

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Do Impossível ao Dobrável: Construções
Geométricas nas Perspectivas Clássica e de
Origami**

Franciele Horácio de Souza

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO
2025**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Franciele Horácio de Souza

Do Impossível ao Dobrável: Construções Geométricas nas Perspectivas Clássica e de Origami

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli

Rio Claro/SP
2025

S729i Souza, Franciele Horacio
Do impossível ao dobrável: construções geométricas nas perspectivas clássica e de origami / Franciele Horacio Souza. -- Rio Claro, 2025
86 p. : il., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Elíris Cristina Rizziolli

1. Álgebra. 2. Extensão de corpos. 3. Números construtíveis. 4. Origami. I. Título.

Impacto potencial desta pesquisa

As ciências se transformam ao longo do tempo devido às novas contribuições e olhares trazidos por perspectivas inéditas. Este papel tem sido desempenhado pela matemática via origami, a qual oferece um recurso inovador nas áreas de tecnologia e desenvolvimento, solucionando dilemas teóricos e oferecendo novos recursos práticos. Os impasses físicos, os problemas da engenharia, a nano-robótica e suas implicações, a matemática teórica, entre outras, são áreas que podem ser reimaginadas frente aos recursos desta área de estudo em progresso. É neste contexto em que as formulações desta pesquisa se apresentam, onde as construções impossíveis com régua e compasso, abordadas até então através dos *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*, são ressignificadas frente às novas possibilidades oferecidas pela construção da matemática baseada na estrutura de origami e suas novas abordagens. Em concordância com este movimento de transformações, este trabalho contribui com novas possibilidades de análise de dilemas da matemática clássica. Além disso, as reflexões serão expandidas de forma prática, buscando conectar seu uso no espaço educacional e no ensino de geometria.

Potential impact of this research

Science transforms over time due the new contributions and perspectives brought by unprecedented perspectives. Studies structured by origamic mathematics offer an innovative resource in areas of technology and development, solving theoretical dilemmas and offering new practical resources. Physical impasses, engineering problems, nanorobotics and its implications, theoretical mathematics, among others, are areas that can be reimagined in light of this evolving field of study. In this context, the formulations of this work are presented, constructions impossible with a ruler and compass, solved until then through the *Three Classical Problems of Greek Mathematics*, are redefined based on the new possibilities offered by origamic perspective and its new approaches. In line with this movement of transformations, this work contributes new possibilities for analyzing dilemmas in classical mathematics. Furthermore, the reflections will be mobilized in a practical way, seeking to connect their use in the educational field and in the teaching of geometry.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Franciele Horácio de Souza

DO IMPOSSÍVEL AO DOBRÁVEL: CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NAS
PERSPECTIVAS CLÁSSICA E DE ORIGAMI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática/IGCE-Unesp

Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Souza
Departamento de Matemática - UEMA/Balsas

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática/IGCE-Unesp

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 21 de outubro de 2025

Dedico este trabalho a meus pais, Claudio e Elizabete, que nunca terminaram os estudos, mas, sempre fizeram de tudo para que sua filha ensinasse aos outros o que eles nunca tiveram a oportunidade de aprender.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a meus pais, Claudio e Elizabete, por sempre sonharem, viverem e realizarem meus sonhos comigo. Se não fosse o apoio de vocês, eu não estaria conquistando mais um diploma. Em especial, agradeço ao meu pai que foi minha maior inspiração para amar os números ao me fascinar com seus cálculos leigos e malucos. Eu amo vocês dois.

Agradeço aos meus irmãos, Felipe e Francine, por serem meus filhos postigos e me ensinarem tanto desde que nasceram. Peço desculpas por todas as vezes que fui ausente na vida de vocês para priorizar meus sonhos, espero que um dia entendam. Eu amo vocês demais.

Agradeço ao Luis Henrique, meu sol nos dias cinzas, por querer sempre me ver gigante. Sempre lembrarei com carinho e gratidão da sua paciência sem fim me ajudando com o exame de qualificação e com as revisões e escritas mais robustas do trabalho. Obrigada por estar ao meu lado e acreditar mais no meu potencial do que eu mesma.

Agradeço a minha orientadora, Elíris, por toda paciência, carinho e incentivo. Uma das minhas maiores inspirações em minha profissão. Mesmo na direção de uma das maiores instituições de graduação do país, sempre foi muito humana, atenciosa e carinhosa com seus alunos e orientandos. Obrigada por tanto, sem você meu trabalho não teria nem se iniciado.

Agradeço aos meus amados alunos por colaborarem e contribuírem para a realização e finalização do meu trabalho. Agradecimento especial a todos que já foram meus alunos e me ensinaram muito mais do que eu jamais pude ensinar a vocês.

Agradeço imensamente a minha diretora Tania, por me ajudar muito mais do que imagina e ao meu vice-diretor Daniel por ter sido meu professor na época de escola e ter dado uma bronca na minha turma, que levou a minha inscrição no vestibular da UNESP e, conseqüentemente ao meu ingresso, gerando um efeito borboleta que me levou a produção deste trabalho e ao recebimento meu título de mestre.

Agradeço a minha melhor amiga Isabella, que vivenciou todos esses anos de luta e sonhos sem nunca sair do meu lado, mesmo quando a distância era significativa. Ao meu amigo de longa data e grande inspiração, Alexandre, por todas as sábias palavras e todos os conselhos que foram fundamentais no processo de escrita do meu trabalho.

Agradeço a todos que se tornaram amigos no processo de elaboração do meu trabalho: Ana Luiza, Carol, Keila, Silvia Schober, que acompanharam a construção deste trabalho, colaboraram com ele de alguma forma ou torceram muito para que ele finalizasse.

Agradeço ao pessoal da biblioteca da UNESP Rio Claro, que não poupou esforços para conseguir a biografia mais importante do meu trabalho.

E agradeço, principalmente a vocês que um dia duvidaram da minha capacidade de me tornar mestre e produzir um trabalho relevante e de extrema qualidade.

Todo origami começa quando pomos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato.

Tomoko Fuse

Resumo

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo explorar as construções algébricas que são impossíveis de realizar utilizando régua não graduada e compasso, considerando as definições clássicas da Geometria Euclidiana, sendo estas a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura da circunferência. Em seguida, serão relacionadas suas características com as perspectivas de construções por meio de origamis, propondo novas formulações e soluções para esses dilemas. Os fundamentos centrais desta pesquisa têm como referência as teorias propostas por Thomas Hull. Por fim, as construções com origamis serão aplicadas em uma oficina pedagógica, considerando as bases estruturais e os documentos norteadores da educação básica. Essa oficina será proposta a uma turma do ensino médio de uma escola pública estadual, com o intuito de apresentar a importância dos origamis nas construções algébricas matemática e refletir sobre novas formas de abordar o ensino de geometria, levando em conta as concepções desenvolvidas nesta pesquisa.

Palavras-chave: Álgebra. Extensão de corpos. Origami. Números construtíveis. Problemas clássicos da geometria.

Abstract

This research aims to explore algebraic constructions that are impossible to solve using an unmarked ruler and compass, according to the classical definitions of Euclidean Geometry. These are the duplication of the cube, the trisection of an angle, and the squaring of the circle. Subsequently, their characteristics will be related to the perspectives of construction through origami, proposing new formulations and solutions to these dilemmas. The central foundations of this study are based on the theories proposed by Thomas Hull. Finally, origami constructions will be applied in a pedagogical workshop, structured through official documents that guide basic education. This workshop will be applied to a high school class at a state public school, with the objective of presenting the importance of origami in mathematical algebraic constructions and reflecting on new ways to approach the teaching of geometry, considering the concepts developed in this research.

Keywords: Algebra. Field extension. Origami. Constructible numbers. Classical problems of geometry.

Lista de Figuras

3.1	Construção geométrica $\sqrt{2}$.	31
3.2	Soma e subtração de α e β .	32
3.3	Construção de $\alpha\beta$.	32
3.4	Construção de $\sqrt{\alpha}$.	34
3.5	Impossibilidade de trissecção do ângulo θ .	36
4.1	Construção do triângulo tipo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.	40
4.2	Construção de um triângulo equilátero máximo.	41
4.3	Dobrando terços com dobra múltipla.	41
4.4	Dobrando terços.	42
4.5	Teorema de Haga.	43
4.6	Demonstração do teorema de Haga.	43
4.7	Teorema de Haga aplicado ao problema da divisão ímpar.	44
4.8	Método de Noma.	44
4.9	Método de Noma usado para construir $\frac{a}{b}$.	45
4.10	Método de trissecção angular de Abe.	47
4.11	Prova da trissecção de Abe.	47
4.12	Trissecção realizada pela autora.	48
4.13	O1 realizada pela autora.	49
4.14	O2 realizada pela autora.	49
4.15	O3 realizada pela autora.	49
4.16	O4 realizada pela autora.	50
4.17	O5 realizada pela autora.	50
4.18	O6 realizada pela autora.	50
4.19	O7 realizada pela autora.	51
4.20	O8 realizada pela autora.	51
4.21	Os cinco casos de pontos/retas sendo dobrados uns aos outros.	52
4.22	Os subcasos de dobrar um ponto P_1 sobre si mesmo.	52
4.23	Os subcasos de dobrar um ponto P_1 em uma reta L_1 .	53
4.24	Os subcasos de dobrar uma reta L_1 sobre ela mesma.	53
4.25	Gerando O3 e O4 a partir de O7 .	54
4.26	Construindo a reflexão de P sobre L .	55
4.27	Atividade explorando a operação O6 .	57
4.28	Uma elipse e seu círculo dobrável.	58
4.29	Dobrando tangentes a uma elipse e uma hipérbole.	59
4.30	Dobrando para encontrar uma raiz de $y = x^2 - x - 1$.	61
4.31	Construção de Lill para resolver $x^2 + ax + b = 0$.	61

4.32	Método de Lill aplicado a quinticas onde (a) todos os coeficientes são positivos e (b) $a_3, a_2, a_0 < 0$ e o resto são positivos.	63
4.33	Provando que o método de Lill funciona em um caso onde $n = 5$	63
4.34	O uso de papel quadriculado transparente por Lill para encontrar um quadrado de solução para os casos (a) $n = 2$ e (b) $n = 3$	64
4.35	Uso da operação O7 de Beloch para resolver uma cúbica.	65
4.36	A solução cúbica de Hatori vista através das lentes de Beloch/Lill.	66
4.37	A solução cúbica de Alperin vista através das lentes de Beloch/Lill.	66
4.38	Construção da raiz cúbica de dois de Peter Messer.	67
4.39	Duplicação do cubo realizada pela autora.	68
5.1	Modelos de origami que serão entregues aos alunos.	73
5.2	Passo a passo de como dobrar um Tsuru.	74
5.3	Material entregue aos alunos.	74
5.4	Cônicas dobradas pelo molde.	75
5.5	Roteiro de análise dos alunos.	76
5.6	Resposta de alunos da primeira questão.	77
5.7	Dobraduras apresentadas na aplicação da atividade.	77
5.8	Origamis segundo definição de Dureisseix.	78
5.9	Alunos fazendo o Tsuru.	79
5.10	Ângulo arbitrário recebido pelos alunos para realizar a trissecção.	80
5.11	Alunos explorando possibilidades de trissectar um ângulo.	80
5.12	Aluna trissectando ângulo com método de dobra em "S".	81
5.13	Cônicas via dobras realizadas pelos alunos.	81
5.14	Alunas montando o mural das atividades na escola.	82

Sumário

1	Introdução	13
2	Noções da Teoria dos Corpos	17
2.1	Introdução à extensão de corpos	17
2.2	Sobre extensões simples e algébricas	20
3	Construções geométricas	30
3.1	Números construtíveis	30
3.2	A impossibilidade de determinadas construções algébricas	35
4	Geometria dos origamis	38
4.1	Noções introdutórias	40
4.2	Trissecção de um ângulo via origami	45
4.3	Operações básicas da geometria origami	48
4.4	Aplicação interessante de origami nas cônicas	56
4.5	Resolvendo equações com origami	60
4.6	Duplicação do cubo via origami	67
4.7	E a quadratura do círculo?	68
5	Da teoria à prática: uma abordagem em sala de aula	70
5.1	Relevância do tema no ensino	70
5.2	Ensinando matemática com origami	71
5.3	Relato da aplicação	76
6	Conclusão	83
	Referências	85

1 Introdução

Este trabalho apresenta uma abordagem do modo clássico das construções impossíveis com régua não graduada e compasso, de forma objetiva e sucinta, via Teoria de Galois. Além da visão tradicional presente neste trabalho, destaca-se, principalmente, uma abordagem contemporânea via origami, como possibilidade de resolução desses problemas que, até então, eram conhecidos por sua resolução improvável. E ainda, pode-se encontrar uma aplicação direcionada ao âmbito educacional, que contempla qualquer nível de ensino.

A matemática nasce da necessidade do ser humano de enumerar e contabilizar elementos em seu cotidiano. Desafiado por essa necessidade, criam-se métodos de contagem, uma estrutura lógica e nomenclaturas para organizar essas informações. Com o passar do tempo, esses métodos e estruturas tornam-se cada vez mais sofisticados e repletos de regras, dando origem à matemática que conhecemos hoje. Na Grécia Antiga, matemáticos de grande renome a desenvolveram como uma ferramenta para explicar o funcionamento do universo.

Movidos por essa busca incessante de compreender o universo, os gregos resolveram diversos problemas matemáticos que são altamente reconhecidos até hoje. Entretanto, no período helênico (século VI a.C. – século V a.C.) três problemas geométricos se tornaram os maiores desafios clássicos da matemática grega, por não apresentarem solução. Desde então, esses problemas têm encantado sucessivas gerações de matemáticos, profissionais e amadores, além de terem sido fundamentais para o crescimento de pesquisas e especulações.

Marcados como os maiores desafios enfrentados por inúmeros matemáticos e intelectuais durante mais de dois mil anos, esses três problemas de construção resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando apenas a régua não graduada e o compasso, os únicos instrumentos empregados por Euclides em *Os Elementos*. Conhecidos como *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*, são: a *duplicação de um cubo*, a *trisseção de um ângulo* e a *quadratura de um círculo*. Sua grande fama se deve ao fato de não terem solução.

A primeira impossibilidade surgiu com pitagóricos que possuíam o conhecimento de construir com régua e compasso, sem o uso de medidas pré-estabelecidas, um quadrado cuja área é o dobro da área de um quadrado previamente dado. E avançando suas descobertas, perceberam que não era possível construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado, utilizando-se somente as ferramentas geométricas básicas.

Ao longo do desenvolvimento da matemática, Euclides demonstra como bissectar um ângulo somente com régua e compasso. Logo, sabendo como bissectar um ângulo, é natural que se pergunte como dividir um ângulo em n partes, em específico, a trisseção do ângulo. Apesar de alguns ângulos serem possíveis de trissectar, como o ângulo de 90° , nem todos os ângulos existentes são possíveis, como é o caso do ângulo de 60° . Surgindo

assim o segundo problema impossível de solução generalizada.

O problema de quadrar qualquer região poligonal está completamente resolvido nos *Elementos* de Euclides e, uma vez resolvida a quadratura de regiões poligonais, o próximo passo seria tentar quadrar regiões limitadas por linhas curvas, na qual o círculo passa a ser uma escolha óbvia. Entretanto, essa construção também foi comprovada como impossível de se resolver.

As ciências se transformam ao longo do tempo devido às novas contribuições e olhares trazidos por perspectivas inéditas. Nesse contexto, as construções impossíveis com régua e compasso, abordadas até então através dos *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*, são ressignificadas frente às novas possibilidades oferecidas pela construção da matemática baseada na estrutura de origami e suas novas abordagens.

De acordo com Hull, em [1], o interesse em construções geométricas que podem ser realizadas por dobradura de papel tem uma longa e variada história. Na Europa do século XIX, encontraram pela primeira vez um trabalho, de Friedrich Froebel, que trazia a sugestão do uso da dobradura de papel para educar crianças pequenas sobre os tópicos de simetria e geometria. Entretanto, o primeiro trabalho reconhecido que tenta coletar técnicas de construção de dobradura de papel para valor educacional e de pesquisa foi o livro de T. Sundara Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, publicado pela primeira vez na Índia em 1893 e depois no Ocidente em 1901 (Referência [2]).

Ainda de acordo com Hull, o historiador italiano e devoto da matemática, Giovanni Vacca, escreveu em 1930, um artigo resumindo um pouco da história do origami e a matemática conhecida sobre a geometria de dobradura de papel [3]. O autor não faz nenhuma menção neste artigo sobre a possibilidade do origami ser capaz de realizar construções além daquelas possíveis com régua e compasso. Hull, na verdade, afirma explicitamente que é impossível “dobrar o cubo” (ou seja, construir $\sqrt[3]{2}$) via origami.

Portanto, parece que Beloch foi a primeira a perceber que o origami poderia realizar a operação necessária para construir a tangente simultânea a duas parábolas e, assim, resolver equações cúbicas gerais. Graças à sua descoberta, essa construção foi homenageada como dobra de Beloch. Para coroar essa conquista, ela inclui em [4] um método de construção de dobradura de papel para $\sqrt[3]{2}$, que é coincidentemente o mesmo descoberto independentemente por Hatori em [5] quase 70 anos depois.

O origami, por muitos anos visto apenas como uma forma de arte, utilizado como decoração ou elemento ritualístico da cultura oriental, vem, com o decorrer do tempo, se consolidando como uma ferramenta de estudo para a matemática, gerando possibilidades cada vez mais complexas de dobras, capazes de servir como suporte para áreas diversas, solucionando dilemas teóricos e oferecendo novos recursos práticos. Tecnologias de engenharia, ferramentas médicas, estudos químicos, micro e nanoestruturas, e soluções de biomecânica são exemplos práticos da aplicação do origami em um contexto científico atual, que, até poucos anos atrás, não era sequer considerado como possibilidade.

Vislumbrando o origami como essa nova ferramenta contemporânea e transformadora, que contribui para novas possibilidades, podemos utilizá-lo para apresentar possíveis soluções para os *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*, comentados anteriormente. Esses problemas, que por séculos permaneceram sem solução, agora podem, por meio de operações geradas por uma geometria construída via origami, finalmente ter uma resposta.

Além disso, essas reflexões e construções podem ser expandidas de forma prática, conectando seu uso ao espaço educacional e ao ensino da geometria, como veremos ao longo deste trabalho.

Todas as figuras aqui presentes são de autoria própria. As digitais foram inspiradas

nas figuras das referências [6] e [1] e elaboradas pela autora do texto com o auxílio do software Geogebra [7]. As imagens que constam no Capítulo 5 do relato da aplicação da atividade, foram capturadas com uso da câmera do celular da autora e autorizada pelos participantes da dinâmica a serem utilizadas para fins acadêmicos. Foi preservada a real identidade de todos envolvidos e as imagens tiveram os rostos embaçados ou cortados, por se tratarem de menores de idade.

Para aprofundar os assuntos tratados acima, este trabalho apresenta uma estrutura de cinco capítulos. O segundo capítulo, apresenta como objetivo preparar o leitor para uma análise mais aprofundada das impossibilidades de construções algébricas, fornecendo a base necessária para investigar, por meio da álgebra moderna, a impossibilidade das construções geométricas clássicas: a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Para isso, são introduzidos conceitos da teoria dos corpos e de extensões de corpos, a distinção entre elementos algébricos e transcendentais e o estudo de extensões simples.

Para uma melhor compreensão deste capítulo, espera-se que o leitor possua conhecimentos básicos sobre estruturas algébricas, como grupos, anéis e corpos, bem como alguma familiaridade com os teoremas de isomorfismo aplicados a essas estruturas. Para aprofundamento nesses tópicos, recomenda-se consultar as referências [6] e [8].

O terceiro capítulo trata das construções geométricas, estruturando o funcionamento e dando bagagem para a demonstração das impossibilidades de construção. O objetivo é apresentar os números construtíveis, estabelecendo com rigor as regras permitidas nas construções euclidianas e demonstrando, com uso da álgebra, a impossibilidade das três construções geométricas gregas clássicas utilizando apenas régua não graduada e compasso.

No quarto capítulo, analisamos a construção da geometria dos origamis tendo como objetivo primordial apresentar a possibilidade das construções geométricas gregas clássicas via origami. Para isso são introduzidas algumas noções de como manipular o origami realizando a divisão em n partes. Somente com noções básicas de manipulação de dobras, é possível realizar a construção da trissecção de um ângulo. Matemáticos que há mais de 200 anos são atormentados por esse problema, podem pela primeira vez explorar sob uma nova perspectiva a resolução da trissecção de um ângulo.

Com uso de dobras, é possível definir algumas operações básicas de origami que conseguem solucionar equações e conseqüentemente possibilitam a construção da duplicação do cubo.

Uma vez que descobrimos a possibilidade de construir dois dos *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega* com uso de origamis, é esperado que o último problema também seja resolvido. Entretanto, para que seja possível realizar esta construção, é necessária uma abordagem por meio de dobras curvas, o que não faz parte do escopo deste trabalho. Para aprofundamento deste tópico, recomenda-se consultar as referências bibliográficas [9] e [10].

No quinto e último capítulo deste trabalho, encontra-se uma aplicação prática das reflexões dos capítulos anteriores em uma atividade exploratória aplicada em sala de aula. Neste contexto é possível acompanhar a conexão deste tema ao ensino básico (sendo possível o aprofundamento sobre o assunto com as referências bibliográficas [11], [12] e [13]), o planejamento da atividade e o relato da aplicação permeado por reflexões pertinentes ao ensino e aprendizagem. Podemos notar que o uso de atividades investigativas instiga a curiosidade e amplia a participação dos alunos, que anseiam em obter a conclusão dos desafios impostos e compreender as razões envolvidas na atividade proposta. O uso do ori-

gami como método de ensino abre espaço para que o aluno se torne autônomo em seu conhecimento, podendo explorar o papel sem medo, criar relações, levantar hipóteses e tirar conclusões por conta própria.

2 Noções da Teoria dos Corpos

Nesta primeira seção serão apresentadas algumas definições que servirão de preliminares para que no capítulo seguinte possamos abordar com maior erudição matemática a demonstração da impossibilidade de construção algébrica dos *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*. Portanto, abordaremos aqui tópicos de extensão de corpos, zeros de polinômios, bem como, as propriedades de extensões simples e algébricas.

2.1 Introdução à extensão de corpos

Começamos definindo o que é uma extensão de corpos e demonstrando o teorema de Kronecker.

Definição 2.1. Sejam E e F corpos. Dizemos que E é uma extensão de F se F é subcorpo de E que indicaremos por $F \leq E$.

Logo, $\mathbb{R}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{C}$ é uma extensão dos corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.2 (Teorema de Kronecker). *Seja F um corpo e $f(x)$ um polinômio não constante em $F[x]$. Então existe uma extensão E do corpo F e um $\alpha \in E$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Demonstração. Sabemos que se $F[x]$ é um corpo, então todo polinômio não constante $f(x) \in F[x]$ pode ser fatorado em um produto de polinômios irredutíveis de $F[x]$ (para mais detalhes, vide Teorema 23.20, ref [6], pág. 214). Logo, $f(x)$ tem uma fatoração em polinômios que são irredutíveis sobre $F[x]$. Seja $p(x)$ um polinômio irredutível em tal fatoração.

Como um ideal $\langle p(x) \rangle \neq \{0\}$ de F é maximal se, e somente se, $p(x)$ é irredutível sobre F (para mais detalhes, vide Teorema 27.25, ref [6], pág. 251), temos $\langle p(x) \rangle$ um ideal maximal em $F[x]$. Portanto, o anel quociente $\frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle}$ é um corpo. Agora consideremos a seguinte aplicação:

$$\psi : F \rightarrow \frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle},$$

dado por $\psi(a) = a + \langle p(x) \rangle$, para $a \in F$.

Vemos que ψ é injetora, pois se $\psi(a) = \psi(b)$, isto é, $a + \langle p(x) \rangle = b + \langle p(x) \rangle$, para algum a e $b \in F$, então $(a - b) \in \langle p(x) \rangle$, logo $a - b$ deve ser múltiplo do polinômio $p(x)$, que é de grau ≥ 1 . Assim, $a - b = l(x)p(x)$, $l(x) \in F[x]$, mas $a - b \in F$ e $\deg p \geq 1$. Logo, necessariamente $l(x) = 0$ e assim $a - b = 0$, portanto $a = b$.

Consequentemente, restringindo o contradomínio de ψ para a sua imagem, que é um subcorpo de $\frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle}$, temos uma correspondência biunívoca entre F com a imagem de ψ , com isso identificamos F com $\{a + \langle p(x) \rangle \mid a \in F\}$.

Assim, é possível visualizar $E = \frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle}$ como uma extensão do corpo F . Ou seja, foi construída a extensão desejada E de F . Resta-nos mostrar que E contém um zero de $p(x)$.

Vamos definir:

$$\alpha = x + \langle p(x) \rangle,$$

para $\alpha \in E$

Considere o homomorfismo de valoração $\phi_\alpha : F[x] \rightarrow E$ como no Teorema dos Homomorfismos de Avaliação para a Teoria dos Corpos (para mais detalhes, vide Teorema 22.4, ref [6], pág. 201). Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, onde $a_i \in F$, então temos:

$$\phi_\alpha(p(x)) = a_0 + a_1(x + \langle p(x) \rangle) + \cdots + a_n(x + \langle p(x) \rangle)^n$$

em $E = \frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle}$. Mas pode-se calcular em $\frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle}$ escolhendo um representante, e x é um representante do conjunto $\alpha = x + \langle p(x) \rangle$. Portanto,

$$p(\alpha) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + \langle p(x) \rangle = p(x) + \langle p(x) \rangle = \langle p(x) \rangle = 0_E$$

em $\frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle}$. Achamos um elemento α em $E = \frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle}$ tal que $p(\alpha) = 0_E$, e portanto $f(\alpha) = 0_E$.

□

Nos próximos exemplos, veremos aplicações diretas do teorema que acabamos de estudar.

Exemplo 2.3. Sejam $F = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^2 + 1$. Este polinômio $f(x)$ é conhecido por não ter zeros em $\mathbb{R}$ e $\partial f = 2$, portanto é irredutível sobre $\mathbb{R}$. Então $\langle x^2 + 1 \rangle$ é um ideal maximal em $\mathbb{R}[x]$. Logo, $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ é um corpo. Identificando $x \in \mathbb{R}$ com $x + \langle x^2 + 1 \rangle$ em $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$, é possível ver que $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $E = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$. Além disso, veja que:

$$\alpha = x + \langle x^2 + 1 \rangle$$

que pertence a $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ e é tal que:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 1 &= (x + \langle x^2 + 1 \rangle)^2 + (1 + \langle x^2 + 1 \rangle) \\ &= (x^2 + 1) + \langle x^2 + 1 \rangle = 0_E \end{aligned}$$

Portanto, α é um zero de $x^2 + 1$ em E . Vamos denominar $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ de $\mathbb{C}$ no fim da página 23.

Exemplo 2.4. Neste exemplo, demonstraremos que um mesmo polinômio pode admitir múltiplos zeros distintos dentro de um determinado corpo. Seja $F = \mathbb{Q}$ e consideremos $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$. Temos que, $f(x)$ é fatorado em $\mathbb{Q}[x]$ por $(x^2 - 3)(x^2 - 5)$, ambos fatores são irredutíveis em $\mathbb{Q}$. Começando por $x^2 - 3$ e construindo a extensão de corpo E de $\mathbb{Q}$, sendo $E = \frac{\mathbb{Q}}{\langle x^2 - 3 \rangle}$ contendo α tal que $\alpha^2 - 3 = 0$, ou construímos a extensão K de $\mathbb{Q}$, sendo $K = \frac{\mathbb{Q}}{\langle x^2 - 5 \rangle}$ contendo o elemento β , tal que $\beta^2 - 5 = 0$. A construção em ambos os casos é exatamente como no exemplo anterior.

Os cálculos a seguir são sobre o estudo dos zeros de polinômios, que serão fundamentais para demonstrações do próximo capítulo.

Definição 2.5. Um elemento α de uma extensão de corpo E sobre o corpo F é algébrico sobre F se $f(\alpha) = 0$ para algum polinômio não nulo $f(x) \in F[x]$. Se α não for algébrico sobre F , então dizemos que α é transcendente sobre F .

Exemplo 2.6. $\mathbb{C}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$. Temos que a unidade imaginária $i \in \mathbb{C}$ é um elemento algébrico sobre $\mathbb{Q}$, já que é zero do polinômio $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. $\sqrt{3}$ também é um elemento algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois é zero do polinômio $f(x) = x^2 - 3$.

Exemplo 2.7. Os números π e e não são algébricos sobre $\mathbb{Q}$, pois não existe um polinômio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, onde $f(\pi) = 0$ ou $f(e) = 0$. Portanto, da definição 2.5 afirmamos que esses números são transcendentess sobre $\mathbb{Q}$.

Exemplo 2.8. Como visto no exemplo 2.7, os números reais π e e são transcendentess em $\mathbb{Q}$. No entanto, ambos são algébricos sobre $\mathbb{R}$, pois π é zero do polinômio $f(x) = x - \pi \in \mathbb{R}[x]$ e e é zero do polinômio $f(x) = x - e \in \mathbb{R}[x]$.

Exemplo 2.9. Vejamos se o número real $\{1 + \sqrt{14}\}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Seja $\alpha = \{1 + \sqrt{14}\}$, então $\alpha - 1 = \sqrt{14}$, logo, $(\alpha - 1)^2 = 14$. Portanto, $\alpha^2 - 2\alpha - 13 = 0$ com α sendo zero do polinômio $f(x) = x^2 - 2x - 13$, que está em $\mathbb{Q}[x]$.

Definição 2.10. Um elemento de $\mathbb{C}$ que é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ é um número algébrico. Um elemento de $\mathbb{C}$ que é transcendente sobre $\mathbb{Q}$ é chamado de número transcendente.

Teorema 2.11. *Sejam E uma extensão de corpos do corpo F e $\alpha \in E$. Seja $\phi_\alpha : F[x] \rightarrow E$ o homomorfismo de valoração de $F[x]$ em E , tal que $\phi_\alpha(a) = a$ para $a \in F$ e $\phi_\alpha(x) = \alpha$. Então α é transcendente sobre F se e, somente se, ϕ_α é um isomorfismo de $F[x]$ com um subconjunto de E que seja um anel de integridade.*

Demonstração. O elemento α é transcendente sobre F se, e somente se, $f(\alpha) \neq 0$ para todo $f \in F[x]$ não nulo. Equivalentemente, por definição, se, e somente se, $\phi_\alpha(f(x)) \neq 0$ para todo $f(x) \in F[x]$ diferente de zero, ou seja, se, e somente se, o núcleo de ϕ_α é 0, isto é, se, e somente se, ϕ_α é uma aplicação injetora. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo de Anéis (para mais detalhes, vide Teorema 26.17, ref [6], pág. 242):

$$\frac{F[x]}{N(\phi_\alpha)} \simeq \phi_\alpha[F[x]]$$

ou seja,

$$F[x] \simeq \phi_\alpha[F[x]]$$

em que $\phi_\alpha[F[x]]$ é subdomínio de E . □

Considere a extensão de corpos de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Sabemos que $\sqrt{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, sendo zero de $f(x) = x^2 - 2$. Claramente, $\sqrt{2}$ também é zero de $g(x) = x^3 - 2x$ e de $h(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1)$. Esses outros polinômios, tendo $\sqrt{2}$ como zero, são múltiplos de $f(x) = x^2 - 2$. O próximo Teorema ilustra essa situação generalizada.

Teorema 2.12. *Seja E uma extensão do corpo F e $\alpha \in E$, onde α é algébrico sobre F . Então há um polinômio irredutível $p(x) \in F[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Esse polinômio irredutível é determinado exclusivamente até um fator constante F e é um polinômio minimal de grau ≥ 1 em $F[x]$ tendo α como um zero. Se $f(\alpha) = 0$ para $f(x) \in F[x]$, com f não nulo, então $p(x)$ divide $f(x)$.*

Demonstração. Seja ϕ_α um homomorfismo de avaliação de $F[x]$ em E , pelo Teorema dos Homomorfismos de Avaliação para a Teoria dos Corpos (para mais detalhes, vide Teorema 22.4, ref [6], pág. 201). O núcleo de ϕ_α é um ideal principal gerado por algum $p(x) \in F[x]$. Seja $\langle p(x) \rangle$ um dos elementos de $F[x]$, tendo α como zero, ou seja $\langle p(\alpha) \rangle = 0$. Se $f(\alpha) = 0$ para f não nulo, então $f(x) \in \langle p(x) \rangle$. Logo, $p(x)$ divide $f(x)$. Por isso, $p(x)$ é um polinômio minimal de grau ≥ 1 tendo α como um zero, e qualquer outro polinômio de mesmo grau que $p(x)$ deve ser da forma $(a)p(x)$ para $a \in F$.

Só nos resta mostrar que $p(x)$ é irredutível. Suponha que $p(x) = r(x)s(x)$ é uma fatoração de $p(x)$ em um polinômio de grau inferior, então $p(\alpha) = 0$ implica que $r(\alpha)s(\alpha) = 0$, logo $r(\alpha) = 0$ ou $s(\alpha) = 0$. O que é uma contradição, já que por hipótese, $p(x)$ é minimal de grau ≥ 1 tal que $p(\alpha) = 0$. Portanto, temos que $p(x)$ é irredutível. $\square$

Definição 2.13. Sejam E uma extensão de um corpo F e $\alpha \in E$ algébrico sobre F . O único polinômio mônico $p(x)$ que tem a propriedade descrita no Teorema 2.12 é um polinômio irredutível de α sobre F e será denotado como $\text{irr}(\alpha, F)$. O grau de $\text{irr}(\alpha, F)$ é o grau de α sobre F , denotado como $\partial(\alpha, F)$.

Exemplo 2.14. Podemos ver, através do Exemplo 2.9, que dado $\alpha = 1 + \sqrt{14} \in \mathbb{R}$, então α é zero de $f(x) = x^2 - 2x - 13$, que está em $\mathbb{Q}[x]$. Sendo $f(x) = x^2 - 2x - 13$ irredutível sobre $\mathbb{Q}$, (por Eisenstein com $p = 2$), vemos que:

$$\text{irr}(1 + \sqrt{14}, \mathbb{Q}) = x^2 - 2x - 13$$

Portanto, $1 + \sqrt{14}$ é algébrico de grau 2 sobre $\mathbb{Q}$.

Assim, como devemos considerar um elemento α algébrico sobre F , e não simplesmente algébrico, devemos falar do grau de α sobre F , em vez de grau de α . Como é possível observar no exemplo a seguir, essa consideração é importante devido ao fato de que um mesmo elemento pode ser algébrico sobre dois corpos distintos.

Exemplo 2.15. Temos que $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ é algébrico de grau 2 sobre $\mathbb{Q}$, para $\text{irr}(\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = x^2 - 3$, mas é algébrico de grau 1, sobre $\mathbb{R}$, para $\text{irr}(\sqrt{3}, \mathbb{R}) = x - \sqrt{3}$.

2.2 Sobre extensões simples e algébricas

Sejam E uma extensão do corpo F , e $\alpha \in E$. Veja que, se α é algébrico sobre F , da definição 2.13 e considerando o homomorfismo de valoração $\phi_\alpha : F[x] \rightarrow E$, tem-se que $N(\phi_\alpha) = \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$, pois:

$$N(\phi_\alpha) = \{f(x) \in F[x] : \phi_\alpha(f(x)) = 0\} = \{f(x) \in F[x] : f(\alpha) = 0\}.$$

Do Teorema 2.12, sabe-se que $\text{irr}(\alpha, F)$ divide $f(x)$, logo:

$$f(x) = \text{irr}(\alpha, F) \cdot g(x), \quad g(x) \in F[x]$$

ou seja, $f(x) \in \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$ e $\langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle \subset N(\phi_\alpha)$, pois:

$$\begin{aligned} h(x) \in \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle &\Rightarrow h(x) = \text{irr}(\alpha, F) \cdot g(x) \\ &\Rightarrow h(\alpha) = (\text{irr}(\alpha, F)(\alpha)) \cdot g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0 \Rightarrow h(x) \in N(\phi_\alpha) \end{aligned}$$

Consequentemente, pelo Teorema que afirma que um ideal $\langle p(x) \rangle$ de $F[x]$ não nulo é maximal se, e somente se, $p(x)$ é irredutível sobre F (para mais detalhes, vide Teorema 27.25, ref [6], pág. 251), sendo $\langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$ um polinômio irredutível em $F[x]$, o ideal $\langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$ é um ideal maximal de $F[x]$ e, portanto

$$\frac{F[x]}{\langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle}$$

é corpo (para mais detalhes, vide Teorema 27.9, ref [6], pág. 247).

Nesse contexto, estamos interessados em definir a Extensão Simples, $F(\alpha)$, de F , que é a menor extensão do corpo F que contém F e α . Para tanto, exploramos as duas possibilidades da natureza de α sob o ponto de vista da sua transcendência, ou não sobre F . A saber:

Caso I: Suponha que α é algébrico sobre F , então pelo que observamos acima:

$$\frac{F[x]}{\langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle}$$

é corpo e, $\phi_\alpha : F[x] \rightarrow E$ é tal que $N(\phi_\alpha) = \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$ e pelo Teorema do Isomorfismo para Anéis (vide Teorema 26.17, ref [6], pág. 242) temos que:

$$\frac{F[x]}{N(\phi_\alpha)} \simeq \phi_\alpha[F[x]],$$

ou seja,

$$\frac{F[x]}{\langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle} \simeq \phi_\alpha[F[x]] \subset E.$$

Então, $\frac{F[x]}{\langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle}$ é um corpo isomorfo a $\phi_\alpha[F[x]]$ e com isso, $\phi_\alpha[F[x]]$ é subcorpo de E , e é denotado por $F(\alpha)$.

Caso II: Suponha que α é transcendente sobre F . Então do Teorema 2.11, ϕ_α é um isomorfismo de $F[x]$ com subdomínio de E , pois nesse caso $N(\phi_\alpha) = \{0\}$ a saber,

$$F[x] \simeq \phi_\alpha[F[x]] \subset E$$

denotamos $\phi_\alpha[F[x]]$ por $F[\alpha]$ e o corpo das frações de $F[\alpha]$ denotamos por $F(\alpha)$ que é um corpo em E .

Em ambos os casos $F(\alpha)$ é o menor subcorpo de E que contém F e α .

Exemplo 2.16. Seja π transcendente sobre $\mathbb{Q}$, o corpo $\mathbb{Q}(\pi)$ é isomorfo ao corpo $\mathbb{Q}(x)$ de funções racionais sobre $\mathbb{Q}$ para um x indeterminado. Portanto, de um ponto de vista estrutural, um elemento que é transcendente sobre um corpo F comporta-se como um indeterminado sobre F .

Definição 2.17. Uma extensão do corpo E para o corpo F é uma extensão simples de F se $E = F(\alpha)$ para algum $\alpha \in E$.

Exemplo 2.18. Vejamos alguns exemplos da definição anterior:

1. $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2 - 3 \rangle}$ corresponde a uma extensão simples do corpo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
2. $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2 - 5 \rangle}$ corresponde a uma extensão simples do corpo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
3. $\mathbb{Q}(\pi)$ é o menor subcorpo de $\mathbb{R}$ que contém $\mathbb{Q}$ e π .

O próximo Teorema nos dá uma visão sobre a natureza do corpo $F(\alpha)$ no caso em que α é algébrico sobre F .

Teorema 2.19. *Sejam E uma extensão simples de um corpo F , α algébrico sobre F e $\partial(\alpha, F) = n$, $n \geq 1$. Então cada elemento β de $E = F(\alpha)$ pode ser expresso exclusivamente na forma:*

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1},$$

em que $b_i \in F, \forall i = \{1, \dots, n-1\}$.

Demonstração. Para o homomorfismo de valoração ϕ_α , todo elemento de

$$F(\alpha) = \phi_\alpha[F[x]]$$

é da forma $\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$, um polinômio formal em α com coeficientes em F . Seja

$$\text{irr}(\alpha, F) = p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

Então $p(\alpha) = 0$ portanto,

$$0 = p(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0$$

logo,

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - a_0$$

Esta equação em $F(\alpha)$ pode ser utilizada para expressar todos monômios α^m para $m \geq n$ em termos de α que são menores que n . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= \alpha\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^n - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \dots - a_0\alpha = \\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - a_0) - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \dots - a_0\alpha \end{aligned}$$

Por isso, se $\beta \in F(\alpha)$, β pode ser expresso na forma exigida

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

Para exclusividade, se

$$b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1} = b'_0 + b'_1\alpha + \dots + b'_{n-1}\alpha^{n-1}$$

Para $b_i \in F$, então

$$(b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)\alpha + \dots + (b_{n-1} - b'_{n-1})\alpha^{n-1} = g(x)$$

em $F[x]$ e $g(\alpha) = 0$. Também, o grau de $g(x)$ é menor que o grau de $\text{irr}(\alpha, F)$. Como $\text{irr}(\alpha, F)$ é um polinômio minimal não nulo de grau em $F[x]$ tendo α como um zero, devemos ter $g(x) = 0$. Portanto, $b_i - b'_i = 0$, então $b_i = b'_i$, e a unicidade do b_i está estabelecida. Portanto, cada elemento β de $E = F(\alpha)$ pode ser expresso exclusivamente na forma:

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1},$$

onde todos b_i estão em F , como queríamos mostrar. $\square$

Exemplo 2.20. O polinômio $p(x) = x^2 + x + 1$ em $\mathbb{Z}_2[x]$ é irreduzível sobre $\mathbb{Z}_2$, pois sabemos que dado um $f(x)$ em $F[x]$, de grau 2 ou 3, este $f(x)$ é redutível sobre F se, e somente se, tiver zero em $F[x]$ (para mais detalhes, vide Teorema 23.10, ref [6], pág. 214), já que nem o elemento 0 nem o elemento 1 de $\mathbb{Z}_2$ contém o zero α de $x^2 + x + 1$. Pelo Teorema 2.19, $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ tem elementos $0 + 0\alpha, 1 + 0\alpha, 0 + 1\alpha$ e $1 + 1\alpha$, isto é, $0, 1, \alpha$ e $1 + \alpha$. Isso gera um novo corpo finito de quatro elementos!

Por exemplo, calculando $(1 + \alpha)(1 + \alpha)$ em $\mathbb{Z}_2(\alpha)$, observamos que desde $p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1$, então:

$$\alpha^2 = -\alpha - 1 = \alpha + 1$$

Portanto,

$$(1 + \alpha)(1 + \alpha) = 1 + \alpha + \alpha + \alpha^2 = 1 + \alpha^2 = 1 + \alpha + 1 = \alpha$$

As tábuas da adição e multiplicação do corpo $\mathbb{Z}_2(\alpha)$, podem ser observadas a seguir:

+	0	1	α	$1 + \alpha$	·	0	1	α	$1 + \alpha$
0	0	1	α	$1 + \alpha$	0	0	0	0	0
1	1	0	$1 + \alpha$	α	1	0	1	α	$1 + \alpha$
α	α	$1 + \alpha$	0	1	α	0	α	$1 + \alpha$	1
$1 + \alpha$	$1 + \alpha$	α	1	0	$1 + \alpha$	0	$1 + \alpha$	1	α

Finalmente, é possível utilizar o Teorema 2.19 para cumprir a promessa do exemplo 2.3 e mostrar que $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ é isomorfo ao corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. No exemplo 2.3 é visto $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ como uma extensão do corpo $\mathbb{R}$. Seja,

$$\alpha = x + \langle x^2 + 1 \rangle$$

então $\mathbb{R}(\alpha) = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ e consiste em todos os elementos da forma $a + b\alpha$, para a e $b \in \mathbb{R}$, pelo Teorema 2.19. Mas desde $\alpha^2 + 1 = 0$, vemos que α desempenha o papel de $i \in \mathbb{C}$ e $a + b\alpha$ desempenha o papel de $(a + bi) \in \mathbb{C}$. Então $\mathbb{R}(\alpha) \simeq \mathbb{C}$. Esta é a maneira algébrica elegante de construir $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$.

Antes de abordarmos extensões algébricas, serão apresentadas algumas observações importantes sobre a interseção da álgebra linear com a teoria dos corpos que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho. No contexto da álgebra linear, se F é um corpo, então o anel de polinômio $F[x]$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre F , em que as operações são dadas por adição canônica dos polinômios em $F[x]$ e a multiplicação por escalar αa como sendo um elemento de $F[x]$ por um elemento de F a multiplicação canônica em $F[x]$.

Além disso, observamos que se E é uma extensão de corpos de F , então E pode ser considerado um espaço vetorial sobre F , considerando as seguintes operações: a adição usual em E e a multiplicação por escalar αa usual, tendo em vista que F é subcorpo de E , com $\alpha \in F$ e $a \in E$.

Ainda no contexto da álgebra linear, seja E uma extensão do corpo F e $\alpha \in E$ algébrico sobre F . Pelo Teorema 2.19, $F(\alpha)$ tem todos os elementos escritos em termos dos elementos do conjunto $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ em que $n = \partial(\alpha, F)$. Ou seja, é possível olhar para a extensão simples $F(\alpha)$ como um espaço vetorial de dimensão finita sobre F em que as operações são herdadas de $F(\alpha)$ enquanto corpo e F como um subcorpo de $F(\alpha)$.

Teorema 2.21. *Sejam E uma extensão do corpo F e $\alpha \in E$ algébrico sobre F . Se $\partial(\alpha, F) = n$, então $F(\alpha)$ é um espaço vetorial de dimensão n sobre F com base $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$. Além disso, todo elemento β de $F(\alpha)$ é algébrico sobre F e $\partial(\beta, F) \leq \partial(\alpha, F)$.*

Demonstração. A primeira parte da demonstração está explícita nos comentários anteriores a esse resultado. Para a segunda parte: seja $\beta \in F(\alpha)$, onde α é algébrico sobre F de grau n . Considere os elementos

$$1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n$$

estes não podem ser $n+1$ elementos distintos de $F(\alpha)$, que são linearmente independentes sobre F (para mais detalhes, vide Teorema 30.19, ref [6], pág. 279). Qualquer base $F(\alpha)$ sobre F teria que conter pelo menos tantos elementos quanto existem em qualquer conjunto de vetores linearmente independentes sobre F . No entanto, a base $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ tem apenas n elementos. Se $\beta^i = \beta^j$ então $\beta^i - \beta^j = 0$, então, em qualquer caso, existe $b_i \in F$ tal que

$$b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \dots + b_n\beta^n = 0,$$

onde nem todos $b_i = 0$. Então $f(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ é um elemento não nulo de $F[x]$ tal que $f(\beta) = 0$. Portanto, β é algébrico sobre F e $\partial(\beta, F)$ é no máximo n . $\square$

Exemplo 2.22. Considere $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$. Sabe-se que $\partial(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 2$, então do Teorema anterior temos que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{Q}$ e $\{1, \sqrt{2}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sobre $\mathbb{Q}$. Utilizando a técnica demonstrada no exemplo 2.9, temos que $3 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ é o zero de $f(x) = x^2 - 6x + 7$ logo, é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ e $\partial(3 - \sqrt{2}, \mathbb{Q}) = \partial(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$.

A próxima definição, sobre extensões algébricas, trata de um elemento muito importante deste trabalho sobre a teoria de Galois.

Definição 2.23. Uma extensão de corpos E de um corpo F é uma extensão algébrica de F se todos os elementos em E são algébricos sobre F .

Exemplo 2.24. A extensão do corpo $\mathbb{C}$ no corpo $\mathbb{R}$ é uma extensão algébrica. Consideremos $\alpha \in \mathbb{C}$, onde $\alpha = a + bi$, para $a, b \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x]$. Note que:

$$p(\alpha) = (a + bi)^2 - 2a(a + bi) + a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$p(\alpha) = a^2 + 2abi - b^2 - 2a^2 - 2abi + a^2 + b^2 = 0$$

Como $\alpha \in \mathbb{C}$ é arbitrário, então todo elemento de $\mathbb{C}$ é algébrico sobre $\mathbb{R}$, mostrando assim que a extensão é algébrica.

Exemplo 2.25. Toda extensão simples com α algébrico é uma extensão algébrica. De fato, no Teorema 2.21 vimos que se E é uma extensão do corpo F e $\alpha \in E$ é algébrico sobre F , então todos elementos de $F(\alpha)$ é algébrico sobre F . Assim, por definição, E é uma extensão algébrica de F .

Definição 2.26. Se uma extensão de corpos E de um corpo F é de dimensão finita n como um espaço vetorial sobre F , então E é uma extensão finita de grau n sobre F . Denotamos $[E : F]$ como o grau n de E sobre F .

Dizer que um corpo E é uma extensão finita de um corpo F não significa que E seja um corpo finito. Apenas afirma que E é um espaço vetorial de dimensão finita sobre F , ou seja, que $[E : F]$ é finito.

Observação 2.27. Pode ser visto que se E é uma extensão finita de F , então $[E : F] = 1$ se, e somente se, $E = F$. De fato, o elemento $\{1\}$ pode visto como uma base E sobre F (para mais detalhes, vide Teorema 30.19, ref [6], pág. 279). Então $[E : F] = 1$ se, e somente se, $E = F(1) = F$.

Teorema 2.28. *Toda extensão finita é algébrica.*

Demonstração. Seja E uma extensão finita do corpo F . Devemos mostrar que qualquer $\alpha \in E$ é algébrico sobre F . Se $[E : F] = n$ então

$$1, \alpha, \dots, \alpha^n$$

é um conjunto linearmente dependente sobre F (para mais detalhes, vide Teorema 30.19, ref [6], pág. 279), uma vez que sua cardinalidade é maior do que a dimensão do espaço, então existe $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in F$, e ao menos um elemento difere de zero, de modo que:

$$a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0,$$

Então $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ é um polinômio não nulo em $F[x]$ e $f(\alpha) = 0$. Portanto, α é algébrico sobre F . □

O próximo Teorema vai ser uma ferramenta fundamental no momento em que for abordado a impossibilidade de realizar certas construções geométricas com régua e compasso.

Teorema 2.29. *Se K é uma extensão finita do corpo E e E é uma extensão finita sobre F , então K é uma extensão finita sobre F , e*

$$[K : F] = [K : E][E : F].$$

Demonstração. Seja $\{\alpha_i \mid i = 1, \dots, n\}$ uma base de E como um espaço vetorial sobre F , e seja o conjunto $\{\beta_j \mid j = 1, \dots, m\}$ uma base de K como um espaço vetorial sobre E . O Teorema vai ser provado se pudermos mostrar que os mn elementos de $\alpha_i \beta_j$ formam uma base para K , visto como um espaço vetorial sobre F .

Seja γ qualquer elemento de K . Como β_j forma uma base para K sobre E , temos que:

$$\gamma = \sum_{j=1}^m b_j \beta_j$$

para $b_j \in E$. Do mesmo modo, como α_i forma uma base para E sobre F , e sendo $b_j \in E$, temos:

$$b_j = \sum_{i=1}^n a_{i_j} \alpha_i$$

para $a_{i_j} \in F$. Então,

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i_j} \alpha_i \right) \beta_j = \left(\sum_{i=1}^n a_{i_1} \alpha_i \right) \beta_1 + \left(\sum_{i=1}^n a_{i_2} \alpha_i \right) \beta_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n a_{i_m} \alpha_i \right) \beta_m = \\ &= (a_{1_1} \alpha_1 + a_{2_1} \alpha_2 + \dots + a_{n_1} \alpha_n) \beta_1 + \dots + (a_{1_m} \alpha_1 + a_{2_m} \alpha_2 + \dots + a_{n_m} \alpha_n) \beta_m = \\ &= [a_{1_1}(\alpha_1 \beta_1) + a_{2_1}(\alpha_2 \beta_1) + \dots + a_{n_1}(\alpha_n \beta_1)] + \dots + [a_{1_m}(\alpha_1 \beta_m) + a_{2_m}(\alpha_2 \beta_m) + \dots + a_{n_m}(\alpha_n \beta_m)] \\ &= a_{1_1} \left(\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \right) + \dots + a_{n_m} \left(\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \right) = \sum_{i,j} a_{i_j} \left(\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \right) = \sum_{i,j} a_{i_j} (\alpha_i \beta_j) \end{aligned}$$

Então o mn vetor $\alpha_i \beta_j$ gera K sobre F . Resta mostrarmos que mn elementos $\alpha_i \beta_j$ são independentes sobre F . Suponha que $\sum_{i,j} c_{i_j} (\alpha_i \beta_j) = 0$ com $c_{i_j} \in F$. Então:

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n c_{i_j} \alpha_i \right) \beta_j = 0$$

e $\left(\sum_{i=1}^n c_{i_j} \alpha_i \right) \in E$. Como os elementos β_j são independentes sobre E , devemos ter:

$$\sum_{i=1}^n c_{i_j} \alpha_i = 0$$

para todo j . Mas agora os α_i são independentes sobre F , então $\sum_{i=1}^n c_{i_j} \alpha_i = 0$ implica que $c_{i_j} = 0$ para todo i e j . Então $\alpha_i \beta_j$ não apenas gera K sobre F mas também são independentes sobre F . Assim, eles formam uma base para K sobre F . $\square$

Observe que provamos esse Teorema exibindo uma base. Vale lembrar que se $\{\alpha_i \mid i = 1, \dots, n\}$ é uma base para E sobre F e $\{\beta_j \mid j = 1, \dots, m\}$ é uma base para K sobre E , para corpos $F \leq E \leq K$, então o conjunto $\{\alpha_i \beta_j\}$ de mn produtos é uma base para K sobre F .

Corolário 2.30. Se F_i é um corpo para $i = 1, \dots, r$ e F_{i+1} é uma extensão finita de F_i , então F_r é uma extensão finita de F_1 e

$$[F_r : F_1] = [F_r : F_{r-1}][F_{r-1} : F_{r-2}] \dots [F_2 : F_1].$$

Demonstração. Segue pelo princípio de indução finita aplicado ao teorema anterior. $\square$

Corolário 2.31. Se E é uma extensão do corpo F , $\alpha \in E$ é algébrico sobre F e $\beta \in F(\alpha)$, então $\partial(\beta, F)$ divide $\partial(\alpha, F)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.21, $\partial(\alpha, F) = [F(\alpha) : F]$ e $\partial(\beta, F) = [F(\beta) : F]$. Temos $F \leq F(\beta) \leq F(\alpha)$, então pelo Teorema 2.29 $[F(\beta) : F]$ divide $[F(\alpha) : F]$. $\square$

O exemplo a seguir ilustra um tipo de argumento que muitas vezes fazemos usando o Teorema 2.29 ou seus corolários.

Exemplo 2.32. Pelo corolário 2.31, não há elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ que é zero de $x^3 - 2$. Observe que $\partial(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 2$, enquanto um zero de $x^3 - 2$ é de grau 3 sobre $\mathbb{Q}$, mas 3 não divide 2.

Observação 2.33. Seja E uma extensão do corpo F . Considere os elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ não necessariamente algébricos sobre F . Pela definição, $F(\alpha_1)$ é a menor extensão de corpos de F em E que contém α_1 . Analogamente, podemos definir $(F(\alpha_1))(\alpha_2)$ como a menor extensão de corpos de F em E contendo ambos α_1 e α_2 . Denotamos esse corpo por $F(\alpha_1, \alpha_2)$. Procedendo de modo iterado, definimos a extensão $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de F como sendo a menor extensão de corpos de F que contém $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Exemplo 2.34. Considere $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Do Teorema 2.21 temos que $\{1, \sqrt{2}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sobre $\mathbb{Q}$. Utilizando a técnica demonstrada no exemplo 2.9, pode se mostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é o zero de $x^4 - 10x^2 + 1$. Também é possível mostrar que este polinômio é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, consequentemente pela definição anterior, $\text{irr}(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \mathbb{Q}) = x^4 - 10x^2 + 1$, então $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$. Como $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, temos que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Consequentemente, $\{1, \sqrt{3}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. A prova do Teorema 2.29 mostra que $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ sobre $\mathbb{Q}$.

Exemplo 2.35. Seja $2^{\frac{1}{3}}$ a raiz cúbica real de 2 e seja $2^{\frac{1}{2}}$ a raiz quadrada positiva de 2. Então $2^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}})$ porque $\partial(2^{\frac{1}{2}}, \mathbb{Q}) = 2$ e 2 não é um divisor de $3 = \partial(2^{\frac{1}{3}}, \mathbb{Q})$. Veja que $\{1, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}})$ sobre $\mathbb{Q}$ e $\{1, 2^{\frac{1}{2}}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}})$ sobre $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}})$, por isso, $[\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}) : \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}})] = 2$. Assim, pelo Teorema 2.29, o conjunto:

$$\left\{1, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{5}{6}}, 2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{7}{6}}\right\}$$

forma uma base para $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}})$ sobre $\mathbb{Q}$. Como $2^{\frac{7}{6}} = 2(2^{\frac{1}{6}})$, temos $2^{\frac{1}{6}} \in \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}})$. Agora $2^{\frac{1}{6}}$ é zero de $x^6 - 2$ que é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, pelo critério de Eisenstein, com $p = 2$. Então:

$$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{6}}) \leq \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}})$$

e novamente pelo Teorema 2.29:

$$6 = [\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}) : \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{6}})][\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{6}}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}) : \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{6}})].6$$

Portanto, devemos ter:

$$[\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}) : \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{6}})] = 1$$

Então $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}) = \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{6}})$ pela Observação 2.27.

O Exemplo 2.35 mostra que uma possível extensão $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de um corpo F pode ser na verdade uma extensão simples, embora $n > 1$.

Vamos caracterizar extensões de F da forma $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ no caso de todos os α_i serem algébricos sobre F .

Teorema 2.36. *Seja E uma extensão algébrica do corpo F . Existe um número finito de elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em E tal que $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se, e somente se, E é um espaço vetorial de dimensão finita sobre F , isto é, se, e somente se, E é uma extensão finita de F .*

Demonstração. Suponha que $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Desde que E seja uma extensão algébrica de F , cada α_i é algébrico sobre F , então cada α_i é algébrico sobre toda extensão de corpos de F em E . Por isso, $F(\alpha_1)$ é algébrico sobre F e em geral, $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é algébrico sobre $F(\alpha_i, \dots, \alpha_{j-1})$ para $j = 2, \dots, n$. O Corolário 2.30 aplicado a sequência de extensões finitas.

$$F, F(\alpha_1), F(\alpha_1, \alpha_2), \dots, F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$$

Então mostra que E é uma extensão finita de F .

Por outro lado, suponha que E é uma extensão algébrica finita de F . Se $[E : F] = 1$, então $E = F(1) = F$, e acabamos. Se $E \neq F$, seja $\alpha_1 \in E$, onde $\alpha_1 \notin F$. Então $[F(\alpha_1) : F] > 1$. Se $F(\alpha_1) = E$ acabamos. Se não, seja $\alpha_2 \in E$, onde $\alpha_2 \notin F(\alpha_1)$. Continuando esse processo, vemos do Teorema 2.29 que $[E : F]$ é finito, devemos chegar a α_n tal que

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$$

□

Para finalizar este capítulo, abordamos alguns fatos sobre corpos algebricamente fechados.

Veja que se E é uma extensão algébrica de um corpo F e $\alpha, \beta \in E$ são algébricos sobre F , então $\alpha + \beta, \alpha\beta, \alpha - \beta$ e $\frac{\alpha}{\beta}$, com $\beta \neq 0$, também são algébricos sobre F . Isso segue do Teorema 2.28 e do seguinte resultado.

Teorema 2.37. *Se E uma extensão de corpos de F , então o conjunto:*

$$\overline{F_E} = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ é algébrico sobre } F\}$$

é um subcorpo de E , chamado fecho algébrico de F em E .

Demonstração. Seja α e $\beta \in \overline{F_E}$. Então o Teorema 2.36 mostra que $F(\alpha, \beta)$ é uma extensão finita de F , e pelo Teorema 2.28 é uma extensão algébrica, logo todos os elementos de $F(\alpha, \beta)$ são algébricos sobre F , isto é, $F(\alpha, \beta) \subset \overline{F_E}$. Por isso, $\overline{F_E}$ contém $\alpha + \beta, \alpha\beta, \alpha - \beta$ e também contém $\frac{\alpha}{\beta}$ para $\beta \neq 0$, então $\overline{F_E}$ é um subcorpo de E . □

Sabemos que todo polinômio não constante em $\mathbb{C}[x]$ tem um zero em $\mathbb{C}$. Este fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra (para mais detalhes, vide Teorema 31.18, ref [6], pág. 288). Damos agora uma definição generalizando este importante conceito para outros corpos.

Definição 2.38. Um corpo F é algebricamente fechado se todo polinômio não constante em $F[x]$ tem pelo menos um zero em F .

Note que um corpo F pode ser o fecho algébrico de F em uma extensão de corpos E sem que F seja algebricamente fechado. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é o fecho algébrico de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}[x]$, mas $\mathbb{Q}$ não é algebricamente fechado pois $x^2 + 1$ não tem zero em $\mathbb{Q}$.

O próximo teorema mostra que o conceito de um corpo algebricamente fechado pode também ser definido em termos da fatoração de polinômios sobre o corpo.

Teorema 2.39. *O corpo F é algebricamente fechado se, e somente se, todo polinômio de fatores não constante em $F[x]$ fatora em $F[x]$ através de fatores lineares.*

Demonstração. Sejam F algebricamente fechado e $f(x)$ um polinômio não constante em $F[x]$. Então $f(x)$ tem um zero $a \in F$. Pelo resultado que afirma que um elemento $a \in F$ é um zero de $f(x) \in F[x]$ se, e somente se, $x - a$ é um fator de $f(x)$ em $F[x]$ (para mais detalhes, vide Corolário 23.3, ref [6], pág. 211), $x - a$ é um fator de $f(x)$, então $f(x) = (x - a)g(x)$. Logo, se $g(x)$ não é constante, tem um zero $b \in F$ e temos $f(x) = (x - a)(x - b)h(x)$. Continuando este processo, conseguimos uma fatoração de $f(x)$ em $F[x]$ em fatores lineares.

Por outro lado, suponha que todo polinômio não constante de $F[x]$ pode ser fatorado em fatores lineares em $F[x]$. Assim, se $ax - b \in F[x]$ é um fator linear de $f(x)$, então $\frac{b}{a} \in F[x]$ é um zero de $f(x)$, ou seja $f(x)$ tem zero em $F[x]$. Portanto, pela Definição 2.38 F é algebricamente fechado. $\square$

Corolário 2.40. *Um corpo algebricamente fechado F não tem extensões algébricas próprias, isto é, não existe extensão algébrica E com $F < E$.*

Demonstração. Seja E uma extensão algébrica de F , então $F \leq E$. Então se $\alpha \in E$, temos $\text{irr}(\alpha, F) = x - \alpha$, pelo Teorema 2.39 já que F é algebricamente fechado, ou seja, $[E : F] = 1$ então pela Observação 2.27, $E = F(1) = F$, logo $F = E$. $\square$

Por último, destacamos um teorema que garante que um corpo sempre tem um fecho algébrico, a saber:

Teorema 2.41. *Todo corpo F tem um fecho algébrico, ou seja, uma extensão algébrica $\bar{F}$ que é algebricamente fechada.*

Demonstração. Vide Teorema 31.22, ref [6], pág. 290. $\square$

Exemplo 2.42. Um exemplo clássico do teorema anterior é o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ que é o fecho algébrico do corpo dos números reais $\mathbb{R}$.

Os tópicos estudados neste capítulo servirão de base para o próximo, que é fundamental neste trabalho, pois nele mostraremos, como resultado final, a impossibilidade de construção dos *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*.

3 Construções geométricas

Nesta seção faremos uma breve digressão para fornecer uma aplicação que demonstre o poder do Teorema 2.29. Estamos interessados em saber que tipo de figuras podem ser construídas com um compasso e uma régua no sentido da geometria clássica. Discutiremos a visão clássica da impossibilidade de trisseccionar certos ângulos, duplicar cubos, e construir a quadratura do círculo.

3.1 Números construtíveis

Consideramos que seja dado o único segmento de reta que definimos como a unidade de comprimento.

Definição 3.1. Um número real α é construtível se for possível construir um segmento de reta de comprimento $|\alpha|$ através de um número finito de etapas a partir deste segmento de comprimento unitário usando especificamente uma régua e um compasso.

Na definição anterior as etapas que foram elaboradas, seguem uma construção geométrica através de regras bastante rígidas. As quais explicitamos a seguir:

- Uma reta só pode ser traçada com régua, passando por dois pontos que já estão admitidos no contexto.
- Só é possível abrir o compasso com uma distância entre pontos já encontrados.
- É possível obter novos pontos através das intersecções de retas, circunferências ou retas com circunferências.
- A partir de pontos já determinados, é possível traçar novas retas e circunferências.
- O compasso é exclusivamente usado para traçar circunferências, arcos ou transportar medidas.
- A régua é utilizada exclusivamente para manter a precisão das retas. Em hipótese alguma, usamos medidas pré-estabelecidas nas régua.

Com a manipulação de régua e compasso através de sequência de passos das operações acima elencadas, podemos mostrar que é possível, construir elementos importantes da geometria euclidiana. Como exemplo, podemos erguer uma perpendicular a uma determinada reta e encontrar uma reta que passe por um ponto conhecido e seja paralela a uma dada reta.

Exemplo 3.2. O número $\sqrt{2}$ é construtível.

Sejam o segmento 1 o segmento unitário e r uma reta.

1. Trace a reta s , perpendicular à reta r . Nomeie a intersecção das duas retas de O .
2. Faça uma circunferência C de raio 1 (a partir do segmento unitário), com centro em O .
3. Nomeie a intersecção da circunferência com a reta r de A (Notando que há duas possibilidades e o resultado independe da escolha).
4. Nomeie a intersecção da circunferência com a reta s de B (Notando que há duas possibilidades e o resultado independe da escolha).
5. Trace o segmento $\overline{AB}$.

Justificativa. Do Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, como $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são segmentos unitários, temos que $\overline{AB} = \sqrt{2}$.

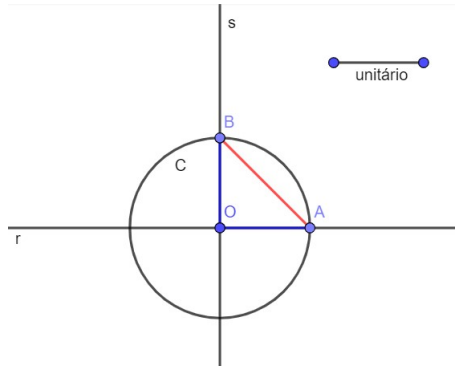


Figura 3.1: Construção geométrica $\sqrt{2}$.

Teorema 3.3. Se α e β são números reais construtíveis, então também são $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$ e $\frac{\alpha}{\beta}$ se $\beta \neq 0$.

Demonstração. Sabemos que α e β são construtíveis, portanto, existem segmentos de reta de comprimentos $|\alpha|$ e $|\beta|$. Para $\alpha, \beta > 0$, estenda um segmento de reta de comprimento α com a régua. Na extremidade do segmento original de comprimento α , coloque a extensão do comprimento β com o compasso. Assim construimos um segmento de reta de comprimento $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$ é similarmente construtível (Veja Figura 3.2).

Se α e β não forem ambos positivos, uma divisão em casos, de acordo com seus sinais, mostra que $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ ainda são construtíveis.

A construção de $\alpha\beta$ está indicada na figura 3.3. Seja $\overline{OA}$ o segmento de reta do ponto O ao ponto A e $|\overline{OA}|$ o seu comprimento. Se $\overline{OA}$ tiver comprimento $|\alpha|$, construa uma reta l passando por O que não contenha $\overline{OA}$. Então encontre os pontos P e B em l tais que $\overline{OP}$ tenha comprimento 1 e $\overline{OB}$ tenha comprimento $|\beta|$. Desenhe $\overline{PA}$ e construa l' através de B , paralelo a $\overline{PA}$ e cruzando $\overline{OA}$ estendido em Q . Por semelhança de triângulo, temos:

$$\frac{1}{|\alpha|} = \frac{|\beta|}{|\overline{OQ}|},$$

então $\overline{OQ}$ tem comprimento $|\alpha\beta|$.

Finalmente, a figura 3.3 mostra que $\frac{\alpha}{\beta}$ é construtível, se $\beta \neq 0$. Seja $\overline{OA}$ de comprimento $|\alpha|$, construa uma reta l que passa por O não contendo OA . Então encontre B e P em l de modo que $\overline{OB}$ tenha comprimento $|\beta|$ e $\overline{OP}$ tenha comprimento 1. Desenhe BA e construa l' através de P , paralelo a BA e interceptando $\overline{OA}$ em Q . Novamente por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{|\overline{OQ}|}{1} = \frac{|\alpha|}{|\beta|},$$

então $\overline{OQ}$ tem comprimento $|\frac{\alpha}{\beta}|$. □

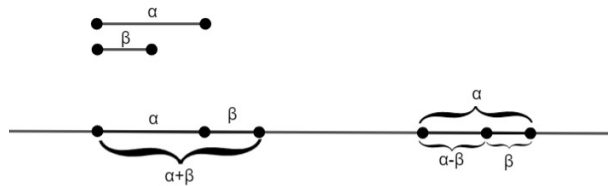


Figura 3.2: Soma e subtração de α e β .

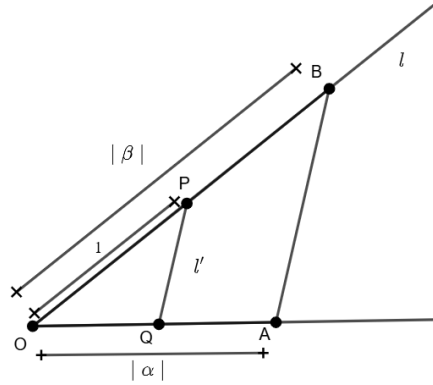


Figura 3.3: Construção de $\alpha\beta$.

Corolário 3.4. *O conjunto de todos os números reais construtíveis forma um subcorpo F do corpo dos números reais.*

Demonstração. A prova deste corolário é consequência direta da definição de subcorpo e do Teorema 3.3. □

No que segue, observamos que o corpo F de todos os números reais construtíveis contém $\mathbb{Q}$, o corpo dos números racionais, uma vez que $\mathbb{Q}$ é o menor subcorpo de $\mathbb{R}$. A partir de agora, procedemos analiticamente. É possível construir qualquer número racional, a partir de um segmento primordial o qual será referendado como 1 e será nossa

unidade básica, com isso podemos localizar qualquer ponto (q_1, q_2) no plano com ambas as coordenadas racionais. Qualquer outro ponto no plano que possamos localizar usando um compasso e uma régua pode ser encontrado de uma das três maneiras como segue:

1. Como uma intersecção de duas retas (que não sejam paralelas entre si, nem coincidentes), cada uma das quais passa por dois pontos conhecidos com coordenadas racionais. Algebricamente, esses tais pontos seriam resultado do sistema dado por:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

onde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$.

2. Como a intersecção de uma reta que passa por pontos de coordenadas racionais e um círculo cujo centro tem coordenadas racionais e cujo raio é um número racional. Ou seja, a intersecção será resultado das seguintes equações:

$$ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$.

3. Como uma intersecção de dois círculos cujos centros têm coordenadas racionais e cujos raios são números racionais. Ou seja, a intersecção de dois círculos com equações:

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

onde $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}$.

Entretanto, observe que a resolução entre a intersecção dessas duas circunferências é equivalente a encontrar a intersecção do primeiro círculo

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

com a reta

$$(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + f_1 - f_2 = 0$$

onde $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}$. Com isso, podemos reduzir este caso ao caso 2.

Observe ainda que a solução de duas equações lineares com coeficientes racionais só pode levar a valores racionais de x e y , não dando novos pontos. Porém, encontrar uma solução simultânea de uma equação linear com coeficientes racionais e uma equação quadrática com coeficientes racionais, como no caso 2, leva mediante substituição, a uma equação quadrática. Tal equação, quando resolvida pela fórmula quadrática, pode ter soluções envolvendo raízes quadradas de números que não são quadrados em $\mathbb{Q}$.

No argumento anterior, nada foi realmente usado envolvendo $\mathbb{Q}$, exceto axiomas de corpos. Se H é o menor corpo que contém os números reais construídos até agora, o argumento mostra que o “próximo novo número” construído está em um corpo $H(\alpha)$ para algum $\alpha \in H$, onde $\alpha > 0$. Provamos metade do nosso próximo teorema.

Teorema 3.5. *O corpo F dos números reais construtíveis consiste precisamente em todos os números reais que podem ser obtidos de $\mathbb{Q}$ extraindo raízes quadradas de números positivos um número finito de vezes e aplicando um número finito de operações de corpos.*

Demonstração. Mostramos que F não pode conter nenhum número exceto aqueles que obtemos de $\mathbb{Q}$ tomando um número finito de raízes quadradas de números positivos e aplicando um número finito de operações de corpos. No entanto, se $\alpha > 0$ é construtível, então da figura 3.4 mostra que $\sqrt{\alpha}$ é construtível. Seja $\overline{OA}$ de comprimento α , desenhe $\overline{OP}$ de forma que tenha comprimento 1 e esteja oposto a $\overline{OA}$. Encontre o ponto médio de $\overline{PA}$ e desenhe um semicírculo com diâmetro $\overline{PA}$. Trace uma semirreta perpendicular a $\overline{PA}$, passando por O e nomeie a intersecção com o semicírculo de Q . Os triângulos gerados por OPQ e OQA são semelhantes, então:

$$\frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OQ}|}$$

e $|\overline{OQ}|^2 = 1\alpha = \alpha$. Assim, $\overline{OQ}$ tem comprimento $\sqrt{\alpha}$. Portanto, raízes quadradas de números construtíveis são construtíveis. O Teorema 3.3 mostrou que as operações de corpo são possíveis por construção. $\square$

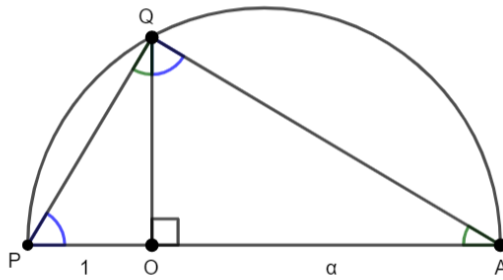


Figura 3.4: Construção de $\sqrt{\alpha}$.

O próximo resultado, embora seja um corolário do teorema, é o resultado primordial quando se refere a impossibilidade de construções com uso de régua e compasso.

Corolário 3.6. *Se γ é construtível e $\gamma \notin \mathbb{Q}$, então existe uma sequência finita de números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \gamma$ tal que $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ é uma extensão de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ de grau 2. Em particular, $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] = 2^r$ para algum número inteiro $r > 0$.*

Demonstração. A existência de α_i é dada através do Teorema 3.5. Então:

$$2^n = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}(\gamma)][\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}],$$

Do Teorema 3.3 completamos a prova. $\square$

Exemplo 3.7. Vamos considerar $\gamma = \sqrt{6}$, que não é racional, mas é construtível. Sabemos que $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, e ainda que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, com $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$. A extensão

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, que inclui $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, possui grau 2 sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, pois $\sqrt{3}$ não pode ser expresso como combinação algébrica de $\sqrt{2}$ com coeficiente racional. Ou seja,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$$

Deste modo, sabendo que a extensão de $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ sobre $\mathbb{Q}$, será disposta da seguinte forma:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \times [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 2^2$$

Portanto, $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}] = 2^2$, ou seja, o grau da extensão é uma potência de 2.

Desenvolvida toda a ideia de números construtíveis, este último corolário, nos garante a demonstração da impossibilidade da trissecção presente no próximo capítulo.

3.2 A impossibilidade de determinadas construções algébricas

Desde a Grécia Antiga, sábios se deparam com enigmas que buscam a resolução de problemas de construção geométrica através do uso exclusivo de dois instrumentos: a régua não marcada e o compasso. Foi no início do período helênico (séc. VI a.C. - séc. V a.C.) que se iniciou o estudo de três problemas geométricos que desafiam inúmeros matemáticos a mais de dois mil anos. Estes três problemas de construção são impossíveis de resolver utilizando os únicos instrumentos empregados por Euclides nos *Elementos*, a régua sem graduação e o compasso.

Os problemas que ficaram conhecidos como os *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*, são o cerne principal deste trabalho: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo. Estes *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega* têm encantado sucessivas gerações de matemáticos profissionais e amadores, além de ter sido primordial para o crescimento de pesquisas e especulações. Abaixo, será possível explorar a justificativa das impossibilidades dessas construções, por meio de demonstrações matemáticas algébricas, via Corolário 3.6 e nos capítulos seguintes, visualizar uma possibilidade de resolução do problema da trissecção do ângulo, com o uso de técnicas de dobras de origami.

Já era de conhecimento dos pitagóricos que dado um quadrado é possível construir, por régua e compasso, um novo quadrado com o dobro de sua área. Seria possível então, construir um cubo com o dobro do volume de um dado cubo, utilizando-se somente régua e compasso?

Teorema 3.8. *Duplicar o cubo é impossível, ou seja, dado um lado de um cubo, não é possível construir com régua e compasso o lado de um cubo que tenha o dobro do volume do cubo original.*

Demonstração. Considere o cubo dado ter um lado de comprimento 1, e portanto, um volume de 1. O cubo procurado teria que ter um volume de 2 e portanto um lado de comprimento $\sqrt[3]{2}$. Mas, $\sqrt[3]{2}$ é um zero de $x^3 - 2$ que é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, então:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$$

O Corolário 3.6 mostra que para duplicar este cubo de volume 1, precisaríamos ter $3 = 2^r$ para algum inteiro r , mas tal r não existe. Portanto, é impossível duplicar o volume de um cubo. $\square$

O problema de quadrar qualquer região poligonal está completamente resolvido nos Elementos de Euclides e, uma vez resolvida a quadratura de regiões poligonais, o próximo passo seria tentar “quadrar” regiões limitadas por linhas curvas, na qual o círculo passa a ser uma escolha óbvia. Entretanto, vejamos a seguir que esta construção com uso de régua não enumerada e compasso não é possível.

Teorema 3.9. *A quadratura do círculo é impossível, isto é, dado um círculo, não é possível construir com régua e compasso um quadrado com área igual à área do círculo dado.*

Demonstração. Considere o círculo dado ter um raio 1 e, portanto, uma área π . Precisariíamos construir um quadrado de lado $\sqrt{\pi}$. Mas π é transcendente sobre $\mathbb{Q}$, então $\sqrt{\pi}$ também é transcendente sobre $\mathbb{Q}$. Logo não é construtível e portanto, é impossível realizar a quadratura do círculo. $\square$

Nos Elementos, Euclides demonstra também como bissectar um ângulo somente com régua e compasso. Logo, uma vez que se sabe como bissectar um ângulo, é natural que se pergunte como dividir um ângulo em n partes, particularmente, em três partes (trisseccão do ângulo).

Teorema 3.10. *Trissectar o ângulo é impossível, ou seja, existe um ângulo que não pode ser trisseccionado com régua e compasso.*

Demonstração. A figura 3.5 indica que o ângulo θ pode ser construído se, e somente se, um segmento de comprimento $|\cos \theta|$ puder ser construído. Agora 60° é um ângulo construtível e mostraremos que não pode ser trissectado. Observe:

$$\begin{aligned}
 \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
 &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\
 &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta - (2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta \\
 &= (\cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta) \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta \\
 &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta + 2 \cos^3 \theta \\
 &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta
 \end{aligned}$$

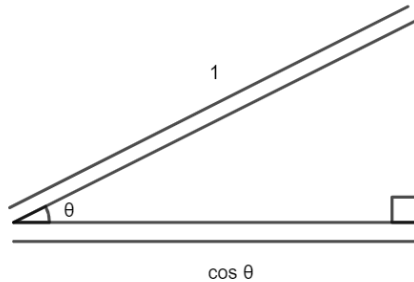


Figura 3.5: Impossibilidade de trisseccão do ângulo θ .

Seja $\theta = 20^\circ$, para que $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ e seja $\alpha = \cos 20^\circ$. Da identidade $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \cos 3\theta$. Vemos que:

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2}$$

Então α é um zero de $8x^3 - 6x - 1$. Este polinômio é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, pois não é possível fatorar este polinômio em dois outros de grau menor (para mais detalhes, vide Teorema 23.11, ref [6], pág. 215), basta mostrar que ele não fatora $\mathbb{Z}[x]$. Mas uma fatoração em $\mathbb{Z}[x]$ implicaria um fator linear da forma $(8x \pm 1)$, $(4x \pm 1)$, $(2x \pm 1)$ ou $(x \pm 1)$. Podemos verificar que nenhum dos números $\pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}$ e ± 1 é um zero de $8x^3 - 6x - 1$. Então

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$$

Então pelo Corolário 3.6, α não é construtível. Portanto, 60° não pode ser trissectado. $\square$

Observe que o n -gon regular é construtível para $n \geq 3$ se, e somente se, o ângulo $\frac{2\pi}{n}$ for construtível, o que é o caso se, e somente se, um segmento de reta de comprimento $\cos(\frac{2\pi}{n})$ for construtível.

A partir do próximo capítulo apresentaremos uma nova abordagem para explorar o tema dos últimos três teoremas aqui demonstrados, tendo como fio condutor as construções elementares de um Origami.

4 Geometria dos origamis

Como uma manifestação artística cultural, o origami apresenta um processo longo e complexo de estruturação de suas características e temáticas fundamentais. Houve um amplo processo de diálogo entre as mudanças históricas e seus paradigmas com as novas abordagens e preocupações relacionadas às técnicas de origami. Hoje, o origami se apresenta como um importante recurso para solucionar e repensar temas científicos, tecnológicos, médicos e de engenharia. Como demonstraremos baseados no artigo de Thomas Hull presente na *Encyclopaedia Of The History Of Science, Technology, And Medicine Non Western Cultures* [14], o origami é uma ferramenta fundamental para avaliarmos problemas e dilemas da ciência matemática.

O período ou o local exato onde a arte da dobradura de papel começou não é fácil de se determinar, mas muitos estudiosos acreditam que a invenção do papel na China por volta de 100 a.C. deve ter coincidido com as primeiras tentativas de dobradura de papel. Entretanto, mesmo tendo evidências de que a dobradura de papel se desenvolveu em todo o mundo à medida que a tecnologia de fabricação de papel se espalhava, foram os japoneses que adotaram essa arte como parte de sua cultura.

Origami é uma palavra japonesa composta por dois caracteres: oru, que significa “dobrar”, e kami, que significa “papel”. Definido tradicionalmente, em [15], como a antiga arte de dobrar papel que utiliza apenas dobras retas em uma folha plana e quadrada, onde rasgar, cortar ou colar não são permitidos em sua elaboração. Uma vez dobrado, o origami constitui uma superfície desenvolvível que pode ser desdobrada em um plano.

Registros da dobradura antiga japonesa são difíceis de encontrar. Durante o período Edo (1603–1867), é possível encontrar pinturas e xilogravuras que mostram mulheres da classe alta dobrando o tradicional tsuru. A maioria dos registros que os historiadores encontraram sobre origami antes do século XIX tem base religiosa e cultural, apesar de se encontrar alguns livros publicados sobre origami recreativo no Japão datados neste período. Já no século XVII, os origamis eram utilizados em cerimônias de casamento, e faixas de papel dobrado chamadas go-hei eram penduradas em templos xintoístas para representar os espíritos dos mortos. Por volta do século XIX, as pessoas no Japão já dobravam papel recreativamente, em vez de apenas em contextos cerimoniais e religiosos, indicando que o origami havia crescido e se tornado uma forma de arte por si só.

Os sangakus - placas de madeira com problemas matemáticos geométricos, que eram oferecidas em templos e santuários no Japão como oferendas religiosas durante o período Edo - possuem alguns modelos baseados em origami. Estes modelos tiveram seus princípios geométricos descobertos mais de cem anos depois por um professor japonês especializado em geometria origami, Kazuo Haga. Por meio dessas propriedades geométricas desenvolveu o Teorema de Haga, que será trabalhado mais a frente como Teorema 4.1. Mostrando assim, que antigos praticantes de origami exploravam o mesmo tipo de

geometria com dobraduras que estudiosos modernos só vieram a investigar recentemente.

O americano John Montroll, em 1979 publicou seu primeiro livro, que continha modelos de origami com um nível de complexidade nunca visto antes no mundo do origami. Utilizando técnicas que mesclam métodos de modelos japoneses clássicos com novas abordagens, pela primeira vez, começaram a perceber que era possível, dobrar um gafanhoto completo — com seis pernas, asas, abdômen, tórax, cabeça e duas antenas — a partir de um único quadrado de papel, sem nenhum corte, sendo aproveitadas por outros origamistas, iniciando os designs de origami em nível complexo. Entre os artistas que surgiram realizando análises de origami em nível complexo, está Robert Lang, que começou a estudar sistematicamente a matemática por trás desses designs complexos [14]. Alguns artistas de origami se queixam de que a atenção excessiva à complexidade está levando os dobradores a esquecerem a expressão artística mais sutil que o origami pode alcançar. Mas, de fato origamistas de hoje estão dobrando coisas que as pessoas de alguns anos atrás nunca teriam pensado ser possível.

Este novo patamar de complexidade oferece recursos fundamentais no desenvolvimento de novas tecnologias de engenharia, ferramentas médicas, estudos químicos, micro e nano estruturas, e soluções de biomecânica, como em [15]. Seguindo este mesmo sentido, Thomas Hull ([1]), na obra base deste trabalho, destaca a importância deste olhar inovador do origami para solucionar dilemas matemáticos e novos horizontes científicos.

Trataremos agora de ampliar o método de análise dos problemas clássicos da matemática grega por meio das construções da matemática origami. Iniciaremos com a apresentação das noções preliminares de origami, para que seja possível mostrar a possibilidade de construção da trisseção de um ângulo qualquer. Em seguida, definiremos as operações origami que são fundamentais para realizar a resolução de equações de segundo e terceiro grau via dobras, e assim, possibilitar a resolução da duplicação do cubo com origami. Por fim, explicaremos como a quadratura se desenvolve com as propriedades origami e desenvolveremos um exemplo das operações origami por meio das cônicas dobráveis.

Construções com régua e compasso são muito mais fáceis de analisar do que construções via origami. A principal razão para isso é porque podemos classificar todas as operações possíveis que podem ser realizadas com as ferramentas de construções com régua e compasso, com destaque nos seguintes:

1. Dados dois pontos, podemos usar a régua para desenhar uma reta conectando-os.
2. Dado um ponto p e um comprimento r , podemos usar o compasso para desenhar um círculo com raio r centrado no ponto p .
3. Podemos localizar os pontos de intersecção entre combinações de círculos e retas.

Conforme visto no capítulo anterior, com o uso dos números construtíveis, podemos construir segmentos com o comprimento de qualquer número racional $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $b \neq 0$, dado um segmento de reta de comprimento unitário. Assim como também podemos construir qualquer expressão envolvendo números racionais e a operação de extrair raízes quadradas. Como explorado na demonstração do Teorema 3.5, provar que esses são os únicos tipos de comprimentos que podem ser construídos via construções com régua e compasso, requer considerar cuidadosamente os tipos de equações que obtemos ao localizar os pontos de intersecção de dois círculos, um círculo e uma reta, ou duas retas, e então provar que o uso repetido de tais intersecções nos dá a menor extensão de corpos dos racionais que é fechada sob raízes quadradas.

Realizar tal análise em origami de vinco reto e dobra única é mais difícil porque as ferramentas que temos são mais flexíveis. Há muitas maneiras diferentes pelas quais podemos determinar um vinco ao dobrar uma folha quadrada de papel, especialmente se já houver vincos prévios feitos no papel.

Antes de tentar formular uma lista de operações básicas de origami, primeiro nos familiarizaremos com a variedade de dobraduras de papel por meio de alguns exemplos de construção, para depois empreender uma análise mais abstrata.

4.1 Noções introdutórias

Aqui abordaremos algumas noções clássicas envolvendo origami através de alguns desafios históricos, de acordo com Hull [1].

Desafio 1: Dado um papel quadrado, criar um quadrado com exatamente três quartos da área original utilizando apenas cinco dobras.

Esse problema foi publicado na *Mathematics Magazine* (Vol. 67, No. 2, 1994, p. 123) e propõe um desafio aparentemente simples, mas que exige um raciocínio geométrico preciso para ser solucionado em apenas cinco etapas.

Desafio 2: Outro desafio clássico em geometria origami consiste em dobrar um triângulo equilátero perfeito a partir de uma folha quadrada.

Ainda, como discutido por Hull, uma das abordagens consiste em construir um triângulo com ângulos internos de $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, respectivamente, cujas proporções entre os lados $\frac{1}{2}$, 1 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ podem ser usadas para obter o ângulo de 60° . Curiosamente, essa mesma proporção é útil para o desafio do quadrado com $\frac{3}{4}$ da área, já que a construção de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ também aparece nesse contexto.

De fato, conforme a Figura 4.1, podemos observar que é possível obter um triângulo equilátero dentro de uma folha quadrada de papel utilizando simetrias básicas da dobra. Supondo que o lado do quadrado tenha comprimento 1, então o segmento AB deve ter comprimento 1. Ao dobrar um dos vértices sobre o lado oposto, obtém-se um ponto P tal que os segmentos AP e PB terão o mesmo comprimento. Como BP é a reflexão do lado AP , temos que $AP = PB = AB = 1$. Isso leva à formação de um triângulo equilátero ABP , validando a construção dos ângulos desejados.

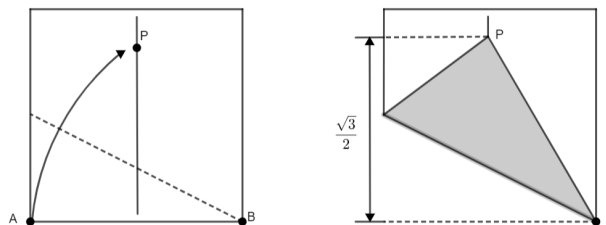


Figura 4.1: Construção do triângulo tipo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

Além disso, também é possível propor como variação deste problema, encontrar a dobra que gera o triângulo equilátero de maior área possível dentro do quadrado. A Figura 4.2 mostra o método padrão de fazer isso. Essa análise pode ser feita com cálculo

diferencial, mas encontrar uma sequência prática de dobras para realizá-la continua sendo um desafio geométrico interessante.

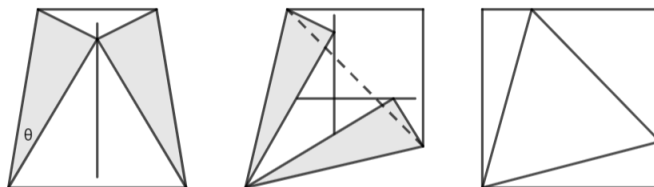


Figura 4.2: Construção de um triângulo equilátero máximo.

Podemos perceber que ambos métodos envolvem certas formas de dobragem de origami permitindo a construção de segmentos cujos comprimentos envolvem expressões com raízes quadradas, como $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. O que nos leva a questionar que tipo de operação de dobras podem gerar esses comprimentos tão específicos? Nos dois casos, esses resultados são obtidos a partir de dobras que posicionam um ponto sobre uma reta, exigindo simultaneamente que a dobra passe por outro ponto específico – como ocorre na Figura 4.1.

Outro problema que vem ganhando destaque por instigar os entusiastas da geometria origami é o problema de dividir o lado de um pedaço de papel em n partes iguais. Nos casos em que n é um número par, a resolução do problema tende a ser mais simples de resolver, pois dobrar comprimentos ao meio é uma tarefa que realizamos desde muito pequenos ao dividir folhas de papel em potências de 2. O desafio em questão fica para os casos em que n é ímpar.

Diversos modelos de origami iniciam o passo a passo solicitando que o executor primeiro divida o quadrado em três partes ou até mesmo em uma grade 5×5 , fazendo com que alguns origamistas recorram a métodos mais práticos para realizar a dobra de uma folha quadrada em três partes, como o que podemos observar na Figura 4.3. O método consiste em curvar o papel em formato de S e ir ajustando os vincos conforme a proporção do papel. O problema é que desta forma acabamos gerando dois vincos simultâneos, conhecido como dobra múltipla, o que viola a regra de executar apenas uma dobra por vez.

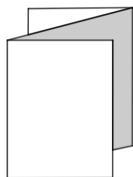


Figura 4.3: Dobrando terços com dobra múltipla.

Conhecido por Lang em [9] como o método de cruzamento de diagonais, a Figura 4.4 apresenta uma maneira matematicamente coerente de realizar, com uma dobra de cada

vez, a divisão de um quadrado em terços. Seguindo os passos abaixo, obtêm-se um terço da folha de papel:

1. Vinque a folha ao meio ($1/2$) e faça um vinco em uma das diagonais.
2. Faça um vinco que ligue o ponto médio da borda superior e o canto inferior direito.
3. Deixe este vinco intersectar a diagonal em P .
4. Faça um vinco em P perpendicular aos lados inferior e superior.
5. Então este último vinco será $1/3$ do lado direito.

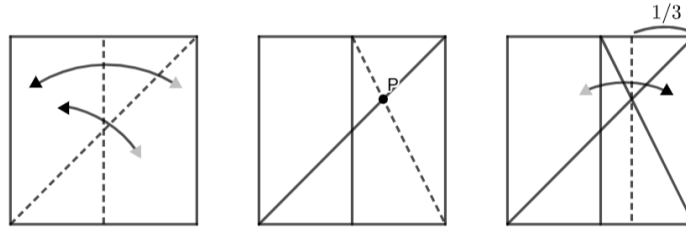


Figura 4.4: Dobrando terços.

Assumindo que o quadrado tem lado 1 e está posicionado com o vértice inferior esquerdo na origem, a interseção entre as retas $y = x$ e $y = -2x + 2$ fornece o ponto $P = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, que marca um dos terços do quadrado. Ainda, a validade da construção pode ser demonstrada por semelhança de triângulos.

O método de cruzamento de diagonais, discutido por Lang em [9], pode ser estendido para divisões ímpares do lado de um quadrado, onde $n = 2k + 1$. Em vez de usar um vinco na posição $x = \frac{1}{2}$, utiliza-se $x = \frac{(2k-1)}{(2k)}$, assumindo que a divisão anterior em $1/(2k)$ partes já foi construída. Isso permite localizar um ponto P na interseção entre as retas $y = x$ e $y = -2kx + 2k$ resultando em $P = \left(\frac{2k}{(2k+1)}, \frac{2k}{(2k+1)}\right)$. Esse ponto serve de referência para dividir o quadrado em $1/n$ -ésimo.

Apesar de sua precisão, esse método não é amplamente adotado por origamistas, pois exige múltiplas dobras preparatórias. Um método melhor a esse respeito é baseado no Teorema de Haga, abordado em [16].

Teorema 4.1. (*Teorema de Haga*) Num quadrado de papel, consideremos um ponto P qualquer da borda superior. Dobra-se o papel de forma que o vértice inferior direito do quadrado fique sobreposto ao ponto P . Os triângulos A , B e C são semelhantes.

Demonstração. Usando a nomenclatura da figura 4.6, temos que $\alpha_2 + 90^\circ + \beta_1 = 180^\circ$, pelo que $\alpha_2 + \beta_1 = 90^\circ$. Por outro lado, $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$, o que nos permite concluir que $\alpha_2 = \beta_2$. Analogamente, temos que $\alpha_1 = \beta_1$. Das duas igualdades anteriores, vem que os triângulos A e B são semelhantes. O mesmo raciocínio prova que os triângulos B e C são semelhantes. $\square$

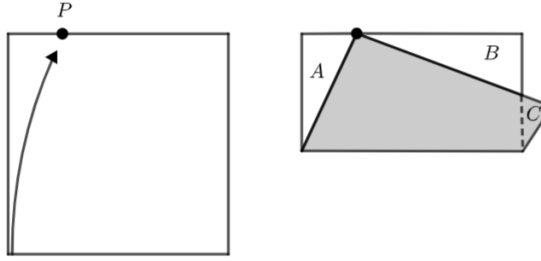


Figura 4.5: Teorema de Haga.

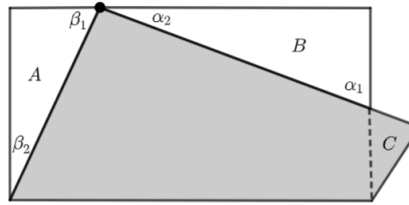


Figura 4.6: Demonstração do teorema de Haga.

Em específico, se marcarmos um ponto em $(1/(2k), 1)$ no quadrado e dobrarmos o canto inferior esquerdo (a origem) para este ponto, como visto na Figura 4.7, então os triângulos A e B são semelhantes. Além disso, o triângulo A é um triângulo retângulo e um cateto, x , e a hipotenusa compõem um lado do quadrado, então a hipotenusa é $1 - x$. Do Teorema de Pitágoras temos que:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = (1 - x)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4k^2} = x^2 - 2x + 1$$

$$2x = 1 - \frac{1}{4k^2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{8k^2}$$

$$x = \frac{4k^2 - 1}{8k^2} = \frac{(2k)^2 - 1^2}{8k^2} = \frac{(2k + 1)(2k - 1)}{8k^2}$$

portanto, temos $x = (2k + 1)(2k - 1)/(8k^2)$. Sendo y o menor cateto do triângulo B , a relação de semelhança nos dá

$$\frac{y}{1/(2k)} = \frac{1 - 1/(2k)}{(2k + 1)(2k - 1)/(8k^2)}$$

$$y = \frac{(2k - 1)/(2k)}{(2k + 1)(2k - 1)/(8k^2)} \cdot \frac{1}{2k}$$

$$y = \frac{(2k - 1)}{2k} \cdot \frac{8k^2}{(2k + 1)(2k - 1)2k} = \frac{2}{(2k + 1)}$$

ou seja, $y = 2/(2k + 1)$. Assim, se divisões de $1/n = 1/(2k + 1)$ são desejadas, construir $1/(2k)$ e a dobra única do Teorema de Haga irá resolver o problema.

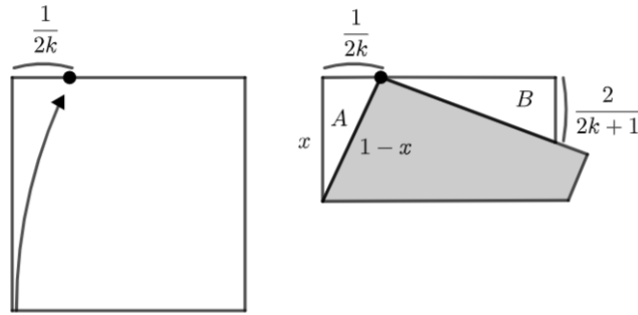


Figura 4.7: Teorema de Haga aplicado ao problema da divisão ímpar.

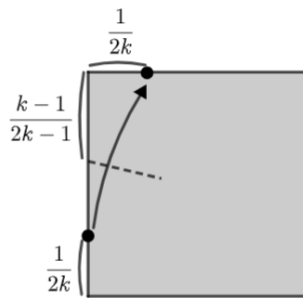


Figura 4.8: Método de Noma.

O Teorema de Haga contém muitas outras informações. No entanto, é possível fazer qualquer divisão $1/n$ ao longo do lado de um quadrado sem dobrar nenhum vinco por todo o papel. A ideia é executar dobras que exijam apenas marcas de pinça¹ no perímetro do papel. Isso seria útil para designers de origami, tornando possível criar qualquer marca a/b no perímetro sem estragar o interior do papel com vincos indesejados.

Masamichi Noma [17] desenvolveu este método, e ele é resumido na Figura 4.8. A ideia é, se divisões de $1/n = 1/(2k - 1)$ são o objetivo, fazer marcas de pinça no comprimento $1/(2k)$ no lado esquerdo da borda superior do quadrado e no lado inferior da borda esquerda. Isso nos dá dois pontos marcados no perímetro do papel. Se dobrarmos esses dois pontos juntos, podemos pinçar o papel apenas no lado esquerdo, para evitar fazer um vinco em todo o quadrado. Este vinco cruzará a borda esquerda $(k - 1)/(2k - 1)$ do canto superior.

¹Marca de pinça significa que realizamos um vinco apenas em um ponto da folha, sem estender a dobra até o fim da marcação.

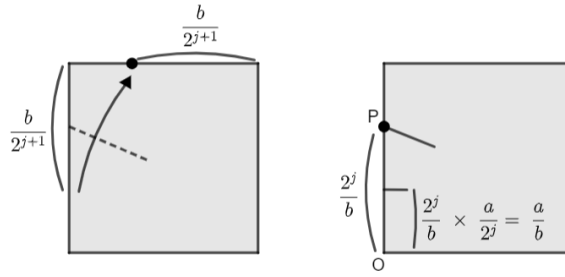


Figura 4.9: Método de Noma usado para construir $\frac{a}{b}$.

Observação 4.2. Provemos que o método de Noma funciona.

Robert J. Lang sintetizou o método de Noma, entre outros, gerando algoritmos para produzir sequências de dobraduras de pinça para criar quaisquer divisões de comprimento racional. Em [9], temos os seguintes passos para aplicar o método de Noma para criar um comprimento racional arbitrário $\frac{a}{b}$ para inteiros $a < b$:

1. Seja 2^j a maior potência de 2 menor que b .
2. Construa comprimentos $\frac{b}{2^{j+1}}$ nos lados superior e esquerdo do quadrado, como mostrado na Figura 4.9.
3. Junte esses dois pontos para fazer uma dobra de vinco ao longo do lado esquerdo no ponto P .
4. Então o comprimento OP (O sendo o canto inferior esquerdo) será $\frac{2^j}{b}$. (O mesmo processo necessário na Figura 4.8 mostra isso.)
5. Divida o segmento OP em $1/2^j$ -ésimos. Pegando a desse O dá um comprimento $(\frac{2^j}{b})(\frac{a}{2^j}) = \frac{a}{b}$.

Em todos esses três métodos de divisão, nenhuma das operações básicas de dobramento usadas é muito complexa. Cada caso envolveu apenas os “movimentos” de dobrar um vinco entre dois pontos existentes ou dobrar um ponto sobre outro ponto. Isso ocorre pois apenas comprimentos racionais estavam sendo construídos.

4.2 Trissecção de um ângulo via origami

A trissecção do ângulo surgiu como um desafio geométrico natural dentro do espírito racional e estético da matemática grega antiga. Este problema reflete a constante busca humana por explicar o mundo com precisão e beleza, e com o passar do tempo, acabou se transformando um símbolo dos problemas clássicos não resolvido com régua não graduada e compasso.

Algumas fontes como [18], afirmam que apesar de ser um problema clássico da geometria grega, foram os egípcios que deram início ao questionamento da trissecção de um ângulo, pois marcavam as horas à noite pelo surgimento de 12 asterismos (constelações),

cada um levando em média duas horas para nascer. Para obter intervalos mais convenientes, os egípcios subdividiam cada um de seus asterismos em três partes, gerando o problema da trissecção. Não se sabe com clareza se este problema de trissecção de um ângulo dado, surgiu realmente desta dificuldade, mas é provável que tenha surgido de algum problema de medida angular.

Como vimos no Teorema 3.10 do capítulo anterior, essa construção não é possível de solucionar por meio de instrumentos da geometria clássica. Entretanto, com a nova percepção da geometria via origami, podemos encontrar uma amostra válida da solução deste problema, que por séculos, foi motivo de indagação de muitos matemáticos.

A marca registrada das construções geométricas de origami tem sido o fato de que a dobradura de papel pode, com bastante facilidade, trissecar ângulos. O primeiro método conhecido para fazer isso foi criado por Hisashi Abe [19] em algum momento no final dos anos 1970. Seu método para trissecar um ângulo agudo² arbitrário θ é mostrado na Figura 4.10 e procede da seguinte forma:

1. Posicione seu ângulo θ no canto inferior esquerdo do quadrado, conforme mostrado.
2. Faça um vinco horizontal, rotulado como 1 na figura 4.10, paralelo à borda inferior, e então dobre e desdobre a borda inferior até esta linha de vinco (rotulada como 2). A linha 1 pode ser feita em qualquer altura, embora se θ for menor que 45° , o vinco 1 pode precisar estar mais próximo da borda inferior para que o próximo passo seja possível.
3. Então, usando a marcação na figura, dobre o canto P_1 em L_1 enquanto ao mesmo tempo faz o ponto P_2 pousar na reta L_2 . Isso exigirá deslizar o papel, alinhando esses dois pontos em suas retas e, em seguida, pressionando-o para criar o vinco.
4. Deixando este último vinco dobrado, você verá parte de L_1 refletida nesta aba de papel. Dobre novamente este vinco, estendendo-o pelo resto do papel até a linha de vinco L_3 .
5. Desdobre o passo (3) e estenda o lado esquerdo de L_3 – ele atingirá o canto P_1 . Então dobre a parte de baixo do quadrado para L_3 para bissectar o ângulo que L_3 faz com a base.
6. O ângulo θ foi trisseccionado.

²Embora o método de Abe, conforme mostrado na Figura 4.10, funcione apenas para θ agudo, podemos analisar como ele pode ser estendido para ângulos obtusos em [20].

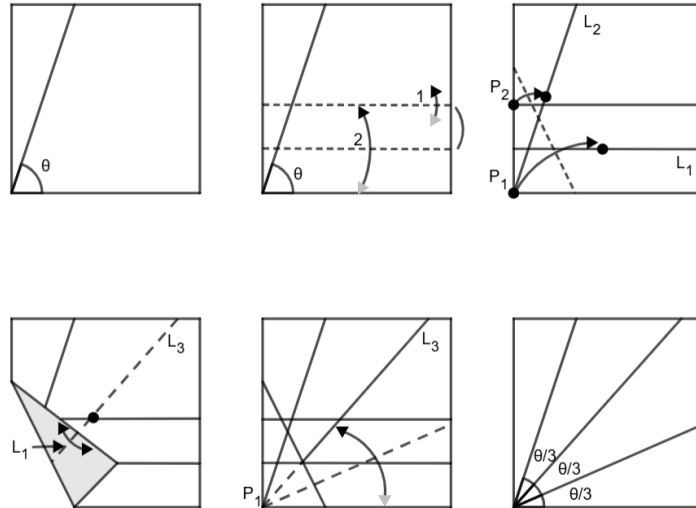


Figura 4.10: Método de trissecção angular de Abe.

Uma maneira de provar que o método de Abe funciona é mostrada na Figura 4.11. Primeiro, precisamos estabelecer que quando o vinco L_3 é estendido na etapa (5) da Figura 4.10, ele interceptará o ponto P_1 . Se deixarmos F ser o ponto onde L_3 intercepta a linha do vinco da etapa (3), e desenharmos o segmento P_1F no papel desdobrado, então os ângulos agudos entre (o não estendido) L_3 e L_1 e entre P_1F e L_1 são iguais, já que a dobra na etapa (3) os sobrepõe. (Este é o ângulo α na Figura 4.11 (a).) Assim, este ângulo atua como um ângulo vertical, e P_1F e L_3 devem formar uma linha reta.

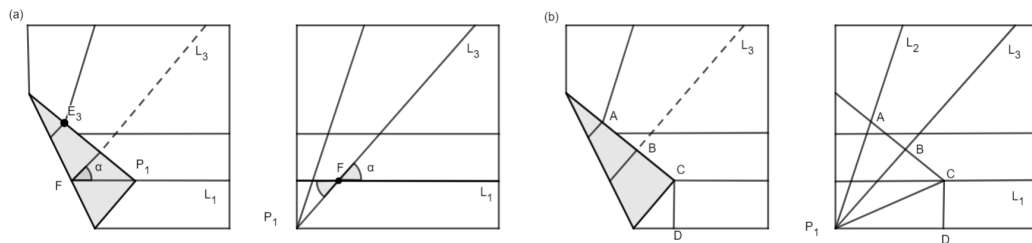


Figura 4.11: Prova da trissecção de Abe.

Então podemos rotular os pontos A, B, C e D como na Figura 4.11 (b), onde C, A e B são as imagens de P_1, P_2 e o ponto entre eles, respectivamente, sob a dobra de trissecção do passo (3). (Para D , inserimos uma perpendicular à parte inferior do quadrado.) Isso nos dá que os comprimentos AB, BC e CD são todos congruentes e, portanto, $\triangle ABP_1$, $\triangle BCP_1$, e $\triangle CDP_1$ são triângulos retângulos congruentes, dando-nos a trissecção.

Observe o passo de dobra incomum neste método que parece nos dar a trissecção, ou seja, o passo (3) na Figura 4.10. Neste passo, temos P_1 sendo dobrado em uma reta, o que por si só é semelhante ao que tivemos que fazer ao construir triângulos equiláteros na Seção 4.1. Mas um ponto indo para uma reta não é suficiente para determinar exclusivamente um vinco, e para o passo (3) escolhemos definir onde P_1 irá em L_1 , exigindo também que P_2 dobre na reta L_2 . Esta operação de origami de “dois pontos dobrando em duas retas” é um movimento raramente visto em instruções de origami, mas acaba sendo a chave

que dá à dobradura de papel mais força do que as construções com régua e compasso. Na verdade, qualquer construção de origami de vinco reto e dobra única que vá além do intervalo construível de construções com régua e compasso exigirá um movimento como este.

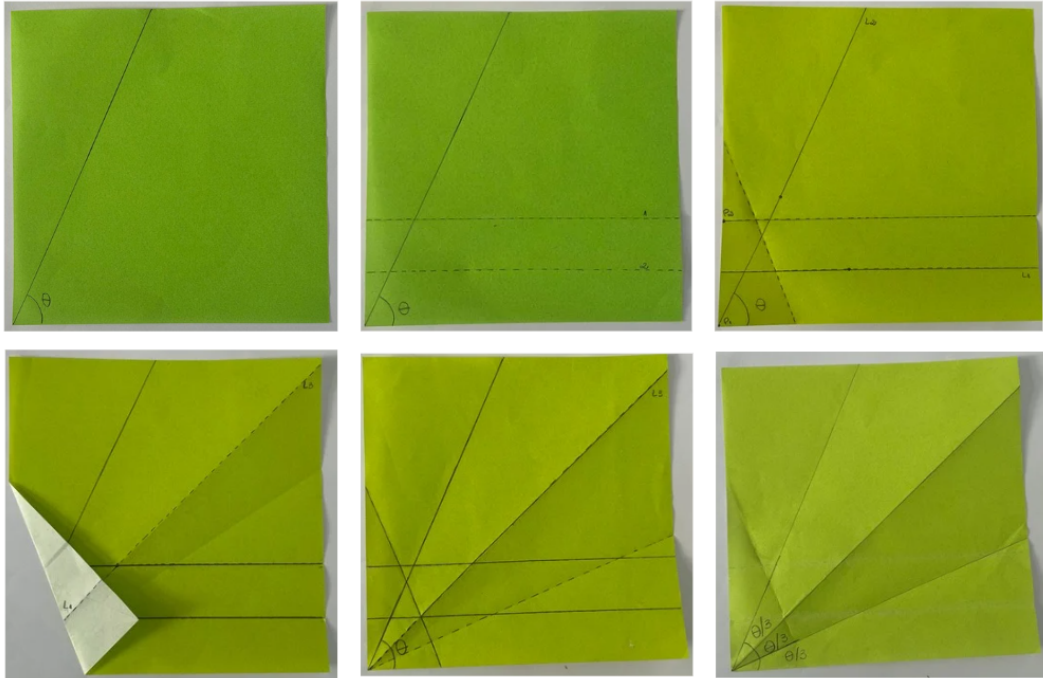


Figura 4.12: Trisseccção realizada pela autora.

Há muita matemática interessante a ser explorada neste movimento de origami de “dois pontos para duas retas”. Perguntas a serem ponderadas podem incluir: Dados quaisquer dois pontos e duas retas, esta operação pode sempre ser realizada? Ela sempre resulta em um vinco único? Que tipos de números (comprimentos de segmento) ela está construindo para nós? Perguntas como essas serão abordadas no capítulo a seguir.

4.3 Operações básicas da geometria origami

Agora que vimos vários exemplos de construções de origami, estamos em uma melhor posição para considerar a classificação das operações básicas de origami. Isso acaba sendo mais difícil do que se poderia esperar.

Como visto no início deste capítulo, podemos classificar quais operações são possíveis sob construções com régua e compasso porque sabemos exatamente o que nossas ferramentas podem fazer. Os exemplos que vimos mostram que o origami admite muitos tipos diferentes de operações. Ao tentar listá-las, não fica claro se encontramos todas as operações possíveis ou se uma é um caso especial de outra. Na década de 1980, Huzita e Scimemi [21] desenvolveram a seguinte lista de operações para origami:

O1: Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar uma linha de vinco conectando-os.

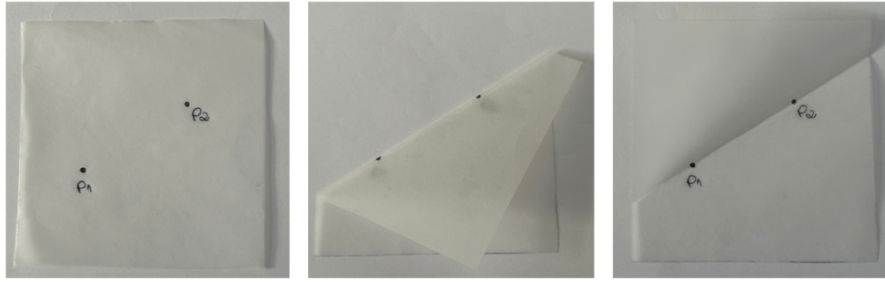


Figura 4.13: **O1** realizada pela autora.

O2: Dadas duas retas, podemos localizar seu ponto de intersecção, se existir.

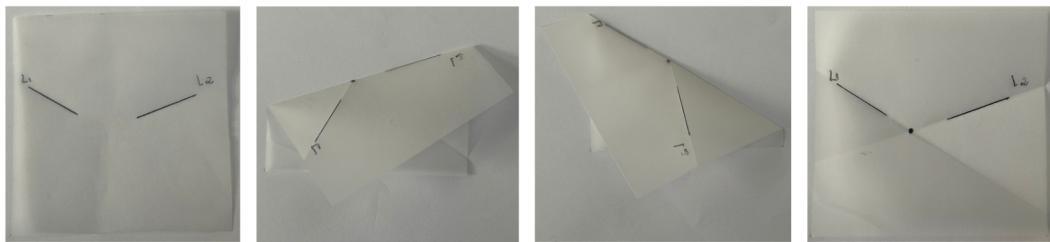


Figura 4.14: **O2** realizada pela autora.

O3: Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar o ponto P_1 em P_2 (bissetriz perpendicular).

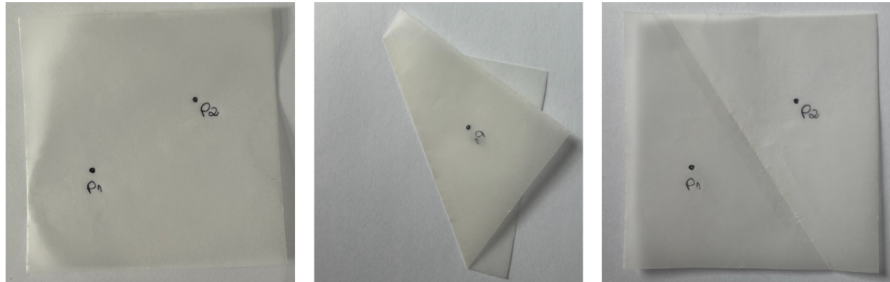
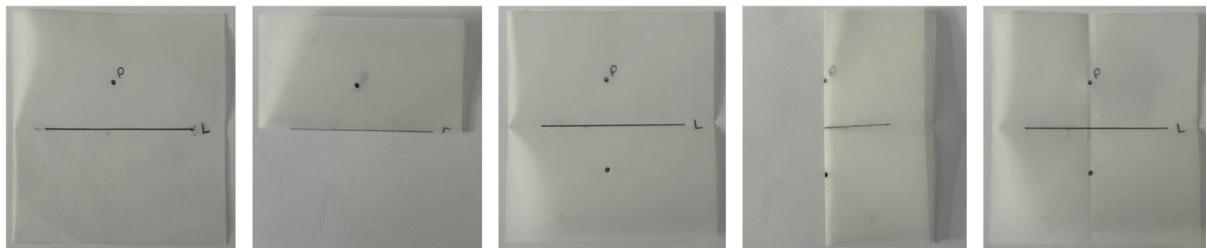


Figura 4.15: **O3** realizada pela autora.

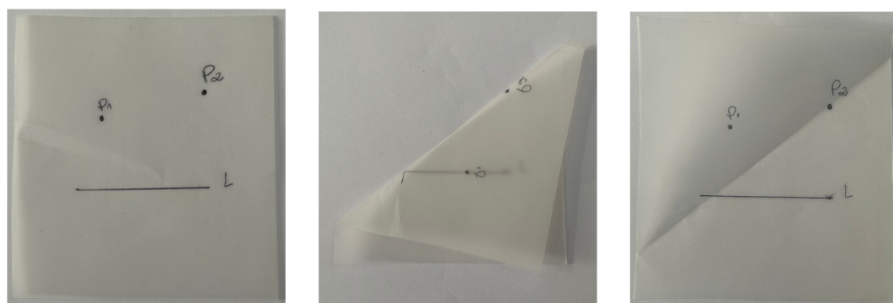
O4: Dadas duas retas L_1 e L_2 , podemos dobrar a reta L_1 na reta L_2 (bissetriz de ângulo).

Figura 4.16: **O4** realizada pela autora.

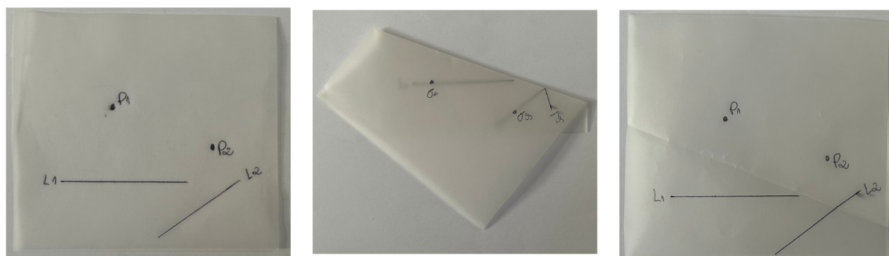
O5: Dado um ponto P e uma reta L , podemos fazer uma linha de dobra perpendicular a L passando pelo ponto P (perpendicular através de um ponto).

Figura 4.17: **O5** realizada pela autora.

O6: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta L , podemos, sempre que possível, fazer uma dobra que coloca P_1 na reta L e passa pelo ponto P_2 .

Figura 4.18: **O6** realizada pela autora.

O7: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas L_1 e L_2 , podemos, sempre que possível, fazer uma dobra que coloca P_1 em L_1 e também coloca P_2 em L_2 .

Figura 4.19: **O7** realizada pela autora.

Podemos então refletir: será que há alguma operação básica de origami faltando? Será possível uma das operações **O1-O7** ser executada por meio de uma combinação das outras operações básicas de origami?

Abordaremos a última questão mais tarde. Para a primeira, podemos tentar distinguir operações de origami por qual combinação de pontos e retas elas usam. Por exemplo, o seguinte deve ser considerado uma operação básica de origami adicional?

O8: Dado um ponto P e duas retas não paralelas L_1 e L_2 , podemos fazer uma dobra perpendicular a L_2 que coloca P em L_1 .

Figura 4.20: **O8** realizada pela autora.

Jacques Justin [20] incluiu esta operação em sua lista de operação básica de origami, que pode ser anterior à lista Huzita-Scimemi. Além disso, Hatori [5] propôs independentemente esta operação básica de origami como uma adição muito mais tarde.

Como a operação **O8** recebe duas retas e um ponto como entrada, e nenhuma das operações básicas de origami Huzita-Scimemi faz isso, poderíamos considerar isso uma operação separada.

Entretanto, com a adição da operação básica de origami **O8**, podemos provar que nenhuma outra operação básica é possível.

Teorema 4.3. *Se permitirmos apenas uma dobra por vez, e assumindo que todos os nossos vincos são linhas retas, então as únicas operações de dobra possíveis são **O1-O8**.*

Demonstração. Quando fazemos origami, temos apenas dois tipos de objetos para dobrar uma na outra: pontos e retas. Às vezes, quando dobramos uma dessas coisas na outra, ela determina exclusivamente a dobra, como ao dobrar um ponto em outro ponto. Mas outras vezes, como ao dobrar um ponto em uma reta, ainda há um grau de liberdade restante que deve ser removido antes que uma dobra específica seja determinada. As combinações possíveis de pontos e retas que podem ser dobradas uma na outra são as seguintes:

Caso 1: Dobre um ponto até outro ponto - nenhum grau de liberdade.

Caso 2: Dobre um ponto sobre ele mesmo - algum grau de liberdade (o ângulo do vinco passando pelo ponto).

Caso 3: Dobre o ponto até a reta - algum grau de liberdade (o ponto pode estar em qualquer lugar da reta).

Caso 4: Dobre uma reta até outra reta - nenhum grau de liberdade.

Caso 5: Dobre uma reta em si mesma - algum grau de liberdade (veja Figura 4.21).

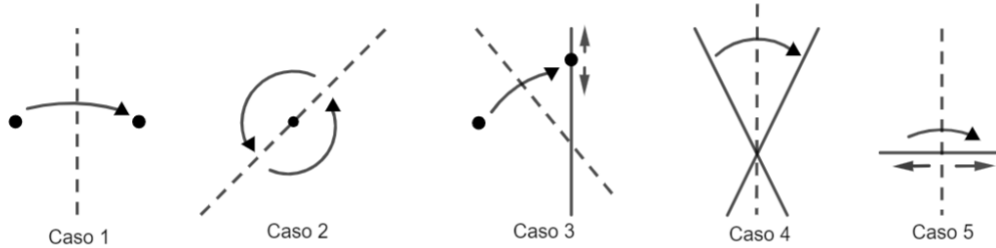


Figura 4.21: Os cinco casos de pontos/retas sendo dobrados uns aos outros.

Os casos 1 e 4 são operações **O3** e **O4**, respectivamente. Os outros casos têm um grau de liberdade que precisa ser removido para determinar quais dobras eles podem se tornar.

Caso 2: Dobre um ponto P_1 sobre si mesmo.

Os únicos vincos que podem dobrar um ponto P_1 sobre si mesmo são vincos que passam pelo ponto P_1 , e há um número infinito que faz isso. Para especificar um vinco único, precisamos combinar isso com outra operação que também possui um grau de liberdade. Isso nos dá três subcasos, conforme ilustrado na Figura 4.22:

Caso 2a: Também dobre outro ponto P_2 sobre si mesmo. Esta é a operação **O1**.

Caso 2b: Também dobre uma reta L sobre si mesma. Esta é a operação de reta perpendicular **O5**.

Caso 2c: Também dobre outro ponto P_2 sobre uma reta L . Esta é a operação **O6**.

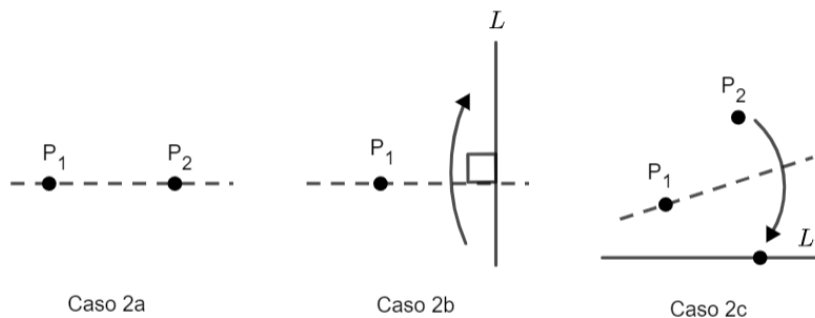


Figura 4.22: Os subcasos de dobrar um ponto P_1 sobre si mesmo.

Caso 3: Dobre um ponto P_1 sobre uma reta L_1 . Novamente, temos um grau de liberdade porque o ponto pode ser dobrado em qualquer lugar da reta. Portanto, precisamos combinar isso com outro grau de liberdade (veja a Figura 4.23):

Caso 3a: Também dobre outro ponto P_2 sobre si mesmo. Isso novamente nos dá a operação **O6**.

Caso 3b: Também dobre outra reta L_2 em si mesma. Isso nos dá a operação **O8**.

Caso 3c: Também dobre outro ponto P_2 para outra reta L_2 . Esta é a operação **O7**. Agora podemos ver que cobrimos todos as sete das nossas operação básica de origami. Para garantir que não haja mais, no entanto, precisamos olhar para o último caso.

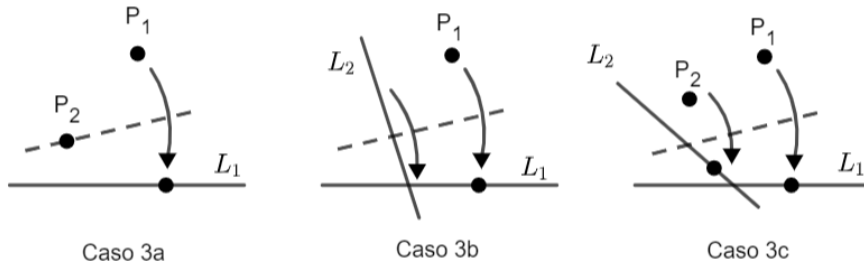


Figura 4.23: Os subcasos de dobrar um ponto P_1 em uma reta L_1 .

Caso 5: Dobre uma reta L_1 em si mesma. Dobrar uma reta L_1 nela mesma é realmente apenas dobrar um vinco perpendicular a L_1 . Mas como este vinco pode interceptar L_1 em qualquer ponto, isso nos dá um grau de liberdade. Combinar com outras operações dá o seguinte (como mostrado na Figura 4.24):

Caso 5a: Também dobre um ponto P em si mesmo. Isso nos dá a operação **O5** novamente.

Caso 5b: Também dobre um ponto P em outra reta L_2 . Isso nos dá **O8** novamente.

Caso 5c: Também dobre outra reta L_2 em si mesma. Se essas duas retas se interceptam, então isso é impossível, pois o vinco resultante teria que ser perpendicular a ambas. Assim, as duas retas teriam que ser paralelas, mas isso ainda resulta em um grau de liberdade. Assim, essa combinação é redundante - ainda precisaríamos de outra operação para especificar um vinco único, nos trazendo de volta ao Caso 5a ou 5b.

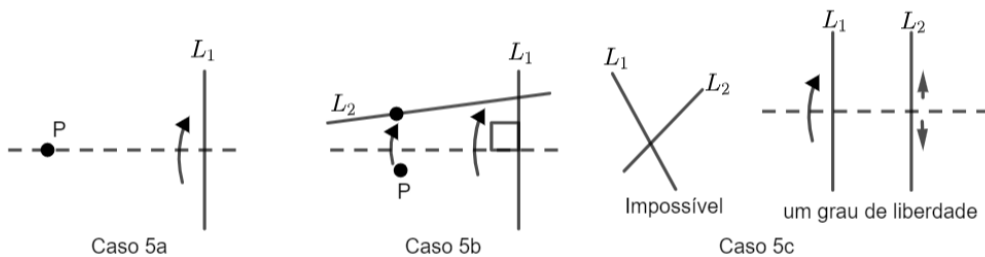


Figura 4.24: Os subcasos de dobrar uma reta L_1 sobre ela mesma.

Isso esgota todas as possibilidades de dobrar pontos e retas em pontos e retas, completando a prova. $\square$

Estudiosos da comunidade de origami estavam muito preocupados com a questão de se mais operações existiam, por meio do qual a prova de Lang do Teorema 4.3 é vista como um avanço.

As operações **O1–O8** abrangem tudo o que o origami de vinco reto e dobra única pode fazer. No entanto, esta lista contém redundâncias, e para eliminá-las precisamos ser mais específicos sobre o que nos é dado no início de nossas construções.

Muitos escritores usam a palavra “axioma” para se referir a dobras permitidas. Mas como **O6** e **O7** nem sempre são possíveis, “operações” parece um termo mais apropriado.

Certamente os pontos dados com os quais começamos e as operações **O1–O8** garantem que cada linha de vinco que é construída terá um ponto construído em algum lugar, assim como cada ponto terá uma reta construída passando por ele. Esta observação levou autores, como Hatori [5] a provar que tudo o que realmente precisamos para caracterizar construções de origami são as operações **O2** e **O7**.

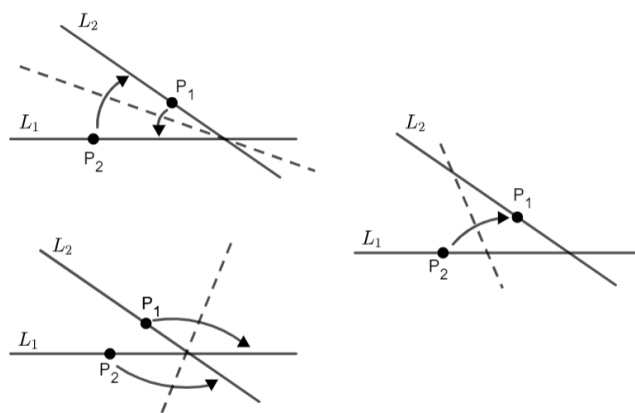


Figura 4.25: Gerando **O3** e **O4** a partir de **O7**.

Teorema 4.4. *Supondo que nos sejam dados pelo menos dois pontos construídos contidos em retas construídas não paralelas (que podem ser idênticas), então qualquer construção de origami de vinco reto de dobra única deste conjunto inicial pode ser completamente descrita por combinações de operações **O2** e **O7**.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.3, sabemos que as operações **O1–O8** são tudo o que precisamos considerar. Obviamente precisamos manter **O2**, mas os outros podem ser mostrados como casos especiais de **O7** onde ou temos $L_1 = L_2$ ou alguns dos pontos P_1 , P_2 estão nas retas L_1 , L_2 . Isso precisa ser feito com cuidado.

Para as operações **O3** e **O4**, considere que P_1 está em L_2 e P_2 estar em L_1 . (Sabemos que todas as retas construídas contêm pontos construídos e vice-versa, então podemos assumir isso a partir das premissas de **O3** e **O4**.) Então haverá no máximo três maneiras em que P_1 e P_2 podem ser dobrados em L_1 e L_2 , respectivamente, como mostrado na Figura 4.25. Os dois primeiros casos equivalerão a dobrar L_1 em L_2 , ou bisetar um dos ângulos feitos em sua intersecção, produzindo **O4**. (Se L_1 e L_2 forem paralelos, então haverá apenas uma maneira de fazer isso.) O outro caso dobra P_1 em P_2 , dando nos **O3**.

Em **O6**, nos são dados os pontos P_1 , P_2 e a reta L_1 . Seja L_2 qualquer reta que passe por P_2 . Então enquanto **O6** for possível, podemos fazer **O7** dobrar P_2 sobre si mesmo na reta L_2 e dobrar P_1 sobre L_1 .

Para **O1** e **O5**, sejam L_1 e L_2 retas contendo P_1 e P_2 , respectivamente. Então, assumindo que L_1 e L_2 não são paralelas, há no máximo três dobras diferentes que poderíamos fazer que deixariam P_1 em L_1 e P_2 em L_2 : (a) fazendo o vinco passar por P_1 e P_2 , (b) fazendo o vinco passar por P_1 e ser perpendicular a L_2 , e (c) fazendo o vinco por P_2 e perpendicular a L_1 . Embora alguns deles possam ser idênticos, o caso (a) é a operação **O1**. Os casos (b) e (c) nos dariam **O5**. Se L_1 e L_2 acontecerem de ser paralelos, então P_1 e P_2 não poderiam ter sido os dois pontos originais na construção, então existem outros pontos e retas que podemos usar para construir uma reta diferente através de um de P_1 ou P_2 .

Para **O8**, podemos pegar um ponto arbitrário P_2 em L_2 e usar **O7** para dobrar P_1 em L_1 enquanto dobramos P_2 para um lugar (provavelmente) diferente em L_2 para garantir que a linha de vinco será perpendicular a L_2 . Isso cobre todas as operações **O1–O8**. $\square$

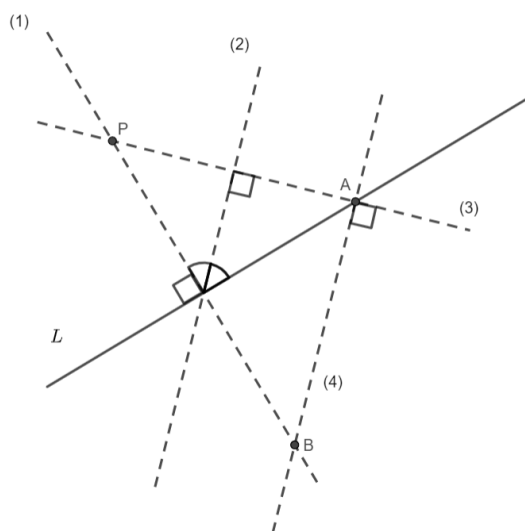


Figura 4.26: Construindo a reflexão de P sobre L .

Observação 4.5. Uma preocupação comum em relação à lista de operações básicas de origami **O1–O8** é se desdobramos ou não o papel após cada operação. Geometricamente, tudo o que nos importa é que cada operação básica de origami crie uma nova reta no plano e que a intersecção de retas crie novos pontos. Dessa visão, parece que toda vez que realizamos uma operação básica de origami, desdobramos o papel imediatamente para considerar a nova reta formada no papel (plano).

No entanto, na prática, os origamistas frequentemente deixam o papel dobrado para executar uma operação usando as camadas dobradas de papel como guia. Parece concebível que aplicações repetidas de uma operação básica de origami, especialmente **O7**, em um pedaço de papel sem desdobrar podem levar a uma construção que não poderia ser alcançada executando uma operação básica de origami de cada vez, desdobrando após cada um.

Mas esse não é o caso. As posições de quaisquer pontos ou retas que são movidos no processo de dobrar o papel com uma operação básica de origami podem ser reconstruídos se imediatamente desdobrarmos o papel. (E, portanto, não há necessidade de manter o papel dobrado.) Para provar isso, suponha que L seja uma linha de vinco construída

por alguma operação básica de origami. Tudo o que precisamos fazer é mostrar que para qualquer ponto P ou outra linha, podemos construir as reflexões de P sobre L .

Um método para construir a reflexão de P sobre L é mostrado na Figura 4.26. Primeiro use **O5** para vincar uma linha (1) perpendicular a L passando por P . Então use **O4** para dobrar esta linha de vinco em L , bisetando o ângulo entre eles para fazer o vinco (2). Então use **O5** novamente com P e o vinco (2), rotulando A como o ponto onde este vinco (3) intercepta L . Finalmente, execute **O5** novamente com a linha de vinco (3) e o ponto A para fazer o vinco (4). Onde este vinco intercepta a linha de vinco (1), chamado B na Figura 4.26, é a reflexão de P sobre L .

Construir a reflexão de uma reta L' sobre L pode ser feito de forma similar. Tudo o que precisamos é de um ou dois pontos construídos em L' ; refletindo estes sobre L , podemos então criar a reflexão de L' usando **O1**.

Isso, é claro, usa a convenção de que podemos pensar em nossa folha de papel como sendo tão grande quanto desejamos e que as linhas de limite do papel são apenas linhas construídas como qualquer outra. Em qualquer caso, concluímos que, embora na prática seja frequentemente muito mais eficiente deixar o papel dobrado após realizar uma operação de origami, podemos manter nossa lista de operações simplesmente para **O1–O8** (ou **O2** e **O7**, se quisermos ser realmente eficientes) desdobrando o papel após cada etapa sem perder nenhum poder de construção de origami.

Em certo sentido, não importa qual dos movimentos **O1–O8** escolhemos para uma lista oficial de operações básicas de origami. Por meio da trissecção de um ângulo, podemos analisar um exemplo muito claro de como a **O7** é o marco que separa as construções via origami das construções com régua e compasso.

Como já visto, a trissecção é impossível de ser resolvida por meio de régua e compasso. No entanto, na Seção 4.2, podemos analisar, no passo a passo da construção da figura 4.10 (que gera a trissecção do ângulo θ), apesar de parecer uma construção intuitiva, são necessárias as operações de origami para que seja possível a execução dos passos listados. No passo 3, podemos perceber o uso da operação **O7**, levando dois pontos à duas retas simultaneamente, sendo a operação de origami que torna possível a realização da trissecção via origami.

Ainda, para finalizar a construção, no passo 4 podemos observar uma adaptação da operação **O1**, na qual podemos dobrar uma linha de vinco conectando dois pontos e no passo 5 podemos notar o uso da operação **O4**, na qual podemos dobrar uma reta em outra reta, gerando a bissetriz do ângulo, finalizando dessa forma a trissecção com o uso das operações de origami.

4.4 Aplicação interessante de origami nas cônicas

Utilizar origami para resolver equações, é o conceito mais poderoso para desenvolver procedimentos de dobra para uma dada construção. O fato de que origami pode resolver equações cúbicas, tornando-o mais utilizado do que a régua e o compasso, foi descoberto pela primeira vez pela matemática italiana Margherita Beloch na década de 1930 [4]. Neste capítulo, exploraremos a infinidade de maneiras pelas quais a resolução de equações, e que tipo, pode ser feita por vinco reto, dobra simples origami.

Começamos analisando a operação básica de origami **O6**:

O6: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta L , podemos, sempre que possível, fazer uma dobra que coloca P_1 na reta L e passa pelo ponto P_2 .

Há uma atividade muito fácil e agradável que demonstra exatamente o que essa operação de dobrar faz. Na verdade, essa atividade tem sido usada como um exercício de sala de aula para aulas de geometria, álgebra e até mesmo cálculo por mais de um século.

A atividade é ilustrada na Figura 4.27. Pegue um pedaço de papel e marque um ponto P_1 em algum lugar abaixo do centro do papel. Seja L o lado inferior do papel. Então execute a operação **O6** repetidamente, dobrando P_1 em muitos lugares diferentes em L . (Você pode pensar nisso como escolher P_2 para estar em vários pontos nos lados esquerdo e direito do papel.) Isso criará inúmeras linhas de vinco no papel e, se forem feitas o suficiente delas, elas começarão a delinear a forma de uma parábola.

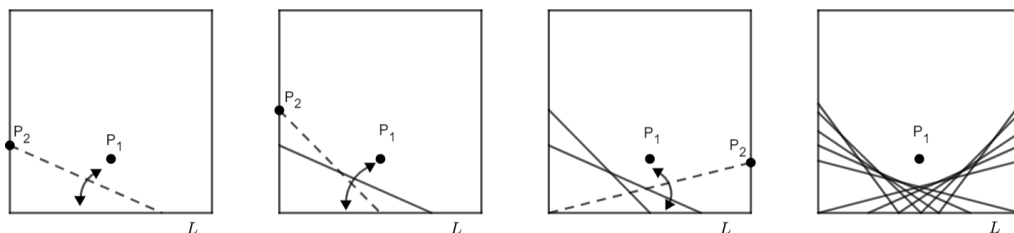


Figura 4.27: Atividade explorando a operação **O6**.

Para ser mais preciso, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.6. *Ao dobrar um ponto P sobre uma reta L , a linha de vinco feita será tangente à parábola com foco P e diretriz L .*

Demonstração. Seja P' o ponto em L para o qual P é dobrado e chame a linha de vinco de C . Seja X o ponto em C para que $\overline{XP'} \perp L$. Como o ato de dobrar reflete um lado do papel através de C , e $X \in C$, temos que $\overline{XP}$ reflete em $\overline{XP'}$ quando a dobra é feita. Assim, $|XP| = |XP'|$, o que significa que X é um ponto na parábola com foco P e diretriz L .

Agora seja Q outro ponto em C , $Q \neq X$. Pelo mesmo argumento do parágrafo anterior, já que $Q \in C$ e P reflete para P' sob a dobra, temos $|QP| = |QP'|$. Já que Q não é X , $\overline{QP'}$ não é perpendicular a L . Assim, $|QP|$ não pode ser igual à distância perpendicular de Q a L . Isso prova que X é o único ponto em C que também está na parábola com foco P e diretriz L e, portanto, C é tangente a esta parábola. $\square$

O Teorema 4.6 também pode ser provado calculando a equação da curva gerada ao dobrar repetidamente um ponto em uma linha. Seja $P = (0, 1)$ e L a linha $y = -1$ no plano real. Suponha que dobremos P no ponto $P = (t, -1)$ em L . Temos que nossa linha de vinco terá inclinação $t/2$ e passará pelo ponto $(t/2, 0)$. Assim, nossa equação de linha de vinco é

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}. \quad (4.1)$$

Esta é uma família parametrizada de retas, e queremos encontrar o envelope desta família (uma curva que é tangente a todos os membros da família). Definindo $F(x, y, t) = y - tx/2 + t^2/4$, o envelope é dado por simultaneamente resolver

$$F(x, y, t) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t) = 0.$$

Assim, temos $(\partial/\partial t)F(x, y, t) = x/2 - t/2 = 0$, ou $x = t$. Substituindo isso na equação da linha, obtemos $y = x^2/2 - x^2/4$, ou $y = x^2/4$, uma parábola.

Vendo que a operação **O6** gera tangentes a uma parábola, naturalmente nos questionamos se outras tangentes de seção cônica podem ser dobradas. A resposta é sim, mas antes de descrever como, daremos uma motivação informal.

Pode-se obter uma parábola de uma elipse da seguinte maneira: Lembre-se de que uma elipse é o conjunto de todos os pontos P tais que a soma das distâncias entre P e dois focos fixos é igual a uma constante chamada eixo maior da elipse. Fixe um foco da elipse, bem como o ponto de vértice mais próximo desse foco e deixe o outro foco deslizar para o infinito. O resultado será uma parábola. Este processo é equivalente a alterar o ângulo em que um plano intercepta um cone para ir de uma interseção elíptica para uma parabólica.

Agora considere uma elipse com focos F_1 e F_2 determinados pela distância constante (eixo maior) r . Desenhe um círculo C com centro F_2 e raio r . Este círculo tem algumas propriedades úteis, descritas no teorema a seguir.

Teorema 4.7. *Usando a elipse e o círculo descritos anteriormente, seja P um ponto na elipse e Q o ponto onde o raio estendido F_2P encontra o círculo C . Então:*

- (i) *a menor distância entre P e um ponto no círculo C é dada pelo segmento PQ , e*
- (ii) *a linha tangente à elipse em P reflete F_1 no ponto Q .*

Demonstração. Para (i), suponha que um ponto diferente $Q' \neq Q$ em C tenha um comprimento PQ' menor que o de PQ . Então teríamos $|F_2P| + |PQ'| < r = |F_2Q|$, o que viola a desigualdade triangular.

Para (ii), observe que, como $|F_2Q| = |F_2P| + |F_1P| = r$, temos $|F_1P| = |PQ|$. Além disso, uma propriedade das tangentes a uma elipse é que elas formam ângulos iguais com as linhas do ponto de tangência aos dois focos. Na notação da Figura 4.28, isso significa que $\angle F_1PT_1 = \angle F_2PT_2$. Mas $\angle F_2PT_2$ e $\angle T_1PQ$ são ângulos verticais e, portanto, são iguais. Portanto, $\angle F_1PT_1 = \angle T_1PQ$, o que significa que a tangente em P bissecta $\angle F_1PQ$. Isso combinado com $|F_1P| = |PQ|$ resolve (ii).

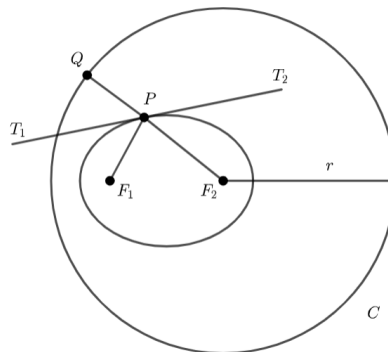


Figura 4.28: Uma elipse e seu círculo dobrável.

□

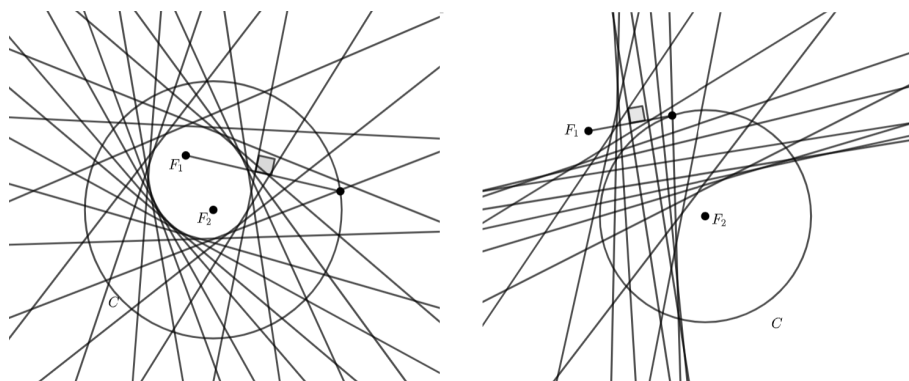


Figura 4.29: Dobrando tangentes a uma elipse e uma hipérbole.

Agora perguntamos o que acontece com o círculo C conforme arrastamos o foco F_2 para o infinito, deixando o foco F_1 , bem como o vértice da elipse mais próximo de F_1 fixos. Conforme o eixo maior da elipse cresce, o raio do círculo também cresce, mas um ponto do círculo, o ponto mais próximo de F_1 onde o círculo intercepta a reta que contém o eixo maior, também permanecerá fixo. Assim, conforme F_2 se move mais e mais para longe, o círculo aparecerá mais e mais como uma linha reta perto do foco F_1 . No limite, teremos que F_1 será o foco de uma parábola e o círculo C terá se transformado na diretriz dessa parábola.

Em outras palavras, de acordo com o Teorema 4.7, o círculo C e o foco F_1 desempenham o mesmo papel para a elipse que a diretriz e o foco desempenham ao dobrar tangentes para uma parábola. Portanto, se desenharmos um círculo C com centro F_2 em nosso papel e escolhermos um ponto F_1 dentro de C , então dobrar F_1 repetidamente em C gerará as tangentes à elipse com focos F_1 e F_2 e eixo principal constante igual ao raio de C , como mostrado na Figura 4.29 à esquerda.

Similarmente, as tangentes a uma hipérbole podem ser dobradas se escolhermos o foco F_1 para estar fora do círculo C . Veja o lado direito da Figura 4.29. Uma versão hiperbólica do Teorema 4.7 pode ser provada usando exatamente o mesmo argumento da elipse.

Vimos como dobrar um ponto em uma linha gera tangentes cujo envelope é uma parábola e dobrar um ponto em um círculo gera tangentes cujo envelope é uma elipse ou hipérbole (ou círculo, se o ponto for o centro do círculo). Em geral, podemos deixar C ser uma curva no plano e perguntar qual curva será o envelope das linhas de vinco feitas ao dobrar um ponto fixo em C repetidamente.

O principal resultado de tudo isso é que a operação **O6** está gerando retas tangentes a uma parábola. Ou seja, quando dobramos um ponto P a uma reta L , o vinco resultante será tangente à parábola com foco P e diretriz L .

Isso também nos dá uma maneira de interpretar a operação de origami **O7**, onde dobramos simultaneamente dois pontos em duas linhas. Cada ponto dobrado em uma linha determina o foco e a diretriz de uma parábola, e a linha de vinco feita será tangente a ambos. Assim, a operação **O7** está encontrando uma tangente comum a duas parábolas.

Desenvolvemos no capítulo 5 uma aplicação destes mesmos modelos de construções das seções cônicas utilizando origami, adaptado ao contexto escolar em uma atividade prática.

4.5 Resolvendo equações com origami

Neste ponto, é bastante evidente que o origami deve ser capaz de resolver **equações de segundo grau**. A seção anterior fornece boas evidências para isso. Além disso, as operações de uma régua e compasso parecem ser imitadas pelo origami. A operação de origami **O1** simula uma régua, e **O6** pode ser pensado como fazendo o trabalho de um compasso da seguinte forma: como o ponto P_2 está na linha de vinco, ele pode ser pensado como permanecendo fixo, como o centro de um círculo. Então P_1 é dobrado na linha L , e ao fazer isso o comprimento do segmento P_1P_2 é preservado enquanto P_1 é movido para sua nova localização. Assim, a imagem de P_1 sob a operação de dobra **O6** é a mesma que encontrar um ponto de interseção entre a linha L e um círculo centrado em P_2 com raio $|P_1P_2|$. Isso fornece a intuição, pelo menos, de que as construções de origami devem ser capazes de fazer tudo o que construções com régua e compasso pode fazer, e como o corpo de números construtíveis sob construções com régua e compasso é precisamente aqueles que são soluções para equações quadráticas, o origami deve ser capaz de encontrar tais soluções também. A saída da fórmula quadrática pode ser construída, nos dando quaisquer soluções reais para quadráticas com coeficientes racionais.

Entretanto, de acordo com o nosso trabalho na Seção 4.4, o fato de podermos dobrar tangentes para cônicas é tentador demais para não se aplicar a este problema.

Suponha que queremos encontrar raízes, se existirem, de $y = x^2 + ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$. Ao localizar o foco e a diretriz desta parábola, podemos escolher para dobrar e resolver nosso problema. Após realizar uma mudança de coordenadas para transladar o vértice da parábola para a origem, podemos usar métodos padrões para ver que o foco estará no ponto $P_1 = (-a/2, b - a^2/4 + 1/4)$ e a linha diretriz L será $y = b - a^2/4 - 1/4$. Pelos mesmos métodos que usamos na Seção 4.4, descobrimos que se dobrarmos P_1 para um ponto arbitrário $(t, b - a^2/4 - 1/4)$ em L , então a linha de vinco resultante terá a equação $y = (2t + a)x - t^2 + b$. Se tomarmos $t = (-a + \sqrt{a^2 - 4b})/2$, então o vinco será tangente à parábola em uma raiz, e a interseção do vinco e o eixo x (que assumimos ser uma reta construída) localizará a raiz para nós. Substituir esse valor de t em nossa equação da reta nos dá a equação da reta:

$$y = \sqrt{a^2 - 4b}x + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - 4b} + 2b - \frac{a^2}{2}.$$

Mas agora vemos que se deixarmos $x = -a/2$ nesta reta, os termos da raiz quadrada serão cancelados e nos darão $y = 2b - a^2/2$. Portanto, podemos escolher $P_2 = (-a/2, 2b - a^2/2)$, que é possível de construir a partir dos coeficientes da nossa quadrática original, e executar a operação de origami **O6** para dobrar P_1 em L fazendo o vinco passar por P_2 ; então, a intersecção do vinco resultante e o eixo x será uma raiz.

A outra raiz poderia ter sido encontrada tomando $t = (-a - \sqrt{a^2 - 4b})/2$. Claro, se o vértice da parábola, $(-a/2, b - a^2/4)$, estiver acima do eixo x , então não existem raízes reais e os resultados deste método de origami não terão sentido.

A Figura 4.30 mostra como isso funciona para encontrar uma raiz de $x^2 - x - 1 = 0$. Escolhemos $P_1 = (1/2, -1)$, $P_2 = (1/2, -5/2)$ e L a reta $y = -3/2$ e realizamos a operação **O6**.

Existem muitos outros métodos de dobradura para resolver quadráticas. Uma maneira de desenvolver construções de origami de várias coisas é encontrar uma construção que não seja origami (digamos, usando construções com régua e compasso ou outras ferramentas) e então adaptá-las à dobradura de papel.

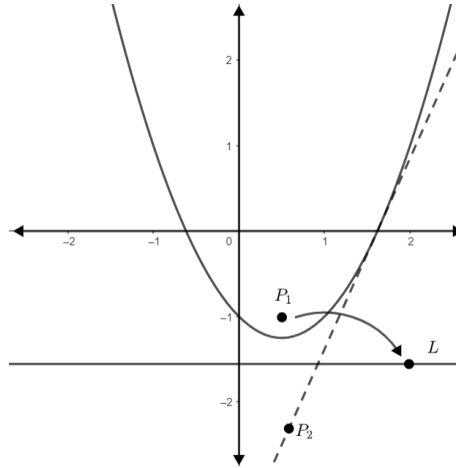


Figura 4.30: Dobrando para encontrar uma raiz de $y = x^2 - x - 1$.

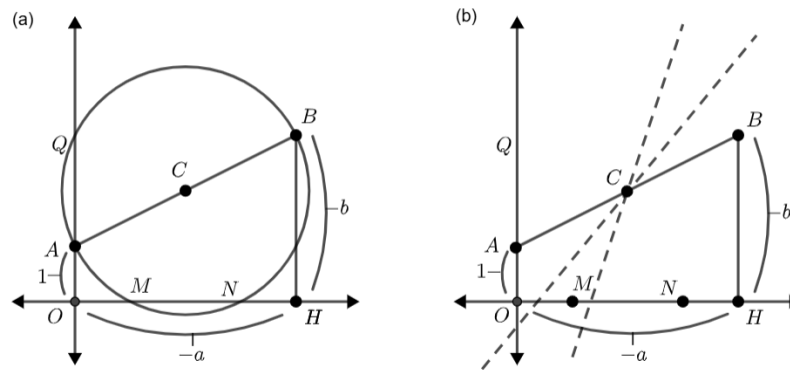


Figura 4.31: Construção de Lill para resolver $x^2 + ax + b = 0$.

Podemos adotar uma abordagem semelhante com as construções com régua e compasso para resolver quadráticas devido a Lill. Se desejarmos resolver $x^2 + ax + b = 0$ para $a, b \in \mathbb{Q}$, seja O a origem e construa $A = (0, 1)$, $H = (-a, 0)$ e $B = (-a, b)$. Então desenhe um círculo com diâmetro AB centrado no ponto médio C de AB . Se M e N são os pontos onde este círculo intercepta o eixo x (veja Figura 4.31(a)), então os comprimentos $|OM|$ e $|ON|$ (se existirem) serão soluções para $x^2 + ax + b = 0$.

Este método é possível de converter para dobradura de papel, observando que o ponto médio C de AB é obtido dobrando A para B (operação **O3**). Então M e N podem ser encontrados usando **O6**, dobrando de modo que A fique no eixo x e o vinco passe pelo ponto C , como mostrado na Figura 4.31(b).

A possibilidade do origami resolver **Resolvendo equações de terceiro grau** (equações cúbicas, foi sugerida nas construções de trissecção angular da Seção 4.2. Ambas as construções utilizaram a operação de origami **O7**, que vimos na Seção 4.4 ser equivalente ao problema geométrico de encontrar uma tangente comum a duas parábolas. Agora, no plano projetivo real, duas cônicas terão no máximo quatro tangentes comuns. No caso de duas parábolas, uma dessas tangentes será a linha no infinito. Portanto, pode haver no máximo três tangentes comuns que a operação **O7** poderia encontrar para nós, fornecendo

mais evidências de que tal operação de origami está resolvendo algum tipo de equação cúbica.

O objetivo desta seção é apresentar um método geral para resolver equações cúbicas via origami, idealizado por Margherita Piazzolla Beloch na década de 1930 e descrever sua relação com outros métodos de origami para resolver equações cúbicas que foram desenvolvidos desde então.

A percepção de Beloch foi adaptar uma construção engenhosa e não origami para resolver polinômios arbitrários com coeficientes racionais criados por Lill na década de 1860 [22]. O método de Lill procede da seguinte forma: Suponha que queremos localizar uma raiz da equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (4.2)$$

onde os coeficientes a_i são racionais. Construiremos uma solução real para isso geometricamente, se houver, tomando emprestada a imagem de “gráficos de tartaruga” da linguagem de computador *Logo*. Imagine uma tartaruga sentada na origem, apontando na direção do eixo x , com sua cabeça na direção positiva. A tartaruga se moverá para frente uma distância de a_n , deixando um rastro de linha reta enquanto o faz e adotando a convenção de que se a_n for negativo, então a tartaruga se moverá para trás. Então a tartaruga girará 90° no sentido anti-horário e repetirá esse processo com o coeficiente a_{n-1} . Assim, a tartaruga viajará para cima se $a_{n-1} > 0$ e para baixo se $a_{n-1} < 0$. Se $a_{n-1} = 0$, a tartaruga permanecerá no lugar. Então a tartaruga gira 90° no sentido anti-horário novamente e repetimos. Isso continua para todos os coeficientes a_i . Seja T a localização final da tartaruga. Veja a Figura 4.32 para exemplos onde todos os coeficientes são positivos e alguns são negativos.

Mais precisamente, podemos pensar no caminho de ordem n da tartaruga como sendo feito pela conexão dos seguintes pontos em sequência:

$$O = (0, 0), (a_n, 0), (a_n, a_{n-1}), (a_n - a_{n-2}, a_{n-1}), (a_n - a_{n-2}, a_{n-1} - a_{n-3}), \dots,$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k a_{n-2k}, \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k a_{n-2k-1} \right) = T,$$

onde talvez precisemos usar $a - 1 = 0$ para fazer com que as últimas somas terminem corretamente.

Construímos então um caminho de ordem $(n - 1)$ começando em O e terminando em T da seguinte forma: Posicione nossa tartaruga de volta em O e, desta vez, aponte-a para um ângulo ainda a ser determinado $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ da linha a_n anterior. Deixe a tartaruga marchar nessa direção até chegar à linha infinita contendo o segmento de linha a_{n-1} . (Observe que, dependendo de θ , a tartaruga pode não atingir o segmento a_{n-1} real, então a linha estendida pode ser necessária.) Em seguida, gire a tartaruga em $\pm 90^\circ$ para que ela fique de frente para a próxima linha a_{n-2} . Deixe-a marchar novamente até atingir a linha contendo a_{n-2} . Em seguida, gire em um ângulo reto novamente e repita este processo. No final, a tartaruga atingirá a linha contendo o segmento a_0 , e agora podemos ver qual deveria ter sido nossa escolha de θ . Nosso objetivo é escolher um valor θ que faça a tartaruga chegar no final no ponto T . (Isso é ilustrado pelos caminhos da linha pontilhada na Figura 4.32.) Se tal valor de θ existir, então ele nos levará a uma solução do polinômio original (4.2).

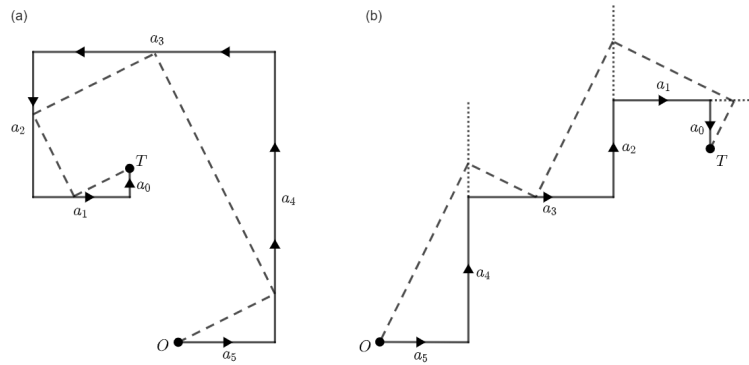


Figura 4.32: Método de Lill aplicado a quinticas onde (a) todos os coeficientes são positivos e (b) $a_3, a_2, a_0 < 0$ e o resto são positivos.

Teorema 4.8. (Lill) No processo acima, o valor $x = -\operatorname{tg} \theta$ será uma raiz de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$.

Demonstração. Como a tartaruga gira 90° em cada canto, o caminho de ordem n e o caminho de ordem $(n-1)$ formam uma sequência de triângulos retângulos, todos com um ângulo θ em comum e portanto, são semelhantes. Rotule os cantos do caminho de ordem n como $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$ e os cantos do caminho de ordem $(n-1)$ $Q_{n-1}, Q_{n-2}, \dots, Q_1$. Um exemplo em que $n = 5$ é mostrado na Figura 4.33.

Seja $x = -\operatorname{tg} \theta$ e considere o comprimento do lado oposto a θ em cada um desses triângulos semelhantes, $P_i Q_{i-1}$ para $i = n, \dots, 2$ e $P_1 T$. Obtemos

$$|P_n Q_{n-1}| = -a_n x, |P_{n-1} Q_{n-2}| = -x(a_{n-1} - |P_n Q_{n-1}|) = -x(a_{n-1} + a_n x),$$

$$|P_{n-2} Q_{n-3}| = -x(a_{n-2} - |P_{n-1} Q_{n-2}|) = -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + a_n x)), \dots$$

$$|P_1 T| = -x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots + x(a_{n-1} + a_n x) \dots))).$$

Como $|P_1 T| = a_0$, temos que $a_0 = -a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \dots - a_{n-1} x^{n-1} - a_n x^n$. Portanto $x = -\operatorname{tg} \theta$ é uma solução para a Equação (4.2). $\square$

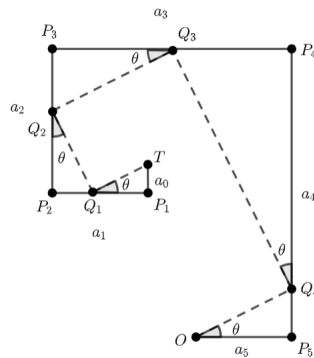


Figura 4.33: Provando que o método de Lill funciona em um caso onde $n = 5$.

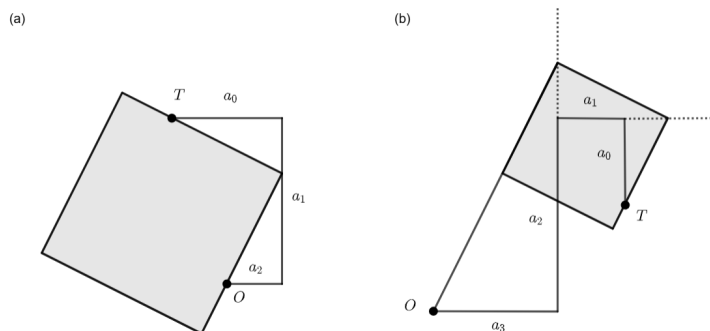


Figura 4.34: O uso de papel quadriculado transparente por Lill para encontrar um quadrado de solução para os casos (a) $n = 2$ e (b) $n = 3$.

Encontrar o ângulo θ adequado para fazer isso funcionar, certamente não é algo que ferramentas de construção normais (compasso, régua marcada, entre outras coisas) podem fazer em geral. Como visto na Figura 4.31, o caso em que $n = 2$ pode facilmente ser modificado para construções com régua e compasso, mas Lill ofereceu outra sugestão para lidar com os casos em que $n = 2$ ou 3 . Ele propôs, após desenhar o caminho inicial de 2 ou 3 ordens, sobrepô-lo com papel quadriculado translúcido (com uma malha fina) e girá-lo até que os pontos O e T fiquem em lados de um quadrado (ou em linhas que contenham um lado do quadrado) e alguns dos cantos deste quadrado fiquem em linhas que contenham um segmento a_i . Para o caso $n = 2$, nós queremos que um canto do quadrado fique no segmento a_1 (ou uma linha que contenha a_1); veja Figura 4.34(a). No caso cúbico $n = 3$, gostaríamos que um canto do quadrado ficasse na linha a_1 e um canto adjacente ficasse na linha a_2 . Também gostaríamos, para o caso cúbico, que os pontos O e T ficassem em linhas contendo lados opostos do quadrado. Veja a Figura 4.34(b) para um exemplo. Chamamos esse quadrado, na posição adequada no plano, de quadrado solução para o método de Lill nos casos $n = 2$ ou $n = 3$.

Entretanto, o método de Lill nem sempre funcionará. Se não houver soluções reais para o polinômio, então nenhum ângulo θ funcionará, e nenhuma rotação ou posicionamento do nosso papel milimetrado translúcido produzirá um quadrado de solução.

Foi o caso cúbico do método de Lill que Beloch descobriu que poderia ser realizado por dobradura de papel. Ela afirma que desenvolveu este trabalho enquanto lecionava um curso sobre geometria, onde sem dúvida apresentou o método de Lill, na Universidade de Ferrara, Itália, no ano acadêmico de 1933–34. A técnica de Beloch é ilustrada na Figura 4.35 e procede da seguinte forma: Dado um cúbico $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com coeficientes racionais, construímos o caminho de 3ª ordem de acordo com o método de Lill, e nosso objetivo é encontrar o ângulo próprio θ , se existir, para nos dar um caminho de 2ª ordem conectando O e T . Primeiro construa uma linha D_1 em $x = 2a_3$ e outra linha D_2 em $y = a_2 + a_0$.

Teorema 4.9. (Beloch) Usando a notação acima, se a operação de origami **O7**, dobrando o ponto O para a reta D_1 e o ponto T para a reta D_2 , for possível, então o segmento de reta que as retas estendidas a_2 e a_1 cortaram do vinco resultante será um lado do quadrado da solução para o método de Lill.

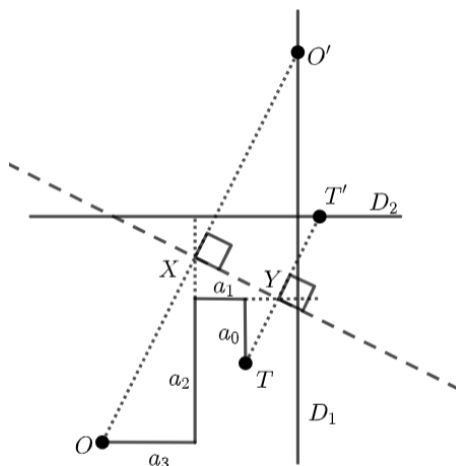


Figura 4.35: Uso da operação **O7** de Beloch para resolver uma cúbica.

Demonstração. A prova é muito simples quando se entende o raciocínio por trás da localização das linhas D_1 e D_2 . Suponha que quiséssemos considerar uma parábola com foco $O = (0, 0)$ e vértice $P_3 = (a_3, 0)$. Então a diretriz desta parábola seria a linha $x = 2a_3$, que é D_1 . Portanto, qualquer dobra que coloque O em D_1 será tangente a esta parábola. Além disso, se O' for a imagem de O em D_1 após a dobra, então o ponto médio X de OO' estará na linha que contém o segmento a_2 .

Similarmente, considere a parábola com foco $T = (a_3 - a_1, a_2 - a_0)$ e vértice $P_1 = (a_3 - a_1, a_2)$. A diretriz desta parábola será a linha $y = a_2 + a_0$, que é D_2 . Quando dobramos T em um ponto T' na linha D_2 , o vinco resultante será tangente a esta segunda parábola, e o ponto médio Y de TT' ficará na linha que contém o segmento a_1 . Veja a Figura 4.35.

Quando dobramos O em D_1 e T em D_2 usando a operação **O7**, temos que os pontos X e Y estarão nesta linha de vinco. Assim, o segmento XY é perpendicular a OX e TY , e assim XY é o lado de um quadrado com dois cantos adjacentes (os pontos X e Y) nas linhas a_2 e a_1 . Dois lados opostos deste quadrado contêm os pontos O e T , e portanto este é um quadrado de solução para o método de Lill. $\square$

Parece que o trabalho de Beloch sobre construções de origami ficou na obscuridade por muitos anos. Enquanto a atenção foi atraída para ela nos primeiros anos da comunidade matemática de origami, os métodos de trissecção de ângulos por Abe e Justin e a construção da raiz cúbica de dois de Messer foram feitos sem conhecimento do trabalho de Beloch. Além disso, as construções mais recentes de Alperin [23] e Hatori [5] para resolver cúbicas gerais foram feitas sem qualquer conhecimento de Beloch. É fascinante, então, aprender que ambas essas soluções modernas são virtualmente idênticas à abordagem de Beloch, embora sem a referência a Lill.

Na construção de Hatori começamos com um cúbico arbitrário $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ e consideramos a parábola com foco $P_1 = (a, 1)$ e diretriz $L_1 : y = -1$ e a parábola com foco $P_2 = (c, b)$ e diretriz $L_2 : x = -c$.

A Figura 4.36 mostra como a construção de Hatori pode ser interpretada como equivalente à de Beloch. De fato, se refletirmos essa imagem sobre a linha $y = -x$ e trasladarmos P_1 para a origem, é exatamente o que a aplicação do método de Lill por Beloch geraria.

A construção de Alperin começa com a forma equivalente de uma cúbica geral $x^3 + ax + b = 0$. Ele então nos pede para considerar as parábolas

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ e } \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx.$$

O primeiro tem foco $P_1 = (0, 1/2)$ e diretriz $L_1 : y = -1/2$. O segundo tem foco $P_2 = (b/2, a/2)$ e diretriz $L_2 : x = -a/2$. Esses focos são os mesmos que o método de Beloch daria, exceto que eles são girados 90° e reduzidos em $1/2$, o que é o equivalente a multiplicar a equação cúbica por $1/2$. A Figura 4.37 ilustra isso, mas a aplicação do método de Lill pode ser difícil de discernir devido à falta de um termo x^2 no polinômio. Deve-se pensar no “segmento de reta de comprimento a_2 ” como estando lá, paralelo (na verdade, ao longo) ao eixo x , mas de comprimento zero. (Assim, a reta “contendo” o segmento a_2 é o eixo x .)

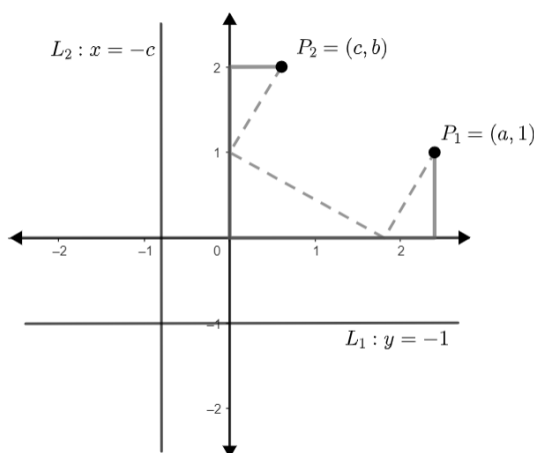


Figura 4.36: A solução cúbica de Hatori vista através das lentes de Beloch/Lill.

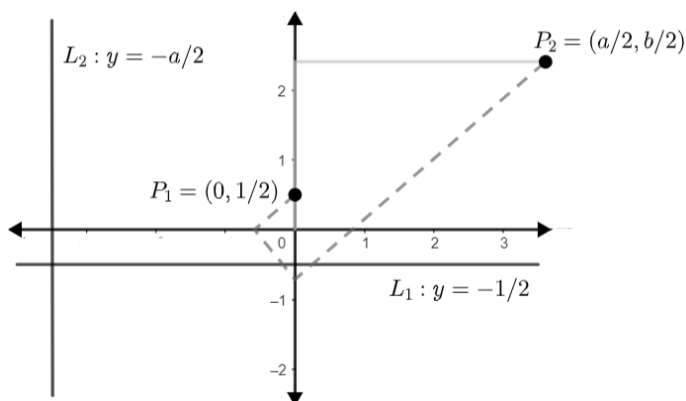


Figura 4.37: A solução cúbica de Alperin vista através das lentes de Beloch/Lill.

Dado que todos esses métodos de resolução de cúbicas via origami são realmente os mesmos no fundo, é surpreendente encontrar um que seja diferente. A raiz cúbica de dois de Peter Messer não se encaixa tão facilmente na estratégia Beloch/Lill; veja Figura 4.38. Messer utiliza duas parábolas cujas diretrizes são perpendiculares, como Beloch faz. Mas

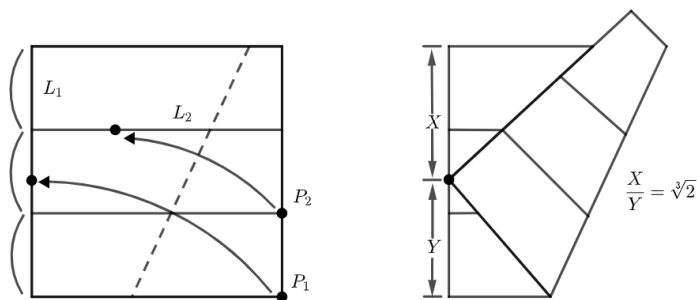


Figura 4.38: Construção da raiz cúbica de dois de Peter Messer.

se usássemos o método de Beloch para resolver $x^3 - 2 = 0$, nosso caminho de 3ª ordem começaria com um segmento horizontal de comprimento 1, depois dois segmentos (vertical e depois horizontal) de comprimento 0 e depois um segmento vertical de comprimento 2. Não há nenhuma maneira de os pontos O e T compartilharem a mesma coordenada x ou y , como os pontos P_1 e P_2 de Messer. No entanto, o método de Messer encontra dois comprimentos cujas razões dão $\sqrt[3]{2}$, em oposição a um comprimento obtido por uma inclinação do caminho da tartaruga do método de Lill. No entanto, deve haver uma maneira de interpretar a construção de Messer em termos de Beloch e Lill.

Observação 4.10. Ao fechar esta seção, notamos que também é possível resolver equações quárticas usando as operações básica de origami **O1–O7**. Isso decorre do fato de que qualquer equação quártica pode ser fatorada em duas quadráticas ou um termo cúbico e um linear. Assim, em teoria o origami pode resolver quárticas, mas essa teoria não fornece imediatamente instruções sobre como isso pode ser feito.

4.6 Duplicação do cubo via origami

Uma lenda, datada por volta de 427 a.C., diz que a população de Atenas, preocupado com uma peste que se espalhava matando várias pessoas, procurou o oráculo de Apolo, buscando uma forma de acabar com esse sofrimento. O oráculo informou que para resolver essa questão e acabar com o mal era necessário dobrar o volume do cubo que sustentava a estátua do Deus Apolo. Os atenienses obedecendo o comando, dobraram as dimensões do altar, mas isso não foi o suficiente para acabar com a peste pois, dobrando as dimensões do cubo não se obtêm um cubo com o dobro do volume.

Se considerarmos um cubo com lado de comprimento 1, e portanto, um volume de 1. Após a realização da duplicação do cubo, proposta por Apolo, o cubo em questão deveria ter um volume de 2 e portanto um lado de comprimento $\sqrt[3]{2}$. Vimos com o Teorema 3.8 que é impossível construir um cubo com essa medida usando régua sem medida e compasso. Entretanto, a construção da raiz cúbica via origami, realizada por Peter Messer, como na Figura 4.38, traz exatamente possibilidade de construção de um lado de comprimento $\sqrt[3]{2}$.

Realizando os passos a seguir, podemos construir da raiz cúbica de dois de Peter Messer, que resolve o problema da duplicação do cubo via origami:

1. Dobre um pedaço quadrado de papel em três partes.

2. Dobre o papel de forma que o canto inferior direito da página toque a borda esquerda, ao mesmo tempo em que o terço inferior toca a linha dos dois terços.
3. O ponto onde o canto toca a borda esquerda da página é o ponto onde a razão entre a distância do topo da página e a base é $\sqrt[3]{2}$.
4. Temos dobrada a raiz cúbica de dois.

Portanto, um cubo com lado "a" terá o dobro do volume de um cubo com lado "b".



Figura 4.39: Duplicação do cubo realizada pela autora.

4.7 E a quadratura do círculo?

A história envolvendo a problemática da quadratura do círculo se dá pelos geômetras gregos pré-euclidianos, que transformaram o problema prático de determinar a área de um círculo em uma ferramenta de descoberta. A técnica que se mostrou mais eficiente para a possível resolução de tal problema foi a aproximação cada vez mais precisa da área de um círculo por meio das áreas de polígonos. Essa técnica é conhecida, na era moderna, como o “método da exaustão” e foi atribuída por Arquimedes, seu maior praticante, ao aluno de Platão, Eudoxo de Cnido (c. 408–c. 355 a.C.).

Na busca por resolver esse problema, Hipócrates, embora não tenha conseguido quadrar o círculo, demonstrou as quadraturas das lunetas; ou seja, ele mostrou que a área entre dois arcos circulares que se interceptam podia ser expressa exatamente como uma área retilínea e, assim, despertou a expectativa de que o próprio círculo pudesse ser tratado de maneira semelhante.

O método da exaustão, desenvolvido por Eudoxo, assemelha-se muito à ideia das integrais de Riemann, que são ensinadas hoje em dia nas aulas de Cálculo. A proposta desse método consiste na aproximação de uma curva ou superfície usando polígonos com perímetros e áreas calculáveis. À medida que o número de lados de um polígono regular inscrito em um círculo aumenta indefinidamente, seu perímetro e sua área ocupam a circunferência e a área do círculo. No uso que Arquimedes fez da técnica, o método da exaustão produzia limites superiores e inferiores para o valor de π , a razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro. Ele conseguiu isso ao inscrever um polígono dentro de um círculo e circunscrever outro ao redor dele, delimitando, assim, a circunferência do círculo entre os perímetros calculáveis dos polígonos. Arquimedes usou polígonos com 96 lados e, dessa forma, limitou π entre $3^{10/71}$ e $3^{1/7}$.

No Teorema 3.9, observamos que a construção do número π não é viável por meio das ferramentas clássicas da geometria — régua não graduada e compasso —, uma vez que π é um número transcendente. Isso significa que ele não é solução de nenhuma equação algébrica com coeficientes racionais, o que impede sua obtenção através de métodos que dependem da resolução de equações quadráticas ou de expressões envolvendo raízes quadradas sucessivas.

Com base nas discussões anteriores deste trabalho, pode-se criar uma expectativa de que o origami, com suas operações geométricas alternativas, possa oferecer uma solução para esse antigo problema da matemática grega. De fato, como visto na Seção 4.3, as dobras de papel permitem construções que vão além das limitações da geometria euclidiana clássica, abrangendo, inclusive, soluções de equações cúbicas. No entanto, assim como ocorre com régua e compasso, as dobras formadas por vincos retos não são suficientes para construir π de forma exata. Para alcançar tal precisão, é necessário recorrer a vincos curvos.

Algumas das referências utilizadas neste trabalho mencionam abordagens que envolvem dobras curvas. Em [9], por exemplo, é apresentado um método baseado em frações contínuas que permite aproximar π com alto grau de precisão, mesmo que a sequência exata de dobras não seja sempre viável na prática. A ideia consiste em representar π como uma fração contínua e utilizar seus convergentes, geralmente os quatro ou cinco primeiros, para encontrar uma aproximação.

Já em [10], é descrita uma construção mais direta de π por meio de dobras que seguem curvas específicas, como parábolas. Embora essas abordagens ofereçam caminhos interessantes, elas fogem ao escopo deste trabalho, que se restringe à análise de construções realizadas com vincos retos. A exploração das possibilidades oferecidas pelas dobras curvas exige um estudo mais aprofundado e especializado, o qual indicamos como uma direção possível para futuras pesquisas.

5 Da teoria à prática: uma abordagem em sala de aula

Neste capítulo abordaremos uma aplicação prática de algumas construções geométricas abordadas neste trabalho, que utilizaram a metodologia de dobras de origami, com alunos do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo, estimulando o protagonismo e pensamento matemático lúdico do educando no processo de ensino-aprendizagem.

5.1 Relevância do tema no ensino

Origami é uma palavra de origem japonesa que significa arte de dobrar papel. Na confecção de um Origami, devemos ter o princípio básico de evitar o uso da cola e da tesoura, dando à dobradura o formato desejado. Praticado por séculos como atividade lúdica e artística, só recentemente o Origami passou a ser preocupação acadêmica, se tornando objeto de estudos científicos. “Os pesquisadores foram atraídos provavelmente porque o Origami instigou seus talentos matemáticos e científicos”, afirma o matemático Thomas Hull.

Já no contexto escolar, o ensino da Geometria sempre foi visto como uma dificuldade pelos professores de matemática, por conta dos livros didáticos não darem ênfase a este conteúdo, colocando-o, geralmente, como última matéria a ser trabalhada, ou até mesmo pela falta de preparação dos próprios docentes. O trabalho do Origami dentro da Geometria, pode contribuir para o desenvolvimento e a construção do aprendizado, por parte dos alunos através de uma aula lúdica e prática.

Por meio do uso da arte de dobras do Origami podemos desenvolver dentro da Geometria Euclidiana atividades de construção de figuras planas e espaciais, além da construção de conceitos geométricos da Geometria Analítica, como: ponto, reta, plano, semirreta, retas paralelas, retas concorrentes, retas perpendiculares, segmento, bissetriz, mediatriz, ângulo, espaço bidimensional ou tridimensional, entre outros.

Trataremos agora de realizar breves considerações sobre os documentos norteadores da prática pedagógica brasileira, buscando conciliar suas determinações aos objetivos deste trabalho, considerando o mote de desenvolver nos educandos um novo olhar e percepção sobre a matemática e suas formas de atuação, através do uso do origami.

Expandindo as resoluções formais dos temas de ensino de geometria com as reflexões propostas nesta proposta didática, o novo olhar deste conteúdo contribui para que o papel do aluno deixe de ser simplesmente receptor de conhecimento, e se torne protagonista destas novas estratégias e mecanismos de resolução. A abordagem deste trabalho está de acordo com as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais [12], onde a matemática

se apresenta como um recurso para ampliar a visão de mundo do aluno, oferecendo ferramentas para a interpretação da realidade de forma lógica e racional, instrumentalizando recursos matemáticos. Como proposto nas diretrizes, o aluno terá compreensão de diversas fontes e mecanismos histórico-sociais, contribuindo para uma abordagem crítica e inovadora sobre mecanismos científicos e matemáticos.

Visto isso, buscaremos agora uma conciliação entre as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [11] e a dinâmica proposta, considerando que este é um documento que norteia e padroniza a prática dos PCN+. Assim, o ensino de geometria busca num sentido geral, representar as diferentes figuras planas e espaciais (presentes na natureza ou imaginadas), consolidar conceitos aprendidos nas etapas anteriores (área, perímetro, volumes e outros), estudar os volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera) permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas, bem como, analisar as propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação, entre outros. Este documento também prevê a possibilidade de diferentes abordagens nesta área de ensino, levando em consideração o estudo das curvas cônicas analisando suas propriedades de lugar geométrico, por meio das equações da elipse, hipérbole e parábola. Este aprofundamento visa que o aluno possa dominar novas formas de compreender os conceitos geométricos e suas implicações no cotidiano (Idem, p.92 e 93). Embasado por este princípio, o ensino da matemática com origami se apresenta como uma forma concreta e prática de desenvolver no aluno a propriedade de raciocínio e percepção lógica da realidade objetiva. Este recurso amplia as estratégias possíveis dos alunos resolverem e compreenderem tal assunto.

Por fim, nas diretrizes apresentadas pela BNCC [13] encontramos como pilares do ensino de geometria o uso do raciocínio lógico-espacial, da compreensão da modelagem matemática como interpretação do mundo físico e da ampliação da percepção de elementos geométricos no espaço - cada um destes prezando principalmente a interdisciplinaridade e a inovação. As habilidades propostas podem ser flexibilizadas e adaptadas, contemplando o origami como um ferramenta didática para ampliar as percepções geométricas dos alunos.

Tendo como apoio as reflexões de Ubiratan D'Ambrosio [24], onde a matemática, como uma linguagem social, é um recurso cultural amplo, permeado por contextos individuais que se combinam a contextos maiores- moldando diálogos e apropriações por parte dos indivíduos. Considerando o papel de atuação dos alunos e seus conhecimentos prévios - dialogando com as dinâmicas propostas por este trabalho -, ampliamos as possibilidades de vivência e apropriação dos conceitos e suas articulações na construção da identidade desse aluno. Contribuímos, assim, para uma ampliação das visões de mundo desse aluno e suas percepções da diversidade cultural.

5.2 Ensinando matemática com origami

Este capítulo apresenta uma sequência didática elaborada pela autora, que será aplicada com alunos do 3º ano do ensino médio. O local escolhido para aplicação da atividade é a Escola Estadual "Adoniran Barbosa", situada na cidade de Valinhos, interior de São Paulo. Esta escola está ligada à história pessoal da autora, sendo onde se formou na educação básica e onde hoje se encontra como professora efetiva, possibilitando assim a aplicação em suas próprias aulas, adaptando o currículo escolar.

A turma que será aplicada a atividade tem como perfil alunos que estão dentro do itinerário formativo de Matemática e Ciências da Natureza, tendo facilidade com cálculos básicos e o interesse por cálculos avançados e desafios, possibilitando a abordagem de

assuntos extra curriculares. De acordo com as mudanças do Novo Ensino Médio (referência [25]), o currículo está alinhado às áreas de interesse do aluno, aproximando-os de temas norteadores para sua formação superior. Os alunos que escolhem compor a grade de aulas com o Itinerário de Matemática e Ciências da Natureza, geralmente estão interessados em seguir carreira nas áreas correlatas e acabam recebendo formação voltada a atividades práticas e inovadoras. Portanto, dá-se a importância de trabalhar o assunto de cônicas em sala de aula com atividade prática, mesmo que o currículo paulista não coloque mais como obrigatório o ensino da mesma.

O plano de aula segue abaixo:

Tema: Prática de origami no estudo geométrico

Conteúdo: Origami; Bisseção e trisseção de ângulo; Seções cônicas.

Objetivos de Aprendizagem: Compreender o processo de construção de um origami; Associar dobras de origami a construção de formas matemáticas e suas propriedades; Aprender sobre bisseção e trisseção de ângulos; Realizar a dobra das cônicas por meio de orientações do origami; Relacionar as dobras realizadas com as seções cônicas e suas propriedades visuais.

Metodologia de Ensino: A metodologia escolhida para alcançar os objetivos planejados neste trabalho, foi a metodologia construtivista, que visa a construção ativa do conhecimento pelo aluno, através da exploração e investigação por meio de atividade prática misturada a metodologia tradicional de aula expositiva.

Habilidades:

- **EM13MAT301:** "Analisar as características e propriedades das figuras geométricas espaciais e planas, realizando construções, representações e transformações geométricas com e sem o uso de tecnologias digitais."
- **EM13MAT303:** "Aplicar os conceitos de congruência e semelhança de figuras planas na resolução de problemas e na construção de argumentos."
- **EM13MAT302:** "Utilizar transformações geométricas (translação, reflexão, rotação e homotetia) na resolução de problemas e na análise de propriedades geométricas."
- **EM13MAT305:** "Reconhecer, representar e interpretar geometricamente, em diferentes contextos e em diferentes sistemas de coordenadas, as principais curvas cônicas (circunferência, parábola, elipse e hipérbole), com e sem o uso de tecnologias digitais."
- **EM13MAT401:** "Utilizar modelos matemáticos para representar, analisar e resolver problemas de outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana."
- **EM13MAT402:** "Planejar e desenvolver projetos que envolvam a investigação e a modelagem de situações-problema por meio da Matemática, utilizando diferentes linguagens."

Recursos Didáticos (material):

- Origamis prontos;
- Guia de dobra dos origamis prontos;
- Papel de origami;

- Papel vegetal;
- Lista de orientações;
- Slides com definições e materiais sobre cônicas;
- Geogebra;

Tempo previsto: Foi previsto o tempo de duas aulas duplas, totalizando quatro aulas de 50 minutos cada.

Atividades para os Alunos: A atividade foi dividida em momentos para facilitar a explicação.

1. A sala será organizada em duplas buscando facilitar as dinâmicas. Será entregue às duplas um roteiro de análise para direcionar as reflexões dos alunos como o da Figura 5.5. As duplas receberão modelos de origamis tradicionais, complexos e algumas dobraduras que não são origamis como na Figura 5.1. Os alunos poderão explorar, analisar e deverão fazer um levantamento de hipóteses sobre quais dos exemplos apresentados são origamis tradicionais e os motivos que os diferenciam. Após as conclusões, será apresentado aos alunos as respostas corretas, correlacionando-as com as definições de origami, como definido no início do Capítulo 4.



Figura 5.1: Modelos de origami que serão entregues aos alunos.

2. O tsuru é o modelo mais famoso e conhecido dentro do mundo do origami, e por isso será o primeiro modelo produzido pelos alunos, com as orientações da professora baseado nos passos da Figura 5.2. O objetivo é que os alunos possam entender o funcionamento das dobras de um origami, suas relações com conceitos matemáticos já conhecidos, bem como a história por trás desse famoso pássaro de papel. Os Tsurus elaborados poderão ficar com os alunos de recordação após a aula ou eles poderão doar o pássaro feito para realização de um mural na escola.

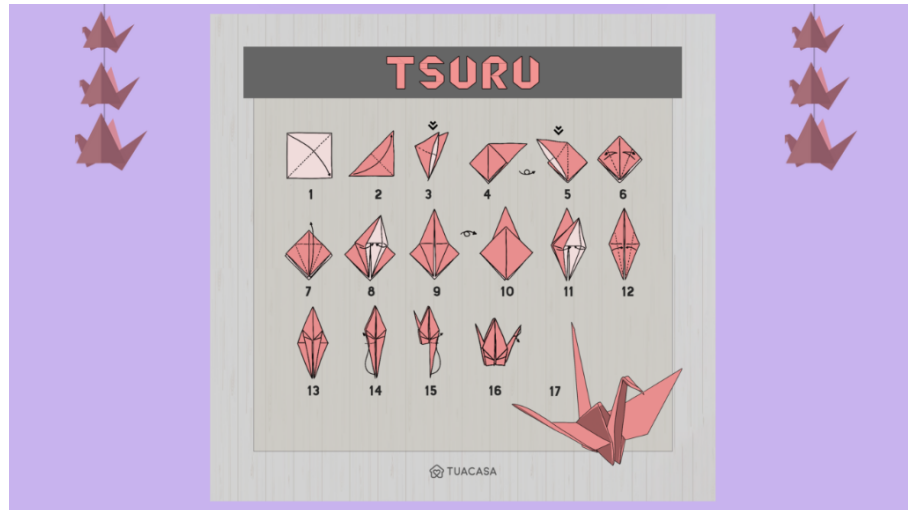


Figura 5.2: Passo a passo de como dobrar um Tsuru.

3. Devido ao caráter acadêmico desta turma, será disponibilizado aos alunos parte deste trabalho para que eles entendam melhor os mecanismos científicos de produção de conhecimento e isso contribuirá para que eles se inspirem para seguir no ramo de estudos e pesquisas. Partindo das ideias presentes no trabalho, será explicada as definições de bissecção e trissecção de ângulos, para compreenderem o objeto de estudo principal (a possibilidade de trissecção do ângulo via origami). Sendo assim, os alunos, que agora já estarão mais familiarizados com a realização das dobras de um origami, serão orientados a realizar a bissecção e posteriormente desafiados a realizar a trissecção de um ângulo qualquer, apenas com a ajuda de suas duplas. As dificuldades para realizar tal tarefa deverá ser anotada no roteiro de análise Figura 5.5. É esperado que os alunos tenham facilidade na realização da dobra da bissecção, mas que esta mesma facilidade não se apresente na trissecção. Concluída a exploração deles com o material, será averiguado se alguém conseguiu de fato realizar a trissecção e junto a professora, vão aprender como realizar esta dobra assim como realizado na Seção 4.2.
4. Na aula seguinte, as duplas receberão folha de papel vegetal que estarão previamente demarcadas como as imagens que seguem:

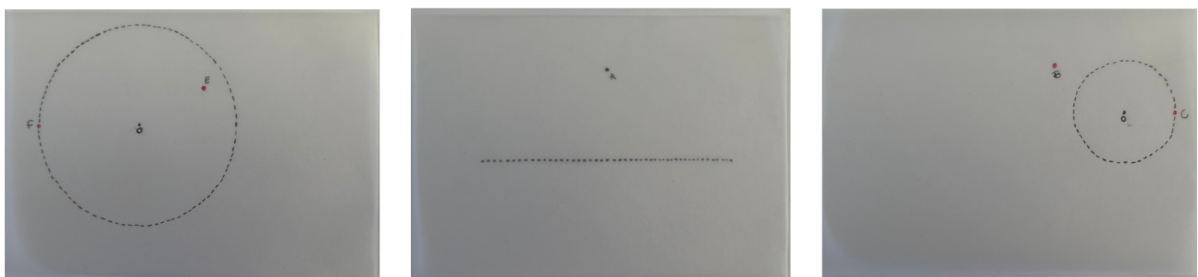


Figura 5.3: Material entregue aos alunos.

Visto que estão cada vez mais familiarizados com a elaboração de origami, os alunos deverão seguir as orientações do roteiro de análise, para realizar as dobras das cônicas

(elipse, hipérbole e parábola), assim como também foi realizado na seção 4.4. A ideia é que os alunos cheguem em resultados como os das imagens abaixo:



Figura 5.4: Cônicas dobradas pelo molde.

Após a produção, os alunos deverão investigar o que essas figuras representam matematicamente, como:

- Nomes dados a estas figuras.
- Suas possíveis propriedades.
- Funcionalidade.
- Aplicabilidade ao cotidiano.

Anotando todas as conclusões no roteiro de análise (Figura 5.5), que será devolvido a professora no final desta etapa. Considerando que alguns alunos realizam estudos extra classe, é esperado que até reconheçam as cônicas e saibam algumas de suas propriedades, mesmo sem ter estudado-as oficialmente. As produções poderão ficar de recordação aos alunos ou poderão ser doadas para elaboração de um mural na sala de aula.

5. Para finalizar a aula, será apresentado oficialmente aos alunos as cônicas, com suas definições, características, funcionalidades, aplicabilidades, origem partindo do cone e as fórmulas correspondentes.

As referências utilizadas na preparação do plano de aula foram: [11], [12], [13], [25], [24] e [26].

Roteiro de análise – Atividade com origamis

Todos os origamis realizados no decorrer da atividade podem ficar com vocês de recordação ou ser doado para elaboração de um mural desta atividade na escola. Respondam conforme orientado pela professora:

1. Vocês já ouviram falar em Origami? Relate tudo o que sabem a respeito desse assunto.

2. Defina com suas palavras: O que é um origami?

3. Quais dos exemplos apresentados vocês acham que se trata de um origami tradicional? Expliquem o motivo.

4. Tentem realizar a trisseção do ângulo dado. Quais foram as dificuldades encontradas?

5. Construindo as cônicas.

a) Passo a passo para quem recebeu a folha com a reta e o ponto A desenhados: • Coloque o ponto A em cima do primeiro ponto da reta. Vinque o papel. • Coloque o ponto A em cima do segundo ponto da reta. Vinque o papel. • Repita esse passo para todos os pontos da reta. b) Passo a passo para quem recebeu a folha com a circunferência grande e o ponto E dentro dela: • Coloque o ponto E em cima do ponto F da circunferência. Vinque o papel. • Coloque o ponto E em cima do próximo ponto da circunferência. Vinque o papel.	• Repita esse passo para todos os pontos da circunferência. • OBS: O ponto “O” é apenas o centro da circunferência. c) Passo a passo para quem recebeu a folha com a circunferência pequena e o ponto B fora dela: • Coloque o ponto B em cima do ponto C da circunferência. Vinque o papel. • Coloque o ponto B em cima do próximo ponto da circunferência. Vinque o papel. • Repita esse passo para todos os pontos da circunferência. • OBS: O ponto “O” é apenas o centro da circunferência.
--	--
6. Respondam *de acordo com a opinião de vocês*:
 - a) Qual a maior dificuldade encontrada ao realizar os passos?

 - b) Quais os nomes das figuras formadas pelas dobras?

 - c) Dê exemplos de coisas que tenham esse formato.

 - d) Qual a relação dessa figura com a matemática?

Figura 5.5: Roteiro de análise dos alunos.

5.3 Relato da aplicação

A aplicação da atividade se deu de forma tranquila, atingindo os objetivos previstos, mas levou mais tempo do que o planejado devido a discussões extras e as dificuldades de gerenciar 40 alunos sem nenhuma experiência com origami.

A dinâmica se iniciou com a apresentação dos objetivos da atividade, que se difere do que os alunos estão habituados a realizar nas aulas da escola, sendo aplicada para finalização de um trabalho de mestrado elaborado pela professora de matemática. Por se tratar de uma atividade prática, com produção de origamis, os alunos foram orientados a sentarem em duplas e a manter silêncio para acompanhar as instruções e conseguir realizar as práticas propostas. Todos os participantes receberam um roteiro de análise, igual ao da Figura 5.5, que deveria ser preenchido conforme solicitado.

Com a sala organizada, os alunos iniciaram respondendo às duas primeiras perguntas

do roteiro de análise. Examinando suas respostas, pude perceber que todos tinham uma ideia pré-estabelecida do que é um origami. De modo geral, as respostas afirmam que origamis são dobraduras que formam figuras variadas e que sua origem está relacionada à cultura asiática, com variações quanto ao país exato. Como exemplo, segue a imagem com uma das respostas mais completas a respeito do assunto:

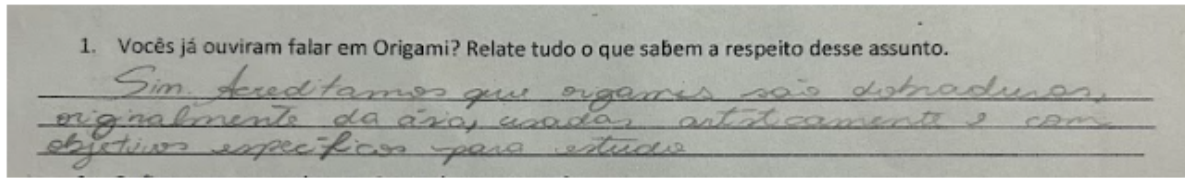


Figura 5.6: Resposta de alunos da primeira questão.

Por outro lado, na questão 2, em que precisavam definir o que é um origami, muitas respostas apenas repetiram o conteúdo da primeira. Ou seja, nenhum dos alunos demonstrou ter um conhecimento conceitual claro sobre o que, de fato, é um origami.

Após responderem às duas primeiras questões, iniciou-se a parte exploratória da atividade, na qual foram apresentados à turma todos os origamis e dobraduras elaborados pela autora, com uma explicação simples sobre o que representava cada um deles. As figuras mostradas aos alunos estão na imagem abaixo:



Figura 5.7: Dobraduras apresentadas na aplicação da atividade.

Os alunos puderam analisar todos de perto e explorá-los da forma como quisessem. Mesmo sendo orientados a ter cuidado com todas as peças presentes na atividade, os origamis que eram manipuláveis acabaram sendo desmanchados, gerando várias interrupções durante a explicação, para que fossem montados de volta. Finalizadas as análises, os alunos responderam à questão 3 do Roteiro de Análise, na qual deviam apontar quais das figuras apresentadas se tratavam, de fato, de um origami tradicional e levantar hipóteses para isso. A grande maioria apontou pelo menos o tsuru e o cisne como origamis tradicionais, com justificativas distintas, variando da suposição de que são elementos da natureza,

cogitando que poderia ser pela riqueza de detalhes minuciosos ou apontando o fato de se tratarem dos modelos mais populares e comuns quando se fala em origami. Porém, dois grupos levantaram a hipótese de que essas figuras seriam consideradas tradicionais por não possuírem cortes, aproximando-se, assim, da definição abordada neste trabalho.

Concluídas as respostas, foi apresentado aos alunos a definição de origami descrita no Capítulo 4 (baseada na Referência [15]). Em seguida, foi realizada uma análise coletiva sobre quais das figuras se enquadravam nessa definição. Esse momento gerou uma interação engraçada entre os alunos, que disputaram quem acertava mais figuras. Entretanto, nenhuma das duplas identificou todos os origamis que se enquadram na definição de Dureisseix. A seguir, apresenta-se a imagem com as figuras que são origamis de acordo com essa definição:



Figura 5.8: Origamis segundo definição de Dureisseix.

Temos respectivamente as imagens de: borboleta, tsuru, estrela modular, peixe, flor, estrela de triângulos, cisne, coelho e dinossauro. As demais figuras não são consideradas origamis tradicionais, pois apresentam corte, cola ou não são realizadas a partir de um pedaço de papel **quadrado**.

Após compreenderem o conceito de um origami, os alunos foram apresentados à história do tsuru, que todos conheciam e relacionaram a um origami. O tsuru é uma ave sagrada no Japão, símbolo de saúde, boa sorte, felicidade, longevidade e fortuna. Reza a lenda que quem conseguir dobrar mil tsurus em vida terá um desejo realizado pelo destino.

Uma menina chamada Sadako Sasaki sobreviveu ao ataque da bomba atômica de Hiroshima, mas desenvolveu câncer e, após a visita de uma amiga íntima, descobriu a lenda do tsuru. Ela então dedicou o resto de sua curta vida a fazer os mil tsurus e desejar sua cura. No entanto, Sadako não conseguiu realizar seu sonho, morrendo antes de completar 700 tsurus, se tornando um símbolo de paz em seu país. Motivados pela contextualização histórica, os alunos foram convidados a executar o tsuru com a professora.

Os passos iniciais foram fáceis de realizar, mesmo com os alunos apresentando pouca experiência com dobras. Porém, conforme os passos se tornavam mais detalhados, diversos alunos começaram a apresentar dificuldades para realizá-los. Estarem organizados em duplas, nesse momento da atividade, foi crucial, pois pude contar com a colaboração de um auxiliando o outro nos momentos de dificuldade e, quando ambos tinham problemas, ficava a cargo da professora oferecer o suporte necessário.

Essa atividade acabou levando mais tempo do que o esperado, pois a sala tem 40 alunos, e mais da metade nunca havia tentado fazer algum tipo de origami. Assim,

muitos tiveram dificuldades para compreender os passos, e alguns inverteram a folha na hora de dobrar, o que impossibilitou a dobra seguinte. Isso levou a diversos momentos em que foi necessário interromper a atividade para corrigir as dobras e permitir que os alunos prosseguissem. Ao final, cerca de três ou quatro alunos não conseguiram realizar o origami. Entretanto, todos receberam explicações individuais da professora para compreender como finalizar seus tsurus. Abaixo, seguem imagens do processo e do resultado final de alguns:



Figura 5.9: Alunos fazendo o Tsuru.

Seguindo o planejamento, este trabalho foi apresentado, em sua forma parcial, aos alunos. O objetivo foi explicar o funcionamento de uma pesquisa científica, pontuando os propósitos da atividade da qual eles fizeram parte, sua relevância e a relação da dinâmica com a abordagem do trabalho. Neste momento, muitas dúvidas sobre o meio acadêmico surgiram por parte dos alunos. Todas foram esclarecidas, sempre com o incentivo às vivências que a universidade pública pode proporcionar. Os questionamentos apresentados não estavam previstos no planejamento, mas foram de extrema importância para os envolvidos, que se mostraram empolgados em participar e ansiosos para ver o trabalho completo.

Explicado o objetivo da pesquisa (que aborda a impossibilidade das construções clássicas da geometria grega e a possibilidade de resolução via origami, com enfoque no problema da trissecção de um ângulo qualquer), os alunos se depararam com termos, até então desconhecidos. Dessa forma, foi explicado que a bissecção é a divisão de um ângulo em duas partes iguais e a trissecção de um ângulo é a divisão em três partes iguais.

Compreendendo, assim, o cerne da pesquisa, chegamos à conclusão de que a bissecção de um ângulo via origami é fácil de realizar, visto que basta dobrar qualquer ângulo ao meio. Os alunos então receberam uma folha quadrada de origami com a marcação de um ângulo qualquer como na imagem abaixo e foram desafiados a realizar a trissecção, uma vez que já tiveram um primeiro contato com as dobraduras elaborando o tsuru.

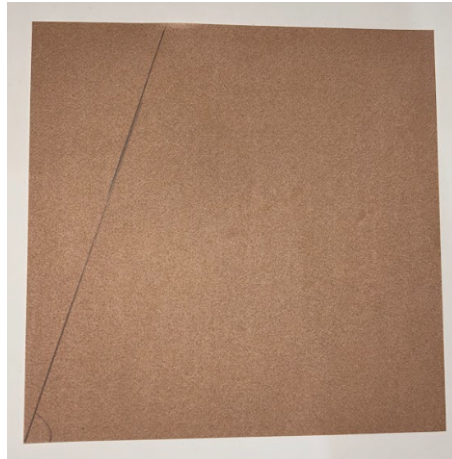


Figura 5.10: Ângulo arbitrário recebido pelos alunos para realizar a trisseccção.

Neste momento, os alunos tiveram a oportunidade de explorar as dobras, os vincos e levantar suposições sobre como realizar a trisseccção do ângulo em três partes iguais. Ideias e tentativas não faltaram; os alunos se empenharam em superar o desafio proposto.



Figura 5.11: Alunos explorando possibilidades de trissectar um ângulo.

Na Figura 4.3, podemos ver a divisão de uma folha em três partes de forma mais simples, porém não aceita matematicamente, por envolver a realização de duas dobras simultâneas. Utilizando esse mesmo raciocínio, que não havia sido previamente apresentado, uma das alunas conseguiu chegar muito próximo de uma possível solução para o problema. Ao dobrar a folha em uma espécie de “S”, ela dividiu o ângulo em três partes praticamente iguais, o que possibilitou relacionar a explicação com a ideia abordada na Seção 4.1, sobre as divisões da folha em n partes. A seguir segue imagem do processo realizado por ela:



Figura 5.12: Aluna trissectando ângulo com método de dobra em "S".

Mesmo com essa tentativa bastante próxima, nenhum aluno conseguiu chegar à construção realizada na Figura 4.12. Assim sendo, receberam outra folha, como a da Figura 5.10, e acompanharam o passo a passo da construção com a professora, que explicou o ponto exato que possibilita a trisseção via origami. Os alunos ficaram fascinados com a possibilidade de resolver, por meio do origami, algo que não é possível com cálculos tradicionais, e alguns até pediram uma folha extra para apresentar a outras pessoas.

Na última parte da atividade, os alunos receberam folhas demarcadas, como na Figura 5.3, e foram instruídos a seguir os passos de acordo com a Atividade 5 do Roteiro de Análise. Nesse processo, alguns alunos tiveram dificuldade em compreender os passos listados no roteiro, sendo necessária uma orientação individual para que fosse possível entender o que estava sendo solicitado. Alguns se perderam na sequência da construção de dobras, por se tratar de muitos pontos muito próximos entre si. Ao finalizar os passos, foram orientados a responder à questão 6.

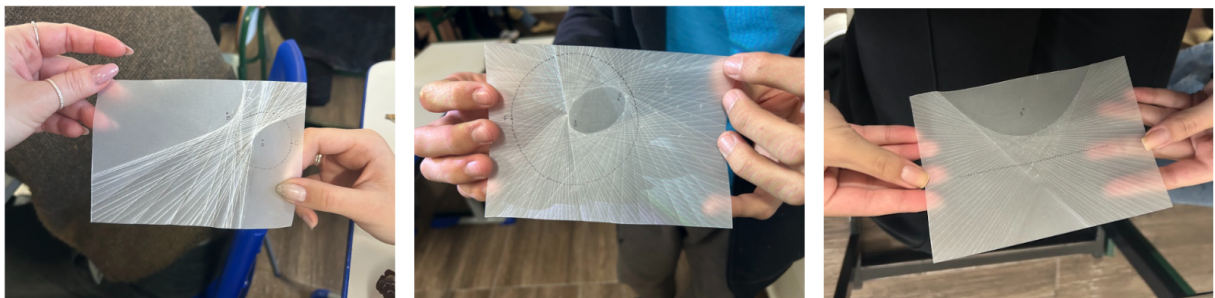


Figura 5.13: Cônicas via dobras realizadas pelos alunos.

A grande maioria dos alunos encontrou maior dificuldade em manipular o papel com vincos tão próximos e em grande quantidade, como solicitado. Curiosamente, muitos associaram as formas encontradas a elementos que compõem a galáxia, como buracos negros, óvnis, anéis de Saturno, quebra da quarta dimensão, matéria escura ou raios cósmicos.

Entretanto, apesar de conhecerem a parábola, os alunos não perceberam a formação dessa cônica ao realizar as dobras. Na verdade, focaram nos traços formados pelos vincos, associando-os a pirâmides, holofotes de shows ou teias de aranha.

Concluído o preenchimento do roteiro, os alunos foram formalmente apresentados às

cônicas. Com o uso de imagens, puderam perceber que as três figuras formadas pelas dobras guiadas partem das seções de um cone e que os vincos que surgem na folha são, na verdade, as retas tangentes às formas.

Foram apresentados também à composição das cônicas, como focos, vértices e alguns exemplos de onde encontrá-las, com o objetivo de introduzi-los ao conteúdo que será abordado no decorrer das aulas de Matemática, finalizando assim a atividade planejada.

Considerações finais: Caso surgisse a possibilidade de aplicar a dinâmica novamente, seriam feitas algumas alterações visando a melhoria da estrutura. A primeira modificação seria relacionada à elaboração do tsuru. Considera-se que, se houver fotos de todos os passos para serem mostradas aos participantes durante a construção, isso facilitaria a compreensão de algumas dobras mais complexas.

Seria recomendável reservar mais tempo do que o inicialmente previsto no planejamento, especialmente se os participantes apresentarem pouco ou nenhum conhecimento prévio sobre dobras e origamis, pois, nesses casos, é necessário conduzir a atividade com mais calma.

Se aplicada em escolas, especialmente no ensino médio, é importante considerar as dúvidas que podem surgir em relação ao ambiente acadêmico, ao se explicar que a atividade faz parte de um trabalho de mestrado. Também podem surgir questionamentos sobre as possibilidades de construção, por meio do origami, de figuras que não são construtíveis algebricamente.

A última parte da atividade, quando aplicada a alunos que ainda não estudaram os conceitos de cônicas, pode servir como introdução ao tema, contextualizando-o e motivando os estudantes a investigar as construções propostas.

Finalizada toda a aplicação, algumas alunas se dispuseram a montar um mural na escola com os materiais elaborados pela turma, para expor aos demais alunos da escola.

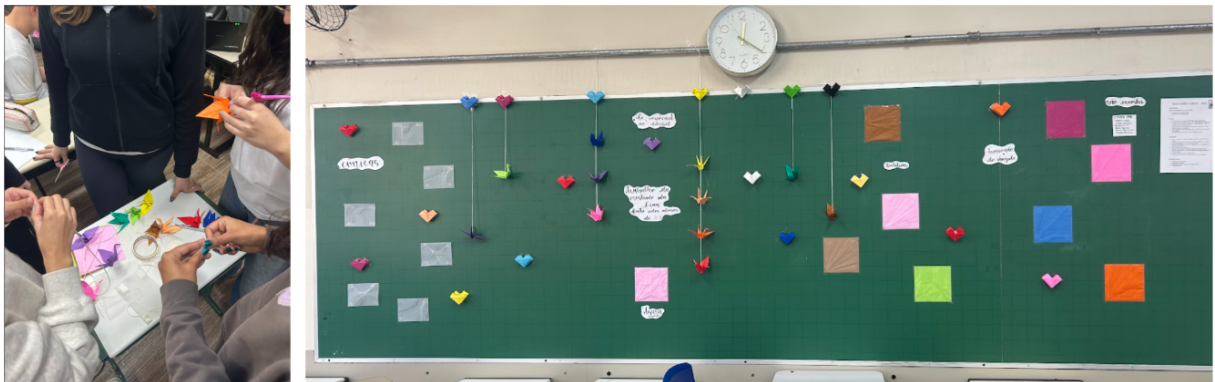


Figura 5.14: Alunas montando o mural das atividades na escola.

6 Conclusão

Ao longo dos estudos realizados neste trabalho, podemos perceber que a resolução dos *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega* estão condicionados à perspectiva cultural definida ao longo da construção da ciência matemática, predominando um escopo ocidental. Isso acabou por limitar as possibilidades de resolução, como percebemos na Teoria de Galois, realizando as construções por meio de régua não graduada e compasso - mecanismo consolidado e institucionalmente aceito. Entretanto, por meio da geometria dos origamis - e seu novo olhar e possibilidades -, somos capazes de desenvolver novas soluções para esses problemas que, há tanto tempo, intrigam muitos estudiosos.

O método proposto inicialmente por Abe, em [19], mostra-se mais potente que os métodos tradicionais. O que torna esse processo eficaz é a sobreposição simultânea de dois pontos distintos sobre duas retas, algo possível apenas por meio da dobradura. Além disso, a manipulação do papel dobrado nos permite desenhar objetos geométricos, como as parábolas, que vão além das construções habituais com régua e compasso.

A relevância do estudo desenvolvido neste trabalho está no fato de que, geralmente, vislumbramos essas construções apenas de maneira clássica durante a graduação. Ter a oportunidade de estudá-las com mais profundidade em um trabalho de pós-graduação permite diversas reflexões, como: existem outras formas de interpretar a matemática que ainda são desconhecidas? Essas interpretações, antes impensáveis, escondem um universo de construções, teorias e formas de enxergar e explicar o mundo? Herdamos dos matemáticos gregos não apenas métodos e ferramentas criados há séculos, mas também o fascínio por compreender e explicar a realidade. Mesmo com tantos anos nos separando, ainda somos movidos pelas mesmas curiosidades.

Além de muito conhecimento, a elaboração deste trabalho desenvolveu uma paixão pela arte dos origamis, até então desconhecida. O fascínio pelas maravilhas construídas com dobras nasce com os problemas clássicos, mas se fortalece na preparação da atividade prática, elaborada com o objetivo de envolver os alunos, resultando na aprendizagem e exploração de diversos tipos de origamis.

Sua utilização no ensino é fundamental para desenvolver a concentração, a criatividade, a coordenação motora e incentivar a autonomia do praticante. Os alunos aprendem a seguir instruções, sequenciar ações e lidar com desafios ao dobrar. Além de facilitar a aprendizagem da matemática — auxiliando na visualização espacial e no raciocínio lógico, e possibilitando a construção de conceitos como geometria, frações, simetria, proporção, área e volume — o origami ainda pode ser utilizado de forma interdisciplinar.

O desenvolvimento e interação dos envolvidos na atividade foi notória. Apesar das dificuldades relatadas no trabalho, o processo de elaboração e execução da atividade prática foi gratificante e satisfatório. A curiosidade apresentada pelo origami, a liberdade de exploração do material e os resultados obtidos com as dobras, tornaram os alunos

mais interessados no conhecimento. Com uma abordagem prática e lúdica, os envolvidos puderam ampliar suas compreensões antes de resolver cálculos sem sentido, motivando-os a decifrar o conhecimento e não só absorvê-lo obrigatoriamente. O mural elaborado na escola gerou grande repercussão com demais alunos, que não tiveram a oportunidade de participar da atividade, levantando questionamentos e movendo-os a se interessarem pela relação da matemática com um origami.

Por se tratar de uma arte economicamente acessível, que utiliza apenas papel, qualquer pessoa interessada pode aprender explorando as dobras sozinho, aprendendo com alguém que domina determinadas técnicas ou por meio de tutoriais disponíveis na internet (como foi o caso na elaboração deste trabalho).

O objetivo principal dessa obra, se moldou através da análise dos três problemas clássicos por meio do origami, a partir da leitura da obra de Hull [1], que ainda é desconhecido pelos meios acadêmicos predominantes no Brasil, por se tratar de uma publicação muito atual, datada de 2020. No livro, o autor apresenta uma variedade de estudos e interpretações da matemática com uso de origami. Entre eles, o que mais chama atenção e desperta o interesse da autora é o capítulo de construção de um corpo algébrico dos números origami. No entanto, por fugir do escopo deste trabalho, tornou-se uma promissora possibilidade de continuidade nos estudos da pós-graduação, em um futuro doutorado, no qual o foco seria o estudo das estruturas algébricas dos números origami.

Referências

- [1] HULL, T. C. *Origametry: mathematical methods in paper folding*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020.
- [2] ROW, T. S. *Geometric Exercises in Paper Folding*. Chicago: The Open Court Publishing Co., 1901.
- [3] VACCA, G. Della piegatura della carta applicata alla geometria. *Periodico di Matematiche*, v. 10, p. 43–50, 1930.
- [4] BELOCH, M. P. Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici. *Periodico di Matematiche*, v. 16, p. 104–108, 1936.
- [5] HATORI, K. *Origami Construction*. 2003. <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>. Acesso em: 23 ago. 2025.
- [6] FRALEIGH, J. B. *A first course in abstract algebra*. [S.l.]: Pearson Education India, 2003.
- [7] GeoGebra Team. *GeoGebra [recurso computacional]*. 2025. <https://www.geogebra.org>. Software de matemática dinâmica. Acesso em: 22 ago. 2025.
- [8] SILVA, J. D. da. *Resolução de equações polinomiais e a insolubilidade da quintica*. 117 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2023.
- [9] LANG, R. J. Origami and geometric constructions. Preprint. 2003. Disponível em: <<https://langorigami.com/article/origami-and-geometric-constructions/>>.
- [10] ASSIS, M. *Folding π* . 2025. <https://arxiv.org/abs/2403.09277>. Preprint, University of Melbourne, Department of Obstetrics, Gynaecology and Newborn Health.
- [11] EDUCAÇÃO, S. d. E. B. Ministério da. *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. 2006. Acessado em: 2025-07-08. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>.
- [12] BRASIL, M. da Educação e do D. *Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio (PCN+): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEF: [s.n.], 1997. Acessado em: 2025-07-08. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>.

-
- [13] BRASIL, M. da E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC: [s.n.], 2018. Acessado em: 2025-07-09. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>.
- [14] HULL, T. *Origami*. In: Selin, H. (eds) *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Springer, Dordrecht. 2016. Acessado em: 2025-07-26. Disponível em: <https://archive.org/embed/encyclopaediaofthehistoryofsciencetechnologyandmedicinenonwesternculturesvol1helaineselin_655T>.
- [15] DUREISSEIX, D. An overview of mechanisms and patterns with origami. *International Journal of Space Structures*, v. 27, p. 1–14, 2012.
- [16] MONTEIRO, L. C. N. *Origami: história de uma geometria axiomática*. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Matemática para o Ensino) — Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.
- [17] NOMA, M. Eemon mekke (i found a good one, in japanese). *Origami Tanteidan Newsletter*, v. 3, n. 14, p. 2, 1992.
- [18] BRITANNICA, E. *Trisecting the Angle: The Quadratrix of Hippias*. 2025. Acessado em: 2025-07-17. Disponível em: <<https://www.britannica.com/topic/Trisecting-the-Angle-The-Quadratrix-of-Hippias-1688521>>.
- [19] HUSIMI, K. Origami no kagaku (the science of origami, in japanese). *Saiensu (Japanese edition of Scientific American)*, p. 8, out. 1980. Appendix in separate volume.
- [20] JUSTIN, J. Angle trisection. *British Origami*, n. 107, p. 14–15, 1984.
- [21] HUZITA, H.; SCIMEMI, B. The algebra of paper-folding (origami). In: HUZITA, H. (Ed.). *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. Padova, Italy: Dipartimento di Fisica dell'Università di Padova, 1989. p. 205–222.
- [22] LILL, E. Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue. *Nouvelles Annales de Mathématiques, Series 2*, v. 6, p. 359–362, 1867.
- [23] ALPERIN, R. C. A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics*, v. 6, p. 119–133, 2000.
- [24] D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus, 2005.
- [25] PAULO, G. do Estado de S. *Ensino Médio Paulista*. 2025. Acessado em: 2025-07-09. Disponível em: <<https://ensinomediopaulista.educacao.sp.gov.br/>>.
- [26] PUPPIN, M. *CÔNICAS: uma prática escolar*. 113 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019.