+ \int_{t-\varepsilon}^{t-h} \|T(t-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds + \int_{t-h}^t \|T(t-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-\varepsilon}^{t-h} \|T(t-h-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
& \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + 2\tilde{M}C_2(\varepsilon - h) + \tilde{M}C_2h \\
& \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \tilde{M}C_2(2\varepsilon - h) \\
& < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + 2\tilde{M}C_2\varepsilon < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon},
\end{aligned}$$

garantindo a continuidade à esquerda.

Portanto, Γ_2 está bem definida e então, Γ está bem definida.

(iii) $\Gamma(S) \subset S$, da mesma forma como visto na demonstração do Teorema 3.6.

Por fim, para usarmos o Teorema do ponto fixo de Banach, mostremos que Γ é uma contração.

Para tanto, sejam $u, v \in S$ e $t \in [0, b]$. Então, como

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\tilde{u}(t + \theta) - \tilde{v}(t + \theta)\| \\
&\leq \|u - v\|_\infty, \quad \forall t \in [0, b],
\end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma u)(t) - (\Gamma v)(t)\| &= \left\| T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)ds \right. \\
&+ \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)ds - T(t)F(0, \varphi) + F(t, \tilde{v}_t + y_t) \\
&+ \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{v}_s + y_s)ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{v}_s + y_s)ds \left. \right\| \\
&\leq \|F(t, \tilde{u}_t + y_t) - F(t, \tilde{v}_t + y_t)\| \\
&+ \left\| \int_0^t AT(t-s)[F(s, \tilde{u}_s + y_s) - F(s, \tilde{v}_s + y_s)]ds \right\| \\
&+ \left\| \int_0^t T(t-s)[G(s, \tilde{u}_s + y_s) - G(s, \tilde{v}_s + y_s)]ds \right\| \\
&\leq \|(-A)^{-\beta}\| \|(-A)^\beta F(t, \tilde{u}_t + y_t) - (-A)^\beta F(t, \tilde{v}_t + y_t)\| \\
&+ \int_0^t \|(-A)^{1-\beta}T(t-s)[(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s) - (-A)^\beta F(s, \tilde{v}_s + y_s)]\| ds \\
&+ \int_0^t \|T(t-s)[G(s, \tilde{u}_s + y_s) - G(s, \tilde{v}_s + y_s)]\| ds \\
&\leq \|(-A)^{-\beta}\| L\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} L\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_C ds \\
&+ \int_0^t \tilde{M}N\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_C ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\|(-A)^{-\beta}\|L + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} L ds + \int_0^t \tilde{M}N ds \right) \|u - v\|_\infty \\
&\leq \left(\|(-A)^{-\beta}\|L + \frac{M_{1-\beta}Lb^\beta}{\beta} + \tilde{M}Nb \right) \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $K = \left(\|(-A)^{-\beta}\|L + \frac{M_{1-\beta}Lb^\beta}{\beta} + \tilde{M}Nb \right)$, por (3.20) segue que $0 < K < 1$.

Logo, $\|\Gamma u - \Gamma v\|_\infty = \sup_{t \in [0, b]} \|(\Gamma u)(t) - (\Gamma v)(t)\| \leq K \|u - v\|_\infty$, para todo $u, v \in S$, isto é, Γ é uma contração em S .

Assim, o Teorema do ponto fixo de Banach nos garante que, existe um único $u \in S$ tal que $\Gamma u = u$.

Portanto, se tomarmos $x : [-r, b] \rightarrow X$ definida por $x(t) = \tilde{u}(t) + y(t)$ e procedermos como no final da demonstração do Teorema 3.6, podemos garantir que x é uma solução fraca para o problema (3.1) – (3.2). Além disso, a unicidade do ponto fixo u garante a unicidade de x .

■

REFERÊNCIAS

- 1 SALAMON, D. Neutral functional differential equations and semigroups of operators. *Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications*, Berlin, v. 54, p. 188–207, 1983.
- 2 GYORI, I.; LADAS, G. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations*. New York: The Clarendon Press, 1991.
- 3 GOPALSAMY, K. *Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Amsterdam: Springer-Science+Business Media, B.V., 1992.
- 4 HALE, J.; LUNEL, S. M. V. *Introduction to Functional-Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- 5 HALE, J. K. Partial neutral functional-differential equations. *Revue roumaine de mathematiques pures et appliquees*, Curitiba, v. 39, p. 339–344, 1994.
- 6 WU, J.; XIA, H. Rotating waves in neutral partial functional-differential equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, New York, v. 11, n. 2, p. 209–238, 1999. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1021973228398>. Acesso em: 18 fev. 2020. Acesso mediante assinatura.
- 7 WU, J.; XIA, H. Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmission lines. *Journal of Differential Equations*, New York, v. 124, n. 9, p. 247–278, 1996. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039696900091>. Acesso em: 18 fev. 2020.
- 8 WU, J. *Theory and applications of partial functional-differential equations*. New York: Springer - Verlag, 1996.
- 9 ADIMY, M.; EZZINBI, K. A class of linear partial neutral functional - differential equations with nondense domain. *Journal of Differential Equations*, New York, v. 147, n. 2, p. 285–332, 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-differential-equations/vol/147/issue/2>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 10 HERNÁNDEZ, E.; O'REGAN, D. Existence results for abstract neutral functional differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Providence, v. 137, n. 10, p. 3309–3318, 2009. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/proc/2009-137-10/home.html>. Acesso em: 18 fev. 2020.
- 11 HERNÁNDEZ, E.; HERNÍQUEZ, H. Existence of periodic solution of partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, New York, v. 221, n. 2, p. 499–522, 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X97958996>. Acesso em: 18 fev. 2020.
- 12 PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Springer - Verlag, 1983.
- 13 GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. 2. ed. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza Instituto de Matemática, 2012.

- 14 CZAJA, R. *Differential equations with sectorial operator*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Slaskiego, 2002.
- 15 HERNÁNDEZ, E.; HERNRÍQUEZ, H. Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 221, n. 2, p. 452–475, 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X97958753>. Acesso em: 18 fev. 2020.
- 16 KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- 17 BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- 18 CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable*. New York: Springer-Verlag, 1973.
- 19 SADOVSKII, B. N. A fixed-point principle. *Functional analysis and its applications*, New York, v. 1, n. 2, p. 151–153, 1967. Disponível em: <https://link.springer.com/journal/10688/1/2>. Acesso em: 29 jan. 2020. Acesso mediante assinatura.
- 20 DUGUNDJI, J. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1978.
- 21 HILLE, E.; PHILIPS, R. *Functional analysis and semi-groups*. Providence: American Mathematical Society, 1957. (Colloquium Publications).
- 22 CHARLES, C. P. *Real Mathematical Analysis*. 2. ed. New York: Springer, 2015.

APÊNDICE A - Resultados auxiliares

Teorema A.1. (Teorema do ponto fixo de Banach). *Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ um contração em X . Então T tem um único ponto fixo.*

Demonstração. (16, Theorem 5.1-2, p. 300).

Teorema A.2. (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis convergindo, em quase todo ponto, para uma função real mensurável f . Se existir uma função g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n , então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Demonstração. (17, Theorem 5.6, p. 44).

Lema A.3. (Lema de Dini). *Se $f : (a, b) \rightarrow X$ é contínua em (a, b) e admite uma derivada à direita, f'_+ , contínua em (a, b) , então f é continuamente diferenciável em (a, b) .*

Demonstração. (13, Lema A.3.2, p. 149).

Consideremos que $\mathcal{R}$ seja uma região do plano complexo $\mathbb{C}$.

Teorema A.4. (Teorema de Cauchy). *Seja γ uma curva fechada e retificável em $\mathcal{R}$, a qual é homotópica a uma curva constante. Se f é uma função analítica em $\mathcal{R}$, então*

$$\int_{\gamma} f(\lambda) d\lambda = 0.$$

Demonstração. (18, Theorem 4.9, p. 85).

Teorema A.5. (Fórmula integral de Cauchy). *Se $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica em $\mathcal{R}$ e γ é uma curva fechada retificável em $\mathcal{R}$ tal que γ é homotópica à uma curva constante então, para λ_0 no interior de $\mathcal{R}$, temos*

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda.$$

Demonstração. (18, Theorem 6.1, p. 91).

Teorema A.6. *Sejam $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em $\mathcal{R}$ e γ uma curva fechada retificável em $\mathcal{R}$ tal que γ é homotópica à uma curva constante então, para λ_0 no interior de $\mathcal{R}$, temos*

$$f^{(n)}(\lambda_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. (18, Theorem 6.2, p. 92).

Teorema A.7. (Teorema dos resíduos). *Sejam $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em $\mathcal{R}$ exceto pelas singularidades isoladas $a_1, a_2, \dots, a_n$ e γ uma curva a qual não passa por qualquer uma das singularidades a_i , $i = 1, \dots, n$. Se γ é uma curva fechada e retificável em $\mathcal{R}$, e é homotópica à uma curva constante, então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f : a_i),$$

onde $\text{Res}(f : a_i)$ denota o resíduo de f em a_i (que é o coeficiente da potência -1 na expansão em série de Laurent de f em torno de a_i).

Demonstração. (18, Theorem 2.2, p. 108).

Definição A.8. Denotamos por $Q(\Omega)$ o conjunto de todos os ε para os quais o conjunto Ω possui ε -rede finita. A medida de não compacidade do conjunto Ω é o valor

$$\chi(\Omega) = \inf Q(\Omega).$$

Definição A.9. Sejam E e E_1 espaços de Banach. Dizemos que o operador $T : E \rightarrow E_1$ é um **operador condensante** se T é contínuo e para todo conjunto limitado e não compacto $\Omega \subset E$ a desigualdade abaixo é satisfeita

$$\chi[T(\Omega)] < \chi(\Omega).$$

Observação A.10. Operadores completamente contínuos, contrações e também a soma desses operadores são operadores condensantes (ver (19)).

Teorema A.11. (Teorema do ponto fixo de Sadovskii). *Sejam T um operador condensante e B um subconjunto convexo, fechado e limitado de X . Se $T(B) \subset B$ então existe pelo menos um ponto fixo de T .*

Demonstração. (19).

Teorema A.12. (Arzelá-Ascoli). *Sejam Y um espaço métrico, X um espaço qualquer e $F \subset C(X, Y)$. Assuma que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) F é equicontínuo em Y .

(ii) $\overline{\{f(y); f \in F\}}$ é compacto para todo $y \in Y$.

Então $\overline{F}$ é compacto.

Demonstração. (20, Theorem 6.4, p. 267).

Proposição A.13. *Seja X um espaço de Banach. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A\| \leq 1$ então $I - A$ é inversível.*

Demonstração: Como $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ é um operador linear limitado em X e A comuta com suas potências, obtemos pela série de potências que

$$(I - A)f(A) = f(A)(I - A) = I,$$

Portanto, $(I - A)$ é inversível e $f(A) = (I - A)^{-1}$. ■

Corolário A.14. *Sejam X um espaço de Banach e $G \in \mathcal{L}(X)$, com $\|G\| \leq 1$. Então, $I - G$ tem inversa limitada, isto é, $(I - G)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Demonstração: Esse resultado é um caso particular da Proposição A.13. ■

Definição A.15. *Sejam $x, y \in \mathbb{C}$, cujas partes reais são positivas. A **função Beta** é a função definida pela integral*

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds.$$

Teorema A.16. (Teorema de Bochner) *Uma condição necessária e suficiente para que $x(\sigma) \in U \subset X$ seja integrável é que $x(\sigma)$ seja fortemente mensurável e $\int_U \|x(\sigma)\| dm < \infty$.*

Demonstração: (21, Theorem 3.4.7, p. 80).

Teorema A.17. *Equicontinuidade pontual implica em equicontinuidade uniforme se X é compacto.*

Demonstração: (22, Theorem 4.36, p. 261).